

*Comparación del Filtro de Kalman, el Algoritmo
Esperanza-Maximización (EM) y el Filtro de Información
Para la Estimación de Modelos en Representación
Espacio-Estado*

RICARDO JOSÉ PARDO RUIZ
ECONOMISTA, MSC(C)
CÓDIGO: 832515



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
BOGOTÁ, D.C.
OCTUBRE DE 2015

*Comparación del Filtro de Kalman, el Algoritmo
Esperanza-Maximización (EM) y el Filtro de Información
Para la Estimación de Modelos en Representación
Espacio-Estado*

RICARDO JOSÉ PARDO RUIZ
ECONOMISTA, MSc(C)
CÓDIGO: 832515

TRABAJO DE TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE
MAGISTER EN CIENCIAS - ESTADÍSTICA

DIRECTOR
JUAN MANUEL JULIO ROMÁN



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
BOGOTÁ, D.C.
OCTUBRE DE 2015

Título en español

Comparación del Filtro de Kalman, el Algoritmo Esperanza-Maximización (EM) y el Filtro de Información Para la Estimación de Modelos en Representación Espacio-Estado.

Title in English

A comparison between Kalman filter, EM algorithm and Information filter in the estimation of models in state space form.

Resumen: Se realiza una comparación entre las metodologías de filtro de Kalman y filtro de información en la inferencia de modelos en representación espacio estado (REE), donde la estimación se lleva a cabo bajo máxima verosimilitud, algoritmo EM y estimación Bayesiana. Mediante simulación extensiva de tres modelos univariados estructurales, se encontró que la estimación por máxima verosimilitud es la de mejor resultado en la mayoría de escenarios, la filtración de Kalman ofrece en promedio valores más cercanos al verdadero valor de los elementos del vector de estado y la convergencia a un estado estable ocurre con mayor prontitud, cuando se aplica el filtro de Kalman a estimaciones Bayesianas. Los pronósticos, por otro lado, son “más acertados“ cuando se realizan con el filtro de información. Una aplicación a la estimación de la elasticidad de la tasa de interés para las bases $M1$ y $M2$ se encuentra que el filtro de Kalman y de información ofrecen resultados similares bajo las diferentes estimaciones y la velocidad de $M1$ es más elástica que la de $M2$ en todos los escenarios.

Abstract: In this paper we compare two methodologies: Kalman filter and information filter in the inference of state space models, where the estimation is obtained via maximum likelihood, expectation-maximization algorithm and bayesian estimation. Through extensive simulation in three univariate structural models have been found that ML estimation showed the best result in most scenarios, Kalman filter offers closer values to the real state variables and the convergence to a steady state is more quicker when bayesian's results are applied to the Kalman filter. On the other hand, forecast are more accurate when are performed with the information filter. By estimating the interest rate elasticity for $M1$ and $M2$, it has been found that Kalman and information filter give very similar output and $M1$ velocity is more elastic than $M2$ in all scenarios.

Palabras clave: Representación espacio estado, Filtro de Kalman, Filtro de Información, Algoritmo Esperanza Maximización, Velocidad del dinero

Keywords: State space form, Kalman's Filter, Information Filter, EM algorithm, Money's velocity

Índice general

Índice general	II
Introducción	IV
1. Objetivos	1
1.1. Objetivo General	1
1.2. Objetivos Específicos	1
2. Marco Referencial y Teórico	2
2.1. La Representación Espacio Estado	2
2.1.1. Propiedades de la REE Homogénea	3
2.2. El Filtro de Kalman	4
2.2.1. Filtros bajo REE Homogénea	5
2.3. El Filtro de Información	5
2.4. Estimación de máxima verosimilitud	6
2.5. Pronóstico y Suavizamiento	7
2.6. Algoritmo Esperanza-Maximización (EM)	8
2.7. Estimación Bayesiana: Métodos MCMC	8
2.7.1. A priori asignadas a los parámetros	9
2.8. Estado del Arte	11
3. Metodología	12
3.1. Aspectos generales	12
3.2. Modelos empleados	12
3.2.1. Modelo de caminata aleatoria o nivel local modificado	12
3.2.2. Modelo de tendencia lineal local modificado	13
3.2.3. Modelo de tendencia mas ciclo modificado	13

3.3. Simulaciones	14
3.4. Evaluación de resultados - mejor inferencia	15
4. Resultados	16
4.1. Resultados Modelo de nivel local	16
4.2. Resultados Modelo de tendencia lineal local	34
4.3. Resultados modelo de tendencia mas ciclo	39
5. Aplicación a datos reales	46
Conclusiones	54
Bibliografía	56
A. Derivación del filtro de Kalman	1
B. Lema de Inversión de Matrices	4
C. Función de Verosimilitud	5
C.1. Función de verosimilitud	5
C.2. Función de verosimilitud con ecuación de estado observada	6
D. Pronóstico y Suavizamiento	7
E. A priori y posterior de los parámetros	9
E.1. A priori y posterior para el modelo de nivel local	10
E.2. A priori y posterior para el modelo de tendencia lineal local	10
E.3. A priori y posterior para el modelo de tendencia mas ciclo	11
F. Programación Empleada	12
F.1. Filtro de Kalman	12
F.2. Filtro de Información	15
F.3. Pronósticos	17
F.4. Suavizador de Intervalo Fijo	18
F.5. Algoritmo EM	20
F.6. Métodos Bayesianos	21
F.6.1. Filtro de Kalman con posterior de los parámetros	21
F.6.2. Algoritmo Metropolis - Hastings: Cadena de Markov de caminata aleatoria	24

Introducción

En el campo de series de tiempo muchos modelos pueden escribirse en la Representación Espacio Estado (REE). Bajo esta forma se pueden aplicar poderosos algoritmos que garantizan estimaciones y pronósticos adecuados. Para realizar esto bajo la REE es necesario filtrar, y el método de filtración puede inducir errores numéricos o bien ser ineficiente en el sentido de tiempo, además de generarse errores en la estimación. La literatura contempla entre tantos métodos, dos, que son confiables y poderosos, el filtro de Kalman (1960) y el filtro de información (Anderson & Moore 1979). Por otro lado hay enfoques alternativos para lidiar con el problema de la inferencia en REE como el algoritmo esperanza maximización (Borman 2004; McLachlan & Krishnan 2008)

El filtro de Kalman y el de información surgieron en la década de los 60, época en la que implementar estos en los sistemas era bastante complicado. La mayoría de los estudios se enfocan en comparaciones computacionales (Kaminski et.al 1971; Bierman 1973). Sin embargo, no se ha profundizado en la comparación e implicación estadística (todo el proceso de inferencia) y práctica de trabajar con uno u otro filtro. En este trabajo se comparan las metodologías de filtro de Kalman y filtro de información para la estimación (llevada a cabo bajo máxima verosimilitud, algoritmo EM y estimación bayesiana), filtración y pronósticos de modelos en REE. Así, es posible encontrar diferencias en la aplicación de los procedimientos mencionados. Determinar bajo que casos o condiciones es mejor utilizar cuál filtro en REE y qué método de estimación brinda mejores resultados.

La motivación de este trabajo es encontrar desde el punto de vista estadístico aquel procedimiento que realice “mejor inferencia” (Ver sección 3.4). Como se mencionó, no hay una literatura abundante sobre este tema, el debate se ha centrado en las ventajas computacionales y de cálculo de una forma de filtración sobre otra. De hecho, en décadas pasadas, el criterio para escoger entre algún filtro era mirar cual se podía programar más fácilmente ya que las herramientas computacionales eran limitadas (Kaminski et.al 1971; Bierman 1973). Hoy en día, con herramientas más avanzadas es posible encontrar diferencias de mayor relevancia que la forma computacional de uno y otro. El presente trabajo inicia presentando los objetivos, el marco referencial, teórico y la metodología desarrollada. Posteriormente se presentan los resultados obtenidos mediante simulaciones y la aplicación a un conjunto de datos reales referentes a la velocidad del dinero de las bases monetarias $M1$ y $M2$.

CAPÍTULO 1

Objetivos

1.1. Objetivo General

Comparar las metodologías de filtro de Kalman y filtro de información en términos de la mejor estimación (obtenida mediante MV, algoritmo EM y estimación bayesiana), filtración y pronósticos, de modelos en representación espacio estado (REE).

1.2. Objetivos Específicos

- Implementar computacionalmente la inferencia de modelos en REE, por medio del filtro de Kalman y el filtro de información, para un conjunto de datos simulados.
- Comparar los resultados de la estimación, filtración y pronósticos bajo las diferentes metodologías.
- Aplicar el procedimiento a un conjunto de datos reales.

Marco Referencial y Teórico

2.1. La Representación Espacio Estado

La representación espacio estado (REE) aplica a series de tiempo multivariadas \mathbf{Y}_t que contienen N elementos. Estas variables observadas están relacionadas con un vector $m \times 1$, $\boldsymbol{\alpha}_t$ que se conoce como el vector de estados, a través de una ecuación de observación. Harvey (1989, pp.100-101)

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \mathbf{d}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.1)$$

Donde \mathbf{Z}_t es una matriz de constantes de $N \times m$, \mathbf{d}_t es un vector $N \times 1$ que puede contener variables que afecten los componentes determinísticos de \mathbf{Y}_t y $\boldsymbol{\epsilon}_t$ es un vector de $N \times 1$ de innovaciones serialmente no correlacionadas con media $\mathbf{0}$ y matriz de covarianzas \mathbf{H}_t .

En general los elementos de $\boldsymbol{\alpha}_t$ no son observables. De cualquier manera, se sabe que son generados por un proceso de Markov de primer orden:

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_{t-1} + \mathbf{c}_t + \mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.2)$$

Donde \mathbf{T}_t es una matriz $m \times m$, \mathbf{c}_t es un vector $m \times 1$ que como \mathbf{d}_t puede contener variables que afecten los componentes determinísticos de la serie, \mathbf{R}_t es una matriz $m \times g$ y $\boldsymbol{\eta}_t$ es un vector $g \times 1$ de innovaciones serialmente no correlacionadas con media $\mathbf{0}$ y matriz de covarianzas \mathbf{Q}_t . Se conoce (2.2) como la ecuación de estado.

Las matrices \mathbf{Z}_t , \mathbf{d}_t y \mathbf{H}_t en la ecuación de medición (2.1) y las matrices \mathbf{T}_t , \mathbf{c}_t , \mathbf{R}_t y \mathbf{Q}_t en la ecuación de estado (2.2) son conocidas como matrices del sistema. A no ser que se señale lo contrario son no estocásticas y pueden variar en el tiempo aunque de forma predeterminada. Si las matrices del sistema no cambian en el tiempo se dice que la REE es homogénea o tiempo-invariante. “Desde el punto de vista técnico, el objetivo de la REE es filtrar $\boldsymbol{\alpha}_t$ de tal manera que contenga toda la información relevante del sistema al tiempo t , y lo haga, conteniendo el menor número de elementos posibles” (Harvey 1989 pp.101-102).

La especificación de la REE se completa con los siguientes supuestos:

a. El vector de estado inicial $\boldsymbol{\alpha}_0 \sim N_m(\mathbf{a}_0, \mathbf{P}_0)$

b. Las innovaciones $\boldsymbol{\epsilon}_t$ y $\boldsymbol{\eta}_t$ no están correlacionadas entre sí ni con el estado inicial $\boldsymbol{\alpha}_0$, para todos los periodos de tiempo:

$$E(\boldsymbol{\epsilon}_t \boldsymbol{\eta}_s^\top) = 0 \quad \forall \quad s, t = 1, \dots, T \quad (2.3)$$

$$E(\boldsymbol{\epsilon}_t \boldsymbol{\alpha}_0^\top) = 0, \quad E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{\alpha}_0^\top) = 0 \quad \forall \quad t = 1, \dots, T \quad (2.4)$$

c. Las innovaciones son gaussianas lo que implica normalidad. Por el supuesto **b.** se observa que las innovaciones y el vector de estados al momento inicial, son independientes.

2.1.1. Propiedades de la REE Homogénea

Las principales propiedades de la REE homogénea suelen ser presentados en la literatura mediante un modelo de control en ingeniería (Anderson & Moore 1979, Harvey 1989; Jazwinski 2004) y posteriormente se derivan las propiedades estadísticas para la REE usual. Este modelo de control, no tiene término del error en la ecuación de medición mientras que el término del error en la ecuación de transición ha sido reemplazado por un vector de variables de control:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_t &= \mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha}_t \\ \boldsymbol{\alpha}_t &= \mathbf{T}\boldsymbol{\alpha}_{t-1} + \mathbf{G}\mathbf{u}_t \end{aligned} \quad (2.5)$$

\mathbf{u}_t es un vector $n \times 1$ de variables de control y \mathbf{G} es una matriz de $m \times n$ que es invariante en el tiempo. “El sistema en (2.5) es “estable” si para cualquier valor del estado inicial $\boldsymbol{\alpha}_0$, el vector de estados converge a una solución de equilibrio $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ cuando \mathbf{u}_t es constante. La condición necesaria y suficiente para la estabilidad es que los valores propios de la matriz \mathbf{T} sean menores a 1 en valor absoluto” (Harvey 1989 p.114). Se presentan a continuación algunas propiedades relacionadas a la convergencia del sistema (2.5).

Controlabilidad: La controlabilidad se define como el hecho de que el vector de variables de control \mathbf{u}_t pueda ser seleccionado de tal forma que sea posible alcanzar un valor particular deseado (promedio) en el vector de estados. La ecuación de transición en (2.5) es la información relevante hasta el tiempo t , si con esa información disponible se desea que en el periodo $t + 1$ el vector de estados tome un valor particular, dígame, $\boldsymbol{\alpha}^*$. Un sistema es controlable si el *rango* $[\mathbf{G}, \mathbf{T}\mathbf{G}, \dots, \mathbf{T}^{m-1}\mathbf{G}] = m$.

Observabilidad: El vector de estados es observable si puede determinarse exactamente dadas las observaciones $\mathbf{Y}_t, \dots, \mathbf{Y}_{t+m-1}$. El sistema en (2.5) es observable si el *rango* $[\mathbf{Z}^\top, \mathbf{T}^\top\mathbf{Z}^\top, \dots, (\mathbf{T}^\top)^{m-1}\mathbf{Z}^\top] = m$ (Harvey 1989, p.115).

La estabilizabilidad y la detectabilidad son propiedades estrechamente relacionadas a las mencionadas anteriormente, “la diferencia es que las condiciones son un poco más débiles y las anteriores implican a las mencionadas a continuación” (Harvey 1989, p.116).

Estabilizabilidad: El sistema en la ecuación (2.5) es estabilizable si existe una matriz \mathbf{S} de $m \times n$ tal que $|\lambda_i(\mathbf{T} + \mathbf{G}\mathbf{S}^\top)| < 1$ para $i = 1, \dots, m$, donde λ_i denota los valores propios.

Detectabilidad: El sistema es detectable si existe una matriz \mathbf{D} de $m \times N$ tal que $|\lambda_i(\mathbf{T} - \mathbf{D}\mathbf{Z})| < 1$ para $i = 1, \dots, m$.

Estas propiedades aplican en términos del modelo presentado por la ecuación (2.5), sin embargo podrían aplicar a una REE de la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_t &= \mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha}_t + \mathbf{d}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t, & \text{Var}(\boldsymbol{\epsilon}_t) &= \mathbf{H} \\ \boldsymbol{\alpha}_t &= \mathbf{T}\boldsymbol{\alpha}_{t-1} + \mathbf{c}_t + \mathbf{R}\boldsymbol{\eta}_t, & \text{Var}(\boldsymbol{\eta}_t) &= \mathbf{Q}\end{aligned}$$

Para esto es necesario un ajuste en la ecuación de transición, consiste en hacer que la matriz de covarianza del error de estimación sea una identidad. Sea \mathbf{R}^* una matriz de $n \times n$ tal que $(\mathbf{R}^*)(\mathbf{R}^*)^\top = \mathbf{Q}$. Así, el sistema puede reescribirse como:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_t &= \mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha}_t + \mathbf{d}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t \\ \boldsymbol{\alpha}_t &= \mathbf{T}\boldsymbol{\alpha}_{t-1} + \mathbf{c}_t + \mathbf{G}\boldsymbol{\eta}_t^*\end{aligned}$$

Donde $\mathbf{G} = (\mathbf{R}^*)(\mathbf{R}^*)^\top$ y $\boldsymbol{\eta}_t^*$ es el término del error redefinido con media $\mathbf{0}$ y matriz de covarianza identidad. Las matrices \mathbf{T} y \mathbf{G} junto con la matriz \mathbf{Z} pueden emplearse para determinar las propiedades de la REE.

El proceso estocástico $\boldsymbol{\alpha}_t$ es estacionario si se cumple que la REE es estable y \mathbf{c}_t es tiempo-invariante. Cuando este es el caso, el vector de estados tiene media $(\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}$ y matriz de covarianza \mathbf{P} .

2.2. El Filtro de Kalman

El filtro de Kalman es un procedimiento recursivo para calcular el estimador óptimo del vector de estados al tiempo t , con base en la información disponible al tiempo t . La derivación del filtro de Kalman reposa bajo el supuesto que las innovaciones y el vector de estado inicial están normalmente distribuidos. Esta derivación se lleva a cabo en el apéndice A. Sea \mathbf{a}_{t-1} el estimador óptimo de $\boldsymbol{\alpha}_{t-1}$ basada en las observaciones hasta e incluyendo a \mathbf{Y}_{t-1} y sea \mathbf{P}_{t-1} la matriz de error cuadrado medio de ese estimador.

Dados \mathbf{a}_{t-1} y \mathbf{P}_{t-1} , el estimador óptimo de $\boldsymbol{\alpha}_t$ está dado por

$$\mathbf{a}_{t|t-1} = \mathbf{T}_t\mathbf{a}_{t-1} + \mathbf{c}_t \quad (2.6)$$

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{T}_t\mathbf{P}_{t-1}\mathbf{T}_t^\top + \mathbf{R}_t\mathbf{Q}_t\mathbf{R}_t^\top, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.7)$$

Estas dos ecuaciones (2.6) y (2.7) se conocen como las ecuaciones de predicción.

Una vez que la nueva información \mathbf{Y}_t , se vuelve disponible, el estimador de $\boldsymbol{\alpha}_t$, $\mathbf{a}_{t|t-1}$ puede actualizarse, las ecuaciones de actualización son:

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{a}_{t|t-1} + \mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{Z}_t^\top\mathbf{F}_t^{-1}(\mathbf{Y}_t - \mathbf{Z}_t\mathbf{a}_{t|t-1} - \mathbf{d}_t) \quad (2.8)$$

y

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{P}_{t|t-1} - \mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{Z}_t^\top\mathbf{F}_t^{-1}\mathbf{Z}_t\mathbf{P}_{t|t-1} \quad (2.9)$$

Donde $\mathbf{F}_t = \mathbf{Z}_t\mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{Z}_t^\top + \mathbf{H}_t$, $t = 1, \dots, T$.

Los valores iniciales para el filtro de Kalman pueden especificarse en términos de \mathbf{a}_0 y \mathbf{P}_0 ó $\mathbf{a}_{1|0}$ y $\mathbf{P}_{1|0}$. Otra forma de escribir el filtro es “tomando un sólo conjunto de recursiones

que vaya directamente de $\mathbf{a}_{t|t-1}$ a \mathbf{a}_t , esto es

$$\mathbf{a}_{t+1|t} = (\mathbf{T}_{t+1} - \mathbf{K}_t \mathbf{Z}_t) \mathbf{a}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t \mathbf{y}_t + (\mathbf{c}_{t+1} - \mathbf{K}_t \mathbf{d}_t) \quad (2.10)$$

Donde la matriz de ganancia \mathbf{K}_t , está dada por

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{T}_{t+1} \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{Z}_t^\top \mathbf{F}_t^{-1}, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.11)$$

La recursión para la matriz de error cuadrado medio está dada por

$$\mathbf{P}_{t+1|t} = \mathbf{T}_{t+1} \mathbf{P}_t \mathbf{T}_{t+1}^\top + \mathbf{R}_{t+1} \mathbf{Q}_{t+1} \mathbf{R}_{t+1}^\top, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.12)$$

Esta se conoce como la ecuación de Riccati” (Harvey 1989, p.106)

2.2.1. Filtros bajo REE Homogénea

“El filtro de Kalman se dice que está en estado estacionario (*steady state*) si la matriz de error cuadrado medio es tiempo invariante, esto es $\mathbf{P}_{t+1|t} = \bar{\mathbf{P}}$. Cuando este es el caso la recursión para la matriz de error cuadrado medio es redundante y la recursión para el vector de estados dependerá exclusivamente del valor actual de la serie \mathbf{y}_t .

Resultado 1. Si la REE es estable y la matriz de covarianza del error de estimación inicial $\mathbf{P}_{1|0}$ es positiva definida entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{t+1|t} = \bar{\mathbf{P}}$, $\forall t$, con $\bar{\mathbf{P}}$ independiente de $\mathbf{P}_{1|0}$. De acuerdo a Harvey (1989, p.119) La convergencia a $\bar{\mathbf{P}}$ es exponencialmente rápida si esta es la única matriz positiva definida que satisface la ecuación algebraica de Riccati.

Resultado 2. Si el sistema es detectable y estabilizable, pero no necesariamente estable y sí $\mathbf{P}_{1|0}$ es positiva definida, el resultado anterior se mantiene.

Resultado 3. Si el sistema es observable y si $\mathbf{P}_{1|0} - \bar{\mathbf{P}}$ es positiva definida, el **Resultado 1** se mantiene.

Si la matriz de covarianza del error de estimación $\mathbf{P}_{t+1|t}$ tiene una solución de estado estacionario entonces \mathbf{F}_t , la matriz de error cuadrado medio para el proceso observado \mathbf{Y}_t , también converge a un estado estacionario, esto es $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{F}_t = \Sigma = \mathbf{Z} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{Z}^\top + \mathbf{H}$, $\forall t$. ” (Harvey 1989, p.119)

2.3. El Filtro de Información

El filtro de Kalman requiere la inversión de la matriz de error cuadrado medio para el proceso observado \mathbf{Y}_t , una matriz de $N \times N$ denotada como \mathbf{F}_t . Esta matriz podría no tener inversa y podría suponerse una inversa generalizada para el cálculo del filtro de Kalman, así en situaciones en las que el número de series N es mucho mayor que la dimensión del estado m el filtro de Kalman podría presentar problemas numéricos a la hora de cálculo debido a la inversión de esa matriz. Para evitar esta situación el filtro de información consiste en expresar las matrices de error cuadrado medio usuales $\mathbf{P}_{t|t-1}$ y \mathbf{P}_t en términos de sus inversas $\mathbf{P}_{t|t-1}^{-1}$ y \mathbf{P}_t^{-1} para así producir nuevas ecuaciones del filtro, ecuaciones que no requieren la inversión de la matriz \mathbf{F}_t .

Anderson & Moore (1979, pp.138-141) derivan el filtro de información en siete ecuaciones como sigue. Bajo la REE de las ecuaciones (2.1) y (2.2) se aplica el lema de inversión de

matrices (ver apéndice B) a la ecuación de actualización (2.9) para obtener

$$\mathbf{P}_t^{-1} = \mathbf{P}_{t-1}^{-1} + \mathbf{Z}_t^T \mathbf{H}_t^{-1} \mathbf{Z}_t \quad (2.13)$$

Es posible obtener la inversa de la matriz $\mathbf{P}_{t+1|t}$, es decir la inversa de la ecuación de Riccati (2.12). denotando \mathbf{A}_t como:

$$\mathbf{A}_t = [\mathbf{T}_t^{-1}]^T \mathbf{P}_t^{-1} \mathbf{T}_t^{-1} \quad (2.14)$$

Y aplicando el lema de inversión para obtener:

$$\mathbf{P}_{t+1|t}^{-1} = [\mathbf{I} - \mathbf{B}_t \mathbf{R}_t^T] \mathbf{A}_t \quad (2.15)$$

Donde \mathbf{I} es la matriz identidad y \mathbf{B}_t se define como:

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{A}_t \mathbf{R}_t [\mathbf{R}_t^T \mathbf{A}_t \mathbf{R}_t + \mathbf{Q}_t^{-1}]^{-1} \quad (2.16)$$

Las ecuaciones de la (2.13) a la (2.16) proveen las recursiones para $\mathbf{P}_{t|t-1}^{-1}$ y \mathbf{P}_t^{-1} . Algo similar a las ecuaciones de predicción y actualización del filtro de Kalman.

El filtro de información brinda las recursiones para el vector $\tilde{\mathbf{a}}_t = \mathbf{P}_t^{-1} \mathbf{a}_t$. Es posible obtener las estimaciones del vector de estados \mathbf{a}_t mediante la siguiente expresión:

$$\tilde{\mathbf{a}}_{t-1} = \mathbf{P}_{t-1}^{-1} \mathbf{a}_{t-1} \quad , \quad \tilde{\mathbf{a}}_t = \mathbf{P}_t^{-1} \mathbf{a}_t \quad (2.17)$$

La aplicación de (2.13) y (2.14) a (2.17) produce:

$$\tilde{\mathbf{a}}_{t+1|t} = [\mathbf{I} - \mathbf{B}_t \mathbf{R}_t^T] (\mathbf{T}_t^{-1})^T \tilde{\mathbf{a}}_t \quad (2.18)$$

La ecuación de actualización siguiendo el mismo sentido que con el filtro de Kalman, es decir cuando nueva información se hace disponible, puede expresarse como:

$$\tilde{\mathbf{a}}_t = \tilde{\mathbf{a}}_{t-1} + \mathbf{P}_{t-1} \mathbf{Z}_t^T \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{Y}_t - \mathbf{Z}_t \tilde{\mathbf{a}}_{t|t-1})$$

Y esto lleva a:

$$\tilde{\mathbf{a}}_t = \tilde{\mathbf{a}}_{t-1} + \mathbf{Z}_t^T \mathbf{H}_t^{-1} \mathbf{Y}_t \quad (2.19)$$

“Las ecuaciones (2.13) a (2.19) constituyen el filtro de información. Estas son algebraicamente equivalentes y la escogencia entre una y otra se debe a la simplicidad computacional, ya que bajo el filtro de información se evita la inversión de la matriz \mathbf{F}_t , y las propiedades de propagación de errores. A pesar de eso tiene como desventajas que se requiere invertir las matrices \mathbf{T}_t , \mathbf{H}_t y \mathbf{Q}_t . Adicionalmente bajo las ecuaciones del filtro de información permanece el problema que \mathbf{P}_t numéricamente puede no ser simétrica e incluso puede ser definida negativa“ Anderson & Moore (1979, p.140)

2.4. Estimación de máxima verosimilitud

Ya se había mencionado que condicionado en \mathbf{Y}_{t-1} , \mathbf{a}_t se distribuye normal con media $\mathbf{a}_{t|t-1}$ y matriz de covarianzas $\mathbf{P}_{t|t-1}$. En el apéndice A se muestra que la distribución condicional de \mathbf{Y}_t es normal con media:

$$E(\mathbf{Y}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = \mathbf{Z}_t \mathbf{a}_{t|t-1} + \mathbf{d}_t$$

Y matriz de covarianzas:

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{Z}_t \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{Z}_t^\top + \mathbf{H}_t$$

Sea $\boldsymbol{\theta}$ el vector de hiperparámetros, para la REE de las ecuaciones (2.1) y (2.2), la función de verosimilitud puede escribirse como (ver apéndice C):

$$\log L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}_{1:T}) = -\frac{NT}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log |\mathbf{F}_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{v}_t^\top \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t \quad (2.20)$$

Donde $\mathbf{v}_t = \mathbf{Y}_t - E(\mathbf{Y}_t | \mathbf{Y}_{t-1})$.

“Como la media condicional $E(\mathbf{Y}_t | \mathbf{Y}_{t-1})$ es también el estimador mínimo cuadrado medio de \mathbf{Y}_t , el vector \mathbf{v}_t de $N \times 1$ puede interpretarse como un vector de predicción de errores. Por consiguiente (2.20) se conoce como la forma de descomposición del error de predicción de la verosimilitud. Una vez se ha encontrado un algoritmo para calcular la función de verosimilitud, debe maximizarse con respecto a los parámetros desconocidos $\boldsymbol{\theta}$ ” (Harvey 1989, p.126).

2.5. Pronóstico y Suavizamiento

El pronóstico l pasos adelante para el estado y la serie son (ver apéndice D):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{T+l|T} &= \left[\prod_{j=1}^l \mathbf{T}_{T+j} \right] \mathbf{a}_T + \sum_{j=1}^{l-1} \left[\prod_{i=j+1}^l \mathbf{T}_{T+i} \right] \mathbf{c}_{T+j} + \mathbf{c}_{T+l} \\ \tilde{\mathbf{y}}_{T+l|T} &= \mathbf{Z}_{T+l} \mathbf{a}_{T+l|T} + \mathbf{d}_{T+l}, \quad l = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.21)$$

La matriz de error cuadrado medio es:

$$\mathbf{MSE}(\tilde{\mathbf{y}}_{T+l|T}) = \mathbf{Z}_{T+l} \mathbf{P}_{T+l|T} \mathbf{Z}_{T+l}^\top + \mathbf{H}_{T+l}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

Donde $\mathbf{P}_{T+l|T}$ es la matriz de error cuadrado medio del estado pronosticado l pasos adelante, esta es para el caso de modelos tiempo invariantes:

$$\mathbf{P}_{T+l|T} = \mathbf{T}^l \mathbf{P}_T \mathbf{T}^{l'} + \sum_{j=0}^{l-1} \mathbf{T}^j \mathbf{R} \mathbf{Q} \mathbf{R}^\top \mathbf{T}^{j'}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

El objetivo del suavizamiento es tener en cuenta la información que se hace disponible después del tiempo t , la media del vector de estados condicionada en toda la muestra es $E(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{Y}_T) = \mathbf{a}_{t|T}$ también conocido como el estimador suavizado y su correspondiente matriz de covarianza del error de estimación basada en toda la muestra es $\mathbf{P}_{t|T} = E[(\boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{a}_{t|T} | \mathbf{Y}_T)(\boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{a}_{t|T} | \mathbf{Y}_T)^\top]$.

Harvey (1989, p.150) menciona tres tipos de suavizadores: El de punto fijo, el de intervalo fijo y el de rezago fijo. En este trabajo se empleó el suavizador de intervalo fijo, el cual calcula estimaciones suavizadas del vector de estado para algún rezago fijo, esto es $\mathbf{a}_{t-j|t}$ para $j = 1, \dots, M$ donde M es algún rezago máximo. Harvey (1989, pp.153-155) presenta las ecuaciones de este suavizador señalando que consiste en un conjunto de recursiones que empiezan en las cantidades finales \mathbf{a}_T y \mathbf{P}_T brindadas por el filtro de Kalman y trabajan

hacia atrás. “Las ecuaciones son:

$$\mathbf{a}_{t|T} = \mathbf{a}_t + \mathbf{P}_t^* (\mathbf{a}_{t+1|T} - \mathbf{T}_{t+1} \mathbf{a}_t) \quad (2.24)$$

y

$$\mathbf{P}_{t|T} = \mathbf{P}_t + \mathbf{P}_t^* (\mathbf{P}_{t+1|T} - \mathbf{P}_{t+1|t}) \mathbf{P}_t^{*\top} \quad (2.25)$$

donde

$$\mathbf{P}_t^* = \mathbf{P}_t \mathbf{T}_{t+1}^\top \mathbf{P}_{t+1|t}^{-1}, \quad t = T-1, \dots, 1 \quad (2.26)$$

Con $\mathbf{a}_{T|T} = \mathbf{a}_T$ y $\mathbf{P}_{T|T} = \mathbf{P}_T$. El algoritmo requiere que \mathbf{a}_t y \mathbf{P}_t sean guardados para cada t de tal forma que puedan combinarse con $\mathbf{a}_{t+1|T}$ y $\mathbf{P}_{t+1|T}$ ” Harvey (1989, pp.153-155)

2.6. Algoritmo Esperanza-Maximización (EM)

“El algoritmo EM es un procedimiento iterativo eficiente para calcular la estimación de máxima verosimilitud en la presencia de datos faltantes o no observados. En el primer paso, el E - step, los datos faltantes son estimados dados los datos actuales y la estimación actual de los parámetros del modelo. En el segundo paso, el M - step, la función de verosimilitud se maximiza bajo el supuesto que se conocen los datos faltantes” (Borman 2004, p.4).

