



UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA

# **IMPLEMENTACIÓN DEL FILTRO KALMAN PARA EL PRONÓSTICO DE CAUDAL EN TIEMPO REAL PARA UN TRAMO DEL RÍO MAGDALENA**

**CRISTIAN AUGUSTO VILLANUEVA NUÑEZ**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ingeniería  
Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola  
Bogotá, Colombia  
Enero Año 2018



# **IMPLEMENTACIÓN DEL FILTRO KALMAN PARA EL PRONÓSTICO DE CAUDAL EN TIEMPO REAL PARA UN TRAMO DEL RÍO MAGDALENA**

**CRISTIAN AUGUSTO VILLANUEVA NUÑEZ**

Tesis o trabajo de investigación presentada como requisito parcial para optar al título de:

**Magister en Ingeniería – Recursos hídricos**

Director (a):

Ph.D., M.Sc, I.C. Nelson Obregón Neira

Codirector (a):

Línea de Investigación:

Modelación de fenómenos y amenazas naturales

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ingeniería, Departamento de Ingeniería Civil

Ciudad Bogotá, Colombia

Enero Año 2018



*(Dedicatoria)*

*Dedicado a Dios, a mis padres  
Flor Alba y Pablo Antonio (QEPD).  
Dedicado también  
a toda mi familia y amigos*



## **Agradecimientos**

El más sincero de los agradecimientos al director y mentor de este trabajo ingeniero Nelson Obregón Neira por sus valiosos aportes, por su indiscutible calidad de persona, buen ánimo permanente y actitud respetuosa, resaltando los logros e indicando las fallas personales durante el desarrollo de este trabajo. Las personas como el ingeniero Nelson son aquellas que cuando se les conoce, son para aprenderles por su inteligencia, constancia y capacidad de trabajo.

A todos mis compañeros de estudio y profesores de la maestría. Un agradecimiento especial al Ing. Carlos Arturo Duarte Agudelo.

Agradecimiento especial también al Instituto de Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales de Colombia (IDEAM), por suministrar la información de manera gratuita, gracias al convenio suscrito con la Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá.



## Resumen

El trabajo presenta una implementación del Filtro Kalman, para el pronóstico horario de caudales en tiempo real sobre un tramo del río Magdalena, iniciando en la estación limnigráfica de Puerto Berrío en el departamento de Antioquia hasta la estación limnigráfica de Barrancabermeja en el departamento de Santander. Se plantearon tres modelos de tránsito agregados como son: el tránsito por diferencias finitas, por piscina nivelada y el modelo de Muskingum lineal. La posterior calibración y validación de los modelos de tránsitos permitió la implementación del pronóstico en el filtro Kalman. El modelo de tránsito de Muskingum presenta la mejor tendencia de ajuste según la función objetivo de Nash-Sutcliffe, para el proceso de calibración y validación en los cinco periodos seleccionados. El modelo de tránsito de piscina nivelada es el que tiene la segunda mejor tendencia y el modelo en menor grado de calibración y validación según la función objetivo es el de tránsito de diferencias finitas.

Los resultados de la función objetivo de Nash-Sutcliffe (0,946-0,995) son altos para el pronóstico horario de caudales por el filtro Kalman, en los cinco periodos y los tres modelos de tránsito desarrollados con o sin ruido en la ecuación de medición del filtro. El modelo de tránsito por diferencias finitas presenta la tendencia de mejores y más altos valores cercanos a uno, en la función objetivo de Nash-Sutcliffe, el modelo de tránsito de piscina nivelada es la segunda mejor tendencia y el tránsito de Muskingum presenta la tendencia de los valores menores de este coeficiente.

**Palabras clave: (Nash-Sutcliffe, calibración, pronóstico, Filtro Kalman con y sin ruido, modelos de tránsito).**

## Abstract

The work presents an implementation of the Kalman filter, for the real time forecast of flows over a stretch of the Magdalena River, starting at the limnigraphic station of Puerto Berrío in the department of Antioquia to the limnigraphic station of Barrancabermeja in the department of Santander. Three aggregate traffic models were proposed, such as: transit through finite differences, by level pool and the linear Muskingum model. The subsequent calibration and validation of the transit models allowed the implementation of the forecast in the Kalman filter. The Muskingum transit model presents the best adjustment tendency according to the Nash-Sutcliffe objective function, for the calibration and validation process in the five selected periods. The model of traffic of level pool is the one that has the second best tendency and the model to a lesser degree of calibration and validation according to the objective function is the transit of finite differences.

The results of the Nash-Sutcliffe objective function (0.946-0.995) are high for the hourly flow forecast by the Kalman filter, in the five periods and the three transit models developed with or without noise in the filter measurement equation . The finite difference transit model presents the trend of better and higher values close to one, in the Nash-Sutcliffe objective function, the level pool transit model is the second best trend and Muskingum traffic presents the trend of the lower values of this coefficient.

**Keywords: (Nash-Sutcliffe, calibration, forecast, Kalman filter with and without noise, transit models).**

Pág.

## Tabla de contenido

<b>1. Capítulo 1 Generalidades .....</b>	<b>30</b>
1.1 Definición del problema .....	30
1.1.1 Antecedentes del problema .....	30
1.2 Formulación del problema .....	31
1.3 Justificación.....	31
1.4 Objetivos .....	32
1.4.1 Objetivo general.....	32
1.4.2 Objetivos específicos .....	32
1.5 Estructura del documento.....	32
<b>2. Capítulo 2 Marco Conceptual: Modelos de Tránsito Agregado .....</b>	<b>34</b>
2.1 Principio de conservación de la masa .....	35
2.2 Modelo de tránsito de diferencias finitas.....	43
2.3 Modelo lineal tránsito de Muskingum.....	49
2.4 Modelo lineal tránsito de piscina nivelada .....	61
2.5 Análisis de hidrógrafas a la entrada y salida del tramo de estudio considerando tributos.....	66
<b>3. Capítulo 3 Metodología: zona de estudio y análisis de información .....</b>	<b>71</b>
3.1 Localización del tramo de estudio seleccionado .....	72
3.1.1 Cartografía y sistema de coordenadas .....	73
3.2 Información básica hidrométrica y de las subcuencas en la zona de estudio ...	74
3.2.1 Curvas de calibración de aforos o gastos .....	79
3.2.2 Ejemplo de factor de área para estimación de caudales tributarios.....	85
3.3 Información básica hidrométrica y de las subcuencas en la zona de estudio ...	87
3.3.1 Períodos de tiempo seleccionados en las tres estaciones limnigráficas.....	87
3.3.2 Datos atípicos de niveles horarios en cinco períodos seleccionados .....	88
3.3.3 Hidrógrafas y gráficas de la función autocorrelación para los periodos seleccionados .....	92
3.3.4 Gráficas función correlación cruzada para los periodos seleccionados.....	100
3.3.5 Resumen de los resultados y análisis de la información hidrométrica de los periodos seleccionados .....	104
<b>4. Capítulo 4. Calibración y validación: modelos de tránsito de crecientes agregados .....</b>	<b>108</b>
4.1 Descripción general del programa MCAT-V2.0 .....	108
4.1.1 Gráfica de dispersión en el espacio paramétrico VS función objetivo .....	110
4.1.2 Gráfica de análisis de sensibilidad paramétrica o regional .....	112
4.2 Escenarios de calibración empleados en los tres modelos de tránsitos propuestos.....	114
4.2.1 Condiciones iniciales de calibración.....	117
4.3 Calibración, validación y análisis de resultados del modelo de tránsito de diferencias finitas .....	117
4.3.1 Período 1 de calibración y validación tránsito de diferencias finitas .....	118

4.3.2	Período 2 de calibración y validación tránsito de diferencias finitas.....	121
4.3.3	Período 3 de calibración y validación tránsito de diferencias finitas.....	124
4.3.4	Período 4 de calibración y validación tránsito de diferencias finitas.....	127
4.3.5	Período 5 de calibración y validación tránsito de diferencias finitas.....	130
4.4	Calibración, validación y análisis de resultados del modelo de tránsito de piscina nivelada.....	133
4.4.1	Período 1 de calibración y validación tránsito de piscina nivelada.....	134
4.4.2	Período 2 de calibración y validación tránsito de piscina nivelada.....	137
4.4.3	Período 3 de calibración y validación tránsito de piscina nivelada.....	140
4.4.4	Período 4 de calibración y validación tránsito de piscina nivelada.....	143
4.4.5	Período 5 de calibración y validación tránsito de piscina nivelada.....	146
4.5	Calibración, validación y análisis de resultados del modelo de tránsito de Muskingum.....	149
4.5.1	Período 1 de calibración y validación tránsito de Muskingum.....	150
4.5.2	Período 2 de calibración y validación tránsito de Muskingum.....	153
4.5.3	Período 3 de calibración y validación tránsito de Muskingum.....	156
4.5.4	Período 4 de calibración y validación tránsito de Muskingum.....	159
4.5.5	Período 5 de calibración y validación tránsito de Muskingum.....	162
4.6	Análisis cualitativo de calibración y validación en cinco periodos seleccionados para los modelos de tránsitos planteados.....	165
4.7	Análisis cuantitativo de resultados del proceso de calibración y validación de tres modelos de tránsito planteados en cinco periodos.....	167
<b>5.</b>	<b>Capítulo 5 modelación: Pronóstico con Filtro Kalman (KF) .....</b>	<b>174</b>
5.1	Contextualización del Filtro Kalman propuesto.....	174
5.1.1	Modelo Autoregresivo de primer orden.....	175
5.2	ECUACIONES DEL FILTRO DE KALMAN-BUCY PARA PRONÓSTICO.....	178
5.2.1	Proceso de Actualización o de Corrección para la predicción.....	181
5.2.2	Condiciones Iniciales.....	187
5.3	Acople de los modelos en el filtro Kalman.....	187
5.3.1	Ruidos en la ecuación de estado y en la ecuación de medición del Filtro Kalman para aplicar los tránsitos propuestos.....	188
5.4	Pronóstico de caudales, modelo de tránsito de diferencias finitas.....	189
5.5	Pronóstico de caudales, modelo de tránsito de piscina nivelada.....	202
5.6	Pronóstico de caudales, modelo de tránsito de Muskingum.....	214
5.7	Análisis de los resultados del pronóstico de caudales.....	227
5.7.1	Análisis de los resultados del pronóstico, con y sin ruidos en la ecuación de medición del filtro Kalman.....	227
5.7.2	Conclusiones específicas del pronóstico de caudales horarios con el filtro Kalman.....	233
<b>6.</b>	<b>Capítulo 6. Conclusiones .....</b>	<b>235</b>
6.1	Conclusiones.....	236
6.2	Recomendaciones.....	242
	<b>Anexo A: Análisis de datos atípicos.....</b>	<b>244</b>
	<b>Anexo B: Método de Regresión Lineal Múltiple.....</b>	<b>247</b>
	<b>Anexo C. Cartografía de la zona de estudio sobre el río Magdalena (Puerto Berrío – Barrancabermeja) .....</b>	<b>249</b>

---

**Anexo D. Algoritmos .....250**

## Lista de figuras

	<b>Pág.</b>
<b>Figura 2-1:</b> Esquema general básico empleado para dividir el cauce de un río por embalses. ....	37
<b>Figura 2-2 :</b> Esquema general de almacenamiento por prisma y para cuña positiva para el tramo de un canal, tomado (Chow et al, 1994). ....	50
<b>Figura 2-3 :</b> Cambio de almacenamiento durante un periodo de tránsito $\Delta t$ , tomado (Chow et al, 1994). ....	53
<b>Figura 2-4 :</b> Ejemplo de Hidrógrafas típicas de Entrada (hidrograma inferior) y de salida (hidrograma superior) en un tramo con tributarios. ....	68
<b>Figura 2-5:</b> Hidrógrafa de inicio adelantada, de acuerdo con el tiempo de viaje o de tránsito a lo largo del tramo o embalse, respecto a la hidrógrafa de salida. ....	69
<b>Figura 3-1:</b> Plano topológico de la zona de estudio. ....	72
<b>Figura 3-2 :</b> Curva de calibración de caudales, estación limnigráfica de Puerto Berrío... ..	80
<b>Figura 3-3 :</b> Curva de calibración de caudales de la estación limnigráfica de Barrancabermeja. ....	81
<b>Figura 3-4:</b> Curva de calibración de caudales de la estación limnigráfica de Puerto Araujo. ....	84
<b>Figura 3-5:</b> Esquema de un diagrama Box Plot. ....	89
<b>Figura 3-6:</b> Diagrama BoxPlot periodo N°1. de las tres estaciones limnigráficas. ....	90
<b>Figura 3-7:</b> Diagrama BoxPlot, de las tres estaciones limnigráficas periodo 2. ....	90
<b>Figura 3-8:</b> Diagrama BoxPlot, de las tres estaciones limnigráficas periodo 3. ....	91
<b>Figura 3-9:</b> Diagrama BoxPlot, de las tres estaciones limnigráficas periodo 4. ....	91
<b>Figura 3-10:</b> Diagrama BoxPlot de las tres estaciones limnigráficas, periodo 5. ....	92
<b>Figura 3-11:</b> Hidrógrafas periodo 1 de las tres estaciones limnigráficas, zona de estudio. ....	94
<b>Figura 3-12:</b> Función de Autocorrelación, para tres estaciones, periodo 1. ....	94
<b>Figura 3-13:</b> Hidrógrafas periodo 2 de las tres estaciones limnigráficas zona de estudio. ....	95
<b>Figura 3-14:</b> Función de Autocorrelación, para tres estaciones, periodo 2. ....	95
<b>Figura 3-15:</b> Hidrógrafas periodo 3 de las tres estaciones limnigráficas zona de estudio. ....	96
<b>Figura 3-16:</b> Función de Autocorrelación, para tres estaciones, periodo 3. ....	97
<b>Figura 3-17:</b> Hidrógrafas periodo 4 de las tres estaciones limnigráficas zona de estudio. ....	97
<b>Figura 3-18:</b> Función de Autocorrelación, para tres estaciones, periodo 4. ....	98

**Figura 3-19:** Hidrógrafas periodo 5 de las tres estaciones limnigráficas zona de estudio. .... 99

**Figura 3-20:** Función de Autocorrelación, para tres estaciones, periodo N°5. .... 99

**Figura 3-21:** Función de correlación cruzada, Periodo 1. .... 101

**Figura 3-22:** Función de correlación cruzada, periodo 2. .... 101

**Figura 3-23:** Función de correlación cruzada, periodo 3. .... 102

**Figura 3-24:** Función de correlación cruzada, periodo 4. .... 103

**Figura 3-25:** Función de correlación cruzada, periodo 5. .... 103

**Figura 4-1:** Ejemplos de gráficas de espacio paramétrico versus función objetivo, de una calibración por el programa MCAT, en dos modelos diferentes. .... 111

**Figura 4-2:** Ejemplos de gráficas de sensibilidad paramétrica versus función, objetivo en una calibración por el programa MCAT, en dos modelos diferentes. .... 113

**Figura 4-3:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de diferencias finitas periodo 1. .... 119

**Figura 4-4:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, del período 1 tránsito diferencias finitas. .... 119

**Figura 4-5:** Gráfica (a) y la gráfica (b) son respectivamente los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada en la estación de Barrancabermeja, del periodo 1 según modelo de diferencias finitas. .... 120

**Figura 4-6:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de diferencias finitas periodo 2. .... 122

**Figura 4-7:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, período 2 tránsito diferencias finitas. .... 122

**Figura 4-8:** Gráfica (a) y la gráfica (b) son respectivamente los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada en la estación de Barrancabermeja, del periodo 2 según modelo de diferencias finitas. .... 123

**Figura 4-9:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de diferencias finitas periodo 3. .... 125

**Figura 4-10:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, período 3 tránsito diferencias finitas. .... 125

**Figura 4-11:** Gráfica (a) y la gráfica (b) son respectivamente los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada en la estación de Barrancabermeja, del periodo 3 según modelo de diferencias finitas. .... 126

**Figura 4-12:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de diferencias finitas periodo 4..... 128

**Figura 4-13:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, período 4 tránsito diferencias finitas. .... 128

**Figura 4-14:** Gráfica (a) y la gráfica (b) son respectivamente los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada en la estación de Barrancabermeja, del periodo 4 según modelo de diferencias finitas. .... 129

**Figura 4-15:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de diferencias finitas periodo 5..... 131

**Figura 4-16:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, período 5 tránsito diferencias finitas. .... 131

**Figura 4-17:** Gráfica (a) y la gráfica (b) son respectivamente los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada en la estación de Barrancabermeja, del periodo 5 según modelo de diferencias finitas. .... 132

**Figura 4-18:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de piscina nivelada periodo 1..... 135

**Figura 4-19:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, período 1 tránsito de piscina nivelada. .... 135

**Figura 4-20:** Gráfica (a) y la gráfica (b) son respectivamente los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada en la estación de Barrancabermeja, del periodo 1 según modelo de piscina nivelada. .... 136

**Figura 4-21:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de piscina nivelada periodo 2..... 138

**Figura 4-22:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, período 2 tránsito de piscina nivelada. .... 138

**Figura 4-23:** Gráfica (a) y la gráfica (b) son respectivamente los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la

hidrógrafa observada en la estación de Barrancabermeja, del periodo 2 según modelo de piscina nivelada..... 139

**Figura 4-24:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de piscina nivelada periodo 3. .... 141

**Figura 4-25:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, período 3 tránsito de piscina nivelada. .... 141

**Figura 4-26:** Gráfica (a) y la gráfica (b) son respectivamente los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada en la estación de Barrancabermeja, del periodo 3 según modelo de piscina nivelada..... 142

**Figura 4-27:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de piscina nivelada periodo 4. .... 144

**Figura 4-28:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, período 4 tránsito de piscina nivelada. .... 144

**Figura 4-29:** Gráfica (a) y la gráfica (b) son respectivamente los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada en la estación de Barrancabermeja, del periodo 4 según modelo de piscina nivelada... 145

**Figura 4-30:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de piscina nivelada periodo 5. .... 147

**Figura 4-31:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, período 5 tránsito de piscina nivelada..... 147

**Figura 4-32:** La gráfica (a) y la gráfica (b) son los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada, del periodo 5 según modelo de piscina nivelada. .... 148

**Figura 4-33:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” y “X” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” y “X” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de Muskingum periodo 1. .... 151

**Figura 4-34:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, período 1 tránsito de Muskingum..... 151

**Figura 4-35:** La gráfica (a) y la gráfica (b) son los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada, del periodo 1 según modelo de Muskingum. .... 152

**Figura 4-36:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” y “X” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” y “X” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de Muskingum periodo 2..... 154

**Figura 4-37:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, período 2 tránsito de Muskingum. .... 154

**Figura 4-38:** La gráfica (a) y la gráfica (b) son los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada, del periodo 2 según modelo de Muskingum..... 155

**Figura 4-39:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” y “X” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” y “X” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de Muskingum periodo 3..... 157

**Figura 4-40:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, período 3 tránsito de Muskingum. .... 157

**Figura 4-41:** La gráfica (a) y la gráfica (b) son los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada, del periodo 3 según modelo de Muskingum..... 158

**Figura 4-42:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” y “X” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” y “X” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de Muskingum periodo 4..... 160

**Figura 4-43:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, período 4 tránsito de Muskingum. .... 160

**Figura 4-44:** La gráfica (a) y la gráfica (b) son los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada, del periodo 4 según modelo de Muskingum..... 161

**Figura 4-45:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” y “X” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” y “X” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de Muskingum periodo 5..... 163

**Figura 4-46:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, período 5 tránsito de Muskingum. .... 163

**Figura 4-47:** La gráfica (a) y la gráfica (b) son los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada, del periodo 5 según modelo de Muskingum..... 164

**Figura 4-48:** Resultados de calibración de tres modelos de transito utilizados, por medio de la función objetivo de Nash-Sutcliffe, en cada uno de los cinco periodos. .... 168

<b>Figura 4-49:</b> Resultados de validación de tres modelos de tránsito utilizados, por medio de la función objetivo de Nash-Sutcliffe, en cada uno de los cinco periodos. ....	169
<b>Figura 4-50:</b> Resultados de los errores promedio de calibración de la hidrógrafa medida en la Est. Barrancabermeja VS Hidrógrafa calibrada del cuarto embalse, para los tres modelos de tránsito utilizados, en cada uno de los cinco periodos. ....	170
<b>Figura 4-51:</b> Resultados de los errores promedio de validación de la hidrógrafa medida en la Est. Barrancabermeja VS Hidrógrafa validada del cuarto embalse, para los tres modelos de tránsito utilizados, en cada uno de los cinco periodos. ....	171
<b>Figura 4-52:</b> Resultados de la sumatoria del parámetro “K” (Tiempo de tránsito del tramo de estudio), para cada uno de los cinco periodos calibrados, en los 3 modelos de tránsito desarrollados. ....	172
<b>Figura 5-1:</b> Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de diferencias finitas periodo 1, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse. ....	190
<b>Figura 5-2:</b> Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de diferencias finitas periodo 1, con ruido en la medición. ....	190
<b>Figura 5-3:</b> Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación limnigráfica de Barrancabermeja, modelo de diferencias finitas periodo 1, sin ruidos en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse. ....	191
<b>Figura 5-4:</b> Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de diferencias finitas periodo 1, sin ruido en la medición. ....	191
<b>Figura 5-5:</b> Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de diferencias finitas periodo 2, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse. ....	192
<b>Figura 5-6:</b> Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de diferencias finitas periodo 2, con ruido en la medición. ....	192
<b>Figura 5-7:</b> Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación limnigráfica de Barrancabermeja, modelo de diferencias finitas periodo 2, sin ruidos en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse. ....	193
<b>Figura 5-8:</b> Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de diferencias finitas periodo 2, sin ruido en la medición. ....	193
<b>Figura 5-9:</b> Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de diferencias finitas periodo 3, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse. ....	194
<b>Figura 5-10:</b> Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de diferencias finitas periodo 3, con ruido en la medición. ....	194
<b>Figura 5-11:</b> Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación limnigráfica de Barrancabermeja, modelo de diferencias finitas periodo 3, sin ruidos en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse. ....	195
<b>Figura 5-12:</b> Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de diferencias finitas periodo 3, sin ruido en la medición. ....	195
<b>Figura 5-13:</b> Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de diferencias finitas periodo 4, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse. ....	196

**Figura 5-14:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de diferencias finitas periodo 4, con ruido en la medición. .... 196

**Figura 5-15:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación limnigráfica de Barrancabermeja, modelo de diferencias finitas periodo 4, sin ruidos en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse. .... 197

**Figura 5-16:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de diferencias finitas periodo 4, sin ruido en la medición. .... 197

**Figura 5-17:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de diferencias finitas periodo 5, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse. .... 198

**Figura 5-18:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de diferencias finitas periodo 5, con ruido en la medición. .... 198

**Figura 5-19:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación limnigráfica de Barrancabermeja, modelo de diferencias finitas periodo 5, sin ruidos en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse. .... 199

**Figura 5-20:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de diferencias finitas periodo 5, sin ruido en la medición. .... 199

**Figura 5-21:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de piscina nivelada periodo 1, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse. .... 202

**Figura 5-22:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de piscina nivelada periodo 1, con ruido en la medición. .... 203

**Figura 5-23:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación limnigráfica de Barrancabermeja, modelo de piscina nivelada periodo 1, sin ruidos en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse. .... 203

**Figura 5-24:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de piscina nivelada periodo 1, sin ruido en la medición. .... 204

**Figura 5-25:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de piscina nivelada periodo 2, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse. .... 204

**Figura 5-26:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de piscina nivelada periodo 2, con ruido en la medición. .... 205

**Figura 5-27:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación limnigráfica de Barrancabermeja, modelo de piscina nivelada periodo 2, sin ruidos en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse. .... 205

**Figura 5-28:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de piscina nivelada periodo 2, sin ruido en la medición. .... 206

**Figura 5-29:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de piscina nivelada periodo 3, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse. .... 206

**Figura 5-30:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de piscina nivelada periodo 3, con ruido en la medición. .... 207

<b>Figura 5-31:</b> Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación limnigráfica de Barrancabermeja, modelo de piscina nivelada periodo 3, sin ruidos en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.....	207
<b>Figura 5-32:</b> Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de piscina nivelada periodo 3, sin ruido en la medición.....	208
<b>Figura 5-33:</b> Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de piscina nivelada periodo 4, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.....	208
<b>Figura 5-34:</b> Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de piscina nivelada periodo 4, con ruido en la medición. ....	209
<b>Figura 5-35:</b> Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación limnigráfica de Barrancabermeja, modelo de piscina nivelada periodo 4, sin ruidos en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.....	209
<b>Figura 5-36::</b> Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de piscina nivelada periodo 4, sin ruido en la medición.....	210
<b>Figura 5-37:</b> Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de piscina nivelada periodo 5, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.....	210
<b>Figura 5-38:</b> Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de piscina nivelada periodo 5, con ruido en la medición. ....	211
<b>Figura 5-39:</b> Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación limnigráfica de Barrancabermeja, modelo de piscina nivelada periodo 5, sin ruidos en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.....	211
<b>Figura 5-40:</b> Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de piscina nivelada periodo 5, sin ruido en la medición.....	212
<b>Figura 5-41:</b> Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de Muskingum periodo 1, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.....	215
<b>Figura 5-42:</b> Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de Muskingum periodo 1, con ruido en la medición.....	215
<b>Figura 5-43:</b> Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de Muskingum periodo 1, sin ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.....	216
<b>Figura 5-44:</b> Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de Muskingum periodo 1, sin ruido en la medición.....	216
<b>Figura 5-45:</b> Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de Muskingum periodo 2, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.....	217
<b>Figura 5-46:</b> Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de Muskingum periodo 2, con ruido en la medición.....	217
<b>Figura 5-47:</b> Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de Muskingum periodo 2, sin ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.....	218

**Figura 5-48:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de Muskingum periodo 2, sin ruido en la medición. ....218

**Figura 5-49:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de Muskingum periodo 3, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse. ....219

**Figura 5-50:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de Muskingum periodo 3, con ruido en la medición. ....219

**Figura 5-51:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de Muskingum periodo 3, sin ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse. ....220

**Figura 5-52:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de Muskingum periodo 3, sin ruido en la medición. ....220

**Figura 5-53:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de Muskingum periodo 4, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse. ....221

**Figura 5-54:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de Muskingum periodo 4, con ruido en la medición. ....221

**Figura 5-55:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de Muskingum periodo 4, sin ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse. ....222

**Figura 5-56:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de Muskingum periodo 4, sin ruido en la medición. ....222

**Figura 5-57:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de Muskingum periodo 5, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse. ....223

**Figura 5-58:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de Muskingum periodo 5, con ruido en la medición. ....223

**Figura 5-59:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de Muskingum periodo 5, sin ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse. ....224

**Figura 5-60:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de Muskingum periodo 5, sin ruido en la medición. ....224

**Figura 5-61:** Media o promedio del error del caudal pronosticado con el filtro Kalman VS hidrógrafa observada en la estación (LG) de Barrancabermeja, en cada uno de los cinco periodos, para los 3 modelos de tránsito desarrollados. Considerando ruido. ....228

**Figura 5-62:** Media o promedio del error del caudal pronosticado con el filtro Kalman VS hidrógrafa observada en la estación (LG) de Barrancabermeja, en cada uno de los cinco periodos, para los 3 modelos de tránsito desarrollados. Sin considerar ruido. ....229

**Figura 5-63:** Gráfica (a) resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe en el pronóstico de caudales con el filtro Kalman en los cinco periodos y tres modelos de tránsito, considerando ruido en la medición. Gráfica (b) resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe en el pronóstico de caudales con el filtro Kalman en los cinco periodos y tres modelos de tránsito, no considerando ruido en la medición. ....230

---

**Figura 5-64:** Gráfica (a) resultados de la varianza del error de caudales pronosticados con el filtro Kalman en los cinco periodos y tres modelos de tránsito, considerando ruido en la medición. Gráfica (b) resultados de la varianza del error de caudales pronosticados con el filtro Kalman en los cinco periodos y tres modelos de tránsito, no considerando ruido en la medición. ....232

## Lista de tablas

	Pág.
<b>Tabla 2.1:</b> Convenciones para los diferentes modelos de tránsito propuestos.....	39
<b>Tabla 2.2:</b> (Continuación) .....	39
<b>Tabla 2.3:</b> (Continuación) .....	40
<b>Tabla 3.1:</b> Estaciones limnigráficas del IDEAM seleccionadas para el tramo de estudio.	75
<b>Tabla 3.2 :</b> Áreas y perímetros de las subcuencas, sobre el tramo de estudio.....	76
<b>Tabla 3.3:</b> Áreas de las subcuencas de los afluentes tributarios principales en la zona de Estudio.....	77
<b>Tabla 3.4:</b> Áreas aledañas de drenaje en la zona de estudio, para cada embalse.....	77
<b>Tabla 3.5:</b> Áreas totales de los cuatro embalses seleccionados para la zona de estudio. ....	78
<b>Tabla 3.6:</b> Características de los embalses escogidos, por área, longitud y pendiente media.....	78
<b>Tabla 3.7 :</b> Datos Curvas de calibración del IDEAM estación limnigráfica de Puerto Berrío.....	80
<b>Tabla 3.8:</b> Relación de la curva de calibración del IDEAM estación limnigráfica de Barrancabermeja. ....	82
<b>Tabla 3.9:</b> Relación de las tablas para la realización de las Curvas de Calibración del IDEAM estación limnigráfica de Puerto Araujo. ....	83
<b>Tabla 3.10;</b> Resumen de los datos atípicos de niveles horarios y de la función del autocorrelograma para 5 periodos seleccionados en la estación limnigráfica de Pto. Berrío.....	104
<b>Tabla 3.11:</b> Resumen de los datos atípicos de niveles horarios y de la función del autocorrelograma para 5 periodos seleccionados en la estación limnigráfica de Barrancabermeja. ....	105
<b>Tabla 3.12:</b> Resumen de los datos atípicos de niveles horarios y de la función del autocorrelograma para 5 periodos seleccionados en la estación limnigráfica de Puerto Araujo. ....	105
<b>Tabla 3.13:</b> Resultados de la función de correlación cruzada entre las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío y Barrancabermeja, en cinco periodos seleccionados ...	107
<b>Tabla 4.1:</b> Intervalos del parámetro K, para las simulaciones de cada embalse. ....	115

**Tabla 4.2:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de diferencias finitas, del período 1. .... 120

**Tabla 4.3:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de diferencias finitas, del período 2. .... 123

**Tabla 4.4:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de diferencias finitas, del período 3. .... 126

**Tabla 4.5:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de diferencias finitas, del período 4. .... 129

**Tabla 4.6:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de diferencias finitas, del período 5. .... 132

**Tabla 4.7:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de piscina nivelada, del período 1. .... 136

**Tabla 4.8:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de piscina nivelada, del período 2. .... 139

**Tabla 4.9:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de piscina nivelada, del período 3. .... 142

**Tabla 4.10:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de piscina nivelada, período 4. .... 145

**Tabla 4.11:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de piscina nivelada, del período 5. .... 148

**Tabla 4.12:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de Muskingum, del período 1. .... 152

**Tabla 4.13:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de Muskingum, del período 2. .... 155

**Tabla 4.14:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de Muskingum, del período 3. .... 158

**Tabla 4.15:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de Muskingum, del período 4. .... 161

<b>Tabla 4.16:</b> Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de Muskingum, del período 5. ....	164
<b>Tabla 5.1.</b> Ecuaciones del sistema (modelo del tránsito) y la ecuación de medición para un Filtro Kalman-Bucy Unidimensional Discretizado. ....	186
<b>Tabla 5.2.</b> Ecuaciones de Corrección (Ecuaciones de actualización en la medición), para un Filtro Kalman Unidimensional Discretizado. ....	186
<b>Tabla 5.3:</b> Resumen de los resultados de parámetros estadísticos de errores en el pronóstico de caudales del filtro Kalman, indicando el resultado de la función objetivo, según tránsito de diferencias finitas. ....	200
<b>Tabla 5.4:</b> Resumen de los resultados de parámetros estadísticos de errores en el pronóstico de caudales del filtro Kalman, indicando el resultado de la función objetivo, según tránsito de piscina nivelada. ....	212
<b>Tabla 5.5:</b> Resumen de los resultados de parámetros estadísticos de errores en el pronóstico de caudales del filtro Kalman, indicando el resultado de la función objetivo, según tránsito de Muskingum. ....	225

## Lista de Símbolos y abreviaturas

La lista de símbolos y de variables utilizadas se presentan en la **Tabla 2.1:** Convenciones para los diferentes modelos de tránsito propuestos.

Se presenta en la tabla mencionada por la definición de cada una de las variables con su respectivo símbolo, sistema de unidades y significado.

## Introducción

Cada día se hace necesario pronosticar caudales, por las inundaciones que generan las crecientes de los ríos, resaltando el impacto en las comunidades asentadas en las zonas de inundación de los afluentes.

La importancia de poder anticipar caudales en afluentes es útil debido a que se puede disminuir o evitar la pérdida de vidas humanas, en especial. Una forma de pronosticar caudales es por medio de la herramienta matemática del filtro Kalman, el cual es el objetivo principal que se desarrolló para este trabajo.

El presente documento está dividido en seis capítulos. En el primer capítulo, está la formulación de la propuesta del proyecto, el objetivo general y dos objetivos específicos del proyecto, como su justificación, planteada en la propuesta de la tesis aprobada.

El capítulo No.2, presenta los modelos de tránsito empleados, haciendo la adecuación necesaria para plantear en la formulación matemática, el aporte de caudales por afluentes tributarios. Los modelos de tránsito lineales son: por diferencias finitas, piscina nivelada y de Muskingum.

El capítulo No. 3, está la descripción general de la zona de estudio, presentando un análisis de la información procesada, es de resaltar que por medio de la función de correlograma cruzada, se obtiene aproximadamente el tiempo de viaje de los caudales, al transitar todo el tramo de estudio, entre las estaciones limnigráfica de Puerto Berrío y Barrancabermeja.

Para el tramo de estudio sobre el río, se dividió en cuatro sub-tramos o embalses como han sido denominados, debido a la ubicación de afluentes tributarios de importante caudal

de aporte, según la cartografía del sector. La zona de estudio es sobre el río Magdalena entre los municipios de Puerto Berrío (Dpto. Antioquia) y Barrancabermeja (Dpto. Santander).

El capítulo No. 4, se encuentran los resultados de calibración y validación, según la sectorización realizada a la zona de estudio por cada embalse o sub-tramo. Los escenarios de calibración y de validación planteados están analizados principalmente con la función objetivo de Nash-Sutcliffe. Los valores óptimos de los parámetros a calibrar para los cinco periodos seleccionados, en los tres modelos de tránsito utilizados, son hallados por medio del programa MCAV-V.2 empleando la metodología de Montecarlo.

El capítulo No. 5 está la aplicación conceptual del filtro Kalman, para el pronóstico de caudales horarios realizados, se explica la necesidad de un modelo Auto-regresivo de orden uno, para el pronóstico de los caudales de entrada de los afluentes tributarios. Se muestran los resultados del pronóstico de caudales horarios por medio de gráficas y de tablas resúmenes, con sus respectivos análisis, para los escenarios de simulación planteados.

El capítulo No. 6, se plantean las conclusiones del proyecto y recomendaciones para próximos trabajos.

# 1. Capítulo 1 Generalidades

El pronóstico de caudales constituye una herramienta de gestión y prevención para las entidades encargadas del monitoreo hídrico de las cuencas. Mediante su implementación en modelos es posible prever, posibles inundaciones generadas por las crecientes de los ríos. De esta forma también se contribuye a analizar el impacto de las crecientes, sobre los ecosistemas y las comunidades asentadas en las zonas aledañas al río.

La variabilidad climática es compleja. Colombia se caracteriza por dos periodos secos y húmedos durante el año. Debido a su posición tropical y por la influencia de fenómenos macro climáticos como el Niño-Niña. Presentándose épocas invernales muy fuertes que cada año causan constantes emergencias por inundaciones.

La presente tesis de investigación propone implementar el Filtro Kalman acoplado a modelos de tránsito de crecientes, para el pronóstico de caudales, sobre un tramo del río Magdalena.

## 1.1 Definición del problema

A continuación, se describe las motivaciones principales y el entorno desarrollado para el presente proyecto.

### 1.1.1 Antecedentes del problema

Los antecedentes de investigaciones sobre el tema del Filtro Kalman son:

- El ingeniero Kalman (Kalman, R.E. 1960), publica en un artículo, un nuevo Filtro para la predicción de modelos lineales. El nuevo filtro es una extensión del Filtro de Wiener, para sistemas estocásticos no estacionarios.
- Aplicaciones del Filtro Kalman continuo "no discreto", (Kalman y Bucy, 1961).
- Aplicación del Filtro Kalman por medio de una linealización, para el pronóstico de caudales, (Georgakakos y Bras, 1982). Se realizará la implementación del filtro Kalman para la predicción de caudales horarios con base en este paper mencionado.
- Investigaciones para el pronóstico de caudales en tiempo real, utilizando la herramienta del Filtro Kalman, (Ming y Fread, 1993).

## 1.2 Formulación del problema

Con base en el planteamiento del problema se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿En qué grado el Filtro Kalman se puede implementar para el pronóstico de caudales en tiempo real, para un tramo del río Magdalena?

## 1.3 Justificación

La justificación del tema de investigación de la tesis es para pronosticar caudales en tiempo real. Se pretende obtener resultados confiables que sean, utilizados en casos concretos en Colombia.

Se proyecta utilizar desarrollos matemáticos del filtro Kalman adaptados en un tránsito hidrológico. Para el pronóstico de caudales en ríos colombianos.

La información para los modelos computacionales. Es suministrada según las estaciones telemétricas, administradas por el IDEAM. (Instituto de Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales de Colombia).

Este proyecto empieza por iniciativa propia del Ing. Nelson Obregón Neira, con el antecedente del tema de estudio realizado por el Ing. Jorge Francisco Rosas Melo con la

Tesis de Maestría en Recursos Hidráulicos de la Universidad Nacional (Sede Bogotá) cuyo título es: “Adaptación de la tecnología del Filtro Kalman para la predicción de precipitación puntual en Colombia”.

Los resultados de la Tesis de Maestría del Ing. Jorge Rosas, (Rosas y Obregón, 2005) mostraron una baja correlación entre la precipitación estimada por el modelo y los datos reales en una estación de Bogotá. Explicación de ello puede estar relacionada con la metodología usada en la investigación para la optimización matemática en el proceso de calibración. Por La disponibilidad y la calidad de la información, así como también por la indiscutible complejidad del proceso de precipitación.

## **1.4 Objetivos**

### **1.4.1 Objetivo general**

Implementar el Filtro Kalman para la aplicación de un modelo de tránsito agregado lineal, pronosticando caudales en tiempo real para un tramo del río Magdalena.

### **1.4.2 Objetivos específicos**

- Adaptar un modelo conceptual y un modelo matemático, para la implementación del Filtro Kalman.
- Implementar un programa o algoritmo para la aplicación del Filtro Kalman. Con base en la información de caudales recolectada por estaciones telemétricas del IDEAM, en un tramo del río Magdalena.

## **1.5 Estructura del documento**

El presente documento está dividido en seis capítulos.

El primer capítulo, está conformado por: los antecedentes, la formulación del problema, la justificación y los objetivos del proyecto.

El capítulo 2 presenta los modelos de tránsito empleados con una formulación matemática, que permite tener en cuenta el aporte de caudales de afluentes tributarios, así como las áreas directas de drenaje. Los modelos de tránsito agregados planteados en el presente

trabajo son: modelo denominado diferencias finitas, de piscina nivelada y Muskingum lineal.

En el capítulo 3, está la descripción general de la zona de estudio y el análisis de la información procesada. También se tiene la cartografía, la ubicación de las estaciones utilizadas y los principales ríos tributarios.

En el capítulo 4, se presentan los resultados de la calibración para cada uno de los modelos planteados, en la zona de estudio. Se utilizó la función objetivo de Nash-Sutcliffe. Logrando obtener cuantitativamente el ajuste de los modelos a las hidrógrafas reales. A su vez, se presenta el análisis de sensibilidad para los parámetros usando el programa MCAT-V.2.

En el capítulo 5 se presenta la aplicación del Filtro Kalman para el pronóstico de caudales. Mostrando los resultados validados en cada uno de los escenarios de simulación planteados.

En el capítulo 6 están las conclusiones de la presente tesis y las recomendaciones para futuras investigaciones. Al final del documento se presentan los anexos y las referencias utilizadas.

## **2. Capítulo 2 Marco Conceptual: Modelos de Tránsito Agregado**

La generación de caudales en los ríos es producida por procesos físicos, de difícil cuantificación. La razón principal es por las variables hidrológicas y características fisiográficas, de intrincada complejidad y aleatoriedad.

Las siguientes variables hidrológicas, son las contempladas usualmente, para producir caudales en un afluente. Las cuales son: la precipitación, la escorrentía superficial, el flujo de aguas subsuperficiales, el flujo de aguas subterráneas, los afluentes de cauces tributarios y el proceso de evapotranspiración, entre otras.

Las características fisiográficas básicas, que influyen en la conformación de caudales en un afluente son: la topografía del terreno, el tipo de vegetación, la forma y el tamaño de la cuenca hidrográfica.

Una de las formas de representar las variables hidrológicas y las características fisiográficas, es con procesos no lineales.

En el presente capítulo se desarrollan, los conceptos de tres modelos lineales de tránsitos agregados de caudales para su posterior implementación. Los modelos de tránsitos propuestos están fundamentados en el principio de la conservación de la masa.

Se consideró en los tres modelos lineales de tránsitos mencionados, cuantificar los caudales de los afluentes tributarios, por las áreas de drenaje respectivas, al cauce principal del río Magdalena, en la zona de estudio seleccionado.

## 2.1 Principio de conservación de la masa

Se emplearán para el presente proyecto solamente modelos lineales de tránsitos hidrológicos ó modelos de tránsitos de sistemas agregados como se conocen, los cuales están basados en el principio o ley de la conservación de la masa.

Está considerado el tramo de estudio seleccionado sobre el cauce principal, como la unión de varios embalses que reciben, almacenan y entregan agua. En el presente proyecto el almacenamiento de cada tramo o embalse es un volumen de control o masa de agua, que no describe los procesos internos del flujo.

Los modelos de tránsitos planteados del presente trabajo están basados en el modelo de sistema hidrológico general, (Chow et al, 1994) el cual aplica la ley de conservación de la masa.

Se fundamenta las ecuaciones de tránsito de caudales realizados en el proyecto, mediante la siguiente ecuación diferencial de primer orden, aplicando la ley de conservación de la masa para un volumen de control:

$$\frac{dS_i}{dt} = I_i(t) - Q_i(t) \quad i=1,2,3,\dots,n \quad (2.1)$$

Donde:

$S_{i(t)}$  = Volumen de agua almacenado en el tramo de estudio ( $m^3$ ), se relaciona con el caudal de entrada y de salida, aceptando entradas de volumen de agua a través de los aportes de caudales por los afluentes tributarios.

$I_i(t)$  = Caudal de entrada ( $m^3/s$ ).

$Q_i(t)$  = Caudal de salida ( $m^3/s$ ).

Para poder linealizar el volumen de agua por medio de los caudales en el sistema hidrológico, se plantea la siguiente ecuación de hipótesis:

$$S = KQ \quad (2.2)$$

Donde:

$K$  = Parámetro que tiene unidades de tiempo, generalmente se relaciona como el tiempo de viaje o de tránsito a lo largo del tramo en el cauce, también se considera que es un coeficiente para el almacenamiento (Ponce, 1989).

Al Reemplazar la ecuación (2.2) en la ecuación ((2.1) obtenemos:

$$\frac{dS_i}{dt} = \frac{K_i dQ_i}{dt} = I_i(t) - Q_i(t) \quad (2.3)$$

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{1}{K_i} (I_i(t) - Q_i(t)) \quad (2.4)$$

El parámetro  $K$  está en función de la longitud del canal y de la velocidad de la onda de la creciente (Ponce, 1989). Para este proyecto el objetivo principal, es pronosticar los valores de los caudales con el filtro Kalman y no analizar el comportamiento propiamente de la onda de la creciente, a través de cada tramo.

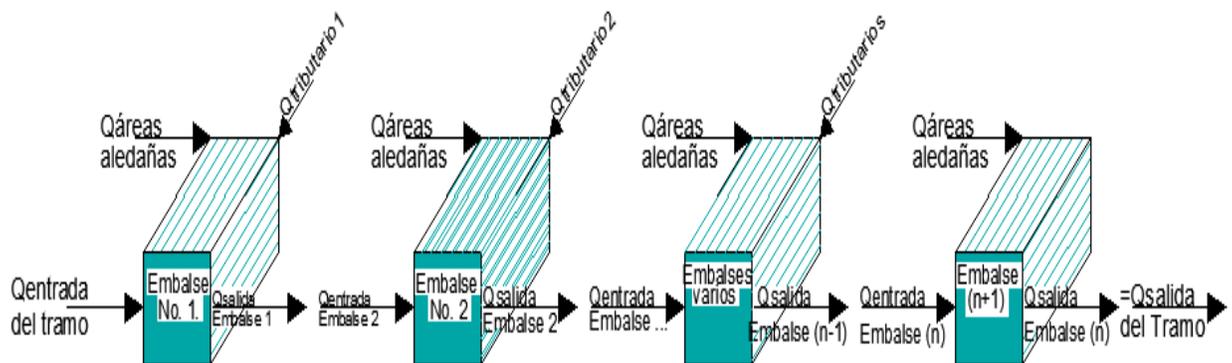
El parámetro ( $K$ ) de cada embalse, se necesita calibrar por su directa incidencia, en el almacenamiento, tiempo de viaje y también porque se desconoce su valor aproximado para los modelos empleados en este trabajo.

Se considera en el presente contexto el término “embalse”, a cada uno de los subtramos que dividen al tramo de estudio sobre el cauce principal.

Cada uno de los embalses proyectados son independientes o separados a partir de la ubicación de los tributarios más importantes. El afluente tributario principal es el límite entre subtramos.

Los embalses se escogieron entre la ubicación de afluentes tributarios principales, representándose las áreas de sus cuencas hidrográficas y también las áreas aledañas que drenen hacia el cauce principal. (Ver la Figura 2-1).

**Figura 2-1:** Esquema general básico empleado para dividir el cauce de un río por embalses.



El tránsito hidrológico es un procedimiento matemático analítico para predecir el comportamiento y magnitud de caudales a lo largo de un sistema hidrológico, dado una entrada (Chow et al, 1994) al inicio del tramo o del embalse. El caudal está en función del tiempo para un punto específico del cauce.

Otra forma de comprender el tránsito es permitir cuantificar el caudal a la salida en el tramo de un cauce, por medio de un caudal inicial en el tramo según las características propias del afluente y su capacidad de almacenamiento.

Una de las ventajas de los modelos de tránsitos, en general, es estimar el valor del próximo caudal a la salida del tramo para la hidrógrafa en ese punto en el instante de tiempo  $(j+1)$ , porque se conoce con antelación el valor del caudal de la hidrógrafa inicial del tramo en el instante de tiempo  $(j+1)$ , esto es debido por el desarrollo del modelo matemático.

Para el presente proyecto no se contempló los modelos de tránsitos por sistemas distribuidos o hidráulicos, porque es necesario conocer en estos modelos las secciones transversales a lo largo del cauce, adicionalmente otras características como es la pendiente del terreno o el tipo de material o su rugosidad promedio.

Adicionalmente los modelos de tránsitos por sistemas distribuidos ó hidráulicos, en su estructura matemática presentan ecuaciones no lineales, las cuales el Filtro Kalman convencional no puede aplicarse. Es decir, el Filtro Kalman convencional se puede aplicar solamente para modelos lineales.

A continuación, se mencionan tres modelos lineales de tránsitos hidrológicos ó modelos de tránsitos de sistema agregados utilizados, desarrollando para cada uno de estos métodos la ecuación de tránsito en forma matricial, para facilitar su implementación posterior en los algoritmos computacionales. Los modelos de tránsito hidrológicos utilizados para el proyecto son:

- Tránsito lineal de caudales por medio de diferencias finitas.
- Tránsito lineal de caudales, por el método de Muskingum.
- Tránsito lineal de caudales, por el método de piscina nivelada.

Se presenta en la Tabla 2.1 las convenciones utilizadas en la notación de las ecuaciones de los tres modelos de tránsito hidrológicos referidos. El dígito que aparece al terminar en cada uno de los términos de la tabla mencionada, indica la posición del embalse respecto al cauce principal en la dirección del flujo de la zona de estudio y tiene igual significado en los tres modelos. Adicionalmente hay algunos parámetros o variables que se utilizan con exclusividad para un solo modelo.

**Tabla 2.1:** Convenciones para los diferentes modelos de tránsito propuestos

<b>Símbolo</b>	<b>Significado</b>
$dS/dt =$	Es la tasa de cambio de volumen (ds) respecto al tiempo (dt), en un tramo del cauce principal o para cada embalse a transitar teniendo unidades de (m <sup>3</sup> /s).
$I_i(t)=$	Caudal de entrada al inicio del tramo o embalse en el instante del tiempo (t), unidades (m <sup>3</sup> /s). El subíndice que aparece al terminar el término ( $I_i(t)$ ), indica la posición del embalse, de forma consecutiva a lo largo del tramo.
$Q_i(t)=$	Caudal de salida al terminar el tramo o embalse en el instante del tiempo (t), unidades (m <sup>3</sup> /s).
<b>Tabla 2.2:</b> (Continuación)	
<b>S =</b>	Volumen de agua almacenado por cada tramo o embalse sobre el afluente relacionado con el caudal de entrada y de salida en cada tramo, unidades de (m <sup>3</sup> ).
<b>Q =</b>	Caudal de salida que transita en cada tramo o embalse, unidades de (m <sup>3</sup> /s).
<b>K<sub>1</sub> =</b>	Constante que tiene dimensiones de tiempo (horas ó segundos) y depende de las condiciones de la cuenca o tramo del embalse transitado. El valor de K se relaciona con el tiempo de viaje del caudal a lo largo del embalse o un factor para hallar el almacenamiento.
$\frac{d(QSE1_{(t+1)})}{dt} =$	Tasa de cambio del caudal de salida (QSE), para el primer embalse en el instante de tiempo próximo (t+1).
<b>QSE1<sub>(t+1)</sub>=</b>	Caudal de salida del embalse (QSE), en el instante de tiempo próximo (t+1), unidades de (m <sup>3</sup> /s).
<b>QSE1<sub>(t)</sub> =</b>	Caudal de salida del embalse (QSE), en el instante de tiempo (t), unidades de (m <sup>3</sup> /s).
<b>Δt =</b>	Intervalo de tiempo discretizado igual a la información de niveles horarios, por las estaciones limnigráficas utilizadas.
<b>QInic<sub>(t+1)</sub> =</b>	Caudal de entrada al inicio del primer embalse respecto al instante del tiempo (t+1), unidades (m <sup>3</sup> /s). Relacionando el caudal de inicio registrado en la estación limnigráfica inicial del cauce principal de la zona de estudio, más el caudal de las áreas aledañas del embalse 1, empleado esta convención en los tres modelos de tránsito de caudales propuestos.
<b>Qest inicial<sub>(t+1)</sub> =</b>	Caudal de la estación limnigráfica inicial aguas arriba del tramo de estudio que corresponde, unidades de (m <sup>3</sup> /s). Relacionando el caudal de inicio registrado en la estación limnigráfica de Puerto Berrío, más el caudal de las áreas aledañas del embalse 1.
<b>QACP1<sub>(t+1)</sub> =</b>	Caudal de aporte si existen afluentes tributarios menores y por las áreas aledañas que pueda presentar drenaje al cauce principal para el embalse 1, unidades de (m <sup>3</sup> /s).

Tabla 2.3: (Continuación)

Símbolo	Significado
$a_1 =$	Constante del embalse 1, que representa el resultado de $(K_1/(K_1+\Delta t))$ , para el modelo de tránsito por Diferencias finitas. En el modelo de tránsito de piscina nivelada representa el valor equivalente de $(2k_1-\Delta t)/(2k_1+\Delta t)$ .
$b_1 =$	Constante del embalse 1, que representa el resultado de $(\Delta t/(K_1+\Delta t))$ , para el modelo de tránsito por Diferencias finitas. En el modelo de tránsito de piscina nivelada representa el valor equivalente de $(\Delta t/(2k_1+\Delta t))$ .
$QTrib1_{(t+1)} =$	Caudal de aporte directo por afluente tributario significativo 1, que ingresa al embalse 2, unidades de (m <sup>3</sup> /s).
$QT1_{(t+1)} =$	Se denomina como el caudal de tributarios para el embalse 2, representando el caudal de aportes del primer afluente tributario significativo (QTrib1), más el caudal de aporte si existen afluentes tributarios menores y por las áreas aledañas que pueda presentar drenaje a lo largo del cauce principal en el embalse 2 (QACP2). De igual forma (QT2) es el caudal de tributarios para el embalse 3 y (QT3) es el caudal de tributarios para el embalse 4.
$QEE2_{(t+1)} =$	Caudal de entrada del Embalse 2, en unidades de m <sup>3</sup> /s. representa el caudal de salida del embalse anterior (QSE1) más el caudal de tributarios del embalse 2 (QT1). El dígito que aparece al terminar el término (QEE2), indica la posición del embalse en la zona de estudio.
$X_1 =$	Factor de peso que depende de la cuña formada para el tránsito, expresando la relación de las entradas y salidas del almacenamiento del subtramo ó embalse de la cuenca. Este factor es adimensional y se utiliza en el modelo de Muskingum.
$X_{t+1}$ y $X_t$	La nomenclatura de $X_{t+1}$ y $X_t$ , representan vectores columna para los caudales de salida de los embalses en el instante de tiempo indicado. Siendo utilizados exclusivamente para el modelo lineal denominado tránsito de diferencias finitas.
$C_1^1, C_2^1, C_3^1 =$	Coeficientes adimensionales empleados en el modelo de tránsito de Muskingum, los cuales multiplican respectivamente el caudal de entrada al embalse en el instante (j+1) y en el instante (j), y el caudal de salida del embalse en el instante (j). El dígito que aparece en el superíndice, indica el número del embalse al cual está operando.

Es importante resaltar el siguiente supuesto utilizado para los modelos de tránsito propuestos y para el proyecto en general, debido a la escasa cantidad de estaciones limnigráficas: **“la cuantificación de todas las variables hidrológicas predominantes, correspondiente al área aferente de la cuenca de estudio, se resume puntualmente cada hora en el caudal calculado por la curva de calibración en la estación limnigráfica”**.

Se plantea también la siguiente suposición, “***en sub-cuencas de mayor área aferente o de drenaje, deben entregar mayores caudales de aporte al cauce principal de la zona de estudio***”.

En el párrafo anterior, se expone la forma de cálculo, para los caudales de los afluentes tributarios significativos, así como los caudales de afluentes menores y de las áreas aledañas al cauce principal, esta metodología utilizada es adoptada según (Bras y Rodríguez-Iturbe, 1993).

Para los afluentes tributarios principales y secundarios, que aportan caudales en los embales intermedios de la zona de estudio, se dispuso de escasa información hidrométrica. Por esta razón se hizo necesario buscar una forma de contemplar el ajuste de aportes de caudales tributarios, según el tamaño de las áreas de las subcuencas.

Con las áreas de las subcuencas de los tributarios principales y de las áreas directas menores de drenaje al cauce principal, se hizo una ponderación ó factor de proporción respecto al área total de la cuenca de estudio, para cada embalse. La diferencia de caudales registrados ente la estación limnigráfica final e inicial sobre el cauce principal, es multiplicado por el factor de proporción mencionado, estableciendo el caudal que aporta las respectivas áreas, al terminar cada embalse. Este procedimiento se explicará en más detalle en el Capítulo 3 Metodología: zona de estudio y análisis de información.

Es importante indicar, que, para poder relacionar el caudal de aporte entregado por la zona de estudio, se tomó la diferencia de caudales calculados entre dos estaciones limnigráficas ubicadas sobre el cauce principal. El aporte de caudal es debido principalmente a los afluentes tributarios principales y secundarios, además por las incidencias de contribución y sustracción de caudales por los procesos hidrológicos inherentes al tramo de estudio.

Se plantearon varios tipos de aporte de caudales, en los modelos de tránsitos por los siguientes argumentos:

- El principal aporte de caudales al cauce principal, son los provenientes de los afluentes tributarios más importantes por su extensión que entregan sobre el tramo de estudio al inicio de cada embalse escogido. Los caudales de los tributarios

principales estarían resumiendo los procesos físicos hidrológicos de las subcuencas a que pertenecen.

- Se planteó cuantificar los aportes de caudales de afluentes secundarios o pequeños como quebradas o caños, más las áreas aledañas de menor tamaño al embalse porque drenan hacia las riveras del cauce principal, estos caudales se ponderaron respecto al área total de la cuenca de la zona de estudio, se denominaron con la nomenclatura (QACP) Tabla 2.1.
- Los caudales de los afluentes tributarios pequeños como quebradas o caños en la zona de estudio, más las áreas aledañas o cercanas al cauce principal, se tuvieron en cuenta, para conservar la masa de agua o su almacenamiento, en los embalses o subtramos.
- Las áreas aledañas de (QACP) que drenan hacia el cauce principal del embalse, deben suministrar aporte de caudal por escorrentía superficial sobre el cauce principal, en cada uno de los embalses del tramo de estudio.

Se explica el siguiente procedimiento empleado, para ingresar las entradas de caudal de cada embalse en los modelos de tránsito propuestos ver Figura 2-1, para el primer, segundo y tercer embalse a manera de ejemplo:

- En el embalse 1 se plantearon dos tipos de caudales de entrada, el primer caudal y más importante es el medido en la estación limnigráfica inicial de la zona de estudio, más un segundo caudal de entrada que debe ser suministrado por afluentes pequeños más las áreas aledañas (QACP1), que drenan hacia el cauce principal del embalse, esto es debido por el posible aporte de caudal por escorrentía superficial, en ese sector del río o cauce.
- El embalse 1 termina hasta el primer afluente tributario significativo ó importante (QTrib1).

- El segundo embalse inicia, por el aporte de caudal después del primer afluente tributario importante (QTrib1), más la entrada del caudal de salida del embalse anterior (QSE1) y adicionalmente, el caudal estimado indirectamente por las áreas aledañas y pequeños afluentes si los hay (QACP2).
- El embalse 2 termina hasta el segundo afluente tributario significativo (QTrib2).
- El tercer embalse inicia después del segundo afluente tributario significativo (QTrib2). Son tres nuevamente los caudales de ingreso para el embalse 3, la primera entrada es el caudal de salida del embalse 2 (QSE2) más el caudal del segundo tributario de importancia (QTrib2), más el caudal estimado por las áreas aledañas y pequeños afluentes si los hay (QACP3).
- Es decir, en este punto se debe haber acumulado a lo largo del tercer embalse el caudal de la estación limnigráfica inicial, también el caudal de los dos tributarios significativos, más el caudal de los afluentes menores y de las tres áreas aledañas de cada uno de los tres embalses, generando así el caudal transitado de salida del tercer embalse.
- De esta forma descrita se planteó el tránsito de cada uno de los tres embalses y demás embalses, según el número de afluentes tributarios principales de caudal hallados. Por lo tanto, en el tránsito del último embalse los caudales a la salida deben ser similares, a los caudales registrados en la estación limnigráfica ubicada aguas abajo, sobre el cauce principal al terminar la zona estudio.

## 2.2 Modelo de tránsito de diferencias finitas

A continuación, se presenta el desarrollo de las ecuaciones hasta el embalse 4, para luego resumirlas y expresarlas en forma matricial, en un tránsito lineal que se denominó tránsito de caudales por diferencias finitas. Basándose en el principio de conservación de la masa.

La ecuación 2.4 es una ecuación diferencial de primer orden, en donde la variable independiente es el tiempo; sin embargo, por los registros que se tienen actualmente de información hidrológica en las estaciones limnigráficas, estas poseen caudales horarios en el cauce principal de estudio, lo cual implica discretizar dicha ecuación. Es necesario discretizar esta ecuación, en cada uno de los embalses o tramos.

A continuación, se empieza utilizar la notación de las variables relacionadas en la Tabla 2.1, para el desarrollo de las ecuaciones del modelo lineal de tránsito de diferencias finitas.

La ecuación 2.4 utilizada en el modelo lineal de tránsito de diferencias finitas, para el primer tramo de la zona de estudio, queda discretizada de la siguiente forma:

$$\frac{d(QSE1_{(t+1)})}{dt} = \frac{QSE1_{(t+1)} - QSE1_{(t)}}{\Delta t} = \frac{1}{K_1} (QInic_{(t+1)} - QSE1_{(t+1)}) \quad (2.5)$$

Luego de hacer una serie de desarrollos algebraicos de factorización, para terminar de discretizar la ecuación 2.5 quedan las siguientes ecuaciones:

$$QSE1_{(t+1)} \left[ \frac{K_1 + \Delta t}{K_1} \right] = QSE1_{(t)} + \left( \frac{\Delta t}{K_1} \right) QInic_{(t+1)} \quad (2.6)$$

$$QSE1_{(t+1)} = \frac{K_1}{K_1 + \Delta t} QSE1_{(t)} + \frac{\Delta t}{K_1 + \Delta t} QInic_{(t+1)} \quad (2.7)$$

$$a_1 = \frac{K_1}{K_1 + \Delta t} ; b_1 = \frac{\Delta t}{K_1 + \Delta t} \quad (2.8)$$

$$QSE1_{(t+1)} = a_1 * QSE1_{(t)} + b_1 * QInic_{(t+1)} \quad (2.9)$$

$$QInic_{(t+1)} = Qestinicial_{(t+1)} + QACP1_{(t+1)} \quad (2.10)$$

En donde:

**a<sub>1</sub>** = Constante del embalse 1, representa el resultado de (K1/(K1+Δt)).

**b<sub>1</sub>** = Constante del embalse 1, representa el resultado de (Δt/(K1+Δt)).

Los parámetros K<sub>1</sub> y Δt tienen unidades de tiempo en horas, debido principalmente a la información hidrológica utilizada, que está para caudales horarios en los tránsitos.

