Boletín de Matemáticas
Vol. XIX, N^o 2 (1985) **BALANCES**

GEOMETRIA Y TOPOLOGIA DE VARIEDADES DE DIMENSION 2 Y 3

*María Dedò**

Comentarios a propósito de un curso sobre el tema dictado por la autora en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Septiembre a Diciembre de 1984.

Traducción del italiano:

María Victoria Gutíerrez

La intención principal del curso era la de dar un panorama introductorio de las ideas que en los últimos años (principalmente por obra de W. Thurston) han producido un verdadero giro en la comprensión de las variedades de dimension tres.

---

* Profesora de la Universidad de Pisa
Profesora Visitante de la Universidad Nacional.

Una gran dificultad para quien trata de acercarse a este material es la amplitud y, sobretodo, la variedad de los llamados "pre-requisitos", puesto que en esta teoría convergen ideas y técnicas provenientes de ramas muy diversas de la matemática (lo que, naturalmente, es al mismo tiempo un elemento de interés y de encanto).

Esta dificultad intrínseca ha causado, a nivel del curso una cierta desorganización en el tratamiento de los temas; se habló un poco de geometría hiperbólica, un poco de topología de variedades de dimensión tres, un poco de grupos discontinuos, etc., sin pretender profundizar en ésta o aquella teoría, sino limitándose a ilustrar algunos conceptos y ejemplos directamente encaminados al fin propuesto.

Lo que sigue es una especie de "introducción a posteriori" con el objeto de ayudar a reconstruír el hilo conductor del material desarrollado; estando dirigida principalmente a quienes siguieron el curso, no se dan aquí las definiciones de los objetos estudiados, para las cuales se remite a la bibliografía indicada.

* *

Se puede decir informalmente que la idea clave en la base de la conjetura y de los resultados de Thurston es la existencia de una estrecha interconexión, en dimensiones bajas, entre problemas de carácter métrico y problemas de carácter topológico.

Para aclarar este concepto basta pensar en algunos resultados clásicos sobre las superficies:

1) Existe una clasificación topológica completa de las superficies; el invariante principal de esta clasificación es la característica de Euler-Poincaré (único invariante para superficies orientables, conexas, compactas, sin borde).

2) La parte interna de cualquier superficie (topológica) se puede dotar (salvo homeomorfismos) de una estructura de variedad riemanniana completa, con curvatura constante.

3) Tal curvatura es positiva, negativa o nula, según que la característica de Euler-Poincaré sea, respectivamente, positiva, negativa o nula.

4) El teorema de Gauss-Bonnet para una superficie con curvatura constante establece un vínculo explícito entre el área total y la característica de Euler-Poincaré (esto es, entre un invariante métrico y uno topológico).

Una primera parte del curso ha sido utilizada para ilustrar estos resultados, aprovechando, al mismo tiempo, para introducir en el contexto más manejable de las superficies, algunos conceptos que podrían servir en el estudio de las 3-variedades. En particular:

- se definió una "estructura geométrica"[1] en el sentido usado por Thurston y se vió cómo ésta implica una estructura de variedad riemanniana con curvatura constante.

- se vió que en dimensión dos el concepto de estructura geométrica produce los tres casos clásicos de métrica elíptica, euclidiana, hiperbólica; se analizaron estos tres casos con particular relieve en la métrica hiperbólica y se demostraron los puntos 2) y 3) enunciados arriba.

- se demostró la equivalencia entre dar una estructura geométrica completa sobre una superficie S y ver S como el cociente de su revestimiento universal $\tilde{S}$ respecto a la acción de un grupo (isomorfo al grupo fundamental $\pi_1(S)$) que actúa libremente y de manera propiamente discontinua sobre $\tilde{S}$; con este propósito, se señaló la teoría de Poincaré sobre polígonos fundamentales para estos grupos.

---

(1) Sea X una variedad analítica y G un grupo de difeomorfismos analíticos de X. Sea S el conjunto de las aplicaciones definidas sobre abiertos de X que son restricciones de elementos de G sobre las componentes conexas

Por mucho tiempo se ha tratado de obtener un resultado análogo a 1) para las 3-variedades; este estudio ha hecho desarrollar la topología de las variedades de dimensión tres como teoría matemática por sí misma, lejos aún de ser completamente sistematizada. Además del problema de la clasificación, (que es en cierto sentido el problema final) siguen abiertos numerosos problemas "clásicos": basta citar la conjetura de Poincaré (¿una variedad de dimensión tres que tiene la misma homotopía de una esfera es homeomorfa a la esfera?) que en efecto ha sido, histŕicamente,

---

del abierto.