Considérese la REE de las ecuaciones (2.1) y (2.2), si los elementos en el vector de estado fueran observados para $t = 0, \dots, T$ la función de log-verosimilitud para los \mathbf{y}_t y los $\boldsymbol{\alpha}_t$ sería (ver apéndice C):

$$\begin{aligned} \log L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}, \boldsymbol{\alpha}) &= -NT \log(2\pi) - \frac{T}{2} \sum_{i=1}^T \log |\mathbf{H}_t| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T (\mathbf{Y}_t - \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{d}_t)^\top \mathbf{H}_t^{-1} (\mathbf{Y}_t - \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{d}_t) - \\ &\quad \frac{T}{2} \sum_{i=1}^T \log |\mathbf{Q}_t| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T (\boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_{t-1} - \mathbf{c}_t)^\top \mathbf{Q}_t^{-1} (\boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_{t-1} - \mathbf{c}_t) - \\ &\quad \frac{N}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |\mathbf{P}_0| - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\alpha}_0 - \mathbf{a}_0)^\top \mathbf{P}_0^{-1} (\boldsymbol{\alpha}_0 - \mathbf{a}_0) \end{aligned} \quad (2.27)$$

El algoritmo EM procede iterativamente evaluando:

$$E \left[\frac{\partial \log L}{\partial \boldsymbol{\theta}} \middle| \mathbf{Y}_T \right] \quad (2.28)$$

La expresión se iguala a un vector de ceros y se soluciona para producir un nuevo conjunto de estimaciones de $\boldsymbol{\theta}$. Este algoritmo garantiza la convergencia y el hecho que la función de verosimilitud sea creciente para cada iteración.

2.7. Estimación Bayesiana: Métodos MCMC

Adicionalmente para la estimación de parámetros se emplearon métodos de estimación Bayesiana, específicamente el algoritmo de Metropolis-Hastings. “El problema en cuestión puede expresarse de la siguiente manera, suponga que se desea muestrear de la distribución posterior $h(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y})$, donde $\boldsymbol{\theta}$ es un vector de parámetros. Suponga también, que sea desea especificar una cadena de Markov a través de la densidad de transición $q(\boldsymbol{\theta}' | \boldsymbol{\theta})$, donde $\boldsymbol{\theta}'$ y

θ son dos puntos cualesquiera. Adicionalmente suponga que esta densidad de transición es especificada sin referencia alguna de la posterior de interés y por lo tanto no converge a la misma. Con $q(\theta'|\theta)$ como punto de partida el objetivo es construir una cadena de Markov que converja a la posterior de interés $h(\theta|\mathbf{Y})$. El algoritmo Metropolis-Hastings brinda un esquema para lograr esto. Para definir el algoritmo considere θ^0 como el valor inicial de la cadena y suponga que el algoritmo se ha corrido de tal forma que se obtuvieron los valores $\theta^0, \theta^1, \dots, \theta^{j-1}$, ahora el siguiente elemento de la cadena θ^j se produce por un proceso de dos pasos: proposición y movimiento.

- Paso de proposición: Muestree un valor θ de $q(\theta^{j-1}, \theta|\mathbf{Y})$ y calcule la cantidad

$$a(\theta^{j-1}, \theta|\mathbf{Y}) = \min \left\{ 1, \frac{h(\theta|\mathbf{Y})}{h(\theta^{j-1}|\mathbf{Y})} \frac{q(\theta, \theta^{j-1}|\mathbf{Y})}{q(\theta^{j-1}, \theta|\mathbf{Y})} \right\}$$

- Paso de movimiento: Fije $\theta^j = \theta$ con probabilidad $a(\theta^{j-1}, \theta|\mathbf{Y})$; fije $\theta^j = \theta^{j-1}$ con probabilidad $1 - a(\theta^{j-1}, \theta|\mathbf{Y})$.

$a(\theta^{j-1}, \theta|\mathbf{Y})$ se conoce como probabilidad de aceptación y mide la probabilidad de que el siguiente valor generado por la cadena sea uno proveniente de la distribución posterior de interés” (Press 2003, pp. 121-123). Se debe definir entonces una cadena de Markov para iniciar el Metropolis-Hastings y en la práctica hay una variedad de estas, en este trabajo se consideró una cadena de caminata aleatoria (Albert 2009, p.121). Para esta, el siguiente valor en la secuencia está dado por:

$$\theta^j = \theta^{j-1} + scale Z \quad (2.29)$$

Donde Z tiene distribución normal multivariada con vector de media $\mathbf{0}$ y matriz de varianzas \mathbf{V} y $scale$ es un parámetro positivo de escala. En esta cadena, \mathbf{V} puede obtenerse como resultado de maximizar la posterior, definida como:

$$h(\theta|\mathbf{Y}) \propto L(\theta|\mathbf{Y}) q(\theta|\mathbf{Y})$$

Donde $L(\theta|\mathbf{Y})$ es la verosimilitud obtenida mediante el filtro de Kalman y $q(\theta|\mathbf{Y})$ una a priori asociada a los parámetros. Esta posterior puede ser incorporada al filtro de Kalman y maximizada para obtener los valores de arranque del algoritmo.

2.7.1. A priori asignadas a los parámetros

En los modelos desarrollados los parámetros a estimar son en general varianzas de innovaciones y componentes ϕ que oscilan entre 0,75 y 1, para la estimación bayesiana de estos es necesario definir una a priori adecuada. En la literatura se recomienda, para modelos jerárquicos, definir una gamma inversa (*IG*) para los parámetros que son varianzas, sin embargo, si una de las varianzas es muy cercana a cero y el número de grupos es pequeño, las estimaciones producto de la a priori pueden estar bastante alejadas del verdadero valor (Gelman 2004, p.2). En la REE se puede considerar al vector de estados como otro nivel y a la dimensión del estado como el número de grupos.

En este trabajo se considera para los parámetros de varianza a prioris no informativas de dos tipos: El primero le asigna a cada parámetro una distribución uniforme de 0 a 10.000 (Gelman et.al 2003) el segundo le asigna a los parámetros de varianza una gamma inversa con parámetro de forma (α) bajo y un valor alto de escala (β), esto es $p(\sigma^2) \sim IG(\alpha = 0,5; \beta = 500)$ (Spiegelhalter et. al, 2003¹)

Para los parámetros a estimar que no son varianzas se considera siempre una a priori uniforme de 0 a 10. El apéndice E contiene las expresiones de las a prioris y posterior de los parámetros para cada modelo que trabajado.

¹Si bien originalmente la prior propuesta es con parámetros 0,001 en este trabajo se considera la de 0,5 ya que si la varianza de algunas innovaciones es muy cercana a cero, la filtración tarda más tiempo o incluso no logra encontrar una solución de estado estable, lo que puede generar problemas en la estimación.

2.8. Estado del Arte

Kaminski et.al (1971) desarrollaron un trabajo donde compararon la filtración convencional (Kalman) con los filtros de raíz cuadrada. Se encontró que los últimos tienen ventajas de cálculo en la mayoría de tipos de problemas analizados. En el trabajo se sugieren cuatro formas de filtrar de raíz cuadrada con sus respectivos cálculos y ventajas computacionales sobre la forma tradicional. De estas cuatro formas, dos son del tipo covarianza (filtro de Kalman) y las otras dos del tipo información (filtro de información). Al comparar estas cuatro formas de filtro con las convencionales se encontró que los filtros de raíz cuadrada son alternativas viables en el sentido del suavizamiento, y en un sentido computacional se pueden ahorrar muchos problemas a la hora de programar.

Bierman (1973) desarrolló un trabajo donde se comparó la eficiencia computacional de cinco algoritmos de filtro, el de Kalman, el filtro estabilizado de Kalman, el de información, el de covarianza² de raíz cuadrada y el de información de raíz cuadrada. Los resultados para este análisis indicaron que para problemas de muchas dimensiones, el filtro de información de raíz cuadrada fue el más eficiente para la actualización. El filtro de Kalman también resulta eficiente para varios tipos de problemas, sin embargo el tiempo de cálculo computacional es mayor que para los otros algoritmos.

Terra et.al (2007) desarrollaron un trabajo donde compararon el filtro de Kalman y otros algoritmos recursivos. Señalan que a pesar que el filtro de Kalman ha sido ampliamente empleado en los últimos 50 años para el problema de estimaciones recursivas tiene algunos problemas a la hora de calcularlo, por esta razón se utilizan otro tipo de algoritmos y otros enfoques tales como el filtro de información, para tratar con el problema de la estimación recursiva. Mediante un ejemplo numérico, los autores encontraron que en la implementación, las matrices del sistema obtenidas mediante otros algoritmos recursivos están más cerca de su verdadero valor que aquellas obtenidas mediante el filtro de Kalman en la forma de Ricati.

Tusell (2011) desarrolló un trabajo donde el objetivo fue describir y comparar paquetes estadísticos en el programa R³. Realizando una breve descripción del filtro de Kalman y de los algoritmos disponibles, el autor realiza varios ejercicios para determinar las características, ventajas y limitaciones de cinco paquetes estadísticos en particular.

²Filtro de covarianza se le conoce a aquellos filtros donde la matriz de covarianza del error de estimación \mathbf{P}_t se obtiene como en las ecuaciones del filtro de Kalman ó el de información.

³cran.r-project.org/

Metodología

3.1. Aspectos generales

El tipo de estudio del presente trabajo se ubica en la categoría de explicativo ya que el trabajo está destinado a comparar tres metodologías de estimación para encontrar diferencias entre éstas, inicialmente bajo simulaciones para luego ser aplicado a datos reales. Por este mismo motivo el método del trabajo es deductivo-inductivo ya que se parte de situaciones generales explicadas por un marco teórico general para luego aplicarse en una realidad concreta, y cuando ésta se conozca en su totalidad puede tomarse lo concreto de la situación para analizarse en un marco teórico general y en trabajos similares podrían concluir de una forma parecida a la de este trabajo.

Los métodos de filtración fueron comparados con simulación extensiva, los criterios de evaluación fueron la precisión en las estimaciones, la filtración, la convergencia de los filtros a una solución de estado estable y la calidad de los pronósticos. Los supuestos sobre los que se trabajó fueron, la normalidad en el conjunto de información y matrices del sistema tiempo invariantes, de esta manera los filtros brindaron la estimación condicional del vector de estados en un tiempo t .

3.2. Modelos empleados

3.2.1. Modelo de caminata aleatoria o nivel local modificado

El modelo de caminata aleatoria o nivel local es un modelo de series de tiempo univariado de la forma:

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + \epsilon_t, & \epsilon_t &\sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \\ \mu_t &= \phi\mu_{t-1} + \eta_t, & \eta_t &\sim N(0, \sigma_\eta^2) \end{aligned} \tag{3.1}$$

En su versión original el parámetro ϕ es igual a 1. En este trabajo, además de 1, este parámetro presenta otros valores (véase la sección 3.3). Esto con el fin de un análisis más general. Es un modelo de REE tiempo invariante con $\mu_t = \alpha_t$, con matrices del sistema

$Z = 1$ y $T = [\phi]$ y $d = c = 0$. El modelo será una caminata aleatoria en el caso en que $T = 1$.

Los parámetros a estimar son las varianzas de las innovaciones y el componente ϕ , es decir el vector de parámetros es $\theta = (\phi, \sigma_\epsilon^2, \sigma_\eta^2)$

El modelo de caminata aleatoria es siempre observable, pero sólo es controlable y estabilizable si σ_η^2 es estrictamente positivo (Harvey 1989, p.170). En un caso extremo cuando $\sigma_\epsilon^2 = 0$ y $\phi = 1$, las observaciones siguen una caminata aleatoria y el pronóstico de observaciones futuras es la última observación, por otro lado si $\sigma_\eta^2 = 0$, el nivel es constante y el mejor pronóstico para las observaciones futuras es la media muestral (Harvey 1989, p.19)

3.2.2. Modelo de tendencia lineal local modificado

El modelo de tendencia lineal local es un modelo de series de tiempo univariado de la forma:

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + \epsilon_t, & \epsilon_t &\sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \\ \mu_t &= \Psi_2 \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t, & \eta_t &\sim N(0, \sigma_\eta^2) \\ \beta_t &= \Psi_1 \beta_{t-1} + \xi_t, & \xi_t &\sim N(0, \sigma_\xi^2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Es un modelo tiempo invariante cuya REE es la siguiente:

$$\begin{aligned} y_t &= [1 \quad 0] \alpha_t + \epsilon_t \\ \alpha_t &= \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_2 & 1 \\ 0 & \Psi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{t-1} \\ \beta_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_t \\ \xi_t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3)$$

En su versión original los parámetros Ψ_1 y Ψ_2 son iguales a 1. Este modelo busca representar la tendencia de una serie de tiempo. El punto de partida es un modelo que considera una tendencia lineal determinística $\mu_t = \alpha + \beta t$. La tendencia lineal local considera que α , el intercepto, puede obtenerse recursivamente de μ_t y que la pendiente β puede volverse un componente estocástico al hacer que siga una caminata aleatoria (Harvey 1989, p.37).

Los parámetros a estimar son las tres varianzas de las innovaciones y los parámetros Ψ , es decir el vector de parámetros es $\theta = (\Psi_1, \Psi_2, \sigma_\epsilon^2, \sigma_\eta^2, \sigma_\xi^2)$

El modelo de tendencia lineal local siempre es observable, pero solo es controlable y estabilizable si σ_ξ^2 es estrictamente positiva. De esta forma si $\sigma_\xi^2 > 0$ el filtro de Kalman converge a un estado estable y lo hace exponencialmente rápido (Harvey 1989, p.170)

3.2.3. Modelo de tendencia mas ciclo modificado

El modelo de tendencia mas ciclo es un modelo de series de tiempo univariado de la forma:

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + \psi_t + \epsilon_t, & \epsilon_t &\sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \\ \mu_t &= \phi_2 \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t, & \eta_t &\sim N(0, \sigma_\eta^2) \\ \beta_t &= \phi_1 \beta_{t-1} + \xi_t, & \xi_t &\sim N(0, \sigma_\xi^2) \\ \psi_t &= \begin{bmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos \lambda_c & \sin \lambda_c \\ -\sin \lambda_c & \cos \lambda_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_t \\ k_t^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Donde λ_c es un ángulo medido en radianes, $0 \leq \rho \leq 1$, k_t y k_t^* son innovaciones ruido blanco con igual varianza, no correlacionadas entre sí. Es un modelo tiempo invariante cuya REE es:

$$y_t = [1 \ 0 \ 1 \ 0] \boldsymbol{\alpha}_t + \epsilon_t$$

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \psi_t \\ \psi_t^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \cos \lambda_c & \rho \sin \lambda_c \\ 0 & 0 & -\rho \sin \lambda_c & \rho \cos \lambda_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{t-1} \\ \beta_{t-1} \\ \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_t \\ \xi_t \\ k_t \\ k_t^* \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Este modelo combina la tendencia y el ciclo de una serie de tiempo sumando ambos en la ecuación de medición, además permite que el componente cíclico pueda variar debido a la inclusión de los elementos k_t y k_t^* .

Puesto que se supone (por parsimonia y porque k_t^* no tiene interpretación directa) que las varianzas de las innovaciones k_t y k_t^* son iguales, el modelo contiene ocho parámetros a estimar, el vector es $\boldsymbol{\theta} = (\phi_1, \phi_2, \rho, \lambda_c, \sigma_\epsilon^2, \sigma_\eta^2, \sigma_\xi^2, \sigma_k^2)$

En su versión original los parámetros ϕ_1 y ϕ_2 son iguales a 1. El modelo es observable a menos que ρ ó λ_c sean cero. Sin embargo siempre es detectable y la condición de que σ_k^2 y σ_ξ^2 sean positivas es necesaria para la controlabilidad y estabilizabilidad (Harvey 1989, p.171). Si estas condiciones se cumplen el filtro de Kalman tiene una solución de estado estable.

Estos tres modelos fueron seleccionados porque a diferencia de los modelos ARIMA contienen varios componentes en la ecuación de estado. Adicionalmente, estos modelos cuentan con una aplicación importante en términos de análisis macroeconómico y política monetaria. El modelo de nivel local, por ejemplo, ha sido empleado por Boivin (2006) para encontrar variaciones en los parámetros de la política monetaria en Estados Unidos. Así mismo, Jakas (2014) empleó el modelo de tendencia lineal local para encontrar factores latentes en el rendimiento del mercado financiero europeo y Bomhoff (1991) utilizó un modelo similar al de tendencia lineal local para encontrar la estabilidad de la velocidad del dinero en ocho países industrializados. Otros autores como Bauer (2007), Sims (1994) y Harvey (1985) también han hecho uso de estos modelos para diversos propósitos económicos.

3.3. Simulaciones

En las páginas posteriores se presentan simulaciones para los modelos estructurales univariados descritos anteriormente. Se simuló 100 veces la serie y el vector de estados para tres tamaños de muestra: $n = 50$, $n = 100$ y $n = 1.000$, con diferentes combinaciones para los valores de los parámetros. Los parámetros a estimar fueron las varianzas de las innovaciones en las ecuaciones de medición (σ_ϵ^2) y transición ($\sigma_\eta^2; \sigma_\xi^2; \sigma_k^2$) y otros parámetros¹ que entran al modelo por medio de la matriz \mathbf{T}_t y que dependiendo del valor asignado pueden considerarse parámetros autoregresivos (Ver ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.4))

¹La inclusión fue arbitraria y se hizo con el fin de contar con más parámetros para realizar la estimación.

Los parámetros fueron fijados de tal forma que $\sigma_\epsilon^2 = 1$ y se le asignaron valores a las varianzas de las innovaciones en la ecuación de transición de tal forma que

$$\frac{\sigma_\epsilon^2}{\sigma_\eta^2; \sigma_\xi^2; \sigma_k^2} = 0,001; \quad \frac{\sigma_\epsilon^2}{\sigma_\eta^2; \sigma_\xi^2; \sigma_k^2} = 1; \quad \frac{\sigma_\epsilon^2}{\sigma_\eta^2; \sigma_\xi^2; \sigma_k^2} = 100$$

Es decir, fueron considerados tres escenarios: Primero, una situación donde la varianza de la innovación en la ecuación de medición es significativamente menor a las del estado. Segundo, un escenario donde son exactamente iguales y tercero, un escenario donde dicha varianza es significativamente menor (casos donde puede presentarse problemas de convergencia en el filtro, se detalla esto más adelante).

Los parámetros que entran al modelo por medio de la matriz \mathbf{T}_t tomaron los valores 0,75; 0,95 y 1. En total, nueve combinaciones para cada modelo bajo un tamaño de muestra determinado, lo que brindó un total de 27 escenarios para cada modelo estructural. En la columna *Real* de las tablas 4.13, 4.17 y 4.21 se puede observar el verdadero valor de los parámetros para cada modelo en cada escenario.

Con base en esto se realizó la estimación, filtración y pronósticos para 100 muestras en cada escenario de los tres modelos. Los pronósticos se realizaron en tiempo real, para el tamaño de muestra $n = 50$ se consideró un escenario de diez pasos adelante $h = 10$, mientras que para los tamaños de muestra $n = 100$ y $n = 1.000$ se consideró $h = 20$ y $h = 100$ respectivamente.

Sobre la estimación cabe destacar lo siguiente, las funciones de verosimilitud de las ecuaciones (2.20) y (2.27), así como las posteriores de los parámetros (ver apéndice E), fueron obtenidas mediante el filtro de Kalman, ya que este ofrece una expresión directa a las funciones dentro de su rutina de cálculo. Al tomar el filtro de información resultaba necesario realizar una conversión a los valores obtenidos para poder calcular las funciones de verosimilitud y posterior requeridas, lo que era equivalente a programar el filtro de Kalman dentro del de información, algo computacionalmente ineficiente. Por este motivo, únicamente se empleó el filtro de Kalman para el cálculo de estas funciones.

3.4. Evaluación de resultados - mejor inferencia

Para encontrar aquel procedimiento de mejor inferencia se definen los siguientes criterios para cada proceso:

- **Estimación:** Distancia de Mahalanobis de las estimaciones con respecto al verdadero valor de los parámetros
- **Filtración:** Distancia de Mahalanobis en cada tiempo de los elementos filtrados del vector de estado con respecto al verdadero valor del vector de estado
- **Convergencia:** Tiempo o número de observación en la cuál el método de filtración alcanza una solución de estado estacionario
- **Pronósticos:** Son evaluados con los criterios de *Mean absolute error*: MAE, *Root mean squared error*: RMSE, *Mean absolute percentage error*: MAPE y la U de Theil (Hyndman R. & Athanasopoulos G. 2013, sec. 2.5)

Resultados

La forma de presentación de resultados es la siguiente, para el primer modelo, el de caminata aleatoria o nivel local se detallan los resultados para un caso particular, cuando $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \phi = 1$ para luego presentar los resultados generales en cada escenario. Para los otros dos modelos se presentan de inmediato los resultados generales en cada escenario.

4.1. Resultados Modelo de nivel local

Se detallan los resultados para el caso $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \phi = 1$. Inicialmente se llevó a cabo la estimación por máxima verosimilitud, los valores de inicio fueron simulados de una $U(0, 10)$ para el parámetro ϕ y de una $U(0, 10.000)$ para los parámetros de varianza. Esos valores de arranque se simularon una vez y permanecieron fijos a lo largo de las 100 muestras. Posteriormente se realizó la estimación Bayesiana mediante el algoritmo *Metropolis-Hastings* con una cadena de Markov de caminata aleatoria, se maximizó la posterior de los parámetros y con esos máximos y la matriz de información asociada se inició el algoritmo, realizando 110.000 iteraciones, considerando un periodo de quema razonable. La tasa de aceptación oscila entre 0,246 y 0,412, las siguientes gráficas presentan el análisis de los resultados bayesianos para una de las 100 muestras de $n = 50$, la gráfica 4.1 presenta los últimos 10.000 valores simulados de la posterior:

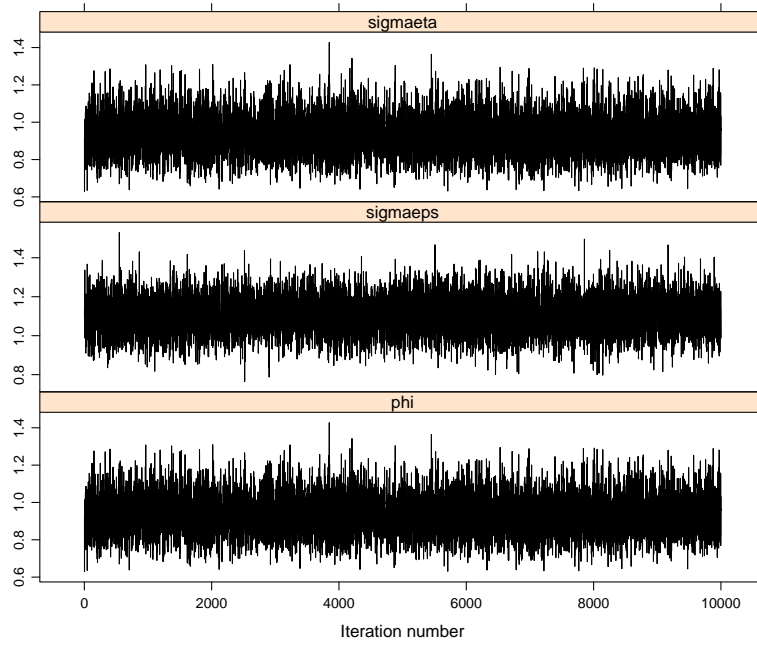


FIGURA 4.1. Valores simulados de la posterior (últimos 10.000) con a priori Uniforme, para una de las muestras del modelo de nivel local $n = 50$; $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \phi = 1$

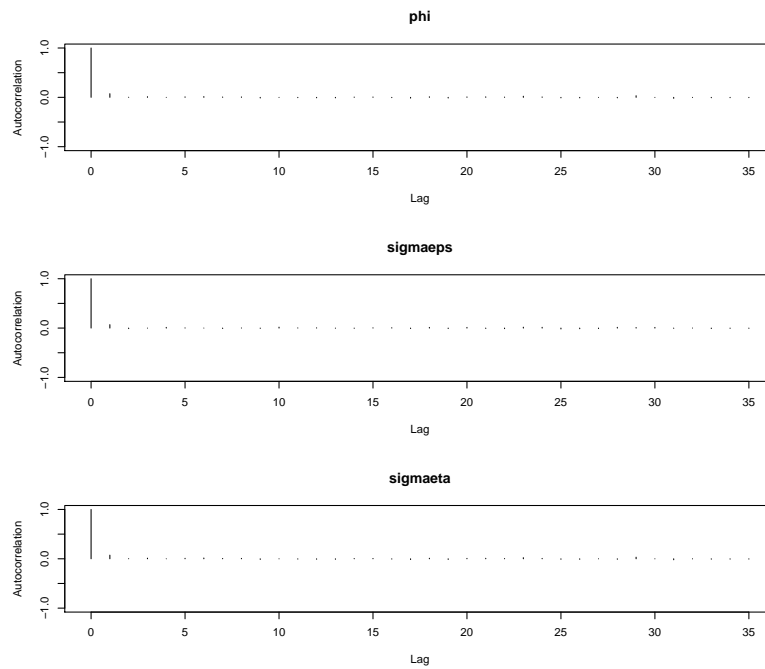


FIGURA 4.2. Correlogramas de los valores simulados de la posterior con a priori Uniforme, para una de las muestras del modelo de nivel local $n = 50$; $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \phi = 1$

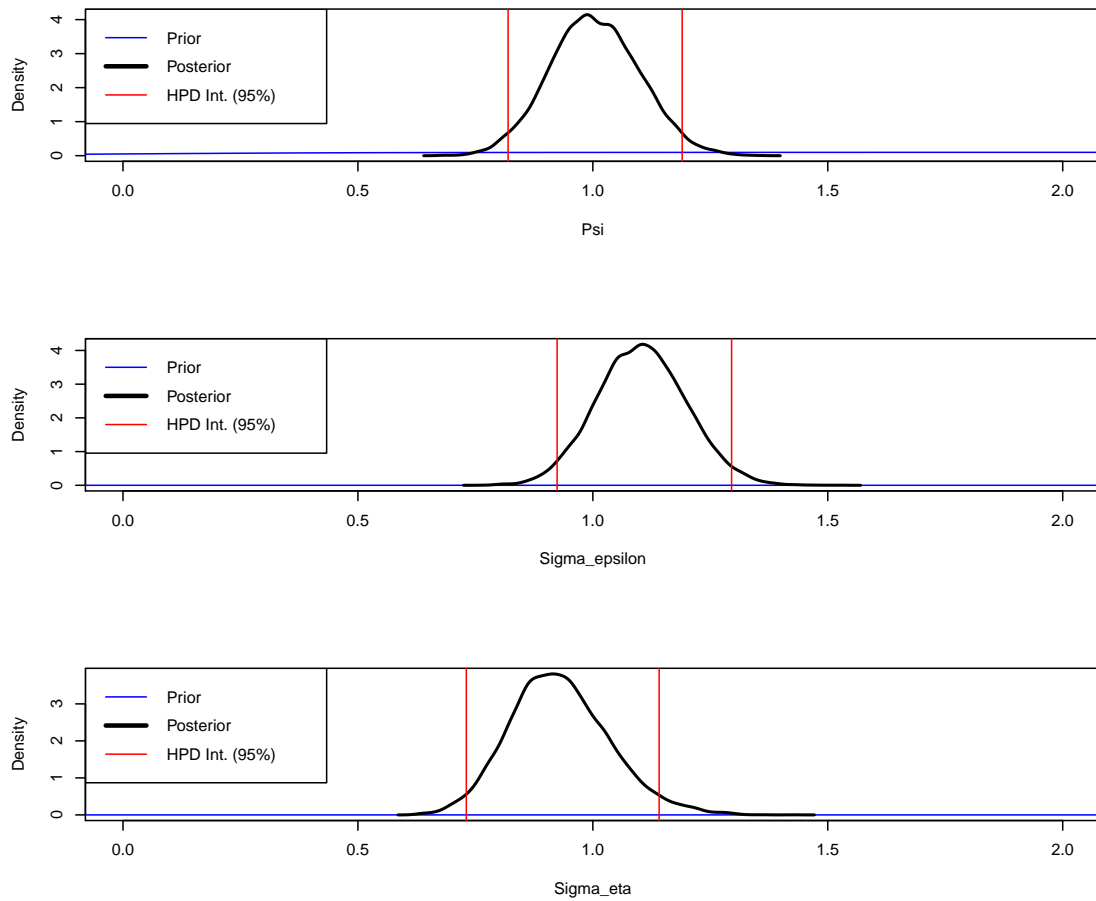


FIGURA 4.3. a priori y posterior de las simulaciones con a priori Uniforme, para una de las muestras del modelo de nivel local $n = 50$; $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \phi = 1$

En las gráficas 4.1 y 4.2 puede verse como los resultados convergen a una caminata aleatoria y no están correlacionados entre sí, mientras que en la gráfica 4.3 se aprecian la a priori, posterior y los intervalos HPD al 95 % de cada parámetro. Estos resultados tuvieron una tasa de aceptación de 0,301 y la media de estas iteraciones brindaron el resultado de esta muestra, el proceso fue repetido 100 veces, es decir, para cada una de las muestras de tamaño 50. Para el caso en que se asignó una a priori gamma inversa a los parámetros de varianza, los resultados fueron similares. Finalmente fue llevada a cabo la estimación mediante el algoritmo esperanza maximización con base en los resultados obtenidos bajo máxima verosimilitud.

Los resultados bajo los tres métodos de estimación, para un tamaño de muestra $n = 50$, se encuentran en la tabla 4.1

Máxima verosimilitud							
Pár.	Real	Estimado	ee	pvalor	LI	LS	Mahal.Dist
ϕ	1	0,967	0,008	1,38E-105	0,763	1,023	0,194
σ_ϵ^2	1	1,031	0,044	2,17E-36	0,163	1,846	
σ_η^2	1	1,014	0,063	7,64E-24	0,184	2,170	
Bayesiana Uniforme							
ϕ	1	0,626	0,018	4,82E-51	0,342	1,026	4,401
σ_ϵ^2	1	1,483	0,390	1,26E+02	0,382	1,875	
σ_η^2	1	1,365	0,116	8,67E-15	0,368	2,564	
Bayesiana Gamma Inversa							
ϕ	1	0,853	0,019	3,95E-61	0,289	1,028	0,647
σ_ϵ^2	1	1,043	0,044	9,55E-37	0,170	1,878	
σ_η^2	1	1,012	0,063	1,01E-23	0,147	2,195	
EM							
ϕ	1	0,951	0,024	0	0,791	1,028	0,268
σ_ϵ^2	1	1,282	0,226	0	0,372	1,966	
σ_η^2	1	1,795	0,245	3,29E-05	0,307	5,321	

TABLA 4.1. Resultados modelo de nivel local $n = 50$; $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \phi = 1$

De donde:

- **Real:** Valor real del parámetro.
- **Estimado:** Promedio de los resultados de estimación para las 100 muestras.
- **ee:** Error estándar de la estimación.
- **pvalor:** Valor p asociado.
- **LI:** Límite inferior del intervalo *Highest Posterior Density* (HPD) al 95 %
- **LS:** Límite superior del intervalo *Highest Posterior Density* (HPD) al 95 %
- **Mahal.Dist:** Distancia de Mahalanobis de las estimaciones con respecto al verdadero valor de los parámetros. Es un promedio de las distancias de las 100 muestras.

El método de estimación con menor distancia de Mahalanobis fue el de MV, todos presentaron parámetros estadísticamente significativos y cada intervalo de confianza construido contuvo al verdadero valor del parámetro.