Siguiendo un procedimiento similar la ecuación 2.4 discretizada, se puede expresar de la siguiente forma, para el cálculo de caudal a la salida en el segundo embalse:

$$\frac{d(QSE2_{(t+1)})}{dt} = \frac{QSE2_{(t+1)} - QSE2_{(t)}}{\Delta t} = \frac{1}{K_2} (QEE2_{(t+1)} - QSE2_{(t+1)}) \quad (2.11)$$

$$QSE2_{(t+1)} \left[ \frac{K_2 + \Delta t}{K_2} \right] = QSE2_{(t)} + \left( \frac{\Delta t}{K_2} \right) QEE2_{(t+1)} \quad (2.12)$$

$$QSE2_{(t+1)} = \frac{K_2}{K_2 + \Delta t} QSE2_{(t)} + \frac{\Delta t}{K_2 + \Delta t} QEE2_{(t+1)} \quad (2.13)$$

$$a_2 = \frac{K_2}{K_2 + \Delta t}; b_2 = \frac{\Delta t}{K_2 + \Delta t} \quad (2.14)$$

$$QSE2_{(t+1)} = a_2 * QSE2_{(t)} + b_2 * QEE2_{(t+1)} \quad (2.15)$$

Se considera el caudal de entrada al embalse 2  $QEE2_{(t+1)}$  como:

$$QEE2_{(t+1)} = QSE1_{(t+1)} + QT1_{(t+1)} \quad (2.16)$$

Remplazando la ecuación 2.16 y la ecuación 2.9 en la ecuación 2.15 produce:

$$QSE2_{(t+1)} = a_2 * QSE2_{(t)} + b_2 * [QSE1_{(t+1)} + QT1_{(t+1)}] \quad (2.17)$$

$$QSE2_{(t+1)} = a_2 * QSE2_{(t)} + b_2 * [(a_1 * QSE1_{(t)} + b_1 * QIni_{(t+1)}) + QT1_{(t+1)}] \quad (2.18)$$

$$QSE2_{(t+1)} = a_1 b_2 QSE1_{(t)} + b_1 b_2 * QInic_{(t+1)} + b_2 QT1_{(t+1)} + a_2 QSE2_{(t)} \quad (2.19)$$

$$QT1_{(t+1)} = QTrib1_{(t+1)} + QACP2_{(t+1)} \quad (2.20)$$

La ecuación 2.19 es la ecuación del caudal de salida del Embalse 2 en el instante (t+1), se observa la multiplicación (productoria) de las constantes (a<sub>i</sub>) y (b<sub>i</sub>), en la acumulación de caudales. Recordar que el Caudal inicial en t+1  $QInic_{(t+1)}$ , está representado con la ecuación 2.10.

El desarrollo de las ecuaciones para el tránsito de caudales de diferencias finitas y de los otros dos modelos de tránsito mencionados anteriormente, se realiza hasta el cuarto embalse o tramo, como se puede observar a continuación. El desarrollo de las ecuaciones de los tres tránsitos planteados es hasta el cuarto embalse, con el objetivo de expresarlas

en forma matricial estas ecuaciones y así poder facilitar la programación en el software de Matlab.

La ecuación para el caudal de salida del tercer embalse  $QSE3_{(t+1)}$ , con base en la ecuación 2.9 y ecuación 2.15 es:

$$QSE3_{(t+1)} = a_3 * QSE3_{(t)} + b_3 * QEE3_{(t+1)} \quad (2.21)$$

En donde el caudal de entrada al embalse 3  $QEE3_{(t+1)}$  inicialmente es:

$$QEE3_{(t+1)} = QSE2_{(t+1)} + QT2_{(t+1)} \quad (2.22)$$

Remplazando la ecuación 2.19 y la ecuación 2.22, en la ecuación 2.21 produce:

$$QSE3_{(t+1)} = a_3 * QSE3_{(t)} + b_3 * [QSE2_{(t+1)} + QT2_{(t+1)}] \quad (2.23)$$

$$QSE3_{(t+1)} = a_3 * QSE3_{(t)} + b_3 * \left[ (a_1 b_2 QSE1_{(t)} + b_1 b_2 * QInic_{(t+1)} + b_2 QT1_{(t+1)} + a_2 QSE2_{(t)}) + QT2_{(t+1)} \right] \quad (2.24)$$

$$QSE3_{(t+1)} = a_1 b_2 b_3 QSE1_{(t)} + a_2 b_3 QSE2_{(t)} + a_3 QSE3_{(t)} + b_1 b_2 b_3 * QInic_{(t+1)} + b_2 b_3 QT1_{(t+1)} + b_3 QT2_{(t+1)} \quad (2.25)$$

$$QT2_{(t+1)} = QTrib2_{(t+1)} + QACP3_{(t+1)} \quad (2.26)$$

La ecuación (2.25 es la ecuación del embalse 3 en el instante (t+1).

Continuando la ecuación inicial para el cuarto embalse es:

$$QSE4_{(t+1)} = a_4 * QSE4_{(t)} + b_4 * QEE4_{(t+1)} \quad (2.27)$$

El Caudal de Entrada al Embalse 4  $QEE4_{(t+1)}$  es:

$$QEE4_{(t+1)} = QSE3_{(t+1)} + QT3_{(t+1)} \quad (2.28)$$

Remplazando la ecuación 2.28 y la ecuación (2.25 en la 2.27 produce:

$$QSE4_{(t+1)} = a_4 * QSE4_{(t)} + b_4 * [QSE3_{(t+1)} + QT3_{(t+1)}] \quad (2.29)$$

$$QSE4_{(t+1)} = a_4 * QSE4_{(t)} + b_4 * [(a_1 b_2 b_3 QSE1_{(t)} + a_2 b_3 QSE2_{(t)} + a_3 * QSE3_{(t)} + b_1 b_2 b_3 * QInic_{(t+1)} + b_2 b_3 QT1_{(t+1)} + b_3 QT2_{(t+1)}) + QT3_{(t+1)}] \quad (2.30)$$

$$QSE4_{(t+1)} = a_1 b_2 b_3 b_4 QSE1_{(t)} + a_2 b_3 b_4 QSE2_{(t)} + a_3 * b_4 QSE3_{(t)} + b_1 b_2 b_3 b_4 * QInic_{(t+1)} + b_2 b_3 b_4 QT1_{(t+1)} + b_3 b_4 QT2_{(t+1)} + b_4 QT3_{(t+1)} + a_4 * QSE4_{(t)} \quad (2.31)$$

$$QT3_{(t+1)} = QTrib3_{(t+1)} + QACP4_{(t+1)} \quad (2.32)$$

Las ecuaciones de cada uno de los cuatro embalses para la formación matricial mencionada, en el modelo de tránsito de diferencias finitas son: 2.9, 2.19, (2.25 y 2.31).

La ecuación 2.33 se conoce como la ecuación del sistema (Chi – Tsong Chen, 1999) o la ecuación de estado, utilizada para el modelo del tránsito de diferencias finitas específicamente, la cual relaciona y modela el comportamiento físico por el principio de conservación de la masa de agua, del proceso analizado (Gabel y Roberts, 1975). En donde el subíndice (t+1) representa el cálculo para la próxima hora, en el “pronóstico” de la variable de caudal, la cual nos interesa hallar en (Xt+1).

La ecuación 2.33 está planteada de forma matricial hasta los primeros cuatro embalses, en el modelo de tránsito de diferencias finitas por la ecuación de estado, siendo la base para implementar el filtro Kalman. Se amplía el uso de la ecuación mencionada, en el Capítulo 5 del presente documento.

$$[X_{t+1}]_{4x1} = \begin{bmatrix} QSE1_{(t+1)} \\ QSE2_{(t+1)} \\ QSE3_{(t+1)} \\ QSE4_{(t+1)} \end{bmatrix}_{4x1} = A_{4x4} * [X_t]_{4x1} + B_{4x4} * [U_{t+1}]_{4x1} \quad (2.33)$$

Donde:

**X<sub>t+1</sub>** = Representa los caudales de salida (QSE), de cada uno de los embalses por un vector columna, para el instante de tiempo (t+1) en el modelo del tránsito denominado de diferencias finitas, teniendo igual número de filas como igual número de embalses se plantee.

$X_t$  = Representa los caudales de salida (QSE), de cada uno de los embalses por un vector columna, para el instante de tiempo (t) en el modelo del tránsito denominado de diferencias finitas, teniendo igual número de filas como igual número de embalses se plantee, ver ecuación (2.36).

$A$  = Matriz cuadrada de constantes, para el tránsito de caudales por diferencias finitas. Las constantes son ( $a_i$ ) y ( $b_i$ ) en la matriz, ver ecuación (2.34).

$U_{t+1}$  = Es un vector columna de entrada impuesta al tránsito de caudales por diferencias finitas, representando el caudal de entrada medido en la estación limnigráfica, más los caudales de los afluentes tributarios principales y secundarios, adicionalmente los caudales cuantificados por las áreas aledañas al cauce principal de la zona de estudio en cada embalse correspondiente. Es un vector con igual número de filas como igual número de embalses se plantee, para el instante de tiempo (t+1), ver ecuación 2.37.

$B$  = Matriz cuadrada de constantes, para el tránsito de caudales por diferencias finitas. Las constantes son ( $b_i$ ) en la matriz, ver ecuación 2.35.

A continuación, se indica cada una de las Matrices  $A$ ,  $B$ ,  $X_t$  y  $U_{t+1}$  para cuatro embalses:

$$A_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 b_2 & a_2 & 0 & 0 \\ a_1 b_2 b_3 & a_2 b_3 & a_3 & 0 \\ a_1 b_2 b_3 b_4 & a_2 b_3 b_4 & a_3 b_4 & a_4 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \quad (2.34)$$

$$B_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 b_2 & b_2 & 0 & 0 \\ b_1 b_2 b_3 & b_2 b_3 & b_3 & 0 \\ b_1 b_2 b_3 b_4 & b_2 b_3 b_4 & b_3 b_4 & b_4 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \quad (2.35)$$

$$X_t = \begin{pmatrix} QSE1_{(t)} \\ QSE2_{(t)} \\ QSE3_{(t)} \\ QSE4_{(t)} \end{pmatrix}_{4 \times 1} \quad (2.36)$$

$$U_{t+1} = \begin{pmatrix} QInic_{(t+1)} \\ QT1_{1(t+1)} \\ QT2_{(t+1)} \\ QT3_{(t+1)} \end{pmatrix}_{4 \times 1} \quad (2.37)$$

Resaltando que las variables de  $QInic_{(t+1)}$ ,  $QT1_{(t+1)}$ ,  $QT2_{(t+1)}$ ,  $QT3_{(t+1)}$ , se calculan según las ecuaciones 2.10, 2.20, 2.26 y la ecuación 2.32 respectivamente, para el cálculo de la matriz de  $U_{(t+1)}$  está la ecuación (2.31). Ver el significado de estas variables en la Tabla 2.1.

Para el presente proyecto, la ecuación 2.33 es la ecuación de estado o ecuación del sistema que representa el tránsito de caudales expresada de forma matricial, por medio de embalses o tramos consecutivos, como se ha explicado anteriormente. Está limitada la zona de estudio por dos estaciones limnigráficas, ubicadas al inicio y al final del cauce principal.

El caudal estimado a la salida del último embalse en el tránsito, para la ecuación de estado (“ecuación 2.31”) debe ser similar o igual en el mejor de los casos, al caudal registrado en la estación limnigráfica aguas abajo del cauce principal, por medio de la curva de calibración y de los niveles afluentes medidos.

La ecuación 2.33, es la base en el proceso de calibración del parámetro (K) de cada embalse en el tránsito lineal de diferencias finitas, ver ecuación 2.2. Desde la ecuación (2.34) a la ecuación (2.35), se pueden emplear para la formación matricial de la ecuación de estado mencionada, de (n) embalses con (n-1) afluentes tributarios importantes, para este modelo lineal y así lograr posteriormente la implementación del filtro Kalman convencional.

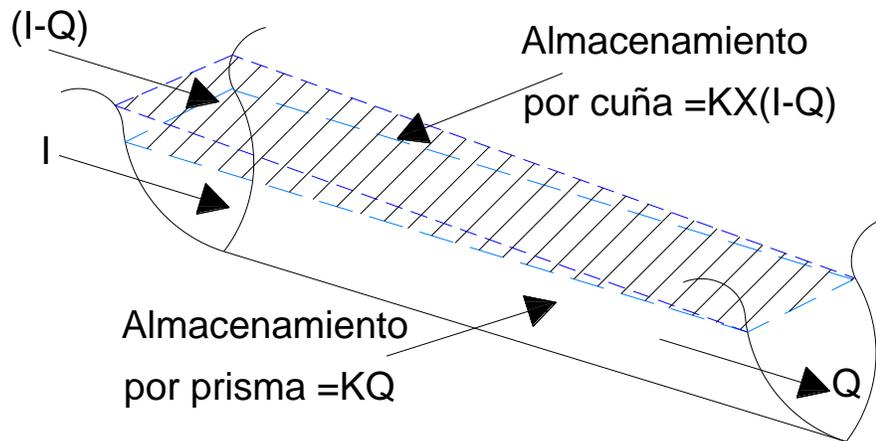
## 2.3 Modelo lineal tránsito de Muskingum

El método de Muskingum es un tránsito de sistemas agregados, desarrollado en la década de 1930 para diseños de protección contra las inundaciones de la cuenca del río Muskingum, en el estado de Ohio de Estados Unidos de América (Ponce, 1989).

Una de las suposiciones para la aplicación del tránsito hidrológico de Muskingum, es considerar dos tipos de almacenamiento, un almacenamiento por el volumen del prisma y adicionalmente un almacenamiento por cuña. La adición o sustracción en el almacenamiento por cuña es debido a una masa de agua, si está por encima o por debajo

respectivamente de la proyección horizontal sobre la superficie libre del agua, a la salida del tramo observado hacia aguas arriba, (Chow et al, 1994), ver la Figura 2-2.

**Figura 2-2 :** Esquema general de almacenamiento por prisma y para cuña positiva para el tramo de un canal, tomado (Chow et al, 1994).



Como los caudales de entrada y de salida del tramo a transitar son diferentes en magnitud, producen una especie de cuña en el almacenamiento (Ayuso, 1990). Esta circunstancia mencionada, se plantean generalmente de la siguiente forma:

- Cuando el caudal de entrada ( $I$ ) es mayor al caudal de salida ( $Q$ ), en el tramo a transitar se produce un almacenamiento en cuña positiva, por estar en un período de una creciente (Ayuso, 1990).
- Cuando el caudal de salida ( $Q$ ) es mayor al caudal de entrada ( $I$ ), en el tramo a transitar se produce un almacenamiento en cuña negativa, ocurre esto para los períodos de recesión (Ayuso, 1990).

Para obtener el almacenamiento en el prisma (Sprisma), se calcula el volumen del prisma como se había planteado en la ecuación 2.2, expresión matemática " $K*Q$ ".

Para el cálculo del almacenamiento producido por la cuña, esta debe ser proporcional a la diferencia del caudal de entrada ( $I$ ) y al caudal de salida ( $Q$ ) (Chow et al, 1994). Se

cuantifica el volumen de agua almacenada por cuña en cada tramo o embalse, con la siguiente ecuación:

$$S_{Cuña} = K * X(I - Q) \quad (2.38)$$

Donde:

**X** = Es un factor adimensional de ponderación que está entre el rango de  $0 \leq X \leq 0.5$ . El coeficiente "X" depende de la forma de la cuña de almacenamiento a modelar (Chow et al, 1994).

En el método de Muskingum los parámetros de calibración K y X, son determinados por el tipo de información en los registros de caudales utilizados (Ponce, 1989).

En corrientes naturales el coeficiente "X", se encuentra en el intervalo de 0 y 0,3 con un valor medio cercano a 0,2. Los valores de "X" para el tránsito lineal de Muskingum, son poco sensibles en el proceso de calibración (Chow et al, 1994).

La obtención del valor de K es más sensible en el proceso de calibración respecto al valor de X, esto debido al significado físico del parámetro K que permite dar una idea de la magnitud en el tiempo de viaje de la onda, para el tramo o embalse transitado. Mientras el valor de X es afectado por el comportamiento de la distribución en la cuña de almacenamiento a lo largo del embalse sobre el cauce, conservando la masa de agua.

Por lo tanto, el volumen de almacenamiento total (S) en el modelo ó tránsito lineal de Muskingum en un tramo o embalse, es la suma del almacenamiento del prisma más el almacenamiento de la cuña:

$$S = K * Q + K * X(I - Q) \quad (2.39)$$

El factor de ponderación (X) cuando es cero, es porque no existe cuña de volumen almacenado no habiendo remanso en el tramo, se considera en este caso un embalse con

una superficie de agua horizontal, conocido también como piscina nivelada. Asumiendo por lo tanto que el almacenamiento en el embalse es solamente estimado por el producto de  $(S=K*Q)$  ver ecuación 2.2, el cual sería el volumen del prisma (Ponce, 1989).

En el caso cuando se presenta la condición de que no hay almacenamiento por cuña, esta circunstancia se estudia en el modelo de tránsito de caudales de piscina nivelada (Chow et al, 1994) y se convierte en un caso particular, del tránsito de caudales en el modelo de Muskingum.

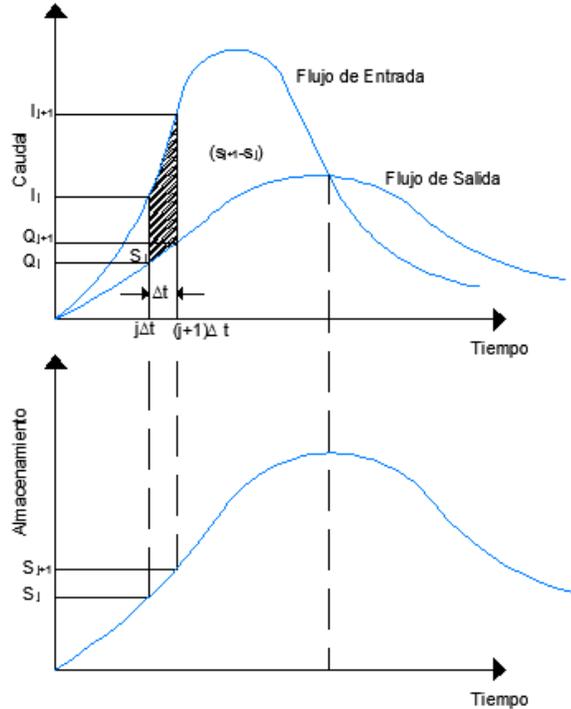
En la sección 2.1 se representó el modelo de sistema hidrológico general por medio de la ecuación (2.1, la cual es una ecuación diferencial de primer orden en donde el volumen de agua almacenada  $(S_i(t))$ , está relacionando el caudal de entrada  $(I_i(t))$  y el caudal de salida  $(Q_i(t))$ , produciendo una sola salida para cada embalse en la zona de estudio, utilizando el principio de conservación de la masa.

La ecuación (2.1, se discretiza en intervalos de duración  $(\Delta t)$  indexado en el tiempo por  $(j)$ , es decir  $j=0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, j(\Delta t), (j+1)\Delta t$ . Se integra sobre el intervalo de tiempo de la ecuación mencionada, quedando la siguiente expresión:

$$\int_{S_j}^{S_{j+1}} ds = \int_{j\Delta t}^{(j+1)\Delta t} I_{(t)} dt - \int_{j\Delta t}^{(j+1)\Delta t} Q_{(t)} dt \quad (2.40)$$

La variación de los caudales de entrada  $(I)$  y los caudales de salida  $(Q)$  en un intervalo de tiempo  $(\Delta t)$ , representa el cambio de almacenamiento  $(ds)$  de forma lineal en el intervalo de tiempo  $j$ -ésimo  $(S_{j+1} - S_j)$ , para el hidrograma de entrada y de salida, ver la próxima Figura 2-3. La ecuación 2.41 se plantea usualmente, al analizar la Figura 2-3 de la siguiente forma: el cálculo del cambio de volumen  $(ds)$  entre la hidrógrafa de entrada y la hidrógrafa de salida, es obtenido por una diferencia de áreas trapezoidales.

Figura 2-3 : Cambio de almacenamiento durante un periodo de tránsito  $\Delta t$ , tomado (Chow et al, 1994).



Por ejemplo, el volumen entre el instante  $(j+1)$  y  $(j)$ , se opta por los caudales de entrada  $(I_j)$  como la base menor del trapecio más la base mayor del trapecio  $(I_{j+1})$  por su altura en  $(\Delta t)$ , dividiéndose por dos. De igual forma se estima el volumen que representa los caudales de salida  $(Q_j)$  para el instante de tiempo de  $(j+1)$  y  $(j)$ , restándose ambos resultados de volúmenes, para hallar el volumen almacenado para un determinado intervalo de tiempo. Como se puede observar lo comentado en la ecuación 2.41.

$$S_{(j+1)} - S_{(j)} = \frac{I_{(j)} + I_{(j+1)}}{2} \Delta t - \frac{Q_{(j)} + Q_{(j+1)}}{2} \Delta t \tag{2.41}$$

La ecuación anterior 2.41 es utilizada en los modelos lineales de tránsito de Muskingum y de piscina nivelada, siendo la base para obtener el cambio del volumen discretizado en el almacenamiento de agua, para cada instante de tiempo en un embalse o tramo transitado.

La ecuación 2.39 representa el volumen de almacenamiento total (S) para el modelo lineal de Muskingum y que a su vez se expresa de la siguiente forma:

$$S = KQ + KXI - KXQ \quad (2.42)$$

La ecuación 2.39 representa para el modelo de tránsito una función lineal del volumen que es ponderado por el caudal de entrada (I) y el caudal de salida (Q), (Ayuso,1990). Para hallar el almacenamiento del tramo en un instante de tiempo ( $\Delta t$ ) entre (j) y (j+1), se emplea la ecuación mencionada:

$$S_{(j)} = K[XI_{(j)} + (1 - X)Q_{(j)}] \quad (2.43)$$

$$S_{(j+1)} = K[XI_{(j+1)} + (1 - X)Q_{(j+1)}] \quad (2.44)$$

El cambio de almacenamiento de la ecuación 2.41 se utiliza, para obtener el parámetro K al remplazar y factorizar en las ecuaciones 2.43 y 2.44:

$$S_{(j+1)} - S_{(j)} = \frac{I_{(j)} + I_{(j+1)}}{2} \Delta t - \frac{Q_{(j)} + Q_{(j+1)}}{2} \Delta t \quad (2.45)$$

$$K[XI_{(j+1)} + (1 - X)Q_{(j+1)}] - K[XI_{(j)} + (1 - X)Q_{(j)}] = \quad (2.46)$$

$$= \frac{I_{(j)} + I_{(j+1)}}{2} \Delta t - \frac{Q_{(j)} + Q_{(j+1)}}{2} \Delta t$$

$$K[(XI_{(j+1)} + (1 - X)Q_{(j+1)}) - (XI_{(j)} + (1 - X)Q_{(j)})] = 0.5\Delta t[(I_{(j)} + I_{(j+1)}) - (Q_{(j)} + Q_{(j+1)})] \quad (2.47)$$

$$K = \frac{0.5\Delta t[(I_{(j)} + I_{(j+1)}) - (Q_{(j)} + Q_{(j+1)})]}{X(I_{(j+1)} - I_{(j)}) + (1 - X)(Q_{(j+1)} - Q_{(j)})} \quad (2.48)$$

Existe un método gráfico que se origina a partir de la ecuación 2.48, el cual consiste en utilizar diferentes valores para el factor de ponderación X a ensayo y error, conociéndose los caudales de entrada (I) y los caudales de salida (Q), debido al hidrograma inicial y al hidrograma final del tramo.

Para obtener por el método gráfico el mejor valor de  $K$  y  $X$  para cada tránsito de hidrógrafas, se grafica en el eje vertical el numerador y en el eje de las abscisas el denominador de la ecuación 2.48 respectivamente. Escogiendo aquel valor de  $X$ , que permita observar un par de líneas dibujadas, como si fuera una sola línea recta definida, siendo la pendiente de esta línea recta el valor de  $K$  (Chow et al, 1994).

En el presente proyecto no es posible obtener los valores de  $K$  y  $X$  con el método gráfico, porque no se tiene la información de las hidrógrafas reales al inicio y al final de cada uno de los embalses intermedios, es decir simplemente se tiene las hidrógrafas al inicio y a la salida del cauce principal de la zona de estudio. Mencionando que la hidrógrafa medida al inicio del cauce principal, es después incrementada por los aportes de caudal de los afluentes tributarios, más los posibles caudales laterales de aporte debido a las áreas aledañas de la zona de estudio.

Es decir, es aplicable este método gráfico para tramos sin afluentes tributarios utilizando los valores conocidos del caudal de entrada y caudales de salida por las dos hidrógrafas al inicio y al final del tramo transitado (Chow et al, 1994).

Según (Chow et al, 1994), cuando no se tienen los hidrogramas de entrada y de salida para hallar gráficamente  $K$  y  $X$ , sus valores se pueden estimar por el método de Muskingum-Cunge.

Sin embargo, por no tener la información que se requiere para aplicar el método de Musking-Cunge en este proyecto como es el ancho de la superficie del agua, no se realizó la estimación de  $K$  y  $X$  por este método. Ampliando el tipo de información necesario para aplicar este método de Musking-Cunge, es preciso obtener las secciones transversales por batimetrías a lo largo del cauce, con el nivel del agua respectivo.

Se empleó otra metodología utilizando aleatoriamente un número amplio de simulaciones para lograr calibrar los dos parámetros  $K$  y  $X$ , por medio de una función objetivo obteniendo los valores de mejor ajuste para el modelo lineal del tránsito de Muskingum; ver el capítulo 4 del presente documento.

El objetivo principal es calcular el valor de caudales de salida de cada tramo, para esto se reagrupa la ecuación 2.46 en el instante de tiempo  $Q_{(j+1)}$ :

$$\left[ (1 - X) + \frac{\Delta t}{2K} \right] Q_{(j+1)} = I_{(j+1)} \left[ \frac{\Delta t}{2K} - X \right] + I_{(j)} \left[ \frac{\Delta t}{2K} + X \right] + Q_{(j)} \left[ (1 - X) - \frac{\Delta t}{2K} \right] \quad (2.49)$$

$$\left[ \frac{2K - 2KX + \Delta t}{2K} \right] Q_{(j+1)} = I_{(j+1)} \left[ \frac{\Delta t - 2KX}{2K} \right] + I_{(j)} \left[ \frac{\Delta t + 2KX}{2K} \right] + Q_{(j)} \left[ \frac{2K - 2KX - \Delta t}{2K} \right] \quad (2.50)$$

$$Q_{(j+1)} = \left[ \frac{1}{2K(1-X) + \Delta t} \right] \left[ I_{(j+1)}[\Delta t - 2KX] + I_{(j)}[\Delta t + 2KX] + Q_{(j)}[2K(1-X) - \Delta t] \right] \quad (2.51)$$

$$Q_{(j+1)} = \left[ \frac{\Delta t - 2KX}{2K(1-X) + \Delta t} \right] I_{(j+1)} + \left[ \frac{\Delta t + 2KX}{2K(1-X) + \Delta t} \right] I_{(j)} + \left[ \frac{2K(1-X) - \Delta t}{2K(1-X) + \Delta t} \right] Q_{(j)} \quad (2.52)$$

Donde:

$$C_1 = \left[ \frac{\Delta t - 2KX}{2K(1-X) + \Delta t} \right] \quad (2.53)$$

$$C_2 = \left[ \frac{\Delta t + 2KX}{2K(1-X) + \Delta t} \right] \quad (2.54)$$

$$C_3 = \left[ \frac{2K(1-X) - \Delta t}{2K(1-X) + \Delta t} \right] \quad (2.55)$$

Por lo tanto, la ecuación de tránsito lineal de caudales de Muskingum (Ponce, 1989), es la ecuación 2.52. Esta ecuación puede escribirse también por la equivalencia de los coeficientes C1, C2 y C3 como:

$$Q_{(j+1)} = C_1 I_{(j+1)} + C_2 I_j + C_3 Q_j \quad (2.56)$$

Una de las características de los coeficientes para el tránsito lineal de caudales por Muskingum, es que la suma de los tres coeficientes es igual a uno ( $C_1 + C_2 + C_3 = 1$ ), (Ponce, 1989).

Se presenta a continuación una serie de ecuaciones para el modelo lineal del tránsito de caudales de Muskingum hasta el cuarto embalse con tributarios, con el fin de facilitar y expresar las ecuaciones de cada embalse en forma matricial, para (n) embalses con (n-1) afluentes de tributarios principales.

Por medio de la ecuación 2.56, se plantea la ecuación base para el primer embalse en el tramo de estudio, obteniéndose las siguientes ecuaciones:

$$QSE1_{(j+1)} = C_1^1 QInic_{(j+1)} + C_2^1 QIni_{(j)} + C_3^1 QSE1_{(j)} \quad (2.57)$$

$$QInic_{(j+1)} = Qestinicial_{(j+1)} + QACP1_{(j+1)} \quad (2.58)$$

$$C_1^1 = \left[ \frac{\Delta t - 2K_1 X_1}{2K_1(1-X_1) + \Delta t} \right] \quad (2.59)$$

$$C_2^1 = \left[ \frac{\Delta t + 2K_1 X_1}{2K_1(1-X_1) + \Delta t} \right] \quad (2.60)$$

$$C_3^1 = \left[ \frac{2K_1(1-X_1) - \Delta t}{2K_1(1-X_1) + \Delta t} \right] \quad (2.61)$$

En donde:

$C_1^1, C_2^1, C_3^1$  = Coeficientes adimensionales que multiplican respectivamente el caudal inicial en el instante (j+1) "C1", el caudal inicial en el instante (j) "C2", y el caudal de salida del embalse 1 en el instante (j) "C3". El número en el superíndice indica el número del embalse al cual está operando.

Para obtener la ecuación del embalse 2 para el tránsito de caudales lineal según Muskingum, se aplica nuevamente la ecuación 2.56:

$$QSE2_{(j+1)} = C_1^2 QEE2_{(j+1)} + C_2^2 QEE2_{(j)} + C_3^2 QSE2_{(j)} \quad (2.62)$$

$$C_1^2 = \left[ \frac{\Delta t - 2K_2 X_2}{2K_2(1-X_2) + \Delta t} \right] \quad (2.63)$$

$$C_2^2 = \left[ \frac{\Delta t + 2K_2 X_2}{2K_2(1-X_2) + \Delta t} \right] \quad (2.64)$$

$$C_3^2 = \left[ \frac{2K_2(1-X_2) - \Delta t}{2K_2(1-X_2) + \Delta t} \right] \quad (2.65)$$

Los caudales de entrada al embalse 2 ( $QEE2$ ) es el caudal de salida del embalse 1 ( $QSE1$ ) más el caudal aportante del primer tributario ( $QT1$ ), como se expresa en ecuaciones a continuación:

$$QEE2_{(j+1)} = QSE1_{(j+1)} + QT1_{(j+1)} \quad (2.66)$$

$$QEE2_{(j)} = QSE1_{(j)} + QT1_{(j)} \quad (2.67)$$

Remplazado la ecuación 2.66, 2.67 y la ecuación 2.57 en la ecuación 2.62, se halla finalmente la ecuación del Embalse 2  $QSE2_{(j+1)}$  :

$$QSE2_{(j+1)} = C_1^2[QSE1_{(j+1)} + QT1_{(j+1)}] + C_2^2[QSE1_{(j)} + QT1_{(j)}] + C_3^2 QSE2_{(j)} \quad (2.68)$$

$$QSE2_{(j+1)} = C_1^1[C_1^1 QIni_{(j+1)} + C_2^1 QIni_{(j)} + C_3^1 QSE1_{(j)}] + C_1^2 QT1_{(j+1)} + C_2^2 QSE1_{(j)} + C_2^2 QT1_{(j)} + C_3^2 QSE2_{(j)} \quad (2.69)$$

$$QSE2_{(j+1)} = C_1^1 C_1^2 QIni_{(j+1)} + C_2^1 C_1^2 QIni_{(j)} + C_3^1 C_1^2 QSE1_{(j)} + C_1^2 QT1_{(j+1)} + C_2^2 QSE1_{(j)} + C_2^2 QT1_{(j)} + C_3^2 QSE2_{(j)} \quad (2.70)$$

Teniendo en cuenta que:

$$QT1_{(j+1)} = QTrib1_{(j+1)} + QACP2_{(j+1)} \quad (2.71)$$

$$QT1_{(j)} = QTrib1_{(j)} + QACP2_{(j)} \quad (2.72)$$

Revisando las ecuaciones para los caudales iniciales de  $(QInic_{(j+1)})$  y  $(QInic_{(j)})$ , son planteadas según la ecuación 2.58, para el instante de tiempo (j) respectivo.

La ecuación del embalse 3 para el tránsito de caudales utilizando el método de Muskingum con tributarios, se sustenta nuevamente por la ecuación 2.56:

$$QSE3_{(j+1)} = C_1^3 QEE3_{(j+1)} + C_2^3 QEE3_{(j)} + C_3^3 QSE3_{(j)} \quad (2.73)$$

Los caudales de entrada al embalse 3 ( $QEE3$ ) es el caudal de salida del embalse 2 ( $QSE2$ ) más el caudal aportante del segundo tributario ( $QT2$ ) :

$$QEE3_{(j+1)} = QSE2_{(j+1)} + QT2_{(j+1)} \quad (2.74)$$

$$QEE3_{(j)} = QSE2_{(j)} + QT2_{(j)} \quad (2.75)$$

Remplazado la ecuación 2.74, 2.75 y la ecuación 2.70 en la ecuación 2.73, se halla finalmente la ecuación del Embalse 3 ( $QSE3_{(j+1)}$ ) :

$$QSE3_{(j+1)} = C_1^3[QSE2_{(j+1)} + QT2_{(j+1)}] + C_2^3[QSE2_{(j)} + QT2_{(j)}] + C_3^3QSE3_{(j)} \quad (2.76)$$

$$QSE3_{(j+1)} = C_1^3[C_1^1C_1^2QIni_{(j+1)} + C_2^1C_1^2QIni_{(j)} + C_3^1C_1^2QSE1_{(j)} + C_1^2QT1_{(j+1)} + C_2^2QSE1_{(j)} + C_2^2QT1_{(j)} + C_3^2QSE2_{(j)}] + C_1^3QT2_{(j+1)} + C_2^3QSE2_{(j)} + C_2^3QT2_{(j)} + C_3^3QSE3_{(j)} \quad (2.77)$$

$$QSE3_{(j+1)} = C_1^1C_1^2C_1^3QIni_{(j+1)} + C_2^1C_1^2C_1^3QIni_{(j)} + C_3^1C_1^2C_1^3QSE1_{(j)} + C_1^2C_1^3QT1_{(j+1)} + C_2^2C_1^3QSE1_{(j)} + C_2^2C_1^3QT1_{(j)} + C_3^2C_1^3QSE2_{(j)} + C_1^3QT2_{(j+1)} + C_2^3QSE2_{(j)} + C_2^3QT2_{(j)} + C_3^3QSE3_{(j)} \quad (2.78)$$

$$QT2_{(j+1)} = QTrib2_{(j+1)} + QACP3_{(j+1)} \quad (2.79)$$

$$QT2_{(j)} = QTrib2_{(j)} + QACP3_{(j)} \quad (2.80)$$

El caudal de salida del embalse 4 ( $QEE4$ ) en el tránsito lineal de Muskingum incluyendo afluentes tributarios, se basa una vez más por la ecuación 2.56:

$$QSE4_{(j+1)} = C_1^4QEE4_{(j+1)} + C_2^4QEE4_{(j)} + C_3^4QSE4_{(j)} \quad (2.81)$$

El caudal de entrada del embalse 4 ( $QEE4$ ) es el caudal de salida del embalse 3 ( $QSE3$ ), más el caudal aportante del tercer tributario ( $QT3$ ) :

$$QEE4_{(j+1)} = QSE3_{(j+1)} + QT3_{(j+1)} \quad (2.82)$$

$$QEE4_{(j)} = QSE3_{(j)} + QT3_{(j)} \quad (2.83)$$

$$QSE4_{(j+1)} = C_1^4[QSE3_{(j+1)} + QT3_{(j+1)}] + C_2^4[QSE3_{(j)} + QT3_{(j)}] + C_3^4QSE4_{(j)} \quad (2.84)$$

$$QSE4_{(j+1)} = C_1^4[C_1^1C_1^2C_1^3QIni_{(j+1)} + C_2^1C_1^2C_1^3QIni_{(j)} + C_3^1C_1^2C_1^3QSE1_{(j)} + C_1^2C_1^3QT1_{(j+1)} + C_2^2C_1^3QSE1_{(j)} + C_2^2C_1^3QT1_{(j)} + C_3^2C_1^3QSE2_{(j)} + C_1^3QT2_{(j+1)} + C_2^3QSE2_{(j)} + C_2^3QT2_{(j)} + C_3^3QSE3_{(j)}] + C_1^4QT3_{(j+1)} + C_2^4QSE3_{(j)} + C_2^4QT3_{(j)} + C_3^4QSE3_{(j)} \quad (2.85)$$

$$QSE4_{(j+1)} = C_1^1C_1^2C_1^3C_1^4QIni_{(j+1)} + C_2^1C_1^2C_1^3C_1^4QIni_{(j)} + C_3^1C_1^2C_1^3C_1^4QSE1_{(j)} + C_1^2C_1^3C_1^4QT1_{(j+1)} + C_2^2C_1^3C_1^4QSE1_{(j)} + C_2^2C_1^3C_1^4QT1_{(j)} + C_3^2C_1^3C_1^4QSE2_{(j)} + C_1^3C_1^4QT2_{(j+1)} + C_2^3C_1^4QSE2_{(j)} + C_2^3C_1^4QT2_{(j)} + C_3^3C_1^4QSE3_{(j)} + C_1^4QT3_{(j+1)} + C_2^4QSE3_{(j)} + C_2^4QT3_{(j)} + C_3^4QSE3_{(j)} \quad (2.86)$$

$$QT3_{(j+1)} = QTrib3_{(j+1)} + QACP4_{(j+1)} \quad (2.87)$$

$$QT3_{(j)} = QTrib3_{(j)} + QACP4_{(j)} \quad (2.88)$$

Se resumen las ecuaciones 2.57, 2.70, 2.78 y 2.86, de forma matricial para cada uno de los cuatro embalses en el tránsito lineal según Muskingum con afluentes tributarios, con la siguiente ecuación:

$$[Xmusk_{(j+1)}]_{(nx1)} = [C1]_{(nxn)}[Xmusk_{(j)}]_{(nx1)} + [C2]_{(nxn)}[UK_{(j+1)}]_{(nx1)} + [C3]_{(nxn)}[UK_{(j)}]_{(nx1)} \quad (2.89)$$

Para los cuatro embalses matricialmente el tránsito de Muskingum con afluentes tributarios es:

$$[Xmusk_{(j+1)}]_{(4x1)} = \begin{bmatrix} QSE1_{(j+1)} \\ QSE2_{(j+1)} \\ QSE3_{(j+1)} \\ QSE4_{(j+1)} \end{bmatrix}_{(4x1)} = [C1]_{(4x4)}[Xmusk_{(j)}]_{(4x1)} + [C2]_{(4x4)}[UK_{(j+1)}]_{(4x1)} + [C3]_{(4x4)}[UK_{(j)}]_{(4x1)} \quad (2.90)$$

Donde:

$$[Xmusk_{(j)}]_{(4x1)} = \begin{bmatrix} QSE1_{(j)} \\ QSE2_{(j)} \\ QSE3_{(j)} \\ QSE4_{(j)} \end{bmatrix}_{(4x1)} \quad (2.91)$$

$$[C1]_{(4x4)} = \begin{bmatrix} C_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ C_3^1 C_1^2 + C_2^2 & C_1^2 & 0 & 0 \\ C_3^1 C_1^2 C_1^3 + C_2^2 C_1^3 & C_3^2 C_1^3 + C_2^3 & C_3^3 & 0 \\ C_3^1 C_1^2 C_1^3 C_1^4 + C_2^2 C_1^3 C_1^4 & C_3^2 C_1^3 C_1^4 + C_2^3 C_1^4 & C_3^3 C_1^4 + C_2^4 & C_2^4 \end{bmatrix}_{(4x4)} \quad (2.92)$$

$$[C2]_{(4x4)} = \begin{bmatrix} C_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ C_1^1 C_1^2 & C_1^2 & 0 & 0 \\ C_1^1 C_1^2 C_1^3 & C_1^2 C_1^3 & C_1^3 & 0 \\ C_1^1 C_1^2 C_1^3 C_1^4 & C_1^2 C_1^3 C_1^4 & C_1^3 C_1^4 & C_1^4 \end{bmatrix}_{(4x4)} \quad (2.93)$$

$$[C3]_{(4x4)} = \begin{bmatrix} C_2^1 & 0 & 0 & 0 \\ C_2^1 C_1^2 & C_2^2 & 0 & 0 \\ C_2^1 C_1^2 C_1^3 & C_2^2 C_1^3 & C_2^3 & 0 \\ C_2^1 C_1^2 C_1^3 C_1^4 & C_2^2 C_1^3 C_1^4 & C_2^3 C_1^4 & C_2^4 \end{bmatrix}_{(4x4)} \quad (2.94)$$

$$[UK_{(j+1)}] = \begin{bmatrix} QInic_{(j+1)} \\ QT1_{(j+1)} \\ QT2_{(j+1)} \\ QT3_{(j+1)} \end{bmatrix}_{(4 \times 1)} \quad (2.95)$$

$$[UK_{(j)}] = \begin{bmatrix} QInic_{(j)} \\ QT1_{(j)} \\ QT2_{(j)} \\ QT3_{(j)} \end{bmatrix}_{(4 \times 1)} \quad (2.96)$$

El autor del presente documento, desarrollo las ecuaciones para llegar a la formación matricial de las últimas seis ecuaciones, permitiendo con facilidad expresar el tránsito lineal de Muskingum para cualquier número (n) de embalses y numero (n-1) afluentes tributarios, bajo la metodología o supuestos presentado en este trabajo.

En la consulta bibliográfica realizada no se encontró referencias sobre esta metodología desarrollada para los modelos de tránsito propuestos, sin embargo, resalto que la idea inicial y principal, fue planteada por el Ing. Nelson Obregón Neira director del presente proyecto.

Las variables de entrada impuestas que conforman las matrices ( $UK_{(j+1)}$ ) y ( $UK_{(j)}$ ), en el tránsito lineal de Muskingum desarrollado, se pueden calcular con las siguientes ecuaciones: 2.58, 2.71, 2.72, 2.79, 2.80, 2.87 y la ecuación 2.88.

## 2.4 Modelo lineal tránsito de piscina nivelada

El tránsito de caudales por piscina nivelada es un procedimiento para calcular el hidrograma de flujo de salida desde un embalse con una superficie de agua horizontal, dado su hidrograma de entrada y sus características de almacenamiento-caudal de salida (Chow, 1994).

Las ecuaciones 2.43 y 2.44, se modifican si se considera no almacenamiento por cuña haciendo que el factor X sea cero. Por lo tanto, el almacenamiento es representado nuevamente por la ecuación 2.2.

Empleando la ecuación 2.2 y la ecuación 2.45, se plantean las ecuaciones para el tránsito:

$$KQ_{(j+1)} - KQ_{(j)} = \frac{I_{(j)}+I_{(j+1)}}{2} \Delta t - \frac{Q_{(j)}+Q_{(j+1)}}{2} \Delta t \quad (2.97)$$

$$KQ_{(j+1)} - KQ_{(j)} = \frac{I_{(j)}+I_{(j+1)}}{2} \Delta t - \frac{Q_{(j)}+Q_{(j+1)}}{2} \Delta t \quad (2.98)$$

$$Q_{(j+1)} = \left(\frac{2K-\Delta t}{2K+\Delta t}\right) Q_{(j)} + \left(\frac{\Delta t}{2K+\Delta t}\right) (I_{(j)} + I_{(j+1)}) \quad (2.99)$$

Donde:

$$a = \frac{2K-\Delta t}{2K+\Delta t} \quad (2.100)$$

$$b = \frac{\Delta t}{2K+\Delta t} \quad (2.101)$$

$$Q_{(j+1)} = aQ_{(j)} + b(I_{(j)} + I_{(j+1)}) \quad (2.102)$$

La ecuación 2.102, es la ecuación general de cada embalse para el tránsito de caudales por piscina nivelada con afluentes tributarios, al hacer las sustituciones de a y b correspondientes.

A continuación, se realiza el planteamiento analítico para el tránsito de caudales por piscina nivelada hasta el cuarto embalse, incluyendo el caudal de afluentes tributarios, con el fin de facilitar posteriormente la expresión de las ecuaciones de cada embalse en forma matricial, para n embalses con (n-1) afluentes de tributarios.

Ecuación embalse 1:

$$QSE1_{(j+1)} = a_1 QSE1_{(j)} + b_1 (QInic_{(j)} + QInic_{(j+1)}) \quad (2.103)$$

$$QInic_{(j+1)} = Qestinicial_{(j+1)} + QACP1_{(j+1)} \quad (2.104)$$

$$QInic_{(j)} = Qestinicial_{(j)} + QACP1_{(j)} \quad (2.105)$$

Ecuación embalse 2:

$$QSE2_{(j+1)} = a_2 QSE2_{(j)} + b_2 (QEE2_{(j)} + QEE2_{(j+1)}) \quad (2.106)$$

$$QEE2_{(j+1)} = QSE1_{(j+1)} + QT1_{(j+1)} \quad (2.107)$$

$$QEE2_{(j)} = QSE1_{(j)} + QT1_{(j)} \quad (2.108)$$

$$QSE2_{(j+1)} = a_2 QSE2_{(j)} + b_2 \left( (QSE1_{(j)} + QT1_{(j)}) + (QSE1_{(j+1)} + QT1_{(j+1)}) \right) \quad (2.109)$$

$$QSE2_{(j+1)} = a_2 QSE2_{(j)} + b_2 QSE1_{(j)} + b_2 QT1_{(j)} + b_2 QSE1_{(j+1)} + b_2 QT1_{(j+1)} \quad (2.110)$$

Se reemplaza para la ecuación anterior el caudal de salida del embalse 1, hallado en la ecuación 2.103:

$$QSE2_{(j+1)} = a_2 QSE2_{(j)} + b_2 QSE1_{(j)} + b_2 QT1_{(j)} + b_2 [a_1 QSE1_{(j)} + b_1 (QInic_{(j)} + QInic_{(j+1)})] + b_2 QT1_{(j+1)} \quad (2.111)$$

$$QSE2_{(j+1)} = a_2 QSE2_{(j)} + b_2 QSE1_{(j)} + b_2 QT1_{(j)} + a_1 b_2 QSE1_{(j)} + b_1 b_2 QInic_{(j)} + b_1 b_2 QInic_{(j+1)} + b_2 QT1_{(j+1)} \quad (2.112)$$

$$QT1_{(j+1)} = QTrib1_{(j+1)} + QACP2_{(j+1)} \quad (2.113)$$

$$QT1_{(j)} = QTrib1_{(j)} + QACP2_{(j)} \quad (2.114)$$

La ecuación de tránsito para el embalse 2 es la ecuación 2.112. La ecuación del tránsito para el embalse 3, se expresa con base en la ecuación 2.102:

$$QSE3_{(j+1)} = a_3 QSE3_{(j)} + b_3 (QEE3_{(j)} + QEE3_{(j+1)}) \quad (2.115)$$

Donde:

$$QEE3_{(j+1)} = QSE2_{(j+1)} + QT2_{(j+1)} \quad (2.116)$$

$$QEE3_{(j)} = QSE2_{(j)} + QT2_{(j)} \quad (2.117)$$

$$QSE3_{(j+1)} = a_3 QSE3_{(j)} + b_3 \left( (QSE2_{(j)} + QT2_{(j)}) + (QSE2_{(j+1)} + QT2_{(j+1)}) \right) \quad (2.118)$$

$$QSE3_{(j+1)} = a_3 QSE3_{(j)} + b_3 QSE2_{(j)} + b_3 QT2_{(j)} + b_3 QSE2_{(j+1)} + b_3 QT2_{(j+1)} \quad (2.119)$$

Se reemplaza para la ecuación 2.119, el caudal de salida del embalse 2 en (j+1), hallado en la ecuación 2.112:

$$QSE3_{(j+1)} = a_3 QSE3_{(j)} + b_3 QSE2_{(j)} + b_3 QT2_{(j)} + b_3 [a_2 QSE2_{(j)} + b_2 QSE1_{(j)} + b_2 QT1_{(j)} + a_1 b_2 QSE1_{(j)} + b_1 b_2 QInic_{(j)} + b_1 b_2 QInic_{(j+1)} + b_2 QT1_{(j+1)}] + b_3 QT2_{(j+1)} \quad (2.120)$$

$$QSE3_{(j+1)} = a_3 QSE3_{(j)} + b_3 QSE2_{(j)} + b_3 QT2_{(j)} + a_2 b_3 QSE2_{(j)} + b_2 b_3 QSE1_{(j)} + b_2 b_3 QT1_{(j)} + a_1 b_2 b_3 QSE1_{(j)} + b_1 b_2 b_3 QIni_{(j)} + b_1 b_2 b_3 QIni_{(j+1)} + b_2 b_3 QT1_{(j+1)} + b_3 QT2_{(j+1)} \quad (2.121)$$

$$QT2_{(j+1)} = QTrib2_{(j+1)} + QACP3_{(j+1)} \quad (2.122)$$

$$QT2_{(j)} = QTrib2_{(j)} + QACP3_{(j)} \quad (2.123)$$

La ecuación del tránsito de caudales por piscina nivelada con afluentes tributarios, para el embalse 4 se expresa de la siguiente forma:

$$QSE4_{(j+1)} = a_4 QSE4_{(j)} + b_4 (QEE4_{(j)} + QEE4_{(j+1)}) \quad (2.124)$$

Donde:

$$QEE4_{(j+1)} = QSE3_{(j+1)} + QT3_{(j+1)} \quad (2.125)$$

$$QEE4_{(j)} = QSE3_{(j)} + QT3_{(j)} \quad (2.126)$$

$$QSE4_{(j+1)} = a_4 QSE3_{(j)} + b_4 \left( (QSE3_{(j)} + QT3_{(j)}) + (QSE3_{(j+1)} + QT3_{(j+1)}) \right) \quad (2.127)$$

Se reemplaza la ecuación del embalse 3 (Ecuación 2.121) en la ecuación 2.127, para obtener finalmente la ecuación del embalse 4:

$$QSE4_{(j+1)} = a_4 QSE4_{(j)} + b_4 QSE3_{(j)} + b_4 QT3_{(j)} + b_4 [a_3 QSE3_{(j)} + b_3 QSE2_{(j)} + b_3 QT2_{(j)} + a_2 b_3 QSE2_{(j)} + b_2 b_3 QSE1_{(j)} + b_2 b_3 QT1_{(j)} + a_1 b_2 b_3 QSE1_{(j)} + b_1 b_2 b_3 QInic_{(j)} + b_1 b_2 b_3 QInic_{(j+1)} + b_2 b_3 QT1_{(j+1)} + b_3 QT2_{(j+1)}] + b_4 QT3_{(j+1)} \quad (2.128)$$

$$QSE4_{(j+1)} = a_4 QSE4_{(j)} + b_4 QSE3_{(j)} + b_4 QT3_{(j)} + a_3 b_4 QSE3_{(j)} + b_3 b_4 QSE2_{(j)} + b_3 b_4 QT2_{(j)} + a_2 b_3 b_4 QSE2_{(j)} + b_2 b_3 b_4 QSE1_{(j)} + b_2 b_3 b_4 QT1_{(j)} + a_1 b_2 b_3 b_4 QSE1_{(j)} + b_1 b_2 b_3 b_4 QInic_{(j)} + b_1 b_2 b_3 b_4 QInic_{(j+1)} + b_2 b_3 b_4 QT1_{(j+1)} + b_3 b_4 QT2_{(j+1)} + b_4 QT3_{(j+1)} \quad (2.129)$$

$$QT3_{(j+1)} = QTrib3_{(j+1)} + QACP4_{(j+1)} \quad (2.130)$$

$$QT3_{(j)} = QTrib3_{(j)} + QACP4_{(j)} \quad (2.131)$$

De forma matricial, en resumen, se expresa el modelo de tránsito de piscina nivelada con afluentes tributarios, según la siguiente ecuación 2.132:

$$[XPiscniv_{(j+1)}]_{(nx1)} = [A1]_{(nxn)} [XPiscniv_{(j)}]_{(nx1)} + [B2]_{(nxn)} [UK]_{(nx1)} \quad (2.132)$$

Matricialmente el tránsito de caudales por piscina nivelada para cuatro embalses con afluentes tributarios, se estableció por las ecuaciones 2.103, 2.112, 2.121 y 2.129. Logrando establecer la siguiente forma matricial:

$$\begin{bmatrix} QSE1_{(j+1)} \\ QSE2_{(j+1)} \\ QSE3_{(j+1)} \\ QSE4_{(j+1)} \end{bmatrix}_{(4x1)} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2(1+a_1) & a_2 & 0 & 0 \\ b_2 b_3(1+a_1) & b_3(1+a_2) & a_3 & 0 \\ b_2 b_3 b_4(1+a_1) & b_3 b_4(1+a_2) & b_4(1+a_3) & a_4 \end{bmatrix}_{(4x4)} \begin{bmatrix} QSE1_{(j)} \\ QSE2_{(j)} \\ QSE3_{(j)} \\ QSE4_{(j)} \end{bmatrix}_{(4x1)} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 b_2 & b_2 & 0 & 0 \\ b_1 b_2 b_3 & b_2 b_3 & b_3 & 0 \\ b_1 b_2 b_3 b_4 & b_2 b_3 b_4 & b_3 b_4 & b_4 \end{bmatrix}_{(4x1)} \begin{bmatrix} QInic_{(j+1)} + QInic_{(j)} \\ QT1_{(j+1)} + QT1_{(j)} \\ QT2_{(j+1)} + QT2_{(j)} \\ QT3_{(j+1)} + QT3_{(j)} \end{bmatrix}_{(4x1)} \quad (2.133)$$

Donde:

$$[XPiscniv_{(j+1)}]_{4x1} = \begin{pmatrix} QSE1_{(j+1)} \\ QSE2_{(j+1)} \\ QSE3_{(j+1)} \\ QSE4_{(j+1)} \end{pmatrix}_{4x1} \quad (2.134)$$

$$[XPiscniv_{(j)}]_{4 \times 1} = \begin{pmatrix} QSE1_{(j)} \\ QSE2_{(j)} \\ QSE3_{(j)} \\ QSE4_{(j)} \end{pmatrix}_{4 \times 1} \quad (2.135)$$

$$[A1]_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2(1+a_1) & a_2 & 0 & 0 \\ b_2b_3(1+a_1) & b_3(1+a_2) & a_3 & 0 \\ b_2b_3b_4(1+a_1) & b_3b_4(1+a_2) & b_4(1+a_3) & a_4 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \quad (2.136)$$

$$[B1]_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1b_2 & b_2 & 0 & 0 \\ b_1b_2b_3 & b_2b_3 & b_3 & 0 \\ b_1b_2b_3b_4 & b_2b_3b_4 & b_3b_4 & b_4 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \quad (2.137)$$

$$[UK]_{4 \times 1} = \begin{pmatrix} QIni_{(j+1)} + Qini_{(j)} \\ QT1_{(j+1)} + QT1_{(j)} \\ QT2_{(j+1)} + QT2_{(j)} \\ QT3_{(j+1)} + QT3_{(j)} \end{pmatrix}_{4 \times 1} \quad (2.138)$$

Para poder aplicar la ecuación 2.132, se debe tener en cuenta la matriz UK que está representada por la ecuación 2.138, la cual son las entradas de los caudales de los afluentes tributarios y que a su vez debe ser calculados por las siguientes ecuaciones respectivamente: 2.104, 2.105, 2.113, 2.114, 2.122, 2.123 2.130 y ecuación 2.131.

## 2.5 Análisis de hidrógrafas a la entrada y salida del tramo de estudio considerando tributos

Para aplicar los modelos de tránsito propuestos se hizo necesario adecuar la hidrógrafa inicial de cada uno de los embalses, por ausencia de estaciones limnigráficas intermedias. Se distribuyó la diferencia de caudales de la hidrógrafa observada aguas abajo y aguas arriba del cauce principal en la zona de estudio, por medio de un factor de proporcionalidad de áreas para cada embalse respecto al área total.

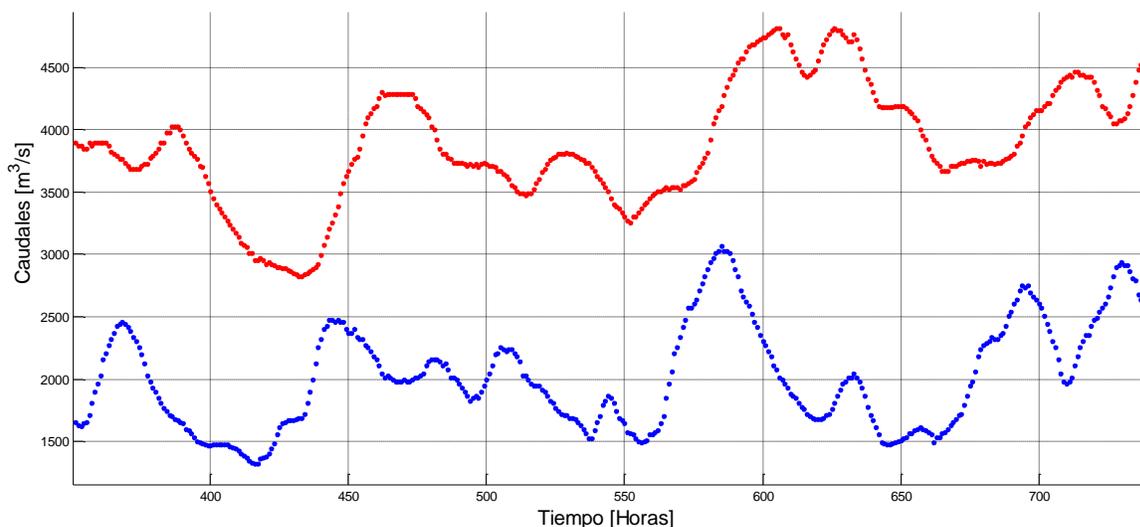
Adicionalmente se debe rezagar en el tiempo la hidrógrafa observada aguas abajo, respecto a la hidrógrafa aguas arriba del cauce principal en la zona de estudio, de tal forma que sea comparable, por los siguientes argumentos:

- Cuando entre dos estaciones limnigráficas, se presenta el ingreso de aportes de caudales por afluentes tributarios en el transcurso de cada embalse, el hidrograma a la salida del tramo a transitar tiene más caudal o mayor masa de agua, respecto al hidrograma de inicio del tramo, ver Figura 2-4. Se observa generalmente bajo las circunstancias de las hidrógrafas referidas, el reflejo de los picos de las crecientes y de los valles en los caudales bajos, para la hidrógrafa inicial y final del tramo.
- A manera de ejemplo sobre lo comentado en el párrafo anterior, se puede observar en la Figura 2-4, dos muestras de picos de crecientes ubicadas en la hidrógrafa inicial (“hidrograma inferior o menores caudales”) de un tramo, para las 445 horas y 508 horas aproximadamente en una serie de tiempo, luego se observa que están reflejados estos dos picos con mayores caudales nuevamente en la hidrógrafa de salida (“hidrograma superior o mayores caudales”) del tramo alrededor de las 465 horas y 530 horas.
- Presenta la Figura 2-4 una tendencia constante en la diferencia de tiempo, entre los picos de crecientes registrados en la hidrógrafa de aguas abajo (caudales mayores), respecto a la hidrógrafa de aguas arriba (caudales menores), del cauce principal. Generalmente es señalada esta diferencia de tiempo mencionado, como el tiempo de viaje o “tiempo de tránsito” de caudales entre estaciones limnigráficas consecutivas sobre un mismo cauce.
- Al revisar el concepto básico de tránsitos de caudales, cuando se transita la hidrógrafa de entrada siempre es atenuada, cuando se compara con la hidrógrafa a la salida del cauce de interés, esto es debido por las características fisiográficas y por la capacidad de almacenamiento del tramo (Ponce, 1989). Es decir, en estos casos no se considera entradas de caudal por aportes de tributarios a lo largo del tramo transitado generalmente.

- Por emplear modelos de tránsito agregados o hidrológicos, para el buen desarrollo del proyecto, no es posible considerar entradas de caudal por aportes de afluentes tributarios a lo largo del tramo, porque estos modelos están basados en determinar cómo varían los caudales únicamente en el tiempo en un lugar puntual del cauce (Chow et al, 1994), haciendo necesario sumar todos los caudales de aporte de tributarios y demás aportes directamente al inicio de cada uno de los embalses, por su estructura matemática.

Para la Figura 2-4 tomada como ejemplo, se observa claramente aporte de caudales significativos por afluentes tributarios en el tramo, como se puede determinar si se revisa los caudales para cualquier hora. Por ejemplo, a las 445 horas se encuentra un caudal pico en la hidrógrafa inicial cercano a los 2500 m<sup>3</sup>/s, este pico se ve reflejado nuevamente en la hidrógrafa de salida a la hora 465 con un valor aproximado del caudal de 4300 m<sup>3</sup>/s, lo cual indica un aporte de caudal del tramo alrededor de 1800 m<sup>3</sup>/s.