DEFINICION 1. Se dice que un espacio topológico M es una (G,X)-variedad si existe un atlas (U_i, f_i) de M, donde f_i es un homeomorfismo entre U_i y un abierto V_i de X y, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces $f_i \circ f_j^{-1} \in S$.

DEFINICION 2. Una *estructura geométrica* sobre M es una (G,X)-estructura sobre M tal que G y X verifican las siguientes condiciones:

a) G actúa transitivamente sobre X.

b) G es un grupo de Lie (analítico) y el estabilizador de todo punto, $G_X = \{g \in G \mid g(x) = x\}$, es compacto.

c) X es simplemente conexo.

d) M es completa y de volumen finito (según la métrica riemanniana asociada).

e) G es maximal respecto a la propiedad b).

otro "hilo conductor" en torno al cual se ha desarrollado gran parte de la teoría.

Una de las dificultades de la topología de las 3-variedades que motiva su peculiaridad y su autonomía (respecto de la topología general, de la topología algebraica, etc.) es el hecho de que han debido inventarse técnicas e instrumentos "ad hoc", no transferibles de otros contextos, dado que las técnicas estándar resultan ser poco útiles en el caso de las 3-variedades. Por ejemplo, la característica de Euler-Poincaré es siempre nula para una 3-variedad compacta, conexa, sin borde. La homología está completamente determinada por el grupo fundamental y, por esta razón, no da ninguna otra información. El grupo fundamental puede, en cambio, ser un instrumento útil pero a menudo poco manejable en cuanto de él se obtiene una presentación con generadores y relaciones y no existe, en general, un algoritmo que diga cuándo dos de tales presentaciones dan grupos isomorfos.

Una situación típica es la de disponer de una construcción general (en el sentido de que se obtienen todas las 3-variedades a partir de datos más simples) y no poder explotar la aparente potencia de este instrumento porque no se tienen condiciones necesarias y suficientes para que la misma construcción, aplicada a datos distintos, produzca variedades homeomorfas (por ejemplo, cirugía de Dehn a lo largo de nudos o links, o bien, los diagramas de Heegard).

De todo esto se puede intuir que una dificultad crónica de la topología de variedades de dimensión tres haya sido la de seleccionar buenos invariantes.

En este panorama, muy superficial, se inserta la idea (ambiciosa) de Thurston, de tratar de obtener, para las 3-variedades, resultados análogos a los citados puntos 2), 3) y 4) para superficies. Respecto al punto 1), es razonable esperar que resultados de este tipo, al introducir en la topología los instrumentos rígidos, más potentes, de la geometría, lleven a una mayor comprensión de las 3-variedades, también desde un punto de vista exclusivamente topológico (ver también sucesivas discusiones sobre la geometría hiperbólica).

Es necesario observar, antes que todo, que cuando se habla de resultados "análogos" a los de las superficies no se puede esperar un paralelismo directo. Se ve, en efecto, sin mucha dificultad, que:

a) existen variedades de dimensión tres que no admiten una estructura geométrica: en particular todas las 3-variedades no primas, con la única excepción de $P^3 \# P^3$ (1).

b) Las posibles geometrías que es necesario considerar en dimensión tres no son solamente las tres análogas del caso bidimensional (elíptica, hiperbólica, euclidiana): por ejemplo, $S^2 \times S^1$, a pesar de que posee una "buena" geometría, (una métrica riemanniana homogénea, completa, con curvatura constante) no puede ser dotada de ninguna de las tres métricas precedentes.

Resulta, en efecto, que las condiciones para una "estructura geométrica" (en el sentido definido en el curso a propósito de las superficies) llevan, en el caso tridimensional, a ocho posibles geometrías.

La conjetura clave de Thurston se puede expresar, informalmente, de la siguiente manera:

Conjetura. Toda 3-variedad admite una descomposición canónica en piezas tales que la parte interna de cada una de ellas puede ser dotada de una estructura geométrica.