Máxima verosimilitud							
Pár.	Real	Estimado	ee	pvalor	LI	LS	Mahal.Dist
ϕ	1	0,981	0,004	0	0,889	1,015	0,308
σ_ϵ^2	1	1,009	0,035	2,61E-44	0,428	1,743	
σ_η^2	1	0,985	0,039	4,08E-39	0,397	1,969	
Bayesiana Uniforme							
ϕ	1	0,647	0,0196	1,23E-49	0,361	1,009	3,362
σ_ϵ^2	1	1,045	0,041	1,32E-39	0,331	1,776	
σ_η^2	1	1,561	0,117	4,39E-18	0,421	4,028	
Bayesiana Gamma Inversa							
ϕ	1	0,919	0,007	0	0,759	1,015	1,329
σ_ϵ^2	1	1,019	0,034	2,54E-45	0,439	1,699	
σ_η^2	1	1,018	0,043	5,45E-37	0,412	2,072	
EM							
ϕ	1	0,981	0,004	9,03E-139	0,891	1,015	0,574
σ_ϵ^2	1	1,009	0,035	0	0,428	1,743	
σ_η^2	1	1,232	0,053	0	0,534	2,312	

TABLA 4.2. Resultados modelo de nivel local $n = 100$; $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \phi = 1$

Máxima verosimilitud							
Pár.	Real	Estimado	ee	pvalor	LI	LS	Mahal.Dist
ϕ	1	0,998	0,001	0	0,991	1,003	0,681
σ_ϵ^2	1	0,984	0,010	0	0,746	1,155	
σ_η^2	1	1,026	0,011	6,09E-92	0,789	1,222	
Bayesiana Uniforme							
ϕ	1	0,944	0,004	0	0,853	0,997	2,289
σ_ϵ^2	1	1,103	0,039	1,79E-43	0,417	1,814	
σ_η^2	1	1,257	0,048	1,65E-40	0,393	2,087	
Bayesiana Gamma Inversa							
ϕ	1	0,990	0,001	0	0,967	1,003	1,186
σ_ϵ^2	1	0,993	0,010	8,87E-94	0,797	1,208	
σ_η^2	1	1,038	0,011	1,20E-91	0,801	1,225	
EM							
ϕ	1	0,998	0,001	0	0,989	1,002	0,825
σ_ϵ^2	1	0,984	0,010	0	0,746	1,155	
σ_η^2	1	1,465	0,012	2,90E-89	0,790	1,249	

TABLA 4.3. Resultados modelo de nivel local $n = 1.000$; $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \phi = 1$

Para los tamaños de muestra $n = 100$ y $n = 1.000$ los resultados con menor distancia de Mahalanobis fueron los obtenidos mediante máxima verosimilitud, todos los intervalos construidos contuvieron al parámetro real y las estimaciones resultaron ser estadísticamente significativas.

Las gráficas 4.4, 4.5 y 4.6 presentan los *Kernel* de las estimaciones bajo cada método para los diferentes tamaños de muestra.

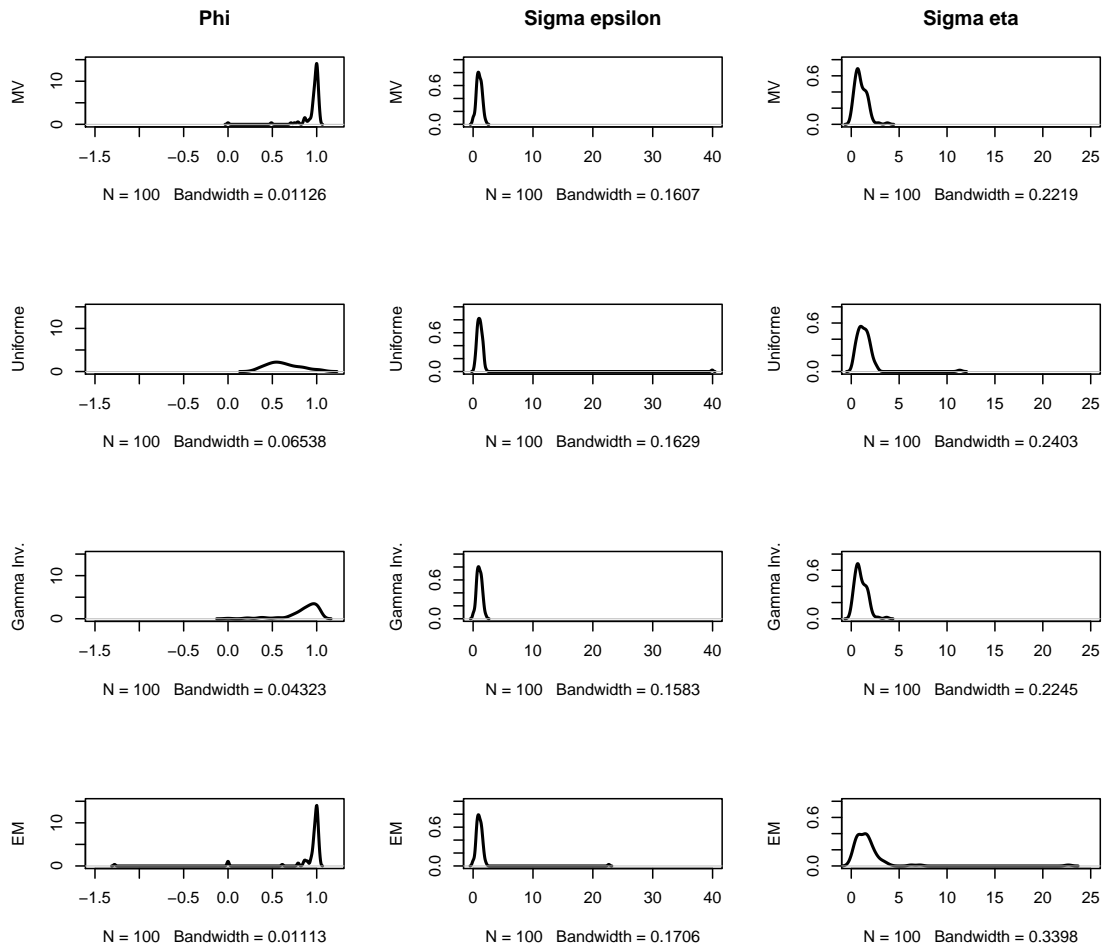


FIGURA 4.4. Densidad de las estimaciones de los parámetros, del modelo de nivel local $n = 50$;
 $\sigma_{\epsilon}^2 = \sigma_{\eta}^2 = \phi = 1$

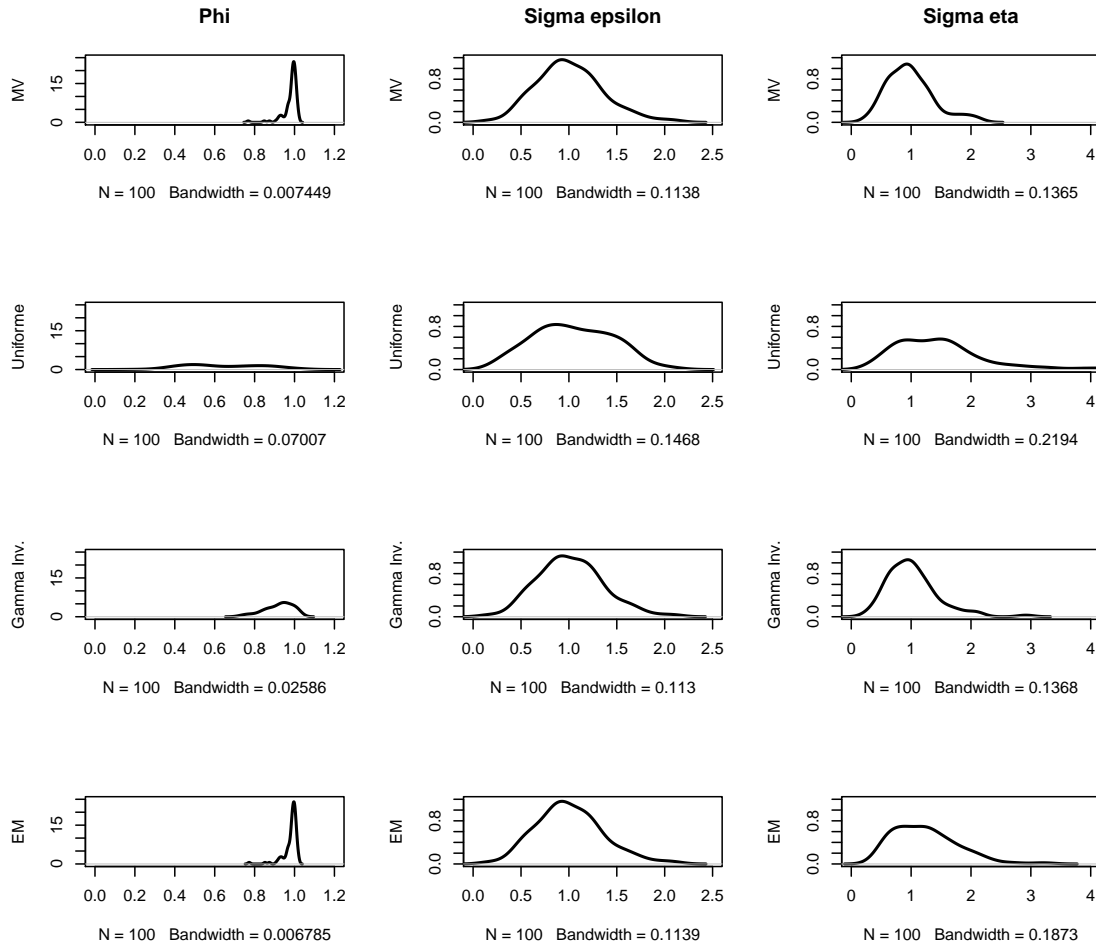


FIGURA 4.5. Densidad de las estimaciones de los parámetros, del modelo de nivel local $n = 100$;
 $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \phi = 1$

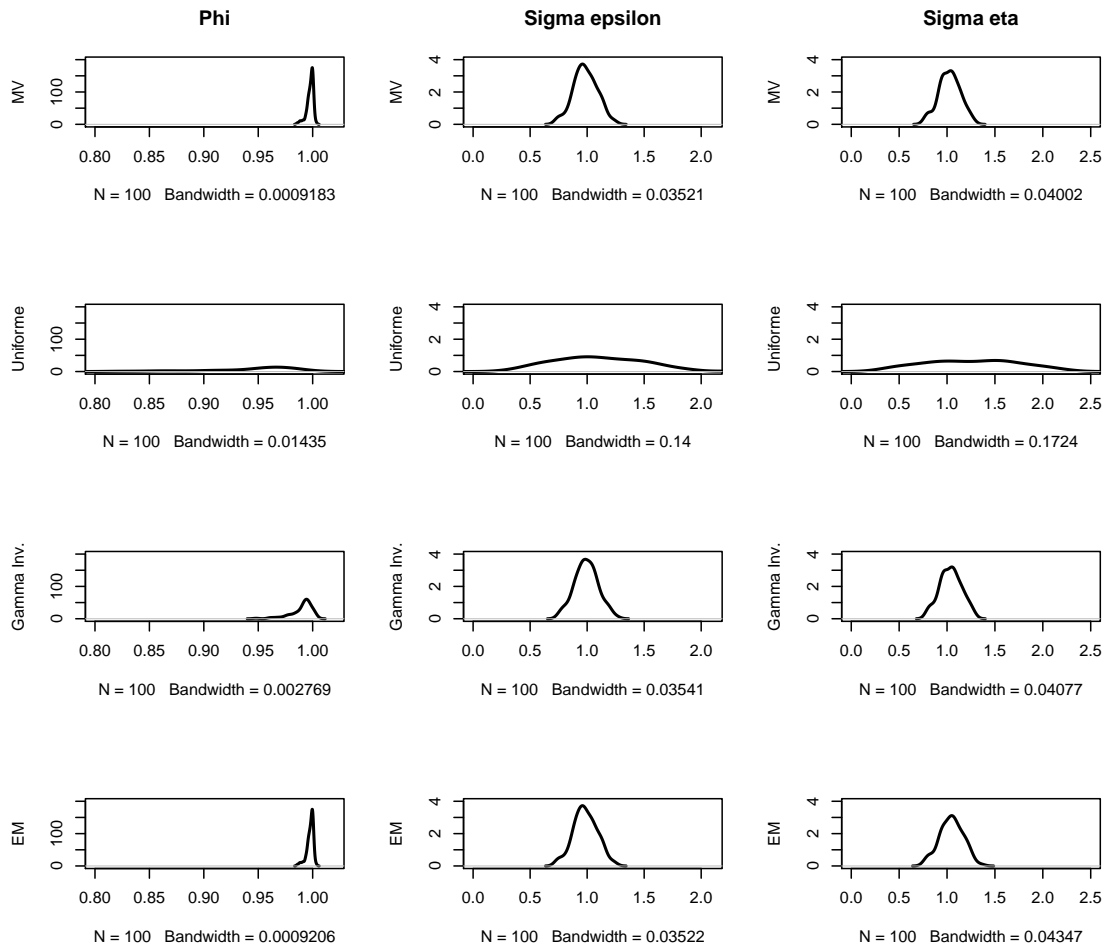


FIGURA 4.6. Densidad de las estimaciones de los parámetros, del modelo de nivel local $n = 1.000$;
 $\sigma_{\epsilon}^2 = \sigma_{\eta}^2 = \phi = 1$

Con las estimaciones realizadas se procedió a realizar la filtración bajo el filtro de Kalman y el de información. Con base en Gardner, G.; Harvey, A. & Phillips G. (1980) para el filtro de Kalman fue considerado como media del vector de estados en el momento inicial al primer valor de la serie, esto es $a_0 = y_1^i$ con $i = 1, \dots, 100$ denotando las 100 muestras de tamaño n . La varianza del estado inicial fue $P_0 = 100$. Por otro lado, el filtro de infomación inició con P_0^{-1} como inversa de la varianza en el estado inicial y con $\tilde{a}_0 = P_0^{-1}a_0$ como aquel vector para el cual el filtro de información brinda las recursiones de las cuales puede obtenerse la media del vector de estados (Ver ecuación (2.17))

De la filtración realizada interesan tres aspectos: 1. La convergencia del filtro a una solución de estado estable, 2. La cercanía de la filtración con los verdaderos valores del estado que fueron simulados a partir de los valores originales de los parámetros y 3. El tiempo, medido como el número de iteraciones realizadas, de filtración. Estos aspectos son analizados a continuación para el modelo de nivel local con los parámetros descritos.

Estimación	Filtro	Mínimo	Máximo	Promedio	Desviación	No convergen
MV	Kalman	2	48	21,86	9,48	5
	Información	5	49	22,48	9,39	5
Unif	Kalman	8	45	16,71	7,45	0
	Información	9	45	17,44	6,97	0
G.Inv.	Kalman	4	45	20,74	9,28	4
	Información	5	45	21,2	8,77	5
EM	Kalman	2	49	19,37	9,25	0
	Información	7	48	19,77	8,15	4

TABLA 4.4. Tiempos de convergencia a solución de estado estable para el modelo de nivel local $n = 50$; $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \phi = 1$

En la estimación MV el filtro de Kalman tardó entre 2 y 48 tiempos para alcanzar una solución de estado estable, en promedio lo hizo al tiempo 21,86 y en cinco ocasiones no alcanzó dicha solución. Para esa misma forma de estimación, el filtro de información tardó entre 5 y 49 tiempos en alcanzar una solución de estado estable y en promedio lo hizo al tiempo 22,48, también en cinco ocasiones no fue posible alcanzar una solución de estado estable. Bajo la estimación bayesiana los tiempos promedios en alcanzar una solución de estado estable fueron menores que los de la estimación MV, para el filtro de Kalman dichos tiempos fueron 16,71 y 20,74 para una a priori uniforme y una gamma inversa respectivamente y los tiempos promedio para el filtro de información fueron 17,44 y 21,2 respectivamente. Cabe destacar el hecho que las filtraciones para las estimaciones obtenidas bajo una a priori uniforme siempre alcanzaron una solución de estado estable. El algoritmo EM así mismo, presentó tiempos promedio de filtración menores a los de MV y a priori gamma inversa, alcanzando siempre una solución de estado estable cuando la filtración fue realizada con el filtro de Kalman.

Estimación	Filtro	Mínimo	Máximo	Promedio	Desviación	No convergen
MV	Kalman	7	44	21,61	6,70	0
	Información	8	44	21,75	6,69	0
Unif	Kalman	5	32	15,31	5,51	0
	Información	7	32	16,04	5,27	0
G.Inv.	Kalman	7	43	20,69	6,27	0
	Información	7	43	20,72	6,14	0
EM	Kalman	8	38	19,79	6,09	0
	Información	9	37	19,66	6,06	0

TABLA 4.5. Tiempos de convergencia a solución de estado estable para el modelo de nivel local $n = 100$; $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \phi = 1$

Para el tamaño de muestra $n = 100$ siempre se alcanzó una solución de estado estable, nuevamente las filtraciones bajo la estimación bayesiana con a priori uniforme registraron los menores tiempos promedios de convergencia, seguidas de las filtraciones bajo algoritmo EM. En general el filtro de Kalman brindó resultados de convergencia más rápidos entre cada método de estimación, a excepción del algoritmo EM donde la filtración de información registra un tiempo promedio menor que la de Kalman.

Estimación	Filtro	Mínimo	Máximo	Promedio	Desviación	No convergen
MV	Kalman	17	25	19,91	1,94	0
	Información	16	24	20,07	1,77	0
Unif	Kalman	10	41	20,01	6,46	0
	Información	11	40	20,03	6,36	0
G.Inv.	Kalman	16	24	19,87	1,82	0
	Información	16	25	19,96	1,75	0
EM	Kalman	16	26	19,71	1,93	0
	Información	17	25	19,98	1,76	0

TABLA 4.6. Tiempos de convergencia a solución de estado estable para el modelo de nivel local $n = 1.000$; $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \phi = 1$

Para el tamaño de muestra $n = 1.000$ todos los resultados alcanzaron una solución de estado estable y en general los tiempos de convergencia fueron menos dispersos que para los otros tamaños de muestra, como evidencia la desviación estándar (a excepción de los resultados con a priori uniforme). En este caso es la filtración bajo los resultados del algoritmo EM la que presentó menor tiempo promedio en alcanzar la solución de estado estable, seguida de la filtración bajo a priori gamma inversa, MV y finalmente la a priori uniforme. Como se mencionó al inicio de la subsección 3.2.1 la condición para que este modelo alcance una solución de estado estable es que la varianza de la innovación en la ecuación de transición sea estrictamente positiva, es decir que a mayor valor de σ_η^2 más rápida será la convergencia de la filtración. Si se observa la tabla 4.3 en promedio la estimación bajo una a priori uniforme presentó el segundo mayor valor para σ_η^2 entre los métodos de estimación, únicamente por detrás del algoritmo EM, no obstante el valor del LI es el menor entre todos, al menos dos veces menor que el obtenido mediante los otros métodos de estimación. Estos valores de varianza pequeños fueron los que restaron tiempos de convergencia para la filtración de los resultados obtenidos mediante la a priori uniforme.

La cercanía de la filtración con los verdaderos valores del estado se evalúa con una distancia de Mahalanobis para cada una de las 100 muestras en los tres diferentes tamaños (50, 100 y 1.000) Las tablas 4.7, 4.8 y 4.9 presentan algunas medidas descriptivas de la distancia de Mahalanobis para el conjunto de muestras:

Estimación	Filtro	Mínimo	Máximo	Mediana	Promedio	Desviación
MV	Kalman	0,519	4,8E+07	1,179	4,8E+05	4,8E+06
	Información	0,492	1,89E+08	1,237	1,83E+06	1,83E+07
Unif	Kalman	0,719	26,50	2,809	4,022	3,940
	Información	1,032	221,3	9,311	18,96	28,82
G.Inv.	Kalman	0,519	1,6E+05	1,407	1,6E+03	1,6E+04
	Información	0,492	1,6E+05	2,355	1,6E+03	1,6E+04
EM	Kalman	0,137	1,5E+07	1,043	2,2E+05	1,6E+06
	Información	0,454	5,6E+07	1,077	8,3E+06	5,9E+06

TABLA 4.7. Distancia de Mahalanobis de la filtración con respecto al estado, para el modelo de nivel local $n = 50$; $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \phi = 1$

Estimación	Filtro	Mínimo	Máximo	Mediana	Promedio	Desviación
MV	Kalman	0,599	4,039	1,057	1,151	0,422
	Información	0,625	3,678	1,101	1,178	0,404
Unif	Kalman	0,897	35,71	2,444	4,761	6,487
	Información	1,043	74,75	9,623	16,17	16,40
G.Inv.	Kalman	0,631	4,085	1,185	1,374	0,583
	Información	0,661	9,959	1,706	2,234	1,656
EM	Kalman	0,554	4,034	1,017	1,100	0,439
	Información	0,564	3,659	1,041	1,123	0,420

TABLA 4.8. Distancia de Mahalanobis de la filtración con respecto al estado, para el modelo de nivel local $n = 100$; $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \phi = 1$

Estimación	Filtro	Mínimo	Máximo	Mediana	Promedio	Desviación
MV	Kalman	0,854	1,216	1,008	1,011	0,079
	Información	0,855	1,213	1,007	1,013	0,080
Unif	Kalman	0,664	8,081	1,390	1,761	1,224
	Información	0,878	23,36	2,763	4,576	4,359
G.Inv.	Kalman	0,856	1,290	1,013	1,017	0,083
	Información	0,859	2,324	1,053	1,115	0,221
EM	Kalman	0,835	1,215	1,005	1,006	0,082
	Información	0,835	1,212	1,007	1,008	0,082

TABLA 4.9. Distancia de Mahalanobis de la filtración con respecto al estado, para el modelo de nivel local $n = 1.000$; $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \phi = 1$

Para el tamaño de muestra $n = 50$ la media no resultó ser una medida confiable, por lo que se empleó la mediana como medida resumen para determinar la menor distancia de Mahalanobis promedio, esta correspondió a la filtración de Kalman con los resultados obtenidos mediante el algoritmo EM, le siguió la filtración bajo el método de información con estos mismos resultados. En lo que respecta a los tamaños de muestra $n = 100$ y $n = 1.000$ la media si resultó ser una medida confiable y nuevamente la filtración de Kalman bajo resultados del algoritmo EM fue la de menor distancia de Mahalanobis, seguida de la filtración bajo el método de información.

Las tablas 4.10 a 4.12 presentan la evaluación de los resultados del pronóstico para el modelo de interés bajo los diferentes tamaños de muestra. En los casos de $n = 100$ y $n = 1.000$ se presentan únicamente los 10 primeros pasos.

Aspecto	h = 1	h = 2	h = 3	h = 4	h = 5	h = 6	h = 7	h = 8	h = 9	h = 10
Kalman MV (24)										
RMSE	2,108	2,160	2,233	2,124	2,104	2,205	2,275	2,325	2,396	2,431
MAE	1,783	1,823	1,893	1,783	1,761	1,849	1,900	1,958	2,026	2,060
MAPE	80,8	85,5	86,7	96,7	88,4	81,7	103,8	117,4	82,1	74,5
UTHEIL	0,36	0,38	0,34	0,32	0,36	0,33	0,35	0,37	0,37	0,40
Infor. MV (5)										
RMSE	2,121	2,174	2,246	2,139	2,127	2,222	2,295	2,349	2,434	2,476
MAE	1,800	1,843	1,913	1,804	1,791	1,871	1,920	1,987	2,067	2,109
MAPE	77,9	82,3	83,0	92,6	83,2	75,8	92,6	96,3	78,2	73,2
UTHEIL	0,38	0,41	0,35	0,32	0,33	0,34	0,33	0,39	0,35	0,38
Kalman Unif. (0)										
RMSE	5,324	5,325	5,342	5,334	5,372	5,426	5,502	5,556	5,609	5,682
MAE	5,026	5,021	5,037	5,029	5,060	5,107	5,173	5,226	5,282	5,344
MAPE	80,9	80,4	80,7	81,6	82,4	82,4	91,1	100,6	86,0	82,8
UTHEIL	0,17	0,13	0,13	0,13	0,13	0,14	0,15	0,15	0,14	0,11
Infor. Unif. (0)										
RMSE	5,573	5,580	5,595	5,586	5,631	5,680	5,748	5,801	5,863	5,933
MAE	5,317	5,322	5,332	5,323	5,360	5,403	5,462	5,516	5,583	5,645
MAPE	84,3	83,9	84,1	84,5	84,9	84,8	88,7	91,7	86,7	85,7
UTHEIL	0,17	0,14	0,15	0,14	0,11	0,15	0,14	0,15	0,12	0,12
Kalman G. Inv. (5)										
RMSE	2,819	2,801	2,848	2,752	2,761	2,848	2,951	3,053	3,154	3,271
MAE	2,482	2,463	2,506	2,407	2,405	2,465	2,558	2,654	2,755	2,871
MAPE	60,3	59,2	60,3	63,5	61,8	61,1	75,2	80,0	73,3	71,9
UTHEIL	0,24	0,27	0,22	0,24	0,25	0,23	0,27	0,24	0,23	0,19
Infor. G. Inv. (5)										
RMSE	2,952	2,941	2,981	2,885	2,907	2,984	3,084	3,183	3,298	3,420
MAE	2,633	2,622	2,656	2,557	2,568	2,622	2,711	2,801	2,921	3,039
MAPE	61,1	59,9	60,5	62,8	61,5	61,4	72,2	73,3	72,9	72,6
UTHEIL	0,25	0,26	0,24	0,25	0,20	0,22	0,24	0,25	0,20	0,19
Kalman EM (2)										
RMSE	2,599	2,680	2,831	2,625	2,589	2,779	2,799	2,848	2,877	2,854
MAE	2,141	2,206	2,341	2,146	2,118	2,284	2,295	2,353	2,381	2,361
MAPE	86,2	91,3	93,6	100,1	97,9	93,2	130,2	140,4	89,2	76,8
UTHEIL	0,38	0,37	0,34	0,35	0,36	0,33	0,33	0,36	0,36	0,37
Infor. EM (2)										
RMSE	2,779	2,874	3,046	2,837	2,802	3,001	3,013	3,066	3,104	3,071
MAE	2,297	2,376	2,528	2,331	2,305	2,477	2,476	2,542	2,579	2,554
MAPE	84,4	88,8	90,5	97,3	91,2	85,5	115,3	117,3	85,1	76,5
UTHEIL	0,37	0,39	0,34	0,37	0,35	0,32	0,31	0,39	0,35	0,36

TABLA 4.10. Resultados de pronósticos serie y_t , para el modelo de nivel local $n = 50$; $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \phi = 1$

Aspecto	h = 1	h = 2	h = 3	h = 4	h = 5	h = 6	h = 7	h = 8	h = 9	h = 10
Kalman MV (6)										
RMSE	2,221	2,154	2,103	2,142	2,225	2,256	2,230	2,272	2,376	2,335
MAE	1,883	1,815	1,750	1,791	1,854	1,873	1,835	1,878	1,987	1,950
MAPE	78,5	71,7	112,9	104,5	134,8	115,3	114,8	124,0	107,3	122,5
UTHEIL	0,34	0,35	0,36	0,36	0,37	0,38	0,35	0,37	0,34	0,33
Infor. MV (4)										
RMSE	2,236	2,172	2,116	2,151	2,233	2,270	2,247	2,289	2,394	2,362
MAE	1,901	1,835	1,767	1,798	1,863	1,888	1,856	1,900	2,007	1,978
MAPE	76,8	70,5	110,1	102,3	132,5	113,7	113,1	122,0	105,6	120,6
UTHEIL	0,33	0,33	0,37	0,37	0,39	0,40	0,34	0,37	0,32	0,34
Kalman Unif. (14)										
RMSE	5,380	5,471	5,524	5,540	5,582	5,610	5,639	5,675	5,728	5,806
MAE	5,055	5,137	5,183	5,209	5,256	5,283	5,311	5,344	5,394	5,472
MAPE	81,1	82,0	82,0	79,7	91,3	92,3	92,5	92,8	92,5	95,0
UTHEIL	0,11	0,13	0,12	0,14	0,14	0,12	0,13	0,13	0,13	0,11
Infor. Unif. (0)										
RMSE	5,630	5,721	5,777	5,795	5,843	5,877	5,916	5,949	6,004	6,085
MAE	5,356	5,443	5,492	5,515	5,565	5,598	5,637	5,669	5,718	5,801
MAPE	84,0	84,6	84,5	82,6	93,3	94,2	94,1	94,3	94,0	95,8
UTHEIL	0,11	0,13	0,12	0,14	0,15	0,12	0,13	0,13	0,12	0,12
Kalman G. Inv. (0)										
RMSE	2,951	3,004	2,965	2,983	2,969	2,939	2,930	2,965	3,025	3,092
MAE	2,584	2,633	2,576	2,606	2,586	2,553	2,535	2,562	2,627	2,695
MAPE	71,0	66,1	93,0	90,8	110,5	99,6	100,5	108,7	92,7	106,1
UTHEIL	0,21	0,22	0,22	0,25	0,27	0,27	0,32	0,27	0,28	0,25
Infor. G. Inv. (6)										
RMSE	3,072	3,133	3,094	3,110	3,101	3,074	3,071	3,101	3,162	3,239
MAE	2,718	2,781	2,727	2,754	2,737	2,708	2,699	2,726	2,785	2,867
MAPE	69,8	65,9	90,6	89,5	108,4	98,6	99,4	107,1	91,4	104,1
UTHEIL	0,20	0,22	0,22	0,24	0,27	0,27	0,30	0,27	0,25	0,24
Kalman EM (48)										
RMSE	2,217	2,142	2,095	2,136	2,217	2,257	2,223	2,258	2,363	2,323
MAE	1,879	1,800	1,740	1,782	1,845	1,870	1,828	1,863	1,975	1,939
MAPE	78,6	71,5	113,0	104,6	134,6	115,1	114,6	123,5	107,0	122,1
UTHEIL	0,34	0,38	0,36	0,37	0,38	0,36	0,36	0,40	0,35	0,32
Infor. EM (8)										
RMSE	2,231	2,159	2,107	2,143	2,225	2,271	2,239	2,275	2,381	2,349
MAE	1,897	1,820	1,756	1,789	1,853	1,885	1,847	1,883	1,994	1,967
MAPE	76,9	70,2	110,3	102,4	132,3	113,4	112,8	121,4	105,3	120,1
UTHEIL	0,33	0,35	0,37	0,38	0,40	0,40	0,35	0,39	0,33	0,32

TABLA 4.11. Resultados de pronósticos serie (primeros $h = 10$) y_t , para el modelo de nivel local $n = 100$; $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \phi = 1$

Aspecto	h = 1	h = 2	h = 3	h = 4	h = 5	h = 6	h = 7	h = 8	h = 9	h = 10
Kalman MV (700)										
RMSE	2,134	2,189	2,254	2,279	2,144	2,156	2,249	2,149	2,144	2,159
MAE	1,769	1,830	1,897	1,915	1,782	1,788	1,885	1,796	1,794	1,813
MAPE	53,1	48,7	58,4	58,9	60,1	55,3	60,9	64,3	64,2	61,1
UTHEIL	0,34	0,28	0,27	0,32	0,31	0,33	0,33	0,35	0,40	0,38
Infor. MV (500)										
RMSE	2,132	2,184	2,249	2,276	2,141	2,159	2,251	2,151	2,143	2,160
MAE	1,768	1,826	1,893	1,912	1,781	1,791	1,887	1,799	1,793	1,815
MAPE	52,9	48,5	58,2	58,8	59,9	55,2	60,7	64,0	63,9	60,8
UTHEIL	0,35	0,29	0,27	0,32	0,32	0,33	0,33	0,35	0,40	0,38
Kalman Unif. (200)										
RMSE	5,288	5,237	5,250	5,272	5,260	5,298	5,233	5,197	5,212	5,216
MAE	4,768	4,719	4,730	4,734	4,726	4,760	4,693	4,656	4,687	4,703
MAPE	54,5	50,8	57,8	57,3	58,8	53,9	59,5	58,5	59,8	60,5
UTHEIL	0,13	0,18	0,15	0,17	0,17	0,15	0,14	0,13	0,12	0,16
Infor. Unif. (0)										
RMSE	5,768	5,713	5,721	5,746	5,748	5,783	5,713	5,677	5,693	5,693
MAE	5,314	5,258	5,260	5,272	5,279	5,312	5,247	5,207	5,241	5,247
MAPE	55,8	52,1	58,8	58,5	60,1	55,2	60,5	59,5	60,8	61,5
UTHEIL	0,11	0,16	0,13	0,16	0,15	0,14	0,14	0,11	0,12	0,13
Kalman G. Inv. (600)										
RMSE	2,275	2,302	2,364	2,381	2,230	2,293	2,358	2,285	2,288	2,306
MAE	1,898	1,931	1,987	2,018	1,880	1,918	1,996	1,927	1,926	1,941
MAPE	48,4	44,8	53,7	53,8	55,2	52,1	57,6	60,8	60,7	57,6
UTHEIL	0,31	0,30	0,27	0,33	0,35	0,34	0,33	0,33	0,31	0,33
Infor. G. Inv. (500)										
RMSE	2,322	2,341	2,400	2,417	2,271	2,347	2,401	2,328	2,335	2,355
MAE	1,954	1,976	2,028	2,057	1,921	1,974	2,042	1,974	1,978	1,994
MAPE	47,9	44,3	53,2	53,2	54,6	51,7	57,1	60,3	60,1	57,1
UTHEIL	0,31	0,31	0,25	0,33	0,35	0,33	0,32	0,32	0,30	0,33
Kalman EM (900)										
RMSE	2,133	2,188	2,253	2,278	2,144	2,157	2,249	2,148	2,144	2,158
MAE	1,769	1,829	1,896	1,913	1,782	1,789	1,885	1,795	1,793	1,812
MAPE	53,1	48,7	58,4	58,9	60,1	55,3	60,9	64,2	64,1	61,0
UTHEIL	0,34	0,28	0,27	0,32	0,31	0,33	0,33	0,35	0,40	0,38
Infor. EM (1200)										
RMSE	2,131	2,183	2,248	2,275	2,141	2,160	2,251	2,150	2,143	2,159
MAE	1,768	1,826	1,892	1,911	1,780	1,792	1,887	1,798	1,793	1,814
MAPE	52,9	48,5	58,2	58,8	59,9	55,2	60,8	64,0	63,8	60,7
UTHEIL	0,35	0,30	0,27	0,32	0,32	0,34	0,33	0,35	0,40	0,38

TABLA 4.12. Resultados de pronósticos serie (primeros $h = 10$) y_t , para el modelo de nivel local $n = 1.000$; $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \phi = 1$

Donde:

- **RMSE**: *Root mean squared error*
- **MAE**: *Mean absolute error*
- **MAPE**: *Mean absolute percentage error*
- **UTHEIL**: Número de pronósticos con U de Theil mayores a 1 / Total de pronósticos

Para evaluar los pronósticos se tiene en cuenta aquellos con menor error bajo los criterios de **RMSE**, **MAPE** y **MAE**, así como también el mayor número de pronósticos con U de Theil superior a 1 lo que indica que son mejor a un pronóstico plano o ingenuo. Los valores dentro de un paréntesis al lado del método de filtración indican el número de criterios en los que dicho método fue el mejor de todos, de esta forma en la tabla 4.10 el valor de 24 para el filtro de Kalman bajo resultados de máxima verosimilitud indica que fue el mejor método en ese número de aspectos, aquellos sombreados en negrilla. Nótese que en el criterio de **UTHEIL** pueden existir empates por lo que varios métodos pudieron registrar un punto en ese aspecto. Aunque en las tablas 4.11 y 4.12 se presentan únicamente los 10 primeros pasos, la evaluación de aspectos si corresponde al total de pronósticos bajo 20 y 100 pasos respectivamente.