**Figura 2-4 :** Ejemplo de Hidrógrafas típicas de Entrada (hidrograma inferior) y de salida (hidrograma superior) en un tramo con tributarios.



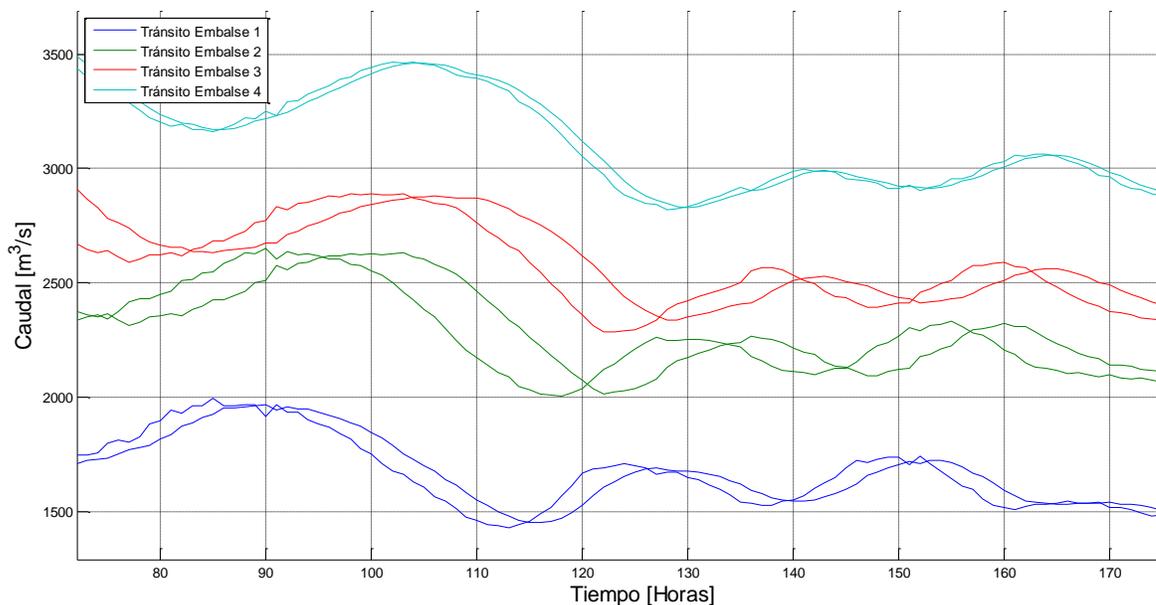
Como una solución por la falta de información de caudales en los afluentes tributarios, se decidió tomar la diferencia de caudales horarios entre las dos hidrógrafas que limitan el cauce principal de la zona de estudio. Distribuyendo la diferencia de caudales de los tributarios por medio de un factor de áreas respecto al área total de la cuenca.

El cálculo del factor de áreas mencionado se realizó calculando con ponderación las áreas de las subcuencas de cada uno de los afluentes tributarios, también ponderando las áreas aledañas directas al cauce principal, para cada uno de los embalses seleccionados respecto al área total de la cuenca. Se puede exceptuar aquellos afluentes tributarios que tengan información de caudales para usarlos directamente en el mismo intervalo de tiempo.

En los dos párrafos anteriores, se expone la forma de cómo se estimaron, los caudales de los afluentes tributarios significativos y los caudales por las áreas aledañas al cauce principal, esto es porque no se cuenta con información, esta metodología utilizada es adoptada según (Bras y Rodríguez-Iturbe, 1993).

Para poder representar mejor el caudal en el tránsito con la hidrógrafa inicial de cada embalse, se tomó un rezago constante de tiempo, por medio de la función de correlación cruzada, para las hidrógrafas observadas en las dos estaciones limnigráficas ubicadas sobre el cauce principal, como se expondrá más adelante en el Capítulo 3 Metodología: zona de estudio y análisis de información.

**Figura 2-5:** Hidrógrafa de inicio adelantada, de acuerdo con el tiempo de viaje o de tránsito a lo largo del tramo o embalse, respecto a la hidrógrafa de salida.



Para indicar la adecuación del caudal transitado de la forma expuesta en párrafos anteriores de esta sección o Ítem 2.5, ver anterior Figura 2-5.

Adicionalmente se resalta nuevamente que en cada iteración se le adicionó el aporte de los caudales de los tributarios para cada instante de tiempo, a su respectivo embalse y de esta forma se estaría conservando la masa de la hidrógrafa de la salida del tramo, adecuando por lo tanto la hidrógrafa de inicio en la zona de estudio, para emplear los modelos de tránsitos agregados propuestos (ver Figura 2-5).

### **3. Capítulo 3 Metodología: zona de estudio y análisis de información**

El presente capítulo describe la zona de estudio situada sobre el cauce del río Magdalena, iniciando por la ubicación de la estación limnigráfica de Puerto Berrío hasta la estación limnigráfica de Barrancabermeja. Seleccionando este tramo del río Magdalena por tener información hidrométrica en ambas estaciones, para cinco periodos de tiempo escogidos, con resolución horaria de niveles por parte de la entidad del IDEAM.

Las curvas de calibración y niveles horarios de tres estaciones limnigráficas, son las utilizadas en la zona de estudio. Una de estas estaciones es la estación limnigráfica de Puerto Araujo ubicada en el río Carare único afluente de los tributarios importantes, del cual se obtuvo información adecuada para los cinco periodos de tiempos seleccionados. La estación de puerto Araujo está localizada entre las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío y Barrancabermeja ubicadas sobre el cauce principal del río Magdalena.

La curva de gasto o de calibración de las estaciones limnigráficas son indicadas. También se explica la metodología que permite distribuir o ponderar la diferencia de caudales por medio de áreas, entre las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío y de Barrancabermeja.

Según la información hidrométrica obtenida se efectuó un análisis de los niveles horarios, para obtener valores atípicos en la serie de datos por medio de una gráfica denominada Boxplot.

Se hizo también un análisis de los datos faltantes para los niveles de las estaciones limnigráficas del tramo de estudio, debido a la eliminación de los datos atípicos en la serie

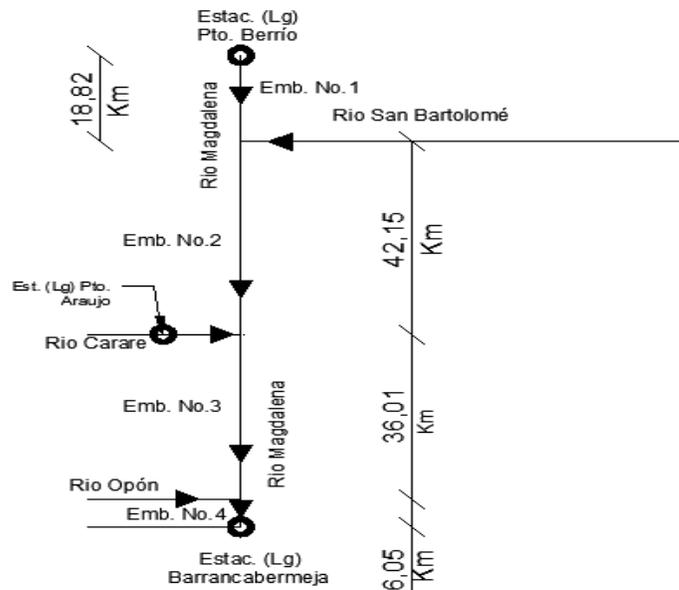
de tiempo y por la ausencia de información que se presentaron para varias horas, en los periodos de tiempo seleccionados. Completando esta información por medio de una regresión lineal múltiple.

Adicionalmente se realizó un análisis sobre el comportamiento de los caudales hallados por las curvas de calibración en cinco periodos de tiempo seleccionados, por medio de una función estadística de autocorrelogramas y de correlogramas cruzados, estimando el valor del tiempo de tránsito de los cuatro subtramos, que es dividido el tramo de estudio seleccionado sobre el río Magdalena.

### 3.1 Localización del tramo de estudio seleccionado

La zona de estudio se encuentra ubicada entre dos estaciones limnigráficas del IDEAM sobre el río Magdalena, desde el municipio de Puerto Berrío en el departamento de Antioquia y hasta el municipio de Barrancabermeja en el departamento de Santander. Para el presente proyecto, se tomó información del IDEAM únicamente. Las estaciones limnigráficas tienen resolución de niveles horarios.

**Figura 3-1:** Plano topológico de la zona de estudio.



Se indica en la Figura 3-1 lo siguiente: tres estaciones limnigráficas, tres afluentes tributarios importantes en la zona de estudio, las longitudes aproximadas a lo largo del cauce entre los tributarios mencionados. Sectorizando por los tres afluentes tributarios, cuatro embalses o subtramos, sobre el río Magdalena.

Según la cartografía de la zona de estudio, se encontró la existencia de tres afluentes tributarios principales que aportan caudales en este sector del río Magdalena, los cuales son: río San Bartolomé, río Carare y río Opón.

Para los tres afluentes tributarios principales en el tramo de estudio sobre el río Magdalena, no se contó con información de estaciones limnigráficas en el río San Bartolomé y en el río Opón.

Estos tres afluentes tributarios principales, permiten sectorizar la zona de estudio en cuatro sub-tramos o embalses representativos, empezando por la ubicación de la estación limnigráfica de Puerto Berrío y terminando en la estación limnigráfica de Barrancabermeja de la siguiente forma:

- Embalse 1: Estación limnigráfica de Puerto Berrío – Río San Bartolomé.
- Embalse 2: Río San Bartolomé – Río Carare.
- Embalse 3: Río Carare – Río Opón.
- Embalse 4: Río Opón – Estación limnigráfica de Barrancabermeja.

### **3.1.1 Cartografía y sistema de coordenadas**

El proyecto de la referencia se enmarca en el sistema de coordenadas origen Bogotá, el cual tiene los siguientes parámetros geográficos:

- Para el procesamiento de la información cartográfica se usó como plataforma un sistema de información geográfica ARCGIS Versión 9.3 el cual permite integrar toda la información existente en archivos de intercambio general tipo shape (formato nativo de ARCGIS).
- Como apoyo digital se ha tomado de base el DEM-30 extraído libremente de los laboratorios de sistemas del edificio de Doctorado en Ingeniería de la Universidad Javeriana, sede Bogotá.

El Dem-30, hace referencia a una serie de imágenes satelitales, de toda Colombia, sectorizando el país básicamente en cuatro zonas, relacionando que cada Pixel de las imágenes, tiene una resolución o aproximación de 30 metros por 30 metros.

Como base cartográfica se tomó información comercial del Instituto Geográfico Agustín Codazzi (IGAC), planchas escala 1:100.000 en formato pdf digital, del año de 2008 específicamente.

### **3.2 Información básica hidrométrica y de las subcuencas en la zona de estudio**

Hay afluentes tributarios pequeños, que aportan caudales a lo largo del cauce principal para los embalses en la zona de estudio, de los cuales no se tiene ninguna información, como son caños o quebradas.

Al considerar las áreas directas de drenaje de cada uno de los cuatro embalses propuestos sobre el río Magdalena (ver Figura 3-1), permiten tener en cuenta los posibles aportes pequeños de caudal de caños y quebradas que estén a lo largo de la zona de estudio, porque en estos afluentes menores no se tiene información hidrométrica

Con las áreas de las subcuencas de los afluentes tributarios y de las áreas directas de drenaje al cauce principal, se hizo una ponderación o factor de proporción, respecto al área total de la cuenca de estudio, para cada uno de los cuatros embalses.

Es importante mencionar que la estación limnigráfica de Barrancabermeja, está ubicada antes de la Bocatoma del acueducto de la ciudad de Barrancabermeja.

La recopilación de información para la zona de estudio se centró en las siguientes tres estaciones limnigráficas, ver Tabla 3.1.

**Tabla 3.1:** Estaciones limnigráficas del IDEAM seleccionadas para el tramo de estudio.

Código de la Estación	Nombre de la Estación	Tipo de Estación	Munici-pio	Departamento	Afluente
2315703	Barrancabermeja	LM y LG a partir del año 2008	Barrancabermeja	Santander	Río Magdalena
2309703	Puerto Berrío	Limnigráfica – (LG)	Puerto Berrío	Antioquía	Río Magdalena
2312702	Puerto Araujo	Limnigráfica – (LG)	Cimitarra	Santander	Río Carare

La estación limnigráfica de Puerto Araujo está ubicada sobre el río Carare y es el único afluente tributario de importancia, que tiene información de niveles horarios en la zona de estudio. La estación tiene información consistente de niveles horarios que coincide con cinco intervalos de tiempo, entre las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío y de Barrancabermeja, como se presentará más adelante.

En la zona de estudio se encuentran también dos estaciones limnigráficas del IDEAM correspondientes a afluentes de tributarios que aportan caudales, que no son apropiadas por las siguientes razones:

- Estación limnigráfica La Mascota, Código: 2310702, ubicada sobre el río San Bartolomé en la parte inicial de la cuenca, la cual está muy alejada de su desembocadura sobre el río Magdalena. Por esta razón se considera poca representativa la información de caudales en esta estación para el desarrollo del proyecto.

- Estación limnigráfica Puente Ferrocarril, Código: 2307702, ubicada sobre el río Opón, la información registrada que tiene la estación es deficiente.

En el anexo C se encuentra la cartografía de la zona de estudio sobre el río Magdalena (Puerto Berrío – Barrancabermeja). La información disponible de las tres estaciones limnigráficas son los registros de los niveles horarios y la curva de calibración para un determinado periodo de vigencia.

En la Tabla 3.2 se presentan enumeradas las subcuencas con sus respectivas áreas, interpoladas por el software ArcGis Versión 9.2, con base en la cartografía digital de DEM-30, estas subcuencas se ubican en uno de los planos mostrados en el anexo C.

**Tabla 3.2 :** Áreas y perímetros de las subcuencas, sobre el tramo de estudio.

Subcuenca	Perímetro (m)	Área (Ha)	Subcuenca	Perímetro (m)	Área (Ha)
1	284.797,74	66.470,96	14	339.089,23	178.753,79
2	143.709,15	17.902,03	15	334.252,45	988.666,95
3	501.915,59	230.357,70	16	257.405,87	72.137,12
4	147.971,88	15.892,10	17	258.108,31	116.353,28
5	205.343,01	48.126,62	18	334.937,15	180.527,77
6	234.621,30	97.381,06	19	202.216,85	71.658,57
7	260.286,58	69.747,10	20	143.218,93	53.723,82
8	297.254,58	93.841,57	21	78.172,88	4.801,67
9	97.549,77	8.912,78	22	246.134,53	80.744,09
10	189.717,49	34.856,41	23	300.806,81	78.462,59
11	16.8384,69	66.146,84	24	44.047,00	2.933,98
12	277.971,83	49.807,53	25	20.879,39	539,53
13	182.972,71	178.753,79			

**Tabla 3.3:** Áreas de las subcuencas de los afluentes tributarios principales en la zona de Estudio.

<b>Nombre Subcuenca</b>	<b>Afluente Tributario Principal</b>	<b>Suma de las áreas según Subcuenca (Ver tabla 3.3)</b>	<b>Área de cada Subcuenca (Ha)</b>
Río San Bartolomé	Río San Bartolomé	(8+23+13+24+11)	420.138,77
Río Carare	Río Carare	(15+16+17+18+19+20+12+10+9)	1'576.644,23
Río Opón	Río Opón	(3+6+5+4+2)	409.659,51

**Tabla 3.4:** Áreas aledañas de drenaje en la zona de estudio, para cada embalse.

<b>Tramo ó Embalse Número</b>	<b>Afluente Principal</b>	<b>Suma de las áreas según Subcuenca, ver tabla 3.3 (*)</b>	<b>Área aledaña (Ha)</b>
<b>Puerto Berrío - Río San Bartolomé (Embalse 1)</b>	Río Magdalena	(28,5%*subcuenca 14)	50.944,83
<b>Río San Bartolomé –Río Carare (Embalse 2)</b>	Río Magdalena	Subcuenca 7	69.747,10
<b>Río Carare – Río Opón (Embalse 3)</b>	Río Magdalena	Subcuenca 1	66.470,96
<b>Río Opón – Barrancabermeja (Embalse 4)</b>	Río Magdalena	Subcuenca 25	539,53

No se empleó las áreas de las subcuencas 21 y 22, porque no corresponden a la zona de estudio y que se alcanzaron a procesar en el programa de Arc-Gis. Igualmente, no se consideró el 71.5% del área de la sub-cuenca 14, debido a que no incide directamente en las áreas de drenaje a lo largo del embalse 1 sobre el río Magdalena, ubicada entre la estación limnigráfica de Puerto Berrío y el río San Bartolomé.

**Tabla 3.5:** Áreas totales de los cuatro embalses seleccionados para la zona de estudio.

Sector ó Embalse Número	Afluente Tributa del río Principal	Área de cada Subcuenca (Ha)	Área aledaña al río Magdalena (Ha)	Área Acumulada por Embalse (Ha)	Área Acumulada por Embalse (Km <sup>2</sup> )
<b>Puerto Berrío - Río San Bartolomé (Embalse 1)</b>	Río Magdalena en Pto. Berrío	No aplica	50.944,83	50.944,83	509,448
<b>Río San Bartolomé – Río Carare (Embalse 2)</b>	Río San Bartolomé	420.138,77	69.747,10	489.885,87	4.898,58
<b>Río Carare – Río Opón (Embalse 3)</b>	Río Carare	1'576.644,23	66470,96	1'643.115,19	16.431,151
<b>Río Opón – Barrancabermeja (Embalse 4)</b>	Río Opón	409.659,51	539.53	410.199,04	4.101,990

**Tabla 3.6:** Características de los embalses escogidos, por área, longitud y pendiente media.

Embalse	Sub-tramo ó Embalses	Área Sub-tramo ó Embalse (km <sup>2</sup> )	Longitud Sub-Tramo (Km)	Pendiente Media (%)
<b>1</b>	Puerto Berrío – Río San Bartolomé	509,448	18,82	0,08
<b>2</b>	Río San Bartolomé – Río Carare	4.898,858	42,15	0,10
<b>3</b>	Río Carare – Río Opón	16.431,151	36,01	0,06
<b>4</b>	Río Opón - Barrancabermeja	4.101,9904	6,05	0,05
	<b>Total</b>	<b>25.941,4493</b>	<b>103,03</b>	

Con las áreas de las subcuencas de los tributarios principales y de los tributarios menores de drenaje sobre el río Magdalena, se realizó una ponderación o factor de proporción respecto al área total de la cuenca de estudio. Luego se calculó por cada hora, la diferencia de caudales entre las estaciones limnigráficas de puerto Berrio y de Barrancabermeja, multiplicando esa diferencia de caudales por el factor proporcional de las áreas respectivas y de esta forma indirecta, estimar los aportes de caudal de las subcuencas que no había información.

Se tomó la información de las dos tablas anteriores (ver Tabla 3.5 y Tabla 3.6), como base para obtener los caudales de aporte de los tributarios, por medio de un factor de proporcionalidad de áreas, como se ha mencionado e indicado en el párrafo anterior por la metodología adoptada (Bras y Rodríguez-Iturbe, 1993).

### **3.2.1 Curvas de calibración de aforos o gastos**

A continuación, se presentan las curvas de calibración tomadas según el IDEAM, para las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío, Barrancabermeja y de Puerto Araujo.

- **Curva de calibración de la estación limnigráfica de Puerto Berrío**

El procedimiento de medir caudales en los ríos para estaciones limnigráficas, es por medio de métodos indirectos, relacionando niveles de agua en el cauce con una sección transversal promedio del afluente correspondiente a dicha estación, para luego calcular o cuantificar los caudales que circulan por medio de una curva de gastos calibrada, para un determinado intervalo de tiempo, con las incertidumbres que esto genera en el aforo.

En la actualidad la forma de estimar los caudales por parte del IDEAM, es por interpolación lineal. Es decir, cuando hay un nivel registrado entre dos puntos de la curva de calibración conocida, se interpola ese dato, para obtener luego el caudal.

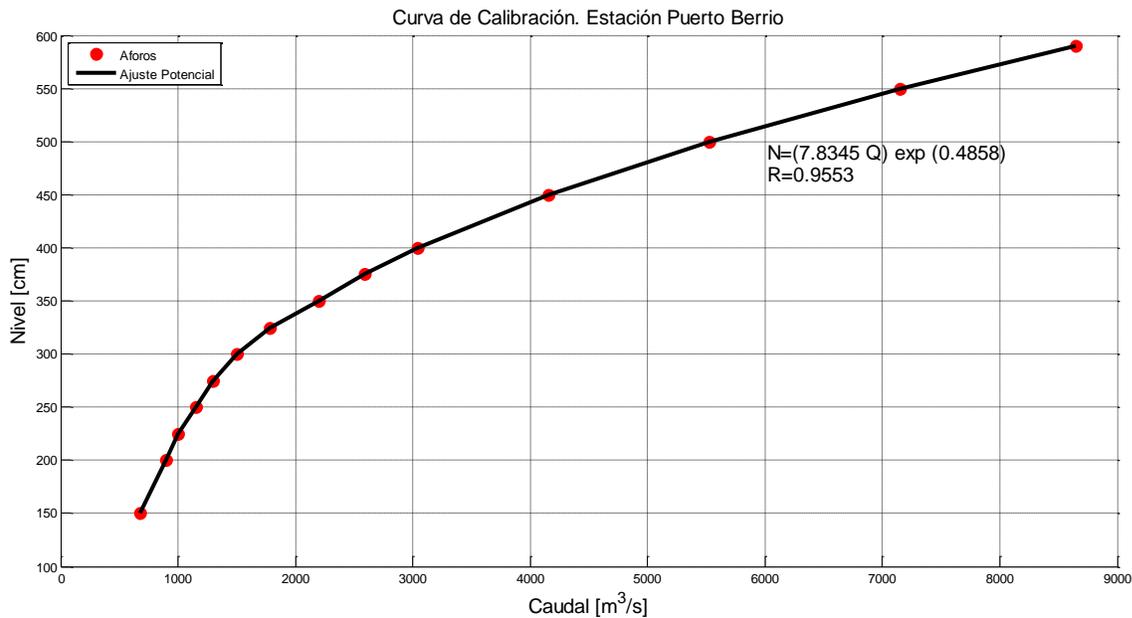
Es importante resaltar que solamente se escogió la curva de calibración, aplicando interpolación lineal entre puntos para cuantificar los caudales, en la aplicación de los

modelos de tránsito y en las simulaciones de los pronósticos. La curva de calibración de aforos o de gastos, tiene la forma de ecuación potencial ( $Q=\alpha \cdot H^m$ ), donde “ $\alpha$ ” y “ $m$ ” son constantes y “ $H$ ” es la medida del nivel del agua en la estación limnigráfica.

**Tabla 3.7 :** Datos Curvas de calibración del IDEAM estación limnigráfica de Puerto Berrío.

Dato	Nivel (cm)	Caudal (m <sup>3</sup> /s)	Dato	Nivel (cm)	Caudal (m <sup>3</sup> /s)
1	150	675	8	350	2196
2	200	900	9	375	2587
3	225	1000	10	400	3044
4	250	1150	11	450	4152
5	275	1300	12	500	5522
6	300	1500	13	550	7152
7	325	1780	14	590	8645

**Figura 3-2 :** Curva de calibración de caudales, estación limnigráfica de Puerto Berrío.

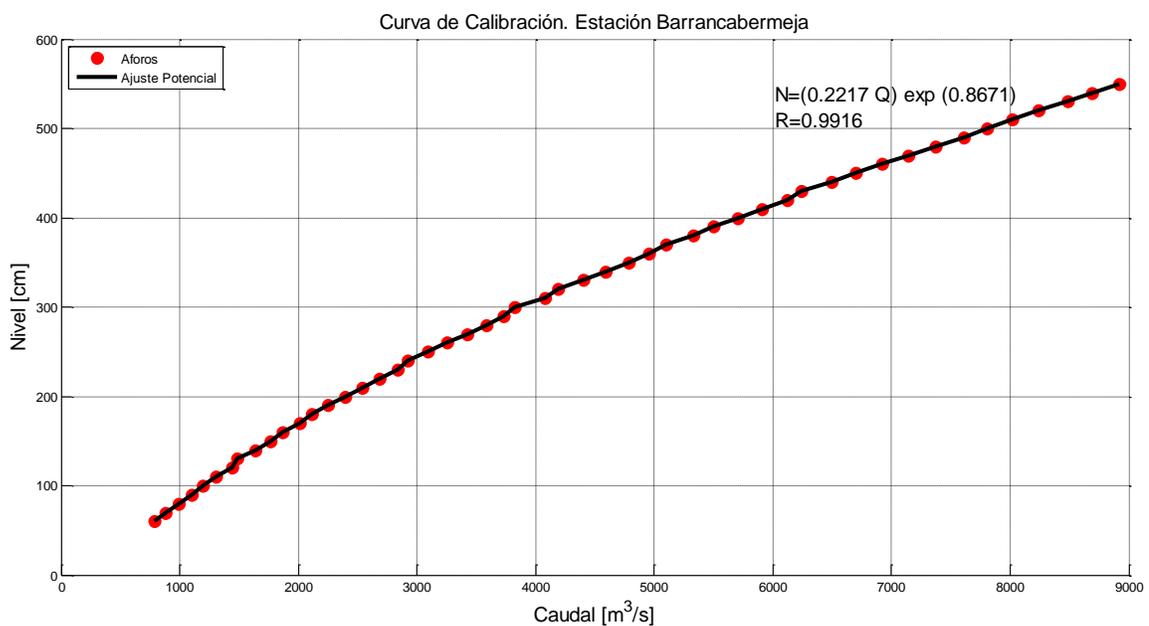


Para la estación limnigráfica de Puerto Berrío en el departamento de Antioquia, la curva de calibración se indica en la Figura 3-2, esta para el periodo de vigencia desde el año 2004 hasta la fecha del año 2011 actualmente, los datos de niveles y caudales suministrados según IDEAM ver Tabla 3.7.

- **Curva de calibración de la estación limnigráfica de Barrancabermeja**

En la Tabla 3.8, se presenta los datos obtenidos directamente de la información suministrada del IDEAM, para la realización de la curva de calibración de la estación limnigráfica de Barrancabermeja.

**Figura 3-3** : Curva de calibración de caudales de la estación limnigráfica de Barrancabermeja.



La curva de calibración de la estación limnigráfica de Barrancabermeja, sobre el río Magdalena en el departamento de Santander, se indica en la **Figura 3-3**, esta para el periodo de vigencia desde el año de 1974 hasta la fecha del año 2011 actualmente, según IDEAM ver Tabla 3.8.

**Tabla 3.8:** Relación de la curva de calibración del IDEAM estación limnigráfica de Barrancabermeja.

<b>Dato No</b>	<b>Nivel (cm)</b>	<b>Caudal (m<sup>3</sup>/s)</b>	<b>Dato No</b>	<b>Nivel (cm)</b>	<b>Caudal (m<sup>3</sup>/s)</b>
1	60	785	26	310	4.076
2	70	880	27	320	4.192
3	80	994	28	330	4.406
4	90	1.104	29	340	4.592
5	100	1.195	30	350	4.781
6	110	1.309	31	360	4.956
7	120	1.440	32	370	5.103
8	130	1.488	33	380	5.332
9	140	1.637	34	390	5.498
10	150	1.764	35	400	5.702
11	160	1.869	36	410	5.910
12	170	2.015	37	420	6.120
13	180	2.112	38	430	6.243
14	190	2.251	39	440	6.496
15	200	2.394	40	450	6.696
16	210	2.539	41	460	6.918
17	220	2.688	42	470	7.144
18	230	2.840	43	480	7.373
19	240	2.923	44	490	7.605
20	250	3.095	45	500	7.801
21	260	3.256	46	510	8.019
22	270	3.420	47	520	8.240
23	280	3.587	48	530	8.484
24	290	3.727	49	540	8.688
25	300	3.822	50	550	8.918

- **Curva de calibración de la estación limnigráfica de Puerto Araujo**

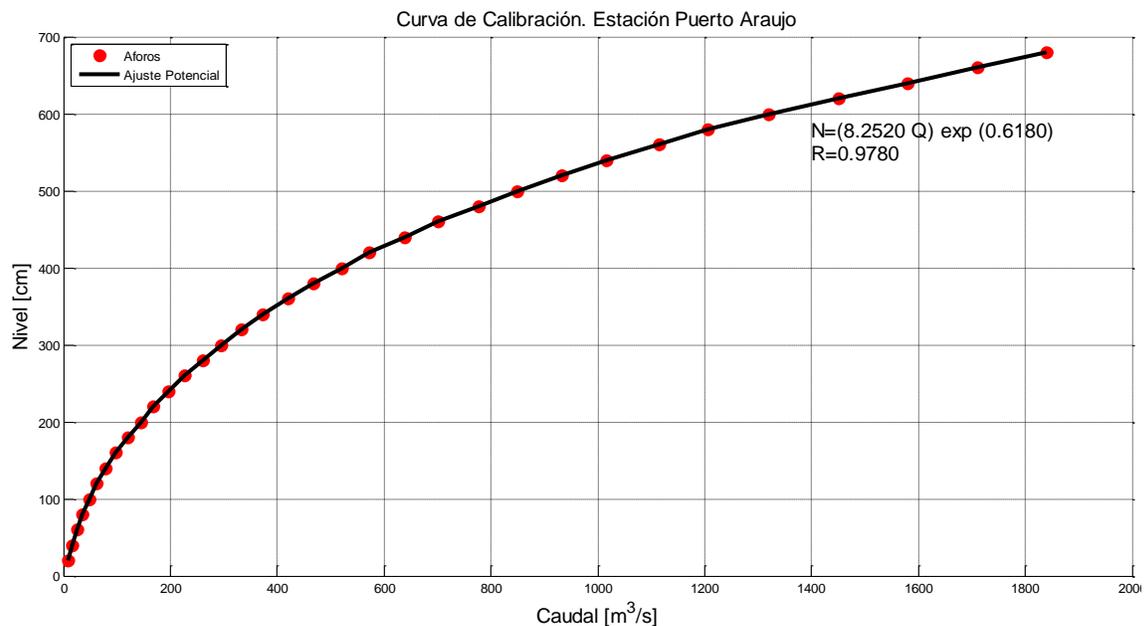
En la Tabla 3.9, se presenta los datos obtenidos directamente de la información suministrada del IDEAM, para la realización de la curva de calibración de la estación limnigráfica de Puerto Araujo ubicada sobre el río tributario de Río Carare. La Curva de calibración está a partir del primero de enero de 2008 y vigente actualmente hasta el presente año de 2011.

**Tabla 3.9:** Relación de las tablas para la realización de las Curvas de Calibración del IDEAM estación limnigráfica de Puerto Araujo.

No.	Nivel (cm)	Caudal (m <sup>3</sup> /s)	No.	Nivel (cm)	Caudal (m <sup>3</sup> /s)
1	20	8,57	16	320	332,6
2	40	16,61	17	340	372,0
3	60	25,58	18	360	420,0
4	80	35,97	19	380	467,0
5	100	47,99	20	400	520,0
6	120	61,93	21	420	573,0
7	140	78,32	22	440	639,0
8	160	97,66	23	460	702,0
9	180	120,05	24	480	777,0
10	200	144,53	25	500	850,0
11	220	167,00	26	520	932,0
12	240	197,00	27	540	1.017,0
13	260	226,00	28	560	1.115,0
14	280	260,00	29	580	1.205,0
15	300	295,00	30	600	1.320,0

La curva de calibración de la estación limnigráfica de Puerto Araujo, sobre el río Carare en el departamento de Santander, se indica en la Figura 3-4.

**Figura 3-4:** Curva de calibración de caudales de la estación limnigráfica de Puerto Araujo.



Hay otras formas para obtener la curva de gastos de las estaciones limnigráficas como es la ecuación de  $(Q=\alpha(H-H_0)^m)$ , donde “ $\alpha$ ” y “ $m$ ” son constantes, “ $H$ ” es la medida del nivel del agua en la estación limnigráfica y “ $H_0$ ” es un valor constante de nivel, para intervalos o rangos de niveles definidos, por ensayo y error. Para obtener los parámetros “ $\alpha$ ” y “ $m$ ” en la ecuación mencionada, es por medio de logaritmos.

Fue comparado los resultados de las ecuaciones potenciales del tipo de curva de calibración  $(Q=\alpha \cdot H^m)$ , respecto a la ecuación de curva de aforos  $(Q=\alpha(H-H_0)^m)$  y no se encontraron diferencias significativas de resultados en los caudales. Por lo tanto, se decidió por la primera ecuación potencial indicada, para la curva de aforos de las tres estaciones limnigráficas del proyecto y porque es este tipo de ecuación la utiliza por la entidad del IDEAM, (ver Figura 3-2, Figura 3-3 y Figura 3-4).

### 3.2.2 Ejemplo de factor de área para estimación de caudales tributarios

La diferencia de caudales horarios entre las estaciones limnigráficas de Puerto Berrio y Barrancabermeja sobre el río Magdalena, debe ser el caudal de aporte de la cuenca de estudio: debido a los afluentes tributarios principales y secundarios, así también por las incidencias de aporte y sustracción de caudales por los procesos hidrológicos inherentes sobre este tramo.

La estación Limnigráfica de Puerto Araujo en el río Carare, está ubicada a 50 kilómetros aproximadamente, antes de la desembocadura de caudales sobre el río Magdalena. En el tramo de los 50 kilómetros, está el río Guayabito del departamento de Santander, que entrega sobre el río Carare, antes de pasar por la población de Puerto Parra.

La estación limnigráfica de Puerto Araujo, por tener unos afluentes tributarios que están después de dicha estación y de la población de Puerto Parra, debe ser por lo tanto menor el caudal registrado, en comparación al caudal que entrega finalmente el río Carare sobre el cauce principal del río Magdalena.

Los caudales registrados en la estación de Puerto Araujo se deben aumentar para las simulaciones, por un **factor de 1.1669** como se explica a continuación, debido a las áreas de drenaje faltantes y que están entre la estación limnigráfica mencionada y la desembocadura del río Magdalena sobre el río Carare.

El factor de incremento de caudales es de 1.1669, para los caudales registrados en la estación de Puerto Araujo, se obtuvo por el siguiente procedimiento:

- El área total de la subcuenca del afluente del río Carare, es de 1.576.644,23 Hectáreas (ver Tabla 3.3). Las áreas aferentes entre la desembocadura del río Carare en el río Magdalena, aportan un caudal por el drenaje y que no se está registrando este caudal, en la estación limnigráfica de Puerto Araujo. Entre las

áreas faltantes está el área de la subcuenca del río San Jorge (área subcuenca 12).

- Tampoco cuantifica la estación de Puerto Araujo, las siguientes áreas obtenidas por el programa de ArcGis, como son: las áreas aferentes del río Guayabito (área subcuenca 16), el área de drenaje alrededor de la población de Puerto Parra (área subcuenca 10), el área de la subcuenca de la ciénaga El Clavo (área subcuenca 9). (ver Tabla 3.2).
- Adicionalmente por la ubicación de la estación limnigráfica de Puerto Araujo, está prácticamente a la salida o al extremo de la subcuenca 15 sobre el río Carare (ver Tabla 3.2), no contabilizando aproximadamente el 6.05% del área de la subcuenca mencionada. (ver anexo 3).
- Contabilizando las áreas que no registra la estación limnigráfica de Puerto Araujo, como se mencionó en los dos párrafos anteriores, el total de estas áreas es de 225.528,19 Hectáreas respecto al área total de la denominada subcuenca del río Carare (embalse 2), de 1.576.644,23 Hectáreas, esto significa que la estación en mención está registrando el caudal de drenaje de 1.351.116,04 hectáreas.
- *La forma planteada para poder cuantificar indirectamente los aportes de caudal de las áreas aferentes, que no se están cuantificando aguas abajo de la estación Limnigráfica de Puerto Araujo, en la subcuenca del río Carare (embalse 4), es aumentando por medio de un porcentaje o factor el caudal registrado en la estación. Este porcentaje se obtiene al dividir el área total de 1.576.644,23 Hectáreas respecto al área de 1.351.116,04 hectáreas que estaría contabilizando la estación limnigráfica de Puerto Araujo. Obteniéndose en el cálculo un **valor de 1.1669 como factor para incrementar los caudales registrados en la estación mencionada.***

### 3.3 Información básica hidrométrica y de las subcuencas en la zona de estudio

La información utilizada para el proyecto en la zona de estudio consiste en tres estaciones limnigráficas de acuerdo con el plano topológico ver Figura 3-1 y Tabla 3.1.

#### 3.3.1 Períodos de tiempo seleccionados en las tres estaciones limnigráficas

Se revisó la información de varios años de niveles horarios para las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío, Barrancabermeja y de Puerto Araujo, encontrando cinco periodos de tiempo, que coincidían por fechas en las tres estaciones mencionadas, con información apropiada.

Los periodos seleccionados para análisis de información, calibración y posterior validación, considerando los caudales tributarios del río Carare, en la zona de estudio son los siguientes:

- **Periodo 1:** marzo 1 de 2008 a mayo 23 de 2008.
- **Periodo 2:** julio 25 de 2008 a septiembre 4 de 2008.
- **Periodo 3:** octubre 11 de 2008 a noviembre 15 de 2008.
- **Periodo 4:** julio 1 de 2009 a julio 26 de 2009.
- **Periodo 5:** octubre 7 de 2009 a noviembre 28 de 2009.

A continuación, se describe el tipo de análisis realizado a la información, empleando lo siguiente:

- En cada periodo de tiempo seleccionado, se realizó un análisis estadístico conocido con el nombre BoxPlot, empleado para los datos atípicos en una serie de datos, conocido también como el diagrama de cajas. Ver en el Anexo A, las ecuaciones utilizadas para este tipo de análisis de la información.
- Para completar los datos faltantes, en las series de caudales, se realizó por medio del concepto de regresión lineal múltiple, ver el Anexo B.
- Obtención de los caudales por medio de la curva de calibración en cada una de las tres estaciones limnigráficas.
- Función de autocorrelación para los periodos de tiempo escogidos, en la serie de caudales horarios, para cada estación limnigráfica utilizada, (Ver anexo B. Ecuaciones utilizadas para el análisis preliminar de información).
- Función de Correlación cruzada para la serie de datos de caudales horarios, entre las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío y de Barrancabermeja, para los periodos de tiempo seleccionados.

En los próximos ítems se indica conceptualmente la importancia de la función de correlación y de autocorrelación en series de tiempo de caudales (hidrógrafas).

### **3.3.2 Datos atípicos de niveles horarios en cinco periodos seleccionados**

Para ubicar los datos atípicos de niveles, se empleó la herramienta gráfica estadística, conocida como Box Plot. Este fue el único análisis que se realizó sobre la consistencia de la información de los niveles horarios utilizados, debido a las tendencias de aumento o descenso de los caudales que se observan claramente en las hidrógrafas.

EL diagrama de Box Plot o conocido como diagrama de caja, se realiza para ubicar visualmente en un conjunto de datos algunos parámetros estadísticos, como la mediana,

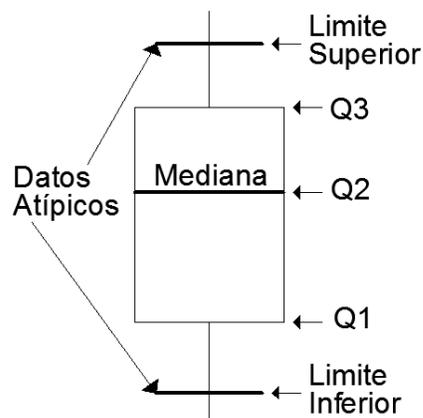
el primer y tercer cuartil, los cuales representan los límites inferiores y superiores de la caja respectivamente, en la gráfica. Ver en el Anexo B, las ecuaciones utilizadas para este tipo de análisis de la información.

Se ubica el valor máximo y mínimo para los datos atípicos de la siguiente forma, en el diagrama de Box Plot:

- Primero se calcula la diferencia entre el tercer cuartil y el primer cuartil, (recorrido intercuartílico).
- Se multiplica por el factor de 1.5 el valor hallado por el recorrido intercuartílico, sumándose este resultado al tercer cuartil (Q3), para obtener el límite superior para los datos atípicos de magnitudes altas.
- Se halla el producto de multiplicar el factor de 1.5 por el recorrido intercuartílico, restando este resultado al primer cuartil (Q1), para obtener el límite inferior para los datos atípicos de magnitudes bajas.

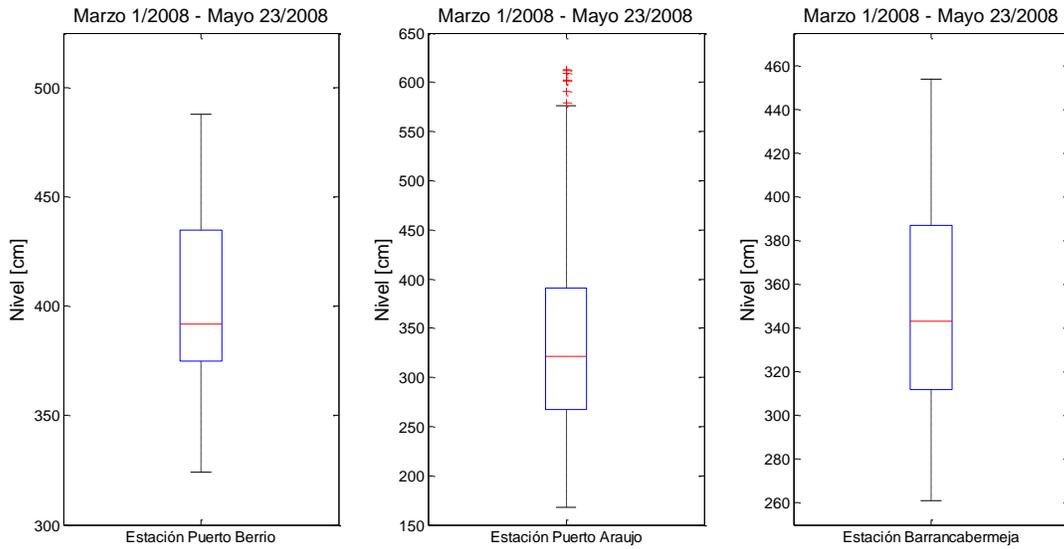
Todos los conjuntos de datos se organizan por el orden de magnitud de menor a mayor de tal forma obteniendo la mediana (Q2), el primer cuartil (Q1), el tercer cuartil (Q3), determinando también los límites máximos y mínimos para los datos atípicos, ver Figura 3-5.

**Figura 3-5:** Esquema de un diagrama Box Plot.



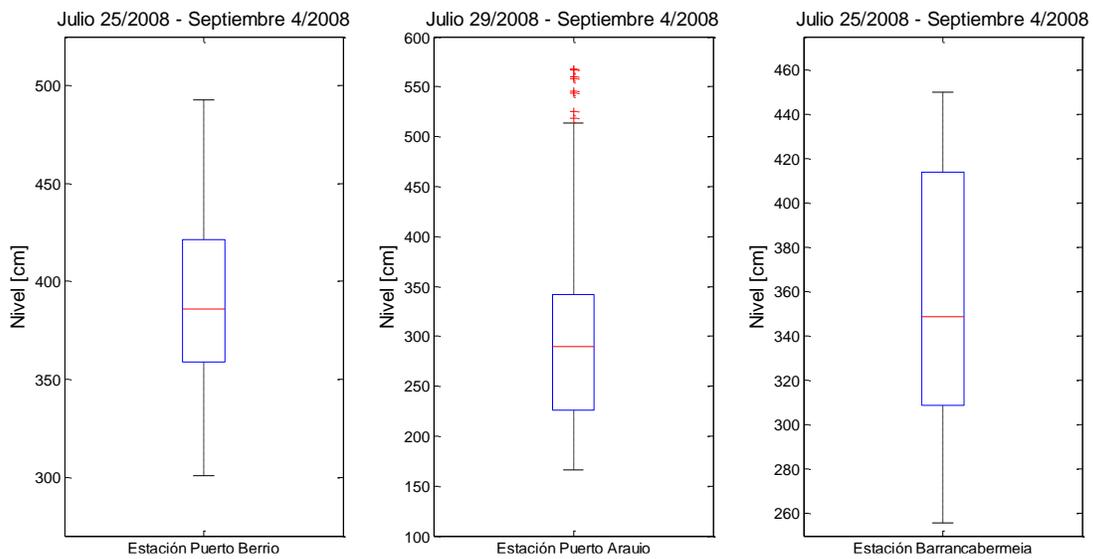
A continuación, se presentan los análisis realizados a la información de niveles registrados, en las estaciones limnigráficas de la zona de estudio, por medio de diagramas de BoxPlot, de cada uno de los cinco periodos de tiempo.

**Figura 3-6:** Diagrama BoxPlot periodo N°1. de las tres estaciones limnigráficas.



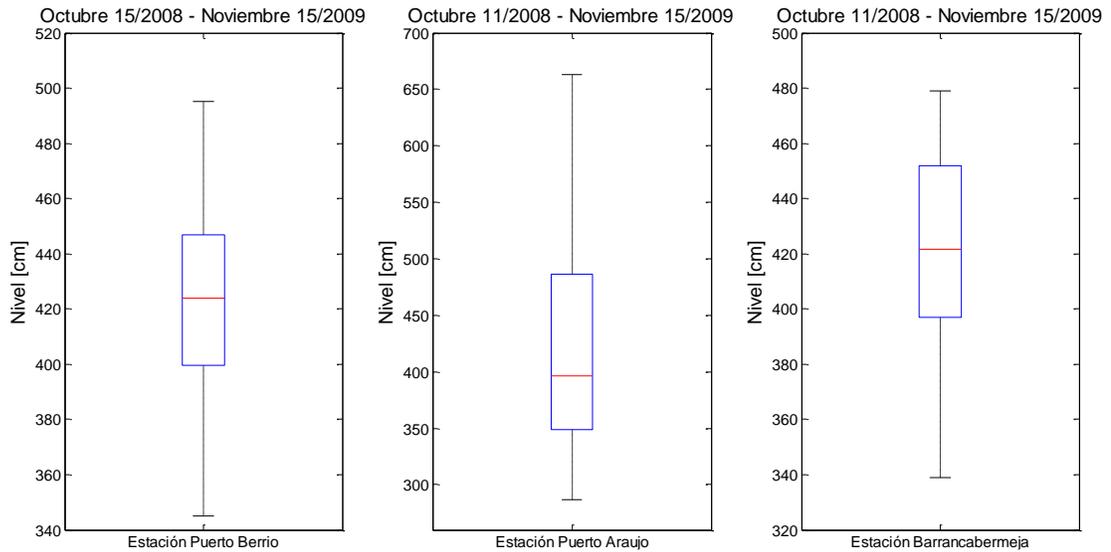
En la Figura 3 6 se presentan niveles atípicos, en la estación limnigráfica de Puerto Araujo, para el periodo 1 que representa 84 días de información. De los 2016 datos de niveles horarios registrados, son nueve los valores atípicos.

**Figura 3-7:** Diagrama BoxPlot, de las tres estaciones limnigráficas periodo 2.



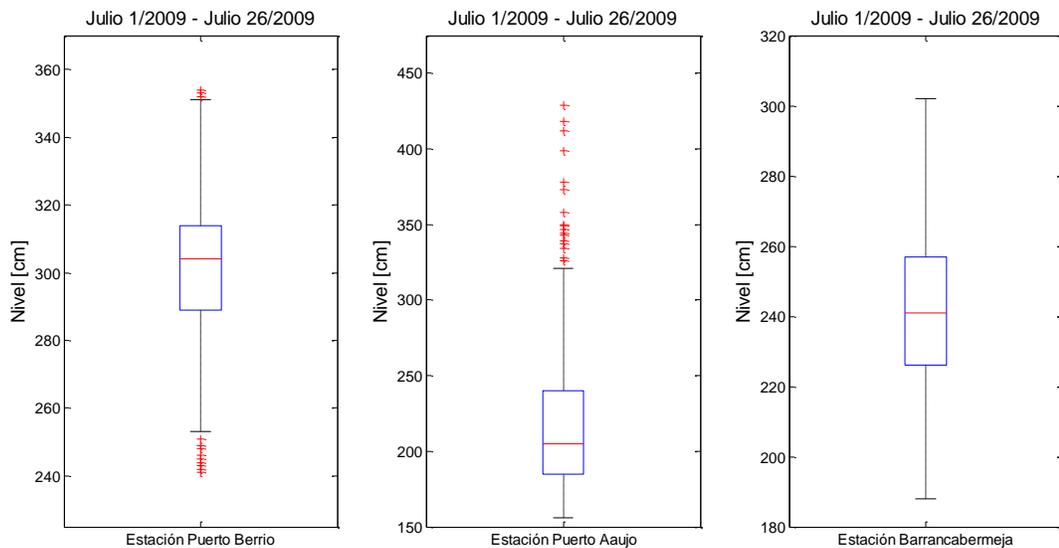
En la **Figura 3-7** se presentan niveles atípicos, en la estación limnigráfica de Puerto Araujo, para el periodo 2 que representa 38 días de información. De los 912 datos de niveles horarios registrados, son ocho los valores atípicos.

**Figura 3-8:** Diagrama BoxPlot, de las tres estaciones limnigráficas periodo 3.



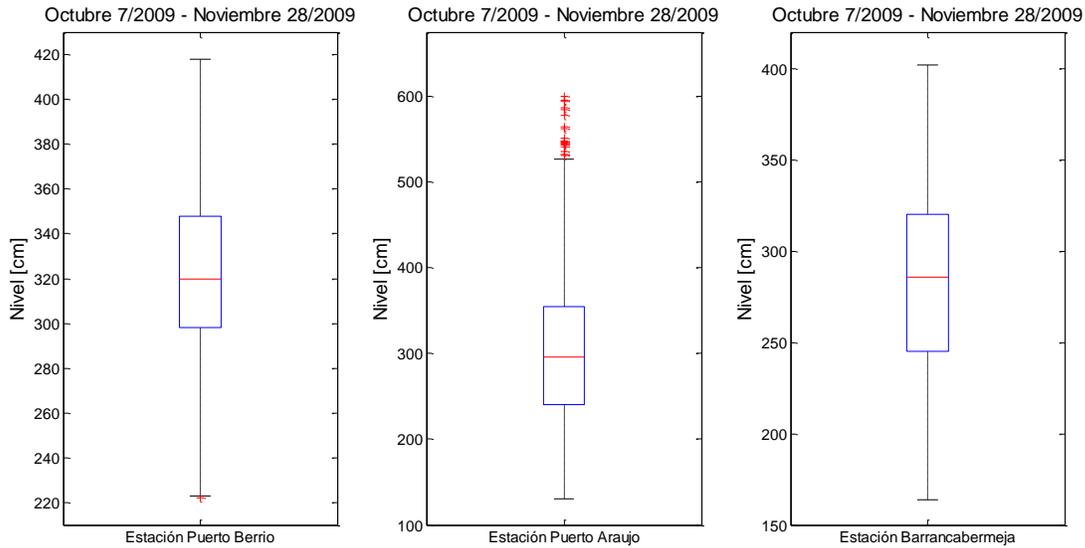
En la Figura 3-8 no se presentan niveles atípicos, en ninguna de las tres estaciones limnigráficas, para el periodo 3 que representa 36 días de información, de los 864 datos de niveles horarios registrados.

**Figura 3-9:** Diagrama BoxPlot, de las tres estaciones limnigráficas periodo 4.



En la Figura 3-9 se presentan niveles atípicos, en la estación limnigráfica de Puerto Berrío y de Puerto Araujo, para el periodo 4 que representa 26 días de información. Para los 624 datos de niveles horarios registrados, son doce los valores atípicos en la estación limnigráfica de Puerto Berrío y en la estación limnigráfica de Puerto Araujo se encontraron dieciocho datos atípicos.

**Figura 3-10:** Diagrama BoxPlot de las tres estaciones limnigráficas, periodo 5.



En la Figura 3-10 se presentan niveles atípicos, en la estación limnigráfica de Puerto Berrío y de Puerto Araujo, para el periodo 5 que representa 53 días de información. Para los 1272 datos de niveles horarios registrados, es uno solo el valor atípico en la estación limnigráfica de Puerto Berrío y en la estación limnigráfica de Puerto Araujo se encontraron veinte ocho datos atípicos.

### 3.3.3 Hidrógrafas y gráficas de la función autocorrelación para los periodos seleccionados

La función de autocorrelación mide la correlación de los datos en una serie de tiempo estadísticamente, a un determinado o diferente periodo de tiempo (C. Chapfield, 1989). Si

existe estacionalidad en la serie de tiempo, es porque los valores separados entre sí en un intervalo de tiempo constante deben estar correlacionados de alguna manera.

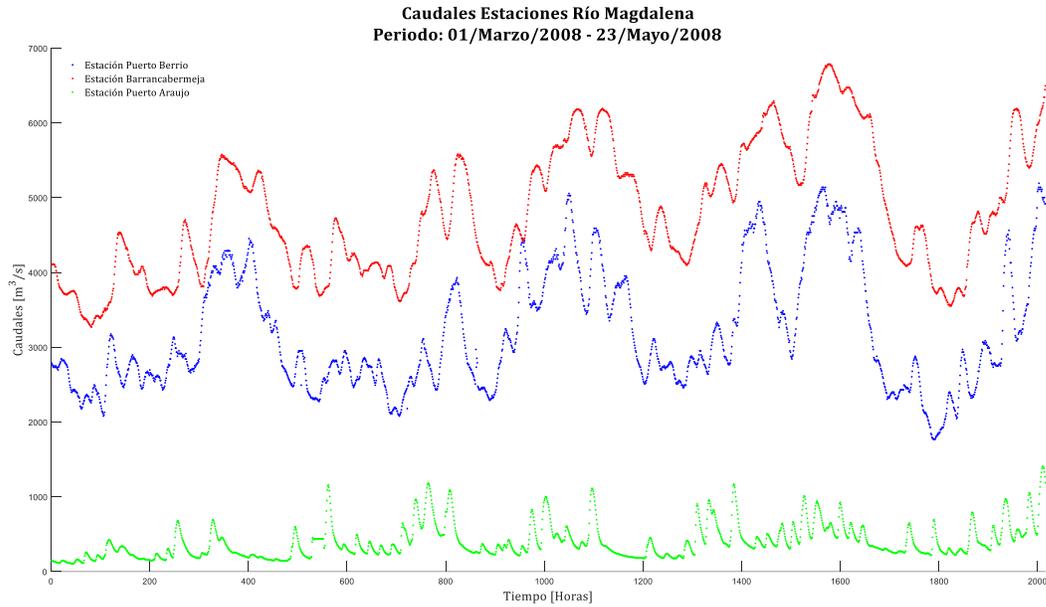
La función de autocorrelación permite establecer en una serie de tiempo, si se presenta estacionalidad o es una serie de tiempo alternante (Chatfield, 1989). Se denomina la constante de la función de autocorrelación ("p") en las gráficas y que está en el eje vertical.

Como parte del análisis de la información realizada, se revisó la magnitud de los caudales para la estación limnigráfica de Barrancabermeja, la cual debe registrar mayores caudales en comparación a los caudales de la estación limnigráfica de Puerto Berrío, como era de esperarse y se pudo comprobar en las hidrógrafas de cada uno de los cinco períodos.

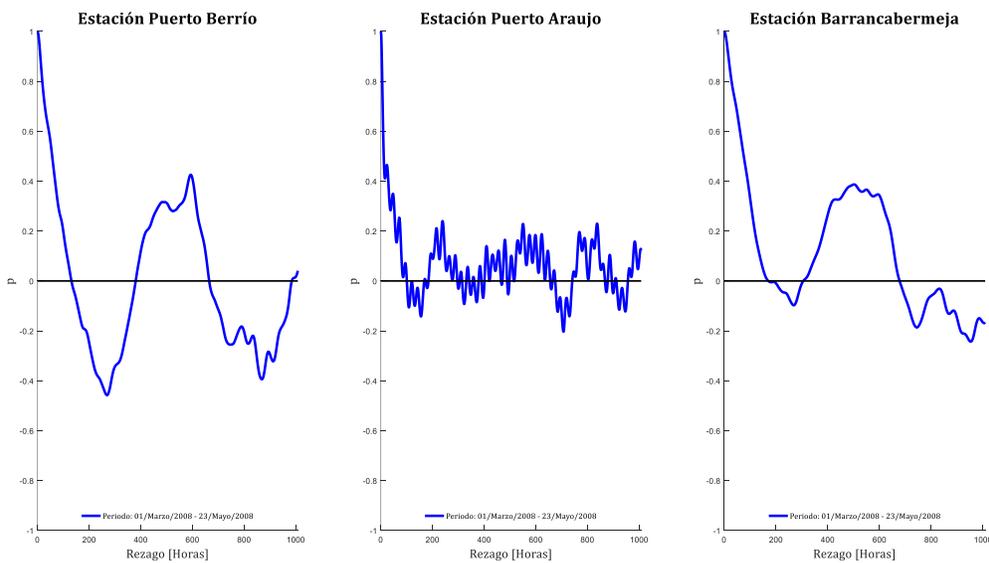
Con base en la información de las estaciones limnigráficas y de la curva de calibración, se hallaron los caudales horarios de cinco periodos de tiempo escogidos, para el desarrollo del proyecto. Se obtuvo los caudales para las hidrógrafas por medio de una interpolación lineal entre los puntos de la curva suministrada por el IDEAM.

En la Figura 3-11 se observan las hidrógrafas de las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío, Barrancabermeja y de Puerto Araujo, para el período 1 desde marzo 1 de 2008 a mayo 23 de 2008, presentando fluctuaciones en los caudales, generados seguramente por precipitaciones.

**Figura 3-11:** Hidrógrafas periodo 1 de las tres estaciones limnigráficas, zona de estudio.

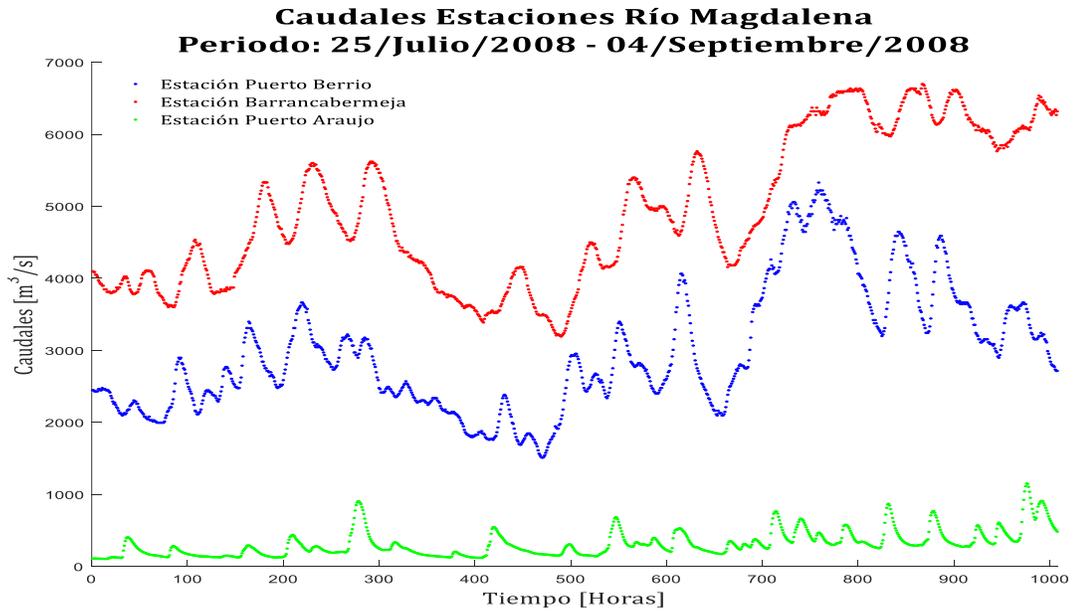


**Figura 3-12:** Función de Autocorrelación, para tres estaciones, periodo 1.



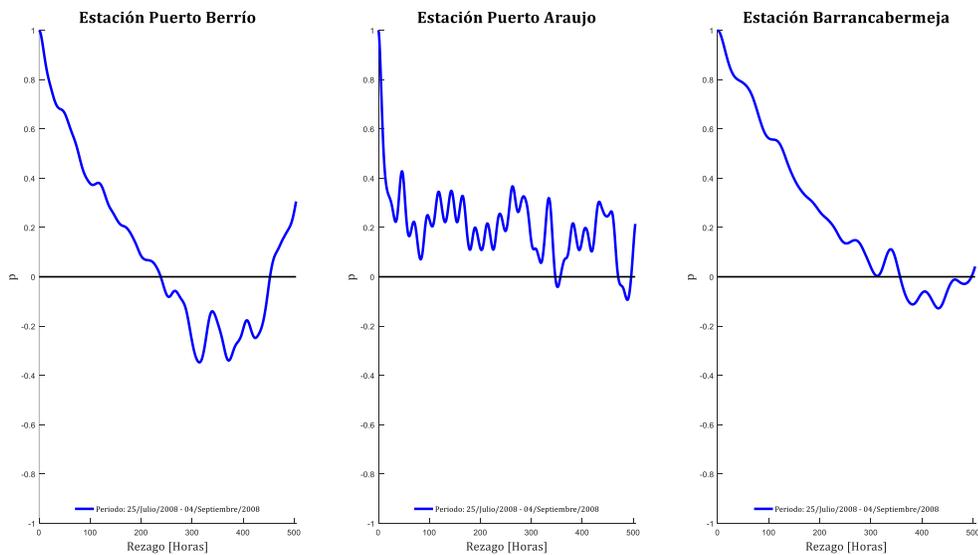
Para la Figura 3-12 se observa la gráfica de la función de autocorrelación en cada una de las estaciones limnigráficas de Puerto Berrio, Barrancabermeja y de Puerto Araujo para el período 1, presentando una tendencia de series alternantes de caudales en el tiempo.