Este es el máximo resultado que se puede obtener como análogo al punto 2) de las super-

---

(1) # significa suma conexa.

ficies. La descomposición canónica a la que se refiere la conjetura está compuesta en realidad de dos estadios: el primero es la descomposición de una variedad en variedades primas (necesario por la precedente observación a)); el segundo es una construcción más complicada que comporta el cortar una 3-variedad a lo largo de toros particulares.

La conjetura de Thurston es muy fuerte: en particular, por curiosidad, citamos el hecho de que la conjetura de Poincaré sería una consecuencia de un caso particular suyo.

La plausibilidad de la conjetura está justificada por un gran número de resultados obtenidos en los últimos años: sea resultados que la apoyan directamente (informalmente se puede decir que la conjetura ha sido demostrada para "casi" todas las variedades); sea resultados que, si bien no directamente ligados a la conjetura, utilizan técnicas de tipo métrico para llegar a la solución de problemas relevantes de topología de variedades de dimensión tres (por ejemplo, la solución de la conjetura de Smith). Así se muestra claramente la potencia de las hipótesis y de las técnicas introducidas por Thurston.

Entre los resultados parciales obtenidos en dirección a la conjetura citamos los siguientes:

TEOREMA 1. La conjetura es cierta para las variedades Haken.

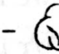
TEOREMA 2. Sea M una variedad Haken, compacta, sin borde. M tiene una estructura hiperbólica si y sólo si M es atoroidal.

TEOREMA 3. Sea M una variedad Haken, compacta, con borde $\partial M \neq \emptyset$, que contiene una superficie incompresible F que no sea la fibra de una fibración $p:M \to S^1$. Entonces M tiene una estructura hiperbólica si y sólo si M es atoroidal.

TEOREMA 4. Sea $M = S^3 - K$ el complemento de un nudo en S^3. M tiene una estructura geométrica si y sólo si K no es un nudo satélite.

M tiene una estructura hiperbólica si y sólo si K no es ni un nudo satélite ni un nudo taurino.

TEOREMA 5. Sea $M = S^3 - K$ el complemento en S^3 de un nudo que no sea ni satélite ni taurino, y sea $M(p,q)$ la variedad obtenida de M por cirugía de Dehn de tipo (p,q). Entonces $M(p,q)$ tiene una estructura hiperbólica, para todos los valores de los parámetros (p,q), excepto un número finito de parejas.

Las demostraciones de los teorema 1-5 son muy profundas y complicadas y en el curso no se pretendía, ni siquiera marginalmente, adentrarse en ellas. Se quería, sin embargo, llegar a captar el significado de los enunciados de estos teoremas y de la conjetura, no sólo en el sentido de dar las definiciones técnicas de los objetos y de las construcciones involucradas sino también en un sentido más amplio. Esto se hizo, por ejemplo, justificando de modo más o menos riguroso las observaciones que aquí estamos expresando de manera informal; o bien, demostrando completamente los teorema 4 y 5 en un caso particular (M = complemento del nudo ocho S^3 - ), pero especialmente significativo.

Con este fin se hizo necesario dar algunos requisitos indispensables de topología de 3-variedades, lo cual se efectuó básicamente a partir de ejemplos tomados en su mayor parte de la teoría de nudos.

El caso de la geometría hiperbólica merece algunas consideraciones aparte: en los mismos enunciados de los teorema 1-5 se puede notar una posición "privilegiada" de la geometría hiperbólica respecto de las otras siete geometrías; inclusive la misma conjetura se podría reformular diciendo que toda 3-variedad que verifica ciertas condiciones se puede dotar de una métrica hiperbólica. (Las condiciones garantizarían simplemen te que no existen obstrucciones topológicas "a priori" para poderlo hacer).

Esta posición "privilegiada" depende del hecho de que las otras siete geometrías producen 3-variedades completamente clasificadas desde el punto de vista topológico: se pueden dar condiciones (topológicas) necesarias y suficientes a fin de que una 3-variedad admita una métrica de uno de esos siete tipos.

En consecuencia, el trabajo en dirección a la conjetura ha originado, como subproducto, una comprensión mucho más profunda de las 3-variedades hiperbólicas y una serie de resultados de por sí interesantes y a veces bastante "extraños" en el sentido de que revelan cierta atipicidad de la dimensión tres respecto de las otras dimensiones. (Ver por ejemplo, el comportamiento de la función volumen).