De acuerdo a estos se concluye que para el tamaño de muestra $n = 50$ los mejores pronósticos son obtenidos bajo una filtración de Kalman y resultados de máxima verosimilitud, en el caso de $n = 100$ los mejores pronósticos son aquellos bajo una filtración de Kalman y resultados de algoritmo EM y para el tamaño de muestra $n = 1.000$ fue la filtración de información bajo resultados de algoritmo EM aquella con mejores resultados.

La tabla 4.13 presenta los resultados de las estimaciones bajo los diferentes tamaños de muestra y métodos de estimación. Las tablas 4.14 a 4.16 el resumen de la evaluación de cada aspecto para los nueve escenarios descritos en la sección 3.3 para el modelo de nivel local.

Pár.	Real	n = 50				n = 100				n = 1.000			
		MV	Bayesiana		EM	MV	Bayesiana		EM	MV	Bayesiana		EM
			Unif.	G.Inv.			Unif.	G.Inv.			Unif.	G.Inv.	
ϕ	0,75	0,7055	0,5028	0,6254	0,7641	0,7040	0,4838	0,6425	0,7622	0,7505	0,5676	0,7521	0,7349
σ_ϵ^2	1	238,31	200,36	236,94	34,251	190,44	199,59	189,37	20,084	47,912	201,24	48,457	2,7689
σ_η^2	1.000	1.114,75	893,15	1.097,38	768,54	1.139,19	953,55	1.125,96	806,55	1.019,58	881,82	1.017,25	901,65
ϕ	0,75	0,6039	0,4523	0,4797	0,6651	0,6655	0,4737	0,5731	0,6894	0,7444	0,5274	0,7148	0,7448
σ_ϵ^2	1	4,7264	1,4913	1,7181	2,9032	1,4883	1,3019	1,1928	1,2043	1,0035	1,0937	1,0161	1,0035
σ_η^2	1	5,3608	1,6290	2,2398	2,8841	1,9972	1,4734	1,6505	1,3237	1,0079	1,1975	1,0189	0,7978
ϕ	0,75	0,1324	0,3882	0,2977	0,07694	0,1712	0,4218	0,3324	0,1629	0,2391	0,3945	0,3548	0,2432
σ_ϵ^2	1	18,631	2,3579	3,2398	0,4201	14,923	2,1768	2,2750	0,4339	2,3738	1,9702	1,9663	0,5694
σ_η^2	0,01	18,369	2,1092	2,9342	0,2119	14,563	1,8053	1,9157	0,1988	1,9060	1,5988	1,6254	0,5368
ϕ	0,95	0,9053	0,5067	0,7854	0,9272	0,9194	0,5378	0,8351	0,9360	0,9471	0,7545	0,9478	0,9501
σ_ϵ^2	1	174,99	148,11	173,97	14,174	122,53	149,22	122,49	8,5089	28,961	141,03	29,327	0,9850
σ_η^2	1.000	1.324,40	1.068,78	1.297,95	1.025,14	1.190,26	1.175,44	1.197,81	943,58	1.009,72	1.045,17	1.022,01	976,63
ϕ	0,95	0,8822	0,5246	0,7512	0,8747	0,9178	0,5715	0,8347	0,9197	0,9494	0,7443	0,9326	0,9495
σ_ϵ^2	1	1,5779	1,1684	0,9823	1,3161	0,9692	1,0168	0,9814	0,9693	0,9872	1,1185	0,9979	0,9872
σ_η^2	1	1,7597	1,4004	1,1336	1,5379	1,0485	1,6292	1,0859	1,0654	1,0209	1,2723	1,0328	0,9721
ϕ	0,95	0,1833	0,4316	0,2463	0,07912	0,4793	0,4955	0,5189	0,4159	0,9129	0,6096	0,8973	0,8997
σ_ϵ^2	1	16,231	1,5842	1,7072	0,4144	5,2002	1,2317	1,2327	0,5947	0,9776	1,0318	0,9928	0,9762
σ_η^2	0,01	16,187	1,2704	1,6046	0,2334	4,6962	0,6388	0,6856	0,1407	0,02638	0,09452	0,02736	0,01813
ϕ	1	0,9712	0,5682	0,8774	0,9831	0,9801	0,6598	0,9348	0,9844	0,9978	0,9378	0,9967	0,9984
σ_ϵ^2	1	282,35	149,38	278,77	12,304	199,11	186,39	194,93	8,0387	32,533	138,33	32,751	1,1941
σ_η^2	1.000	1.913,18	1.863,77	1.433,99	1.495,85	1.646,58	1.660,37	1.625,19	1.292,57	1.055,88	1.387,55	1.063,74	1.027,42
ϕ	1	0,9675	0,6257	0,8531	0,9505	0,9811	0,6472	0,9192	0,9815	0,9977	0,9436	0,9899	0,9977
σ_ϵ^2	1	1,0309	1,4827	1,0429	1,2842	1,0088	1,0446	1,0192	1,0089	0,9842	1,1033	0,9932	0,9842
σ_η^2	1	1,0143	1,3648	1,0125	1,7946	0,9850	1,5612	1,0185	1,2323	1,0262	1,2567	1,0381	1,0465
ϕ	1	0,4998	0,4784	0,5734	0,1076	0,7541	0,5801	0,7666	0,4261	0,9975	0,9358	0,9895	0,9968
σ_ϵ^2	1	7,0506	1,7783	1,9275	2,1652	4,0628	2,2373	2,1555	1,7955	0,9943	1,0675	1,0078	0,9942
σ_η^2	0,01	6,6799	1,1280	1,5125	1,9167	3,3838	1,3983	1,4161	1,3061	0,01108	0,04748	0,01122	0,01273

TABLA 4.13. Resultados de las estimaciones para el modelo de nivel local

Modelo	Estimación	Filtración	Convergencia	Pronóstico
$\phi = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = 1.000$	EM	Kalman MV	Kalman EM	Kalman EM
$\phi = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = 1$	EM	Kalman Unif.	Kalman G. Inv.	Kalman EM
$\phi = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = 0,01$	G. Inv.	Infor. MV	Kalman G. Inv.	Infor. EM
$\phi = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = 1.000$	EM	Kalman MV	Kalman EM	Kalman EM
$\phi = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = 1$	EM	Kalman EM	Kalman Unif.	Kalman EM
$\phi = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = 0,01$	MV	Kalman MV	Kalman MV	Kalman Unif.
$\phi = 1; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = 1.000$	MV	Kalman MV	Kalman EM	Kalman MV
$\phi = 1 = \sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = 1$	MV	Kalman EM	Kalman EM	Kalman MV
$\phi = 1; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = 0,01$	MV	Infor. EM	Kalman MV	Kalman EM

TABLA 4.14. Resumen de evaluación de aspectos para el modelo de nivel local $n = 50$

Modelo	Estimación	Filtración	Convergencia	Pronóstico
$\phi = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = 1.000$	EM	Kalman MV	Kalman EM	Kalman EM
$\phi = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = 1$	EM	Kalman MV	Kalman Unif.	Kalman MV
$\phi = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = 0,01$	G. Inv.	Infor. MV	Kalman G. Inv.	Kalman Unif.
$\phi = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = 1.000$	EM	Kalman MV	Kalman EM	Kalman EM
$\phi = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = 1$	EM	Kalman MV	Kalman Unif.	Kalman EM
$\phi = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = 0,01$	MV	Infor. MV	Kalman MV	Kalman MV
$\phi = 1; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = 1.000$	MV	Kalman MV	Infor. EM	Kalman MV
$\phi = 1 = \sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = 1$	MV	Kalman EM	Kalman EM	Kalman EM
$\phi = 1; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = 0,01$	MV	Infor. EM	Kalman MV	Kalman EM

TABLA 4.15. Resumen de evaluación de aspectos para el modelo de nivel local $n = 100$

Modelo	Estimación	Filtración	Convergencia	Pronóstico
$\phi = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = 1.000$	EM	Kalman MV	Kalman EM	Kalman MV
$\phi = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = 1$	MV	Kalman MV	Kalman Unif.	Kalman MV
$\phi = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = 0,01$	G. Inv.	Infor. Unif.	Kalman EM	Kalman Unif.
$\phi = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = 1.000$	EM	Kalman MV	Kalman EM	Kalman MV
$\phi = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = 1$	MV	Kalman MV	Kalman Unif.	Kalman MV
$\phi = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = 0,01$	MV	Kalman MV	Infor. Unif.	Kalman MV
$\phi = 1; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = 1.000$	EM	Kalman MV	Kalman EM	Kalman MV
$\phi = 1 = \sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = 1$	MV	Kalman EM	Kalman EM	Infor. EM
$\phi = 1; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = 0,01$	MV	Infor. EM	Infor. Unif.	Infor. MV

TABLA 4.16. Resumen de evaluación de aspectos para el modelo de nivel local $n = 1.000$

- **Estimación:** En los veintisiete escenarios, las estimaciones MV y bajo algoritmo EM fueron las que registraron mejores resultados en la mayoría, doce cada una. Para el tamaño de muestra $n = 50$ la estimación bajo algoritmo EM registró cinco escenarios donde fue la de mejor resultado, seguida por la estimación MV con tres y la estimación con a priori gamma inversa con uno. Para el tamaño de muestra $n = 100$ la estimación bajo algoritmo EM y la de MV registraron cuatro escenarios fueron la de mejor resultado y la estimación con a priori gamma inversa uno. Los resultados bajo el tamaño de muestra $n = 1.000$ evidencian que la estimación bajo MV registró cinco escenarios donde fue la de mejor resultado, seguido de la estimación bajo algoritmo EM con tres y la estimación con a priori gamma inversa con un escenario. En general la estimación bajo algoritmo EM resultó mejor que las otras en aquellos escenarios donde $\sigma_\epsilon^2 \ll \sigma_\eta^2$ (aunque existe un caso donde no es así, bajo el tamaño de muestra 100 y componente $\phi = 1$), en otros escenarios la estimación MV resultó ser una mejor opción. Cabe destacar además que conforme aumentó el tamaño de muestra la estimación MV brindó mejores resultados que la EM en aquellos escenarios donde inicialmente no resultó ser la mejor. Al pasar de $n = 50$ a $n = 100$ la estimación MV sustituyó a la EM como la de mejores resultados en el escenario donde $\phi = \sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = 1$ y al pasar de $n = 100$ a $n = 1.000$ hizo lo propio en el escenario donde $\phi = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = 1$. La estimación con a priori gamma inversa fue la de mejor resultado en el escenario donde el componente $\phi = 0,75$ y $\sigma_\epsilon^2 \gg \sigma_\eta^2$.
- **Filtración:** La filtración de Kalman presentó mejores resultados que la de información en todos los escenarios a excepción de aquellos en donde $\sigma_\epsilon^2 \gg \sigma_\eta^2$, esto se evidencia para los diferentes tamaños de muestra. Para el tamaño de muestra $n = 50$ la filtración de Kalman con resultados MV fue la de mejor resultado en cuatro escenarios, la de Kalman con resultados EM en dos, la de Kalman con resultados MV en uno, la de información con resultados MV en uno y la de Kalman con resultados bajo a priori uniforme en uno. Para el tamaño de muestra $n = 100$ la filtración de Kalman con resultados MV fue la de mejor resultado en cinco escenarios, la de información con resultados MV en dos, la Kalman con resultados EM en uno y la de información con resultados EM en uno. Los resultados con un tamaño de muestra $n = 1.000$ evidenciaron que la filtración de Kalman con resultados MV fue la de mejor resultado en seis escenarios, la de Kalman con resultados EM, la de información con resultados EM y la de información con resultados bajo a priori uniforme registraron un escenario cada una.
- **Convergencia:** En promedio el filtro de Kalman convergió con mayor velocidad que del de información en todos los escenarios, aunque a medida que aumentó el tamaño de muestra, el filtro de información presentó una mejora en el escenario donde $\sigma_\epsilon^2 \gg \sigma_\eta^2$. Para el tamaño de muestra $n = 50$ la filtración de Kalman con resultados EM fue la que alcanzó una solución de estado estable con mayor velocidad en cuatro escenarios, la de Kalman con resultados bajo a priori gamma inversa en dos, la de Kalman con resultados MV en dos y la Kalman bajo a priori uniforme en una. Para el tamaño de muestra $n = 100$ la filtración de Kalman con resultados EM fue la que alcanzó una solución de estado estable con mayor velocidad en tres escenarios, la de Kalman con resultados bajo a priori uniforme en dos, la de Kalman con resultados MV en dos, la de Kalman con resultados bajo a priori gamma inversa en uno y la de información bajo resultados EM en uno. Para el tamaño de muestra $n = 1.000$ la filtración de Kalman con resultados EM alcanzó una solución de estado

estable con mayor velocidad en cinco escenarios, la de Kalman bajo a priori uniforme en dos y la de información bajo a priori uniforme en dos.

- **Pronósticos:** En general los pronósticos realizados con el filtro de Kalman presentaron mejores resultados que los del filtro de información, cuando el tamaño de muestra es pequeño aquellos pronósticos realizados bajo los resultados de estimación del algoritmo EM son los de mayor acierto, mientras que si el tamaño de muestra es grande los de mayor acierto resultaron ser aquellos bajo resultados MV. Para el tamaño de muestra $n = 50$ los pronósticos realizados bajo el filtro de Kalman con resultados EM resultaron ser los más acertados en cinco escenarios, aquellos realizados bajo el filtro de Kalman con resultados MV en dos, los del filtro de Kalman con resultados bajo a priori uniforme en uno y los del filtro de información con resultados EM en uno. Para el tamaño de muestra $n = 100$ los pronósticos realizados bajo el filtro de Kalman con resultados EM también resultaron ser los más acertados en cinco escenarios, los del filtro de Kalman con resultados MV en tres y los del filtro de Kalman con resultados bajo a priori uniforme en uno. Para el tamaño de muestra $n = 1.000$ los pronósticos realizados bajo el filtro de Kalman con resultados MV pasaron a ser los de mejor desempeño, siendo los de mayor acierto en seis escenarios, los de Kalman con resultados bajo a priori uniforme, información bajo resultados MV e información bajo resultados EM registraron un escenario de mayor acierto cada uno.

4.2. Resultados Modelo de tendencia lineal local

La tabla 4.17 presenta los resultados de las estimaciones bajo los diferentes tamaños de muestra y métodos de estimación. Las tablas 4.18 a 4.20 el resumen de la evaluación de cada aspecto para los nueve escenarios descritos en la sección 3.3 para el modelo de tendencia lineal local.

Pár.	Real	n = 50				n = 100				n = 1.000			
		MV	Bayesiana		EM	MV	Bayesiana		EM	MV	Bayesiana		EM
			Unif.	G.Inv.			Unif.	G.Inv.			Unif.	G.Inv.	
Ψ_1	0,75	0,5116	0,6055	0,5934	0,6088	0,5862	0,5816	0,5767	0,7452	0,7163	0,6183	0,6650	0,7538
Ψ_2	0,75	0,7844	0,8022	0,7947	0,7278	0,7854	0,8224	0,8381	0,8029	0,7907	0,8132	0,8181	0,8025
σ_ϵ^2	1	578,28	291,16	499,12	50,733	471,29	274,55	394,49	38,212	156,85	253,93	158,29	8,1935
σ_η^2	1.000	2.511,87	1.576,06	2.187,43	3.405,95	2.326,92	1.720,02	2.274,28	2.985,75	1.404,92	1.515,79	1.416,92	1.903,45
σ_ξ^2	1.000	1.094,63	965,18	926,93	355,28	995,27	948,22	959,87	205,68	863,86	965,66	870,53	279,75
Ψ_1	0,75	0,5874	0,5137	0,5682	1,7008	0,6311	0,5020	0,6182	0,8469	0,7545	0,5852	0,7389	0,7741
Ψ_2	0,75	0,4968	0,6673	0,5589	0,4151	0,5189	0,6887	0,5904	0,5342	0,6438	0,6780	0,6420	0,6595
σ_ϵ^2	1	3,8692	2,6648	4,0597	3,4702	2,3543	1,1304	2,6975	2,1260	1,2767	0,8370	1,2841	1,2194
σ_η^2	1	9,5273	4,1714	8,4603	12,553	3,7029	2,5843	4,0712	7,6959	1,0106	1,5315	1,0118	4,6097
σ_ξ^2	1	7,4387	3,1190	5,9427	4,2089	3,3831	2,0881	3,3469	1,3992	1,6218	1,7615	1,6364	0,7282
Ψ_1	0,75	0,3002	0,3003	0,3901	0,2371	0,3949	0,3285	0,5728	0,6012	0,6599	0,4018	0,7744	0,8017
Ψ_2	0,75	0,1805	0,1776	0,1231	0,2335	0,2191	0,2324	0,1610	0,3982	0,2767	0,2488	0,2208	0,1788
σ_ϵ^2	1	5,0657	1,8192	2,8706	0,6810	2,6838	0,8893	1,8201	0,5776	1,2301	0,7725	1,3415	0,7073
σ_η^2	0,01	5,3722	1,7926	3,0160	1,1877	2,4928	0,8233	1,7085	1,2972	0,5205	0,6519	0,6734	0,2259
σ_ξ^2	0,01	0,7262	0,6498	0,3288	0,01603	0,2779	0,6057	0,1872	0,02007	0,06778	0,2602	0,07069	0,01201
Ψ_1	0,95	0,5275	0,8185	0,8325	0,7297	0,6472	0,8118	0,8962	0,9803	0,9389	0,8752	0,9300	0,9559
Ψ_2	0,95	0,9548	0,9616	0,9604	0,7598	0,9782	0,9707	0,9646	0,9379	0,9648	0,9591	0,9702	0,9619
σ_ϵ^2	1	8.030,41	1.373,72	832,91	39.179,1	3.515,11	1.856,06	521,61	4.414,32	543,03	830,65	283,79	147,53
σ_η^2	1.000	7.384,79	3.543,37	2.487,75	157.752,4	5.189,40	6.351,82	3.570,57	19.213,3	2.453,67	6.570,51	3.677,88	3.549,36
σ_ξ^2	1.000	6.862,92	1.188,91	1.010,38	849.820,7	2.635,41	1.031,80	639,75	2.440,49	872,49	867,25	792,40	417,33
Ψ_1	0,95	0,8081	0,7691	0,7693	0,4839	0,8951	0,7820	0,8839	0,7721	0,9507	0,8607	0,9367	0,9251
Ψ_2	0,95	0,8619	0,8925	0,8551	0,7679	0,9225	0,9176	0,9328	0,9081	0,9439	0,9155	0,9418	0,9427
σ_ϵ^2	1	2,0446	0,9814	2,0109	1,1001	1,2796	0,8511	1,2901	0,5268	1,0125	0,8865	1,0241	0,1966
σ_η^2	1	3,8181	2,6221	3,7913	40,753	1,8591	1,7505	1,8011	26,278	0,9275	1,6214	0,9408	6,0864
σ_ξ^2	1	3,1960	2,8109	3,1224	31,199	1,5359	2,3813	1,4438	15,164	1,0312	1,8392	1,0513	1,3585

Continúa en la siguiente página

Pár.	Real	n = 50				n = 100				n = 1.000			
		MV	Bayesiana		EM	MV	Bayesiana		EM	MV	Bayesiana		EM
			Unif.	G.Inv.			Unif.	G.Inv.			Unif.	G.Inv.	
Ψ_1	0,95	0,6815	0,6814	0,7829	-0,2152	0,8165	0,6378	0,8014	0,5995	0,9507	0,7754	0,9403	0,9023
Ψ_2	0,95	0,5879	0,5131	0,5638	0,1185	0,7040	0,6255	0,6581	0,6239	0,9302	0,7541	0,9259	0,9289
σ_ϵ^2	1	2,1534	1,4316	2,1574	1,2744	1,3221	0,8061	1,2752	0,4672	1,0009	0,8701	1,0074	0,6226
σ_η^2	0,01	1,6136	1,3109	1,6668	2,2639	0,6331	0,5086	0,6324	1,1197	0,04748	0,3149	0,04917	0,21814
σ_ξ^2	0,01	0,2246	0,3706	0,1831	0,2244	0,1462	0,2075	0,1294	0,1672	0,01333	0,06021	0,01452	0,01620
Ψ_1	1	-145,19	156,19	156,21	0,1657	-6,6926	19,429	19,466	-0,5002	0,9988	0,9679	0,9727	-0,3216
Ψ_2	1	0,9841	0,9903	0,9971	-464,21	1,0068	0,9811	1,0114	-5,9737	0,9979	0,9883	0,9929	0,9935
σ_ϵ^2	1	50.616,78	47.579,9	47.579,8	271.496	21.567,4	21.351,7	21.351,7	583.244	664,77	664,86	664,79	1261,44
σ_η^2	1.000	32.521,9	30.570,6	36.570,5	190.804	13.527,4	13.392,1	13.392,2	178.351	1.690,39	1690,55	1690,61	10.196,7
σ_ξ^2	1.000	40.920,8	38.465,8	38.465,5	345.339,1	14.778,9	14.631,3	14.631,2	581.758,8	1.075,23	1.075,28	1.075,26	621,79
Ψ_1	1	0,8069	0,7581	0,7486	-4,2789	0,9362	0,9324	0,9527	-2,0524	0,9981	0,9781	0,9953	-10,501
Ψ_2	1	0,9573	0,9192	0,8629	0,6240	0,9865	0,9782	0,9826	0,9533	0,9987	0,9866	0,9954	0,9966
σ_ϵ^2	1	12,529	1,6202	1,6892	1.490,49	1,1189	1,0446	1,1146	1,1457	1,0023	0,9355	1,0126	1,0013
σ_η^2	1	19,458	5,4425	4,6018	6.099,3	2,1941	3,3982	1,8167	114,85	0,9684	2,2036	0,9719	14,979
σ_ξ^2	1	7,5444	3,4516	2,5079	26,078	1,6213	2,2213	1,2692	31,522	1,0185	1,6341	1,0335	4,2443
Ψ_1	1	0,8807	0,8862	0,8942	-1,3286	0,9798	0,7819	0,8115	-0,1968	0,9970	0,9842	0,9966	-6,5597
Ψ_2	1	0,7418	0,7596	0,8017	-0,2162	0,9347	0,8569	0,7799	0,5537	0,9994	0,9876	0,9992	0,9959
σ_ϵ^2	1	1,3086	1,1349	1,3896	1,7328	1,1092	2,4143	1,0781	1,4519	0,9928	0,9834	0,9967	40,766
σ_η^2	0,01	0,6543	0,6317	0,7068	9,0789	0,2041	0,6316	0,1822	27,169	0,03305	0,1289	0,03342	361,02
σ_ξ^2	0,01	0,1633	0,1968	0,1474	2,8226	0,03267	0,07933	0,02724	29,778	0,01075	0,02192	0,01182	136,28

TABLA 4.17. Resultados de las estimaciones para el modelo de tendencia lineal local

Modelo	Estimación	Filtración	Convergencia	Pronóstico
$\Psi_1 = \Psi_2 = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 1.000$	MV	Kalman MV	Kalman Unif.	Kalman MV
$\Psi_1 = \Psi_2 = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 1$	G. Inv.	Kalman MV	Kalman Unif.	Kalman MV
$\Psi_1 = \Psi_2 = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 0,01$	MV	Kalman MV	Kalman Unif.	Kalman MV
$\Psi_1 = \Psi_2 = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 1.000$	EM	Kalman MV	Kalman G. Inv.	Kalman Unif.
$\Psi_1 = \Psi_2 = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 1$	G. Inv.	Kalman Unif.	Kalman Unif.	Kalman MV
$\Psi_1 = \Psi_2 = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = 1 \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 0,01$	EM	Kalman MV	Kalman Unif.	Kalman MV
$\Psi_1 = \Psi_2 = \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 1.000$	EM	Kalman Unif.	Kalman MV	Kalman G. Inv.
$\Psi_1 = \Psi_2 = \sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 1$	G. Inv.	Kalman Unif.	Kalman Unif.	Kalman MV
$\Psi_1 = \Psi_2 = \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 0,01$	MV	Kalman MV	Kalman G. Inv.	Kalman MV

TABLA 4.18. Resumen de evaluación de aspectos para el modelo de tendencia lineal local $n = 50$

Modelo	Estimación	Filtración	Convergencia	Pronóstico
$\Psi_1 = \Psi_2 = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 1.000$	MV	Infor. G. Inv.	Kalman Unif.	Infor. G. Inv.
$\Psi_1 = \Psi_2 = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 1$	G. Inv.	Kalman MV	Kalman Unif.	Infor. EM
$\Psi_1 = \Psi_2 = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 0,01$	EM	Kalman MV	Kalman Unif.	Infor. Unif.
$\Psi_1 = \Psi_2 = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 1.000$	EM	Kalman MV	Kalman Unif.	Infor. Unif.
$\Psi_1 = \Psi_2 = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 1$	MV	Kalman MV	Infor. Unif.	Infor. Unif.
$\Psi_1 = \Psi_2 = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = 1 \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 0,01$	G. Inv.	Kalman MV	Kalman Unif.	Infor. Unif.
$\Psi_1 = \Psi_2 = \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 1.000$	MV	Kalman EM	Kalman MV	Kalman Unif.
$\Psi_1 = \Psi_2 = \sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 1$	MV	Kalman MV	Kalman EM	Kalman MV
$\Psi_1 = \Psi_2 = \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 0,01$	Unif.	Kalman MV	Kalman EM	Infor. MV

TABLA 4.19. Resumen de evaluación de aspectos para el modelo de tendencia lineal local $n = 100$

Modelo	Estimación	Filtración	Convergencia	Pronóstico
$\Psi_1 = \Psi_2 = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 1.000$	MV	Infor. G. Inv.	Kalman Unif.	Infor. Unif.
$\Psi_1 = \Psi_2 = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 1$	MV	Infor. EM	Kalman Unif.	Infor. Unif.
$\Psi_1 = \Psi_2 = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 0,01$	MV	Infor. MV	Kalman Unif.	Infor. Unif.
$\Psi_1 = \Psi_2 = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 1.000$	MV	Kalman Unif.	Kalman MV	Infor. Unif.
$\Psi_1 = \Psi_2 = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 1$	MV	Infor. MV	Kalman Unif.	Infor. Unif.
$\Psi_1 = \Psi_2 = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = 1 \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 0,01$	G. Inv.	Kalman Unif.	Kalman Unif.	Infor. Unif.
$\Psi_1 = \Psi_2 = \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 1.000$	MV	Kalman MV	Kalman Unif.	Kalman Unif.
$\Psi_1 = \Psi_2 = \sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 1$	MV	Kalman MV	Kalman Unif.	Infor. MV
$\Psi_1 = \Psi_2 = \sigma_\epsilon^2 = 1; \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 0,01$	MV	Kalman MV	Kalman Unif.	Infor. Unif.

TABLA 4.20. Resumen de evaluación de aspectos para el modelo de tendencia lineal local $n = 1.000$

- Estimación:** La estimación MV resultó ser la de mejor resultado en la mayor cantidad de escenarios, especialmente para tamaño de muestra grande. En el menor tamaño de muestra trabajado, el algoritmo EM y las estimaciones bayesianas ofrecieron mejores resultados. Para el tamaño de muestra $n = 50$ las estimaciones de MV, algoritmo EM y con a priori gamma inversa registraron cada una, tres escenarios donde fueron las de mejor resultado. Para el tamaño de muestra $n = 100$ la estimación bajo MV registró cuatro escenarios donde fue la de mejor resultado, la de algoritmo EM y bajo a priori gamma inversa, dos escenarios cada una y bajo a priori uniforme un escenario. Los resultados para el tamaño de muestra $n = 1.000$ evidenciaron que la estimación MV registró ocho escenarios donde fue la de mejor resultado y la estimación bajo a priori gamma inversa el escenario restante. Para el menor de los tamaños de muestra la estimación bajo a priori gamma inversa fue la mejor en los escenarios donde la varianza en la ecuación de medición y las del estado son iguales, la estimación MV es mejor en aquellos casos donde los componentes Ψ son iguales a 0,75 y un caso donde $\sigma_\epsilon^2 \gg \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2$ y la estimación bajo algoritmo

EM resultó ser la mejor en los escenarios donde los componentes Ψ son iguales a 0,95 y un caso donde $\sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 \gg \sigma_\epsilon^2$. Cuando el tamaño de muestra se duplica la estimación MV resultó efectiva, como ya se dijo, en cuatro escenarios, principalmente en casos donde la varianza de la innovación en la ecuación de medición es mayor que las varianzas en el estado y bajo el tamaño de muestra $n = 1.000$ fue la mejor en todos los escenarios a excepción del caso donde $\Psi_1 = \Psi_2 = 0,95$; $\sigma_\epsilon^2 = 1$ $\sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 0,01$.