**Figura 3-13:** Hidrógrafas periodo 2 de las tres estaciones limnigráficas zona de estudio.



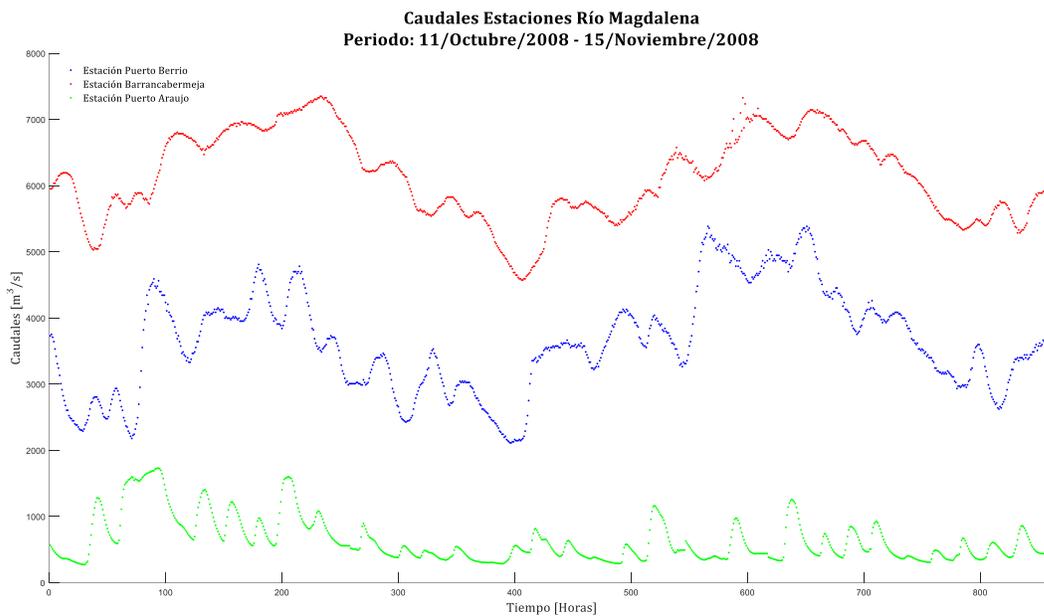
En la Figura 3-13 se observan las hidrógrafas de las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío, Barrancabermeja y de Puerto Araujo, para el período 2 desde julio 29 de 2008 a septiembre 4 de 2008, presentando fluctuaciones en los caudales, generados seguramente por precipitaciones.

**Figura 3-14:** Función de Autocorrelación, para tres estaciones, periodo 2.



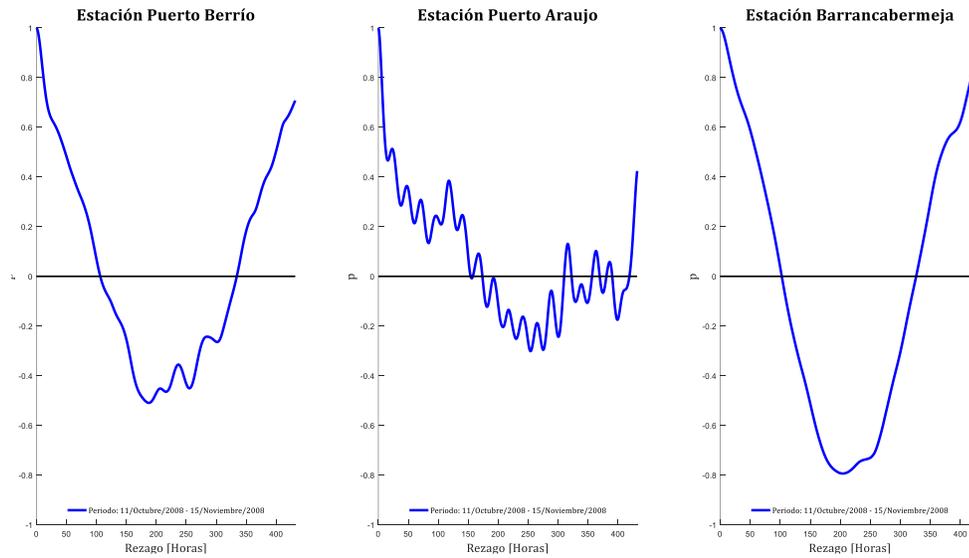
Para la Figura 3-14 se observa la gráfica de la función de autocorrelación en cada una de las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío, Barrancabermeja y de Puerto Araujo para el período 2, presentando una tendencia de series alternantes de caudales en el tiempo.

**Figura 3-15:** Hidrógrafas periodo 3 de las tres estaciones limnigráficas zona de estudio.



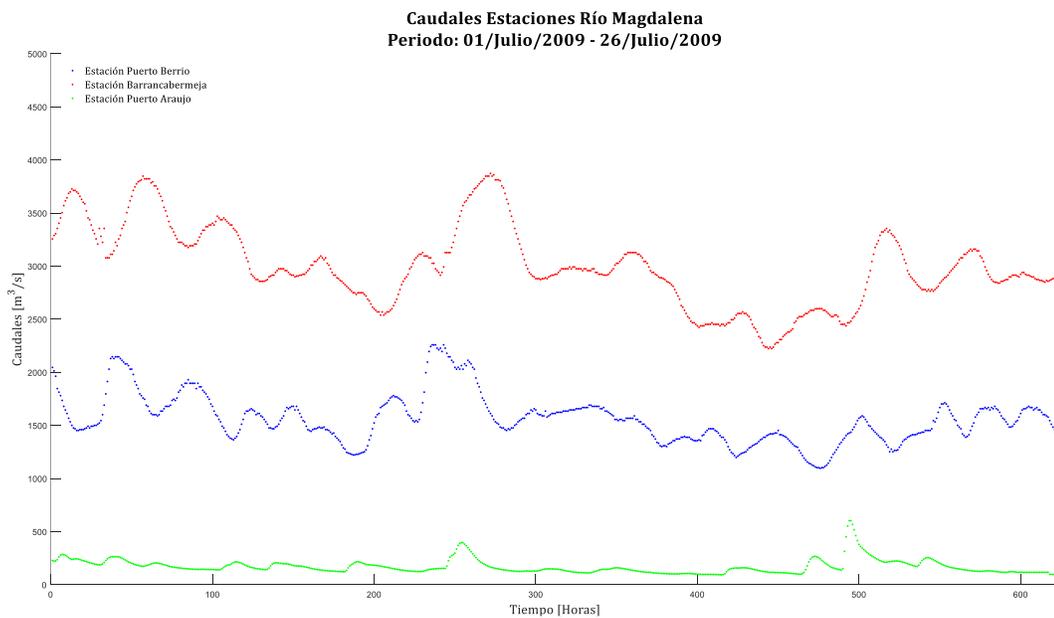
En la Figura 3-15 se observan las hidrógrafas de las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío, Barrancabermeja y de Puerto Araujo, para el período 3 desde octubre 15 de 2008 a noviembre 15 de 2008.

**Figura 3-16:** Función de Autocorrelación, para tres estaciones, periodo 3.



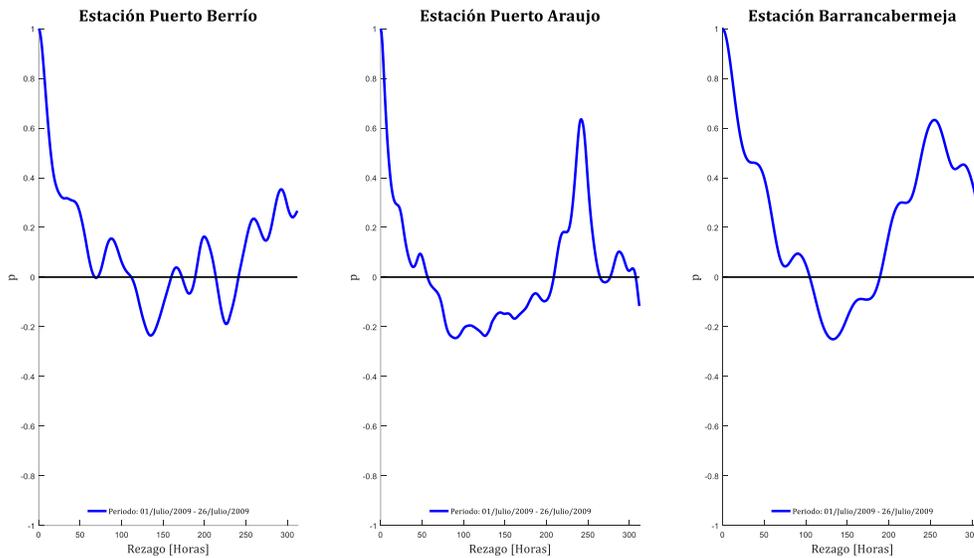
En la Figura 3-16 se observa la gráfica de la función de autocorrelación en las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío, Barrancabermeja y de Puerto Araujo para el periodo 3, presentando una tendencia de series alternantes de caudales en el tiempo.

**Figura 3-17:** Hidrógrafas periodo 4 de las tres estaciones limnigráficas zona de estudio.



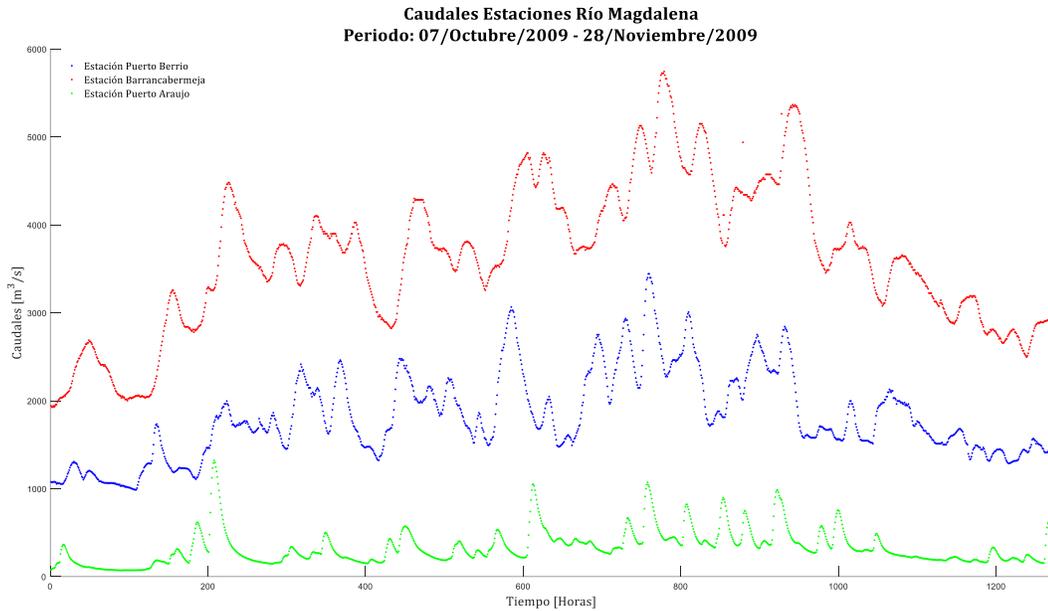
En la Figura 3-17 se observan las hidrógrafas de las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío, Barrancabermeja y de Puerto Araujo, para el período 4 desde Julio 1 de 2009 a Julio 26 de 2009.

**Figura 3-18:** Función de Autocorrelación, para tres estaciones, periodo 4.



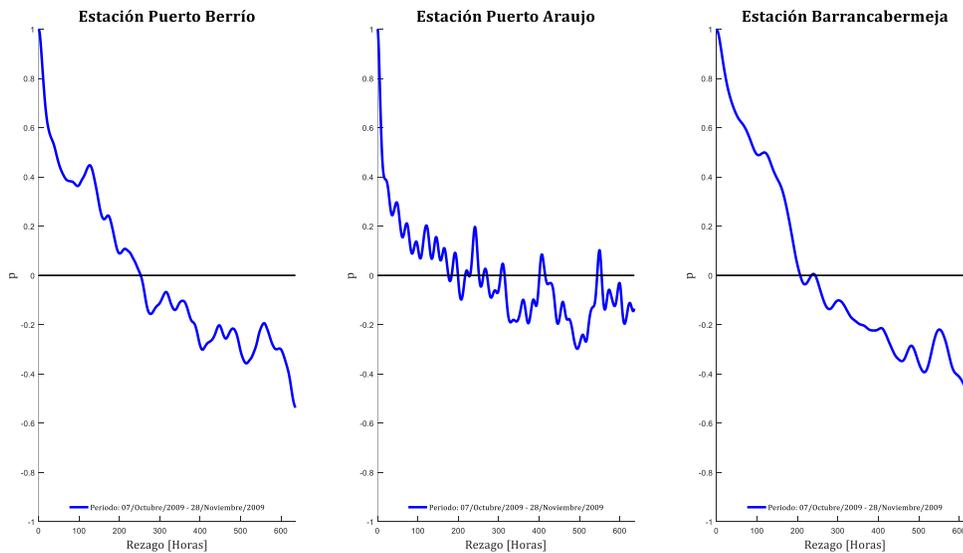
Para la Figura 3-18 se observa la gráfica de la función de autocorrelación en cada una de las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío, Barrancabermeja y de Puerto Araujo para el período 4, presentando una tendencia de series alternantes de caudales en el tiempo.

**Figura 3-19:** Hidrógrafas periodo 5 de las tres estaciones limnigráficas zona de estudio.



En la Figura 3-19 se observan las hidrógrafas de las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío, Barrancabermeja y de Puerto Araujo, para el período 5 desde octubre 7 de 2009 a noviembre 28 de 2009.

**Figura 3-20:** Función de Autocorrelación, para tres estaciones, periodo N°5.



Para la Figura 3-20 se observa la gráfica de la función de autocorrelación en las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío y de Barrancabermeja para el período 5, presentando una tendencia de series no alternantes de caudales en el tiempo (no estacionaria). En la estación limnigráfica de Puerto Araujo se presenta una tendencia de serie alternante de caudales.

### **3.3.4 Gráficas función correlación cruzada para los periodos seleccionados**

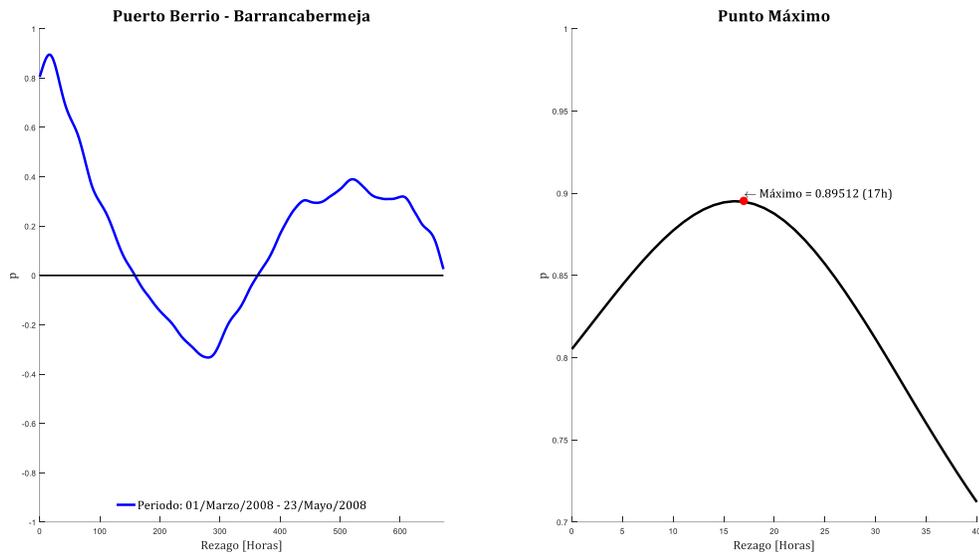
Cuando el coeficiente de correlación de dos variables es igual a cero es porque son totalmente independientes entre sí (Kottegoda y Rosso, 1997).

El coeficiente de correlación busca una asociación entre dos variables, no una relación causa-efecto. En algunos casos hay razones claras para la dependencia de las variables, como es en el caso de la precipitación y de la escorrentía (Kottegoda y Rosso, 1997).

También es posible encontrar, por ejemplo, que dos variables estén correlacionadas, ya que se asocian con una tercera variable, y no porque haya una relación física entre las dos primeras variables (Kottegoda y Rosso, 1997).

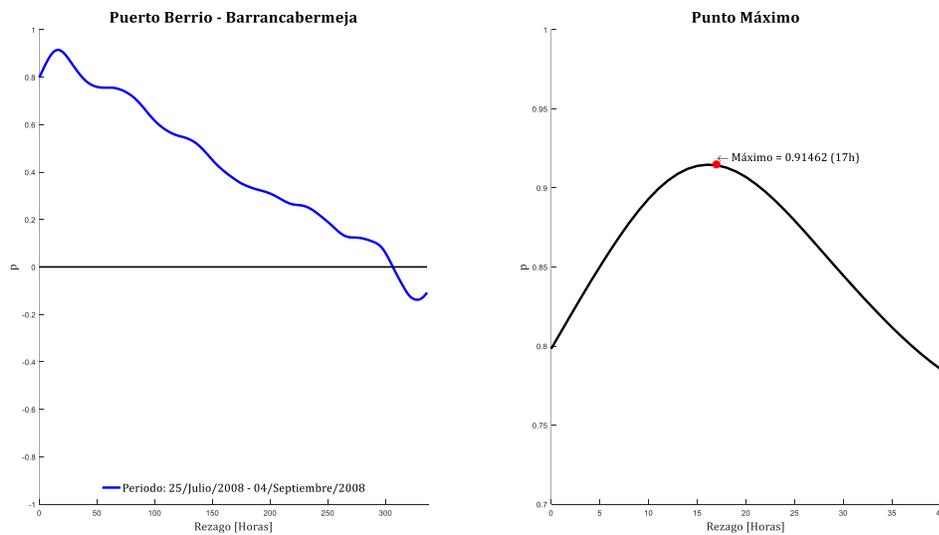
La función de correlación cruzada es una relación estadística entre los registros de caudales de los picos y valles en el tiempo en los hidrogramas (Chatfield, 1989). Siendo representado generalmente esta relación estadística para las hidrógrafas como: “el tiempo de tránsito (“tiempo de viaje”) de los caudales, entre dos estaciones limnigráficas, para aquel tiempo transcurrido hasta el primer pico de la función del correlograma”.

**Figura 3-21:** Función de correlación cruzada, Periodo 1.



En la Figura 3-21 se presenta la función estadística de una correlación cruzada para las hidrógrafas de las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío y de Barrancabermeja del periodo 1, con un valor del coeficiente de correlación de 0,895 y un tiempo de tránsito de 16 horas entre estaciones.

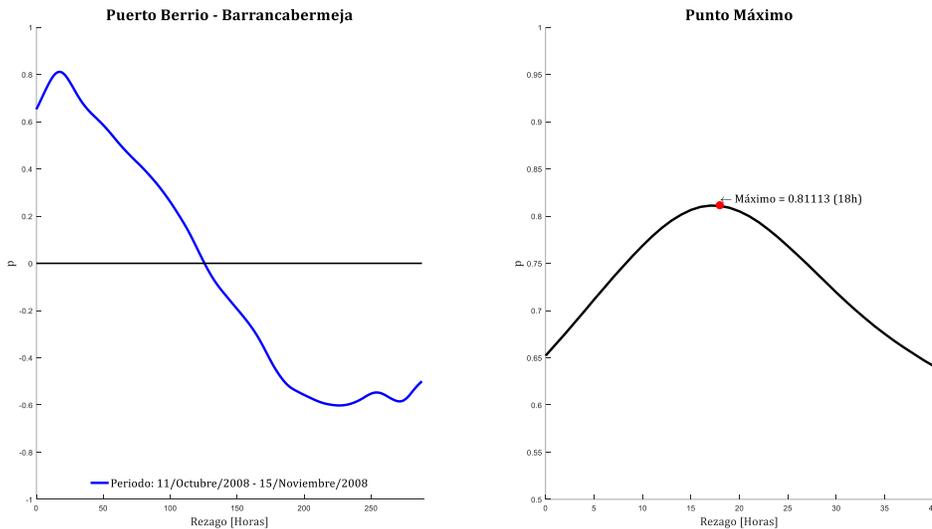
**Figura 3-22:** Función de correlación cruzada, periodo 2.



En la Figura 3-22 se presenta la función estadística de una correlación cruzada para las hidrógrafas de las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío y de Barrancabermeja del

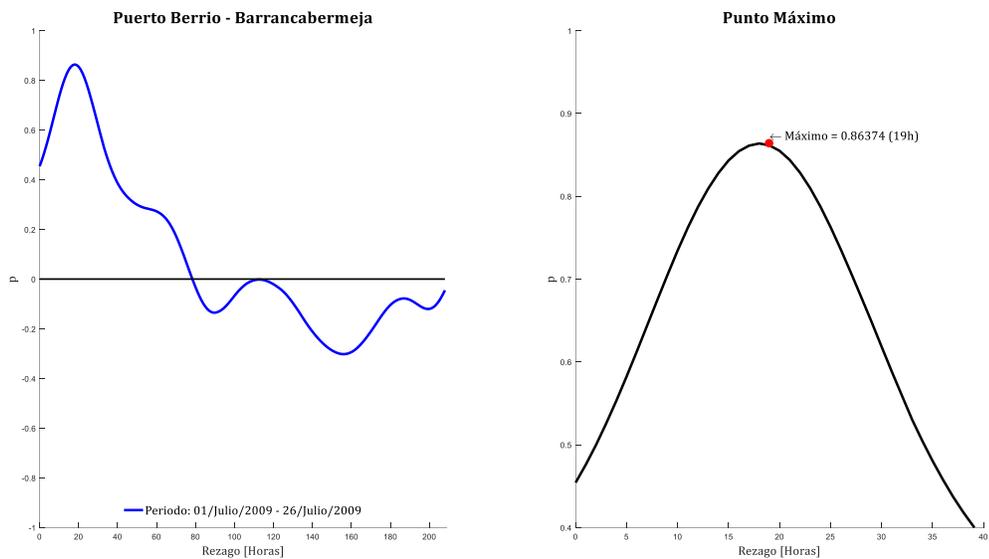
periodo 2, con un valor del coeficiente de correlación de 0,914 y un tiempo de tránsito de 16 horas entre estaciones.

**Figura 3-23:** Función de correlación cruzada, periodo 3.



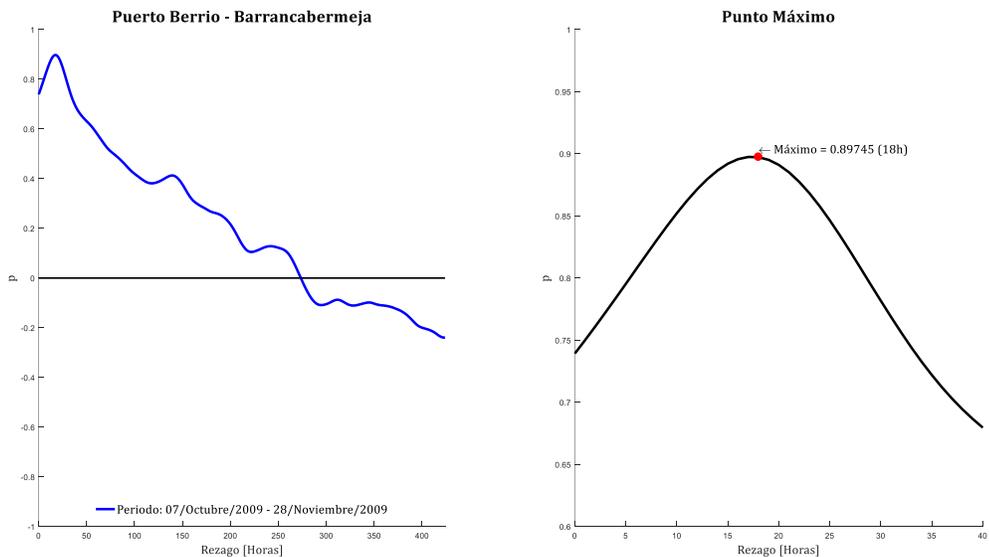
En la Figura 3-23 se presenta la función estadística de una correlación cruzada para las hidrógrafas de las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío y de Barrancabermeja del periodo 3, con un valor del coeficiente de correlación de 0,811 y un tiempo de tránsito de 17 horas entre estaciones.

**Figura 3-24:** Función de correlación cruzada, periodo 4.



En la Figura 3-24 se presenta la función estadística de una correlación cruzada para las hidrógrafas de las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío y de Barrancabermeja del periodo 4, con un valor del coeficiente de correlación de 0,863 y un tiempo de tránsito de 18 horas entre estaciones.

**Figura 3-25:** Función de correlación cruzada, periodo 5.



En la Figura 3-25 se presenta la función estadística de una correlación cruzada para las hidrógrafas de las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío y de Barrancabermeja del periodo 5, con un valor del coeficiente de correlación de 0,897 y un tiempo de tránsito de 17 horas entre estaciones.

### 3.3.5 Resumen de los resultados y análisis de la información hidrométrica de los periodos seleccionados

A continuación, se presentan en tablas los resúmenes de las características más importantes de la información hidrométrica de los cinco periodos seleccionados.

**Tabla 3.10;** Resumen de los datos atípicos de niveles horarios y de la función del autocorrelograma para 5 periodos seleccionados en la estación limnigráfica de Pto. Berrío

Periodos	Datos Atípicos (Boxplot)	Nivel Máximo (cm)	Nivel Mínimo (cm)	Caudal Máximo (m <sup>3</sup> /s)	Caudal Mínimo (m <sup>3</sup> /s)	Auto correlograma
1.Marzo-1-2008 a Mayo-23-2008	No	502	256	5.587,2	1.186,0	(T.S.A)
2.Jul-29-2008 a Sept-4-2008	No	493	301	5.330,2	1.511,2	(T.S.A)
3.Oct-15-2008 a Novie-15-2008	No	562	265	7.599,9	1.240,0	(T.S.A)
4. Jul-1-2009 a Jul-26-2009	Si	354	241	2.258,6	1.096,0	(T.S.A)
5. Oct-7-2009 a Novie-28-2009	Si	418	222	3.442,9	988,0	(T.S.N.E)
T.S.N.E = Tendencia de Serie de caudales No Estacionaria						
T.S.A = Tendencia de la Serie de caudales alternante.						

**Tabla 3.11:** Resumen de los datos atípicos de niveles horarios y de la función del autocorrelograma para 5 periodos seleccionados en la estación limnigráfica de Barrancabermeja.

Periodos	Datos Atípicos (Boxplot)	Nivel Máximo (cm)	Nivel Mínimo (cm)	Caudal Máximo (m <sup>3</sup> /s)	Caudal Mínimo (m <sup>3</sup> /s)	Auto correlograma
1.Mar-1-2008 a Mayo-23-2008	No	462	173	6.963,2	2.044,1	(T.S.A)
2.Jul-29-2008 a Sept-4-2008	No	450	256	6.696,0	3.191,6	(T.S.A)
3.Oct-15-2008 a Novie-15-2008	No	537	237	8.626,8	2898.1	(T.S.A)
4. Jul-1-2009 a Jul-26-2009	No	302	188	3.872,8	2.223,2	(T.S.A)
5. Oct-7-2009 a Nov-28-2009	No	402	164	5.743,6	1.927,4	(T.S.N.E)
<b>TSNE</b> = Tendencia de Serie de caudales No Estacionaria						
<b>T.S.A</b> =Tendencia de la Serie de caudales alternante.						

**Tabla 3.12:** Resumen de los datos atípicos de niveles horarios y de la función del autocorrelograma para 5 periodos seleccionados en la estación limnigráfica de Puerto Araujo.

Periodos	Datos Atípicos (Boxplot)	Nivel Máximo (cm)	Nivel Mínimo (cm)	Caudal Máximo (m <sup>3</sup> /s)	Caudal Mínimo (m <sup>3</sup> /s)	Auto correlograma
1.Mar-1-2008 a Mayo-23-2008	Si	613	168	1.404,5	106,6	(T.S.A)
2.Jul-29-2008 a Sept-4-2008	Si	568	166	1.151,0	104,34	(T.S.A)
3.Oct-15-2008 a Noviem-15- 2008	No	663	287	1.729,5	272,25	(T.S.A)
4.Jul-1-2009 a Jul-26-2009	Si	429	156	602,7	93,8	(T.S.A)
5. Oct-7-2009 a Nov-28-2009	Si	600	131	1.320,0	70,9	(T.S.A)
<b>T.S.N.E</b> = Tendencia de Serie de caudales No Estacionaria						
<b>T.S.A</b> = Tendencia de la Serie de caudales alternante.						

Las tablas Tabla 3.10, Tabla 3.11 y Tabla 3.12 indica los resultados generales de los cinco periodos seleccionados, con datos faltantes de las estaciones limnigráficas de Puerto Berrio, Barrancabermeja y de Puerto Araujo respectivamente. Las tablas mencionadas están basadas en los resultados gráficos indicados en las secciones o ítems anteriores del documento 3.3.2 y 3.3.3.

De las tres últimas tablas (Tabla 3.10, Tabla 3.11 y Tabla 3.12) se puede considerar que la estación limnigráfica de Puerto Araujo es la que presenta más datos atípicos en cuatro de los cinco periodos seleccionados, por medio de la metodología estadística de Boxplot. En la estación de Puerto Berrío presenta dos periodos con datos atípicos de cinco periodos y por último la estación de Barrancabermeja no tiene datos atípicos en ninguno de los cinco periodos.

La estación de Barrancabermeja tiene los datos de niveles horarios homogéneos, según metodología estadística de Boxplot. En cuanto a la estación limnigráfica de Puerto Berrío presenta más periodos con datos atípicos (menos homogéneo). Se menciona nuevamente que, para completar los datos faltantes, en las series de caudales, se realizó por medio de una regresión lineal múltiple.

Respecto a los resultados de la función de autocorrelación (Tabla 3.10, Tabla 3.11 y Tabla 3.12) y las figuras correspondientes en el ítem 3.3.3 se tiene que en los cuatro primeros periodos de tiempo seleccionados, presenta una tendencia en la serie de caudales alternante (T.S.A), lo cual es característico, si se considera los intervalos de invierno o verano en el clima.

Para el quinto y último periodo de 7 de octubre de 2009 a noviembre 28 de 2009, es el único periodo con los resultados de la función de autocorrelación que presenta, una tendencia de serie de caudales no estacionaria (TSNE), para las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío y de Barrancabermeja. Para este mismo periodo en la estación limnigráfica de Puerto Araujo se presenta una tendencia de serie alternante de caudales (TSE).

Una forma de explicar estadísticamente la función de autocorrelación es por medio del siguiente concepto: “si una serie de tiempo tiene una tendencia a alternar con las observaciones sucesivas en diferentes lados de la media estadística en general, el autocorrelograma también tienden a alternar (C. Chapfield, 1988). De otra forma las gráficas de autocorrelación en las hidrógrafas de las estaciones en cuatro periodos, se observa que cruza varias veces por encima y por debajo de la gráfica cuando es cero el coeficiente de correlación”.

Los resultados presentados en la siguiente Tabla 3.13, son importantes para el desarrollo del proyecto, porque se obtiene estadísticamente el tiempo de tránsito o de viaje de los caudales, entre las estaciones de Puerto Berrío y Barrancabermeja, por medio de la función de correlación cruzada. Esto es debido a la dependencia hidrológica inherente de la información hidrométrica, registrada en las dos estaciones limnigráficas de Puerto Berrío y Barrancabermeja, también por su proximidad y que se encuentran en el mismo cauce del río Magdalena.

**Tabla 3.13:** Resultados de la función de correlación cruzada entre las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío y Barrancabermeja, en cinco periodos seleccionados

<b>Periodos</b>	<b>Correlograma (Tiempo de tránsito entre estaciones)</b>	<b>Valor Coeficiente de Correlación</b>
<b>1.Ene-1-2008 a Mayo-26-2008</b>	16 horas	0,895
<b>2.Jun-11-2008 a Sept-4-2008</b>	16 horas	0,914
<b>3.Sept-10-2008 a Ene-1- 2009</b>	17 horas	0,811
<b>4. Jul-1-2009 a Jul-26-2009</b>	18 horas	0,863
<b>5. Oct-7-2009 a Nov-28-2009</b>	17 horas	0,897

Los resultados de la Tabla 3.13 se puede verificar al observar en las hidrógrafas generalmente cualquier pico de caudal de una creciente, en la estación limnigráfica de Puerto Berrío, se presenta desplazado este pico a unas horas posteriores, aguas abajo en la estación limnigráfica de Barrancabermeja, con mayor caudal. Este tiempo de los picos de las crecientes observado y desplazado en las hidrógrafas de los periodos, está alrededor de 16 y 18 horas, como lo comprueba los resultados de la función de correlación cruzada entre la hidrógrafa de la estación de Puerto Berrío y de Barrancabermeja.

Los resultados del tiempo de viaje de caudales entre las estaciones limnigráficas, es fundamental en el proceso de calibración de los tránsitos del próximo Capítulo 4. Calibración y validación: modelos de tránsito de crecientes agregados y la posterior implementación del filtro Kalman en el Capítulo 5 modelación: Pronóstico con Filtro Kalman (KF).

## **4. Capítulo 4. Calibración y validación: modelos de tránsito de crecientes agregados**

En el presente capítulo se presentan los resultados de la calibración de los modelos de tránsito planteados del Capítulo 2 y con base en la información del Capítulo 3.

Se realizó la calibración de los parámetros, apoyado por el programa “Monte-Carlo Analysis Tool” conocido como (MCAT- V2), este programa está en el lenguaje computacional del software Matlab, mediante la función objetivo de Nash-Sutcliffe.

El criterio de la función objetivo de Nash- Sutcliffe, se escogió por su amplia utilización para caudales. Fueron realizadas 2000 simulaciones en cada uno de los rangos establecidos para los parámetros de los modelos de tránsito propuestos.

La calibración de los modelos se hizo con el (75%) de la serie de caudales y el (25%) de la serie restante se utilizó para validar la calibración, en cada uno de los cinco períodos seleccionados. En los dos últimos ítems del presente capítulo se presentan los análisis de la calibración y validación de los modelos de tránsito propuestos.

### **4.1 Descripción general del programa MCAT-V2.0**

La ecuación o función objetivo de Nash-Sutcliffe es un coeficiente de eficiencia, que se expresa de la siguiente forma:

$$R2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^t (Q_i^t - Q_{simu}^t)^2}{\sum_{i=1}^t (Q_i^t - \bar{Q}_{simu})^2} \quad (4.1)$$

Donde:

$Q_i^t$  = Es el caudal observado o medido ( $m^3/s$ ), representado directamente de la hidrógrafa, para cada instante de tiempo ( $t$ ).

$Q_{simu}^t$  = Es el caudal simulado ( $m^3/s$ ), por el modelo de tránsito ejecutado.

$\bar{Q}_{simu}$  = Es la media ó promedio de los caudales simulados ( $m^3/s$ ).

$R2$  = Coeficiente de eficiencia (adimensional).

Se utilizó el programa MCAT-V2, con la función objetivo de Nash-Sutcliffe. El mejor valor de la función objetivo ( $R2$ ) cuando es uno, o cercano a este valor, encontrando de esta forma los valores óptimos de los parámetros de calibración, en ese caso se tendría una situación de ajuste del 100% para realizar las simulaciones

En términos generales la función objetivo lo que busca es minimizar, el proceso de calibración en los modelos. Por esta circunstancia se tomó para el proyecto como referencia el resultado de restar uno menos el valor de la función ( $R2$ ) es decir ( $1-R2$ ), el cual debería tender al valor de cero ideal en la calibración.

En el presente trabajo de estudio, cuando el coeficiente de eficiencia corresponde a un valor menor de cero ( $R2 < 0$ ), indica que, el parámetro a calibrar ( $K$ ), no presenta ningún ajuste a los datos de caudales medidos, respecto a los caudales simulados en los tránsitos según el modelo usado.

El parámetro por calibrar es ( $K$ ) ver ecuación 2.2, en cada uno de los cuatro embales propuestos en la zona de estudio, para los tres modelos de transito lineales desarrollados. Mencionando nuevamente el parámetro ( $K$ ) tiene unidades de tiempo, generalmente se relaciona como el tiempo de viaje o de tránsito a lo largo del tramo en él cauce, también

se considera que es un coeficiente para el almacenamiento (Ponce, 1989). A continuación, se explica las gráficas de dispersión y de análisis de sensibilidad, suministradas por MCAT-V2.

#### **4.1.1 Gráfica de dispersión en el espacio paramétrico VS función objetivo**

La gráfica de espacio paramétrico VS función objetivo es una gráfica que realiza el programa MCAT-V2. Siendo una gráfica que representa la dispersión de los valores de los parámetros a calibrar en el modelo representado, resaltando la mejor combinación en los valores de estos parámetros en la gráfica, por medio de un punto que resalta por su color rojo, ejemplo ver Figura 4-1. Indica gráficamente también todos los valores de los parámetros utilizados en la calibración, respecto al valor de la función objetivo, según el modelo empleado y de acuerdo con el número de simulaciones a realizar.

Entendiéndose el termino de mejor combinación de la función objetivo de Nash-Sutcliffe, en la calibración del parámetro (K) para el proyecto, con un valor mínimo de error (1-R2), según el número de simulaciones realizadas.

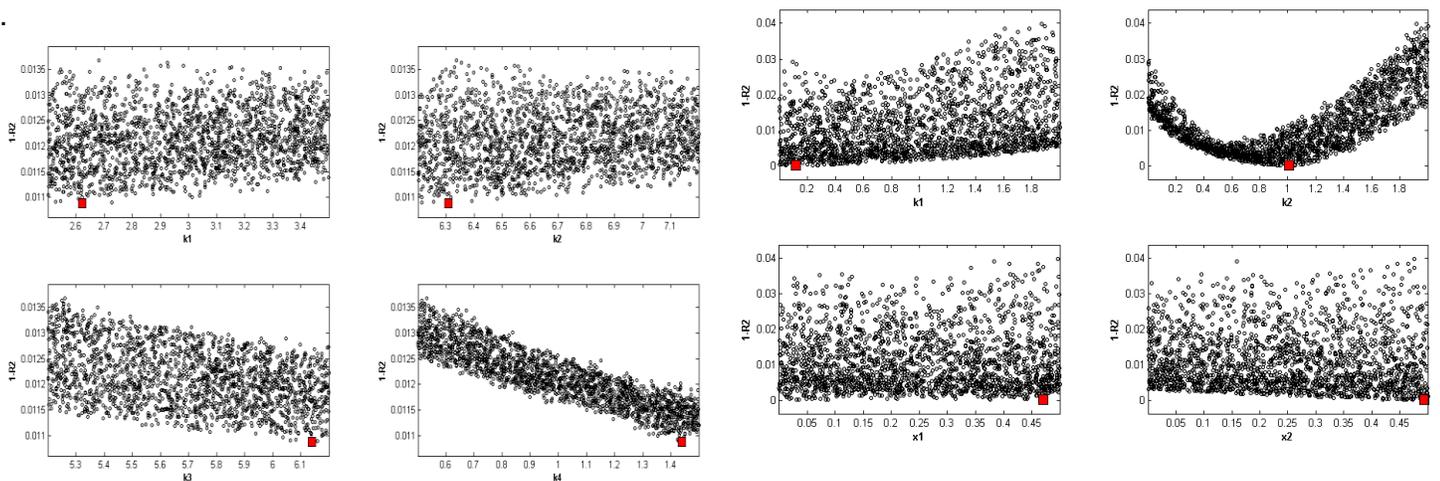
Para cada una de las simulaciones, se escoge valores aleatorios del parámetro a calibrar, por el método de Monte Carlo en un rango establecido por el usuario, los reemplaza luego en el modelo desarrollado, obteniendo el resultado del error de la función objetivo (1-R2). Luego toma otros valores aleatorios de los parámetros a calibrar, calculando nuevamente la función objetivo y así sucesivamente hasta el igual número de simulaciones planteadas, obsérvese que los valores de la función objetivo es buscar que tienda a cero, punto en el cual resalta por su color rojo, ver Figura 4-1.

El programa MCAT-V2.0 por defecto arroja los 10 mejores resultados de la función objetivo y de los parámetros a calibrar, sobre el total de las simulaciones realizadas.

**Figura 4-1:** Ejemplos de gráficas de espacio paramétrico versus función objetivo, de una calibración por el programa MCAT, en dos modelos diferentes.

**Gráfica izquierda espacio paramétrico VS función objetivo**

**Gráfica derecha espacio paramétrico VS función objetivo**



En la Figura 4-1 se observa a manera de ejemplo en la gráfica izquierda, que los tres primeros parámetros ( $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$ ) a calibrar, tienen una alta dispersión, porque no es fácil de identificar el valor mínimo de la función objetivo directamente de la gráfica. Sin embargo, el valor del parámetro ( $K_4$ ) a calibrar, presenta una tendencia mejor para encontrar gráficamente el valor mínimo de la función objetivo.

En la gráfica derecha de la Figura 4-1, el parámetro que tiene mejor sensibilidad para la calibración es el segundo parámetro ( $K_2$ ), el cual es relativamente fácil de identificar, caso que no sucede con los otros tres parámetros ( $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$ ) a calibrar por su dispersión, al observar la gráfica mencionada.

Cuando los parámetros de calibración de un modelo no son plenamente identificables o poco sensibles para calibrar en las simulaciones, en estos casos no se observa una tendencia clara de punto mínimo, en la gráfica de dispersión de la función objetivo ( $1-R_2$ ). Por lo tanto, se dice que los parámetros de calibración en el modelo no son plenamente identificables.

### **4.1.2 Gráfica de análisis de sensibilidad paramétrica o regional**

Un método para evaluar la sensibilidad de los parámetros en el modelo a calibrar es por medio de distribuciones de frecuencia acumuladas y que es utilizado en el programa de MCAT-V.2, resumiendo estos resultados en la gráfica de análisis de sensibilidad paramétrica.

La sensibilidad de los parámetros en un modelo matemático se puede definir, como el efecto que tiene los parámetros en el funcionamiento del modelo en general, según la función objetivo, (manual MCAT V-2,0, 2000).

Con base en la información suministrada por el manual del programa MCAT (MCAT V-2,0, 2000), el programa realiza el análisis de sensibilidad paramétrica, organizando la función objetivo-escogida, transformándola en un valor de probabilidad, luego los parámetros se dividen en diez grupos, fue desarrollado o planteado por Horbengar y Spear en el año de 1981.

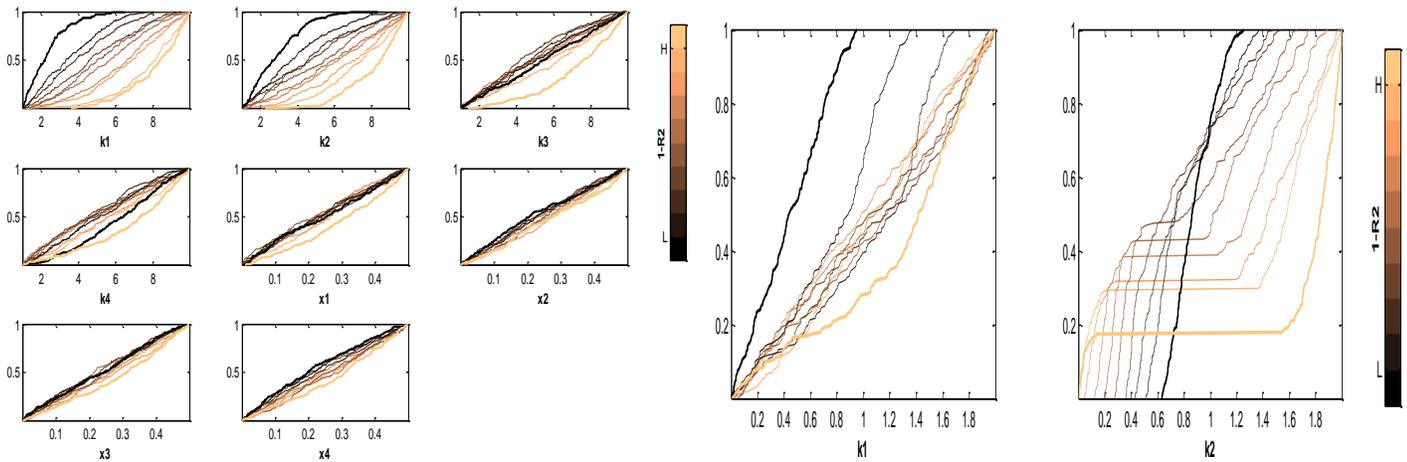
Posteriormente en el análisis de sensibilidad, cada uno de los diez grupos de parámetros con su respectiva probabilidad se “normalizan” al dividir en el total de simulaciones realizadas. También es calculado la distribución de frecuencias acumuladas y luego se representan en una gráfica (Manual MCAT V-2.0, 2000).

Si el modelo es sensible a un parámetro en especial en la calibración, es porque tiene una diferencia importante entre las distribuciones de frecuencia acumulada; es decir el parámetro tiene un impacto significativo sobre los resultados o rendimiento del modelo. Por lo tanto, diferencias en la distribución de la frecuencia acumulada sugiere la baja o alta sensibilidad del modelo.

**Figura 4-2:** Ejemplos de gráficas de sensibilidad paramétrica versus función, objetivo en una calibración por el programa MCAT, en dos modelos diferentes.

**Gráfica izquierda sensibilidad paramétrica**

**Gráfica derecha sensibilidad paramétrica**



En la Figura 4-2 en el costado izquierdo se observan ocho subfiguras. Al observar las ocho gráficas de sensibilidad paramétrica, las gráficas de los parámetros K1 y K2, presentan alta sensibilidad, porque la tendencia de la línea de color más oscuro es la de menor error y es la línea de mayor verticalidad en comparación, de las otras nueve líneas de tendencia que a su vez están distantes. Obsérvese que los otros seis parámetros de calibración costado izquierdo (K3, K4, X1, X2, X3 Y X4) en las gráficas de sensibilidad paramétrica mencionadas, reflejan poca sensibilidad en la calibración, apareciendo las diez líneas de tendencia con la línea de color más oscuro, relativamente cercanas entre sí y con una tendencia de inclinación alrededor de 45 grados.

En la Figura 4-2 en el costado derecho se observan 2 subfiguras. Estas dos gráficas ofrecen un mejor ejemplo, de una sensibilidad alta de los parámetros K1 y K2 en cuanto a la calibración, para ambos parámetros se observa las diez líneas de tendencia de la distribución de frecuencia acumulada. Nuevamente para los dos parámetros, las diez líneas de tendencia correspondientes de cada parámetro están distantes entre sí y la línea de tendencia de menor error con el color más oscuro es la de mayor inclinación vertical.

## 4.2 Escenarios de calibración empleados en los tres modelos de tránsitos propuestos

Para los modelos de tránsito de diferencias finitas, de piscina nivelada y de Muskingum, se consideró el siguiente escenario de calibración en los modelos de tránsito, teniendo especial atención la cartografía de la zona de estudio y la información existente de los tributarios:

- En el proceso de las simulaciones para calibrar, se utilizó la información existente en la estación limnigráfica Puerto Araujo, ubicada sobre el cauce tributario del río Carare.
- Para los afluentes tributarios donde no se tienen registros de información de caudales, se empleó la diferencia de caudales a nivel horario entre las dos estaciones limnigráficas de Puerto Berrío y Barrancabermeja ubicadas sobre el río Magdalena, aplicándoles a estos tributarios un factor de proporcionalidad con base en las áreas aferentes del sub-tramo o embalse, como se explicó en la sección 3.2.2 del Capítulo 3, para poder obtener los caudales de aporte de dichos tributarios.

En los próximos ítems o secciones del capítulo se presentan los resultados de calibración de los modelos de tránsito agregados, para los cinco periodos de tiempo seleccionados en la zona de estudio. Por medio del programa MCAT-V2, se obtienen las gráficas de dispersión de la función de objetivo y las gráficas de análisis de sensibilidad de los parámetros calibrados.

Según la información de la Tabla 3.6, se indican las longitudes aproximadas a lo largo de cada embalse. Con la información de la Tabla 3.13 se toma el tiempo de tránsito de 16 horas, resultado estadístico obtenido por la función de correlación cruzada, debido a que se estaría tomando el tiempo de viaje más corto, encontrado en los cinco periodos seleccionados para la calibración.

Se realizó las calibraciones limitando los valores de los parámetros de (K), (ver Tabla 4.1) en el tiempo de tránsito de 16 horas y con base en la longitud de los cuatro embalses,

ponderando el tiempo de viaje de cada embalse, para que sumados estos cuatro tiempos den valores cercanos a las 16 horas definidas.

Luego se estimó un intervalo de tiempo en horas para el valor de K en cada uno de los cuatro embalses, estando los extremos del intervalo centrado alrededor del tiempo promedio de tránsito calculado para cada embalse, (ver Tabla 3.13 y Tabla 4.1). Los valores del extremo inferior y superior del intervalo de tiempo para cada uno de los cuatro embalses, fluctuó alrededor del valor de tiempo de tránsito promedio de “K” y calculado entre 60 minutos (1 hora) y 90 minutos (1,5 horas), procurando así tener un mayor rango en la calibración del valor K de cada embalse.

**Tabla 4.1:** Intervalos del parámetro K, para las simulaciones de cada embalse.

<b>Embalse</b>	<b>Sub-tramo ó Embalses</b>	<b>Longitud Sub-Tramo (Km)</b>	<b>Tiempo promedio de viaje (Horas)</b>	<b>Rango Mínimo y Máximo de K(horas)</b>
<b>1</b>	Puerto Berrío – Río San Bartolomé	18,82	2,92	(1,5 – 4,5)
<b>2</b>	Río San Bartolomé – Río Carare	42,15	6,55	(5,0 – 8,0)
<b>3</b>	Río Carare – Río Opón	36,01	5,59	(4,5 – 7,0)
<b>4</b>	Río Opón - Barrancabermeja	6,05	0,94	(1,0 – 1,5)
	<b>Total</b>	<b>103,03</b>	<b>16,0</b>	

En los modelos de tránsito agregados para el presente proyecto, se encontró una limitante en la información horaria de caudales utilizada para la calibración, porque cuando el tramo o embalse es corto en longitud respecto a la longitud total del cauce analizado, hace que el tiempo de tránsito promedio del embalse sea menor a una hora, no siendo por lo tanto representativo el registro horario de caudales específicamente en esta situación.

Ampliando lo comentado en el párrafo anterior, al tener una longitud total del cauce principal del río Magdalena de 103,03 Km con un tiempo de tránsito de 16 horas proyectado, entre las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío y de Barrancabermeja, es posible estimar un valor promedio de la distancia a recorrer los caudales sobre el río Magdalena en una hora, obteniéndose una longitud de 6,456 Km por hora y esto implica que en el cuarto embalse estaría transitándose en un tiempo de 0,937 horas por su longitud de 6,05 Km.

Es importante mencionar que estos valores promedios supuestos de tiempo de tránsito "K" para cada embalse (ver Tabla 4.1) considera velocidades constantes a lo largo de todo el tramo de estudio de 103,03 Km, sin embargo como se puede revisar más adelante en este capítulo los resultados de calibración en los tres modelos de tránsito muestran tiempos promedio diferentes en cada uno de los cuatro embalses respecto a los supuestos y por lo tanto las velocidades del flujo promedio varían para cada embalse. Se tuvo especial énfasis en los resultados de la calibración del parámetro "K" del cuarto embalse, pero no se encontró problemas con este valor, porque generalmente tendió siempre el valor óptimo del parámetro al extremo superior de 1,5 horas del intervalo impuesto y no al extremo inferior del intervalo impuesto de 1,0 hora.

Para las calibraciones de los parámetros de cada uno de los modelos de tránsito propuestos, se escogió el 75% de la serie de tiempo de caudales en los cinco periodos seleccionados. El 25% restante de la serie de caudales de cada periodo, se empleó para revisar la validación de los parámetros calibrados y la validación de los resultados de las hidrógrafas transitadas con los modelos de tránsito propuestos. La validación se simplifica porque se conoce con anterioridad los caudales que debería arrojar las hidrógrafas de prueba para validación.

El número de simulaciones realizadas es de 2000 aleatoriamente, usando el procedimiento de Monte Carlo, para el intervalo del parámetro K respectivo a cada uno de los cuatro embalses, en los tres modelos de tránsito propuestos. Se considero que es un número suficiente de simulaciones para el intervalo de K de cada embalse, obteniendo una buena precisión con dos decimales el valor de K calibrado.

Para la realización del proceso de calibración y de validación, generalmente se recomienda que sea las dos terceras partes de datos para calibrar y la otra tercera parte de datos para validar el modelo. No hay un porcentaje específico, sin embargo, también se recomiendan el 75% de la información es para calibrar y el 25% restante para validar y es esta última opción fue la que se utilizó para calibrar los modelos de los tránsitos. Esta última opción mencionada se escogió porque, se tiene más información para calibrar los parámetros en los tres modelos de tránsito agregado considerados.

Uno de los principales inconvenientes para la calibración de los parámetros de los modelos de tránsito desarrollados, es no tener información de hidrógrafas de estaciones limnigráficas intermedias entre las estaciones de Puerto Berrio y Barrancabermeja a lo largo del cauce principal. Lo ideal es haber tenido hidrógrafas de estaciones limnigráficas ubicadas aguas abajo del aporte de caudales, de cada uno de los afluentes tributarios principales.

Para el modelo de tránsito de Muskingum planteado se tiene dos parámetros a calibrar ( $K$ ) y ( $X$ ). Respecto a este modelo los rangos del parámetro ( $K$ ) y ( $x$ ) se les realizaron a ambos parámetros 2000 simulaciones. En el proceso de calibración el parámetro ( $X$ ) está limitado en el intervalo de  $(0,0 - 0,5)$ , para los cuatro embalses de la zona de estudio, ver la sección del documento 2.3 y ecuación 2.38.

#### **4.2.1 Condiciones iniciales de calibración**

Se utilizó como caudal inicial, el primer caudal de la hidrógrafa observada en la estación limnigráfica de Puerto Berrío, para el embalse 1 y en los cinco periodos de calibración seleccionados, de cada uno de los tránsitos agregados presentados.

### **4.3 Calibración, validación y análisis de resultados del modelo de tránsito de diferencias finitas**

A continuación se presentan los resultados de la calibración y de la validación de los cinco periodos seleccionados, producto de las simulaciones en el modelo de tránsito de

diferencias finitas, de por medio de las siguientes seis gráficas: gráficas de dispersión en el espacio paramétrico VS función objetiva, gráficas de análisis de sensibilidad paramétrica VS parámetro calibrado, gráfica de hidrógrafa calibrada-validada estación de Barrancabermeja, gráfica de las hidrógrafas transitadas de los cuatro embalses, dispersión de los caudales observados VS Caudales simulados de la calibración, y la gráfica de errores de caudales observados VS caudales calibrados y validados.

Se tomo el mejor resultado de la función objetivo, determinado por el programa de MCAT V-2,0, para los valores del parámetro de calibración de K en cada uno de los embalses para los cinco periodos. La función objetivo de la calibración del presente proyecto es denominado  $(1-R2)$ , siendo  $(R2)$  el resultado calculado del coeficiente Nash-Sutcliffe.

Un resultado interesante encontrado es que al sumar los valores de K de los cuatro embales, se aproxima a las 16 horas asumidas para el tiempo de tránsito, apoyado con la función de correlación cruzada, para todas las simulaciones. Específicamente fluctúa el tiempo de tránsito en el tramo de estudio con el rango de 16 horas a 18 horas (ver Tabla 3.13), según resultados de la calibración del modelo de tránsito de Diferencias Finitas, para los cinco periodos.

La hidrógrafa como punto de referencia para chequear la calibración y validación es la hidrógrafa observada en la estación limnigráfica de Barrancabermeja, ubicada al terminar la zona de estudio. Los análisis generales de la calibración y validación de los modelos se realizan en la próxima sección 4.5 y 4.6 del documento.

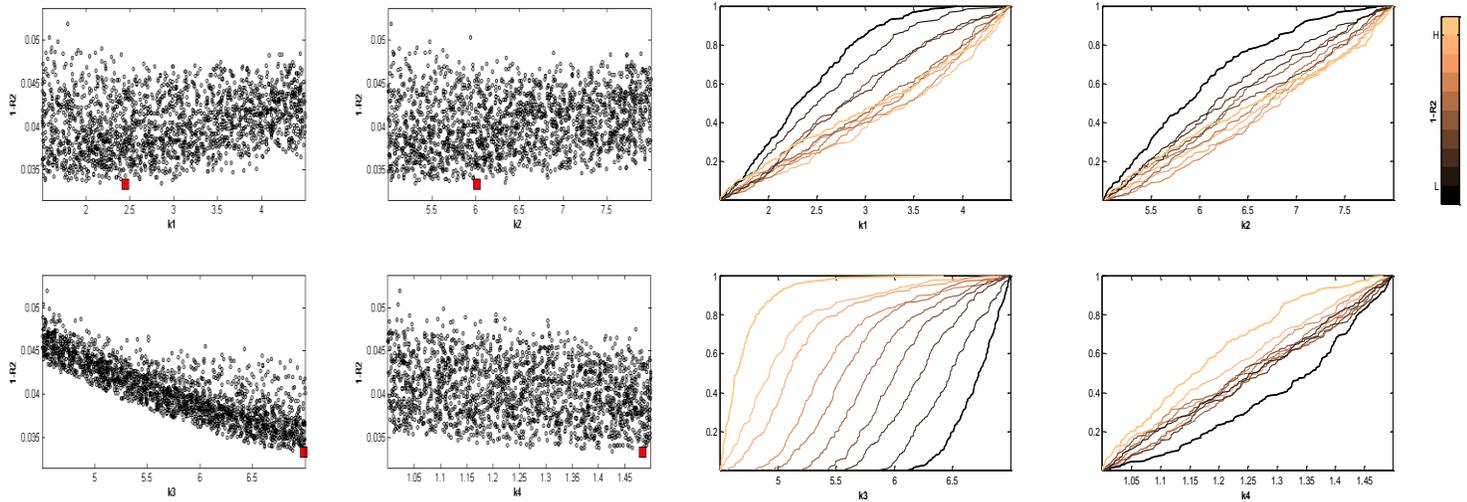
### **4.3.1 Período 1 de calibración y validación tránsito de diferencias finitas**

En las siguientes seis figuras se muestran los resultados y algunos análisis del proceso de calibración y validación. Para la gráfica (a) de la Figura 4-3, se observa los resultados de la calibración con el 75% de la serie de tiempo para el parámetro "K", en cada uno de los embalses del periodo 1, por medio de la función objetivo.

**Figura 4-3:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de diferencias finitas periodo 1.

**Gráfica (a). Espacio paramétrico versus función objetivo**

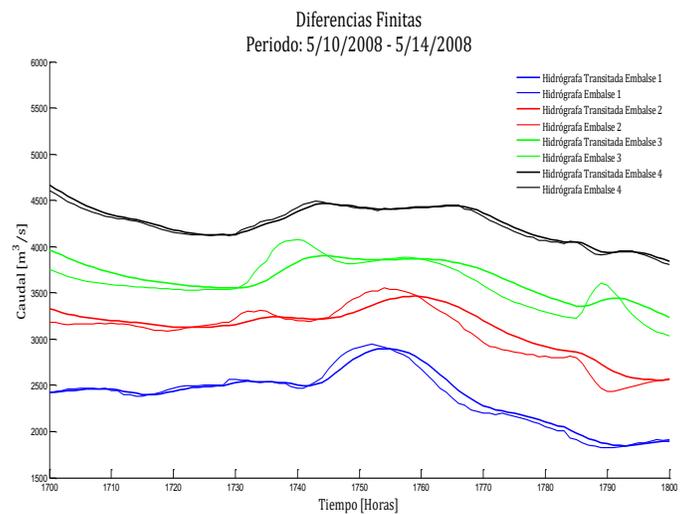
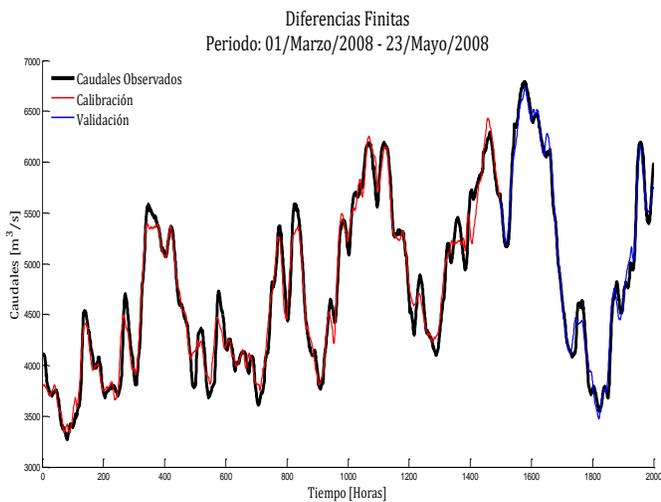
**Gráfica (b). Sensibilidad paramétrica**



**Figura 4-4:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, del período 1 tránsito diferencias finitas.

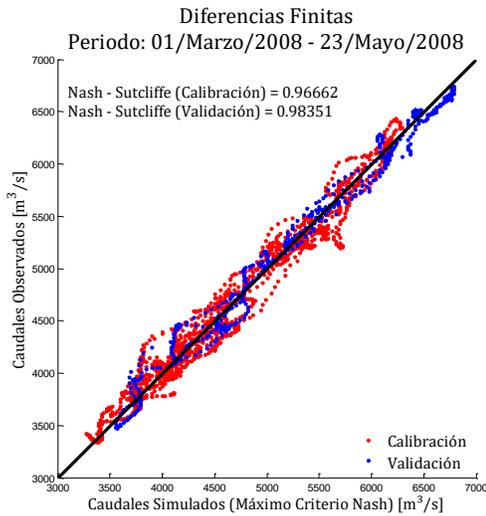
**Gráfica (a) Hidrógrafa observada VS Hidrógrafa calibrada y validada**

**Gráfica (b). Hidrógrafas de inicio y de salida transitada de cada embalse**

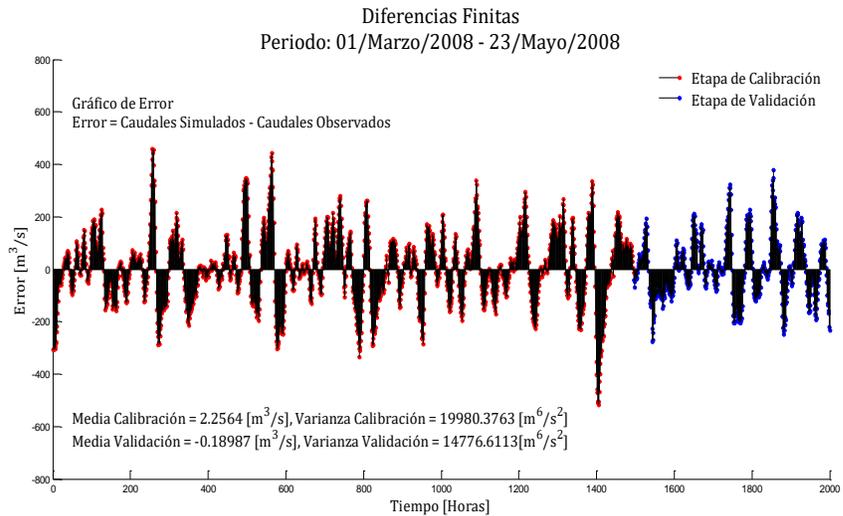


**Figura 4-5:** Gráfica (a) y la gráfica (b) son respectivamente los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada en la estación de Barrancabermeja, del periodo 1 según modelo de diferencias finitas.