Otro motivo del interés particular de la métrica hiperbólica también respecto de cuestiones puramente topológicas es el siguiente:

TEOREMA (de rigidez): Sea $f: M \to N$ una equivalencia homotópica entre dos variedades hiperbólicas de dimensión tres, orientadas, completas, de volumen finito. Entonces f es homótopa a una isometría.

En particular, si una 3-variedad admite una estructura hiperbólica (completa, de volumen finito), esta estructura es única (salvo isometrías). Esto es falso en el caso de las superficies, mientras que sigue siendo cierto en dimensión $n \geqslant 4$.

El teorema de rigidez, unido al hecho de que "tantas" 3-variedades son hiperbólicas, puede tener consecuencias muy fuertes. Esto debería ser intuitivamente plausible, por ejemplo, confrontándolo con la precedente discusión sobre la dificultad "crónica" presente en la topología de variedades de dimensión tres. Basta pensar que, en este caso, los invariantes métricos son en realidad invariantes topológicos. En efecto, es presumible que el volumen pueda ser un buen instrumento para medir la "complejidad" topológica de las 3-variedades hiperbólicas (completas, orientadas, de volumen finito).

Lo que se hizo en el curso a este propósito fué:

- discutir una demostración geométrica reciente (debida a Gromov y Thurston) del teorema de rigidez, enunciando los varios pasos y demostrando dos, elementales pero significativos, en particular porque muestran por qué razón el teorema de rigidez es falso en dimensión dos.

- indicar la descomposición de Kazhdan Margulis y los teorema de clausura y apertura de cúspides; en particular, se mostró cómo el ejemplo discutido detalladamente del complemento del nudo ocho viene a ser una situación generalizable.

Una clase de ejemplos significativos de 3-variedades son los cilindros de aplicaciones, esto es, las variedades del tipo $M = S\times[0,1]/\varphi$ donde S es una superficie (con característica de Euler negativa), $\varphi: S \to S$ es un difeomorfismo. El cociente módulo φ significa identificar las dos bases del cilindro $S\times[0,1]$ de acuerdo con la relación de equivalencia $(x,0) \sim (\varphi(x),1)$. El hecho de que una variedad de este tipo admita una estructura hiperbólica produce fenómenos topológicos muy "extraños", tanto que, inicialmente, era entre los cilindros de aplicaciones que se buscaban los contraejemplos a la conjetura. Por el contrario, la comprensión completa de cuáles difeomorfismos φ producen un cilindro de aplicación con una estructura hiperbólica ha sido un punto determinante para apoyar la plausibilidad de la conjetura de Thurston (aunque ahora es un caso particular de los teoremas ya citados).

Este ejemplo muestra, en particular, cómo del estudio de las 3-variedades surgen naturalmente problemas (en general bastante delicados) que tienen que ver con las superficies. Y es sor prendente notar cómo, aún sobre objetos aparentemente "inocuos" y de tiempo atrás bien conocidos como las superficies, existan tantas preguntas todavía sin respuesta o a las que se ha dado una respuesta sólo muy recientemente.

El mayor resultado de Thurston en este sentido responde a los siguientes dos problemas:

PROBLEMA I. "Clasificar" los elementos del grupo

$G(S)$ = {difeomorfismos de la superficie S}/isotopía

Esto es, seleccionar en cada clase de equivalencia un representante particularmente "bueno" (S es una superficie con $\chi(S) < 0$).

En efecto se demuestra que todo difeomorfismo $\varphi: S \to S$ es, salvo isotopía, de uno de los siguientes tres tipos:

a) una isometría (respecto a alguna métrica hiperbólica sobre S).

b) reducible (lo que significa que fija una curva en S y, en consecuencia, induce un difeomorfismo sobre una superficie de género menor).

c) pseudo-Anosov.

Los difeomorfismos pseudo-Anosov gozan de una serie de propiedades geométricas relevantes aunque bastante complicadas de enunciar. En particular, respecto al problema citado sobre las 3-variedades, el cilindro de aplicación $M = S\times[0,1]/\varphi$ tiene una estructura hiperbólica si y sólo si φ es pseudo-Anosov.

Esta clasificación es una consecuencia de la respuesta al

PROBLEMA II. Sea S una superficie compacta, sin borde, con $\chi(S) < 0$ y $\tau(S)$ el espacio de Teichmüller de S, es decir, el espacio de las métricas hiperbólicas sobre S, salvo isotopías. Se conocía de tiempo atrás que

$$\tau(S) \simeq R^{-3\chi(S)} ;$$

¿qué significa que una sucesión de métricas "tiende al infinito?". ¿Se puede compactificar $\tau(S)$, es decir, poner un borde que sea natural respecto a la acción del grupo de difeomorfismos $G(S)$?