- **Filtración:** En general el filtro de Kalman ofreció resultados más cercanos a los verdaderos valores del estado que el de información. Para el tamaño de muestra $n = 50$ la filtración de Kalman con estimaciones MV fue la de mejor resultado en seis escenarios y la de Kalman con estimaciones bajo a priori uniforme en los tres escenarios restantes. Para el tamaño de muestra $n = 100$ la filtración de Kalman con estimaciones MV fue la de mejor resultado en siete escenarios, la de Kalman con resultados EM en uno, así como la filtración de información con estimaciones bajo a priori gamma inversa. Los resultados con un tamaño de muestra $n = 1.000$ evidenciaron que la filtración de Kalman con estimaciones MV fue la de mejor resultado en tres escenarios, la de Kalman con estimaciones bajo a priori uniforme y la de información con estimaciones MV en dos en dos cada una, mientras que la de información con estimaciones EM y con estimaciones bajo a priori gamma inversa fueron la mejor en una ocasión cada una. Para los tamaños de muestra $n = 50$ y $n = 100$ el filtro de Kalman brindó mejores resultados que el de información en todos los escenarios, a excepción del caso en que $\Psi_1 = \Psi_2 = 0,75$; $\sigma_\epsilon^2 = 1$; $\sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 1.000$. Sin embargo en el tamaño de muestra $n = 1.000$ el filtro de información pasó a ser una mejor opción cuando los parámetros Ψ son iguales a 0,75 y en el caso en que $\Psi_1 = \Psi_2 = 0,95$; $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 1$.
- **Convergencia:** Para los tres tamaños de muestra la filtración de Kalman a las estimaciones obtenidas bajo a priori uniforme fue la de mejor resultado en términos de convergencia. Bajo el tamaño de muestra $n = 50$ registró cinco escenarios donde el filtro alcanzó una solución de estado estable con mayor velocidad y para los tamaños de muestra $n = 100$ y $n = 1.000$ registró cuatro y ocho escenarios respectivamente. En solo uno de los escenarios el filtro de información alcanzó una solución de estado estable con mayor velocidad que el filtro de Kalman, esto ocurrió en el caso $\Psi_1 = \Psi_2 = 0,95$; $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 = 1$.
- **Pronósticos:** En el menor tamaño de muestra el filtro de Kalman brindó mejores pronósticos que el de información en todos los escenarios, sin embargo a medida que aumentó el tamaño de muestra el filtro de información presentó mejores resultados, tanto así que de los dieciocho escenarios en tamaños de muestra $n = 100$ y $n = 1.000$ el filtro de información presentó mejores resultados que el de Kalman en quince. Para el tamaño de muestra $n = 50$ los pronósticos realizados bajo el filtro de Kalman con resultados MV resultaron ser los más acertados en siete escenarios y aquellos realizados bajo filtro de Kalman con estimaciones obtenidas mediante a priori uniforme y a priori gamma inversa en los dos casos restantes. Para el tamaño de muestra $n = 100$ los pronósticos realizados bajo el filtro de información aplicado a las estimaciones con a priori uniforme registraron ser los de mayor acierto en cuatro escenarios, los de filtro de información a resultados MV, EM y a priori gamma inversa en un escenario cada uno y los dos escenarios restantes fueron registrados por pronósticos con filtración de Kalman a resultados MV y con a priori uniforme. Para el tamaño de muestra $n = 1.000$ la filtración de información a resultados obtenidos con a priori

uniforme, fue la de mayor acierto en siete escenarios, los dos restantes se atribuyen a la filtración de información a resultados MV y a la de Kalman a estimaciones bajo a priori uniforme.

4.3. Resultados modelo de tendencia mas ciclo

Considere, para simplificar la escritura, que $\Theta = (\phi_1, \phi_2, \lambda_c, \rho)$ y $\Sigma = (\sigma_\eta^2, \sigma_\xi^2, \sigma_k^2)$

La tabla 4.21 presenta los resultados de las estimaciones bajo los diferentes tamaños de muestra y métodos de estimación. Las tablas 4.22 a 4.24 el resumen de la evaluación de cada aspecto para los nueve escenarios descritos en la sección 3.3 para el modelo de tendencia mas ciclo.

Pár.	Real	n = 50				n = 100				n = 1.000			
		MV	Bayesiana		EM	MV	Bayesiana		EM	MV	Bayesiana		EM
			Unif.	G.Inv.			Unif.	G.Inv.			Unif.	G.Inv.	
ϕ_1	0,75	0,5069	0,4698	0,4737	2,4845	0,5745	0,5439	0,5650	0,6474	0,7183	0,5831	0,7283	0,7395
ϕ_2	0,75	0,7725	0,7778	0,7961	0,7545	0,7964	0,7718	0,8018	0,7873	0,7644	0,7441	0,7739	0,7626
λ_c	0,75	30,833	36,591	36,693	40,447	27,564	31,724	31,867	25,552	5,3996	4,1690	4,3519	9,9523
ρ	0,75	0,8305	0,8294	0,8567	0,7767	0,8131	0,8001	0,8273	0,7899	0,7442	0,7204	0,7018	0,6662
σ_ϵ^2	1	113,56	209,21	47,455	17,510	108,73	252,06	46,630	33,533	69,622	318,56	21,126	11,543
σ_η^2	1.000	1.074,24	1.434,24	1.022,09	1.431,07	1.075,01	1.788,84	778,71	1.407,68	1.055,67	1.405,62	495,36	1.359,51
σ_ξ^2	1.000	965,13	1.029,13	899,68	887,06	972,77	1.162,251	821,76	891,85	1.021,58	1.219,47	902,93	977,61
σ_k^2	1.000	1.015,91	1.224,05	1.127,85	878,08	1.062,71	1.237,17	1.425,50	908,02	1.027,67	1.169,03	1.530,92	864,35
ϕ_1	0,75	0,5131	0,6521	0,6614	0,4748	0,6172	0,6121	0,7768	0,8644	0,7367	0,5546	0,7286	0,8189
ϕ_2	0,75	0,5009	0,6596	0,6649	0,3055	0,5487	0,5814	0,5920	0,5757	0,6891	0,6502	0,7634	0,7109
λ_c	0,75	0,4828	0,4280	0,8355	0,6809	0,7188	0,6591	1,0997	1,2324	0,6318	0,4576	0,8067	0,7384
ρ	0,75	0,4687	0,4690	0,7278	0,5714	0,5224	0,5218	0,6571	0,5969	0,6858	0,5799	0,7026	0,7150
σ_ϵ^2	1	1,3497	1,2544	0,8778	0,9885	1,5964	0,9351	0,7806	1,0320	0,9237	0,8631	0,9274	0,4787
σ_η^2	1	1,8129	2,2130	0,7324	3,4150	1,6987	1,4617	0,8771	3,1301	1,0311	1,8481	0,7867	2,4412
σ_ξ^2	1	2,9737	1,8305	0,8789	2,4046	2,6175	2,3481	1,2186	2,1042	1,3647	2,1795	1,0404	0,9940
σ_k^2	1	1,6710	1,3024	1,0315	0,5174	2,0988	1,4609	1,2802	0,4734	1,4772	1,3284	0,9431	0,3776
ϕ_1	0,75	0,2585	0,3397	0,3007	0,3775	0,4008	0,5203	0,9483	0,6337	0,5873	0,4102	0,3972	0,6813
ϕ_2	0,75	0,2373	0,2472	0,2803	0,2864	0,2242	0,2197	0,07901	0,3117	0,4173	0,3277	0,2167	0,4194
λ_c	0,75	1,2303	0,7087	1,0823	1,3859	1,2944	0,3838	0,8072	1,5614	1,0227	0,4560	0,7637	1,4616
ρ	0,75	0,1306	0,2736	0,2096	0,1943	0,1146	0,5035	0,6369	0,2275	0,1983	0,3496	0,6845	0,3131
σ_ϵ^2	1	1,5140	0,6833	1,0662	1,2162	1,3471	0,4229	0,9353	1,2382	1,0099	0,5766	0,6946	0,9480
σ_η^2	0,01	0,9912	0,5721	0,5780	0,8135	0,7237	0,3106	0,3446	0,6580	0,2147	0,3547	0,2513	0,2051
σ_ξ^2	0,01	0,2346	0,3162	0,6028	0,1388	0,09519	0,2258	0,1556	0,06516	0,04343	0,07649	0,08335	0,03291
σ_k^2	0,01	0,8843	0,4880	0,7879	0,1103	0,7487	0,2132	0,2851	0,09571	0,2849	0,2940	0,1283	0,01335

Continúa en la siguiente página

Pár.	Real	n = 50				n = 100				n = 1.000			
		MV	Bayesiana		EM	MV	Bayesiana		EM	MV	Bayesiana		EM
			Unif.	G.Inv.			Unif.	G.Inv.			Unif.	G.Inv.	
ϕ_1	0,95	0,7953	0,7908	0,8331	0,5762	0,8776	0,7952	0,9139	0,8321	0,9271	0,8201	0,9437	0,9273
ϕ_2	0,95	0,9872	0,9697	0,9897	0,9537	0,9902	0,9802	0,9874	0,9754	0,9642	0,9624	0,9673	0,9618
λ_c	0,95	32,934	21,874	21,954	20,552	13,981	7,7941	8,0521	13,995	1,1778	1,0604	1,2238	1,4269
ρ	0,95	0,9167	0,8909	0,9292	0,8592	0,8706	0,8806	0,9129	0,8232	0,9369	0,8488	0,9372	0,9218
σ_ϵ^2	1	139,52	284,53	50,464	128,86	232,97	947,05	79,930	94,872	153,11	791,71	5,4124	45,373
σ_η^2	1.000	1.195,47	2.864,16	1.022,90	2.195,04	1.230,87	4.744,10	1.123,79	1.994,62	1.217,12	7.029,69	1.076,74	1.782,78
σ_ξ^2	1.000	1.131,66	1.745,64	891,61	1.062,48	1.162,23	1.731,51	780,75	984,79	977,77	1.797,27	715,25	915,94
σ_k^2	1.000	1.237,64	1.429,83	1.159,27	1.376,78	1.444,57	3.256,90	1.286,81	1.541,43	1.177,01	2.796,29	1.308,17	1.153,68
ϕ_1	0,95	0,7566	0,5421	0,5788	0,02454	0,8499	0,7415	0,9021	0,6033	0,9438	0,8103	0,9368	0,9121
ϕ_2	0,95	0,9108	0,6625	0,6784	0,2635	0,9383	0,8762	0,9300	0,8099	0,9463	0,9074	0,9431	0,9452
λ_c	0,95	0,8774	0,5087	0,6725	-0,3173	0,9316	0,7585	0,9268	0,2494	0,9494	0,8548	0,9473	0,9464
ρ	0,95	0,8714	0,5789	0,6429	0,3543	0,8982	0,7647	0,8888	0,6491	0,9477	0,8647	0,9435	0,9358
σ_ϵ^2	1	0,9995	0,6540	0,6859	0,4202	0,9498	0,8348	0,9343	0,8088	1,0226	0,8887	0,9715	0,1063
σ_η^2	1	1,6196	2,4287	0,7457	9,3240	1,7027	2,5193	0,9327	8,0690	0,96301	2,3180	0,9652	3,7156
σ_ξ^2	1	2,3351	2,7532	0,6501	3,8566	1,7191	3,9458	1,0048	2,6272	1,0392	2,7501	1,0461	0,9292
σ_k^2	1	1,8952	1,4806	0,8311	2,6753	1,6227	1,7427	1,5333	2,4087	1,0542	1,7525	0,9699	0,8281
ϕ_1	0,95	0,6073	0,6238	0,6070	-0,5669	0,8300	0,5091	0,4880	-0,00566	0,9429	0,7511	0,5378	0,9096
ϕ_2	0,95	0,5426	0,5439	0,5393	-0,5892	0,7839	0,5018	0,4790	0,1107	0,9345	0,7437	0,5431	0,8979
λ_c	0,95	1,2448	0,7883	1,2045	0,09090	0,9919	0,4489	0,7140	0,3914	0,9499	0,5884	0,9201	0,9710
ρ	0,95	0,1536	0,2956	0,2286	0,1138	0,5707	0,2976	0,3914	0,4309	0,9368	0,3848	0,7829	0,9061
σ_ϵ^2	1	1,2552	0,6382	1,0952	0,8045	1,1780	0,5189	0,6695	0,8744	1,0038	0,7607	0,7924	0,9980
σ_η^2	0,01	0,7492	0,5809	0,5705	2,3080	0,5515	0,2888	0,3991	1,6557	0,05094	0,3438	0,5129	0,1659
σ_ξ^2	0,01	0,2302	0,3536	0,6694	0,2567	0,09687	0,1016	0,2210	0,1978	0,01336	0,06523	0,1889	0,04293
σ_k^2	0,01	0,4048	0,4821	0,4880	0,5662	0,1779	0,2159	0,2403	0,3929	0,01589	0,1698	0,04721	0,01631

Continúa en la siguiente página

Pár.	Real	n = 50				n = 100				n = 1.000			
		MV	Bayesiana		EM	MV	Bayesiana		EM	MV	Bayesiana		EM
			Unif.	G.Inv.			Unif.	G.Inv.			Unif.	G.Inv.	
ϕ_1	1	0,6359	0,8971	0,8996	0,3864	0,9688	0,9765	0,9844	0,7326	0,9969	0,9890	0,9967	0,7945
ϕ_2	1	1,0565	1,0281	1,0361	0,9613	1,0403	1,0288	1,0319	1,0075	1,0029	1,0011	1,0031	-548,54
λ_c	1	30,338	10,756	10,759	-8.515,75	11,777	6,1378	6,1466	-8,6467	0,9991	0,9924	0,9993	-7,3487
ρ	1	0,9420	0,9782	0,9815	0,6576	0,9625	0,9755	0,9877	0,5846	0,9981	0,9915	0,9978	0,7471
σ_ϵ^2	1	266,85	184,81	126,57	1.593,81	139,14	637,48	106,37	205,18	12,971	496,39	9.1245	105,23
σ_η^2	1.000	1.293,92	2.025,14	1.139,22	16.335,6	1.172,32	2.129,32	1.173,29	2.506,82	1.098,78	3.160,86	1.142,32	1.849,21
σ_ξ^2	1.000	1.030,16	1.277,61	895,92	7.927,33	1.056,95	1.363,04	967,49	840,23	997,82	1.658,94	983,55	880,60
σ_k^2	1.000	1.160,59	1.410,87	1.106,81	11.180,9	1.123,16	1.606,98	1.046,21	993,26	1.018,48	1.736,96	1.005,91	1003,08
ϕ_1	1	0,7756	0,7730	0,7838	-0,5129	0,9581	0,9449	0,9845	18.254,1	0,9438	0,9122	0,9651	0,9121
ϕ_2	1	0,9625	0,8535	0,8428	0,4592	0,9677	0,9608	0,9698	7.573,05	0,9463	0,9673	0,9713	0,9452
λ_c	1	0,9144	0,7963	0,8445	-2,3672	0,9658	0,9767	0,9940	-1.316.547	0,9494	0,9402	0,9696	0,9464
ρ	1	0,9465	0,8050	0,8335	-0,1224	0,9741	0,9689	0,9856	-2.00.4810	0,9477	0,9309	0,9669	0,9358
σ_ϵ^2	1	1,8958	0,8984	0,9585	7,4930	1,2403	0,9511	1,0185	7.547.440	1,0226	0,8406	0,9816	0,1063
σ_η^2	1	3,2459	2,4613	1,3014	49,624	2,6779	2,7017	1,4803	17.125.326	0,9631	2,6704	0,9707	3,7156
σ_ξ^2	1	3,3716	3,0906	1,8599	15,373	1,9608	2,8432	1,3037	2.016.141	1,0392	2,8173	1,0549	0,9292
σ_k^2	1	3,5108	2,4392	1,6181	15,161	2,5181	2,0272	1,3241	3.087.374	1,0542	2,2554	0,9742	0,8281
ϕ_1	1	0,5792	0,6076	0,6125	-3,0333	0,9465	0,9418	0,9534	-88.211,2	0,9987	0,9818	0,9934	-1.480.830
ϕ_2	1	0,8742	0,8386	0,8781	-2,2176	0,9787	0,9563	0,9671	-537,01	0,9990	0,9862	0,9894	-167.718,8
λ_c	1	1,2546	1,0133	1,0428	-2,2129	1,0301	0,9024	0,9732	194.948,1	1,0001	0,9819	0,9985	-1.886.936,1
ρ	1	0,4188	0,6509	0,6634	-0,00926	0,9092	0,8542	0,9595	-470.448,2	0,9989	0,9740	0,9971	-2.881.011,8
σ_ϵ^2	1	1,2656	0,9979	1,0639	0,4019	0,9989	0,9319	1,0096	125,35	1,0023	0,9585	0,9545	7.480.822,6
σ_η^2	0,01	0,7146	0,6177	0,9509	6,1938	0,1786	0,2659	0,2804	50,179	0,03111	0,1839	0,1844	5.364.263,2
σ_ξ^2	0,01	0,2431	0,3453	0,3896	0,5825	0,01966	0,03497	0,08516	0,06840	0,01004	0,02090	0,05735	1.007.101,9
σ_k^2	0,01	0,2924	0,3325	0,2088	2,1424	0,05034	0,1202	0,05130	125,53	0,01019	0,03643	0,01479	6.817.753,1

TABLA 4.21. Resultados de las estimaciones para el modelo de tendencia mas ciclo

Modelo	Estimación	Filtración	Convergencia	Pronóstico
$\Theta = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = 1; \Sigma = 1.000$	EM	Kalman MV	Kalman Unif.	Infor. G. Inv.
$\Theta = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = \Sigma = 1$	G. Inv.	Kalman MV	Kalman G. Inv.	Infor. Unif.
$\Theta = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = 1; \Sigma = 0,01$	EM	Infor. G. Inv.	Kalman Unif.	Infor. Unif.
$\Theta = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = 1; \Sigma = 1.000$	EM	Infor. MV	Kalman Unif.	Infor. Unif.
$\Theta = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = \Sigma = 1$	MV	Infor. MV	Kalman G. Inv.	Infor. G. Inv.
$\Theta = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = 1; \Sigma = 0,01$	MV	Kalman EM	Kalman Unif.	Infor. Unif.
$\Theta = \sigma_\epsilon^2 = 1; \Sigma = 1.000$	MV	Infor. MV	Kalman G. Inv.	Kalman G. Inv.
$\Theta = \sigma_\epsilon^2 = \Sigma = 1$	G. Inv.	Kalman MV	Kalman Unif.	Kalman G. Inv.
$\Theta = \sigma_\epsilon^2 = 1; \Sigma = 0,01$	MV	Kalman MV	Kalman Unif.	Kalman MV

TABLA 4.22. Resumen de evaluación de aspectos para el modelo de tendencia mas ciclo $n = 50$

Modelo	Estimación	Filtración	Convergencia	Pronóstico
$\Theta = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = 1; \Sigma = 1.000$	MV	Kalman MV	Kalman Unif.	Infor. Unif.
$\Theta = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = \Sigma = 1$	MV	Kalman MV	Kalman Unif.	Infor. Unif.
$\Theta = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = 1; \Sigma = 0,01$	EM	Kalman MV	Kalman Unif.	Infor. G. Inv.
$\Theta = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = 1; \Sigma = 1.000$	EM	Infor. MV	Kalman G. Inv.	Infor. Unif.
$\Theta = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = \Sigma = 1$	G. Inv.	Kalman MV	Kalman G. Inv.	Infor. Unif.
$\Theta = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = 1; \Sigma = 0,01$	MV	Kalman MV	Kalman Unif.	Infor. G. Inv.
$\Theta = \sigma_\epsilon^2 = 1; \Sigma = 1.000$	MV	Infor. MV	Kalman Unif.	Infor. Unif.
$\Theta = \sigma_\epsilon^2 = \Sigma = 1$	MV	Kalman MV	Kalman Unif.	Infor. Unif.
$\Theta = \sigma_\epsilon^2 = 1; \Sigma = 0,01$	MV	Kalman MV	Kalman G. Inv.	Infor. Unif.

TABLA 4.23. Resumen de evaluación de aspectos para el modelo de tendencia mas ciclo $n = 100$

Modelo	Estimación	Filtración	Convergencia	Pronóstico
$\Theta = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = 1; \Sigma = 1.000$	MV	Kalman MV	Kalman G. Inv.	Infor. Unif.
$\Theta = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = \Sigma = 1$	MV	Kalman MV	Kalman Unif.	Infor. Unif.
$\Theta = 0,75; \sigma_\epsilon^2 = 1; \Sigma = 0,01$	EM	Infor. MV	Kalman Unif.	Infor. G. Inv.
$\Theta = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = 1; \Sigma = 1.000$	MV	Infor. MV	Kalman G. Inv.	Infor. Unif.
$\Theta = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = \Sigma = 1$	MV	Kalman MV	Kalman MV	Infor. Unif.
$\Theta = 0,95; \sigma_\epsilon^2 = 1; \Sigma = 0,01$	MV	Kalman MV	Kalman Unif.	Infor. G. Inv.
$\Theta = \sigma_\epsilon^2 = 1; \Sigma = 1.000$	MV	Infor. MV	Kalman G. Inv.	Kalman Unif.
$\Theta = \sigma_\epsilon^2 = \Sigma = 1$	MV	Kalman MV	Kalman MV	Infor. Unif.
$\Theta = \sigma_\epsilon^2 = 1; \Sigma = 0,01$	MV	Kalman MV	Kalman Unif.	Infor. Unif.

TABLA 4.24. Resumen de evaluación de aspectos para el modelo de tendencia mas ciclo $n = 1.000$

- **Estimación:** La estimación MV fue la de mejor resultado en la mayoría de escenarios. Para el tamaño de muestra $n = 50$ la estimación MV registró cuatro escenarios donde fue la de mejor resultado, le siguió, con tres escenarios la estimación bajo algoritmo EM y con dos la estimación con a priori gamma inversa. Para el tamaño de muestra $n = 100$ la estimación MV registró seis escenarios donde fue la de mejor resultados, la estimación bajo algoritmo EM dos escenarios y la estimación con a priori gamma inversa el escenario restante. Los resultados bajo el tamaño de muestra $n = 1.000$ evidenciaron que la estimación MV registró ocho escenarios donde fue la de mejor resultado y el escenario restante es atribuido a la estimación bajo algoritmo EM. Para el modelo de tendencia más ciclo puede observarse, que en el tamaño de muestra mas pequeño, la estimación MV funcionó mejor en escenarios donde los componentes Θ son mayores a 0,75, en cuatro de esos seis escenarios fue donde registró mejores resultados que los otros métodos de estimación. El algoritmo EM en esta situación de tamaño de muestra pequeño, ofreció su mejor versión en los casos donde los componentes Θ son inferiores a 1 y existe una diferencia marcada entre la varianza de la innovación en la ecuación de medición y las varianzas de las innovaciones en la ecuación de estado. A medida que aumentó el tamaño de muestra, la estimación MV mejoró en resultados a los otros métodos de estimación, tanto así que bajo $n = 1.000$ resultó ser el mejor método de estimación en ocho escenarios, exceptuando el caso en que $\Theta = 0,75$; $\sigma_\epsilon^2 = 1$; $\Sigma = 0,01$.
- **Filtración:** Para el tamaño de muestra $n = 50$ la filtración de Kalman con resultados MV fue la de mejor resultado en cuatro escenarios, la de información con resultados MV en tres y la de Kalman con resultados EM e información con resultados bajo a priori gamma inversa, en un escenario cada una. Para el tamaño de muestra $n = 100$ la filtración de Kalman con resultados MV fue la de mejor resultado en siete escenarios y la de información a resultados MV en dos. Los resultados con un tamaño de muestra $n = 1.000$ evidenciaron que la filtración de Kalman con resultados MV fue la de mejor resultado en cinco escenarios y la de información a resultados MV en los cuatro restantes. Para el modelo de tendencia más ciclo la filtración a resultados MV fue la de mejor desempeño en veinticinco escenarios a excepción de dos casos en que la filtración a resultados gamma inversa y EM respectivamente, ofrecieron un mejor desempeño, estos casos fueron $\Theta = 0,75$; $\sigma_\epsilon^2 = 1$; $\Sigma = 0,01$ y $\Theta = 0,95$; $\sigma_\epsilon^2 = 1$; $\Sigma = 0,01$. En el tamaño de muestra $n = 50$ el filtro de información ofreció mejores resultados que el de Kalman cuando los componentes en Θ son iguales a 0,95, además de un par de escenarios en que σ_ϵ^2 fue fijada para ser significativamente menor o mayor que las varianzas de las innovaciones en el estado. En el tamaño de muestra $n = 100$ el filtro de Kalman brindó mejores resultados que el de información en todos los escenarios a excepción de $\Theta = 0,95$; $\sigma_\epsilon^2 = 1$; $\Sigma = 1.000$ y $\Theta = \sigma_\epsilon^2 = 1$; $\Sigma = 1.000$. Al aumentar el tamaño de muestra y llegar a $n = 1.000$, el filtro de información ofreció mejores resultados que el de Kalman en la mayoría de escenarios en que las varianzas entre la innovación en la ecuación de medición y las innovaciones en la ecuación de estado presentan diferencias, bien sea, muy superior o inferior. En estos escenarios es recomendable estimar con MV, filtro de Kalman y realizar el procedimiento de filtración bajo el filtro de información.
- **Convergencia:** En todos los escenarios el filtro de Kalman convergió con mayor velocidad que el de información y en general los resultados con mayor velocidad de convergencia fueron aquellos obtenidos mediante estimaciones Bayesianas. Para los tamaños de muestra $n = 50$ y $n = 100$ la filtración de Kalman con resultados bajo

a priori uniforme alcanzó una solución de estado estable con mayor velocidad en seis escenarios, la de Kalman a resultados bajo a priori gamma inversa en los tres restantes. Los resultados para el tamaño de muestra $n = 1.000$ evidenciaron que la filtración de Kalman con resultados bajo a priori uniforme alcanzó una solución de estado estable con mayor velocidad en cuatro escenarios, la de Kalman a resultados bajo a priori gamma inversa en tres y la de Kalman a resultados MV en los dos restantes. Únicamente en los casos en que las varianzas de las innovaciones fueron iguales, los resultados MV ofrecieron mejores resultados de convergencia.

- **Pronósticos:** Como en los modelos anteriores los pronósticos obtenidos mediante el filtro de información resultaron ser de mayor acierto que los obtenidos mediante filtro de Kalman, en apenas cuatro escenarios el filtro de Kalman brindó mejores resultados y tres de esos casos fue cuando el tamaño de muestra fue $n = 50$. Para el tamaño de muestra $n = 50$ los pronósticos realizados mediante el filtro de información bajo resultados con a priori uniforme resultaron ser los mas acertados en cuatro escenarios, aquellos bajo el mismo filtro a resultados con a priori gamma inversa en dos escenarios, los pronósticos realizados mediante el filtro de Kalman bajo resultados con a priori gamma inversa y a resultados MV registraron dos y un escenario respectivamente. Para el tamaño de muestra $n = 100$ los pronósticos realizados mediante el filtro de información bajo resultados con a priori uniforme resultaron ser los mas acertados en siete escenarios, en los dos escenarios restantes, los pronósticos bajo la misma filtración a resultados con a priori gamma inversa fueron los de mayor acierto. Los resultados para el tamaño de muestra $n = 1.000$ evidenciaron que nuevamente, los pronósticos realizados mediante el filtro de información bajo resultados con a priori uniforme resultaron ser los de mayor acierto (con seis escenarios) seguidos de los pronósticos bajo resultados con a priori gamma inversa (dos escenarios) y los pronósticos obtenidos con filtración de Kalman a resultados bajo a priori uniforme (un escenario).

Aplicación a datos reales

Bomhoff (1991) aplicó la metodología de filtro de Kalman para estimar la elasticidad de la tasa de interés frente a la velocidad de la base monetaria $M1$ y $M2$ en siete países industrializados: Estados Unidos, Japón, Alemania, Inglaterra, Francia, Italia y Canadá, esto para una serie entre 1950 y 1988 para aquel país con mayor cantidad de datos, Canadá. El autor considera la relación más sencilla entre precios, ingreso, tasa de interés y velocidad del dinero, que viene dada por la ecuación cuantitativa del dinero:

$$p_t + y_t - M_t = V_t = c_t + tr_t + \theta i_t + u_t \quad (5.1)$$

En la ecuación (5.1), p_t representa el logaritmo natural del nivel de precios en una economía; y_t es el logaritmo de una medida apropiada para el ingreso relacionado con la demanda de dinero; M_t el logaritmo de la base monetaria y V_t el logaritmo de la velocidad del dinero. En el lado derecho de la ecuación, c_t representa un término de giro en la regresión; tr_t es una tendencia lineal para el logaritmo de V ; i_t es el logaritmo de alguna tasa de interés relevante y u_t el término residual en la regresión; θ es un coeficiente a ser estimado.

El modelo en REE es el siguiente:

$$V_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_t \\ tr_t \\ \theta_t \end{bmatrix} + u_t \quad var(u) = R \quad (5.2)$$

$$\begin{bmatrix} c_{t+1} \\ tr_{t+1} \\ \theta_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_t \\ tr_t \\ \theta_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

$$var \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

La ecuación (5.2) es la ecuación de observación. “Señala que el nivel del logaritmo de la velocidad, V , es igual a la suma de un parámetro de giro, el producto de la elasticidad de la tasa de interés, θ y la tasa de interés i_t y un término de residuo, u_t . La ecuación de estado (5.3) posee una parte predeterminada y una estocástica. En la parte predeterminada, el parámetro de giro es ajustado hacia arriba en cada periodo por la cantidad tr_t , que representa una tendencia. En la parte estocástica, el término de la tendencia, tr_t , está sujeto a un choque estocástico, w_2 y el parámetro de giro está sujeto a choques estocásticos permanentes, w_1 . La elasticidad de la tasa de interés no está sujeta a choques estocásticos. El filtro de Kalman provee estimaciones para las varianzas Q_1, Q_2 y R , entonces procesa los datos en línea para brindar estimaciones de las variables de estado, en este caso, el parámetro de giro, la tendencia y la elasticidad de la tasa de interés, así como sus matrices de varianza y covarianza P_t ” (Bomhoff 1991, pp.630-631)

El autor encontró que la elasticidad de la tasa de interés frente a la velocidad del dinero es más elástica para M_1 que para M_2 en todos los países a excepción de Estados Unidos (Bomhoff 1991, p.635)

En el presente trabajo se replicó el modelo para el caso colombiano en una serie de años de 1986 a 2013. La siguiente tabla presenta la categorización de variables para la réplica en el caso colombiano:

Variable	Descripción	Fuente
$M1_t$	Base monetaria $M1$, es la suma del efectivo circulante en la economía y de los depósitos en cuenta corriente.	BANREP.
$M2_t$	Base monetaria $M2$, es la suma del $M1$ y de los cuasidineros.	BANREP.
i_t	Tasas de captación mensuales DTF.	BANREP.
p_t	IPC base 2.005	DANE.
y_t	PIB a precios constantes por encadenamiento base 2.005, serie retropolada.	DANE.