**Gráfica (a). Gráfica de dispersión de las hidrógrafas calibradas y validadas**



**Gráfica (b). Gráfica de errores de calibración y de validación VS hidrógrafa observada**



**Tabla 4.2:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de diferencias finitas, del periodo 1.

Calibración. Modelo de diferencias finitas, período 1.						
Resultado s de la calibración	K1	K2	K3	K4	Sumatoria de K	1-R2
	(horas)	(horas)	(horas)	(horas)	(horas)	
	2,47	6,02	6,99	1,48	16,96	0,027 7
Coef. Nash calibración	Coef. Nash validación (R2).	Media error calibración (m <sup>3</sup> /s)	Media error validación (m <sup>3</sup> /s)	Varianza error calibración (m <sup>6</sup> /s <sup>2</sup> )	Varianza error validación (m <sup>6</sup> /s <sup>2</sup> )	
0,966	0,983	2,256	-0,189	19.980,37 6	14.776,611	

Los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe son cercanos al valor ideal de uno (1) en el proceso de calibración y de validación del período 1 y la sumatoria de los valores del parámetro (K) es de 16,96 horas, como se observa en la Tabla 4.2 y que a su vez esta

tabla presenta el resumen de los resultados de las gráficas de calibración del período 1, por el tránsito de diferencias finitas (Figura 4-3, Figura 4-4 y Figura 4-5).

El valor estadístico de la media de los errores de la hidrógrafa calibrada y validada respecto a la hidrógrafa de la estación de Barrancabermeja son bajas ver Tabla 4.2, si se considera el orden de magnitud de la hidrógrafa observada en la estación limnigráfica de Barrancabermeja con caudales cercanos a 6800 m<sup>3</sup>/s.

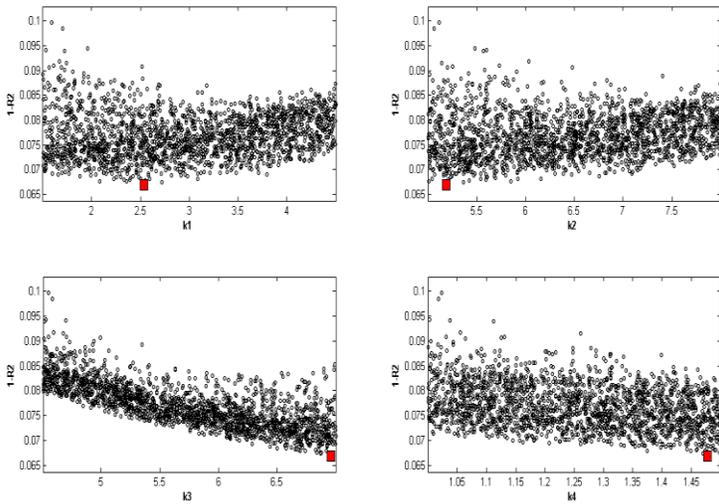
De la gráfica (b) en la Figura 4-4 es importante indicar el desfase observado que tienen los picos de caudales en las hidrógrafas de inicio y de salida de cada embalse, para el modelo de tránsito de diferencias finitas, este desfase está relacionado directamente por el valor de “K” calibrado, con el tiempo de tránsito de cada embalse, en el periodo 1.

### **4.3.2 Período 2 de calibración y validación tránsito de diferencias finitas**

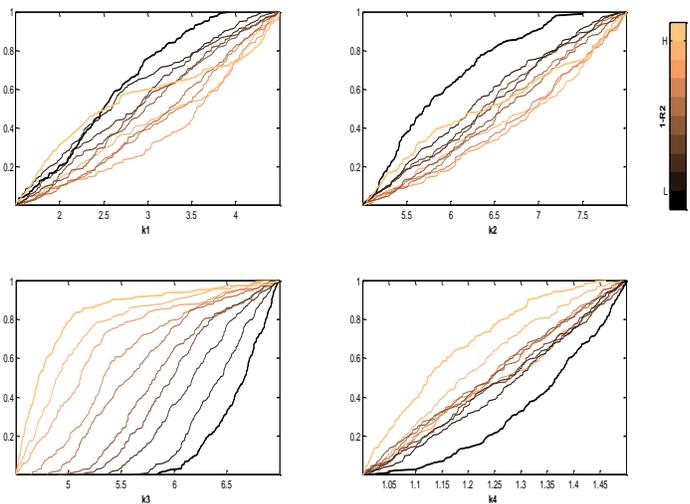
En las siguientes seis figuras se muestran los resultados y algunos análisis del proceso de calibración y validación. Para la gráfica (a) de la Figura 4-6 se observa los resultados de la calibración con el 75% de la serie de tiempo para el parámetro “K”, en cada uno de los embalses del periodo 2, por medio de la función objetivo.

**Figura 4-6:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de diferencias finitas periodo 2.

**Gráfica (a). Espacio paramétrico versus función objetivo**

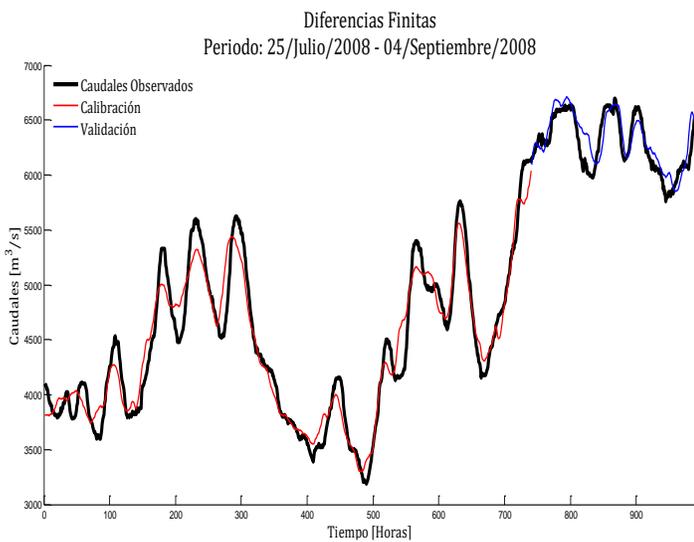


**Gráfica (b). Sensibilidad paramétrica**

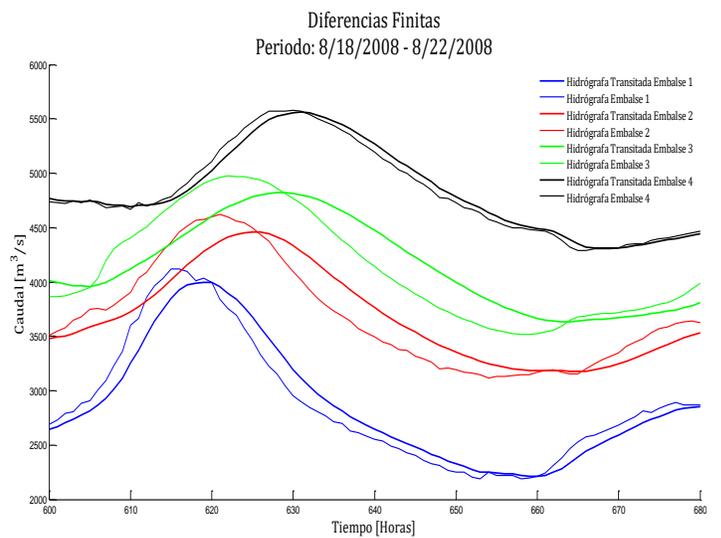


**Figura 4-7:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, período 2 tránsito diferencias finitas.

**Gráfica (a) Hidrógrafa observada VS Hidrógrafa calibrada y validada**

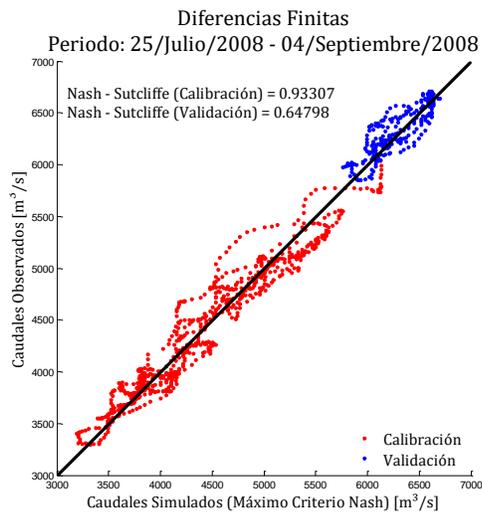


**Gráfica (b). Hidrógrafas de inicio y de salida transitada de cada embalse**

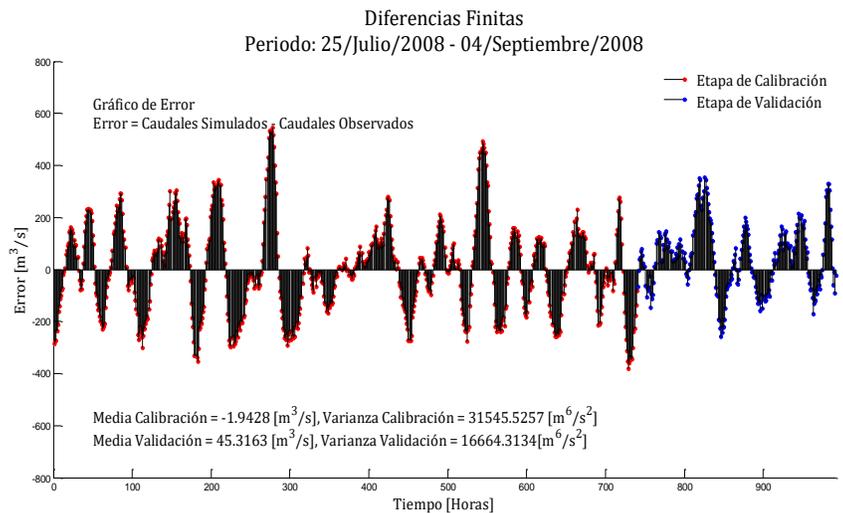


**Figura 4-8:** Gráfica (a) y la gráfica (b) son respectivamente los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada en la estación de Barrancabermeja, del periodo 2 según modelo de diferencias finitas.

**Gráfica (a). Gráfica de dispersión de las hidrógrafas calibradas y validadas**



**Gráfica (b). Gráfica de errores de calibración y de validación VS hidrógrafa observada**



**Tabla 4.3:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de diferencias finitas, del período 2.

Calibración. Modelo de diferencias finitas, período 2.						
Resultados de la calibración	K1	K2	K3	K4	Sumatoria de K	1-R2
	(horas)	(horas)	(horas)	(horas)	(horas)	
	2,53	5,17	6,96	1,46	16,12	0,055 1
Coef. Nash calibración	Coef. Nash validación (R2).	Media error calibración (m <sup>3</sup> /s)	Media error validación (m <sup>3</sup> /s)	Varianza error calibración (m <sup>6</sup> /s <sup>2</sup> )	Varianza error validación (m <sup>6</sup> /s <sup>2</sup> )	
0,933	0,647	-1,942	45,316	31.545,525	16.664,313	

Los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe en el proceso de calibración es de 0,933 el valor ideal es uno, en el proceso de validación el coeficiente de Nash-Sutcliffe es 0,647 resultado último, aunque es aceptable lo recomendado es que sea superior a 0,90. Se observa en la Tabla 4.3 los coeficientes mencionados y también el resumen de los

resultados de las gráficas de calibración del período 2 por el tránsito de diferencias finitas (Figura 4-6, Figura 4-7 y Figura 4-8).

Es importante indicar que el tiempo de tránsito por correlación cruzada, para este periodo es de 16 horas ver Tabla 3.13 del periodo 2 y en el proceso de calibración, la sumatoria de los valores de los parámetros “K” es de 16,12 ver Tabla 4.5, lo cual indica un buen ajuste.

El valor estadístico de la media de los errores de la hidrógrafa calibrada y validada respecto a la hidrógrafa de la estación de Barrancabermeja son bajas ver Tabla 4.3, si se considera el orden de magnitud de la hidrógrafa observada en la estación limnigráfica de Barrancabermeja con caudales cercanos a 6600 m<sup>3</sup>/s.

De la gráfica (b) en la Figura 4-7 es importante indicar el desfase observado que tienen los picos de caudales en las hidrógrafas de inicio y de salida de cada embalse, para el modelo de tránsito de diferencias finitas, este desfase está relacionado directamente por el valor de “K” calibrado, con el tiempo de tránsito de cada embalse, en el periodo 2.

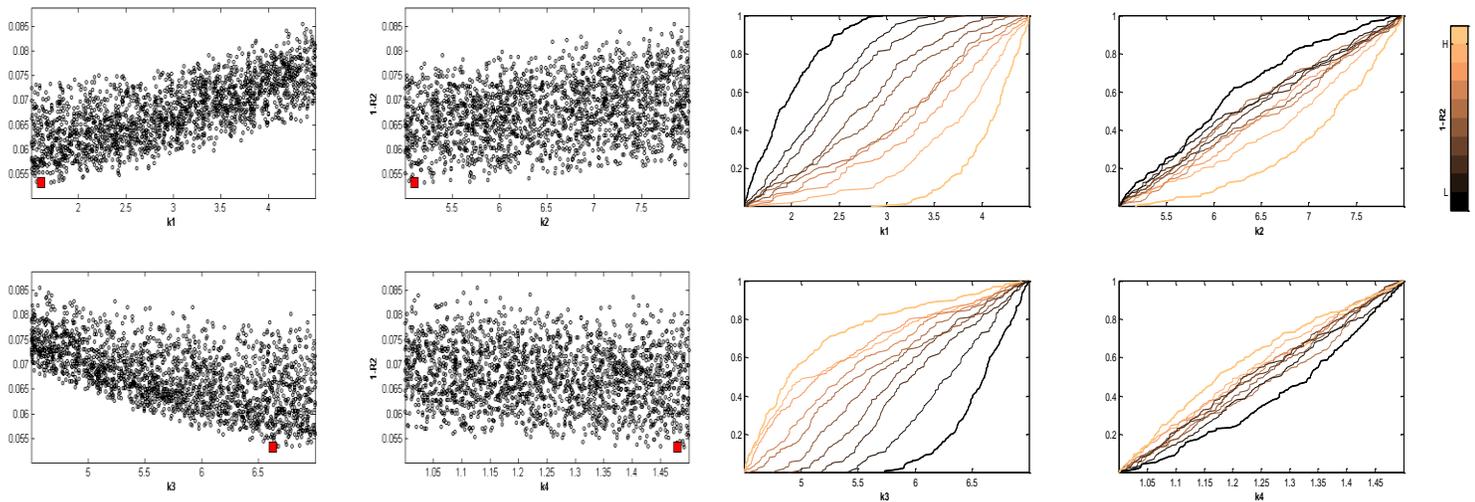
### **4.3.3 Período 3 de calibración y validación tránsito de diferencias finitas**

En las siguientes seis figuras se muestran los resultados y algunos análisis del proceso de calibración y validación. Para la gráfica (a) de la Figura 4-9 se observa los resultados de la calibración con el 75% de la serie de tiempo para el parámetro “K”, en cada uno de los embalses del periodo 3, por medio de la función objetivo.

**Figura 4-9:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de diferencias finitas periodo 3.

**Gráfica (a). Espacio paramétrico versus función objetivo**

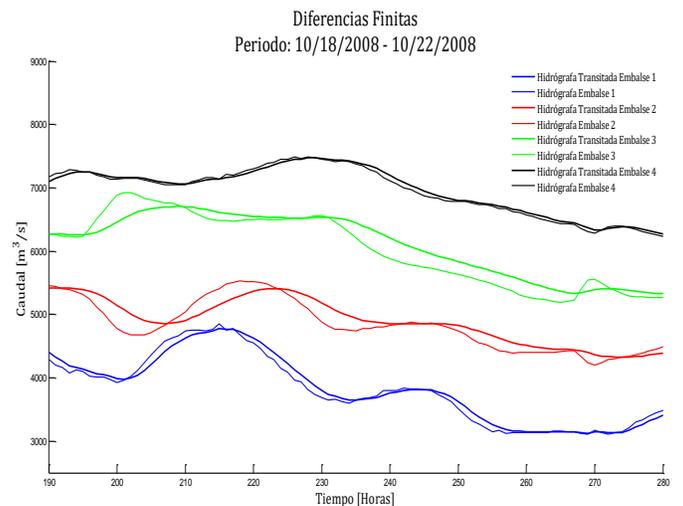
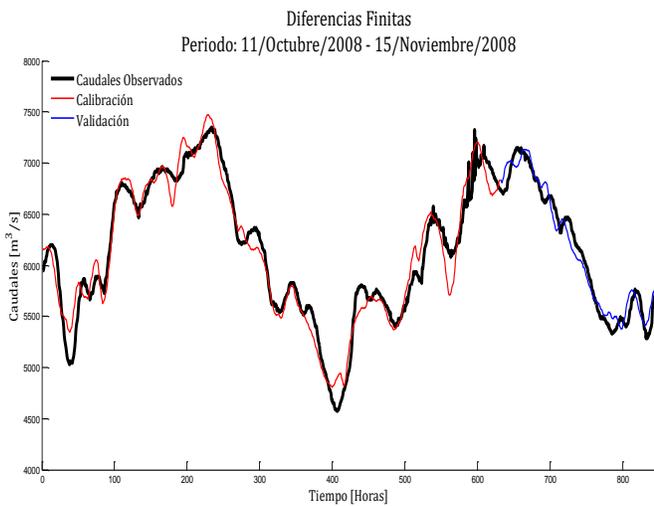
**Gráfica (b). Sensibilidad paramétrica**



**Figura 4-10:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, periodo 3 tránsito diferencias finitas.

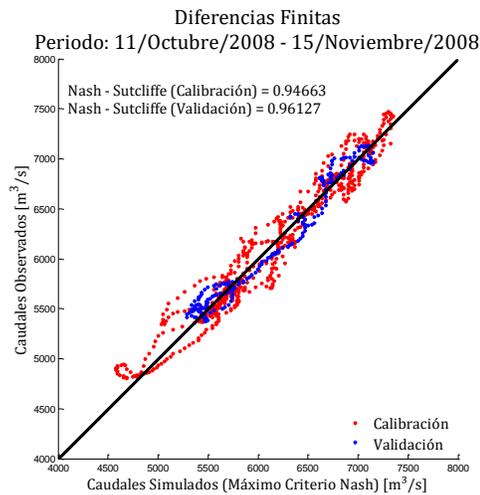
**Gráfica (a) Hidrógrafa observada VS Hidrógrafa calibrada y validada**

**Gráfica (b). Hidrógrafas de inicio y de salida transitada de cada embalse**

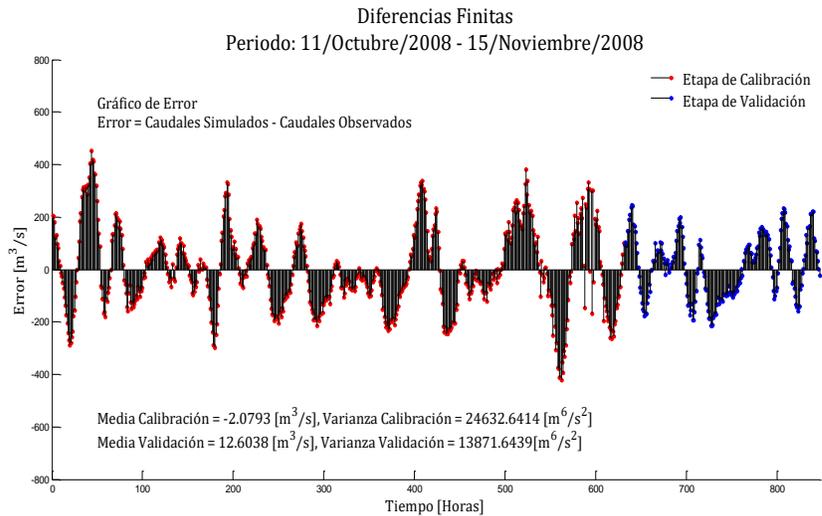


**Figura 4-11:** Gráfica (a) y la gráfica (b) son respectivamente los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada en la estación de Barrancabermeja, del periodo 3 según modelo de diferencias finitas.

**Gráfica (a). Gráfica de dispersión de las hidrógrafas calibradas y validadas**



**Gráfica (b). Gráfica de errores de calibración y de validación VS hidrógrafa observada**



**Tabla 4.4:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de diferencias finitas, del período 3.

Calibración. Modelo de diferencias finitas, período 3.						
Resultados de la calibración	K1	K2	K3	K4	Sumatoria de K	1-R2
	(horas)	(horas)	(horas)	(horas)	(horas)	
	1,61	5,14	6,71	1,48	14,94	0,046
Coef. Nash calibración	Coef. Nash validación (R2).	Media error calibración (m³/s)	Media error validación (m³/s)	Varianza error calibración (m⁶/s²)	Varianza error validación (m⁶/s²)	
0,946	0,961	-2,079	12,603	24.632,641	13.871,643	

Los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe en el proceso de calibración es de 0,946 el valor ideal es uno, en el proceso de validación el coeficiente de Nash-Sutcliffe es 0,961, como se observa en la Tabla 4.4 y que a su vez esta tabla presenta el resumen de los

resultados de las gráficas de calibración del período 3 por el tránsito de diferencias finitas (Figura 4-9, Figura 4-10 y Figura 4-11).

El valor estadístico de la media de los errores de la hidrógrafa calibrada y validada respecto a la hidrógrafa de la estación de Barrancabermeja son bajas ver

Tabla 4.4, si se considera el orden de magnitud de la hidrógrafa observada en la estación limnigráfica de Barrancabermeja con caudales cercanos a 7300 m<sup>3</sup>/s.

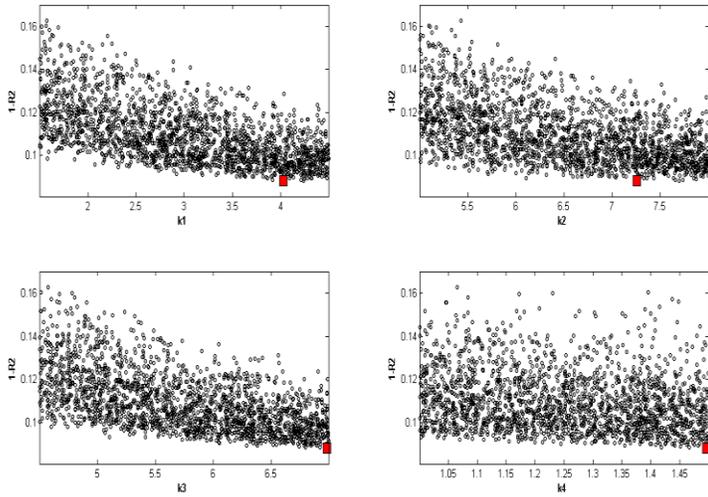
De la gráfica (b) en la Figura 4-10 es importante indicar el desfase observado que tienen los picos de caudales en las hidrógrafas de inicio y de salida de cada embalse, para el modelo de tránsito de diferencias finitas, este desfase está relacionado directamente por el valor de “K” calibrado, con el tiempo de tránsito de cada embalse, en el periodo 3.

#### **4.3.4 Período 4 de calibración y validación tránsito de diferencias finitas**

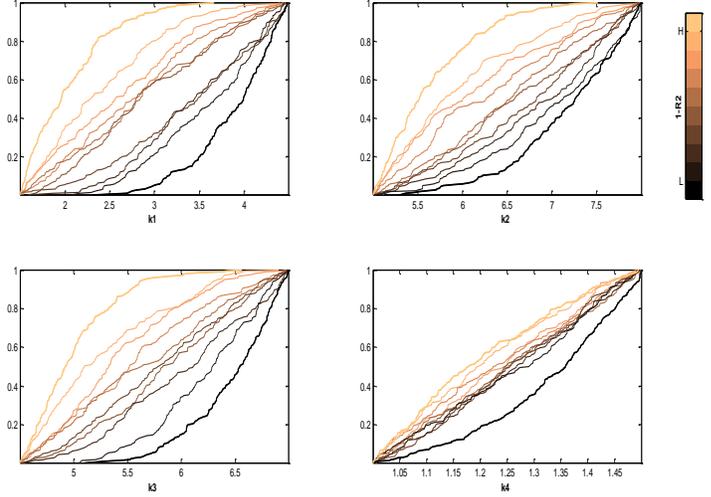
En las siguientes seis figuras se muestran los resultados y algunos análisis del proceso de calibración y validación. Para la gráfica (a) de la Figura 4-12 se observa los resultados de la calibración con el 75% de la serie de tiempo para el parámetro “K”, en cada uno de los embalses del periodo 4, por medio de la función objetivo.

**Figura 4-12:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de diferencias finitas periodo 4.

**Gráfica (a). Espacio paramétrico versus función objetivo**

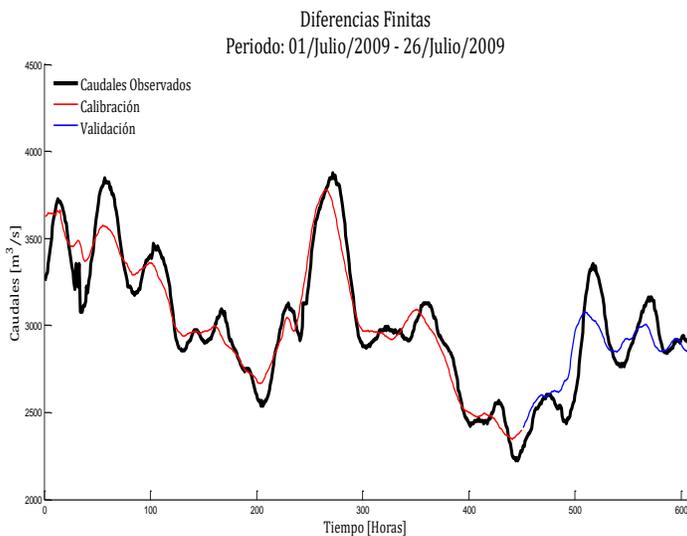


**Gráfica (b). Sensibilidad paramétrica**

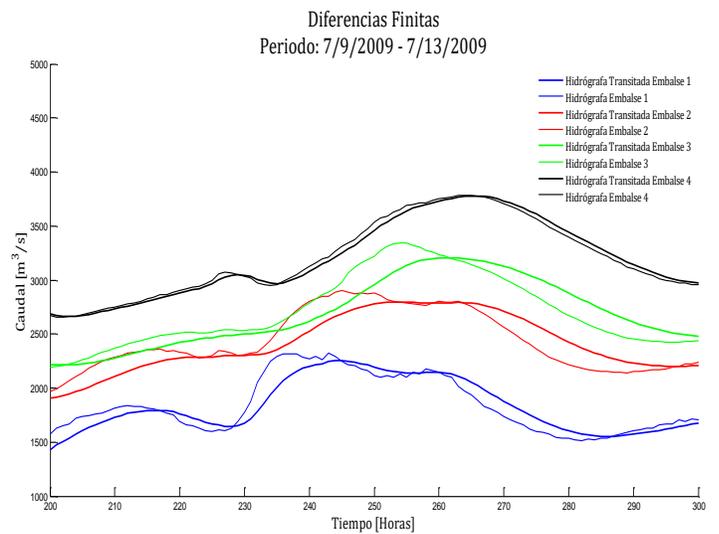


**Figura 4-13:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, periodo 4 tránsito diferencias finitas.

**Gráfica (a) Hidrógrafa observada VS Hidrógrafa calibrada y validada**

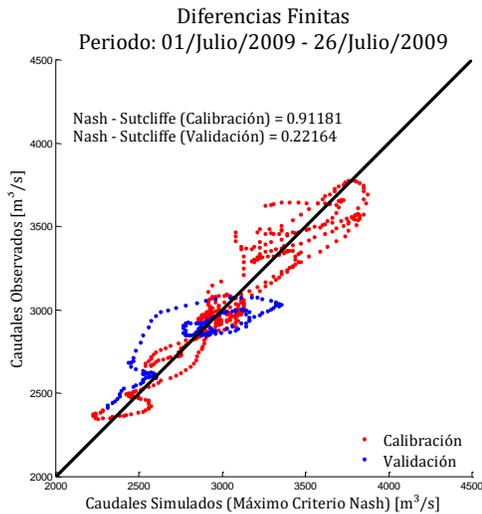


**Gráfica (b). Hidrógrafas de inicio y de salida transitada de cada embalse**

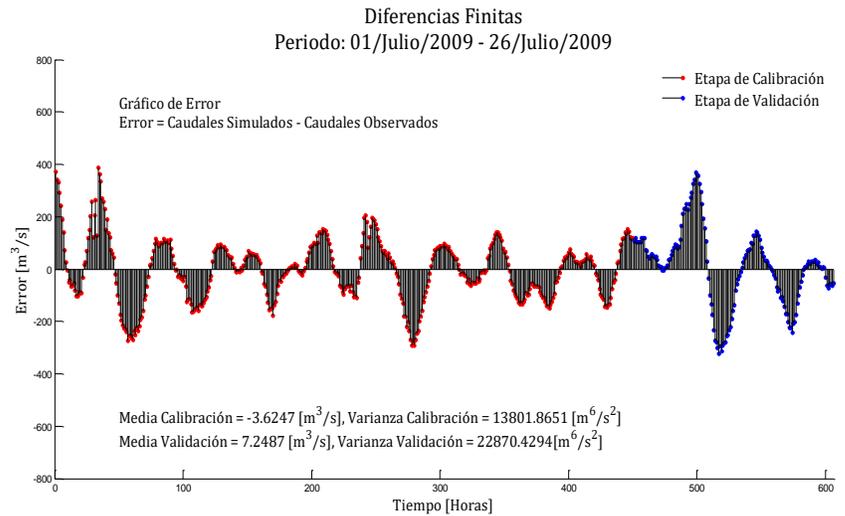


**Figura 4-14:** Gráfica (a) y la gráfica (b) son respectivamente los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada en la estación de Barrancabermeja, del periodo 4 según modelo de diferencias finitas.

**Gráfica (a). Gráfica de dispersión de las hidrógrafas calibradas y validadas**



**Gráfica (b). Gráfica de errores de calibración y de validación VS hidrógrafa observada**



**Tabla 4.5:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de diferencias finitas, del periodo 4.

Calibración. Modelo de diferencias finitas, período 4.						
Resultado s de la calibración	K1	K2	K3	K4	Sumatoria de K	1-R2
	(horas)	(horas)	(horas)	(horas)	(horas)	
	4,04	7,24	6,98	1,49	19,75	0,058
Coef. Nash calibración	Coef. Nash validación (R2).	Media error calibración (m³/s)	Media error validación (m³/s)	Varianza error calibración (m⁶/s²)	Varianza error validación (m⁶/s²)	
0,911	0,221	-3,624	7,248	13.801,86 5	22.870,429	

Los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe en el proceso de calibración es de 0,911 el valor ideal es uno, en el proceso de validación el coeficiente de Nash-Sutcliffe es 0,221 resultado último, aunque es bajo lo recomendado es que sea superior a 0,90. Se observa en la Tabla 4.5 los coeficientes mencionados y también el resumen de los resultados de

las gráficas de calibración del período 4 por el tránsito de diferencias finitas (Figura 4-12, Figura 4-13 y Figura 4-14).

Es importante indicar que el tiempo de tránsito por correlación cruzada, para este periodo es de 18 horas ver Tabla 3.13 del periodo 4 y en el proceso de calibración, la sumatoria de los valores de los parámetros “K” es de 19,75 ver Tabla 4.5, lo cual indica un buen ajuste.

El valor estadístico de la media de los errores de la hidrógrafa calibrada y validada respecto a la hidrógrafa de la estación de Barrancabermeja son bajas ver Tabla 4.5, si se considera el orden de magnitud de la hidrógrafa observada en la estación limnigráfica de Barrancabermeja con caudales cercanos a 3900 m<sup>3</sup>/s.

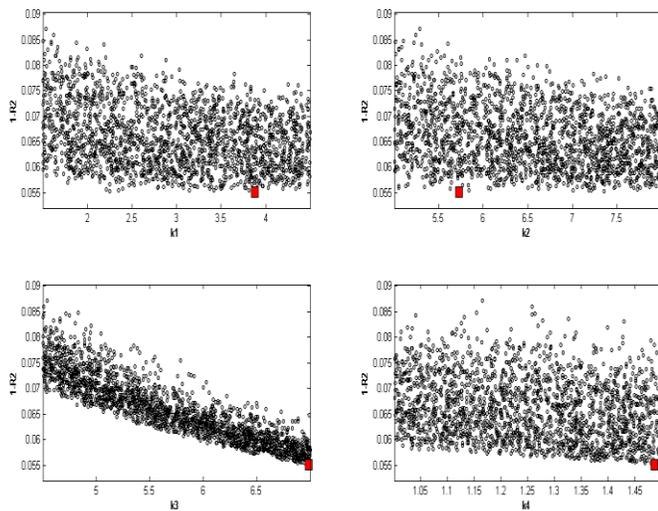
De la gráfica (b) en la Figura 4-13 es importante indicar el desfase observado que tienen los picos de caudales en las hidrógrafas de inicio y de salida de cada embalse, para el modelo de tránsito de diferencias finitas, este desfase está relacionado directamente por el valor de “K” calibrado, con el tiempo de tránsito de cada embalse, en el periodo 4.

#### **4.3.5 Período 5 de calibración y validación tránsito de diferencias finitas**

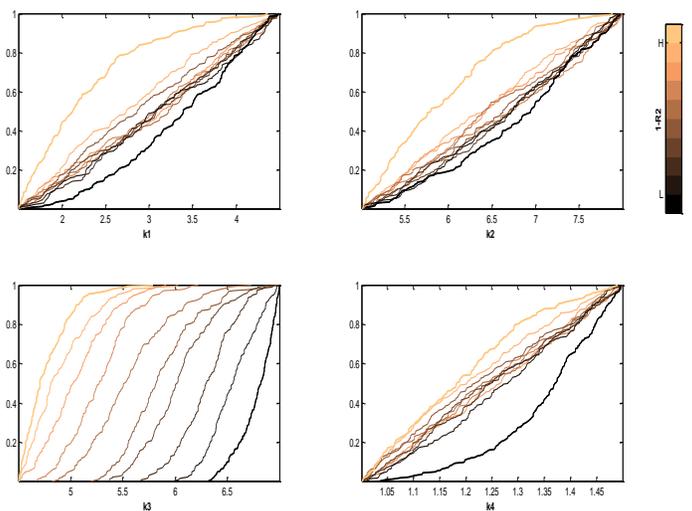
En las siguientes seis figuras se muestran los resultados y algunos análisis del proceso de calibración y validación. Para la gráfica (a) de la Figura 4-15 se observa los resultados de la calibración con el 75% de la serie de tiempo para el parámetro “K”, en cada uno de los embalses del periodo 5, por medio de la función objetivo.

**Figura 4-15:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de diferencias finitas periodo 5.

**Gráfica (a). Espacio paramétrico versus función objetivo**

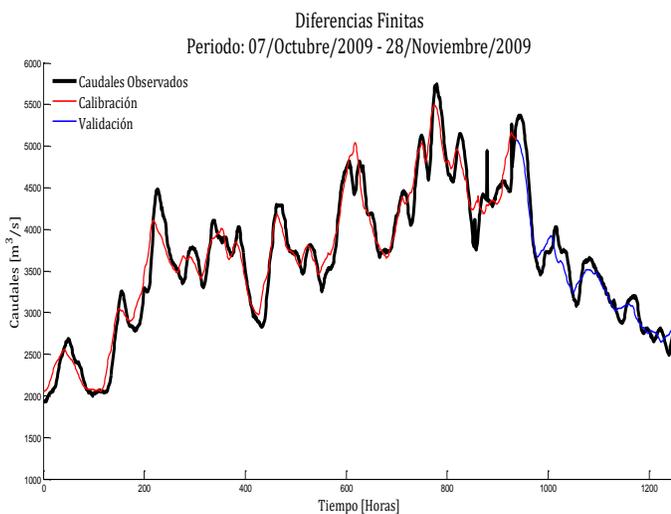


**Gráfica (b). Sensibilidad paramétrica**

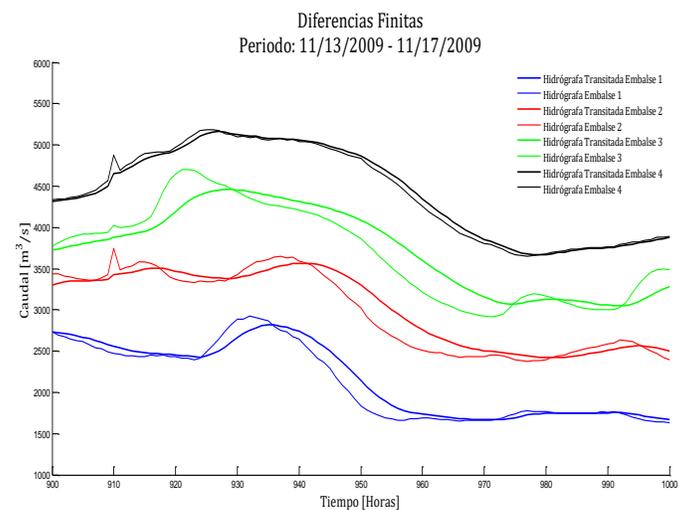


**Figura 4-16:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, período 5 tránsito diferencias finitas.

**Gráfica (a) Hidrógrafa observada VS Hidrógrafa calibrada y validada**

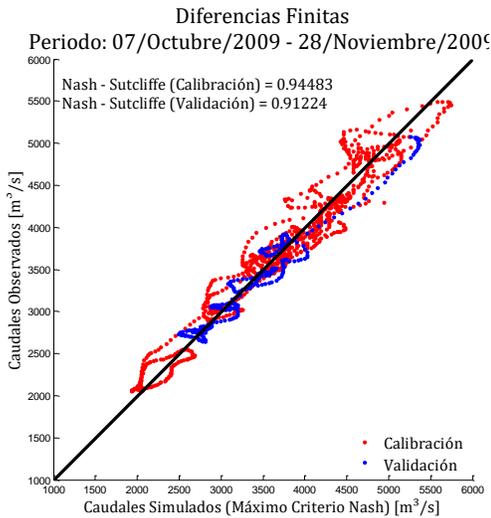


**Gráfica (b). Hidrógrafas de inicio y de salida transitada de cada embalse**

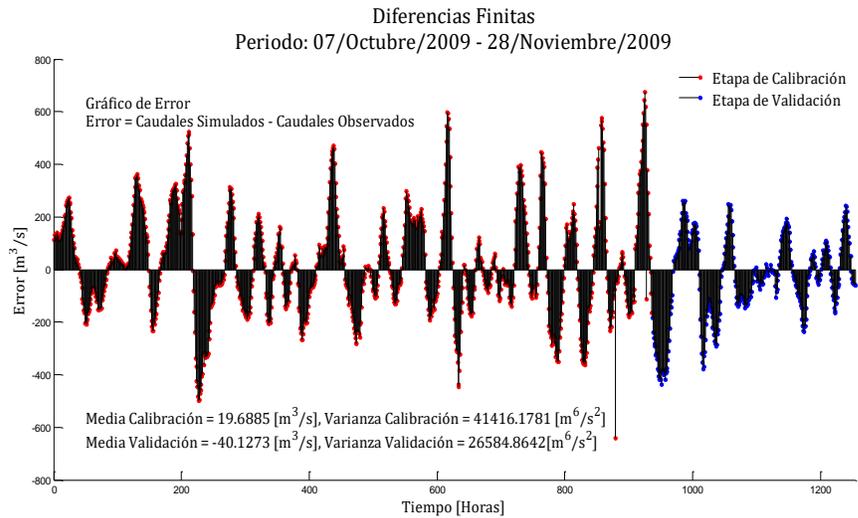


**Figura 4-17:** Gráfica (a) y la gráfica (b) son respectivamente los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada en la estación de Barrancabermeja, del periodo 5 según modelo de diferencias finitas.

**Gráfica (a). Gráfica de dispersión de las hidrógrafas calibradas y validadas**



**Gráfica (b). Gráfica de errores de calibración y de validación VS hidrógrafa observada**



**Tabla 4.6:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de diferencias finitas, del período 5.

Calibración. Modelo de diferencias finitas, período 5.						
Resultado s de la calibración	K1	K2	K3	K4	Sumatoria de K	1-R2
	(horas)	(horas)	(horas)	(horas)	(horas)	
	3,89	5,71	6,99	1,48	18,07	0,036
Coef. Nash calibración	Coef. Nash validación (R2).	Media error calibración (m <sup>3</sup> /s)	Media error validación (m <sup>3</sup> /s)	Varianza error calibración (m <sup>6</sup> /s <sup>2</sup> )	Varianza error validación (m <sup>6</sup> /s <sup>2</sup> )	
0,944	0,912	19,688	-40,127	41.416,178	26.584,864	

Los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe en el proceso de calibración es de 0,944 el valor ideal es uno, en el proceso de validación el coeficiente de Nash-Sutcliffe es 0,912, como se observa en la Tabla 4.6 y que a su vez esta tabla presenta el resumen de los resultados de las gráficas de calibración del período 5 por el tránsito de diferencias finitas (Figura 4-15, y Figura 4-17).

El valor estadístico de la media de los errores de la hidrógrafa calibrada y validada respecto a la hidrógrafa de la estación de Barrancabermeja son bajas ver Tabla 4.6, si se considera el orden de magnitud de la hidrógrafa observada en la estación limnigráfica de Barrancabermeja con caudales cercanos a 5700 m<sup>3</sup>/s.

De la gráfica (b) en la Figura 4-16 es importante indicar el desfase observado que tienen los picos de caudales en las hidrógrafas de inicio y de salida de cada embalse, para el modelo de tránsito de diferencias finitas, este desfase está relacionado directamente por el valor de “K” calibrado, con el tiempo de tránsito de cada embalse, en el periodo 5.

#### **4.4 Calibración, validación y análisis de resultados del modelo de tránsito de piscina nivelada**

Se presentan los resultados de la calibración y de la validación de los cinco periodos seleccionados, producto de las simulaciones realizadas en el modelo de tránsito de piscina nivelada, por medio de las siguientes seis gráficas: gráficas de dispersión en el espacio paramétrico VS función objetiva, gráficas de análisis de sensibilidad paramétrica VS parámetro calibrado, gráfica de hidrógrafa calibrada-validada estación de Barrancabermeja, gráfica de las hidrógrafas transitadas de los cuatro embalses, dispersión de los caudales observados VS Caudales simulados de la calibración, y la gráfica de errores de caudales observados VS caudales calibrados y validados.

Se tomo el mejor resultado de la función objetivo, determinado por el programa de MCAT V-2,0, para los valores del parámetro de calibración de K en cada uno de los embalses para los cinco periodos. La función objetivo de la calibración del presente proyecto es denominado (1-R<sup>2</sup>), siendo (R<sup>2</sup>) el resultado calculado del coeficiente Nash-Sutcliffe.

Un resultado interesante encontrado es que al sumar los valores de K de los cuatro embalses, se aproxima a las 16 horas asumidas para el tiempo de tránsito, apoyado con la función de correlación cruzada, para todas las simulaciones. Específicamente fluctúa el tiempo de tránsito en el tramo de estudio con el rango de 16 horas a 18 horas (ver Tabla

3.13), según resultados de la calibración del modelo de tránsito de piscina nivelada, para los cinco periodos.

La hidrógrafa como punto de referencia para chequear la calibración y validación es la hidrógrafa observada en la estación limnigráfica de Barrancabermeja, ubicada al terminar la zona de estudio. Los análisis generales de la calibración y validación de los modelos se realizan en la próxima sección 4.5 y 4.6 del documento.

Es importante mencionar que se presentaron similitudes en los resultados de calibración y de validación, para los modelos de tránsitos de diferencias finitas y de piscina nivelada, esto debe ser por la similitud de la estructura matemática que tienen ambos modelos.

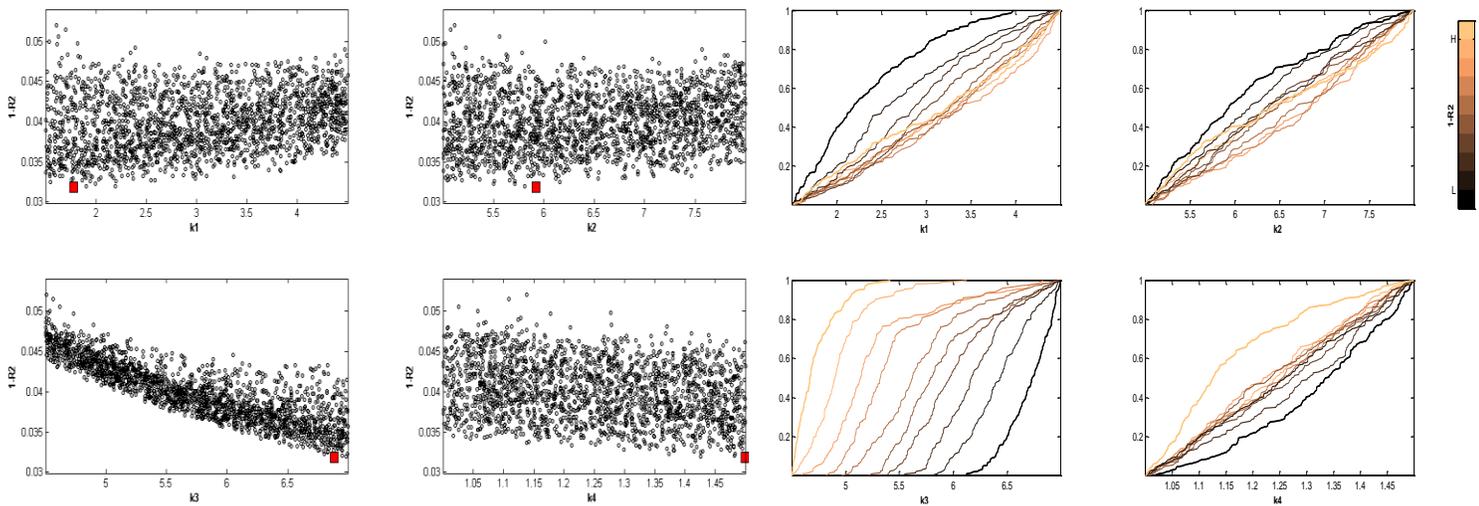
#### **4.4.1 Período 1 de calibración y validación tránsito de piscina nivelada**

En las siguientes seis figuras se muestran los resultados y algunos análisis del proceso de calibración y validación. Para la gráfica (a) de la Figura 4-18 se observa los resultados de la calibración con el 75% de la serie de tiempo para el parámetro "K", en cada uno de los embalses del periodo 1, por medio de la función objetivo.

**Figura 4-18:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de piscina nivelada periodo 1.

**Gráfica (a) espacio paramétrico versus función objetivo**

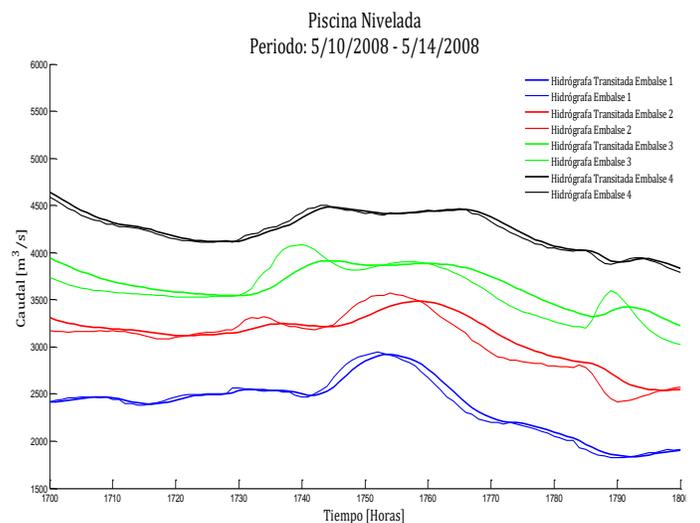
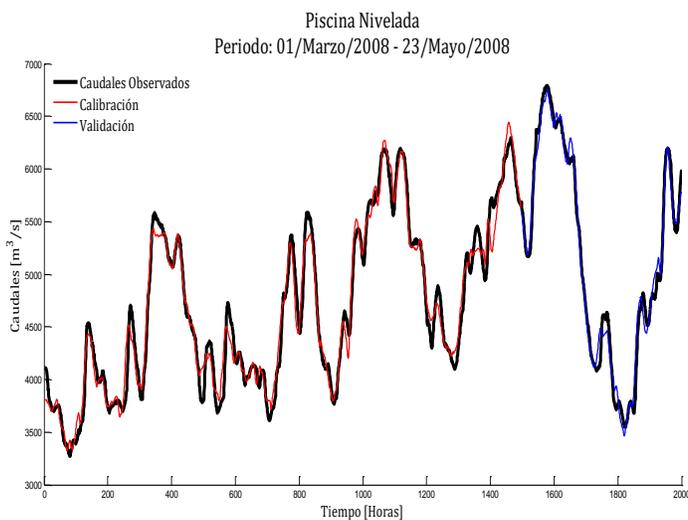
**Gráfica (b) sensibilidad paramétrica**



**Figura 4-19:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, periodo 1 tránsito de piscina nivelada.

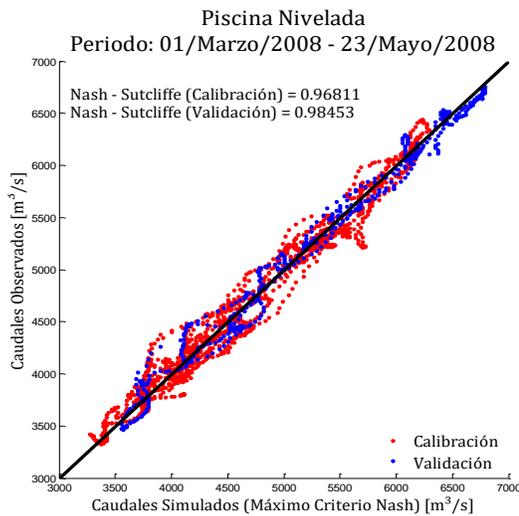
**Gráfica (a) Hidrógrafa observada VS Hidrógrafa calibrada y validada**

**Gráfica (b). Hidrógrafas de inicio y de salida transitada de cada embalse**

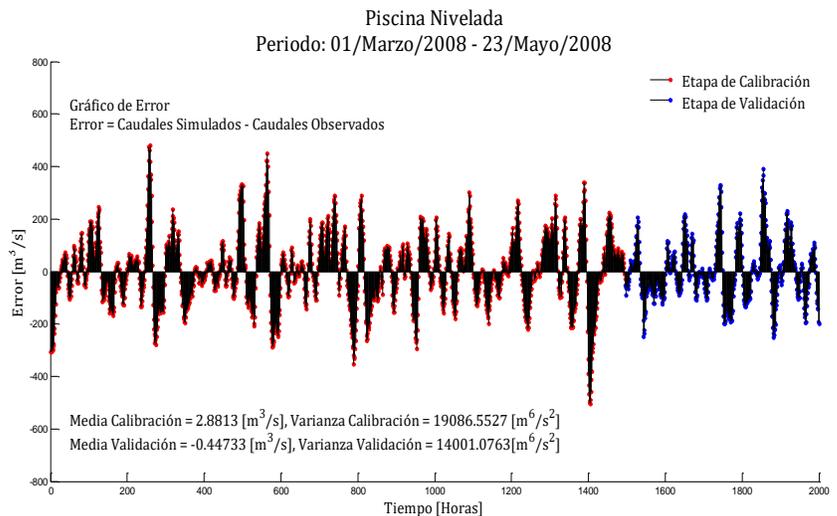


**Figura 4-20:** Gráfica (a) y la gráfica (b) son respectivamente los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada en la estación de Barrancabermeja, del periodo 1 según modelo de piscina nivelada.

**Gráfica (a). Gráfica de dispersión de las hidrógrafas calibradas y validadas**



**Gráfica (b). Gráfica de errores de calibración y de validación VS hidrógrafa observada**



**Tabla 4.7:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de piscina nivelada, del período 1.

Calibración. Modelo de piscina nivelada, período 1.						
Resultados de la calibración	K1	K2	K3	K4	Sumatoria de K	1-R2
	(horas)	(horas)	(horas)	(horas)	(horas)	
	1,72	5,95	6,91	1,49	16,07	0,035
Coef. Nash calibración	Coef. Nash validación (R2).	Media error calibración ( $m^3/s$ )	Media error validación ( $m^3/s$ )	Varianza error calibración ( $m^6/s^2$ )	Varianza error validación ( $m^6/s^2$ )	
0,968	0,984	2,881	-0,447	19.086,55 2	14.001,076	

Los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe en el proceso de calibración es de 0,968 el valor ideal es uno, en el proceso de validación el coeficiente de Nash-Sutcliffe es 0,984, como se observa en la Tabla 4.7 y que a su vez esta tabla presenta el resumen de los

resultados de las gráficas de calibración del período 1 por el tránsito de piscina nivelada (Figura 4-18, Figura 4-19 y Figura 4-20).

El valor estadístico de la media de los errores de la hidrógrafa calibrada y validada respecto a la hidrógrafa de la estación de Barrancabermeja son bajas ver Tabla 4.7, si se considera el orden de magnitud de la hidrógrafa observada en la estación limnigráfica de Barrancabermeja con caudales cercanos a 6800 m<sup>3</sup>/s.

De la gráfica (b) en la Figura 4-22 es importante indicar el desfase observado que tienen los picos de caudales en las hidrógrafas de inicio y de salida de cada embalse, para el modelo de tránsito de piscina nivelada, este desfase está relacionado directamente por el valor de “K” calibrado, con el tiempo de tránsito de cada embalse, en el periodo 1.

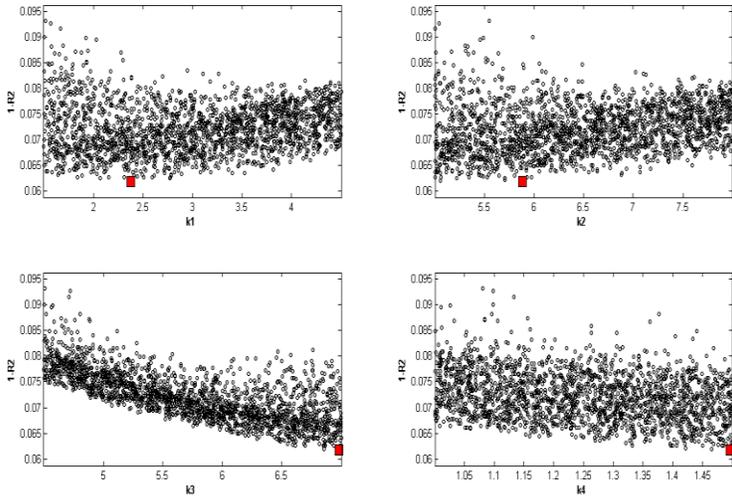
En los resultados de calibración y de validación se presentaron similitudes de la hidrógrafa de salida del cuarto y último embalse respecto a la hidrógrafa medida en la estación limnigráfica de Barrancabermeja, con los modelos de tránsitos de diferencias finitas y de piscina nivelada en el período 1. Estos resultados similares deben ser por la estructura matemática que tienen ambos modelos.

#### **4.4.2 Período 2 de calibración y validación tránsito de piscina nivelada**

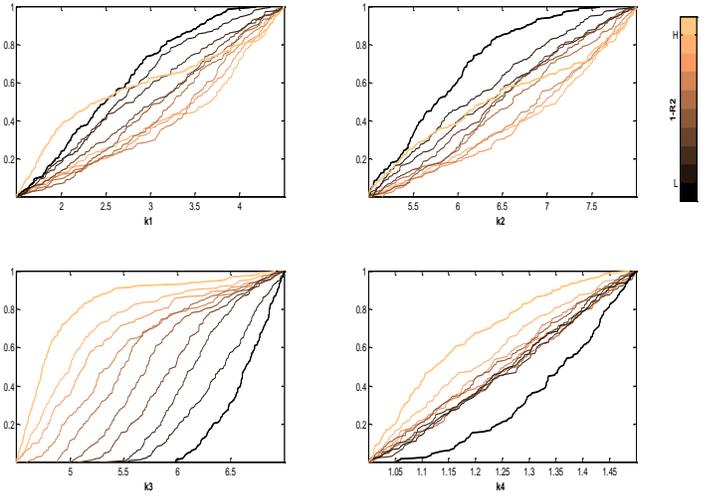
En las siguientes seis figuras se muestran los resultados y algunos análisis del proceso de calibración y validación. Para la gráfica (a) de la Figura 4-21 se observa los resultados de la calibración con el 75% de la serie de tiempo para el parámetro “K”, en cada uno de los embalses del periodo 2, por medio de la función objetivo.