La solución de este problema (que, notamos de paso, es un problema clásico cuyo interés proviene también de otros sectores de la matemática) es bastante elaborada y pasa a través del estudio del espacio de curvas simples y cerradas sobre S y del espacio de foliaciones. En efecto, los puntos del borde de $\tau(S)$ se pueden interpretar geométricamente como clases de equi valencia de foliaciones medidas y contienen, como subconjunto denso, las clases de isotopía de curvas simples y cerradas. Un elemento determinante en este contexto es el de definir una "buena topología" sobre el espacio de las curvas (y de las foliaciones).

Lo que se hizo en el curso a este propósito fué:

- describir los objetos en cuestión y definir la topología, que se obtiene de la inclusión en un espacio funcional grande.

- tratar detalladamente el caso del toro; en este caso valen resultados análogos (naturalmente más simples) al caso de superficies con característica negativa y las demostraciones son "ad hoc" y de naturaleza elemental.

*

BIBLIOGRAFIA

A) __Geometría Hiperbólica__.

A1) Siegel. "Topics in complex function theory" Vol. II ed. Wiley (1971).

A2) Magnus. "Non euclidean tesselations and their groups" Academic Press (1974).

A3) Coxeter. "Introduction to geometry" ed. Wiley (1961).

A4) Milnor. "Hiperbolic geometry: the first 150 years" Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 6 Nº 1 (1982) p.9-23.

B) ***Resultados de Thurston.***

B1) Thurston. "On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces I" Preprint.

B2) Poenaru. "Travaux de Thurston sur les difféomorphismes des surfaces et l'espace de Teichmüller", Séminaire Bourbaki Nº 529 (1978) p.66.

B3) Fathi, Laudenbach, Poenaru. "Travaux de Thurston sur les surfaces" Astérisque, Vol.66-67 (1979).

B4) Thurston, Hatcher. "A presentation for the mapping class group of a closed non orientable surface" Topology Vol. 19 (1980), p.221.

B5) Papadopoulos. "Réseaux ferroviaires, difféomorphismes pseudo-Anosov et automorphismes symplectiques de l'homologie", Tesis.

C) ***Varios.***

C1) Epstein. "Curves on 2-manifold and isotopies" Acta Math. Vol. 115 (1966) p.83.

C2) Rolfsen "Knots and links" ed. Publish or Perish (1976).

C3) Maskit. "On Poincaré's theorem for fundamental polygons" Advances in Math. Vol. 7 (1971) p.219.

C4) Sullivan "Seminar on conformal and hyperbolic geometry" Preprint IHES (1982).

C5) Freedman, Hass, Scott. "Closed geodesics on surfaces" Bull. London Math. Soc. Vol.14 (1982) p.385.

C6) Scott. "The geometries of 3-manifolds". Bull. London Math. Soc. Vol. 15 Nº 56 (1983).

C7) Thurston "The geometry and topology of 3-manifolds" Princeton University Press.

C8) Sullivan. "Travaux de Thurston sur les groupes quasi-fuchsiens et les variétés hyperboliques de dimension 3 fibreés sur S^1". Sem. Bourbaki Nº 554 (1980).

C9) Thurston "Hyperbolic structures on 3-manifolds II. Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle". Preprint.

C10) Benedetti, Dedō "Una introduzione alla geometria e topologia delle varietá de dimensione tre" Quaderni dell'U.M.I. Nº27 (1984).

*

COMENTARIOS.

A) En A1 (Cap.3) y A2 (Cap.1) se hace un estudio de la geometría hiperbólica en parte desde el punto de vista sintético, en parte desde el punto de vista de la geometría diferencial. Por el contrario en A3 (Cap.16) se la estudia exclusivamente desde un punto de vista sintético. Se incluye por ejemplo, la demostración sintética del hecho de que el área de un triángulo hiperbólico es π-(suma de los ángulos).

En A3, (Cap.6) se da una discusión de la inversión circular y de las familias de círculos coaxiales que puede ser útil para la comprensión de las isometrías hiperbólicas, mientras que en el Cap. 20 se trata la geometría hiperbólica usando resultados de la geometría diferencial.