TABLA 5.1. Categorización de variables

Considerando estas variables, la velocidad del dinero puede interpretarse como el número de veces que el dinero debe circular entre los agentes económicos para generar cierto nivel de ingreso en la economía en un año. En el caso colombiano se realizó el mismo procedimiento que el descrito para las simulaciones, se realizaron estimaciones bajo MV, algoritmo EM y considerando *priors* uniforme y gamma inversa a los parámetros. Posteriormente se realizó la filtración de Kalman e información a cada resultado de estimación y se realizaron los pronósticos. La tabla 5.2 presenta las estimaciones para los parámetros de varianza del modelo, aquellos valores con ** son estadísticamente significativos al nivel de significancia de 0,05. Todos los métodos a excepción del bayesiano con *prior* gamma inversa estiman varianzas muy cercanas a cero, adicionalmente, las estimaciones bajo MV y *prior* uniforme no presentan parámetros estadísticamente significativos.

Método	Base Monetaria	R	Q_1	Q_2
MV	M1	2,02E-19 (883,1)	0,0012 (0,0089)	0,0006 (0,0089)
	M2	1,01E-15 (1.338,7)	0,0013 (0,0021)	0,0005 (0,0021)
Unif.	M1	4,07-21 (53,2)	0,00087 (0,0729)	2,755E-43 (9,1312)
	M2	4,12E-22 (50,7)	0,000054 (0,0685)	3,21E-41 (8,9911)
G. Inv.	M1	295,9** (8,17)	310,5** (6,19)	8,22E-17 (5,69)
	M2	296,1** (8,19)	310,6** (6,25)	9,99E-30 (4,61)
EM	M1	5,63E-31 (0,0505)	0,0916** (0,0505)	0,0111 (0,0504)
	M2	3,25E-28 (0,0505)	0,0939** (0,0505)	0,0104 (0,0505)

TABLA 5.2. Resultados de estimación de las varianzas para modelo caso colombiano

A los resultados de la tabla 5.2 se le realiza la filtración para obtener la elasticidad de la tasa de interés. Los valores de arranque para el filtro de Kalman son $\mathbf{a}_0 = [V_1 \ 0 \ i_1]$ y $\mathbf{P}_0 = k\mathbf{I}_3$ con $k = 100$ y para el filtro de información \mathbf{P}_0^{-1} como inversa de la varianza en el estado inicial y con $\tilde{\mathbf{a}}_0 = \mathbf{P}_0^{-1} \mathbf{a}_0$. La tabla 5.3 presenta las estimaciones para la elasticidad de la tasa de interés:

Método	M1	M2
Kalman MV	0,1641	0,0866
Infor. MV	0,1633	0,0859
Kalman Unif.	0,1752	0,0804
Infor. Unif.	0,1746	0,0808
Kalman G. Inv.	0,1927	0,0664
Infor. G. Inv.	0,2365	0,3964
Kalman EM	0,1679	0,0804
Infor. EM	0,1323	0,0333

TABLA 5.3. Elasticidad de la tasa de interés para velocidad del dinero: M1 y M2. Caso colombiano

La elasticidad de la tasa de interés para $M1$ presentó valores similares en los diferentes métodos de estimación y filtración. Las estimaciones realizadas con la *prior* gamma inversa fueron las que registraron mayor elasticidad de la tasa de interés para $M1$. En el caso de $M2$ la elasticidad estimada fue siempre menor que la asociada a $M1$ a excepción de la filtración de información aplicada a resultados con *prior* gamma inversa. Comparando los resultados con los obtenidos por Bomhoff (1991), aunque aclarando que los tiempos son completamente diferentes, Colombia también presentó un comportamiento más elástico en la velocidad del dinero de $M1$.

Este modelo presenta un comportamiento similar al de tendencia lineal local, es decir, la filtración alcanzará una solución de estado estable a medida que el valor de Q_2 sea más grande. En todos los escenarios, la estimación fue cercana a 0 y debido a la cantidad de datos en el modelo no se alcanzó solución de estado estable en ninguna filtración. Las gráficas 5.1 y 5.2 presentan la filtración de los componentes c y tr bajo cada uno de los casos:

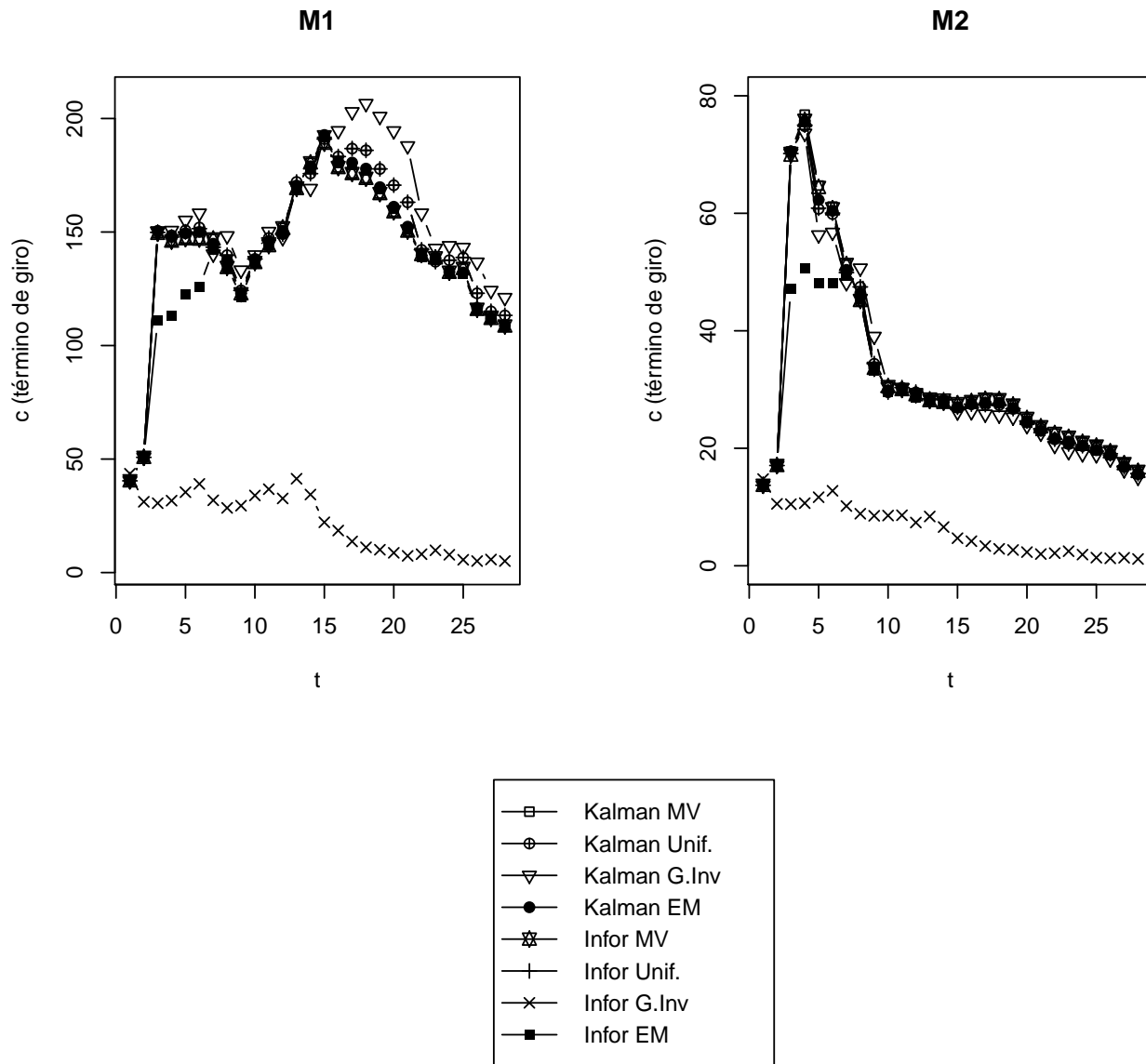
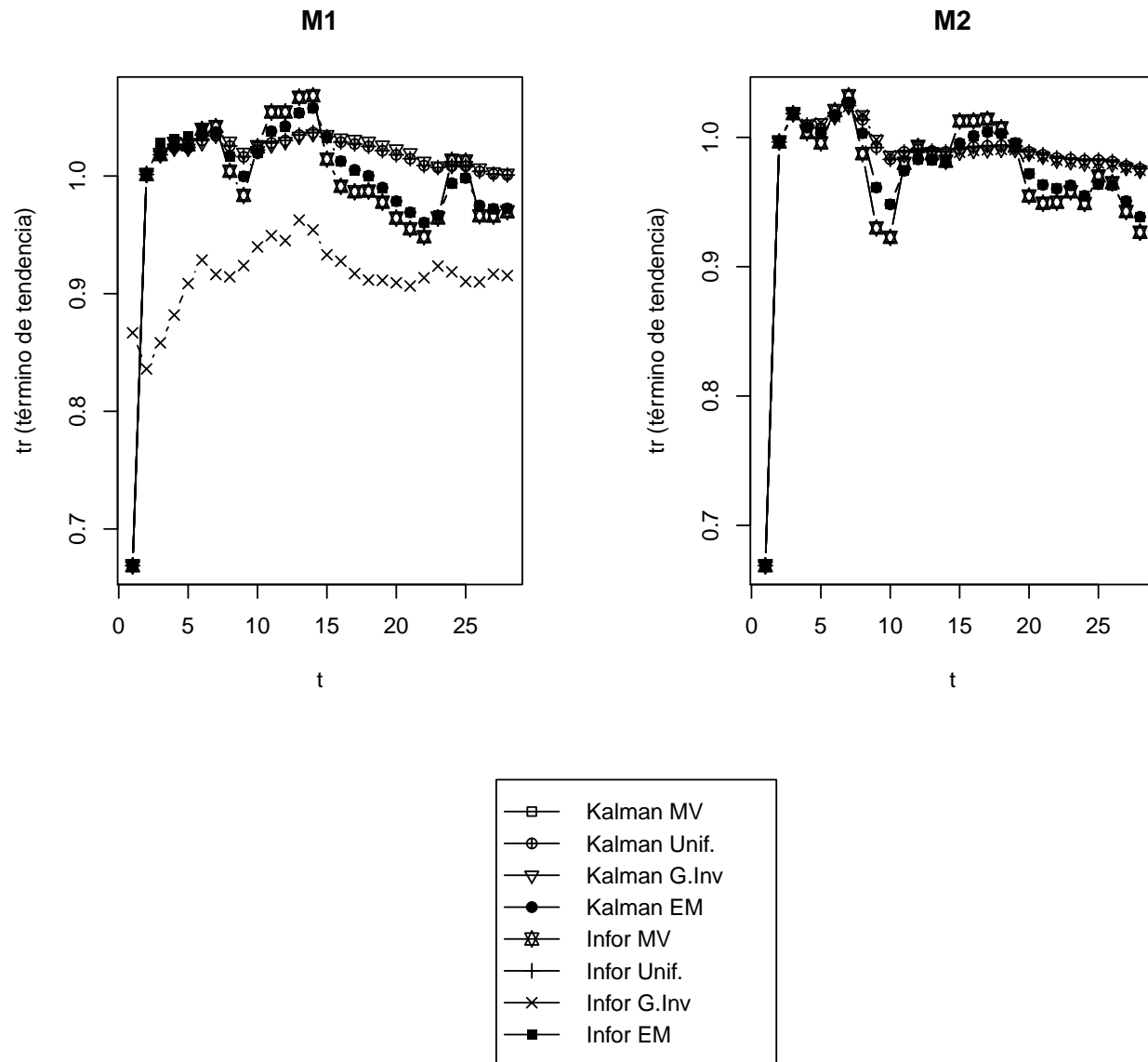


FIGURA 5.1. Valores filtrados del componente de giro de la velocidad del dinero de $M1$ y $M2$

FIGURA 5.2. Valores filtrados del componente de tendencia de la velocidad del dinero de $M1$ y $M2$

En general ambos filtros presentan resultados similares bajos los distintos métodos de estimación, únicamente la filtración de información aplicada a resultados de estimaciones bajo *prior* gamma inversa evidencia resultados realmente distintos: En el componente de giro c para $M1$ y también para $M2$, presenta valores entre 2 y 4 veces menores a las otras filtraciones y en el caso de la tendencia tr presenta en casi todos los años de la serie el menor valor dentro de los métodos de filtración.

Con base en los resultados obtenidos mediante simulaciones al modelo de tendencia lineal local, las estimaciones más precisas serían aquellas obtenidas mediante MV y la filtración más cercana a los verdaderos valores de los elementos en el vector de estados, sería la de Kalman aplicada a estimaciones MV.

En el caso de los pronósticos, se presenta la evaluación para la serie V_t tanto para la base $M1$ como $M2$. El pronóstico se realiza de la misma forma que en las simulaciones, aunque en este caso se considera un caso de cinco pasos adelante. Los resultados para los pronósticos de la velocidad del dinero asociada a $M1$ evidencian que todos son mejores que el pronóstico plano y la filtración de información a resultados MV es la de mejores resultados, presentando los menores errores de pronóstico en todos los escenarios. Por otro lado, para el pronóstico de la velocidad del dinero asociada a $M2$, los mejores pronósticos son los presentados por la filtración de Kalman a las estimaciones bajo *prior* gamma inversa. Las tablas 5.4 y 5.5 presentan la evaluación correspondiente, la primera no incluye los resultados de la U de Theil ya que en todos los casos el pronóstico realizado superó al plano y en la segunda, se indica el caso en que dicho es pronóstico es mejor o no que el plano:

Aspecto	h = 1	h = 2	h = 3	h = 4	h = 5
Kalman MV (0)					
RMSE	0,369484	0,3104967	0,2630088	0,203361	0,2646935
MAE	0,3667521	0,3093412	0,2602112	0,2010327	0,2629473
MAPE	8,2908444	7,0358642	5,9646883	4,6408179	6,1150485
Infor. MV (15)					
RMSE	0,3581227	0,3103739	0,2628792	0,2032879	0,2646458
MAE	0,3666367	0,3092174	0,260079	0,200959	0,2628985
MAPE	8,2882358	7,0330457	5,961657	4,639117	6,11392
Kalman Unif. (0)					
RMSE	0,5429287	0,517978	0,4946458	0,4036559	0,396452
MAE	0,5336824	0,5135824	0,4898946	0,3945435	0,3867505
MAPE	12,0744136	11,6903465	11,2418116	9,1319737	9,0101507
Infor. Unif. (0)					
RMSE	0,5431614	0,5182901	0,4950406	0,4040625	0,3968135
MAE	0,5339066	0,5138863	0,4902800	0,3949347	0,3870947
MAPE	12,0794907	11,6972681	11,2506595	9,1410376	9,0181847
Kalman G. Inv. (0)					
RMSE	0,6380835	0,6234309	0,6095436	0,493106	0,4336549
MAE	0,6289017	0,618827	0,6046821	0,4845508	0,4243665
MAPE	14,2255868	14,0848364	13,8741841	11,210875	9,8842459
Infor. G. Inv. (0)					
RMSE	1,440158	1,559413	1,699727	1,560277	1,325546
MAE	1,433604	1,55086	1,691939	1,555415	1,32167
MAPE	32,381415	35,284855	38,800909	35,925491	30,717097
Kalman EM (0)					
RMSE	0,4182528	0,3625751	0,3127127	0,2389173	0,2702549
MAE	0,4140741	0,361826	0,3113476	0,2368627	0,2682659
MAPE	9,3634978	8,2320869	7,1397777	5,4728196	6,2395289
Infor. EM (0)					
RMSE	0,4140583	0,3582134	0,3081559	0,2360559	0,2682282
MAE	0,4099013	0,3574635	0,306765	0,2339863	0,2662218
MAPE	9,2691835	8,1328143	7,0346637	5,406397	6,1920769

TABLA 5.4. Resultados de pronósticos serie V_t de $M1$, para el modelo en el caso colombiano.

Aspecto	h = 1	h = 2	h = 3	h = 4	h = 5
Kalman MV (2)					
RMSE	0,1311878	0,03839972	0,07318056	0,08193696	0,04171125
MAE	0,113203	0,03745581	0,07048489	0,07830438	0,03765715
MAPE	3,6143171	11,9617798	22,985415	25,8780663	12,5387558
UTHEIL	No	Sí	No	No	Sí
Infor. MV (3)					
RMSE	0,1314029	0,03815286	0,07291019	0,08179158	0,04161849
MAE	0,1133614	0,03719856	0,07021084	0,07815099	0,03755523
MAPE	3,6194274	1,18791174	2,28961895	2,58275979	1,25047899
UTHEIL	No	Sí	No	No	Sí
Kalman Unif. (4)					
RMSE	0,1191691	0,07951428	0,05508611	0,03029259	0,04332922
MAE	0,1043118	0,06677	0,04668171	0,02865374	0,03162906
MAPE	3,3272516	21,7066833	15,3352551	0,94195317	10,7005751
UTHEIL	No	No	No	Sí	Sí
Infor. Unif. (3)					
RMSE	0,1205495	0,08102368	0,05664485	0,03084451	0,04403488
MAE	0,1053899	0,06801444	0,04803135	0,02931055	0,03209611
MAPE	3,3619395	2,21132858	1,57810981	0,96434927	1,08634463
UTHEIL	No	No	No	Sí	Sí
Kalman G. Inv. (11)					
RMSE	0,08864764	0,07048016	0,0452143	0,03495297	0,04505882
MAE	0,07947865	0,0593619	0,03764173	0,02545517	0,04116704
MAPE	2,52639622	1,92838015	1,23469386	0,82510905	1,36915696
UTHEIL	No	No	Sí	Sí	Sí
Infor. G. Inv. (0)					
RMSE	1,508411	1,59899	1,71712	1,591866	1,385288
MAE	1,503627	1,593739	1,710849	1,58561	1,380259
MAPE	47,388998	51,177505	55,680049	52,267917	46,219966
UTHEIL	No	No	No	No	No
Kalman EM (3)					
RMSE	0,1303351	0,03067993	0,04529899	0,0673259	0,04449568
MAE	0,1131211	0,02494355	0,04336712	0,06603301	0,03987395
MAPE	3,6103158	0,79975868	1,40476639	2,17571608	1,32337455
UTHEIL	No	Sí	Sí	No	Sí
Infor. EM (5)					
RMSE	0,1278239	0,03042919	0,04824719	0,06926919	0,04576058
MAE	0,1112262	0,02404635	0,046466	0,06800442	0,0412783
MAPE	3,5492149	0,76919082	1,50567626	2,24066714	1,37031816
UTHEIL	No	Sí	No	No	Sí

TABLA 5.5. Resultados de pronósticos serie V_t de $M2$, para el modelo en el caso colombiano.

Conclusiones

- En el modelo de caminata aleatoria las estimaciones MV y mediante algoritmo EM fueron las de mejor resultado. En general la estimación bajo algoritmo EM resultó mejor que las otras en aquellos escenarios donde $\sigma_\epsilon^2 \ll \sigma_\eta^2$ en otros escenarios la estimación MV resultó ser una mejor opción. La filtración de Kalman presentó resultados más cercanos a los verdaderos valores del estado y tiempos de convergencia menores a una solución de estado estable, que la de información en todos los escenarios, a excepción de aquellos en donde $\sigma_\epsilon^2 \gg \sigma_\eta^2$. En general los pronósticos realizados con el filtro de Kalman presentaron mejores resultados que los del filtro de información, cuando el tamaño de muestra es pequeño aquellos pronósticos realizados bajo los resultados de estimación del algoritmo EM son los de mayor acierto, mientras que si el tamaño de muestra es grande los de mayor acierto resultaron ser aquellos bajo resultados MV.
- En el modelo de tendencia lineal local la estimación MV resultó ser la de mejor resultado en la mayor cantidad de escenarios, especialmente para tamaño de muestra grande. En el menor tamaño de muestra trabajado, el algoritmo EM y las estimaciones bayesianas ofrecieron mejores resultados. En general el filtro de Kalman ofreció resultados más cercanos a los verdaderos valores del estado que el de información y para todos los tamaños de muestra la filtración de Kalman a las estimaciones obtenidas bajo *prior* uniforme fue la de menor tiempo de convergencia. En el menor tamaño de muestra el filtro de Kalman brindó mejores pronósticos que el de información en todos los escenarios, sin embargo a medida que aumentó el tamaño de muestra el filtro de información presentó mejores resultados, tanto así que de los dieciocho escenarios en tamaños de muestra $n = 100$ y $n = 1.000$ el filtro de información presentó mejores resultados que el de Kalman en quince.
- En el modelo de tendencia mas ciclo la estimación MV fue la de mejor resultado en la mayoría de escenarios. En el tamaño de muestra más bajo el filtro de Kalman ofrece resultados más cercanos al verdadero valor de los elementos de estado, sin embargo al aumentar el tamaño de muestra y llegar a $n = 1.000$, el filtro de información ofreció mejores resultados que el de Kalman en la mayoría de escenarios en que las varianzas entre la innovación en la ecuación de medición y las innovaciones en la ecuación de estado presentan diferencias, bien sea, muy superior o inferior. En estos escenarios es recomendable estimar con MV y realizar el procedimiento de filtración bajo el filtro de información. En todos los escenarios el filtro de Kalman convergió con mayor velocidad que el de información y en general los resultados con mayor velocidad de convergencia fueron aquellos obtenidos mediante estimaciones

Bayesianas. Como en los modelos anteriores los pronósticos obtenidos mediante el filtro de información resultaron ser de mayor acierto que los obtenidos mediante filtro de Kalman, en apenas cuatro escenarios el filtro de Kalman brindó mejores resultados y tres de esos casos fue cuando el tamaño de muestra fue $n = 50$.

- La estimación de la elasticidad de la velocidad del dinero a la tasa de interés evidencia que $M1$ presenta un comportamiento más elástico que $M2$ en todos los escenarios, a excepción de cuando se aplicó el filtro de información a las estimaciones obtenidas con *prior* gamma inversa. La estimación de los componentes de giro y tendencia de la velocidad del dinero muestran una mayor velocidad de circulación para $M1$ y resultados similares entre los métodos de filtración a excepción del caso ya descrito. Aplicar el filtro de información a los resultados MV ofrece los mejores pronósticos para la velocidad del dinero de $M1$, mientras que la filtración de Kalman a los resultados obtenidos mediante *prior* gamma inversa ofrece los mejores pronósticos para la velocidad del dinero de $M2$.

Bibliografía

- [1] Gelman A., *Prior Distributions for Variance Parameters in Hierarchical Models*, Bayesian Analysis **1** (2006), no. 3, 515–533.
- [2] Harvey A., *Trends and Cycles in Macroeconomic Time Series*, Journal of Business & Economic Statistics **3** (1985), no. 3, 216–227.
- [3] Harvey A., *Forecasting Structural Time Series Models, and the Kalman Filter*, Cambridge University Press, 1989.
- [4] Jazwinski A., *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Oxford University Press, 2004.
- [5] Terra M. & Ishihara J. & Padoan A., *Information Filtering and Array Algorithms for Descriptor Systems Subject to Parameter Uncertainties*, IEEE **55** (2007), no. 1, 1–9.
- [6] Sims C., *A simple model for study of the determination of the price level and the interaction of monetary and fiscal policy*, Economic Theory **4** (1994), no. 3, 381–399.
- [7] Bomhoff E., *Stability of Velocity in the Major Industrial Countries*, IMF Staff Papers **38** (1991), no. 3, 626–642.
- [8] Hayashi F., *Econometrics*, Princeton University Press, 2000.
- [9] Heij F. & Van Dijk F., *Econometric Methods with Applications in Business and Economics*, New York: Academic Press, 1970.
- [10] Tusell F., *Kalman Filtering in R*, Journal of Statistical Software **39** (2011), no. 2, 1–27.
- [11] Bierman G., *A Comparison of Discrete Linear Filtering Algorithms*, Journal of Money, Credit and Banking **38** (2006), no. 5, 1149–1173.
- [12] Gardner G. & Harvey A. & Phillips G., *An Algorithm for Exact Maximum Likelihood Estimation of Autoregressive-Moving Average Models by Means of Kalman Filtering*, Applied Statistics **29** (1980), 311–322.
- [13] Hyndman R. & Athanasopoulos G., *Forecasting: Principles and Practice*, Otexts, 2013.
- [14] Albert J., *Bayesian Computation with R*, Springer, 2009.
- [15] Anderson B. & Moore J., *Optimal Filtering*, primera ed., Prentice Hall, 1979.

-
- [16] Boivin J., *Has U.S. Monetary Policy Changed? Evidence from Drifting Coefficients and Real-Time Data*, IEEE **9** (1973), no. 1, 28–37.
- [17] Burmeister E. & Kent D. & Hamilton J., *Estimation of Unobserved Expected Monthly Inflation Using Kalman Filtering*, Journal of Business **4** (1986), no. 2, 147–160.
- [18] Julio J., *Modeling Data Revisions*, Borradores de Economía. Banco de la Republica (2011).
- [19] Julio J. & Gomez J., *Output Gap Estimation, Estimation Uncertainty and its Effect on Policy Rules*, Borradores de Economía. Banco de la Republica (1999).
- [20] Press J., *Subjective and Objective Bayesian Statistics*, Wiley, 2003.
- [21] Xue-Song P., *Monte Carlo Kalman Filter and Smoothing for Multivariate Discrete State Space Models*, The Canadian Journal of Statistics **28** (2000), no. 3, 641–652.
- [22] Brockwell P. & Davis R., *Introduction to Time Series and Forecasting*, segunda ed., Springer, 2002.
- [23] Hyndman R., *fpp: Data for "forecasting: principles and practice"*, 2013, R package version 0.5.
- [24] Kalman R., *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*, Journal of Basic Engineering **D82** (1960), 35–45.
- [25] Bauer T. & Holger B. & Lorenz G. & Uwe S., *Real and Nominal Wage Rigidities and the Rate of Inflation: Evidence from West German Micro Data*, The Economic Journal **117** (2007), no. 524, 508–529.
- [26] Borman S., *The EM Algorithm, a Short Tutorial*, 2004.
- [27] Durbin J. & Koopman S., *Time Series Analysis by State Space Methods*, primera ed., Oxford University Press, 2001.
- [28] Gaviria A. & Tellez S., *Expectativas de Inflacion en Colombia*, Vniversitas Economica. Pontificia Universidad Javeriana **10** (2010), no. 12.
- [29] Kaminski P. & Bryson A. & Schmidt S., *Discrete Square Root Filtering, a Survey of Current Techniques*, IEEE **16** (1971), no. 6, 727–736.
- [30] Thomas A. Best N. G. Gilks W. R. Spiegelhalter, D. J. and D. Lunn, *BUGS: Bayesian inference using Gibbs sampling*, MRC Biostatistics Unit, 2003.
- [31] McLachlan G. & Krishnan T., *The EM Algorithm and Extensions*, Wiley, 2008.
- [32] Jakas V., *the term structure, latent factors and macroeconomic data: A local linear level model*, the IEB international journal of finance (2004).
- [33] Enders W., *Econometric Applied Time Series*, segunda ed., John Wiley and Sons, 2004.

Derivación del filtro de Kalman

Cálculo del autor.

Teniendo como referencia la REE de las ecuaciones (2.1) y (2.2), así como los supuestos descritos en la sección 2.1 se deriva el filtro de Kalman a continuación.

Para $t = 1$,

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_1 &= \mathbf{Z}_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \mathbf{d}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_1 &= \mathbf{T}_1\boldsymbol{\alpha}_0 + \mathbf{c}_1 + \mathbf{R}_1\boldsymbol{\eta}_1\end{aligned}$$

Calcular $E(\boldsymbol{\alpha}_t|\mathbf{Y}_{t-1})$

Media

$$\begin{aligned}E(\boldsymbol{\alpha}_1|\mathbf{Y}_0) &= E(\mathbf{T}_1\boldsymbol{\alpha}_0 + \mathbf{R}_1\boldsymbol{\eta}_1|\mathbf{Y}_0) \\ &= E(\mathbf{T}_1\boldsymbol{\alpha}_0|\mathbf{Y}_0) + E(\mathbf{c}_1|\mathbf{Y}_0) + E(\mathbf{R}_1\boldsymbol{\eta}_1|\mathbf{Y}_0) \\ &= \mathbf{T}_1E(\boldsymbol{\alpha}_0|\mathbf{Y}_0) + \mathbf{c}_1 + \mathbf{R}_1E(\boldsymbol{\eta}_1|\mathbf{Y}_0) \\ &= \mathbf{T}_1\mathbf{a}_0 + \mathbf{c}_1 = \mathbf{a}_{1|0}\end{aligned}\tag{A.1}$$

Calcular $VAR(\boldsymbol{\alpha}_t|\mathbf{Y}_{t-1})$

Varianza

$$\begin{aligned}VAR(\boldsymbol{\alpha}_1|\mathbf{Y}_0) &= E\{(\boldsymbol{\alpha}_1 - E(\boldsymbol{\alpha}_1|\mathbf{Y}_0))(\boldsymbol{\alpha}_1 - E(\boldsymbol{\alpha}_1|\mathbf{Y}_0))^\top|\mathbf{Y}_0\} \\ &= E\{(\boldsymbol{\alpha}_1 - \mathbf{T}_1\mathbf{a}_0 - \mathbf{c}_1)(\boldsymbol{\alpha}_1 - \mathbf{T}_1\mathbf{a}_0 - \mathbf{c}_1)^\top|\mathbf{Y}_0\} \\ &= E\{(\mathbf{T}_1\boldsymbol{\alpha}_0 + \mathbf{R}_1\boldsymbol{\eta}_1 - \mathbf{T}_1\mathbf{a}_0)(\mathbf{T}_1\boldsymbol{\alpha}_0 + \mathbf{R}_1\boldsymbol{\eta}_1 - \mathbf{T}_1\mathbf{a}_0)^\top|\mathbf{Y}_0\} \\ &= E\{(\mathbf{T}_1\boldsymbol{\alpha}_0 + \mathbf{R}_1\boldsymbol{\eta}_1 - \mathbf{T}_1\mathbf{a}_0)(\boldsymbol{\alpha}_0^\top\mathbf{T}_1^\top + \boldsymbol{\eta}_1^\top\mathbf{R}_1^\top - \mathbf{a}_0^\top\mathbf{T}_1^\top)|\mathbf{Y}_0\} \\ &= E\{\mathbf{T}_1\boldsymbol{\alpha}_0\boldsymbol{\alpha}_0^\top\mathbf{T}_1^\top + \mathbf{T}_1\boldsymbol{\alpha}_0\boldsymbol{\eta}_1^\top\mathbf{R}_1^\top - \mathbf{T}_1\boldsymbol{\alpha}_0\mathbf{a}_0^\top\mathbf{T}_1^\top + \mathbf{R}_1\boldsymbol{\eta}_1\boldsymbol{\alpha}_0^\top\mathbf{T}_1^\top + \mathbf{R}_1\boldsymbol{\eta}_1\boldsymbol{\eta}_1^\top\mathbf{R}_1^\top - \\ &\quad \mathbf{T}_1\mathbf{a}_0\boldsymbol{\alpha}_0^\top\mathbf{T}_1^\top - \mathbf{T}_1\boldsymbol{\alpha}_0\boldsymbol{\eta}_1^\top\mathbf{R}_1^\top + \mathbf{T}_1\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0^\top\mathbf{T}_1^\top|\mathbf{Y}_0\}\end{aligned}$$

Aplicando los supuestos y reduciendo términos semejantes:

$$\begin{aligned}VAR(\boldsymbol{\alpha}_1|\mathbf{Y}_0) &= \mathbf{T}_1E(\boldsymbol{\alpha}_0\boldsymbol{\alpha}_0^\top|\mathbf{Y}_0)\mathbf{T}_1^\top + \mathbf{R}_1E(\boldsymbol{\eta}_1\boldsymbol{\eta}_1^\top|\mathbf{Y}_0)\mathbf{R}_1^\top \\ &= \mathbf{T}_1\mathbf{P}_0\mathbf{T}_1^\top + \mathbf{R}_1\mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1^\top = \mathbf{P}_{1|0}\end{aligned}\tag{A.2}$$