**Figura 4-21:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de piscina nivelada periodo 2.

**Gráfica (a). Espacio paramétrico versus función objetivo**

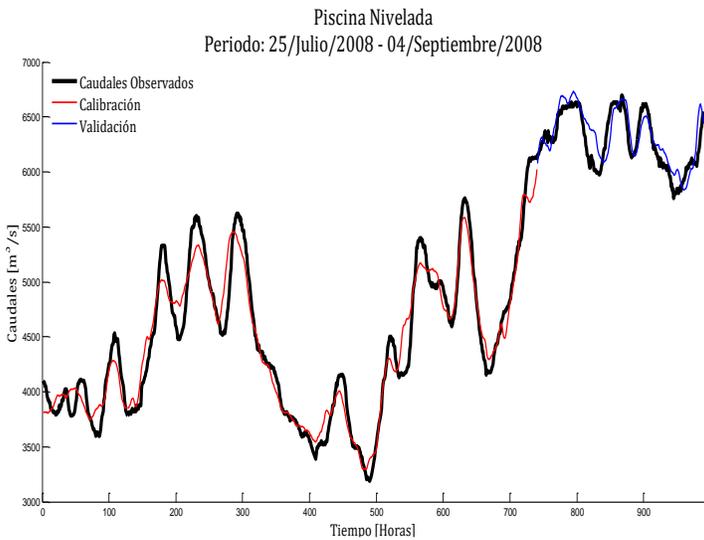


**Gráfica (b). Sensibilidad paramétrica**

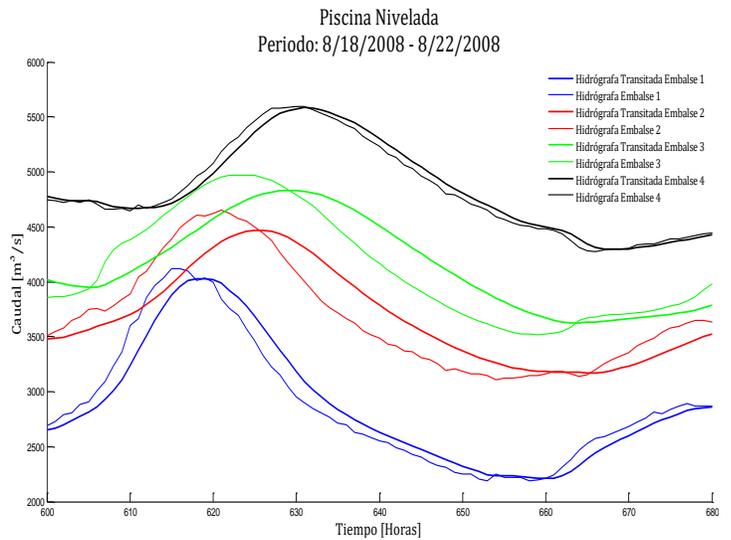


**Figura 4-22:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, período 2 tránsito de piscina nivelada.

**Gráfica (a) Hidrógrafa observada VS Hidrógrafa calibrada y validada**

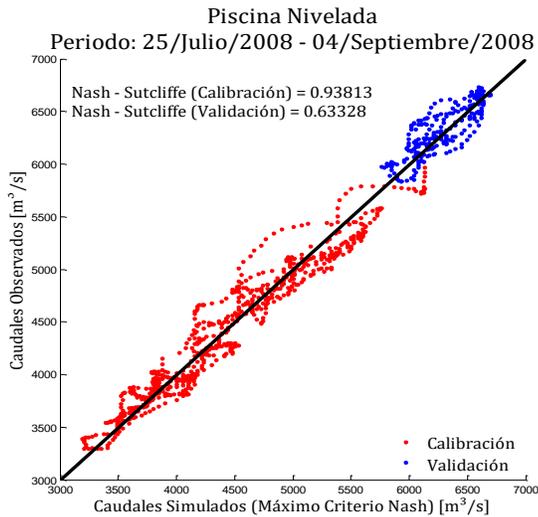


**Gráfica (b). Hidrógrafas de inicio y de salida transitada de cada embalse**

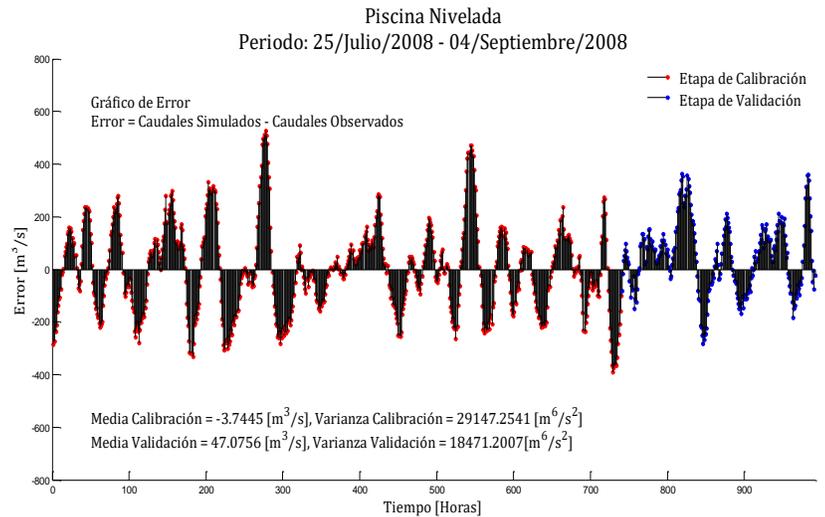


**Figura 4-23:** Gráfica (a) y la gráfica (b) son respectivamente los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada en la estación de Barrancabermeja, del periodo 2 según modelo de piscina nivelada.

**Gráfica (a). Gráfica de dispersión de las hidrógrafas calibradas y validadas**



**Gráfica (b). Gráfica de errores de calibración y de validación VS hidrógrafa observada**



**Tabla 4.8:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de piscina nivelada, del periodo 2.

Calibración. Modelo de piscina nivelada, período 2.						
Resultado s de la calibración	K1	K2	K3	K4	Sumatoria de K	1-R2
	(horas)	(horas)	(horas)	(horas)	(horas)	
	2,43	5,89	6,92	1,48	16,72	0,055 1
Coef. Nash calibración	Coef. Nash validación (R2).	Media error calibración (m³/s)	Media error validación (m³/s)	Varianza error calibración (m <sup>6</sup> /s <sup>2</sup> )	Varianza error validación (m <sup>6</sup> /s <sup>2</sup> )	
0,938	0,633	-3,744	47,075	29.147,25 4	18.471,200	

Los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe en el proceso de calibración es de 0,938 el valor ideal es uno, en el proceso de validación el coeficiente de Nash-Sutcliffe es 0,633 resultado último, aunque es aceptable lo recomendado es que sea superior a 0,90. Se

observa en la Tabla 4.8 los coeficientes mencionados y también el resumen de los resultados de las gráficas de calibración del período 2 por el tránsito de piscina nivelada (Figura 4-21, Figura 4-22 y Figura 4-23).

Es importante recordar que el tiempo de tránsito por correlación cruzada, para este periodo es de 16 horas ver Tabla 3 13 del periodo 2 y en el proceso de calibración, la sumatoria de los valores de los parámetros “K” es de 16,72 ver Tabla 4 8, lo cual indica un buen ajuste.

El valor estadístico de la media de los errores de la hidrógrafa calibrada y validada respecto a la hidrógrafa de la estación de Barrancabermeja son bajas ver Tabla 4.8, si se considera el orden de magnitud de la hidrógrafa observada en la estación limnigráfica de Barrancabermeja con caudales cercanos a 6600 m<sup>3</sup>/s.

De la gráfica (b) en la Figura 4-22 es importante indicar el desfase observado que tienen los picos de caudales en las hidrógrafas de inicio y de salida de cada embalse, para el modelo de transito de diferencias finitas, este desfase está relacionado directamente por el valor de “K” calibrado, con el tiempo de tránsito de cada embalse, en el periodo 2.

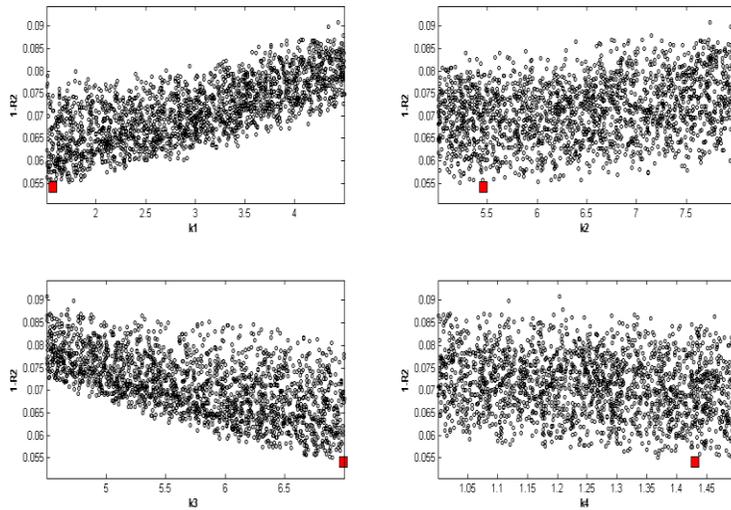
En los resultados de calibración y de validación se presentaron similitudes de la hidrógrafa de salida del cuarto y último embalse respecto a la hidrógrafa medida en la estación limnigráfica de Barrancabermeja, con los modelos de tránsitos de diferencias finitas y de piscina nivelada en el período 2. Estos resultados similares deben ser por la estructura matemática que tienen ambos modelos.

#### **4.4.3 Período 3 de calibración y validación tránsito de piscina nivelada**

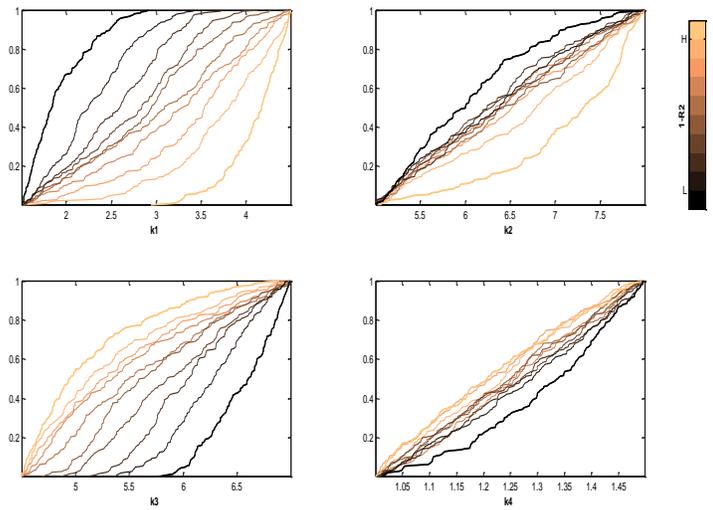
En las siguientes seis figuras se muestran los resultados y algunos análisis del proceso de calibración y validación. Para la gráfica (a) de la Figura 4-24 se observa los resultados de la calibración con el 75% de la serie de tiempo para el parámetro “K”, en cada uno de los embalses del periodo 3, por medio de la función objetivo.

**Figura 4-24:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de piscina nivelada periodo 3.

**Gráfica (a). Espacio paramétrico versus función objetivo**

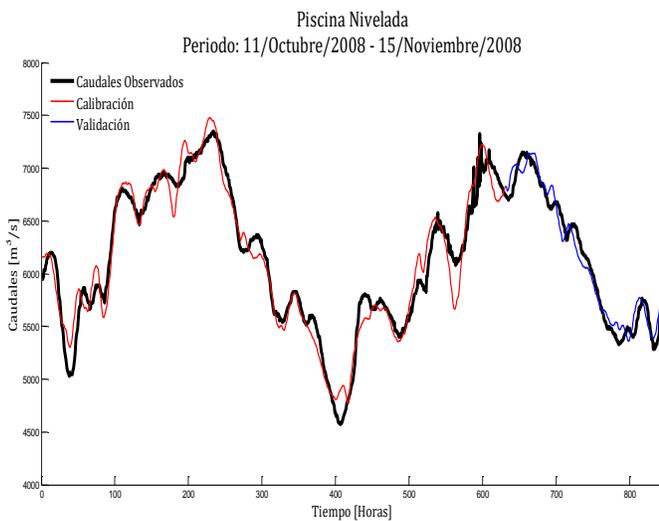


**Gráfica (b). Sensibilidad paramétrica**

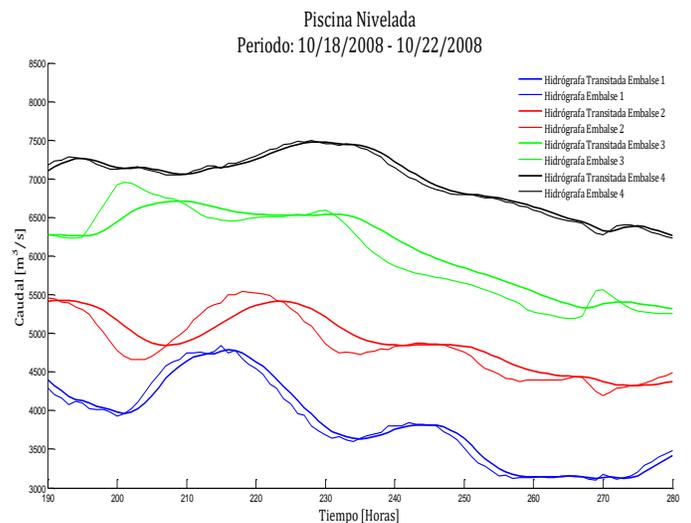


**Figura 4-25:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, periodo 3 tránsito de piscina nivelada.

**Gráfica (a) Hidrógrafa observada VS Hidrógrafa calibrada y validada**

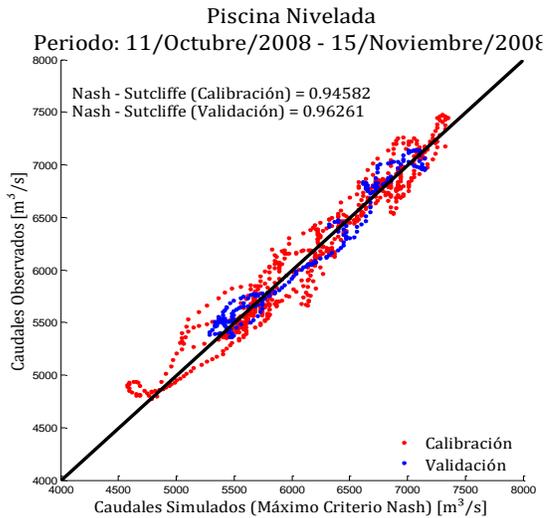


**Gráfica (b). Hidrógrafas de inicio y de salida transitada de cada embalse**

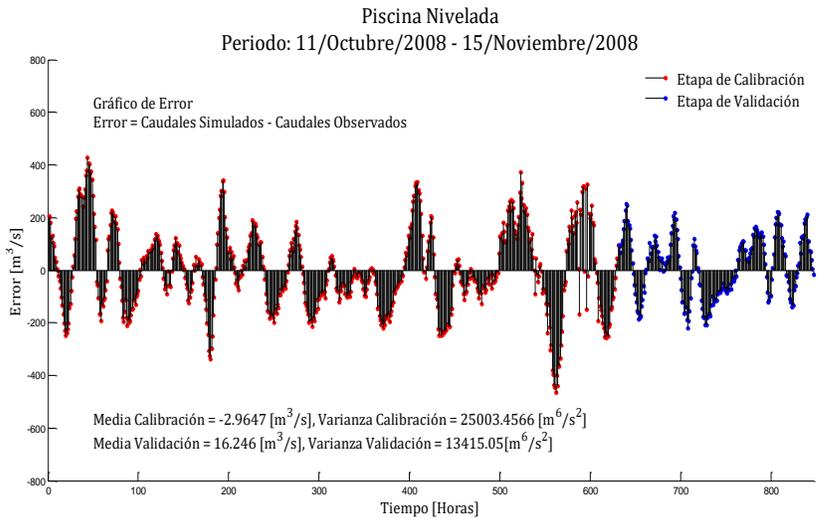


**Figura 4-26:** Gráfica (a) y la gráfica (b) son respectivamente los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada en la estación de Barrancabermeja, del periodo 3 según modelo de piscina nivelada.

**Gráfica (a). Gráfica de dispersión de las hidrógrafas calibradas y validadas**



**Gráfica (b). Gráfica de errores de calibración y de validación VS hidrógrafa observada**



**Tabla 4.9:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de piscina nivelada, del período 3.

Calibración. Modelo de piscina nivelada, período 3.						
Resultados de la calibración	K1	K2	K3	K4	Sumatoria de K	1-R2
	(horas)	(horas)	(horas)	(horas)	(horas)	
	1,53	5,48	6,99	1,43	15,43	0,049
Coef. Nash calibración	Coef. Nash validación (R2).	Media error calibración (m <sup>3</sup> /s)	Media error validación (m <sup>3</sup> /s)	Varianza error calibración (m <sup>6</sup> /s <sup>2</sup> )	Varianza error validación (m <sup>6</sup> /s <sup>2</sup> )	
0,945	0,962	-2,964	16,246	25.003,456	13.415,05	

Los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe en el proceso de calibración es de 0,945 el valor ideal es uno, en el proceso de validación el coeficiente de Nash-Sutcliffe es 0,962, como se observa en la Tabla 4 9 y que a su vez esta tabla presenta el resumen de los

resultados de las gráficas de calibración del período 3 por el tránsito de piscina nivelada ( Figura 4-24, Figura 4-25 y Figura 4-26).

El valor estadístico de la media de los errores de la hidrógrafa calibrada y validada respecto a la hidrógrafa de la estación de Barrancabermeja son bajas ver Tabla 4.9, si se considera el orden de magnitud de la hidrógrafa observada en la estación limnigráfica de Barrancabermeja con caudales cercanos a 7300 m<sup>3</sup>/s.

De la gráfica (b) en la Figura 4-25 es importante indicar el desfase observado que tienen los picos de caudales en las hidrógrafas de inicio y de salida de cada embalse, para el modelo de tránsito de piscina nivelada, este desfase está relacionado directamente por el valor de “K” calibrado, con el tiempo de tránsito de cada embalse, en el periodo 3.

En los resultados de calibración y de validación se presentaron similitudes de la hidrógrafa de salida del cuarto y último embalse respecto a la hidrógrafa medida en la estación limnigráfica de Barrancabermeja, con los modelos de transitos de diferencias finitas y de piscina nivelada en el período 3. Estos resultados similares deben ser por la estructura matemática que tienen ambos modelos.

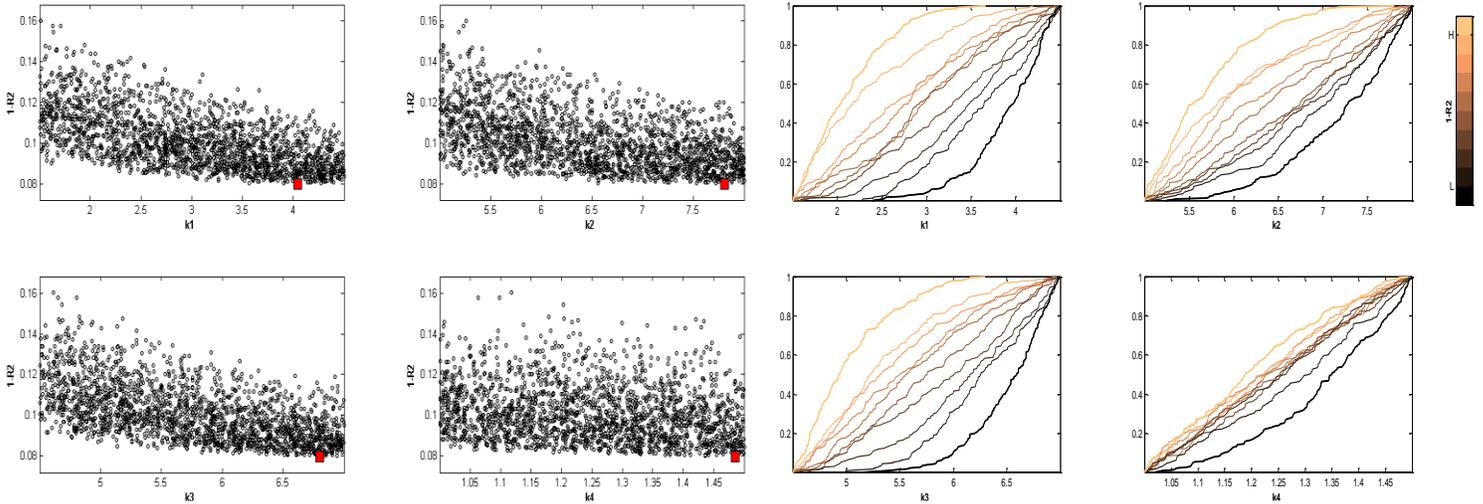
#### **4.4.4 Período 4 de calibración y validación tránsito de piscina nivelada**

En las siguientes seis figuras se muestran los resultados y algunos análisis del proceso de calibración y validación. Para la gráfica (a) de la Figura 4-27 se observa los resultados de la calibración con el 75% de la serie de tiempo para el parámetro “K”, en cada uno de los embalses del periodo 4, por medio de la función objetivo.

**Figura 4-27:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de piscina nivelada periodo 4.

**Gráfica (a). Espacio paramétrico versus función objetivo**

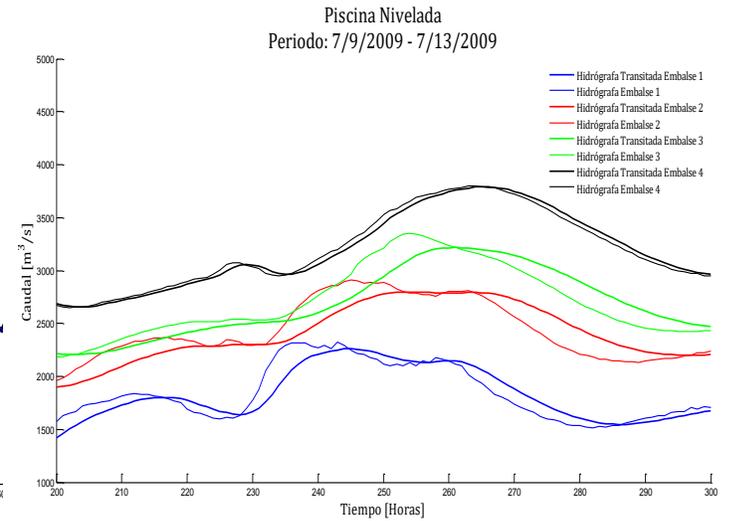
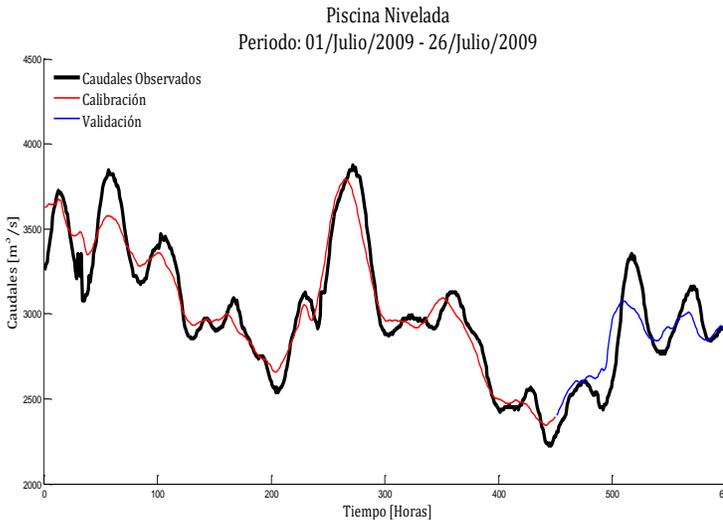
**Gráfica (b). Sensibilidad paramétrica**



**Figura 4-28:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, período 4 tránsito de piscina nivelada.

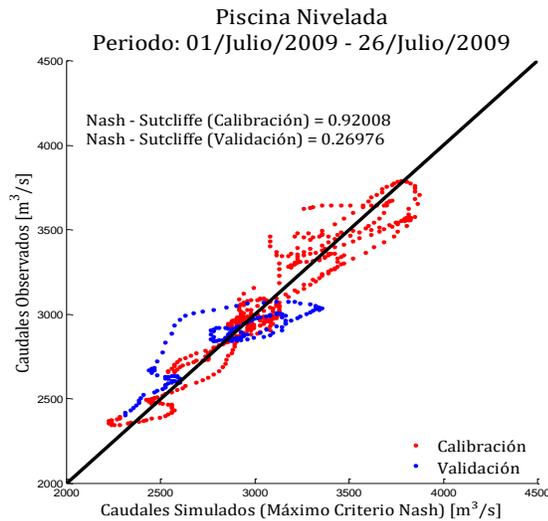
**Gráfica (a) Hidrógrafa observada VS Hidrógrafa calibrada y validada**

**Gráfica (b). Hidrógrafas de inicio y de salida transitada de cada embalse**

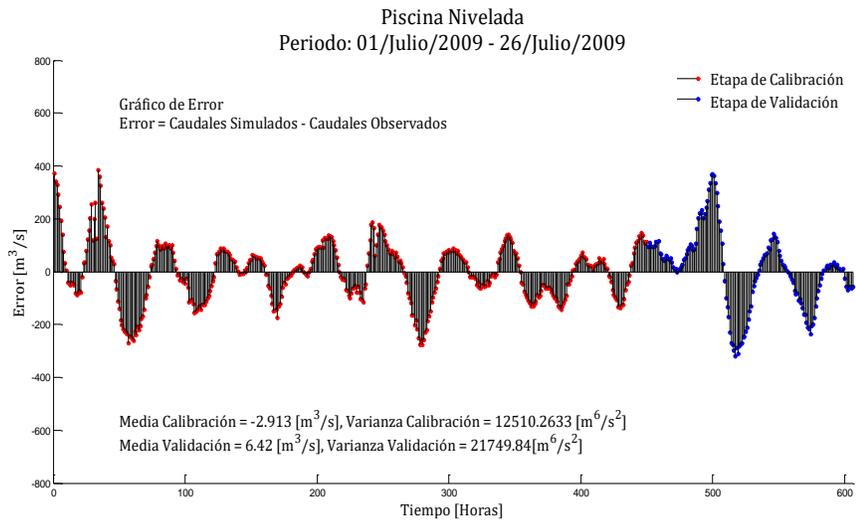


**Figura 4-29:**Gráfica (a) y la gráfica (b) son respectivamente los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada en la estación de Barrancabermeja, del periodo 4 según modelo de piscina nivelada.

**Gráfica (a). Gráfica de dispersión de las hidrógrafas calibradas y validadas**



**Gráfica (b). Gráfica de errores de calibración y de validación VS hidrógrafa observada**



**Tabla 4.10:**Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de piscina nivelada, período 4.

Calibración. Modelo de piscina nivelada, período 4.						
Resultados de la calibración	K1	K2	K3	K4	Sumatoria de K (horas)	1-R2
	(horas)	(horas)	(horas)	(horas)		
	4,04	7,73	6,74	1,47	19,98	0,051
Coef. Nash calibración	Coef. Nash validación (R2).	Media error calibración (m <sup>3</sup> /s)	Media error validación (m <sup>3</sup> /s)	Varianza error calibración (m <sup>6</sup> /s <sup>2</sup> )	Varianza error validación (m <sup>6</sup> /s <sup>2</sup> )	
0,920	0,269	-2,913	6,420	12.510,263	21.749,840	

Los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe en el proceso de calibración es de 0,920 el valor ideal es uno, en el proceso de validación el coeficiente de Nash-Sutcliffe es 0,269 resultado último, aunque es bajo lo recomendado es que sea superior a 0,90. Se observa en la Tabla 4 10 los coeficientes mencionados y también el resumen de los resultados de

las gráficas de calibración del período 2 por el tránsito de piscina nivelada (Figura 4-27, Figura 4-28 y Figura 4-29).

Es importante recordar que el tiempo de tránsito por correlación cruzada, para este periodo es de 18 horas ver Tabla 3.13 del periodo 4 y en el proceso de calibración, la sumatoria de los valores de los parámetros “K” es de 19,98 ver Tabla 4 10, lo cual indica un buen ajuste.

El valor estadístico de la media de los errores de la hidrógrafa calibrada y validada respecto a la hidrógrafa de la estación de Barrancabermeja son bajas ver Tabla 4.10, si se considera el orden de magnitud de la hidrógrafa observada en la estación limnigráfica de Barrancabermeja con caudales cercanos a 3900 m<sup>3</sup>/s.

De la gráfica (b) en la Figura 4-28 es importante indicar el desfase observado que tienen los picos de caudales en las hidrógrafas de inicio y de salida de cada embalse, para el modelo de tránsito de piscina nivelada, este desfase está relacionado directamente por el valor de “K” calibrado, con el tiempo de tránsito de cada embalse, en el periodo 4.

En los resultados de calibración y de validación se presentaron similitudes de la hidrógrafa de salida del cuarto y último embalse respecto a la hidrógrafa medida en la estación limnigráfica de Barrancabermeja, con los modelos de tránsitos de diferencias finitas y de piscina nivelada en el período 4. Estos resultados similares deben ser por la estructura matemática que tienen ambos modelos.

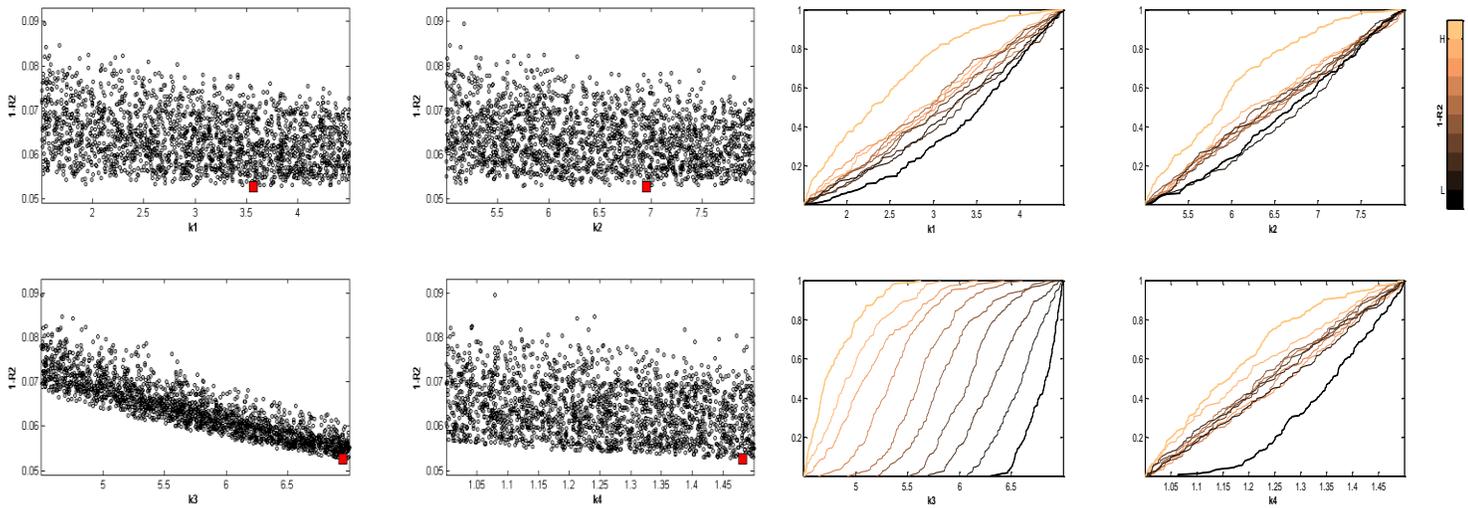
#### **4.4.5 Período 5 de calibración y validación tránsito de piscina nivelada**

En las siguientes seis figuras se muestran los resultados y algunos análisis del proceso de calibración y validación. Para la gráfica (a) de la Figura 4-30 se observa los resultados de la calibración con el 75% de la serie de tiempo para el parámetro “K”, en cada uno de los embalses del periodo 4, por medio de la función objetivo.

**Figura 4-30:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de piscina nivelada periodo 5.

**Gráfica (a). Espacio paramétrico versus función objetivo**

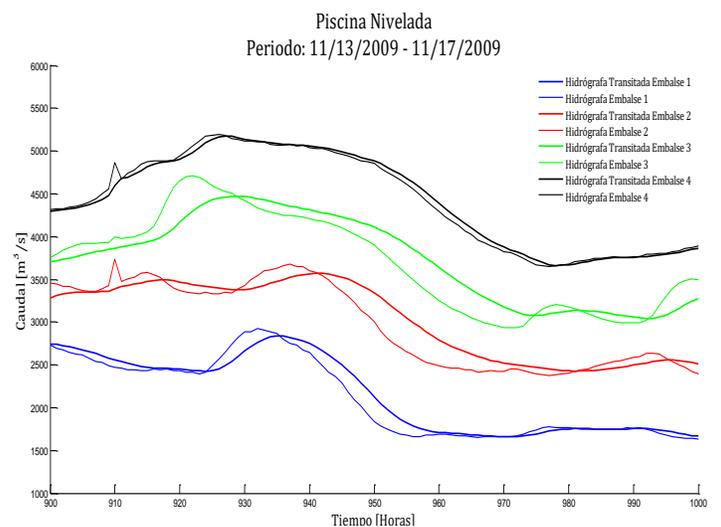
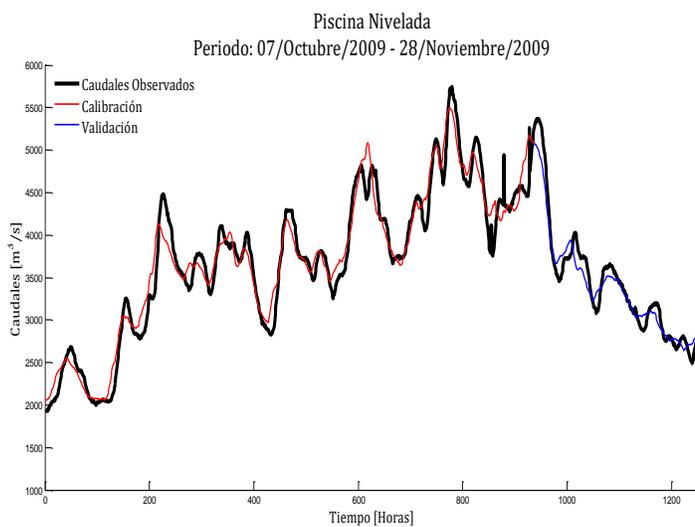
**Gráfica (b). Sensibilidad paramétrica**



**Figura 4-31:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, período 5 tránsito de piscina nivelada.

**Gráfica (a) Hidrógrafa observada VS Hidrógrafa calibrada y validada**

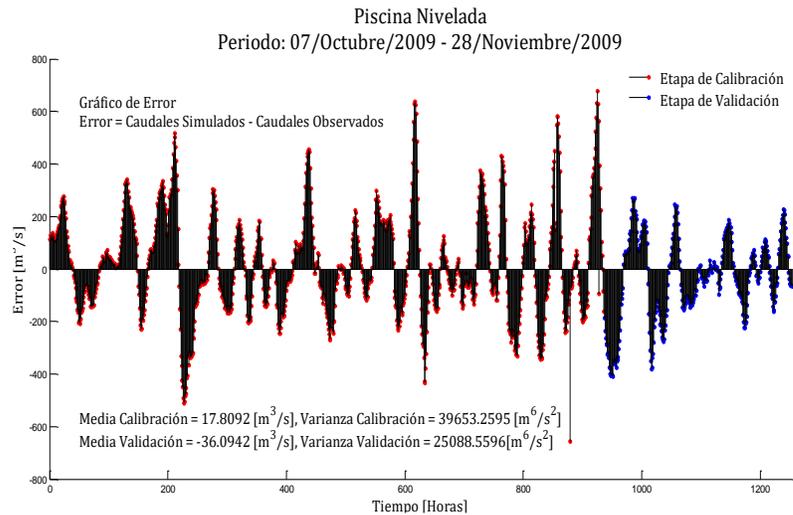
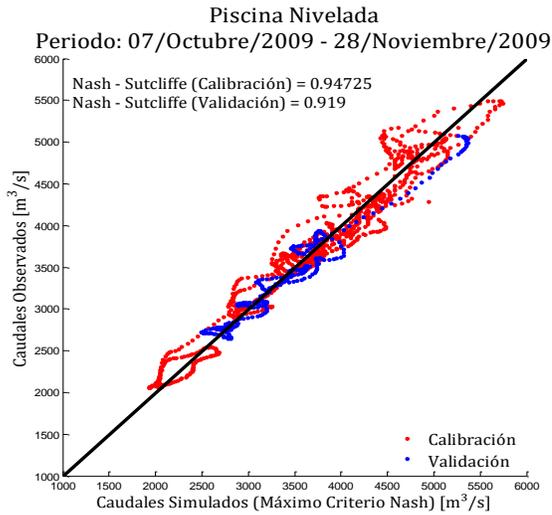
**Gráfica (b). Hidrógrafas de inicio y de salida transitada de cada embalse**



**Figura 4-32:** La gráfica (a) y la gráfica (b) son los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada, del periodo 5 según modelo de piscina nivelada.

**Gráfica (a). Gráfica de dispersión de las hidrógrafas calibradas y validadas**

**Gráfica (b). Gráfica de errores de calibración y de validación VS hidrógrafa observada**



**Tabla 4.11:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de piscina nivelada, del período 5.

Calibración. Modelo de piscina nivelada, período 5.						
Resultados de la calibración	K1	K2	K3	K4	Sumatoria de K	1-R2
	(horas)	(horas)	(horas)	(horas)	(horas)	
	2,44	5,45	7,43	1,47	16,79	0,035
Coef. Nash calibración	Coef. Nash validación (R2).	Media error calibración (m <sup>3</sup> /s)	Media error validación (m <sup>3</sup> /s)	Varianza error calibración (m <sup>6</sup> /s <sup>2</sup> )	Varianza error validación (m <sup>6</sup> /s <sup>2</sup> )	
0,947	0,919	17,809	-36,094	39.653,25	25.088,55	

Los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe en el proceso de calibración es de 0,947 el valor ideal es uno, en el proceso de validación el coeficiente de Nash-Sutcliffe es 0,919, como se observa en la Tabla 4.11 y que a su vez esta tabla presenta el resumen de los resultados de las gráficas de calibración del período 5 por el tránsito de piscina nivelada (Figura 4-30, Figura 4-31 y Figura 4-32).

El valor estadístico de la media de los errores de la hidrógrafa calibrada y validada respecto a la hidrógrafa de la estación de Barrancabermeja son bajas ver Tabla 4.11, si se considera el orden de magnitud de la hidrógrafa observada en la estación limnigráfica de Barrancabermeja con caudales cercanos a 5700 m<sup>3</sup>/s.

De la gráfica (b) en la Figura 4-31 es importante indicar el desfase observado que tienen los picos de caudales en las hidrógrafas de inicio y de salida de cada embalse, para el modelo de tránsito de piscina nivelada, este desfase está relacionado directamente por el valor de "K" calibrado, con el tiempo de tránsito de cada embalse, en el periodo 5.

En los resultados de calibración y de validación se presentaron similitudes de la hidrógrafa de salida del cuarto y último embalse respecto a la hidrógrafa medida en la estación limnigráfica de Barrancabermeja, con los modelos de tránsitos de diferencias finitas y de piscina nivelada en el período 5. Estos resultados similares deben ser por la estructura matemática que tienen ambos modelos.

## **4.5 Calibración, validación y análisis de resultados del modelo de tránsito de Muskingum**

Se presentan los resultados de la calibración y de la validación de los cinco periodos seleccionados, producto de las simulaciones realizadas en el modelo de tránsito de Muskingum, por medio de las siguientes seis gráficas: gráficas de dispersión en el espacio paramétrico VS función objetiva, gráficas de análisis de sensibilidad paramétrica VS parámetro calibrado, gráfica de hidrógrafa calibrada-validada estación de Barrancabermeja, gráfica de las hidrógrafas transitadas de los cuatro embalses, dispersión de los caudales observados VS Caudales simulados de la calibración, y la gráfica de errores de caudales observados VS caudales calibrados y validados.

Es importante mencionar que el tránsito de Muskingum presenta diferencias en los resultados de calibración y de validación, respecto a los modelos de tránsitos de diferencias finitas y de piscina nivelada. Lo anterior debe ser porque el tránsito de

Muskingum tiene dos parámetros a calibrar “K” y “X”, mientras los modelos de diferencias finitas y piscina nivelada tiene un solo parámetro de calibración “K” para cada embalse.

Se tomo el mejor resultado de la función objetivo, determinado por el programa de MCAT V-2,0 para los valores del parámetro de calibración de “K” y “X” en cada uno de los embalses para los cinco periodos. La función objetivo de la calibración del presente proyecto es denominado (1-R2), siendo (R2) el resultado calculado del coeficiente Nash-Sutcliffe.

El segundo parámetro es (X) para calibrar y validar en el tránsito de Muskingum, el cual se tomó en el rango (0 – 0,5). Para cada uno de los embalses transitados se realizaron dos mil simulaciones aleatorias por medio del método de Monte Carlo, en los valores del rango mencionado.

Un resultado interesante encontrado es que al sumar los valores de K de los cuatro embales, se aproxima a las 16 horas asumidas para el tiempo de tránsito, apoyado con la función de correlación cruzada, para todas las simulaciones. Específicamente fluctúa el tiempo de tránsito en el tramo de estudio con el rango de 16 horas a 18 horas (ver Tabla 3.13), según resultados de la calibración del modelo de tránsito de Muskingum, para los cinco periodos.

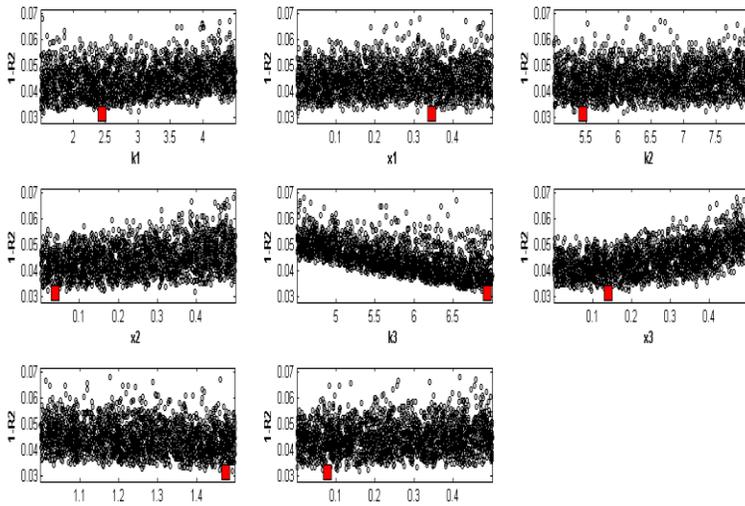
La hidrógrafa como punto de referencia para chequear la calibración y validación es la hidrógrafa observada en la estación limnigráfica de Barrancabermeja, ubicada al terminar la zona de estudio. Los análisis generales de la calibración y validación de los modelos se realizan en la próxima sección 4.5 y 4.6 del documento.

#### **4.5.1 Período 1 de calibración y validación tránsito de Muskingum**

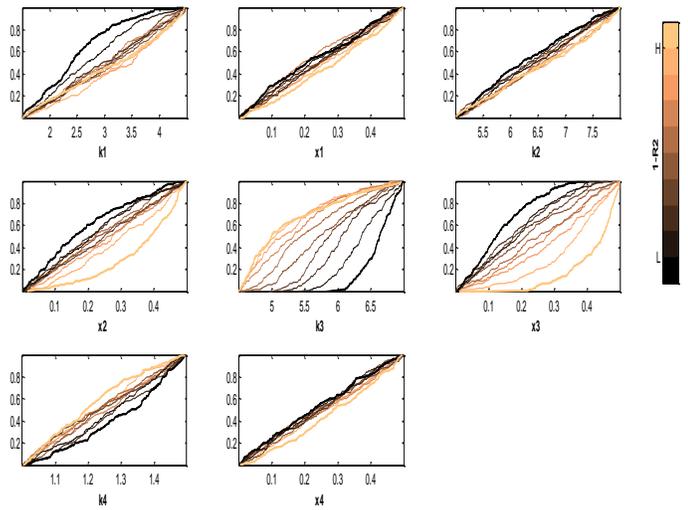
En las siguientes seis figuras se muestran los resultados y algunos análisis del proceso de calibración. Para la gráfica (a) de la Figura 4-33 se observa los resultados de la calibración con el 75% de la serie de tiempo para el parámetro “K”, en cada uno de los embalses del periodo 1, por medio de la función objetivo.

**Figura 4-33:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” y “X” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” y “X” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de Muskingum periodo 1.

**Gráfica (a) espacio paramétrico versus función objetivo**

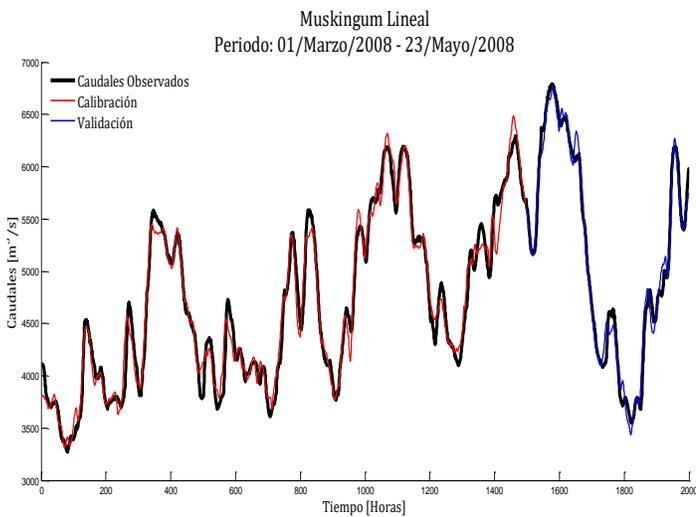


**Gráfica (b) sensibilidad paramétrica**

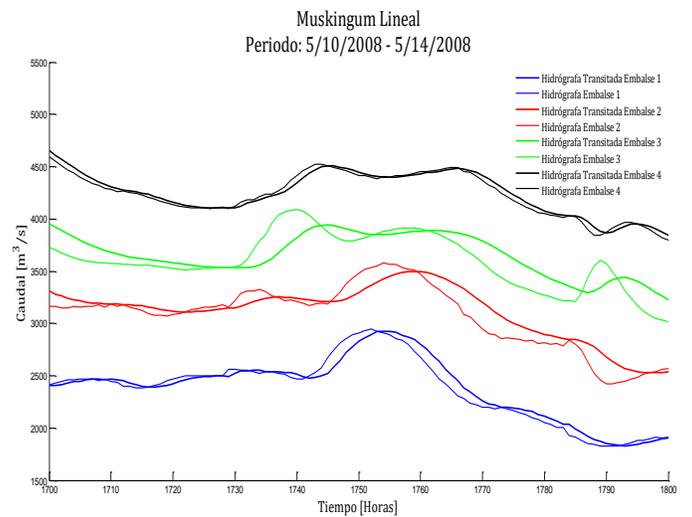


**Figura 4-34:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, período 1 tránsito de Muskingum.

**Gráfica (a) Hidrógrafa observada VS Hidrógrafa calibrada y validada**

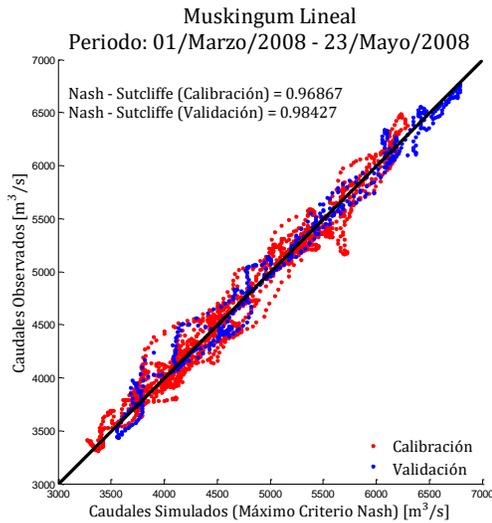


**Gráfica (b). Hidrógrafas de inicio y de salida transitada de cada embalse**

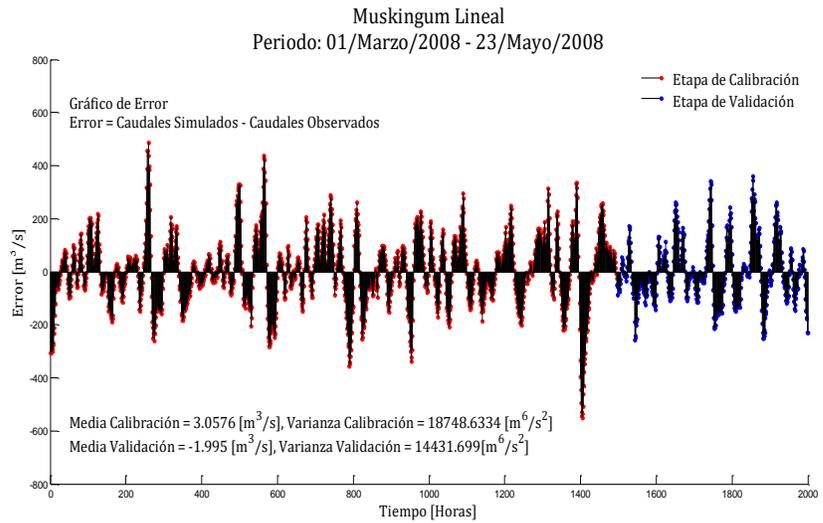


**Figura 4-35:** La gráfica (a) y la gráfica (b) son los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada, del periodo 1 según modelo de Muskingum.

**Gráfica (a). Gráfica de dispersión de las hidrógrafas calibradas y validadas**



**Gráfica (b). Gráfica de errores de calibración y de validación VS hidrógrafa observada**



**Tabla 4.12:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de Muskingum, del periodo 1.

Calibración. Modelo de Muskingum, periodo 1.					
Resultados de la calibración	K1	K2	K3	K4	Sumatoria de K (horas)
	(horas)	(horas)	(horas)	(horas)	
		2,48	5,47	6,95	1,47
	X1	X2	X3	X4	1-R2
	0,342	0,041	0,142	0,086	0,0275
Coef. Nash Calibrac.	Coef. Nash validación (R2).	Media error calibración (m³/s)	Media error validación (m³/s)	Varianza error calibración (m⁶/s²)	Varianza error validación (m⁶/s²)
0,968	0,984	3,057	-1,995	18.748,634	14.431,699

Los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe en el proceso de calibración es de 0,968 el valor ideal es uno, en el proceso de validación el coeficiente de Nash-Sutcliffe es 0,984,

como se observa en la Tabla 4.12 y que a su vez esta tabla presenta el resumen de los resultados de las gráficas de calibración del período 1 por el tránsito de Muskingum (Figura 4-33, Figura 4-34 y Figura 4-35).

El valor estadístico de la media de los errores de la hidrógrafa calibrada y validada respecto a la hidrógrafa de la estación de Barrancabermeja son bajas ver Tabla 4.12, si se considera el orden de magnitud de la hidrógrafa observada en la estación limnigráfica de Barrancabermeja con caudales cercanos a 6800 m<sup>3</sup>/s.

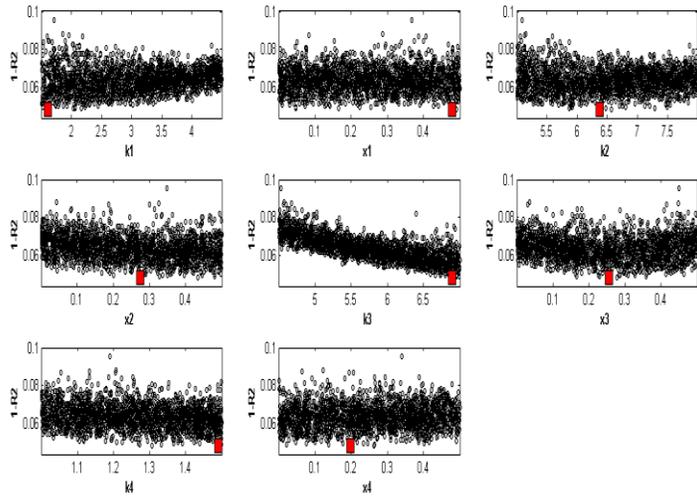
De la gráfica (b) en la Figura 4-34 es importante indicar el desfase observado que tienen los picos de caudales en las hidrógrafas de inicio y de salida de cada embalse, para el modelo de tránsito de Muskingum, este desfase está relacionado directamente por el valor de “K” y “X” calibrado, con el tiempo de tránsito de cada embalse, en el periodo 1.

#### **4.5.2 Período 2 de calibración y validación tránsito de Muskingum**

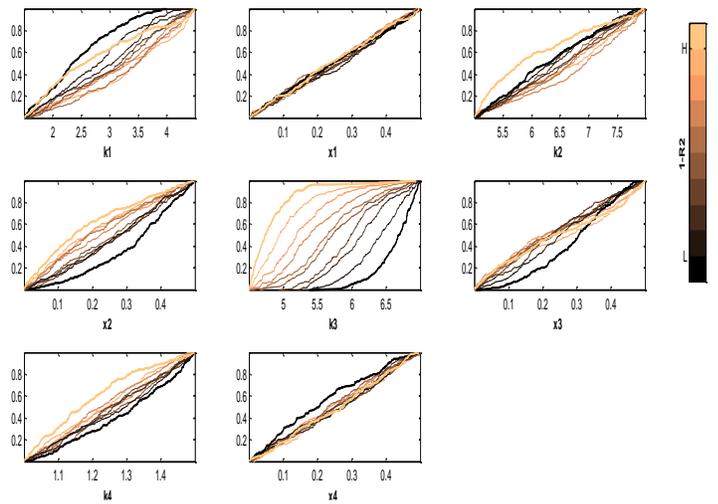
En las siguientes seis figuras se muestran los resultados y algunos análisis del proceso de calibración y validación. Para la gráfica (a) de la Figura 4-36 se observa los resultados de la calibración con el 75% de la serie de tiempo para el parámetro “K”, en cada uno de los embalses del periodo 2, por medio de la función objetivo.

**Figura 4-36:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” y “X” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” y “X” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de Muskingum periodo 2.

**Gráfica (a). Espacio paramétrico versus función objetivo**

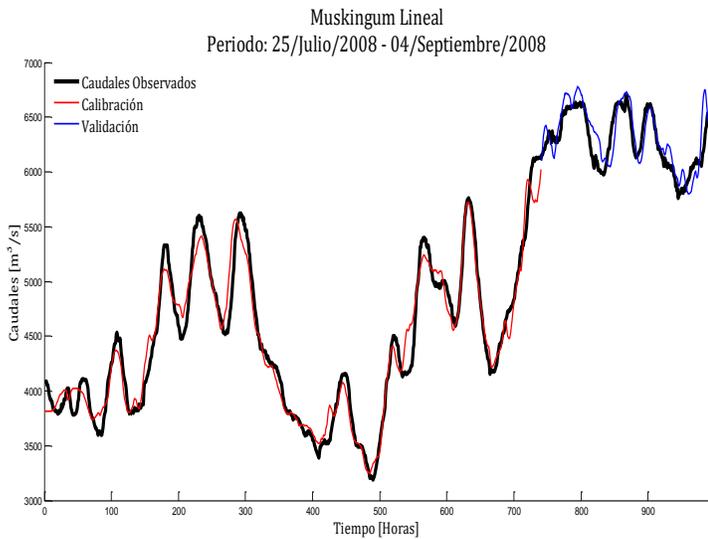


**Gráfica (b). Sensibilidad paramétrica**

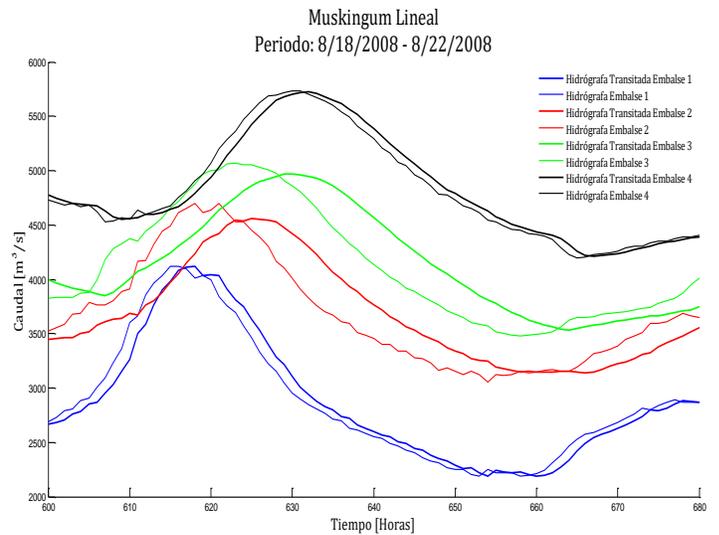


**Figura 4-37:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, período 2 tránsito de Muskingum.

**Gráfica (a) Hidrógrafa observada VS Hidrógrafa calibrada y validada**

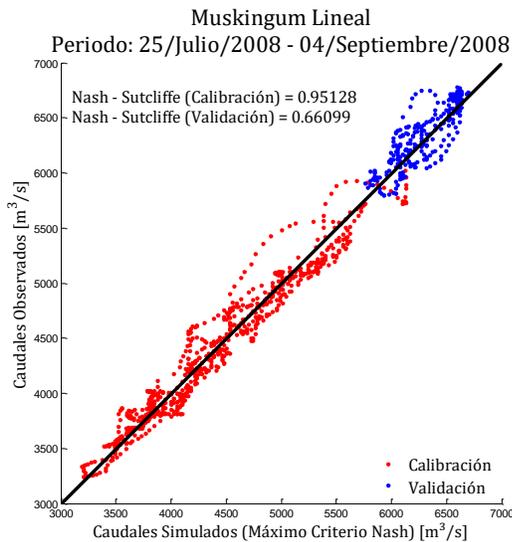


**Gráfica (b). Hidrógrafas de inicio y de salida transitada de cada embalse**

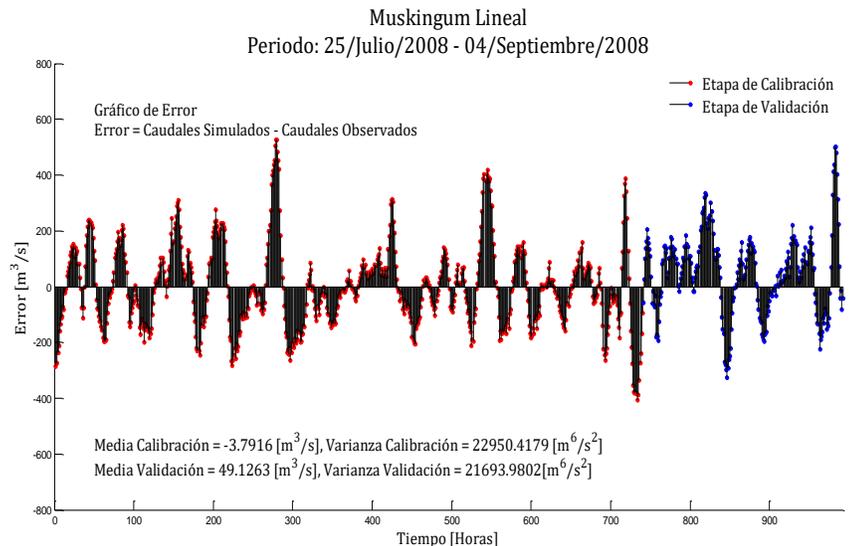


**Figura 4-38:** La gráfica (a) y la gráfica (b) son los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada, del periodo 2 según modelo de Muskingum.

**Gráfica (a). Gráfica de dispersión de las hidrógrafas calibradas y validadas**



**Gráfica (b). Gráfica de errores de calibración y de validación VS hidrógrafa observada**



**Tabla 4.13:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de Muskingum, del periodo 2.

Calibración. Modelo de Muskingum, periodo 2.					
Resultados de la calibración	K1	K2	K3	K4	Sumatoria de K (horas)
	(horas)	(horas)	(horas)	(horas)	
		1,58	6,43	6,85	1,49
Coef. Nash Calibrac.	X1	X2	X3	X4	1-R2
	0,471	0,282	0,269	0,196	0,040
Coef. Nash Calibrac.	Coef. Nash validación (R2).	Media error calibración (m <sup>3</sup> /s)	Media error validación (m <sup>3</sup> /s)	Varianza error calibración (m <sup>6</sup> /s <sup>2</sup> )	Varianza error validación (m <sup>6</sup> /s <sup>2</sup> )
0,951	0,660	-3,791	49,126	22.950,417	21.693,980

Los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe en el proceso de calibración es de 0,951 el valor ideal es uno, en el proceso de validación el coeficiente de Nash-Sutcliffe es 0,660

resultado último, aunque es aceptable lo recomendado es que sea superior a 0,90. Se observa en la Tabla 4.13 los coeficientes mencionados y también el resumen de los resultados de las gráficas de calibración del período 2 por el tránsito de Muskingum (Figura 4-36, Figura 4-37 y Figura 4-38).

Es importante recordar que el tiempo de tránsito por correlación cruzada, para este periodo es de 16 horas ver Tabla 3.13 del periodo 2 y en el proceso de calibración, la sumatoria de los valores de los parámetros “K” es de 16,35 ver Tabla 4.13, lo cual indica un buen ajuste.

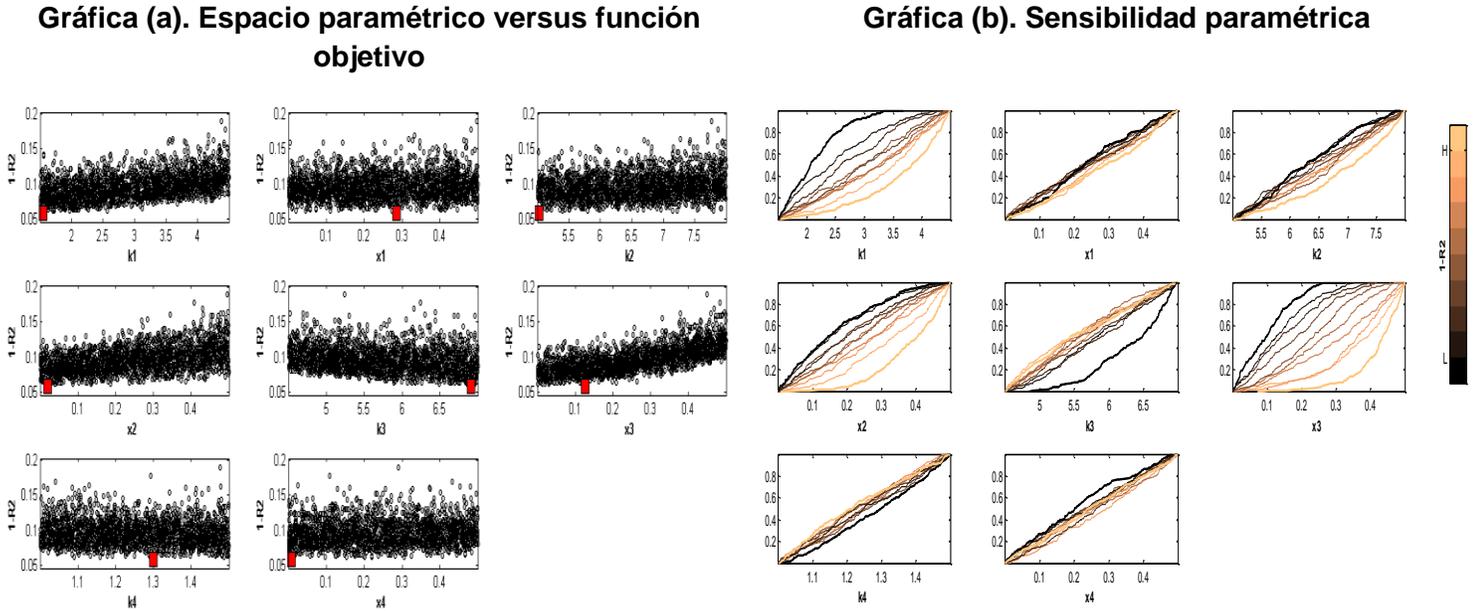
El valor estadístico de la media de los errores de la hidrógrafa calibrada y validada respecto a la hidrógrafa de la estación de Barrancabermeja son bajas ver Tabla 4.13, si se considera el orden de magnitud de la hidrógrafa observada en la estación limnigráfica de Barrancabermeja con caudales cercanos a 6600 m<sup>3</sup>/s.