En A4 se hace un panorama histórico de la geometría hiperbólica que, en particular, liga la geometría hiperbólica "clásica" con los resultados recientes de Thurston.

B) El artículo original con los resultados de Thurston es B1. No es de fácil lectura y las demostraciones son apenas bosquejadas. Puede ser útil para entender la génesis de la idea.

B2 y B3 son "explicaciones" de B1. B2 es una exposición concisa donde se dan los enunciados de los resultados y las ideas fundamentales de las demostraciones. B3, en cambio, es una exposición completa y detallada, bastante técnica y pesada.

En B4 se presenta otro resultado de Thurston sobre las superficies, bastante independiente de los precedentes y con técnicas de demostración completamente distintas (y más simples). Se da una presentación con generadores y relaciones de $G(M)$ = {difeomorfismos de M}/isotopía.

En B5 hay un estudio de los "circuitos ferroviarios" como instrumento para dar explícitamente una estructura de variedad P.L. sobre el espacio de las foliaciones medidas sobre una superficie. Los circuitos ferroviarios se utilizan siempre para dar una construcción de algunos difeomorfismos pseudo-Anosov.

C) En C1, en particular, se demuestra que dos curvas sobre una superficie son homotópicas si y sólo si son isotópicas, y que un homeomorfismo homotópico a la identidad es también isotópico a la identidad.

En C2 (Cap.2 §A,B,C,D) se da la demostración de los dos resultados citados, en el caso del toro (que ya pueden dar la idea del tipo de dificultades que se tienen). Además se encuentran, por ejemplo, la demostración de que una clase de homotopía $\alpha = p[\ell] + q[m] \in \pi_1$ (toro) es representable por una curva simple, cerrada y conexa si y sólo si $(p,q) = 1$ y la demostración del teorema de la cuerda en el plano.

En cuanto a *grupos discontinuos* y *dominios fundamentales*, en la bibliografía se encuentra lo siguiente:

1. En A1 se encuentra la construcción de Dirichlet del dominio fundamental;

2. En A2 (Cap.II) hay un estudio detallado de los grupos del triángulo

$$G_{p,q,r} = \langle a,b,c : a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^p = (bc)^q = (ac)^r = 1 \rangle$$

con bellísimas ilustraciones;

3. En C3 se encuentra la demostración del teorema de Poincaré en lenguaje moderno;

4. C4 (§§1-4) trata, entre otras cosas, las construcciones de Ford y de Dirichlet del dominio fundamental. A este propósito puede ser útil también A3 (Cap.4,15).

También en A3 encontramos un bello tratado de isometrías y similitudes euclidianas, en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ (Cap. 3,5,7) y algunos elementos de topología de las superficies (Cap.21). Además, en el Cap. 13 (§5) se demuestra una fórmula que liga el área de un polígono plano con vértices en el retículo entero al número de puntos de este retículo interiores al polígono mismo o sobre el borde. Además de ser interesante de por sí, tal fórmula puede servir para demostrar que si $\alpha = p[\ell] + q[m]$ y $\beta = p'[\ell] + q'[m]$ son elementos en $\mathcal{T}$ (toro), entonces $i(\alpha, \beta) = |pq' - p'q|$.

En C5 hay una demostración elemental del siguiente resultado: Sea M una superficie orientable, compacta, sin borde, dotada de una métrica riemanniana cualquiera (no necesariamente con curvatura constante) y sea $\alpha \in \pi_1 M$ una clase no nula, representable por una curva simple y cerrada. Si $f: S^1 \to M$ es un representante de α de longitud mínima, entonces f es un embedding. Las ideas utilizadas son en extremo elementales, aunque a veces las argumentaciones no son fáciles.

En C6 hay un estudio de las tres geometrías bidimensionales (§1) y, al comienzo del §5, una útil discusión acerca de las relaciones entre los distintos puntos de vista con los que se puede pensar en una "geometría" sobre una variedad: espacio dotado de una distancia, métrica riemanniana, (G,X) estructura.

En C7 se puede encontrar un tratado (de lectura nada fácil) sobre el concepto de (G,X) estructura, holonomía, aplicación desarrollante (Cap.3).

C8 y C9 dan la demostración (difícil) del hecho, de que una 3-variedad del tipo

$$M = S\times[0,1]/(x,0) \sim (\varphi(x),1)$$

tiene una estructura hiperbólica si y sólo si es pseudo-Anosov.

* *