Distribución condicional de α_1 en \mathbf{Y}_1

Escribiendo

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \mathbf{a}_{1|0} + (\alpha_1 - \mathbf{a}_{1|0}) \\ \mathbf{Y}_1 &= \mathbf{Z}_1 \mathbf{a}_{1|0} + \mathbf{d}_1 + \mathbf{Z}_1 (\alpha_1 - \mathbf{a}_{1|0}) + \epsilon_1\end{aligned}$$

Para el vector

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^\top \\ \mathbf{Y}_1^\top \end{bmatrix} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

Interesa calcular $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$

$\boldsymbol{\mu}$

$E(\alpha_1^\top) = \mathbf{a}_{1|0}^\top$ por (A.1).

$$\begin{aligned}E(\mathbf{Y}_1^\top) &= (\mathbf{Z}_1 E(\alpha_1) + E(\mathbf{d}_1) + E(\epsilon_1))^\top \\ &= (\mathbf{Z}_1 \mathbf{a}_{1|0} + \mathbf{d}_1)^\top\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1|0}^\top \\ (\mathbf{Z}_1 \mathbf{a}_{1|0} + \mathbf{d}_1)^\top \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$\boldsymbol{\Sigma}$

$VAR(\alpha_1) = \mathbf{P}_{1|0}$ por (A.2)

$$\begin{aligned}VAR(\mathbf{Y}_1) &= E\{(\mathbf{Y}_1 - E(\mathbf{Y}_1))(\mathbf{Y}_1 - E(\mathbf{Y}_1))^\top\} \\ &= E\{(\mathbf{Z}_1 \mathbf{a}_{1|0} + \mathbf{d}_1 + \mathbf{Z}_1 \alpha_1 - \mathbf{Z}_1 \mathbf{a}_{1|0} + \epsilon_1 - \mathbf{Z}_1 \mathbf{a}_{1|0} - \mathbf{a}_1)(\mathbf{Z}_1 \mathbf{a}_{1|0} + \mathbf{d}_1 + \mathbf{Z}_1 \alpha_1 - \mathbf{Z}_1 \mathbf{a}_{1|0} + \epsilon_1 - \\ &\quad \mathbf{Z}_1 \mathbf{a}_{1|0} - \mathbf{a}_1)^\top\} \\ &= E\{(\mathbf{Z}_1 \alpha_1 - \mathbf{Z}_1 \mathbf{a}_{1|0} + \epsilon_1)(\mathbf{Z}_1 \alpha_1 - \mathbf{Z}_1 \mathbf{a}_{1|0} + \epsilon_1)^\top\} \\ &= E(\mathbf{Z}_1 \alpha_1 \alpha_1^\top \mathbf{Z}_1^\top) - E(\mathbf{Z}_1 \alpha_1 \mathbf{a}_{1|0}^\top \mathbf{Z}_1^\top) + E(\epsilon_1 \alpha_1^\top \mathbf{Z}_1) - E(\mathbf{Z}_1 \mathbf{a}_{1|0} \alpha_1^\top \mathbf{Z}_1^\top) + \\ &\quad E(\mathbf{Z}_1 \mathbf{a}_{1|0} \mathbf{a}_{1|0}^\top \mathbf{Z}_1^\top) - E(\epsilon_1 \mathbf{a}_{1|0}^\top \mathbf{Z}_1^\top) + E(\epsilon_1 \alpha_1^\top \mathbf{Z}_1) - E(\epsilon_1 \mathbf{a}_{1|0}^\top \mathbf{Z}_1^\top) + E(\epsilon_1 \epsilon_1^\top)\end{aligned}$$

Aplicando supuestos y reduciendo términos semejantes:

$$VAR(\mathbf{Y}_1) = \mathbf{Z}_1 \mathbf{P}_{1|0} \mathbf{Z}_1^\top + \mathbf{H}_1 \quad (\text{A.4})$$

Covarianza

$$\begin{aligned}
 E(\boldsymbol{\alpha}_1^\top, \mathbf{Y}_1^\top) &= E(\boldsymbol{\alpha}_1 - E(\boldsymbol{\alpha}_1))(\mathbf{Y}_1 - E(\mathbf{Y}_1)) \\
 \boldsymbol{\alpha}_1 - E(\boldsymbol{\alpha}_1) &= \boldsymbol{\alpha}_1 - \mathbf{a}_{1|0} \\
 \mathbf{Y}_1 - E(\mathbf{Y}_1) &= \mathbf{Z}_1\boldsymbol{\alpha}_1 - \mathbf{Z}_1\mathbf{a}_{1|0} + \boldsymbol{\epsilon}_1 \\
 E(\boldsymbol{\alpha}_1^\top, \mathbf{Y}_1^\top) &= E[(\boldsymbol{\alpha}_1 - \mathbf{a}_{1|0})(\mathbf{Z}_1\boldsymbol{\alpha}_1 - \mathbf{Z}_1\mathbf{a}_{1|0} + \boldsymbol{\epsilon}_1)^\top] \\
 &= E(\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^\top\mathbf{Z}_1^\top) - E(\boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{a}_{1|0}^\top\mathbf{Z}_1^\top) + E(\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\epsilon}_1^\top) - E(\mathbf{a}_{1|0}\boldsymbol{\alpha}_1^\top\mathbf{Z}_1^\top) + \\
 &\quad E(\mathbf{a}_{1|0}\mathbf{a}_{1|0}^\top\mathbf{Z}_1^\top) - E(\mathbf{a}_{1|0}\boldsymbol{\epsilon}_1^\top) \\
 &= \mathbf{P}_{1|0}\mathbf{Z}_1^\top
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Así:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^\top \\ \mathbf{Y}_1^\top \end{bmatrix} \sim \mathbf{N}_m \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1|0}^\top \\ (\mathbf{Z}_1\mathbf{a}_{1|0} + \mathbf{d}_1)^\top \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{1|0} & \mathbf{P}_{1|0}\mathbf{Z}_1^\top \\ \mathbf{Z}_1\mathbf{P}_{1|0} & \mathbf{Z}_1\mathbf{P}_{1|0}\mathbf{Z}_1^\top + \mathbf{H}_1 \end{bmatrix} \right\} \tag{A.6}$$

Aplicando la definición:

Sean \mathbf{x} y \mathbf{y} dos vectores aleatorios conjuntamente normales tal que tienen media y covarianza dadas por

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_x \\ \boldsymbol{\mu}_y \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xx} & \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{yx} & \boldsymbol{\Sigma}_{yy} \end{bmatrix}$$

Entonces la distribución de \mathbf{x} condicionada en \mathbf{y} es también normal multivariada, con media

$$\boldsymbol{\mu}_{x|y} = \boldsymbol{\mu}_x + \boldsymbol{\Sigma}_{xy}\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y)$$

y varianza

$$\boldsymbol{\Sigma}_{xx|y} = \boldsymbol{\Sigma}_{xx} - \boldsymbol{\Sigma}_{xy}\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{yx}$$

Entonces, la distribución de $\boldsymbol{\alpha}_1$ condicionada un valor particular \mathbf{Y}_1 es normal multivariada con media

$$E(\boldsymbol{\alpha}_1|\mathbf{Y}_1) \equiv \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_{1|0} + \mathbf{P}_{1|0}\mathbf{Z}_1^\top\mathbf{F}_1^{-1}(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Z}_1\mathbf{a}_{1|0} - \mathbf{d}_1) \tag{A.7}$$

Con $\mathbf{F}_1 = \mathbf{Z}_1\mathbf{P}_{1|0}\mathbf{Z}_1^\top + \mathbf{H}_1$, y varianza

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_{1|0} - \mathbf{P}_{1|0}\mathbf{Z}_1^\top\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{Z}_1\mathbf{P}_{1|0} \tag{A.8}$$

Al repetir el proceso para $t = 2, \dots, T$ se obtiene un conjunto de ecuaciones que son las recursiones del filtro de Kalman.

APÉNDICE B

Lema de Inversión de Matrices

Anderson & Moore (1979, pp.148-149) presentan el lema de inversión de matrices, necesario para obtener las inversas de las matrices de covarianza del error de estimación en el filtro de información.

Para una matriz Σ de $n \times n$, una matriz \mathbf{R} de $p \times p$ y una matriz \mathbf{H} de $n \times p$ las siguientes ecuaciones son equivalentes, bajo el supuesto que las inversas existen:

$$\left(\mathbf{I} + \Sigma \mathbf{H} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}'\right)^{-1} \Sigma = \left(\Sigma^{-1} + \mathbf{H} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}'\right)^{-1} = \Sigma - \Sigma \mathbf{H} \left(\mathbf{H}' \Sigma \mathbf{H} + \mathbf{R}\right)^{-1} \mathbf{H}' \Sigma \quad (\text{B.1})$$

Multiplicando en la derecha por $\mathbf{H} \mathbf{R}^{-1}$ y aplicando la identidad:

$$\mathbf{H}' \Sigma \mathbf{H} \mathbf{R}^{-1} = \left[\left(\mathbf{H}' \Sigma \mathbf{H} + \mathbf{R}\right) \mathbf{R}^{-1} - \mathbf{I} \right]$$

Produce una variación de B.1 así

$$\left(\mathbf{I} + \Sigma \mathbf{H} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}'\right)^{-1} \Sigma \mathbf{H} \mathbf{R}^{-1} = \left(\Sigma^{-1} + \mathbf{H} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}'\right) \mathbf{H} \mathbf{R}^{-1} = \Sigma \mathbf{H} \left(\mathbf{H}' \Sigma \mathbf{H} + \mathbf{R}\right)^{-1} \quad (\text{B.2})$$

De la primera igualdad de B.1 se sostiene que

$$\left(\mathbf{I} + \Sigma \mathbf{H} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}'\right) \left[\mathbf{I} - \Sigma \mathbf{H} \left(\mathbf{H}' \Sigma \mathbf{H} + \mathbf{R}\right)^{-1} \mathbf{H}' \right] = \mathbf{I}$$

Estos dos resultados juntos producen la igualdad restante en B.1.

Función de Verosimilitud

Cálculo del autor.

C.1. Función de verosimilitud

Definiendo \mathbf{V}_t como

$$\mathbf{V}_t = \mathbf{Y}_t - E(\mathbf{Y}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = \mathbf{Y}_t - \mathbf{Z}_t \mathbf{a}_{t|t-1} + \mathbf{d}_t$$

La función de verosimilitud para la REE de las ecuaciones (2.1) y (2.2) se escribe como

$$L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}_{1:T}) = \prod_{i=1}^T \frac{1}{(2\pi)^{T/2} |\mathbf{F}_t|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{v}_t^T \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Log}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}_{1:T}) &= \prod_{i=1}^T \left[\log(1) - \log(2\pi)^{T/2} - \log |\mathbf{F}_t|^{1/2} - \frac{1}{2} \mathbf{v}_t^T \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t \right] \\ &= \prod_{i=1}^T \left[-\frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |\mathbf{F}_t| - \frac{1}{2} \mathbf{v}_t^T \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t \right] \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

$$= -\frac{NT}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \log |\mathbf{F}_t| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \mathbf{v}_t^T \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t \equiv \ell(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}_{1:T}) \quad (\text{C.2})$$

C.2. Función de verosimilitud con ecuación de estado observada

Para la REE de las ecuaciones (2.1) y (2.2) si se tiene en cuenta que $\boldsymbol{\alpha}_t$ es observado, la función de verosimilitud es

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y}, \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{i=1}^T \left[\frac{1}{(2\pi)^{T/2} |\mathbf{H}_t|^{T/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{Y}_t - \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{d}_t)^\top \mathbf{H}_t^{-1} (\mathbf{Y}_t - \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{d}_t)\right) \cdot \frac{1}{(2\pi)^{T/2} |\mathbf{Q}_t|^{T/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_{t-1} - \mathbf{c}_t)^\top \mathbf{Q}_t^{-1} (\boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_{t-1} - \mathbf{c}_t)\right) \cdot \frac{1}{(2\pi)^{1/2} |\mathbf{P}_0|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\boldsymbol{\alpha}_0 - \mathbf{a}_0)^\top \mathbf{P}_0^{-1} (\boldsymbol{\alpha}_0 - \mathbf{a}_0)\right) \right]$$

$$\begin{aligned} \log(L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y}, \boldsymbol{\alpha})) &= \prod_{i=1}^T \left[\log(1) - \log(2\pi)^{T/2} - \log|\mathbf{H}_t|^{T/2} - \frac{1}{2} (\mathbf{Y}_t - \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{d}_t)^\top \mathbf{H}_t^{-1} (\mathbf{Y}_t - \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{d}_t) - \right. \\ &\quad \left. \log(1) - \log(2\pi)^{T/2} - \log|\mathbf{Q}_t|^{T/2} - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_{t-1} - \mathbf{c}_t)^\top \mathbf{Q}_t^{-1} (\boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_{t-1} - \mathbf{c}_t) - \right. \\ &\quad \left. \log(1) - \log(2\pi)^{1/2} - \log|\mathbf{P}_0|^{1/2} - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\alpha}_0 - \mathbf{a}_0)^\top \mathbf{P}_0^{-1} (\boldsymbol{\alpha}_0 - \mathbf{a}_0) \right] \\ &= -NT \log(2\pi) - \frac{T}{2} \sum_{i=1}^T \log|\mathbf{H}_t| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T (\mathbf{Y}_t - \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{d}_t)^\top \mathbf{H}_t^{-1} (\mathbf{Y}_t - \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{d}_t) - \\ &\quad \frac{T}{2} \sum_{i=1}^T \log|\mathbf{Q}_t| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T (\boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_{t-1} - \mathbf{c}_t)^\top \mathbf{Q}_t^{-1} (\boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_{t-1} - \mathbf{c}_t) - \\ &\quad \frac{N}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log|\mathbf{P}_0| - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\alpha}_0 - \mathbf{a}_0)^\top \mathbf{P}_0^{-1} (\boldsymbol{\alpha}_0 - \mathbf{a}_0) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

APÉNDICE D

Pronóstico y Suavizamiento

Cálculo del autor.

Para encontrar el pronóstico l pasos adelante del estado para la REE de las ecuaciones (2.1) y (2.2) se emplea sustitución recursivo. Partiendo de los pronósticos uno y dos pasos adelante es posible obtener la expresión algebraica del pronóstico l pasos adelante:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_{T+1|T} &= \mathbf{T}_{T+1}\mathbf{a}_{T+1|T} + \mathbf{c}_{T+1} \\
 \mathbf{a}_{T+2|T} &= \mathbf{T}_{T+2}\mathbf{a}_{T+1|T} + \mathbf{c}_{T+2} \\
 \mathbf{a}_{T+2|T} &= \mathbf{T}_{T+2} [\mathbf{T}_{T+1} (\mathbf{T}_T\mathbf{a}_{T-1} + \mathbf{c}_T) + \mathbf{c}_{T+1}] + \mathbf{c}_{T+2} \\
 \mathbf{a}_{T+3|T} &= \mathbf{T}_{T+3} [\mathbf{T}_{T+2} [\mathbf{T}_{T+1} (\mathbf{T}_T\mathbf{a}_{T-1} + \mathbf{c}_T) + \mathbf{c}_{T+1}] + \mathbf{c}_{T+2}] + \mathbf{c}_{T+3}
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

Notése que $\mathbf{a}_{T+3|T}$ puede reescribirse haciendo

$$\prod_{j=1}^3 [\mathbf{T}_{T+j}] \mathbf{a}_T \equiv \mathbf{T}_{T+1}\mathbf{a}_t \mathbf{T}_{T+2}\mathbf{a}_t \mathbf{T}_{T+3}\mathbf{a}_t = [\mathbf{T}_{T+3}\mathbf{T}_{T+2}\mathbf{T}_{T+1}] \mathbf{a}_T \tag{D.2}$$

$$\sum_{j=1}^2 \left[\prod_{i=2}^3 \mathbf{T}_{T+i} \right] \mathbf{c}_{T+j} + \mathbf{c}_{T+3} \equiv \sum_{j=1}^2 [\mathbf{T}_{T+2}\mathbf{T}_{T+3}] \mathbf{c}_{T+j} + \mathbf{c}_{T+3} = \mathbf{T}_{T+2}\mathbf{c}_{T+1} + \mathbf{T}_{T+3}\mathbf{c}_{T+2} + \mathbf{c}_{T+3} \tag{D.3}$$

Sumando (D.2) y (D.3)

$$\begin{aligned}
 &[\mathbf{T}_{T+3}\mathbf{T}_{T+2}\mathbf{T}_{T+1}] \mathbf{a}_T + \mathbf{T}_{T+2}\mathbf{c}_{T+1} + \mathbf{T}_{T+3}\mathbf{c}_{T+2} + \mathbf{c}_{T+3} \\
 &\mathbf{T}_{T+3}\mathbf{T}_{T+2} [\mathbf{T}_{T+1}\mathbf{a}_T + \mathbf{c}_{T+1}] + \mathbf{T}_{T+3}\mathbf{c}_{T+2}\mathbf{c}_{T+3} \\
 &\mathbf{T}_{T+3} [\mathbf{T}_{T+2} [\mathbf{T}_{T+1}\mathbf{a}_T + \mathbf{c}_{T+1}] + \mathbf{c}_{T+2}] + \mathbf{c}_{T+3}
 \end{aligned}$$

De esta forma, el pronóstico l pasos adelante del estado es

$$\mathbf{a}_{T+l|T} = \left[\prod_{j=1}^l \mathbf{T}_{T+j} \right] \mathbf{a}_T + \sum_{j=1}^{l-1} \left[\prod_{i=j+1}^l \mathbf{T}_{T+i} \right] \mathbf{c}_{T+j} + \mathbf{c}_{T+l} \quad (\text{D.4})$$

La matriz de covarianza del error de estimación del estado pronosticado l pasos adelante puede obtenerse también aplicando sustitución recursiva,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{T+1|T} &= \mathbf{T}_{T+1} \mathbf{P}_T \mathbf{T}_{T+1}^T + \mathbf{R}_{T+1} \mathbf{Q}_{T+1} \mathbf{R}_{T+1}^T \\ \mathbf{P}_{T+2|T} &= \mathbf{T}_{T+2} \mathbf{P}_{T+1} \mathbf{T}_{T+2}^T + \mathbf{R}_{T+2} \mathbf{Q}_{T+2} \mathbf{R}_{T+2}^T \\ \mathbf{P}_{T+2|T} &= \mathbf{T}_{T+2} \left[\mathbf{T}_{T+1} \mathbf{P}_T \mathbf{T}_{T+1}^T + \mathbf{R}_{T+1} \mathbf{Q}_{T+1} \mathbf{R}_{T+1}^T \right] \mathbf{T}_{T+2}^T + \mathbf{R}_{T+2} \mathbf{Q}_{T+2} \mathbf{R}_{T+2}^T \\ \mathbf{P}_{T+3|T} &= \mathbf{T}_{T+3} \left[\mathbf{T}_{T+2} \left[\mathbf{T}_{T+1} \mathbf{P}_T \mathbf{T}_{T+1}^T + \mathbf{R}_{T+1} \mathbf{Q}_{T+1} \mathbf{R}_{T+1}^T \right] \mathbf{T}_{T+2}^T + \mathbf{R}_{T+2} \mathbf{Q}_{T+2} \mathbf{R}_{T+2}^T \right] \mathbf{T}_{T+3}^T + \\ &\quad \mathbf{R}_{T+3} \mathbf{Q}_{T+3} \mathbf{R}_{T+3}^T \end{aligned}$$

Para modelos tiempo invariantes esto se puede reescribir sin los subíndices referentes a T y luego de alcanzar convergencia \mathbf{P} será igual en cada periodo de tiempo por lo que

$$\mathbf{P}_{T+l|T} = \mathbf{T}^l \mathbf{P}_T \mathbf{T}^{l'} + \sum_{j=0}^{l-1} \mathbf{T}^j \mathbf{R} \mathbf{Q} \mathbf{R}^T \mathbf{T}^{j'}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (\text{D.5})$$

APÉNDICE E

A priori y posterior de los parámetros

Cálculo del autor.

Suponga que x es un parámetro de varianza tal que $x \sim IG(\alpha, \beta)$ y w es un parámetro de cualquier otra forma tal que $w \sim U(a, b)$. Para una REE como la establecida en las ecuaciones (2.1) y (2.2) la posterior de los parámetros es

$$\begin{aligned}
 h(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}_{1:T}) &\propto \prod_{i=1}^T \left[\frac{1}{(2\pi)^{T/2} |\mathbf{F}_t|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{v}_t^\top \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t \right] \frac{1}{b-a} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-\alpha-1} \exp \left(-\frac{\beta}{x} \right) \right] \\
 &\propto \prod_{i=1}^T \left[\log(1) - \log(2\pi)^{T/2} - \log |\mathbf{F}_t|^{1/2} - \frac{1}{2} \mathbf{v}_t^\top \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t + \log(1) - \log(b-a) + \right. \\
 &\quad \left. \log(\beta^\alpha) - \log(\Gamma(\alpha)) + \log(x)^{-\alpha-1} - \frac{\beta}{x} \right] \\
 &\propto \prod_{i=1}^T \left[-\frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |\mathbf{F}_t| - \frac{1}{2} \mathbf{v}_t^\top \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t - \log(b-a) + \alpha \log(\beta) - \right. \\
 &\quad \left. \log(\Gamma(\alpha)) - (\alpha+1) \log(x) - \frac{\beta}{x} \right] \\
 \\
 h(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}_{1:T}) &\propto -\frac{NT}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \log |\mathbf{F}_t| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \mathbf{v}_t^\top \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t - N \log(b-a) + \\
 &\quad N\alpha \log(\beta) - N \log(\Gamma(\alpha)) - (\alpha+1) \sum_{i=1}^T \log(x) - \sum_{i=1}^T \frac{\beta}{x} \tag{E.1}
 \end{aligned}$$

E.1. A prioris y posterior para el modelo de nivel local

Para el caso en que $\phi \sim U(a, b)$ y $\sigma_\epsilon^2, \sigma_\eta^2 \sim U(c, d)$,

$$h(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}_{1:T}) \propto -\frac{NT}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \log |\mathbf{F}_t| - \frac{1}{2} \mathbf{v}_t^\top \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t - N \log(b-a) - 2N \log(c-d) \quad (\text{E.2})$$

Para el caso en que $\phi \sim U(a, b)$ y $\sigma_\epsilon^2, \sigma_\eta^2 \sim IG(\alpha, \beta)$,

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}_{1:T}) \propto & -\frac{NT}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \log |\mathbf{F}_t| - \frac{1}{2} \mathbf{v}_t^\top \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t - N \log(b-a) - \\ & 2N\alpha \log(\beta) - 2N \log(\Gamma(\alpha)) - (\alpha+1) \sum_{i=1}^T \log(\sigma_\epsilon^2) - \sum_{i=1}^T \frac{\beta}{\sigma_\epsilon^2} - \\ & (\alpha+1) \sum_{i=1}^T \log(\sigma_\eta^2) - \sum_{i=1}^T \frac{\beta}{\sigma_\eta^2} \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

E.2. A prioris y posterior para el modelo de tendencia lineal local

Para el caso en que $\Psi_1, \Psi_2 \sim U(a, b)$ y $\sigma_\epsilon^2, \sigma_\eta^2, \sigma_\xi^2 \sim U(c, d)$,

$$h(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}_{1:T}) \propto -\frac{NT}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \log |\mathbf{F}_t| - \frac{1}{2} \mathbf{v}_t^\top \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t - 2N \log(b-a) - 3N \log(c-d) \quad (\text{E.4})$$

Para el caso en que $\Psi_1, \Psi_2 \sim U(a, b)$ y $\sigma_\epsilon^2, \sigma_\eta^2, \sigma_\xi^2 \sim IG(\alpha, \beta)$,

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}_{1:T}) \propto & -\frac{NT}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \log |\mathbf{F}_t| - \frac{1}{2} \mathbf{v}_t^\top \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t - 2N \log(b-a) - \\ & 3N\alpha \log(\beta) - 3N \log(\Gamma(\alpha)) - (\alpha+1) \sum_{i=1}^T \log(\sigma_\epsilon^2) - \sum_{i=1}^T \frac{\beta}{\sigma_\epsilon^2} - \\ & (\alpha+1) \sum_{i=1}^T \log(\sigma_\eta^2) - \sum_{i=1}^T \frac{\beta}{\sigma_\eta^2} - (\alpha+1) \sum_{i=1}^T \log(\sigma_\xi^2) - \sum_{i=1}^T \frac{\beta}{\sigma_\xi^2} \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

E.3. A prioris y posterior para el modelo de tendencia mas ciclo

Para el caso en que $\phi_1, \phi_2, \rho, \lambda \sim U(a, b)$ y $\sigma_\epsilon^2, \sigma_\eta^2, \sigma_\xi^2, \sigma_k^2 \sim U(c, d)$,

$$h(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}_{1:T}) \propto -\frac{NT}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \log |\mathbf{F}_t| - \frac{1}{2} \mathbf{v}_t^\top \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t - 4N \log(b-a) - 4N \log(c-d) \quad (\text{E.6})$$

Para el caso en que $\phi_1, \phi_2, \rho, \lambda \sim U(a, b)$ y $\sigma_\epsilon^2, \sigma_\eta^2, \sigma_\xi^2, \sigma_k^2 \sim IG(\alpha, \beta)$,

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}_{1:T}) \propto & -\frac{NT}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \log |\mathbf{F}_t| - \frac{1}{2} \mathbf{v}_t^\top \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t - 4N \log(b-a) - \\ & 4N\alpha \log(\beta) - 4N \log(\Gamma(\alpha)) - (\alpha+1) \sum_{i=1}^T \log(\sigma_\epsilon^2) - \sum_{i=1}^T \frac{\beta}{\sigma_\epsilon^2} - \\ & (\alpha+1) \sum_{i=1}^T \log(\sigma_\eta^2) - \sum_{i=1}^T \frac{\beta}{\sigma_\eta^2} - (\alpha+1) \sum_{i=1}^T \log(\sigma_\xi^2) - \sum_{i=1}^T \frac{\beta}{\sigma_\xi^2} - \\ & (\alpha+1) \sum_{i=1}^T \log(\sigma_k^2) - \sum_{i=1}^T \frac{\beta}{\sigma_k^2} \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Programación Empleada

Este apéndice contiene la lista de códigos empleados y su correspondiente descripción.

F.1. Filtro de Kalman

```

kalmanfilter <-function(yt=yt, Zt=Zt, dt=dt, Tt=Tt, ct=ct, Rt=Rt, Ht=Ht, Qt=Qt, a0=a0,
P0=P0){
  at <- a0
  Pt <- P0
  i <- 1
  Att <- array(c(0),dim=c(1,m,n))
  At <- array(c(0),dim=c(1,m,n))
  Ft <- array(c(0),dim=c(1,N,n))
  Vt <- array(c(0),dim=c(1,N,n))
  PPt <- array(c(0),dim=c(m,m,n))
  PPt1 <- array(c(0),dim=c(m,m,n))
  loglik <- array(c(0),dim=c(1,N,n))
  inicial <- proc.time()
  for(i in 1:n) {
    att1 <- Tt %*% at + ct
    Ptt1 <- Tt %*% Pt %*% t(Tt) + Rt %*% Qt %*% t(Rt)
    ft1 <- Zt %*% Ptt1 %*% t(Zt) + Ht
    vt1 <- yt[i] - Zt %*% att1 - dt
    at1 <- att1 + Ptt1 %*% t(Zt) %*% solve(ft1) %*% vt1
    Pt1 <- Ptt1 - Ptt1 %*% t(Zt) %*% solve(ft1) %*% Zt %*% Ptt1
    lt1 <- - ((1)/2) * log(2*pi) - (apply(ft1,1,function(x) {log(det(as.matrix(x)))}
    )
    )/2 - (apply(vt1,1,function(x) {t(as.matrix(x))}
    ) * apply(ft1,1,function(x) {1/x}
    ) * vt1
    )/2
    att <- att1
    Ptt <- Ptt1
  }
}

```

```
ft <- ft1
vt <- vt1
at <- at1
Pt <- Pt1
lt <- lt1
Att[1,c(1:m),i] <- att[c(1:m),1]
At[1,c(1:m),i] <- at[c(1:m),1]
Ft[i] <- ft[N]
Vt[i] <- vt[N]
PPtt[c(1:m),c(1:m),i] <- Ptt[c(1:m),c(1:m)]
PPT[c(1:m),c(1:m),i] <- Pt[c(1:m),c(1:m)]
loglik[i] <- lt[N]
tiempo <- proc.time() - inicial
}

list(Att=Att, At=At, Ft=Ft, Vt=Vt, PPtt=PPtt, PPT=PPT, loglik=loglik,
      LOGLIK = sum(loglik),tiempo=tiempo)
}
```

Descripción: Lleva a cabo el filtro de Kalman para cualquier modelo puesto en REE. Las variables de entrada son los elementos de la REE, la rutina calcula para cada tiempo las ecuaciones de predicción y actualización del filtro de Kalman, la varianza de la serie observada y las innovaciones, así como la función de verosimilitud. Al finalizar los resultados son guardados en vectores o matrices según sea el caso y desplegados junto al tiempo que tomó realizar la filtración. La siguiente tabla brinda detalles para cada elemento que hace parte de la rutina:

Elemento	Tipo	Descripción
yt	Entrada	Vector de $N \times 1$ en cada $t = i$ con $i = 1, \dots, n$ que contiene la serie observada. Corresponde al elemento \mathbf{y}_t en la ecuación (2.1)
Zt	Entrada	Matriz de $N \times m$ en cada $t = i$ con $i = 1, \dots, n$. Corresponde al elemento \mathbf{Z}_t en la ecuación (2.1)
dt	Entrada	Vector de $N \times 1$ en cada $t = i$ con $i = 1, \dots, n$. Corresponde al elemento \mathbf{d}_t en la ecuación (2.1)
Tt	Entrada	Matriz de $m \times m$ en cada $t = i$ con $i = 1, \dots, n$. Corresponde al elemento \mathbf{T}_t en la ecuación (2.2)
ct	Entrada	Vector de $m \times 1$ en cada $t = i$ con $i = 1, \dots, n$. Corresponde al elemento \mathbf{c}_t en la ecuación (2.2)
Rt	Entrada	Matriz de $m \times m$ en cada $t = i$ con $i = 1, \dots, n$. Corresponde al elemento \mathbf{R}_t en la ecuación (2.2)
Ht	Entrada	Matriz de $N \times N$ en cada $t = i$ con $i = 1, \dots, n$ que representa la matriz de covarianza de las innovaciones $\boldsymbol{\epsilon}_t$ en la ecuación (2.1). Corresponde al elemento \mathbf{H}_t en la ecuación (2.2)
Qt	Entrada	Matriz de $m \times m$ en cada $t = i$ con $i = 1, \dots, n$ que representa la matriz de covarianza de las innovaciones $\boldsymbol{\eta}_t$ en la ecuación (2.2). Corresponde al elemento \mathbf{Q}_t en la ecuación (2.2)
a0	Entrada	Vector de $m \times 1$ que representa la media del vector de estados en el momento inicial.
P0	Entrada	Matriz de $m \times m$ que representa la varianza del vector de estados en el momento inicial.
Att	Salida	Vector de $m \times 1$ en cada $t = i$ con $i = 1, \dots, n$ que representa la serie predicha del vector de estados. Corresponde al elemento $\mathbf{a}_{t t-1}$ en la ecuación (2.6)
At	Salida	Vector de $m \times 1$ en cada $t = i$ con $i = 1, \dots, n$ que representa la serie actualizada del vector de estados. Corresponde al elemento \mathbf{a}_t en la ecuación (2.8)
Ft	Salida	Matriz de $N \times N$ en cada $t = i$ con $i = 1, \dots, n$ que representa la varianza de la serie observada. Corresponde al elemento \mathbf{F}_t en la ecuación (2.8)
Vt	Salida	Matriz de $N \times N$ en cada $t = i$ con $i = 1, \dots, n$ que representa las innovaciones. Corresponde al elemento \mathbf{v}_t en la ecuación (2.20)
PPtt	Salida	Matriz de $m \times m$ en cada $t = i$ con $i = 1, \dots, n$ que representa la varianza de la serie predicha del vector de estados. Corresponde al elemento $\mathbf{P}_{t t-1}$ en la ecuación (2.7)
Ptt	Salida	Matriz de $m \times m$ en cada $t = i$ con $i = 1, \dots, n$ que representa la varianza de la serie actualizada del vector de estados. Corresponde al elemento \mathbf{P}_t en la ecuación (2.9)
loglik	Salida	Es un escalar que representa el valor de la función de log verosimilitud en cada tiempo i con $i = 1, \dots, n$. Corresponde al elemento $\log L$ en la ecuación (2.20).
LOGLIK	Salida	Sumatoria de la función de log verosimilitud. Corresponde a $\sum_{i=1}^n \log L$ en la ecuación (2.20).
tiempo	Salida	Tiempo en segundos en llevar a cabo la filtración.