De la gráfica (b) en la Figura 4-37 es importante indicar el desfase observado que tienen los picos de caudales en las hidrógrafas de inicio y de salida de cada embalse, para el modelo de tránsito de Muskingum, este desfase está relacionado directamente por el valor de “K” calibrado, con el tiempo de tránsito de cada embalse, en el periodo 2.

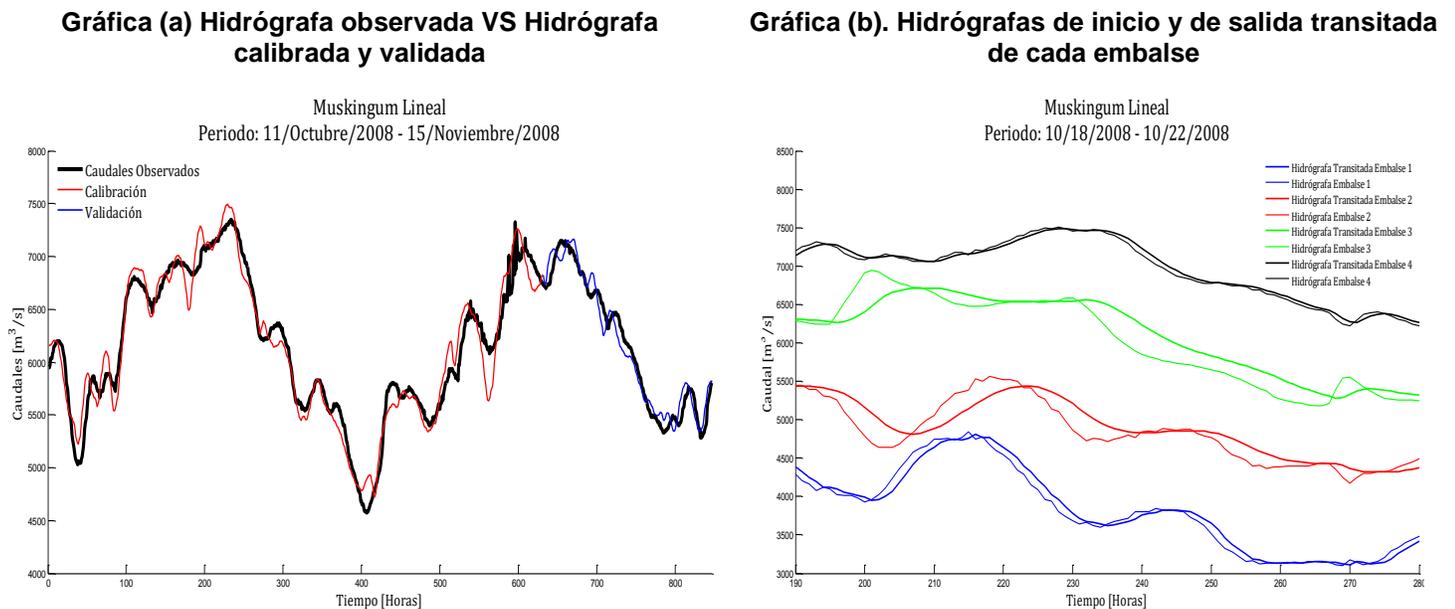
### **4.5.3 Período 3 de calibración y validación tránsito de Muskingum**

En las siguientes seis figuras se muestran los resultados y algunos análisis del proceso de calibración y validación. Para la gráfica (a) de la Figura 4-39 se observa los resultados de la calibración con el 75% de la serie de tiempo para el parámetro “K”, en cada uno de los embalses del periodo 3, por medio de la función objetivo.

**Figura 4-39:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” y “X” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” y “X” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de Muskingum periodo 3.

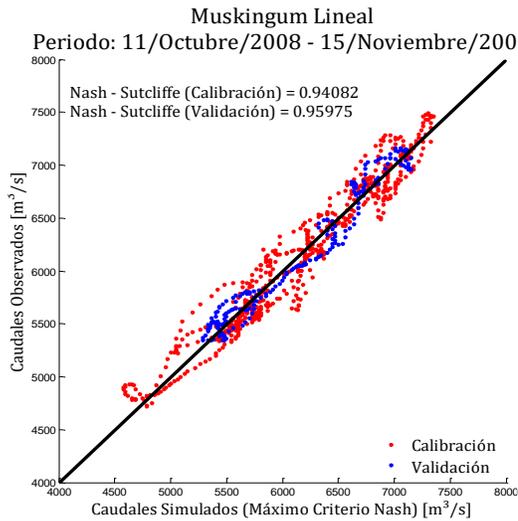


**Figura 4-40:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, período 3 tránsito de Muskingum.

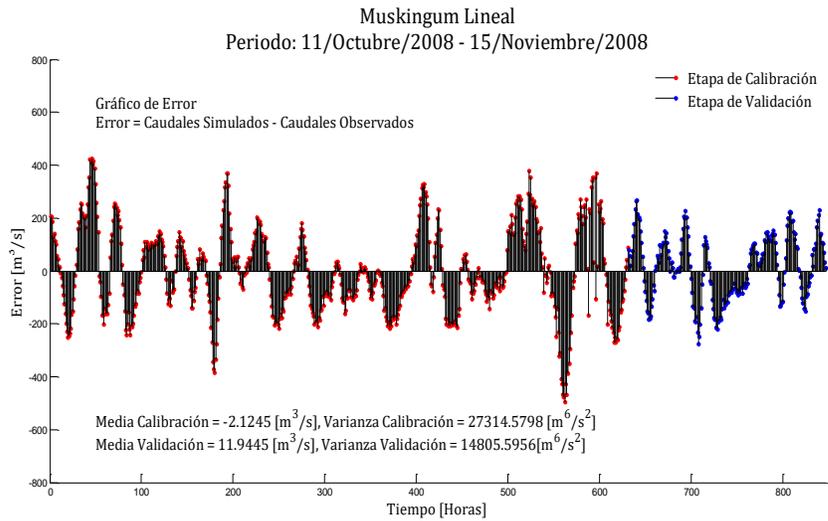


**Figura 4-41:** La gráfica (a) y la gráfica (b) son los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada, del periodo 3 según modelo de Muskingum.

**Gráfica (a). Gráfica de dispersión de las hidrógrafas calibradas y validadas**



**Gráfica (b). Gráfica de errores de calibración y de validación VS hidrógrafa observada**



**Tabla 4.14:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de Muskingum, del periodo 3.

<b>Calibración. Modelo de Muskingum con cuña. Periodo 3.</b>					
<b>Resultados de Simulación</b>	<b>K1 (horas)</b>	<b>K2 (horas)</b>	<b>K3 (horas)</b>	<b>K4 (horas)</b>	<b>Sumatoria de K (horas)</b>
<b>1</b>	1,54	6,91	6,95	1,30	<b>14,88</b>
	<b>X1</b>	<b>X2</b>	<b>X3</b>	<b>X4</b>	<b>1-R2</b>
	0,293	0,015	0,123	0,007	0,05633
<b>Coef. Nash Calibrac. (R2).</b>	<b>Coef. Nash validación (R2).</b>	<b>Media error calibración (m<sup>3</sup>/s)</b>	<b>Media error validación (m<sup>3</sup>/s)</b>	<b>Varianza error calibración (m<sup>6</sup>/s<sup>2</sup>)</b>	<b>Varianza error validación (m<sup>6</sup>/s<sup>2</sup>)</b>
0,940	0,959	-2,124	11,944	27.314,579	14.805,595

Los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe en el proceso de calibración es de 0,940 el valor ideal es uno, en el proceso de validación el coeficiente de Nash-Sutcliffe es 0,959, como se observa en la Tabla 4.14 y que a su vez esta tabla presenta el resumen de los

resultados de las gráficas de calibración del período 3 por el tránsito de Muskingum (Figura 4-39, Figura 4-40 y Figura 4-41).

El valor estadístico de la media de los errores de la hidrógrafa calibrada y validada respecto a la hidrógrafa de la estación de Barrancabermeja son bajas ver Tabla 4.14, si se considera el orden de magnitud de la hidrógrafa observada en la estación limnigráfica de Barrancabermeja con caudales cercanos a 7300 m<sup>3</sup>/s.

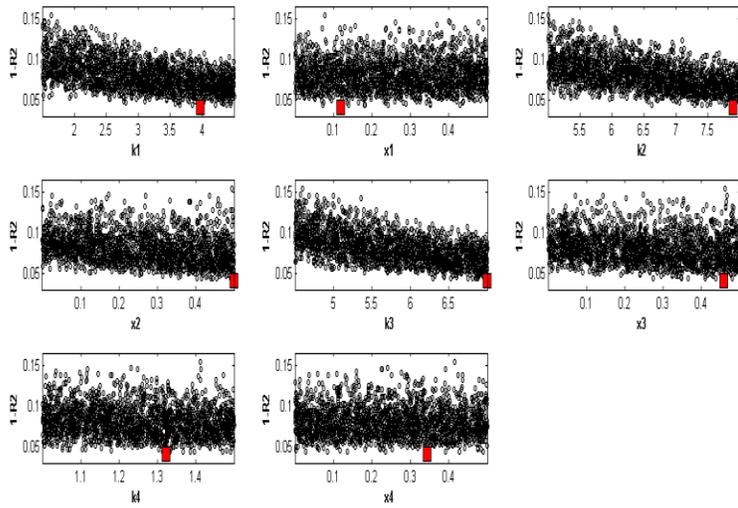
De la gráfica (b) en la Figura 4-40 es importante indicar el desfase observado que tienen los picos de caudales en las hidrógrafas de inicio y de salida de cada embalse, para el modelo de tránsito de piscina nivelada, este desfase está relacionado directamente por el valor de “K” calibrado, con el tiempo de tránsito de cada embalse, en el periodo 3.

#### **4.5.4 Período 4 de calibración y validación tránsito de Muskingum**

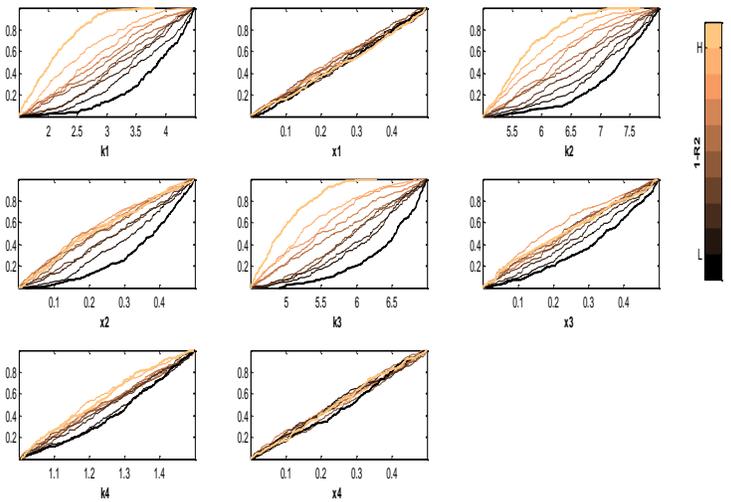
En las siguientes seis figuras se muestran los resultados y algunos análisis del proceso de calibración y validación. Para la gráfica (a) de la Figura 4-42 se observa los resultados de la calibración con el 75% de la serie de tiempo para el parámetro “K”, en cada uno de los embalses del periodo 4, por medio de la función objetivo.

**Figura 4-42:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” y “X” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” y “X” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de Muskingum periodo 4.

**Gráfica (a). Espacio paramétrico versus función objetivo**

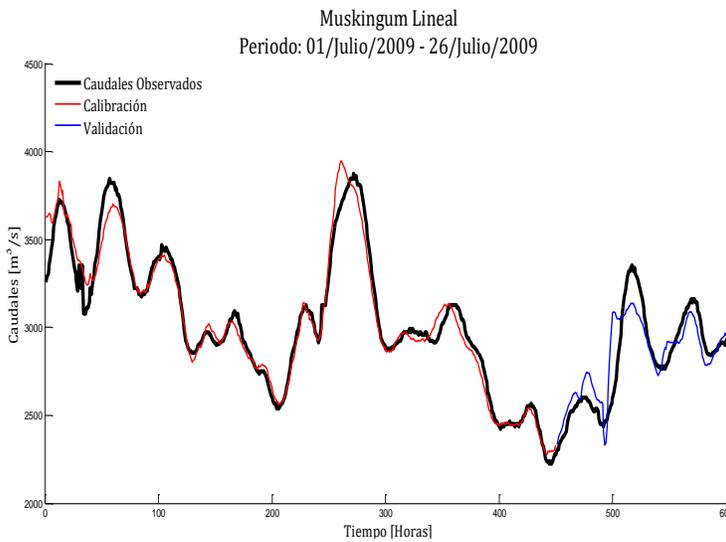


**Gráfica (b). Sensibilidad paramétrica**

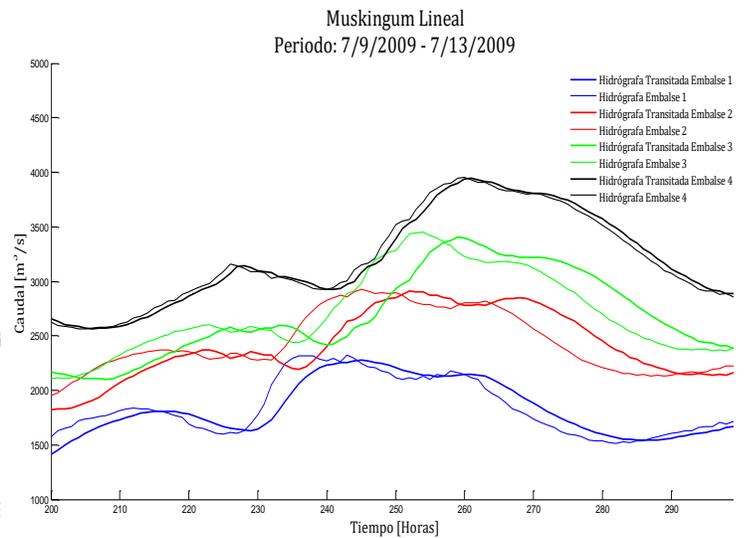


**Figura 4-43:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, período 4 tránsito de Muskingum.

**Gráfica (a) Hidrógrafa observada VS Hidrógrafa calibrada y validada**

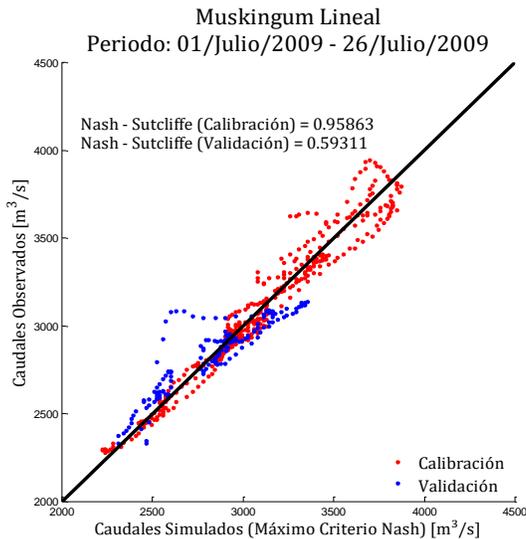


**Gráfica (b). Hidrógrafas de inicio y de salida transitada de cada embalse**

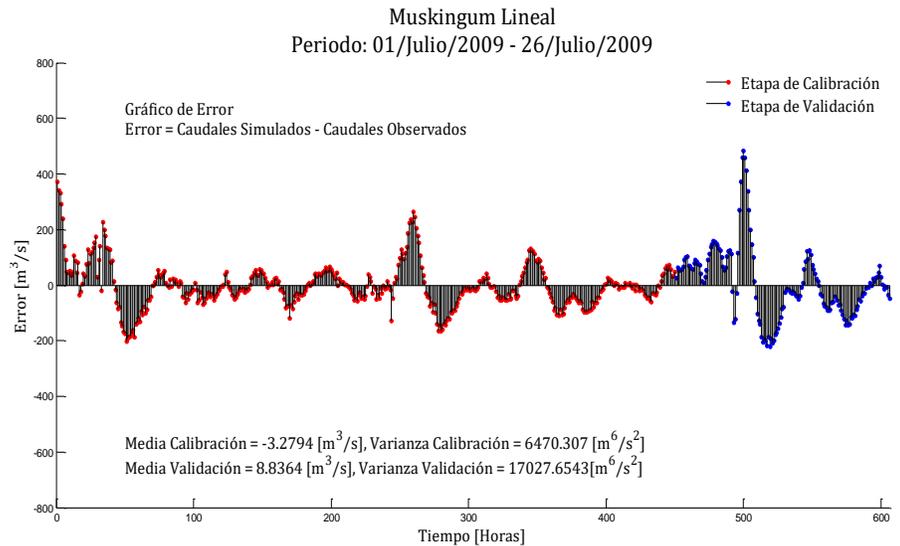


**Figura 4-44:** La gráfica (a) y la gráfica (b) son los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada, del periodo 4 según modelo de Muskingum.

**Gráfica (a). Gráfica de dispersión de las hidrógrafas calibradas y validadas**



**Gráfica (b). Gráfica de errores de calibración y de validación VS hidrógrafa observada**



**Tabla 4.15:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de Muskingum, del periodo 4.

<b>Calibración. Modelo de Muskingum con cuña. Periodo 4.</b>					
<b>Resultados de Simulación</b>	<b>K1 (horas)</b>	<b>K2 (horas)</b>	<b>K3 (horas)</b>	<b>K4 (horas)</b>	<b>Sumatoria de K (horas)</b>
<b>1</b>	3,98	7,91	6,99	1,32	<b>20,20</b>
	<b>X1</b>	<b>X2</b>	<b>X3</b>	<b>X4</b>	<b>1-R2</b>
	0,113	0,499	0,445	0,348	0,03352
<b>Coef. Nash Calibrac. (R2).</b>	<b>Coef. Nash validación (R2).</b>	<b>Media error calibración (m³/s)</b>	<b>Media error validación (m³/s)</b>	<b>Varianza error calibración (m⁶/s²)</b>	<b>Varianza error validación (m⁶/s²)</b>
0,958	0,593	-3,279	8,836	6.470,307	17.027,654

Los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe en el proceso de calibración es de 0,958 el valor ideal es uno, en el proceso de validación el coeficiente de Nash-Sutcliffe es 0,593 resultado último, aunque es bajo lo recomendado es que sea superior a 0,90. Se observa

en la Tabla 4.15 los coeficientes mencionados y también el resumen de los resultados de las gráficas de calibración del período 4 por el tránsito de Muskingum (Figura 4-42, Figura 4-43 y Figura 4-44).

Es importante recordar que el tiempo de tránsito por correlación cruzada, para este periodo es de 18 horas ver Tabla 3.13 del periodo 4 y en el proceso de calibración, la sumatoria de los valores de los parámetros "K" es de 20,20 ver Tabla 4.15 lo cual indica un ajuste aceptable.

El valor estadístico de la media de los errores de la hidrógrafa calibrada y validada respecto a la hidrógrafa de la estación de Barrancabermeja son bajas ver Tabla 4.15, si se considera el orden de magnitud de la hidrógrafa observada en la estación limnigráfica de Barrancabermeja con caudales cercanos a 3900 m<sup>3</sup>/s.

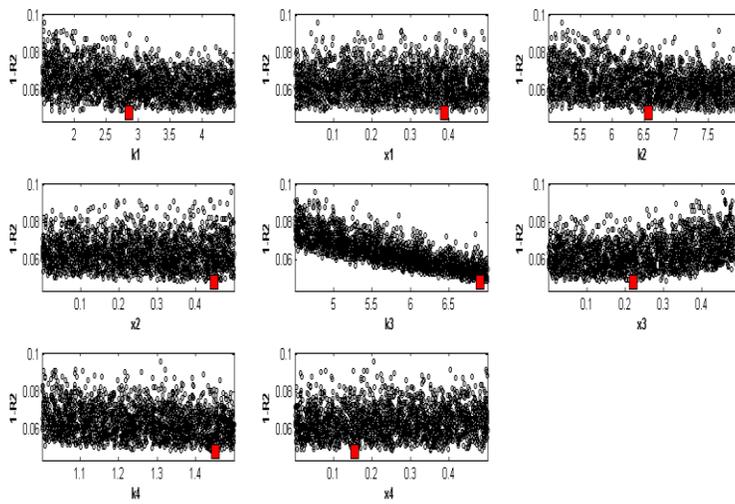
De la gráfica (b) en la Figura 4-43 es importante indicar el desfase observado que tienen los picos de caudales en las hidrógrafas de inicio y de salida de cada embalse, para el modelo de tránsito de Muskingum, este desfase está relacionado directamente por el valor de "K" calibrado, con el tiempo de tránsito de cada embalse, en el periodo 4.

#### **4.5.5 Período 5 de calibración y validación tránsito de Muskingum**

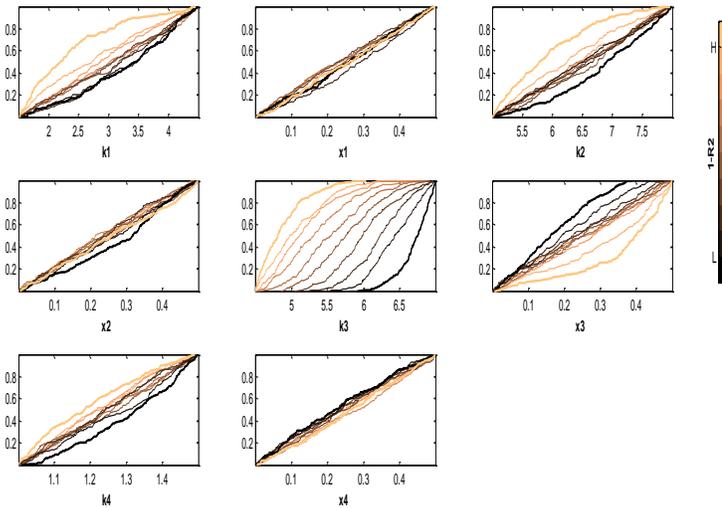
En las siguientes seis figuras se muestran los resultados y algunos análisis del proceso de calibración y validación. Para la gráfica (a) de la Figura 4-45 se observa los resultados de la calibración con el 75% de la serie de tiempo para el parámetro "K", en cada uno de los embalses del periodo 5, por medio de la función objetivo.

**Figura 4-45:** Gráfica (a) resultados en la calibración del espacio paramétrico “K” y “X” VS función objetivo. Gráfica (b) sensibilidad paramétrica “K” y “X” VS función objetivo (1-R2). Calibración para el 75% de la serie de tiempo, por el programa MCAT, modelo de tránsito de Muskingum periodo 5.

**Gráfica (a). Espacio paramétrico versus función objetivo**

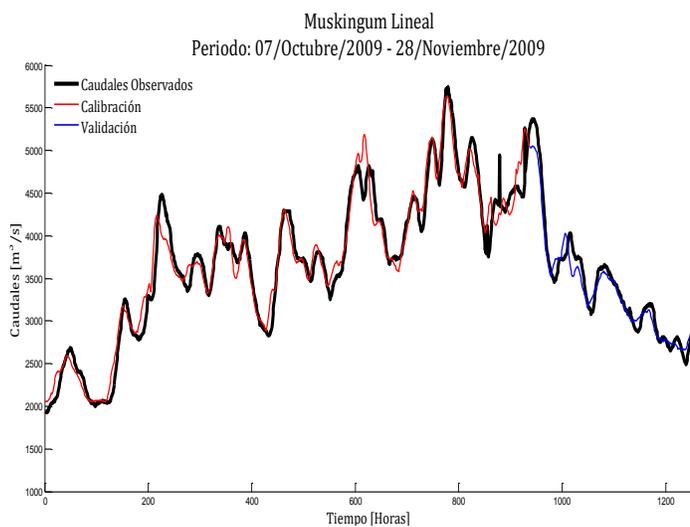


**Gráfica (b). Sensibilidad paramétrica**

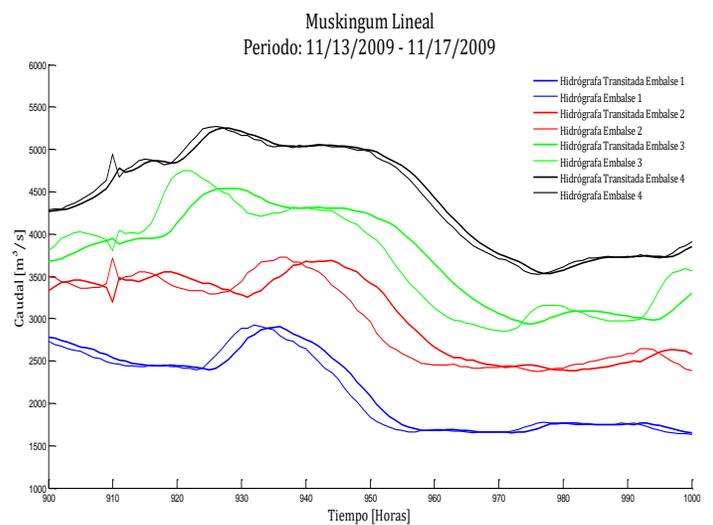


**Figura 4-46:** Gráfica (a) comparación de la hidrógrafa observada (Est. Barrancabermeja) VS hidrógrafa calibrada y validada. Gráfica (b) hidrógrafas transitadas de cada embalse en una serie de tiempo, período 5 tránsito de Muskingum.

**Gráfica (a) Hidrógrafa observada VS Hidrógrafa calibrada y validada**

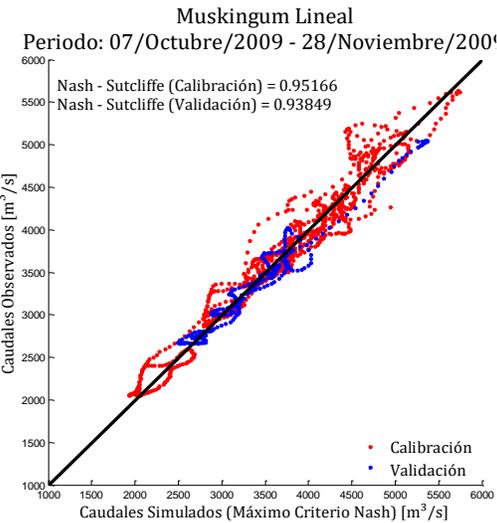


**Gráfica (b). Hidrógrafas de inicio y de salida transitada de cada embalse**

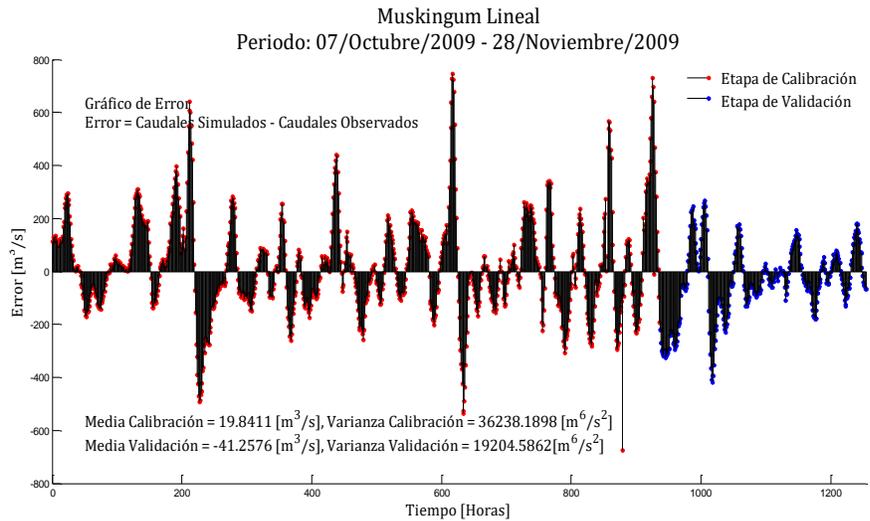


**Figura 4-47:** La gráfica (a) y la gráfica (b) son los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe y los errores de calibración y de validación para la hidrógrafa observada, del periodo 5 según modelo de Muskingum.

**Gráfica (a). Gráfica de dispersión de las hidrógrafas calibradas y validadas**



**Gráfica (b). Gráfica de errores de calibración y de validación VS hidrógrafa observada**



**Tabla 4.16:** Resumen de resultados de la calibración por el programa MCAT-V2.0, indicando el mejor resultado de calibración por el tránsito de Muskingum, del periodo 5.

<b>Calibración. Modelo de Muskingum con cuña. Periodo 5.</b>					
<b>Resultados de Simulación</b>	<b>K1 (horas)</b>	<b>K2 (horas)</b>	<b>K3 (horas)</b>	<b>K4 (horas)</b>	<b>Sumatoria de K (horas)</b>
<b>1</b>	2,83	6,57	6,91	1,43	<b>17,74</b>
	<b>X1</b>	<b>X2</b>	<b>X3</b>	<b>X4</b>	<b>1-R2</b>
	0,398	0,428	0,217	0,159	0,03239
<b>Coef. Nash Calibrac.</b>	<b>Coef. Nash validación (R2).</b>	<b>Media error calibración (m<sup>3</sup>/s)</b>	<b>Media error validación (m<sup>3</sup>/s)</b>	<b>Varianza error calibración (m<sup>6</sup>/s<sup>2</sup>)</b>	<b>Varianza error validación (m<sup>6</sup>/s<sup>2</sup>)</b>
0,951	0,938	19,841	-41,257	36.238,189	19.204,586

Los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe en el proceso de calibración es de 0,951 el valor ideal es uno, en el proceso de validación el coeficiente de Nash-Sutcliffe es 0,938, como se observa en la Tabla 4.16 y que a su vez esta tabla presenta el resumen de los

resultados de las gráficas de calibración del período 5 por el tránsito de Muskingum (Figura 4-45, Figura 4-46 y Figura 4-47).

El valor estadístico de la media de los errores de la hidrógrafa calibrada y validada respecto a la hidrógrafa de la estación de Barrancabermeja son bajas ver Tabla 4.16 si se considera el orden de magnitud de la hidrógrafa observada en la estación limnigráfica de Barrancabermeja con caudales cercanos a 5700 m<sup>3</sup>/s.

De la gráfica (b) en la Figura 4-46 es importante indicar el desfase observado que tienen los picos de caudales en las hidrógrafas de inicio y de salida de cada embalse, para el modelo de tránsito de Muskingum, este desfase está relacionado directamente por el valor de “K” calibrado, con el tiempo de tránsito de cada embalse, en el periodo 5.

## **4.6 Análisis cualitativo de calibración y validación en cinco periodos seleccionados para los modelos de tránsitos planteados**

Al analizar los resultados del proceso de calibración y de validación, se encontraron tendencias en forma general, estos resultados son presentados en los tres ítems anteriores (4.3, 4.4y 4.5) del documento, sobre los cinco periodos seleccionados.

Analizando los resultados descriptivamente, para los cinco periodos se expone los siguientes comentarios:

- En las gráficas de dispersión de la función objetivo (ejemplos Figura 4-39, Figura 4-21y Figura 4-3), el valor óptimo del parámetro de (K) presenta una tendencia de tomar un valor mínimo, en los modelos de tránsito propuestos, reflejándose hacia un lado de la gráfica para los tres primeros embalses, en los tres periodos iniciales seleccionados. El valor del parámetro K para el cuarto embalse no es tan fácil de identificar, la tendencia de este valor, en los cinco periodos calibrados.

- La falta de tendencia de las dispersiones de la función objetivo del embalse cuarto se puede explicar por el tiempo promedio de viaje hallado un poco menor a una hora, la segunda razón debe ser porque en este último embalse, está circulando toda la masa o volumen de agua (incluyendo caudales de todos los tributarios importantes), teniendo una longitud aproximada de 6,0 km en comparación de los 103,0 km del tramo total.
- La hidrógrafa transitada calibrada a la salida del cuarto y último embalse, al compararla con la hidrógrafa observada en la estación limnigráfica de Barrancabermeja, para cada uno de los cinco periodos, tiende a tener buena aproximación ambas hidrógrafas. El 75% de la serie de tiempo de cada uno de los periodos analizados, fue utilizado en el proceso de calibrar los tres modelos de tránsito.
- Al realizar la comparación de las hidrógrafas validadas en los periodos 2 y 4 del cuarto y último embalse, respecto a la hidrógrafa medida en la estación limnigráfica de Barrancabermeja, estos dos periodos no tienen buena validación, como se observa en las figuras de los ítems anteriores (4.3, 4.4 y 4.5) y esto se reflejan también cuantitativamente por los valores menores a 0,90 hallados en la función objetivo de Nash-Sutcliffe. El 25% de la serie de tiempo último de cada uno de los cinco periodos analizados, fue utilizado en el proceso de validación para los tres modelos lineales de tránsito.
- Según literatura técnica sobre el tránsito del modelo de Muskingum, el parámetro calibrado ( $X$ ), presenta poca sensibilidad en el proceso de calibración de las hidrógrafas (Chow et al, 1994). Al revisar los resultados el parámetro ( $X$ ) arroja valores disímiles significativos para el mismo embalse, en cada uno de los cinco periodos seleccionados, confirmando la baja sensibilidad o efecto en el proceso de calibración. Caso que no sucede con el parámetro de calibración de “ $K$ ” que presenta mejor sensibilidad, para los tres modelos de tránsito implementados.
- En los resultados de calibración y de validación se presentaron similitudes de la hidrógrafa de salida del cuarto y último embalse, respecto a la hidrógrafa medida en la estación limnigráfica de Barrancabermeja, con los modelos de tránsitos de diferencias

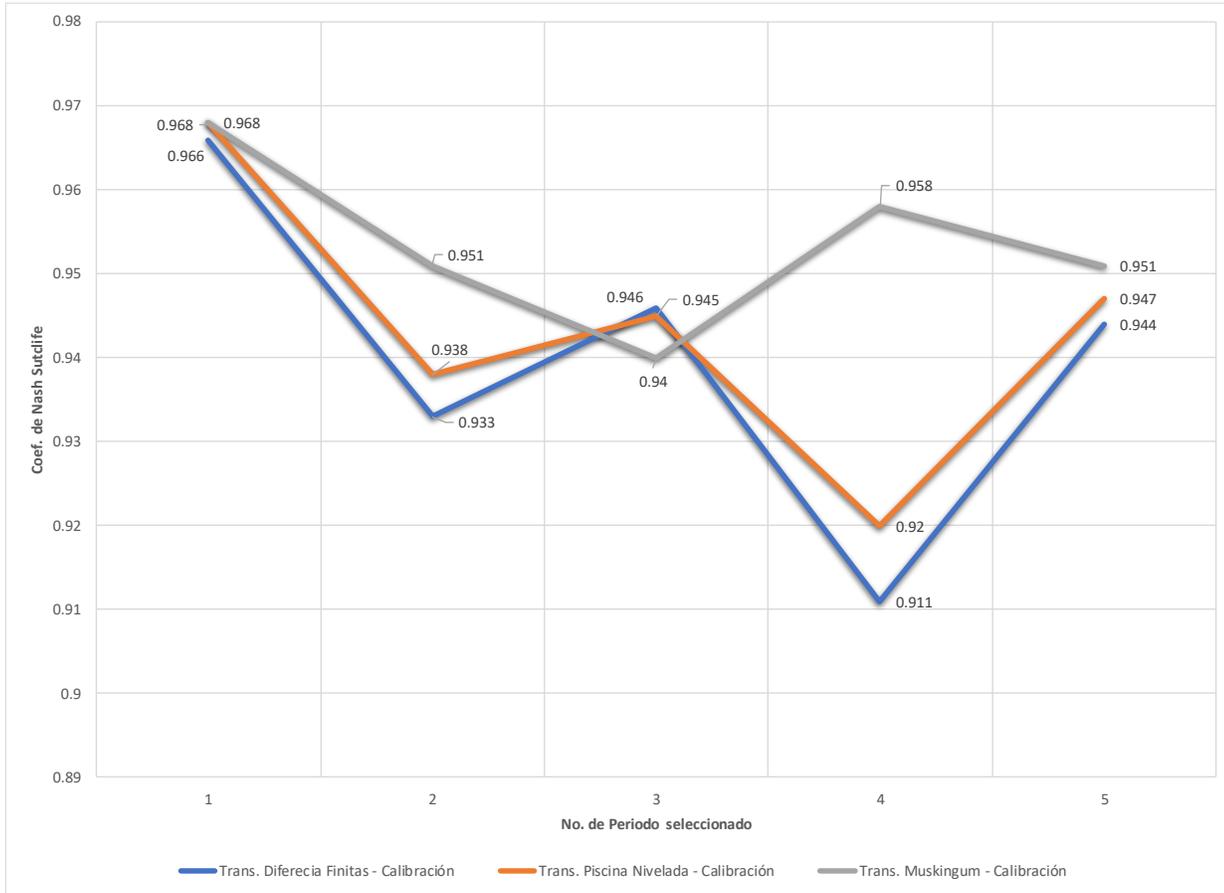
finitas y de piscina nivelada en los cinco periodos seleccionados. Estos resultados similares deben ser por la estructura matemática que tienen ambos modelos de tránsito.

- Específicamente los resultados de validación, respecto a los valores de la función objetivo de Nash son bajos ( $<0.90$ ) para el periodo 2 y periodo 4 en los tres modelos de tránsito aplicados, no se encontró explicación de estos resultados.
- Adicionalmente presenta semejanzas las hidrógrafas obtenidas para los cinco periodos calibrados y validados, por el modelo de Muskingum, modelos de diferencias finitas y piscina nivelada, en parte estas similitudes deben ser por el parámetro "K" que se encuentra en los tres modelos de tránsito planteados, otra explicación es porque este parámetro es sensible o significativo en el proceso de calibración y tiende a valores constantes, debido al almacenamiento propio de cada uno de los cuatro embalses empleados.

#### **4.7 Análisis cuantitativo de resultados del proceso de calibración y validación de tres modelos de tránsito planteados en cinco periodos**

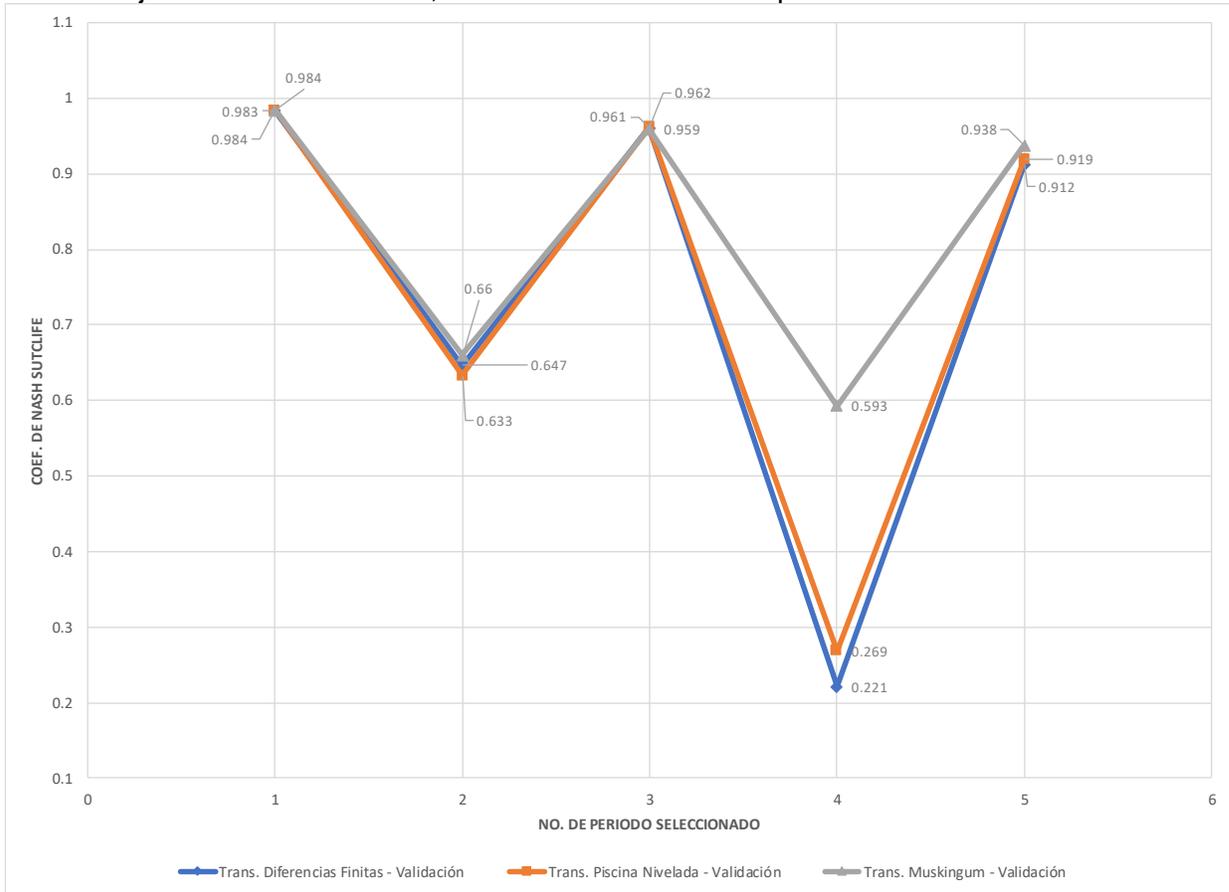
A continuación, se presenta los análisis sobre los valores de los resultados de validación y calibración de los modelos de tránsito de diferencias finitas, piscina nivelada y Muskingum, como son: coeficientes de la función objetivo de Nash-Sutcliffe en el proceso de calibración y validación, resultados de los errores de las hidrógrafas de Barrancabermeja y de la hidrógrafa transitada del último embalse, así como las sumatorias del parámetro "K" de los cuatro embalses.

**Figura 4-48:** Resultados de calibración de tres modelos de transito utilizados, por medio de la función objetivo de Nash-Sutcliffe, en cada uno de los cinco periodos.



A continuación, se describe los análisis de resultados de la Figura 4-48 y Figura 4-49.

**Figura 4-49:** Resultados de validación de tres modelos de tránsito utilizados, por medio de la función objetivo de Nash-Sutcliffe, en cada uno de los cinco periodos.

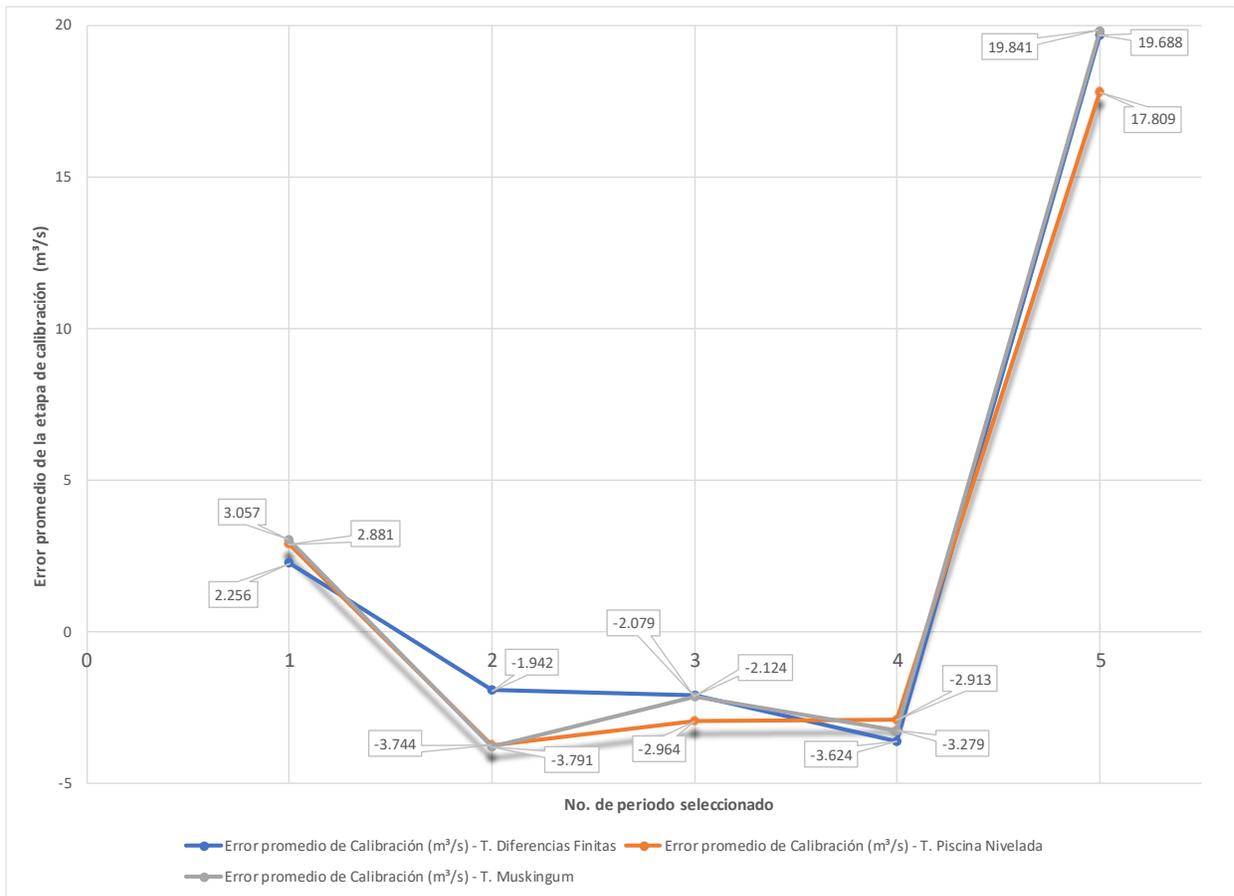


En la Figura 4-48 y Figura 4-49 se puede observar, que el modelo de tránsito de Muskingum presenta la mejor tendencia de ajuste según la función objetivo de Nash-Sutcliffe, para el proceso de calibración y validación en los cinco periodos seleccionados. El modelo de tránsito de piscina nivelada es el que tiene la segunda mejor tendencia de calibración como de validación y el modelo en menor grado de calibración y validación según la función objetivo es el de tránsito de diferencias finitas.

Las diferencias de resultados de calibración y validación por medio de la función objetivo de Nash-Sutcliffe de los tres modelos de tránsito (diferencias finitas, piscina nivelada y Muskingum) presentan leves diferencias en los resultados. Sin embargo, el modelo de tránsito de mejores resultados de la función objetivo, como se mencionó en el párrafo anterior es el de Muskingum. Los mejores resultados de calibración y validación para el

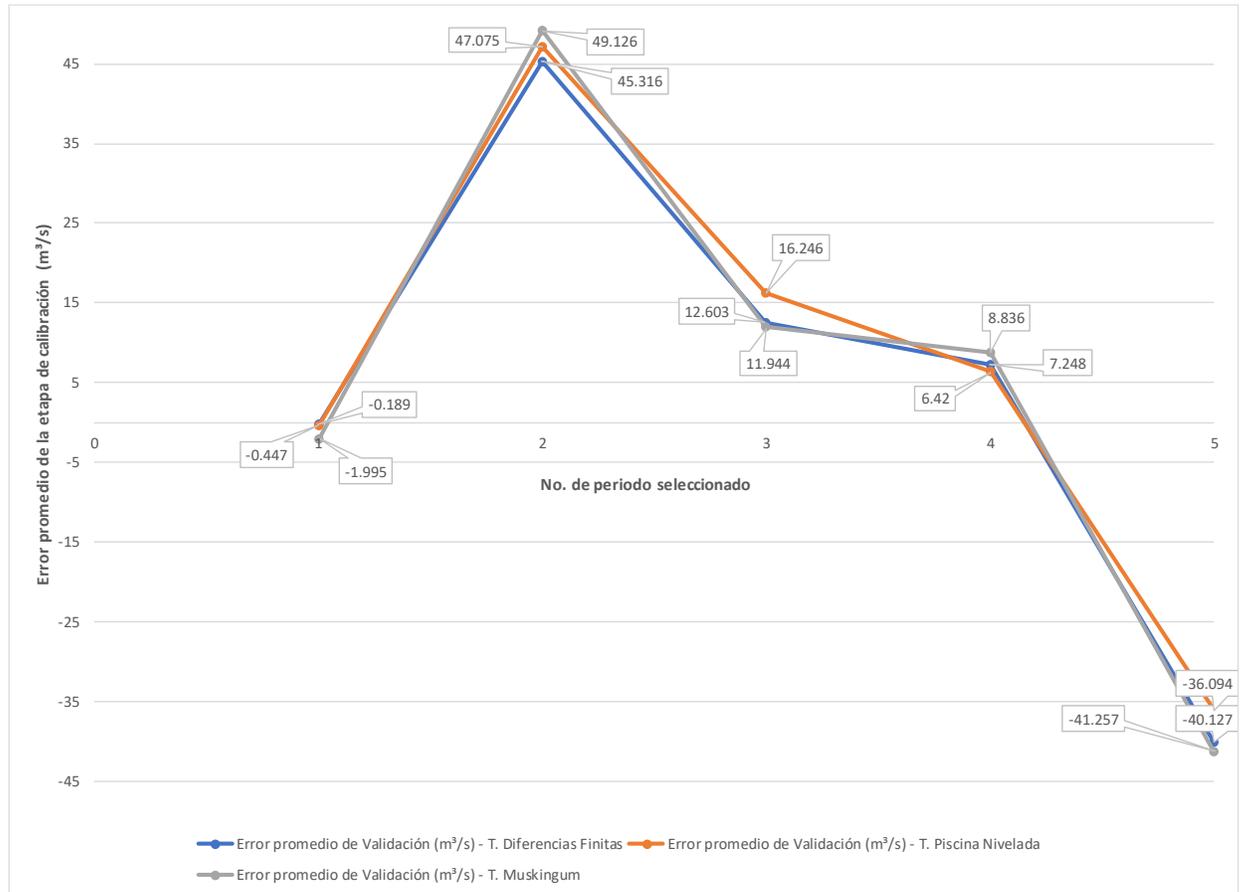
tránsito de Muskingum deben ser, porque tiene dos parámetros a calibrar “K” y “X”, en cambio los otros dos modelos el de tránsito de diferencias finitas y de Piscina Nivelada, tienen un solo parámetro de calibración “K”.

**Figura 4-50:** Resultados de los errores promedio de calibración de la hidrógrafa medida en la Est. Barrancabermeja VS Hidrógrafa calibrada del cuarto embalse, para los tres modelos de tránsito utilizados, en cada uno de los cinco periodos.



A continuación, se describe los análisis de resultados de la Figura 4-50 y Figura 4-51.

**Figura 4-51:** Resultados de los errores promedio de validación de la hidrógrafa medida en la Est. Barrancabermeja VS Hidrógrafa validada del cuarto embalse, para los tres modelos de tránsito utilizados, en cada uno de los cinco periodos.

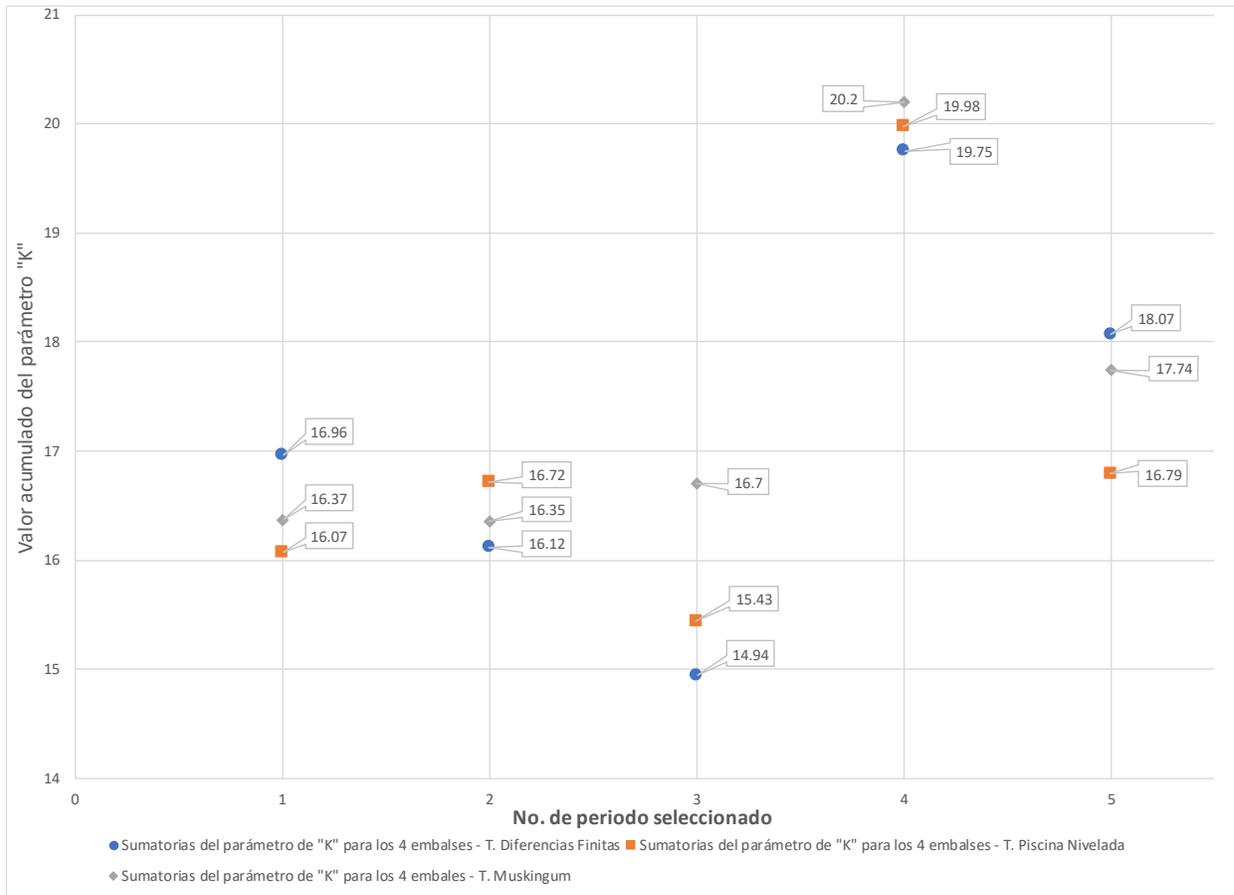


Los errores promedios de caudales mostrados en la Figura 4-50 y Figura 4-51, son: el promedio de las diferencias de caudales observados en la hidrógrafa de la estación limnigráfica de Barrancabermeja respecto a los caudales obtenidos de la hidrógrafa transitada calibrada y validada en el cuarto y último embalse de cada uno de los cinco periodos, en cada instante de tiempo. Estos errores promedio de caudales están también calculados en cada uno de los tres modelos lineales de tránsito desarrollados.

En la Figura 4-50 y Figura 4-51 no es clara la tendencia de cuál de los tres modelos de tránsito, tiene el menor error promedio de caudales para las hidrógrafas mencionadas por cada periodo, en el proceso de calibración y validación. Sin embargo, en el proceso de

calibración en el modelo de transito de diferencias finitas, presenta levemente una mejor o menor tendencia de errores promedio de caudales.

**Figura 4-52:** Resultados de la sumatoria del parámetro "K" (Tiempo de tránsito del tramo de estudio), para cada uno de los cinco periodos calibrados, en los 3 modelos de tránsito desarrollados.



Al observar los resultados gráficos de la Figura 4-52 los modelos de tránsito calibrados de diferencias finitas, piscina nivelada y de Muskingum, tienden a conservar el tiempo de viaje calculado en la función de correlación cruzada (ver Tabla 3.13). Sin embargo, el modelo de Muskingum presenta un ligero mejor ajuste para cuando se compara con el valor de la sumatorias del parámetro (K), de la función de correlación cruzada.

Adicionalmente los resultados presentados en la Figura 4-52 y en la Tabla 3.13, se encontró que de los cinco periodos seleccionados para la calibración y validación, los periodos 1, 2 y 5 son los de mejor ajuste, en cuanto al tiempo de tránsito de la sumatoria del parámetro “K” y de la función de la correlación cruzada. El modelo de tránsito de Muskingum y el modelo de tránsito de Piscina Nivelada, son los de mejor acercamiento al tiempo de viaje hallado por la función de correlación cruzada.

Por los argumentos anteriores se escoge el modelo de Muskingum, como el modelo de mejor calibración por tener los mejores resultados de la función objetivo de Nash.

## 5. Capítulo 5 modelación: Pronóstico con Filtro Kalman (KF)

En el presente capítulo se presentan los conceptos y ecuaciones del modelo matemático del Filtro de Kalman (KF), explicando cómo se implementó en el pronóstico de caudales. El filtro KF se realizó con base en tres modelos lineales de tránsito de caudales desarrollados para el proyecto.

Para la aplicación del Filtro de Kalman, se plantearon dos escenarios de simulación, siendo para el primer escenario asumir los ruidos o errores en la medición de la información. El segundo escenario es suponer que no hay errores en la medición de los niveles.

Se considera necesario implementar un modelo autoregresivo de primer orden, en la aplicación del Filtro de Kalman, para pronosticar los caudales de los afluentes tributarios, en cada modelo de tránsito. Esto es debido porque en la ecuación de estado matricial del filtro KF, existe un vector columna ( $U_k$ ) de entradas directas al modelo, que representa los caudales de aporte de los afluentes tributarios, donde algunos caudales están adelantados en el instante de tiempo  $(k+1)$ .

En el último ítem o sección del presente capítulo, se presenta los análisis realizados a los pronósticos del Filtro de Kalman, bajo los dos escenarios de simulación planteados.

### 5.1 Contextualización del Filtro Kalman propuesto

En el capítulo 2, se desarrollaron las ecuaciones para cada uno de los modelos lineales de tránsito agregados. Las ecuaciones de estos modelos se desarrollaron de forma matricial, hasta el cuarto embalse.

También en el capítulo 2, se comentó que las ecuaciones de tránsito matriciales son las estructuras básicas, para la ecuación de estado o la ecuación del sistema como se conoce, en la implementación de la estructura del Filtro de Kalman. Las ecuaciones en mención son: ecuación 2.33 tránsito por diferencias finitas, ecuación 2.90 tránsito por Muskingum y ecuación 2.133 tránsito de Piscina Nivelada.

### 5.1.1 Modelo Autoregresivo de primer orden

El modelo autoregresivo de primer orden se utiliza para generar series sintéticas de caudal pronosticando, por medio de los siguientes tres parámetros estadísticos: la media, la desviación estándar y el coeficiente de correlación de los registros.

Los modelos autoregresivos de primer orden son modelos Markovianos. En el contexto de hidrología el modelo autoregresivo de primer orden, también es llamado el modelo de Thomas-Fiering (Brass y Rodríguez-Iturbe, 1982).

La forma de expresar el modelo autoregresivo de primer orden, es con la siguiente ecuación:

$$Q_{j+1} = \mu_j + \rho_j(Q_j - \mu_j) + \sigma_j(1 - \rho_j^2)^{1/2} \varepsilon \quad (5.1)$$

Donde:

$Q_{j+1}$  = Caudal en unidades de (m<sup>3</sup>/s) a estimar o pronosticar en el instante de tiempo (j+1).

$\mu$  = Es la media estadística de la serie de datos de (Q<sub>j</sub>), que se va actualizando para cada instante de tiempo.

$Q_j$  = Caudal en unidades de ( $m^3/s$ ) medido u observado en el instante de tiempo ( $j$ ).

$\rho_j$  = Coeficiente de correlación, obtenido a partir de la función de autocorrelación, de la serie de datos de caudal hasta el instante de tiempo ( $j$ ).

$\sigma_j$  = Desviación estándar de la serie de datos de caudal hasta el instante de tiempo ( $j$ ).

$\varepsilon$  = Es el ruido aleatorio con media cero y normalmente distribuido.

Para entrenar el modelo autoregresivo se tomó la mitad de la serie de datos, obteniendo los parámetros estadísticos de la media, la desviación estándar y el coeficiente de correlación, para cada uno de los cinco periodos de calibración seleccionados.

La aplicación del modelo autoregresivo de primer orden, se utilizó en la aplicación del Filtro Kalman para pronosticar los caudales de los tributarios, como se explicará a continuación:

- Como se puede observar en las ecuaciones 2.33, 2.90 y 2.133, está el vector columna ( $U$ ) el cual representa dos entradas al modelo que se consideraron. La primera entrada al modelo son los caudales de los afluentes tributarios, la segunda entrada adicional es el caudal de aporte por el posible drenaje de las áreas aledañas al cauce del río Magdalena.
- Por el desarrollo matemático de las ecuaciones matriciales de cada uno de los tres modelos de tránsito, se forma matricialmente el vector columna ( $U$ ) estando adelantando en el tiempo ( $t+1$ ), ver las ecuaciones (, 2.95 y 2.138 específicamente. Indicando que se hace necesario pronosticar estas dos entradas de caudal de los tributarios porque no se conoce el próximo dato.
- Es importante resaltar que según el modelo puede haber dos tipos de vector columna de entrada ( $U$ ), uno en el instante de tiempo ( $t$ ) y el otro vector en el instante de tiempo ( $t+1$ ), (ver las ecuaciones 2.33, 2.90 y 2.133), siendo este último vector el que se pronostica con el modelo autoregresivo de orden uno.

Se pronostica en una primera instancia las entradas de los caudales de los tributarios, para conservar la estructura de los modelos de tránsito, sin aplicar el Filtro de Kalman.