TABLA F.1. Descripción de elementos en la rutina kalmanfilter

F.2. Filtro de Información

```

infilter <- function(yt=yt, Zt=Zt, dt=dt, Tt=Tt, ct=ct, Rt=Rt, Ht=Ht, Qt=Qt, E0=E0,
  b0=b0){
  Et <- E0
  bt <- b0
  i <- 1
  EEtt <- array(c(0),dim=c(m,m,n))
  AAt <- array(c(0),dim=c(m,m,n))
  BBt <- array(c(0),dim=c(m,m,n))
  EEt <- array(c(0),dim=c(m,m,n))
  Prediccion <- array(c(0),dim=c(1,m,n))
  Actualizacion <- array(c(0),dim=c(1,m,n))
  Ft <- array(c(0),dim=c(1,N,n))
  Vt <- array(c(0),dim=c(1,N,n))
  loglik <- array(c(0),dim=c(1,N,n))
  inicial <- proc.time()
  for(i in 1:n) {
    Ett1 <- Et + t(Zt) %*% solve(Ht) %*% Zt
    At1 <- t(solve(Tt)) %*% Ett1 %*% solve(Tt)
    Bt1 <- At1 %*% Rt %*% (solve(t(Rt)%*%At1%*%Rt+solve(Qt)))
    Et1 <- (I - (Bt1 %*% t(Rt))) %*% At1
    btt1 <- bt + (t(Zt) %*% solve(Ht) %*% yt[i])
    bt1 <- (I - (Bt1%*%t(Rt))) %*% (t(solve(Tt)) %*% btt1)
    ft1 <- Zt %*% solve(Et1) %*% t(Zt) + Ht
    vt1 <- yt[i] - (Zt %*% ((solve(Et1)%*% bt1))) - dt
    lt1 <- - ((1)/2) * log(2*pi) - (apply(ft1,1,function(x) {log(det(as.matrix(x)))}
    )
  )/2 - (apply(vt1,1,function(x) {t(as.matrix(x))}
  ) * apply(ft1,1,function(x) {1/x}
  ) * vt1
  )/2
    Ett <- Ett1
    At <- At1
    Bt <- Bt1
    Et <- Et1
    btt <- btt1
    bt <- bt1
    ft <- ft1
    vt <- vt1
    lt <- lt1
    EEtt[c(1:m),c(1:m),i] <- Ett[c(1:m),c(1:m)]
    AAt[c(1:m),c(1:m),i] <- At[c(1:m),c(1:m)]
    BBt[c(1:m),c(1:m),i] <- Bt[c(1:m),c(1:m)]
    EEt[c(1:m),c(1:m),i] <- Et[c(1:m),c(1:m)]
    Prediccion[1,c(1:m),i] <- btt[c(1:m),1]
    Actualizacion[1,c(1:m),i] <- bt[c(1:m),1]
    Ft[i] <- ft[N]
    Vt[i] <- vt[N]
  }
}

```

```

loglik[i] <- lt[N]
tiempo <- proc.time() - inicial
}

list(E Ett=EEtt, A At=AAt, B Bt=BBt, E Et=EEt, Prediccion=Prediccion,
      Actualizacion=Actualizacion,Ft=Ft,Vt=Vt, loglik=loglik,LOGLIK = sum(loglik))
}

```

Descripción: Lleva a cabo el filtro de información para cualquier modelo puesto en REE. Las variables de entrada son los elementos de la REE, la rutina calcula para cada tiempo las ecuaciones de predicción y actualización del filtro de información, la varianza de la serie observada y las innovaciones, así como la función de verosimilitud. Al finalizar los resultados son guardados en vectores o matrices según sea el caso y desplegados junto al tiempo que tomó realizar la filtración. La siguiente tabla brinda detalles para cada elemento que hace parte de la rutina, los elementos que no aparecen descritos tienen la misma definición que en la rutina de filtro de Kalman presentada en la tabla F.1:

Elemento	Tipo	Descripción
E0	Entrada	Matriz de $m \times m$ que representa la varianza del vector de estados en el momento inicial.
b0	Entrada	Vector de $m \times 1$ que representa la media del vector de estados en el momento inicial.
EEtt	Salida	Matriz de $m \times m$ en cada $t = i$ con $i = 1, \dots, n$ que representa la inversa de la varianza de la serie predicha del vector de estados. Corresponde al elemento \mathbf{P}_t^{-1} en la ecuación (2.13)
AAt	Salida	Matriz de $m \times m$ en cada $t = i$ con $i = 1, \dots, n$. Corresponde al elemento \mathbf{A}_t^{-1} en la ecuación (2.14)
BBt	Salida	Matriz de $m \times m$ en cada $t = i$ con $i = 1, \dots, n$. Corresponde al elemento \mathbf{B}_t^{-1} en la ecuación (2.16)
Ett	Salida	Matriz de $m \times m$ en cada $t = i$ con $i = 1, \dots, n$ que representa la inversa de la varianza de la serie actualizada del vector de estados. Corresponde al elemento $\mathbf{P}_{t+1 t}^{-1}$ en la ecuación (2.15)
Prediccion	Salida	Vector de $m \times 1$ en cada $t = i$ con $i = 1, \dots, n$ que representa la serie predicha del vector de estados obtenida con la inversa de la varianza. Corresponde al elemento $\tilde{\mathbf{a}}_{t+1 t}$ en la ecuación (2.18)
Filtrada	Salida	Vector de $m \times 1$ en cada $t = i$ con $i = 1, \dots, n$ que representa la serie actualizada del vector de estados obtenida con la inversa de la varianza. Corresponde al elemento $\tilde{\mathbf{a}}_t$ en la ecuación (2.18)
tiempo	Salida	Tiempo en segundos en llevar a cabo la filtración.

TABLA F.2. Descripción de elementos en la rutina infilter

F.3. Pronósticos

```

prediction <- function(pronat0,epront0,l){
  pronat <- pronat0
  epront <- epront0
  i <- 1
  pronAT <- array(c(0),dim=c(1,m,1))
  pronYT <- array(c(0),dim=c(1,N,1))
  pronPT <- array(c(0),dim=c(m,m,1))
  MSET <- array(c(0),dim=c(1,N,1))
  for(i in 1:l){
    pronat1 <- Tt %% pronat + ct
    pronyt1 <- Zt %% pronat1 + dt
    epront1 <- Tt %% epront %% t(Tt) + Rt %% Qt %% t(Rt)
    mseyt1 <- Zt %% epront1 %% t(Zt) + Ht
    pronat <- pronat1
    pronyt <- pronyt1
    epront <- epront1
    mseyt <- mseyt1
    pronAT[1,c(1:m),i] <- pronat[c(1:m),1]
    pronYT[i] <- pronyt[N]
    pronPT[c(1:m),c(1:m),i] <- epront[c(1:m),c(1:m)]
    MSET[i] <- mseyt[N]
  }
  list(pronAT = pronAT , pronYT = pronYT , pronPT = pronPT, MSET = MSET)
}

```

Descripción: Lleva a cabo el pronóstico del vector de estados y la serie observada, así como el cálculo de la matriz del error de estimación pronosticada y el error cuadrático medio asociado al pronóstico. Las variables de entrada son las cantidades finales obtenidas mediante las ecuaciones de actualización de cualquier método de filtración y el número de pasos a pronosticar.

Elemento	Tipo	Descripción
pronat0	Entrada	Vector de $m \times 1$ que contiene los valores iniciales de la media del vector de estados a partir de los cuales se iniciará el pronóstico.
epront0	Entrada	Vector de $m \times m$ que contiene los valores iniciales de la matriz de covarianza del error de estimación del vector de estados a partir de los cuales se iniciará el pronóstico.
l	Entrada	Número de pasos a pronosticar.
pronAT	Salida	Vector de $m \times 1$ para cada i con $i = 1, \dots, l$ que contiene el pronóstico en cada paso para el vector de estados. Corresponde al elemento $\mathbf{a}_{T+l T}$ en la ecuación (2.21).
pronYT	Salida	Vector de $N \times 1$ para cada i con $i = 1, \dots, l$ que contiene el pronóstico en cada paso para la serie observada. Corresponde al elemento $\tilde{\mathbf{y}}_{T+l T}$ en la ecuación (2.21).
pronPT	Salida	Vector de $m \times m$ para cada i con $i = 1, \dots, l$ que contiene el pronóstico en cada paso para la matriz de covarianza del error de estimación del vector de estados. Corresponde al elemento $\mathbf{P}_{T+l T}$ en la ecuación (2.23).
MSET	Salida	Matriz de $N \times N$ para cada i con $i = 1, \dots, l$ que contiene el error cuadrático medio. Corresponde al elemento $\mathbf{MSE}(\tilde{\mathbf{y}}_{T+l T})$ en la ecuación (2.22).

TABLA F.3. Descripción de elementos en la rutina prediction

F.4. Suavizador de Intervalo Fijo

```

smootherif <- function(ppt,pppt,Tt,aat,AAat) {
  i <- 1
  Aat <- array(c(0),dim=c(1,m,n))
  PPpt <- array(c(0),dim=c(m,m,n))
  PPPpt <- array(c(0),dim=c(m,m,n))
  inicial <- proc.time()
  for(n in n:i){
    if(n==nrow(y)){
      Pppt1 <- ppt[c(1:m),c(1:m),n] %*% t(Tt) %*%
      solve(ppt[c(1:m),c(1:m),n])
      Ppt1 <- pppt[c(1:m),c(1:m),n] + (Pppt1 %*%
      (ppt[c(1:m),c(1:m),n]-pppt[c(1:m),c(1:m),n])%*% t(PPpt1))
      aat1 <- aat[1,1:m,n] + (Pppt1 %*% (aat[1,1:m,n] -
      Tt%*%aat[1,1:m,n]))
    }
    if(n!=nrow(y)){
      Pppt1 <- ppt[c(1:m),c(1:m),n] %*% t(Tt) %*%
      solve(ppt[c(1:m),c(1:m),n+1])
      Ppt1 <- pppt[c(1:m),c(1:m),n] + (Pppt1 %*%
      (ppt[c(1:m),c(1:m),n+1]-pppt[c(1:m),c(1:m),n+1])%*% t(PPpt1))
      aat1 <- aat[1,1:m,n] + Pppt1 %*% (aat[1,1:m,n+1] - Tt%*%aat[1,1:m,n+1])
    }
  }
  PPpt <- Pppt1
}

```

```

Ppt <- Ppt1
aaat <- aaat1
Aat[1,c(1:m),n] <- aaat[c(1:m),1]
PPpt[c(1:m),c(1:m),n] <- Ppt[c(1:m),c(1:m)]
PPPpt[c(1:m),c(1:m),n] <- PPpt[c(1:m),c(1:m)]
tiempo <- proc.time() - inicial
}
list(Aat = Aat, PPpt = PPpt, PPPpt = PPPpt,tiempo=tiempo)
}

```

Descripción: Lleva a cabo el suavizamiento de intervalo fijo. Las variables de entrada son las cantidades finales obtenidas mediante algún método de filtración y la rutina brinda el estimador suavizado y la varianza del error de estimación suavizado para el vector de estados.

Elemento	Tipo	Descripción
ppt	Entrada	Matriz de $m \times m$ que representa la varianza del error de estimación final obtenida mediante la ecuación de actualización del filtro. Corresponde al elemento \mathbf{P}_t en la ecuación (2.9).
pptt	Entrada	Matriz de $m \times m$ que representa la varianza del error de estimación final obtenida mediante la ecuación de predicción del filtro. Corresponde al elemento $\mathbf{P}_{t t-1}$ en la ecuación (2.7).
Tt	Entrada	Matriz de $m \times m$. Corresponde al elemento \mathbf{T}_t en la ecuación (2.2).
aat	Entrada	Vector de $m \times 1$ que representa la media del vector de estados final obtenida mediante la ecuación de predicción del filtro. Corresponde al elemento $\mathbf{a}_{t t-1}$ en la ecuación (2.6).
AAt	Entrada	Vector de $m \times 1$ que representa la media del vector de estados final obtenida mediante la ecuación de actualización del filtro. Corresponde al elemento \mathbf{a}_t en la ecuación (2.8).
Aat	Salida	Vector de $m \times 1$ para cada i con $i = n - 1, \dots, 1$ que representa el estimador suavizado del vector de estados. Corresponde al elemento $\mathbf{a}_{t T}$ en la ecuación (2.24).
PPpt	Salida	Vector de $m \times m$ para cada i con $i = n - 1, \dots, 1$ que representa la varianza del error de estimación del estimador suavizado del vector de estados. Corresponde al elemento $\mathbf{P}_{t T}$ en la ecuación (2.25).
PPPpt	Salida	Vector de $m \times m$ para cada i con $i = n - 1, \dots, 1$. Corresponde al elemento \mathbf{P}_t^* en la ecuación (2.26).
tiempo	Salida	Tiempo en segundos en llevar a cabo el suavizamiento.

TABLA F.4. Descripción de elementos en la rutina smootherif

F.5. Algoritmo EM

```

EM <- function(att,ptt,diagonal=0){
  i <- 1
  Et <- array(c(0),dim=c(1,N,n))
  Gt <- array(c(0),dim=c(1,N,n))
  Jt <- array(c(0),dim=c(m,m,n))
  for(i in 1:n){
    et1 <- y[i] - Zt %*% att[1,c(1:m),i]
    gt1 <- et1 %*% t(et1) + (Zt %*% ptt[c(1:m),c(1:m),i] %*% t(Zt))
    if(i==1){
      nnt1 <- as.matrix(aat[1,c(1:m),i]) - Tt %*% matrix(c(0),nrow=m,ncol=1)
    }
    if(i!=1){
      nnt1 <- as.matrix(aat[1,c(1:m),i]) - Tt %*% as.matrix(aat[1,c(1:m),i-1])
    }
    PPPt1 <- ptt[c(1:m),c(1:m),i]
    if(diagonal==1){diag(PPPt1)=0}
    jt1 <- nnt1 %*% t(nnt1) + ptt[c(1:m),c(1:m),i] + Tt%*%PPPt1%*%t(Tt) -
    Tt%*%PPPt1 - t(PPPt1)%*%t(Tt)
    et <- et1
    gt <- gt1
    nnt <- nnt1
    PPPt <- PPPt1
    jt <- jt1
    Et[i] <- et[N]
    Gt[i] <- gt[N]
    Jt[c(1:m),c(1:m),i] <- jt[c(1:m),c(1:m)]
  }
  htilde <- 1/n * sum(Gt)
  Qtilde <- 1/n * apply(Jt,c(1,2),FUN=sum)
  list(htilde=htilde,Qtilde=Qtilde)
}

```

Descripción: Lleva a cabo la estimación mediante el algoritmo esperanza maximización. Las variables de entrada son los estimadores suavizados de la media, la varianza del vector de estados y una condición lógica que si se marca como afirmativa, calcula la matriz $\mathbf{P}_{t,t-1|T}$ de la ecuación (2.26) como una matriz diagonal del estimador suavizado $\mathbf{P}_{t|T}$ (Watson & Engle 1993), de lo contrario se emplea dicho estimador. La rutina brinda como resultados las matrices de varianzas y covarianzas de las innovaciones $\boldsymbol{\epsilon}_t$ y $\boldsymbol{\eta}_t$ de las ecuaciones (2.1) y (2.2). Si hay otros parámetros a estimar se maximiza directamente la función de verosimilitud de la ecuación (2.23).

Elemento	Tipo	Descripción
att	Entrada	Matriz de $m \times 1$ para cada i con $i = 1, \dots, n$ que representa el estimador suavizado de la media del vector de estados. Corresponde al elemento $\mathbf{a}_{t T}$ en la ecuación (2.24).
ptt	Entrada	Matriz de $m \times m$ para cada i con $i = 1, \dots, n$ que representa la varianza del error de estimación del estimador suavizado de la media del vector de estados. Corresponde al elemento $\mathbf{P}_{t T}$ en la ecuación (2.25).
diagonal	Entrada	Argumento lógico que si se marca como afirmativa, calcula la matriz $\mathbf{P}_{t,t-1 T}$ de la ecuación (2.26) como una matriz diagonal del estimador suavizado $\mathbf{P}_{t T}$ de lo contrario se emplea dicho estimador.
htilde	Salida	Matriz de $N \times N$ para cada i con $i = 1, \dots, n$ que representa la varianza de las innovaciones $\boldsymbol{\epsilon}_t$.
Qtilde	Salida	Matriz de $m \times m$ para cada i con $i = 1, \dots, n$ que representa la varianza las innovaciones $\boldsymbol{\eta}_t$.

TABLA F.5. Descripción de elementos en la rutina EM

F.6. Métodos Bayesianos

F.6.1. Filtro de Kalman con posterior de los parámetros

```

kalmanfilterbayes <- function(yt=yt, Zt=Zt, dt=dt, Tt=Tt, ct=ct, Rt=Rt, Ht=Ht,
Qt=Qt, a0=a0, P0=P0,model=c("LL","LLT","TPC"),prior=c("noninfor1","noninfor2",
"uniform","infor"),scale){
at <- a0
Pt <- P0
i <- 1
loglik <- array(c(0),dim=c(1,N,n))
inicial <- proc.time()
for(i in 1:n) {
att1 <- Tt %*% at + ct
Ptt1 <- Tt %*% Pt %*% t(Tt) + Rt %*% Qt %*% t(Rt)
ft1 <- Zt %*% Ptt1 %*% t(Zt) + Ht
vt1 <- yt[i] - Zt %*% att1 - dt
at1 <- att1 + Ptt1 %*% t(Zt) %*% solve(ft1) %*% vt1
Pt1 <- Ptt1 - Ptt1 %*% t(Zt) %*% solve(ft1) %*% Zt %*% Ptt1
if(model=="LL" & prior=="noninfor1"){
lt1 <- - ((1)/2) * log(2*pi) - (apply(ft1,1,function(x) {log(det(as.matrix(x)))
}))/2 - (apply(vt1,1,function(x) {t(as.matrix(x))}) * apply(ft1,1,function(x)
{1/x}) * vt1)/2 + dinvgamma(Ht,0.001,0.001) + dinvgamma(Qt,0.001,0.001) +
dunif(phi,log=T)}
if(model=="LL" & prior=="noninfor2"){
lt1 <- - ((1)/2) * log(2*pi) - (apply(ft1,1,function(x) {log(det(as.matrix(x)))
}))/2 - (apply(vt1,1,function(x) {t(as.matrix(x))}) * apply(ft1,1,function(x)
{1/x}) * vt1)/2 + dinvgamma(Ht,1.1) + dinvgamma(Qt,1.1) + dunif(phi,log=T)}
if(model == "LL" & prior=="uniform"){
lt1 <- - ((1)/2) * log(2*pi) - (apply(ft1,1,function(x) {log(det(as.matrix(x)))

```

```

})))/2 - (apply(vt1,1,function(x) {t(as.matrix(x))}) * apply(ft1,1,function(x)
{1/x}) * vt1)/2 + dunif(Ht,0,10000,log=T) + dunif(Qt,0,10000,log=T) +
dunif(phi,log=T)}
if(model == "LL" & prior=="infor"){
lt1 <- - ((1)/2) * log(2*pi) - (apply(ft1,1,function(x) {log(det(as.matrix(x)))
}))/2 - (apply(vt1,1,function(x) {t(as.matrix(x))}) * apply(ft1,1,function(x)
{1/x}) * vt1)/2 + dinvgamma(Ht,2,3*scale[2]) + dinvgamma(Qt,2,3*scale[3]) +
dunif(phi,log=T)}
if(model=="LLT" & prior=="noninfor1"){
lt1 <- - ((1)/2) * log(2*pi) - (apply(ft1,1,function(x) {log(det(as.matrix(x)))
}))/2 - (apply(vt1,1,function(x) {t(as.matrix(x))}) * apply(ft1,1,function(x)
{1/x}) * vt1)/2 + dinvgamma(Ht,0.5,500) + dinvgamma(Qt[1],0.5,500) +
dinvgamma(Qt[4],0.5,500) + dunif(Psi1,log=T) + dunif(Psi2,log=T)}
if(model=="LLT" & prior=="noninfor2"){
lt1 <- - ((1)/2) * log(2*pi) - (apply(ft1,1,function(x) {log(det(as.matrix(x)))
}))/2 - (apply(vt1,1,function(x) {t(as.matrix(x))}) * apply(ft1,1,function(x)
{1/x}) * vt1)/2 + dinvgamma(Ht,1.1) + dinvgamma(Qt[1],1.1) +
dinvgamma(Qt[4],1.1) + dunif(Psi1,log=T) + dunif(Psi2,log=T)}
if(model=="LLT" & prior=="uniform"){
lt1 <- - ((1)/2) * log(2*pi) - (apply(ft1,1,function(x) {log(det(as.matrix(x)))
}))/2 - (apply(vt1,1,function(x) {t(as.matrix(x))}) * apply(ft1,1,function(x)
{1/x}) * vt1)/2 + dunif(Ht,0,10000,log=T) + dunif(Qt[1],0,10000,log=T) +
dunif(Qt[4],0,10000,log=T) + dunif(Psi1,log=T) + dunif(Psi2,log=T)}
if(model == "LLT" & prior=="infor"){
lt1 <- - ((1)/2) * log(2*pi) - (apply(ft1,1,function(x) {log(det(as.matrix(x)))
}))/2 - (apply(vt1,1,function(x) {t(as.matrix(x))}) * apply(ft1,1,function(x)
{1/x}) * vt1)/2 + dinvgamma(Ht,2,3*scale[3]) + dinvgamma(Qt[1],2,3*scale[4]) +
dinvgamma(Qt[4],2,3*scale[5]) + dunif(Psi1,log=T) +
dunif(Psi2,log=T)}
if(model=="TPC" & prior=="noninfor1"){
lt1 <- - ((1)/2) * log(2*pi) - (apply(ft1,1,function(x) {log(det(as.matrix(x)))
}))/2 - (apply(vt1,1,function(x) {t(as.matrix(x))}) * apply(ft1,1,function(x)
{1/x}) * vt1)/2 + dinvgamma(Ht,0.5,500) + dinvgamma(Qt[1],0.5,500) +
dinvgamma(Qt[6],0.5,500) + dinvgamma(Qt[11],0.5,500) +
dinvgamma(Qt[16],0.5,500) + dunif(Psi1,log=T) + dunif(Psi2,log=T) +
dunif(Rho,log=T) + dunif(Lambda,log=T)}
if(model=="TPC" & prior=="noninfor2"){
lt1 <- - ((1)/2) * log(2*pi) - (apply(ft1,1,function(x) {log(det(as.matrix(x)))
}))/2 - (apply(vt1,1,function(x) {t(as.matrix(x))}) * apply(ft1,1,function(x)
{1/x}) * vt1)/2 + dinvgamma(Ht,1.1) + dinvgamma(Qt[1],1.1) + dinvgamma(Qt[6],1.1)
+ dinvgamma(Qt[11],1.1) + dinvgamma(Qt[16],1.1) + dunif(Psi1,log=T) +
dunif(Psi2,log=T) + dunif(Rho,log=T) + dunif(Lambda,log=T)}
if(model=="TPC" & prior=="uniform"){
lt1 <- - ((1)/2) * log(2*pi) - (apply(ft1,1,function(x) {log(det(as.matrix(x)))
}))/2 - (apply(vt1,1,function(x) {t(as.matrix(x))}) * apply(ft1,1,function(x)
{1/x}) * vt1)/2 + dunif(Ht,0,10000,log=T) + dunif(Qt[1],0,10000,log=T) +
dunif(Qt[6],0,10000,log=T) + dunif(Qt[11],0,10000,log=T) +
dunif(Qt[16],0,10000,log=T) + dunif(Psi1,log=T) + dunif(Psi2,log=T) +
dunif(Rho,log=T) + dunif(Lambda,log=T)}

```

```

if(model == "TPC" & prior=="infor"){
  lt1 <- - ((1)/2) * log(2*pi) - (apply(ft1,1,function(x) {log(det(as.matrix(x)))
})))/2 - (apply(vt1,1,function(x) {t(as.matrix(x))}) * apply(ft1,1,function(x)
{1/x}) * vt1)/2 + dinvgamma(Ht,2,3*scale[3]) + dinvgamma(Qt[1],2,3*scale[4]) +
  dinvgamma(Qt[6],2,3*scale[5]) + dinvgamma(Qt[11],2,3*scale[6]) +
  dinvgamma(Qt[16],2,3*scale[6]) + dunif(Psi1,log=T) +
  dunif(Psi2,log=T) + dunif(Rho,log=T) +
  dunif(Lambda,log=T)
}
att <- att1
Ptt <- Ptt1
ft <- ft1
vt <- vt1
at <- at1
Pt <- Pt1
lt <- lt1
loglik[i] <- lt[N]
tiempo <- proc.time() - inicial
}
list(LOGLIK = sum(loglik),tiempo=tiempo)
}

```

Descripción: Se desarrolló una rutina que calcula el filtro de Kalman para los modelos estimados obteniendo la posterior de los parámetros en cada paso del filtro. En general cada paso es el mismo al de la rutina `kalmanfilter` descrita anteriormente, lo único diferente será la función de verosimilitud que en esta rutina es reemplazada por la posterior. Las variables de entrada son las mismas que para la rutina `kalmanfilter` además de unas condiciones lógicas que especifican el modelo que se está trabajando, la prior deseada y un vector de escala para el caso en que se trabaje con una prior informativa.

Elemento	Tipo	Descripción
model	Entrada	Condición lógica que señala el modelo en REE que se trabajará. LL es el modelo de nivel local descrito en la sección 3.2.1. LLT es el modelo de nivel local lineal descrito en la sección 3.2.2.
prior	Entrada	Condición lógica que señala la <i>prior</i> a asignar a los parámetros. <code>noninfor1</code> y <code>noninfor2</code> consideran la recomendación de Spiegelhalter et. al (2003) uniform la propuesta por Gelman et.al (2003) y finalmente <code>infor</code> la <i>prior</i> informativa $IG(\alpha = 2, \beta = 3\theta)$.
scale	Entrada	Vector que señala el verdadero valor de cada parámetro. Aplica únicamente en caso tal que se haya seleccionado <code>infor</code> en el comando <code>prior</code> .
LOGLIK	Salida	Sumatoria de la log posterior.

TABLA F.6. Descripción de elementos en la rutina `kalmanfilterbayes`

F.6.2. Algoritmo Metropolis - Hastings: Cadena de Markov de caminata aleatoria

Código desarrollado con base en Albert (2009)

```

metroprw <- function(logpost,proposal,start,m,prior=c(noninfor1,noninfor2,
  uniform,infor),escala,...)
{
pb <- length(start)
Mpar <- array(0,c(m,pb))
b <- matrix(t(start))
if(prior=="noninfor1"){
  lb <- logpost(yt=yt, Zt=Zt, dt=dt, Tt=Tt, ct=ct, Rt=Rt, Ht=start[x], Qt=start[x],
  ... ,a0=a0, P0=P0)
}
if(prior=="noninfor2"){
  lb <- logpost(yt=yt, Zt=Zt, dt=dt, Tt=Tt, ct=ct, Rt=Rt, Ht=start[x], Qt=start[x],
  ... ,a0=a0, P0=P0,prior="noninfor2")
}
if(prior=="uniform"){
  lb <- logpost(yt=yt, Zt=Zt, dt=dt, Tt=Tt, ct=ct, Rt=Rt, Ht=start[x], Qt=start[x],
  ... ,a0=a0, P0=P0,prior="uniform")
}
if(prior=="infor"){
  lb <- logpost(yt=yt, Zt=Zt, dt=dt, Tt=Tt, ct=ct, Rt=Rt, Ht=start[x], Qt=start[x],
  ... ,a0=a0, P0=P0,prior="infor",scale=escala)
}
a <- chol(proposal$var)
scale <- proposal$scale
accept <- 0
inicial <- proc.time()
for (i in 1:m){
  bc <- b + scale * t(a) %*% array(rnorm(pb), c(pb, 1))
  if(prior=="noninfor1"){
    lbc <- logpost(yt=yt, Zt=Zt, dt=dt, Tt=Tt, ct=ct, Rt=Rt, Ht=bc[x], Qt=bc[x] ,
    ... , a0=a0, P0=P0)
  }
  if(prior=="noninfor2"){
    lbc <- logpost(yt=yt, Zt=Zt, dt=dt, Tt=Tt, ct=ct, Rt=Rt, Ht=bc[x], Qt=bc[x] ,
    ... , a0=a0, P0=P0,prior="noninfor2")
  }
  if(prior=="uniform"){
    lbc <- logpost(yt=yt, Zt=Zt, dt=dt, Tt=Tt, ct=ct, Rt=Rt, Ht=bc[x], Qt=bc[x] ,
    ... , a0=a0, P0=P0,prior="uniform")
  }
  if(prior=="infor"){
    lbc <- logpost(yt=yt, Zt=Zt, dt=dt, Tt=Tt, ct=ct, Rt=Rt, Ht=bc[x], Qt=bc[x] ,
    ... , a0=a0, P0=P0,prior="infor",scale=escala)
  }
}

```

```

prob <- exp(lbc - lb)
if (is.na(prob) == FALSE) {
  if (runif(1) < prob) {
    lb <- lbc
    b <- bc
    accept <- accept + 1
  }
  }
  Mpar[i, ] <- b
}
accept <- accept/m
tiempo <- proc.time() - inicial
output <- list(par = Mpar, accept = accept, tiempo=tiempo)
return(output)
}

```

Descripción: Desarrolla el algoritmo de Metropolis-Hastings con una cadena de Markov de caminata aleatoria. Las variables de entrada son el logaritmo de la posterior de los parámetros, una distribución propuesta, los valores iniciales de los parámetros, el número de iteraciones a realizar y la indicación del modelo y la *prior* a trabajar. El código brinda las simulaciones de los parámetros y la tasa de aceptación del algoritmo.

Elemento	Tipo	Descripción
logpost	Entrada	Función que calcula el logaritmo de la posterior de los parámetros. Puede obtenerse de la rutina <code>kalmanfilterbayes</code> o escribirse una aparte dependiendo del modelo y la <i>prior</i> que se considere.
proposal	Entrada	Un objeto tipo lista que contiene la matriz de varianza propuesta y la escala para la simulación. Véase la sección 2.7
start	Entrada	Vector con los valores iniciales de los parámetros.
m	Entrada	Escalar que señala el número de iteraciones a realizar.
prior	Entrada	Condición lógica que señala la <i>prior</i> a asignar a los parámetros. <code>noninfor1</code> y <code>noninfor2</code> consideran la recomendación de Spiegelhalter et. al (2003) uniform la propuesta por Gelman et.al (2003) y finalmente <code>infor</code> la <i>prior</i> informativa $IG(\alpha = 2, \beta = 3\theta)$.
scale	Entrada	Vector que señala el verdadero valor de cada parámetro. Aplica únicamente en caso tal que se haya seleccionado <code>infor</code> en el comando <code>prior</code> .
...	Entrada	Otros argumentos a pasar por la función.
par	Salida	Marco de datos con los valores simulados de los parámetros.
accept	Salida	Tasa de aceptación del algoritmo, corresponde a los pasos de proposición y movimiento descritos en la sección 2.7.
tiempo	Salida	Tiempo en segundos en llevar a cabo la simulación.

TABLA F.7. Descripción de elementos en la rutina `metroprw`