Las variables de entradas impuestas al sistema de los modelos de tránsito son la entrada inicial de caudal en la estación limnigráfica de Puerto Berrío aguas arriba y los caudales de los tributarios, sin embargo, algunas de estas entradas están adelantadas en el instante de tiempo  $(t+1)$ , las cuales se van a pronosticar inicialmente con un modelo auto-regresivo lineal, para luego pronosticar con el Filtro de Kalman.

La variable que se pronostica con el filtro Kalman específicamente es el caudal de salida ( $QSE1_{(t+1)}$ ,  $QSE2_{(t+1)}$ ,  $QSE3_{(t+1)}$ ,  $QSE4_{(t+1)}$ ) de cada uno de los cuatro embalses del tramo de estudio. Esta variable de caudal de salida de los embales están representada por el vector columna ( $X_{t+1}$ ) en la ecuación 2.33 para el modelo de tránsito de diferencias finitas, el vector columna ( $X_{musk\ j+1}$ ) en la ecuación 2.90 en el modelo de tránsito de Muskingum y el vector columna ( $X_{Piscniv\ j+1}$ ) en la ecuación 2.132 del modelo de piscina nivelada.

La ecuación de estado o la ecuación del sistema como se conoce (ver ecuación 5.2), en la implementación de la estructura del Filtro de Kalman, tiene similitudes con la estructura matricial en las ecuaciones 2.33, 2.90 y 2.133 de los modelos de tránsitos propuestos. Debido a que las tres últimas ecuaciones matriciales mencionadas tienen caudales de aportes tributarios adelantada en el tiempo  $(t+1)$  en el vector columna ( $U$ ), hacia muy engorroso el pronóstico de estos caudales utilizando también el filtro Kalman, por eso se utilizó un modelo autoregresivo de orden uno.

Realizando un análisis para formular el filtro Kalman en el pronóstico de caudal de los tributarios, es necesario conocer o plantear en la estructura matemática, la ecuación 5.4 conocida como la ecuación de medición, acoplando la anterior ecuación con la ecuación de estado 5.2. Para realizar este acople es necesario conocer al menos dos hidrógrafas en los afluentes tributarios de importancia con resolución de caudales horarios para el proyecto, información que no se tiene.

Si lo anterior fuera posible se acoplarían varias ecuaciones matriciales en los modelos de tránsito de los afluentes tributarios, organizando una sola ecuación de estado y una sola

ecuación de medición como la ecuación 5.2 y 5.4 respectivamente, con el inconveniente principal que no se conservarían las estructuras iniciales de las ecuaciones de estado y de medición mencionadas, porque se generarían más vectores columna y matrices de constantes, modificando sustancialmente la usual estructura matricial para el filtro de Kalman.

Adicionalmente al analizar en detalle el vector columna (U), como se había explicado anteriormente en el Capítulo 2 hay un aporte considerado por drenajes de áreas aledañas al cauce del río Magdalena, la cual es la segunda entrada impuesta a los tres modelos de tránsito desarrollados. No se encontró manera como implementar matricialmente una ecuación de estado y una ecuación de medición para aplicar el filtro Kalman en el pronóstico de estos caudales de aporte.

Por los argumentos expuestos se encontró que el pronóstico de caudales de los tributarios es suficiente con un modelo autoregresivo de orden uno, por su sencillez, ya que básicamente se necesitan solamente tres parámetros estadísticos: la media, la desviación estándar y el coeficiente de correlación de los registros. Es interesante para próximos trabajos si se puede superar las dificultades actuales en el pronóstico de los caudales tributarios de este proyecto, acoplar matricialmente únicamente una sola ecuación de estado y una ecuación de medición, con sus respectivas modificaciones, la aplicación del filtro Kalman. Lo anterior generaría seguramente más complejidad en la implementación o solución de dicho filtro.

## 5.2 ECUACIONES DEL FILTRO DE KALMAN-BUCY PARA PRONÓSTICO

La siguiente ecuación se conoce como la ecuación del sistema o ecuación de estado discretizada, la cual esta relacionando la variable del caudal ( $X_{k+1}$ ) a pronosticar con el Filtro de Kalman en la salida de cada uno de los embalses para el presente proyecto.

$$[X_{k+1}]_{nx1} = A_{nxn} * [X_k]_{nx1} + B_{nxn} * [U_k]_{nx1} \quad (5.2)$$

Donde:

**A y B** = Matriz de constantes, conocida como la Matriz de transición (A) y la matriz de entrada impuesta al sistema (B), ambas de tamaño  $(n \times n)$ .

**X<sub>k</sub>** = Es el vector de estado del sistema físico que se quiere modelar, en donde generalmente se asocia también al estado no accesible del sistema, de  $n$  filas y una sola columna. Representa el caudal de entrada al inicio del tramo y los caudales de salida de cada uno de los embalses, para el proyecto.

**U<sub>k</sub>** = Es el vector de la variable de entrada impuesta al sistema ó variable exógena, representando los caudales de los tributarios en el tramo de estudio, de  $n$  filas y una sola columna.

La ecuación 5.2 es determinística y generalmente se le adiciona un ruido, el cual está asociado a las variables no modeladas del Filtro Kalman, permitiendo mejorar la estimación de la variable de estado, de esta forma la estimación de estado en tiempo discreto queda gobernada por una ecuación discreta lineal estocástica (Welch y Bishop, 2006), quedando la siguiente ecuación.

$$[X_{k+1}]_{nx1} = A_{n \times n} * [X_k]_{nx1} + B_{n \times n} * [U_k]_{nx1} + [V_k]_{nx1} \quad (5.3)$$

Donde:

**V<sub>k</sub>** = Vector del proceso estocástico asociado a un ruido gaussiano, en la ecuación de estado del sistema, de media cero y con matriz de covarianza (Q).

El vector del ruido asociado a la ecuación de estado tiende a mejorar o ajustar el resultado del pronóstico (Pascual, 2006). Ejemplo de ello es si el caudal calculado en la ecuación de estado sin el vector de ruido es de 1420 m<sup>3</sup>/s, posteriormente el valor real medido a la salida de la estación automática de niveles de Barrancabermeja es de 1438 m<sup>3</sup>/s, por lo tanto, en teoría el ruido debería compensar los 18 m<sup>3</sup>/s faltante.

Adicional a la ecuación de estado, está la ecuación de medición la cual representa y simula la salida del dato observado, obtenido por un aparato o sensor. Para el desarrollo del trabajo la ecuación de medición está asociada a las mediciones de niveles en la estación limnigráfica de Barrancabermeja.

La ecuación de medición utilizada en el presente proyecto y que es representada generalmente de la siguiente forma:

$$Y_k = C_{n \times n} * [X_k]_{n \times 1} + [W_k]_{n \times n} \quad (5.4)$$

Donde:

**C** = Matriz de la ecuación de medición y es asumida como una matriz de identidad generalmente.

**W<sub>k</sub>** = Vector del proceso estocástico asociado a un ruido gaussiano La ecuación de medición, de media cero y con matriz de covarianza (R).

**Y<sub>k</sub>** = Es el vector del estado de la medición. Siendo el vector los caudales registrados, específicamente en la estación limnigráfica de Barrancabermeja.

Las variables aleatorias del ruido en la ecuación de estado ( $V_k$ ) y en la medición ( $W_k$ ) respectivamente tienen media estadística igual a cero y presentan distribución de probabilidad normal gaussiana, por definición. En hidrología como en otras áreas, el comportamiento de las variables aleatorias discretas o continuas se describe, con ayuda de distribuciones de probabilidad y una de ellas es la distribución de probabilidad normal gaussiana.

$$p(V) \sim N(0, Q) \quad (5.5)$$

$$p(W) \sim N(0, R) \quad (5.6)$$

En la práctica, la covarianza del ruido en la ecuación de estado es (Q) y en la ecuación de medición es (R), generalmente se asumen constantes en contexto de señales. Las matrices de Covarianza (Q) y (R) son diagonales y por tanto simétricas. (Brass y Rodríguez-Iturbe, 1982).

Las matrices (Q) y (R), para el proyecto se planteó que fueran dinámicas o variables en el tiempo.

### 5.2.1 Proceso de Actualización o de Corrección para la predicción

El objetivo es calcular el próximo valor de la variable de estado de ( $X_k$ ), para pronosticar en la siguiente iteración, en el próximo instante de tiempo ( $X_{k+1}$ ).

La predicción de la variable de estado en el instante (k+1), es planteada generalmente con la siguiente expresión:

$$X'_{k+1} = A\hat{X}_k + BU_k + K_k(Y_k - \hat{Y}_k) \quad (5.7)$$

Donde:

$X'_{(k+1)}$  = Variable de estado en pronóstico (vector columna).

$\hat{X}_{(k)}$  = Variable estimada del estado (vector columna), la cual es un valor inicial que se debe asumir al inicio del algoritmo, siendo posteriormente actualizada o corregida (caudal) en cada iteración.

El error de la proyección o pronóstico para el Filtro Kalman en la ecuación de estado discreto es:

$$e_{k+1} = X_{k+1} - X'_{k+1} \quad (5.8)$$

Donde:

$e_{k+1}$  = Error de la proyección o pronóstico de la variable de estado, obsérvese el instante de tiempo (k+1).

Desarrollando la ecuación 5.8, por medio de la ecuación 5.3 y 5.7 en la etapa de predicción, queda planteada como:

$$e_{k+1} = A * X_k + B * U_k + V_k - [A\hat{X}_k + BU_k + K_k[(CX_k + W_k) - C\hat{X}_k]] \quad (5.9)$$

$$e_{k+1} = [A - K_k C][X_k - \hat{X}_k] - K_k W_k + V_k \quad (5.10)$$

Donde el error ( $e_k$ ) y  $\hat{A}$  es una matriz determinística o constante:

$$e_k = X_k - \hat{X}_k \quad (5.11)$$

$$\hat{A} = [A - K_k C] \quad (5.12)$$

Quedando expresada la ecuación 5.10 como:

$$e_{k+1} = \hat{A}e_k - K_k W_k + V_k \quad (5.13)$$

El objetivo del Filtro Kalman es mejorar la estimación o pronóstico de la variable de estado  $\hat{X}_{(k)}$ , reduciendo el error entre el dato medido y el dato próximo estimado.

Para cumplir el objetivo de minimizar el error, se estima una matriz de covarianza del error, aplicando el concepto del principio de ortogonalidad, el cual el error (e) de cada estimación es ortogonal a los datos.

El principio de ortogonalidad es utilizado en el error cuadrático medio, cuyo objetivo es minimizar el error. Según concepto del cálculo vectorial el “principio de ortogonalidad” o “teorema de la proyección” es válido para cualquier espacio vectorial de Hilbert de la siguiente forma: cuando la norma del vector error y cualquier punto del subespacio es mínima, si y solo, el error es ortogonal al subespacio. Además, el punto del subespacio

que minimiza la norma del vector error (la aproximación de la mejor señal) es único (Meyer, 2000).

Sin embargo, por ser una sola variable el caudal en el Filtro aplicado, el Filtro de Kalman es univariado y la matriz se debe denominar por lo tanto matriz de varianza del error.

Aplicando el principio de ortogonalidad para el error según (Mohinder y Angus, 2001), se puede expresar con la siguiente ecuación:

$$P_{(k+1)} = E\{e_{(k+1)} \cdot e_{(k+1)}^T\} \quad (5.14)$$

Donde:

$P_{(k+1)}$  = Matriz de varianza del error del caudal, se utiliza en el Filtro Kalman para el pronóstico por estar en el instante (k+1). El producto del error con su transpuesta es una multiplicación de término a término.

$E\{ \}$  = Operador esperanza matemática, el cual indica el valor medio, conocido también como el valor esperado de una variable o de una muestra poblacional.

Cuando se utiliza el Filtro Kalman para alisado o filtrado, es donde se va a representar la señal en el instante de tiempo (k-1) y (k) respectivamente.

Por lo tanto, la matriz de varianza del error en la predicción se halla remplazando la ecuación 5.13 en la ecuación 5.14.

$$P_{k+1} = E\{[\widehat{A}e_k - K_k W_k + V_k][\widehat{A}e_k - K_k W_k + V_k]^T\} \quad (5.15)$$

Aplicando las propiedades de las transpuestas de una matriz (Grossman, 1996), por medio de las tres siguientes expresiones:

$$(F + G)^T = F^T + G^T \quad (5.16)$$

$$(FG)^T = G^T F^T \quad (5.17)$$

$$(ZG)^T = Z(G)^T \quad (5.18)$$

La ecuación 5.15, se expresa de la siguiente forma, aplicando las propiedades de las matrices transpuestas (Grossman, 1996), presentadas en las tres ecuaciones anteriores:

$$P_{k+1} = E \left\{ \left[ A(X_{(k)} - \hat{X}_{(k)}) + V_{(k)} \right] \left[ A(X_{(k)} - \hat{X}_{(k)}) + V_{(k)} \right]^T \right\} \quad (5.19)$$

Entre las propiedades del operador de la esperanza matemática (Gardner, 1986), están las dos siguientes ecuaciones:

$$E\{F + G\} = E\{F\} + E\{G\} \quad (5.20)$$

$$E\{FG\} = E\{F\}E\{G\} \quad (5.21)$$

Con base en las dos propiedades anteriores de la suma y el producto de la esperanza matemática, la ecuación 5.19 queda expresada de la siguiente forma:

$$P'_{(k+1)} = \hat{A}e_k e_k^T \hat{A}^T - \hat{A}e_k K_k^T W_k^T + \hat{A}e_k V_k^T - K_k W_k \hat{A}^T e_k^T + K_k W_k K_k^T W_k^T - K_k W_k V_k^T + V_k \hat{A}^T e_k^T - V_k K_k^T W_k^T + V_k V_k^T \quad (5.22)$$

De la ecuación anterior se anula los términos a los cuales los ruidos independientes ( $V_{(k)}$ ) y ( $W_k$ ) estén multiplicándose entre sí, porque su media es cero.

También los ruidos ( $V_{(k)}$ ) y ( $W_k$ ) anulan los términos que estén multiplicando los errores de la predicción porque la media del ruido es cero. Los únicos términos que no se eliminan de la ecuación 5.22 son:

$$E \left\{ \hat{A}e_k e_k^T \hat{A}^T \right\} = \hat{A}E \left\{ e_k e_k^T \right\} \hat{A}^T = \hat{A}P_k \hat{A}^T \quad (5.23)$$

$$P'_{(k+1)} = E \left\{ \left[ K_k W_k K_k^T W_k^T \right] \right\} = K_k E \left\{ W_k W_k^T \right\} K_k^T = K_k R_k K_k^T \quad (5.24)$$

$$E \left\{ V_{(k)} V_{(k)}^T \right\} = Q_k \quad (5.25)$$

Donde:

$E\{e_k e_k^T\}$  = Esta expresión está definida como la matriz de covarianza de error para la variable de estado en el instante de tiempo (k). Ver ecuación 5.23, quedando identificada como  $P_{(k)}$ .

$E\{V_{(k)} V_{(k)}^T\}$  = Esta expresión está definida como la matriz de varianzas asociada al proceso de la ecuación de estado conocida como  $Q_{(k)}$ .

La ecuación 5.22 queda expresada de la siguiente forma:

$$P_{k+1} = \hat{A} P_k \hat{A}^T + K_k R_k K_k^T + Q_k \quad (5.26)$$

La ecuación 5.26 es la matriz de covarianza sin ser minimizada. Para reducir el error en el pronóstico, se puede seguir modificando esta última ecuación:

$$P_{k+1} = \hat{A} P_k \hat{A}^T + K_k R_k K_k^T + Q = [A - K_k C] P_k [A - K_k C]^T + K_k R_k K_k^T + Q_k \quad (5.27)$$

$$P_{k+1} = A P_k A^T - A P_k C^T K_k^T - K_k C * P_k A^T + K_k C P_k C^T K_k^T + K_k R_k K_k^T + Q_k \quad (5.28)$$

Para minimizar  $P_{(k+1)}$  se deriva con respecto a  $K_k$  y se iguala a cero, la siguiente expresión es el resultado de cálculo matricial y por medio del concepto de trazas:

$$\frac{dP_{k+1}}{dK_k} = 0 = -2A P_k C^T + 2K_k C P_k C^T + 2K_k R_k \quad (5.29)$$

De la anterior ecuación se despeja ( $K_k$ ), matriz conocida como la ganancia de Kalman, quedando la siguiente expresión:

$$K_k = A P_k C^T [R_k + C P_k C^T]^{-1} \quad (5.30)$$

La esencia del vector de ganancia del Filtro de Kalman ( $K_k$ ), representa el mínimo valor de la matriz de covarianzas (Welch y Bishop, 2006), o de varianzas del error  $P_{(k+1)}$ . Por la anterior razón se remplaza en la ecuación 5.28, con el objetivo de minimizarla.

Al hacer esta sustitución de la ecuación 5.30 en la ecuación 5.29, se realiza una serie de operaciones de inversas y transpuestas de matrices llegando a la siguiente expresión:

$$P_{k+1} = [A - K_k C] P_k A^T + Q_k \quad (5.31)$$

La anterior ecuación permite actualizar la varianza en la etapa de predicción ( $k+1$ ) obsérvese que la parte derecha de la ecuación es en el instante de tiempo ( $k$ ).

*Las Ecuaciones en el siguiente orden 5.7, 5.30, y 5.31, se deben aplicar para el algoritmo del Filtro de Kalman para el pronóstico. Apoyado con la ecuación 5.4 de medición.*

**Tabla 5.1.** Ecuaciones del sistema (modelo del tránsito) y la ecuación de medición para un Filtro Kalman-Bucy Unidimensional Discretizado.

<b>Ecuaciones del Filtro de Kalman Discreto en el tiempo para predicción</b>	<b>Ecuación</b>
$[X_{k+1}]_{nx1} = A_{n \times n} * [X_k]_{nx1} + B_{n \times n} * [U_k]_{nx1} + [V_k]_{nx1}$	5.3
$Y_k = C_{n \times n} * [X_k]_{nx1} + [W_k]_{nxn}$	5.4

**Tabla 5.2.** Ecuaciones de Corrección (Ecuaciones de actualización en la medición), para un Filtro Kalman Unidimensional Discretizado.

<b>Ecuaciones del Filtro de Kalman Discreto en la actualización de la medición</b>	<b>Ecuación</b>
$K_k = A P_k C^T [R_k + C P_k C^T]^{-1}$	5.30
$X'_{k+1} = A \hat{X}_k + B U_k + K_k (Y_k - \hat{Y}_k)$	5.7
$P_{k+1} = [A - K_k C] P_k A^T + Q_k$	5.31

Los valores iniciales para iniciar el algoritmo son la variable de estado estimada inicial  $\hat{X}_{(k)}$  y la matriz de Varianza inicial  $P_{(k)}$ , para el pronóstico basado en los modelos de tránsito.

En el proyecto se tomó de valor inicial  $\hat{X}_{(k)}$  el caudal de la hidrógrafa en la estación de Puerto Berrío, en el mismo instante de tiempo para el inicio del pronóstico con el Filtro. Se

estableció así porque se consideró que era el mejor valor y el más cercano a tener, cuando se fuera a pronosticar el próximo caudal.

### 5.2.2 Condiciones Iniciales

Para iniciar el algoritmo, es por la variable de estado estimada inicial  $\hat{X}_{(k)}$  y la matriz de covarianza inicial  $P_{(k)}$ .

El ruido asociado a la ecuación de estado está en la matriz de varianza Q, la cual se empieza a generar después de la primera iteración, considerando el dato inicial de caudal, ya empieza a tener errores del pronóstico. Sin embargo, como se inició el pronóstico del filtro Kalman, a partir del 50% de datos en la serie de tiempo, la matriz Q ya inicia con la varianza del error que tenía de la ecuación de estado, por el dato anterior de inicio que traía del modelo de calibración del tránsito.

Respecto a la matriz del ruido en la ecuación de medición R, se tomó con el error de la medición que tenía anterior del modelo de calibración del tránsito, para el valor inicial y se inició el pronóstico después con el 50% de la información restante, con ese valor inicial mencionado. Para el segundo caso de la simulación del filtro Kalman, considera no tener errores de los niveles registrados en la estación limnigráfica, en la ecuación de medición, por lo tanto, la matriz R se tomó siempre en el pronóstico con valor de cero.

Es importante resaltar la variable la cual realmente se está pronosticando y corrigiendo en las ecuaciones del Filtro de Kalman, es la variable del vector columna  $\hat{X}_{(k)}$ .

## 5.3 Acople de los modelos en el filtro Kalman

En el presente ítem se describe la forma en que fueron acopladas las ecuaciones del Filtro de Kalman en los modelos de tránsito planteados, esencialmente por los ruidos en la medición de la ecuación de estado y de la ecuación de medición, los cuales son muy sensibles en el pronóstico.

### **5.3.1 Ruidos en la ecuación de estado y en la ecuación de medición del Filtro Kalman para aplicar los tránsitos propuestos**

Según ecuación 5.4 el vector columna de medición  $X_k$ , están los caudales de salida medidos de los tres primeros embalses representados en las tres primeras filas del vector, de los cuales no se tiene medición de niveles ni hidrógrafas reales. La cuarta y última fila representa el nivel medido en la estación limnigráfica de Barrancabermeja, por lo tanto, únicamente se tienen los caudales de salida del cuarto y último embalse en la zona de estudio.

Con base en el anterior párrafo se plantea dos situaciones de simulación, considerando o no errores en la ecuación 5.4 de medición. Esto quiere decir que la matriz de varianza del error en la medición ( $R$ ) es cero si se considera que no hay error en la medición ó plantear que si hay algún tipo de error.

Para el caso de la simulación cuando se considera errores en la medición, se planteó errores en las medidas de los niveles (ecuación de medición 5.4), propagando una variación aleatoria de cinco centímetros por encima o por debajo de los niveles registrados en la información suministrada por el IDEAM. De esta forma se indujo un error en la medición, siendo el error la diferencia de los caudales obtenidos con los niveles registrados y los caudales alterados por la variación de los niveles comentados.

La matriz de la varianza de la ecuación del sistema ( $Q$ ) es una matriz diagonal de 4x4, teniendo los tres primeros valores de la diagonal el valor de uno y el último valor de la diagonal (posición (4,4)) es el que realmente varía por tener datos medidos en la estación limnigráfica de Barrancabermeja. Se calcula la varianza del error en cada iteración respecto el dato pronosticado y el dato medido, actualizando la varianza del error en el último valor de la diagonal de la matriz ( $Q$ ).

Los valores de uno, asumidos en las tres primeras posiciones de la diagonal (posiciones (1,1), (2,2) y (3,3)) en la matriz de la varianza ( $Q$ ), es por la siguiente suposición: como no

se tiene datos reales medidos en los caudales de salida de los tres primeros embalses, se considera que los errores de las mediciones en los caudales de salida ya están normalizados y por estar normalizadas tienen media cero y por lo tanto la varianza debe ser de uno en el error.

Para la medición en la matriz diagonal (R), cuando específicamente se considera en la simulación que no hay ruidos en la matriz mencionada, es simplemente cero.

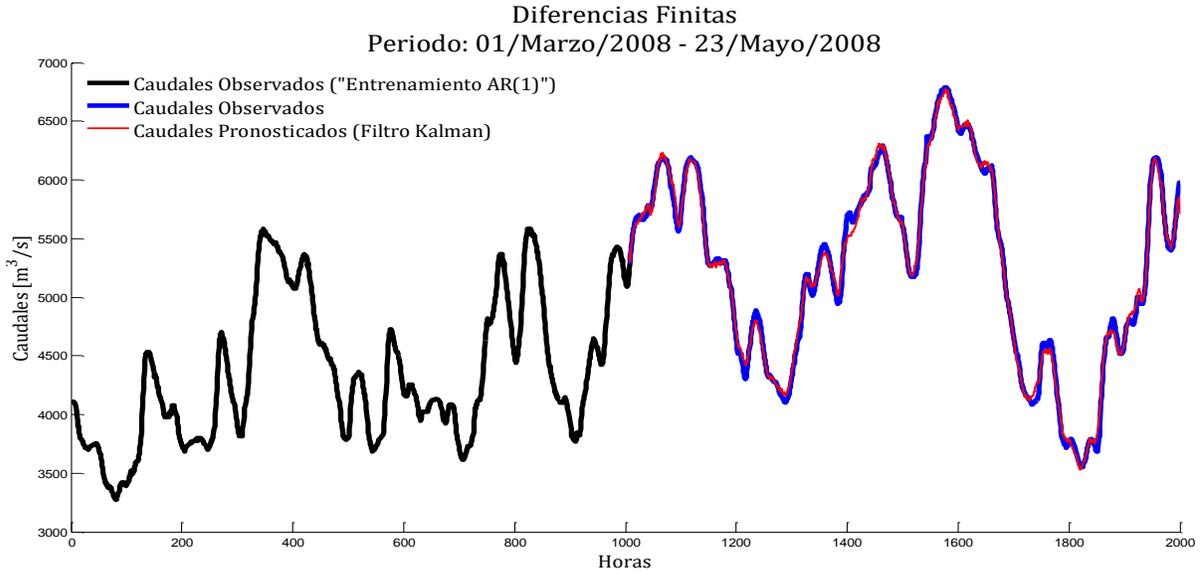
Para el escenario cuando se considera que hay errores en la medición (ecuación 5.4), todos los valores son cero en la diagonal de la matriz (R) excepto el último valor de la diagonal (posición (4,4)), porque se tienen los datos medidos en la estación limnigráfica de Barrancabermeja y se obtiene el error, por medio de este error inducido mencionado en los niveles. Luego se calcula la varianza del error en cada iteración respecto al dato pronosticado y el dato medido, actualizando este resultado en el último valor de la diagonal de la matriz (R).

## **5.4 Pronóstico de caudales, modelo de tránsito de diferencias finitas**

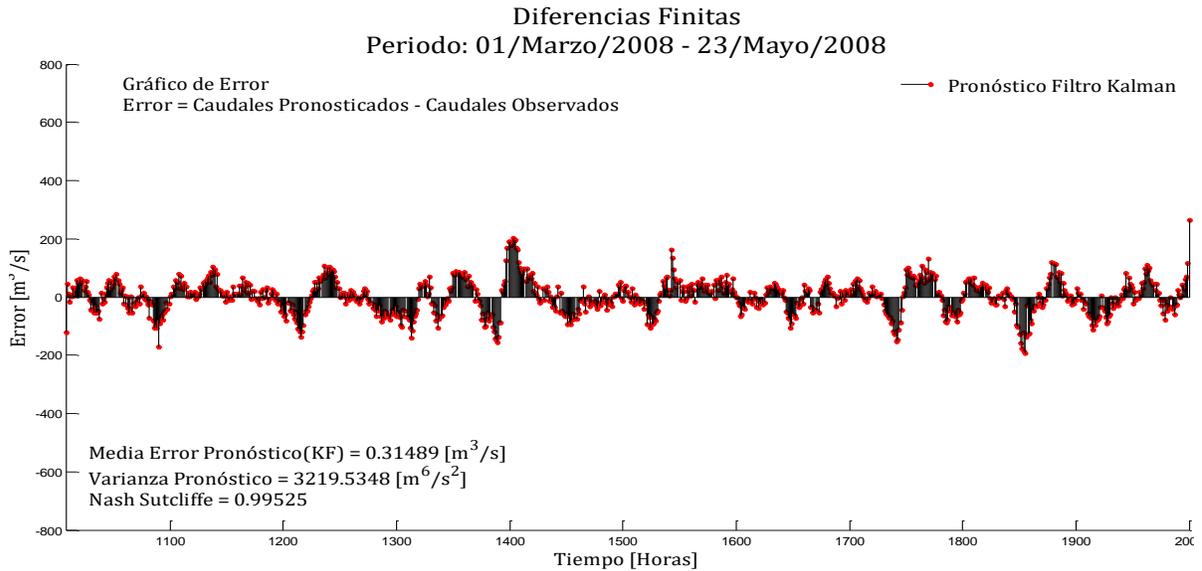
Al terminar el presente ítem se presenta una tabla con los resultados resumen de los pronósticos del filtro Kalman del modelo de tránsito lineal de diferencias finitas, de los cinco periodos seleccionados, considerando en el pronóstico con y sin ruido en la medición, se hace de esta forma porque hay similitudes en los análisis de resultados en los periodos. También se realiza un breve análisis resaltando las diferencias e indicando algunas tendencias en los resultados de la hidrógrafa pronosticada del cuarto y último embalse, respecto a la hidrógrafa medida en la estación limnigráfica (LG) de Barrancabermeja.

En el ítem 5.7 se presenta un análisis general de los resultados presentados de los pronósticos del filtro Kalman, con la estructura matricial de los tres modelos de tránsito lineales desarrollados para el proyecto.

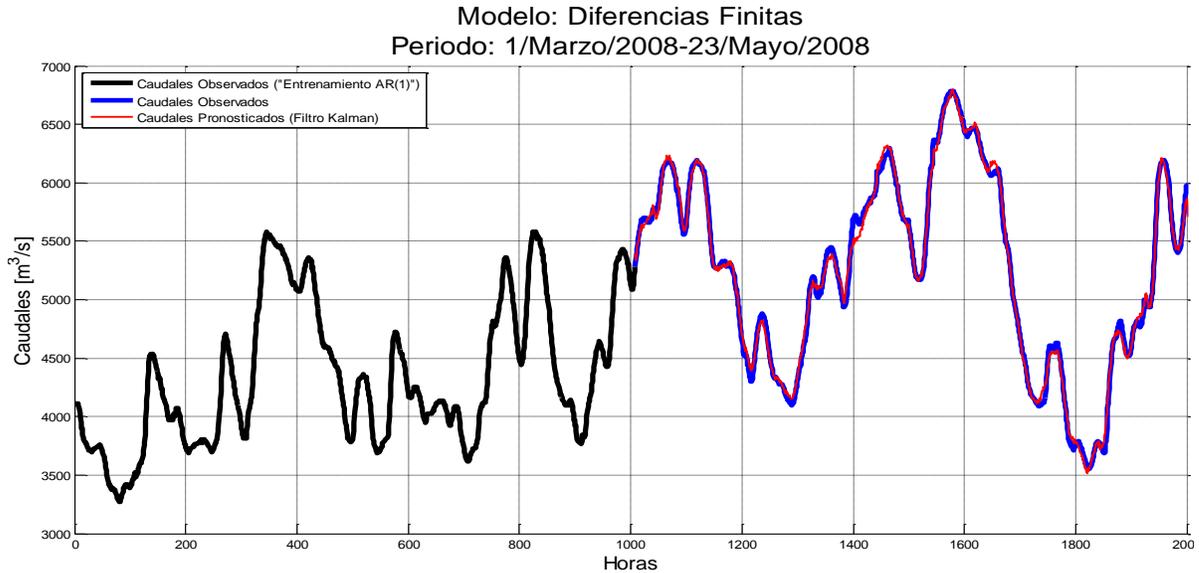
**Figura 5-1:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de diferencias finitas periodo 1, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



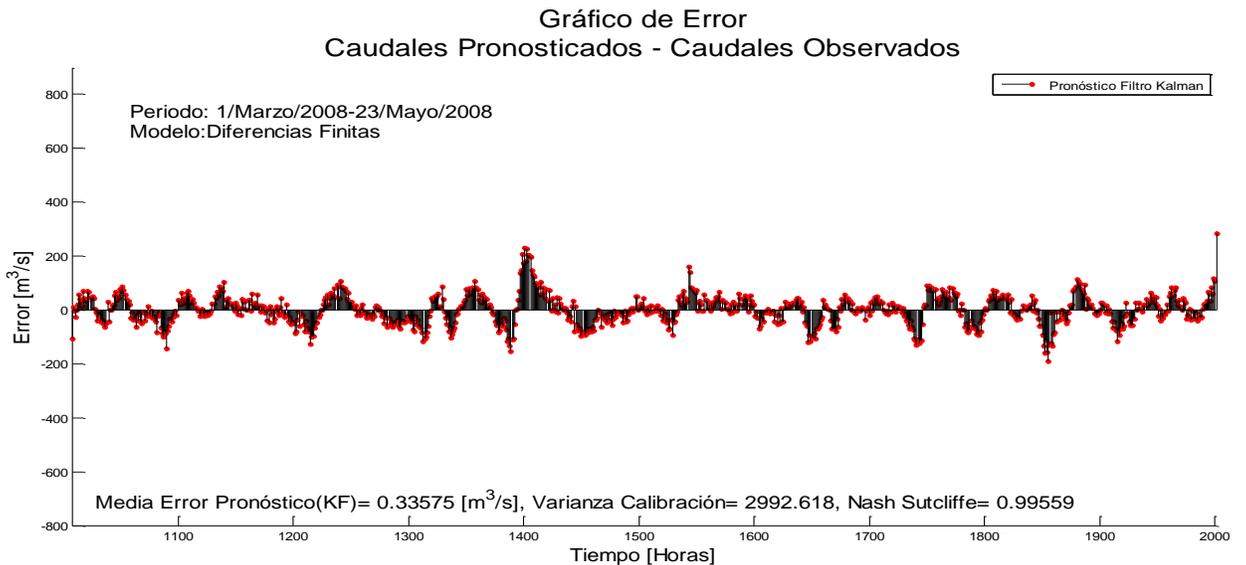
**Figura 5-2:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de diferencias finitas periodo 1, con ruido en la medición.



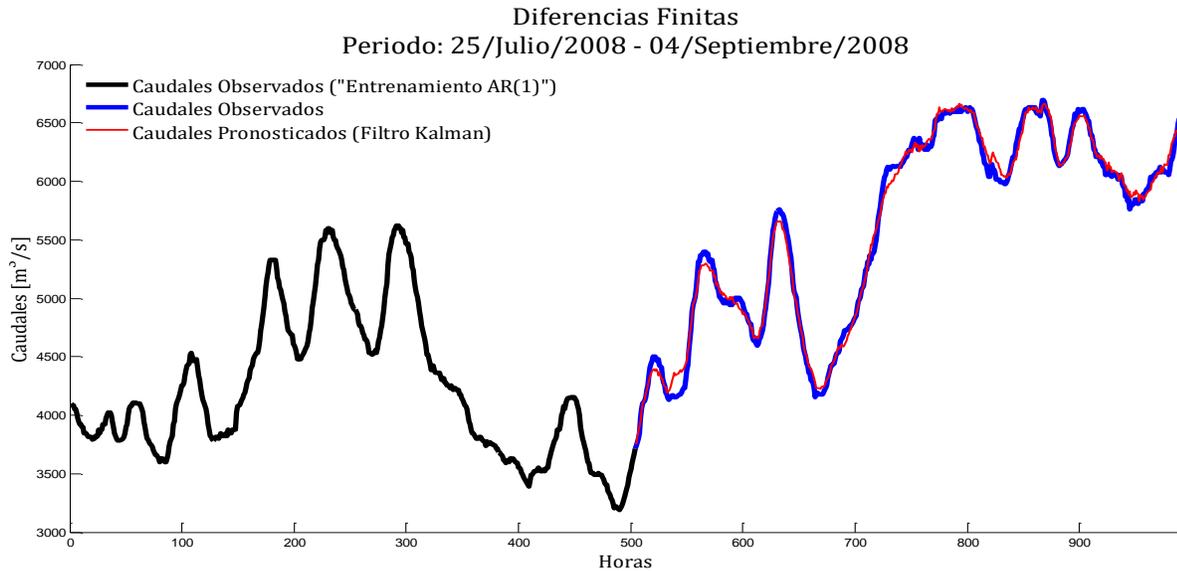
**Figura 5-3:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación limnigráfica de Barrancabermeja, modelo de diferencias finitas periodo 1, sin ruidos en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



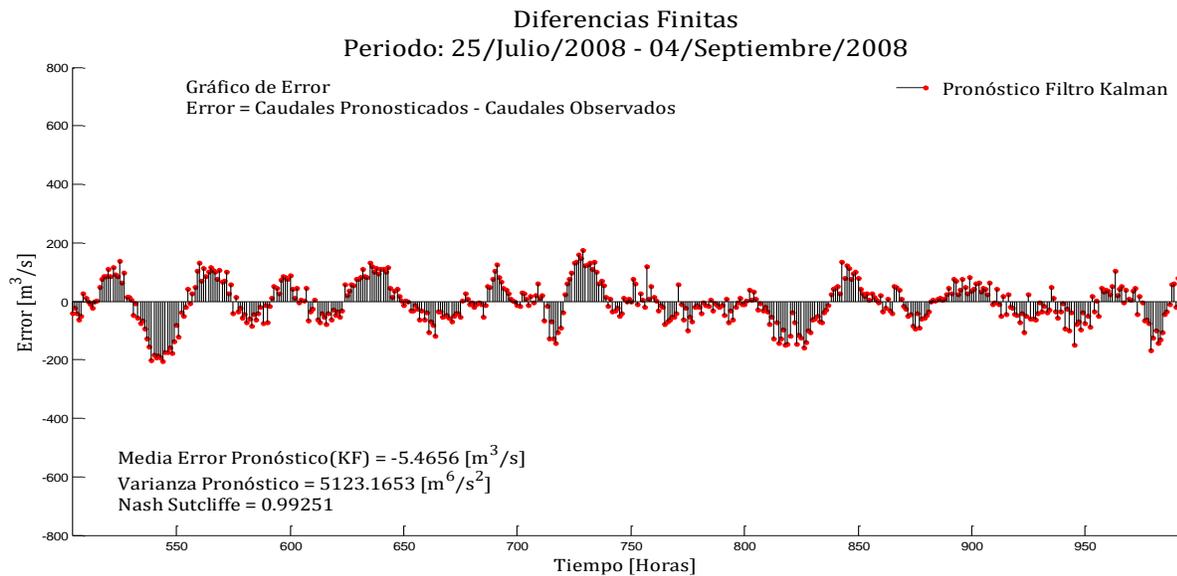
**Figura 5-4:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de diferencias finitas periodo 1, sin ruido en la medición.



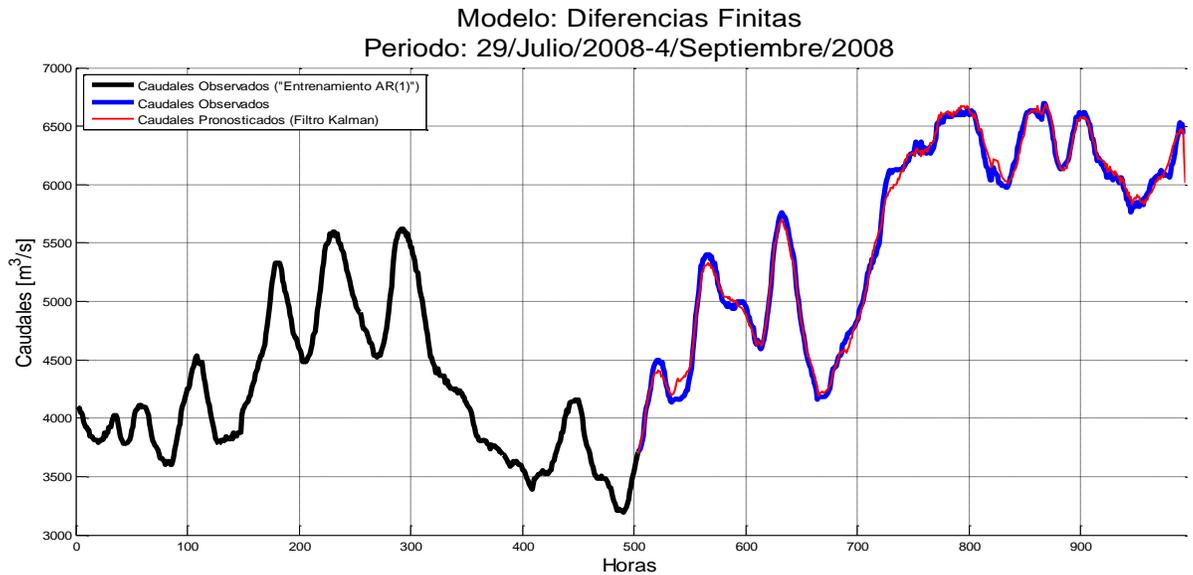
**Figura 5-5:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de diferencias finitas periodo 2, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



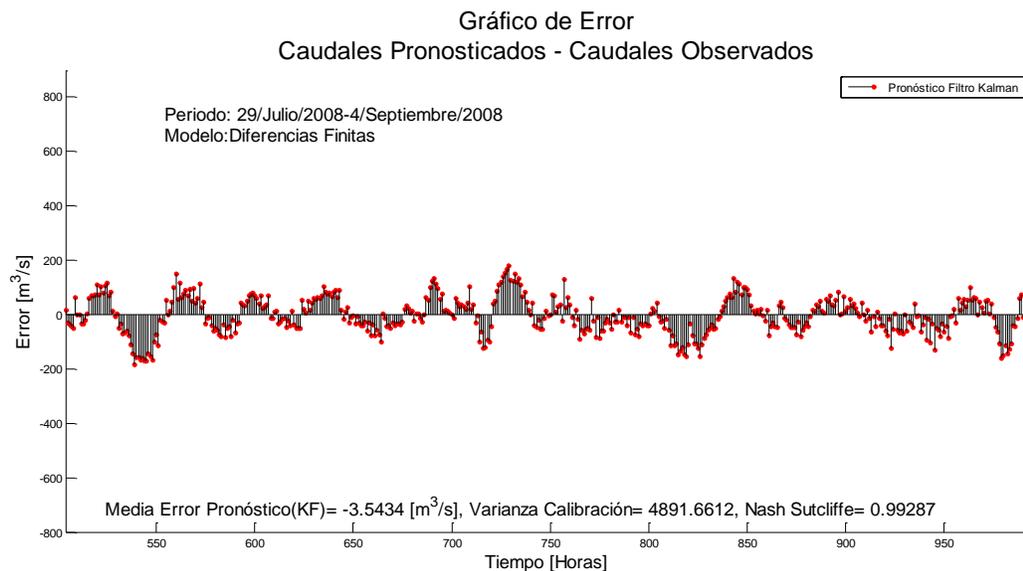
**Figura 5-6:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de diferencias finitas periodo 2, con ruido en la medición.



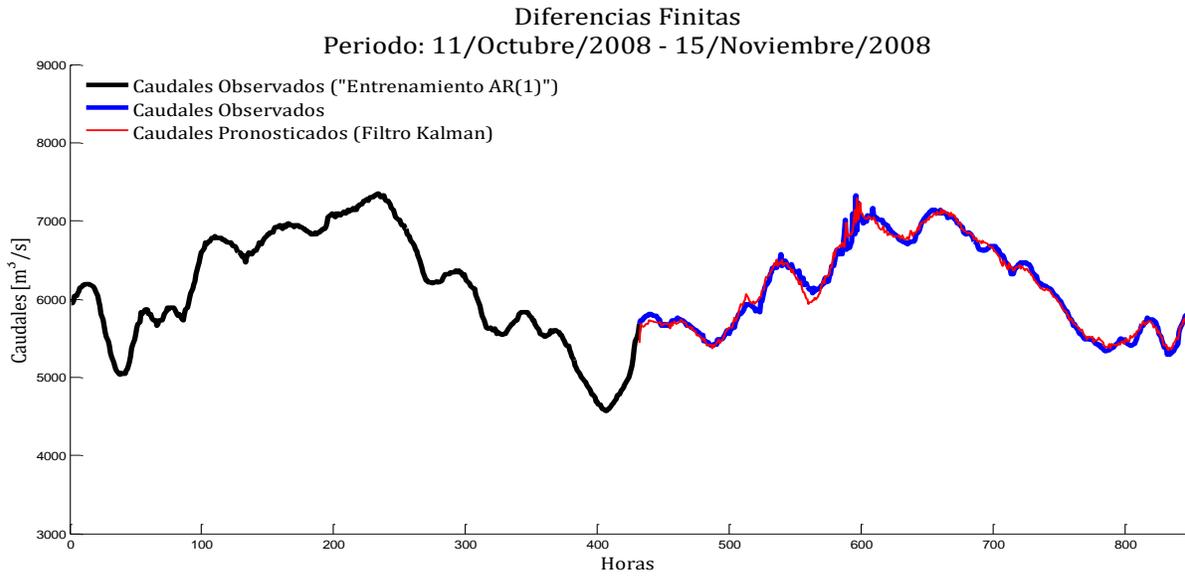
**Figura 5-7:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación limnigráfica de Barrancabermeja, modelo de diferencias finitas periodo 2, sin ruidos en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



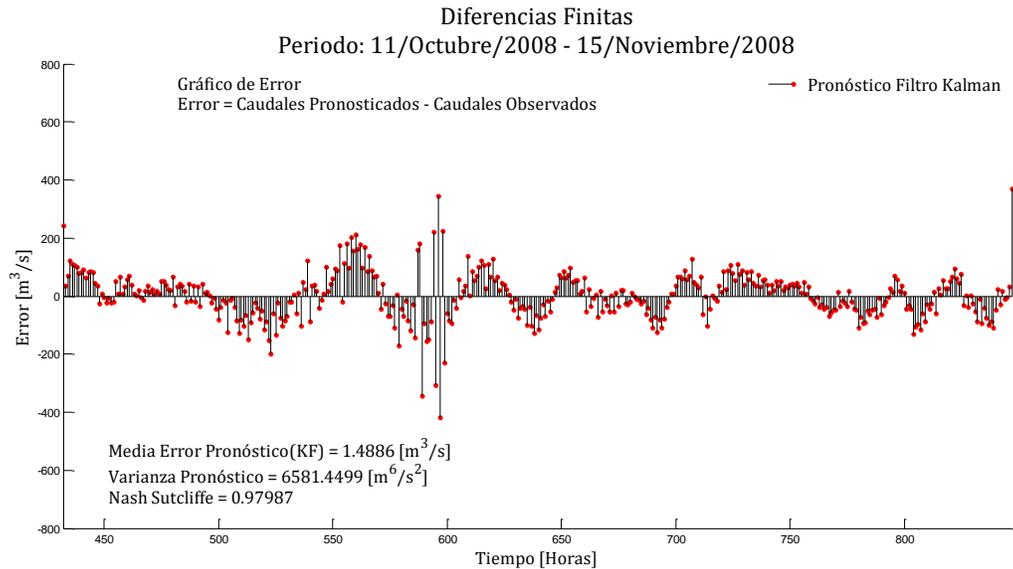
**Figura 5-8:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de diferencias finitas periodo 2, sin ruido en la medición.



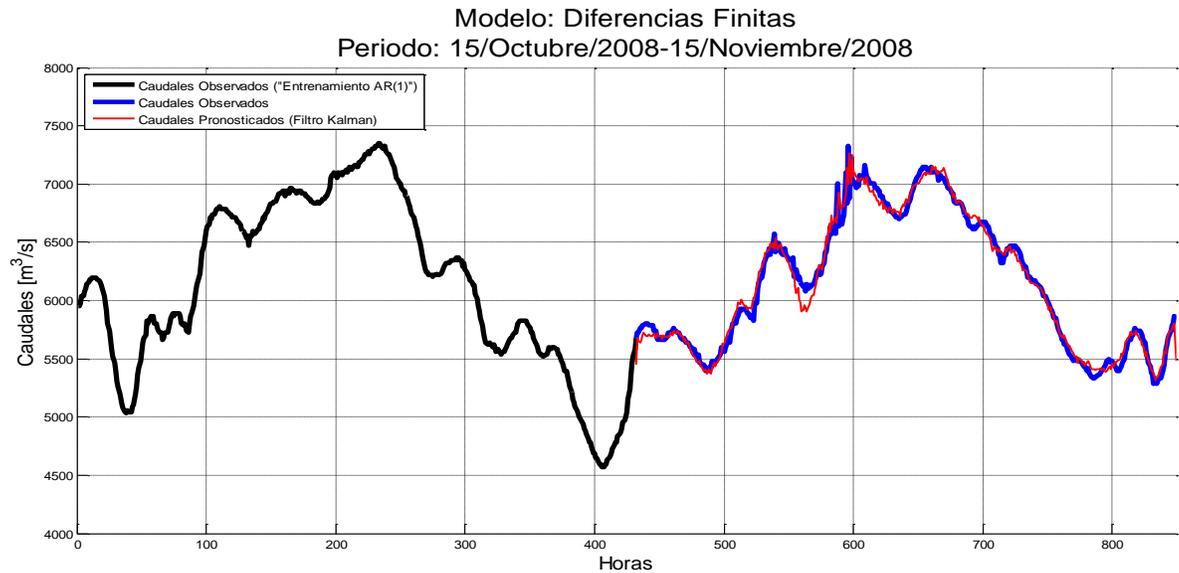
**Figura 5-9:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de diferencias finitas periodo 3, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



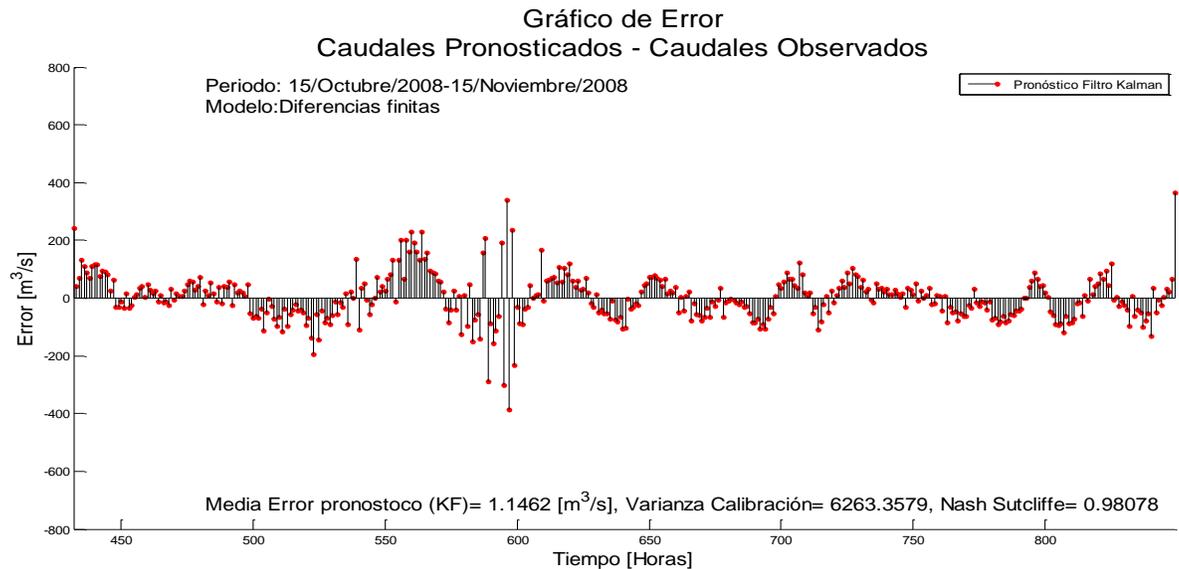
**Figura 5-10:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de diferencias finitas periodo 3, con ruido en la medición.



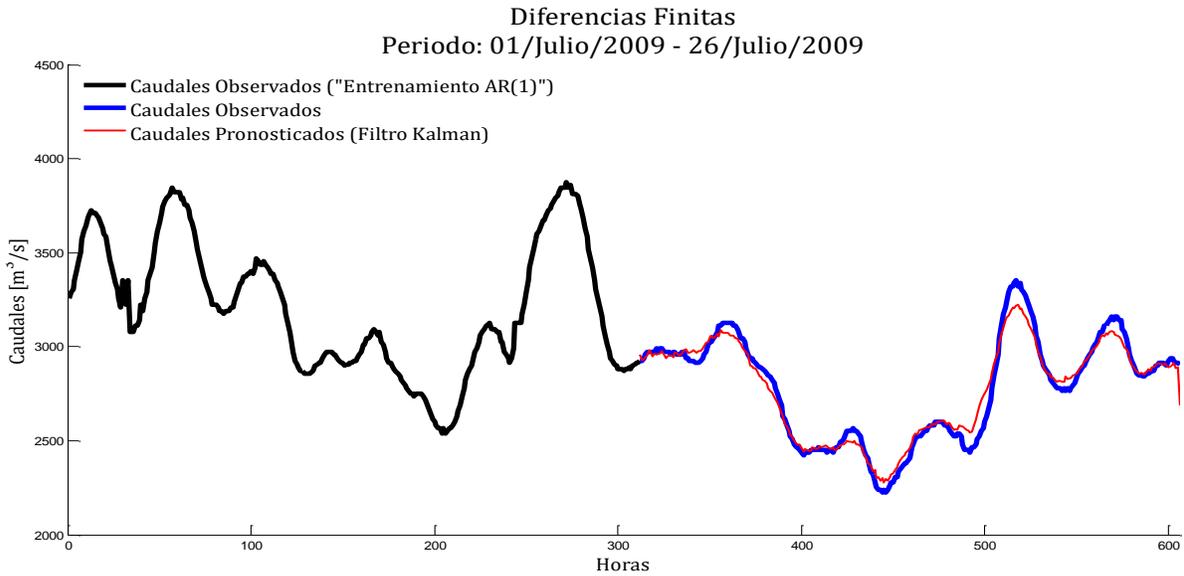
**Figura 5-11:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación limnigráfica de Barrancabermeja, modelo de diferencias finitas periodo 3, sin ruidos en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



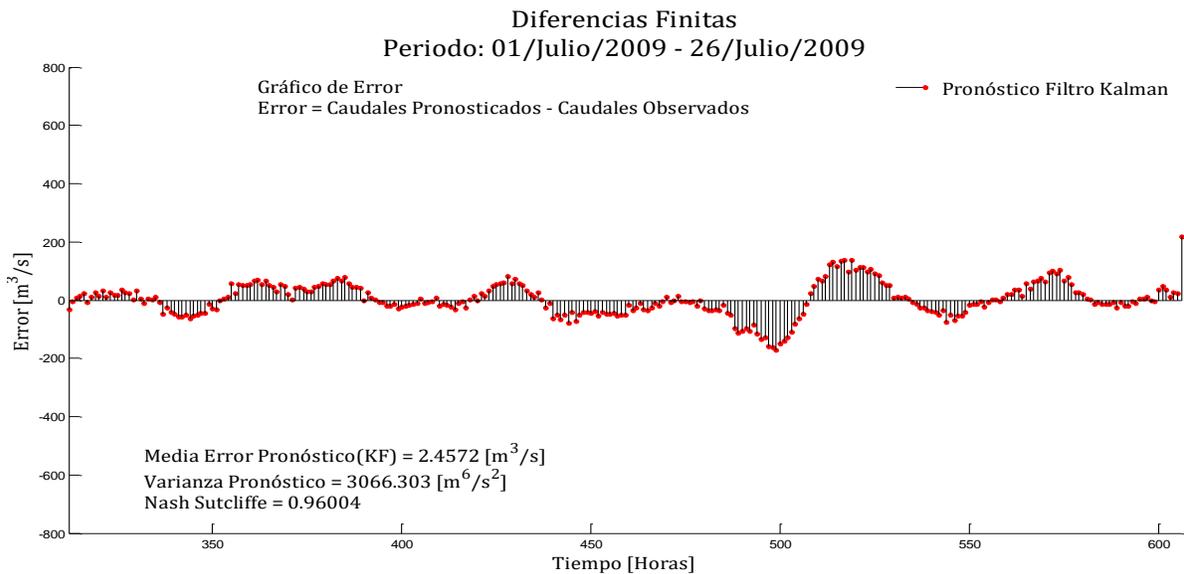
**Figura 5-12:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de diferencias finitas periodo 3, sin ruido en la medición.



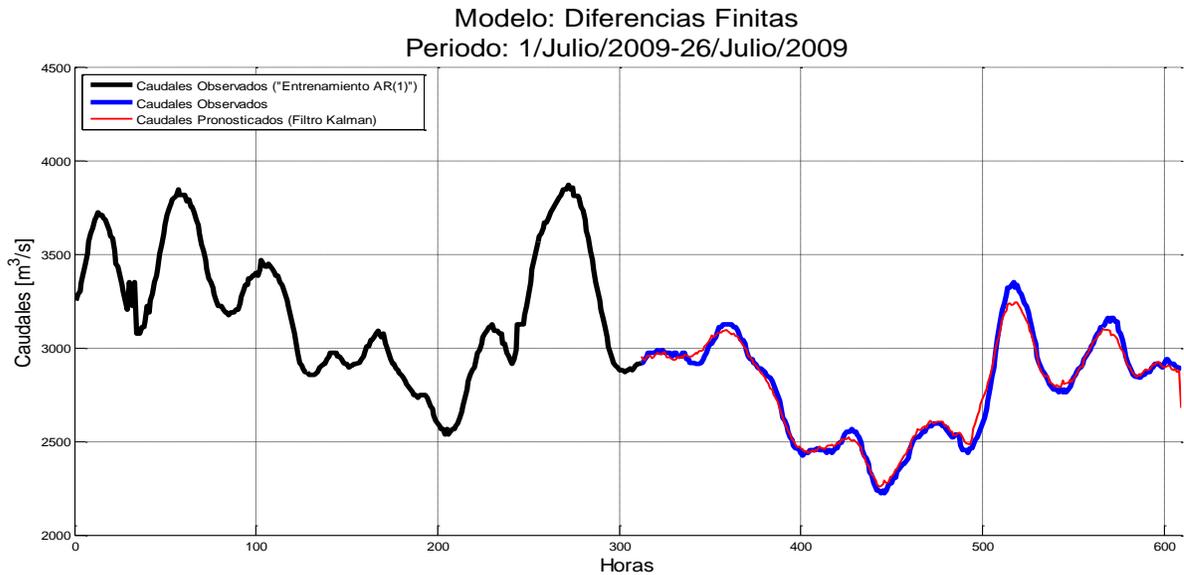
**Figura 5-13:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de diferencias finitas periodo 4, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



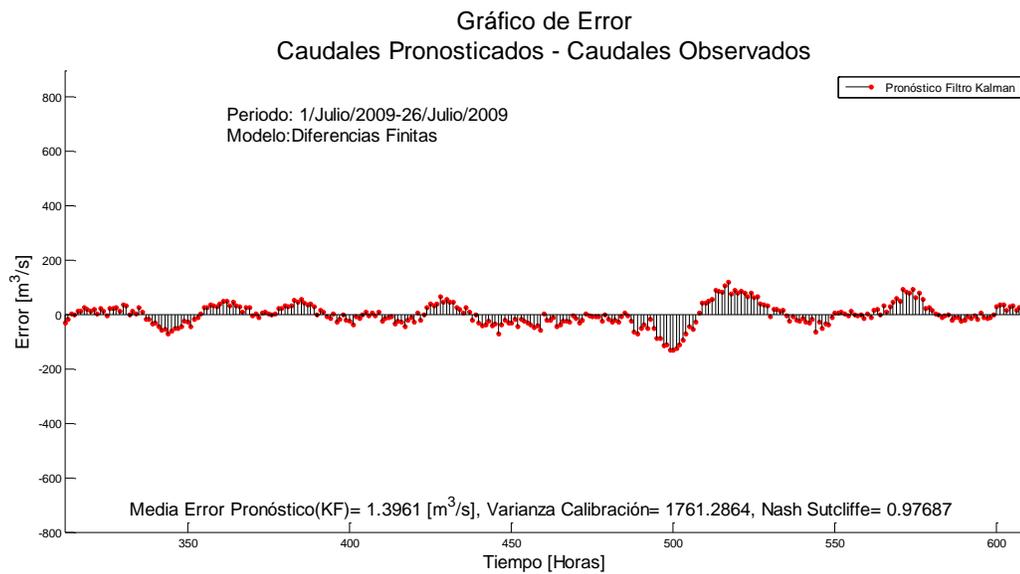
**Figura 5-14:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de diferencias finitas periodo 4, con ruido en la medición.



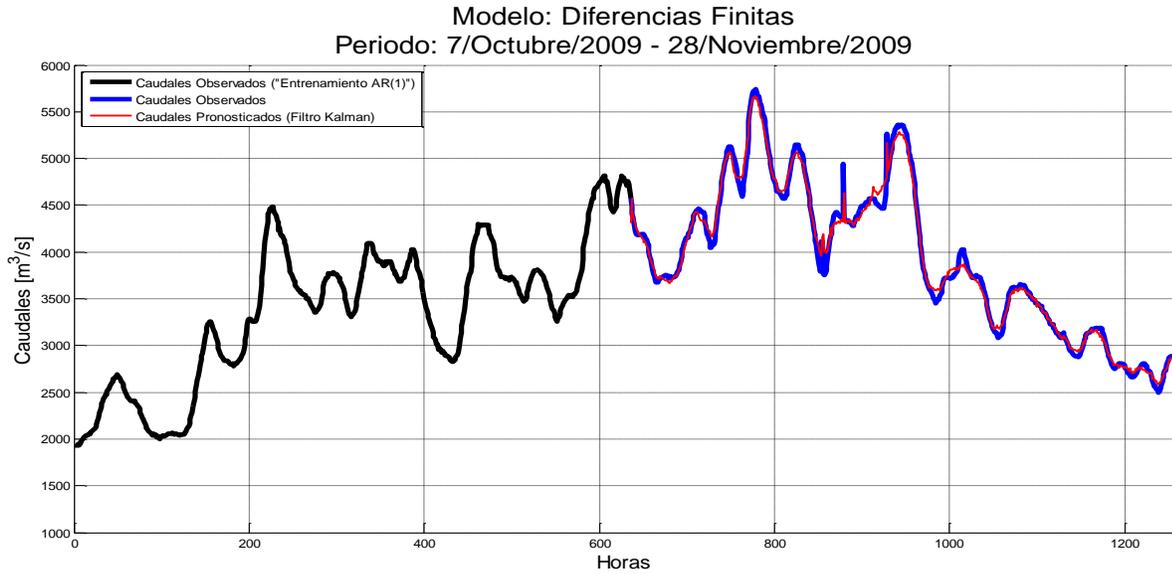
**Figura 5-15:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación limnigráfica de Barrancabermeja, modelo de diferencias finitas periodo 4, sin ruidos en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



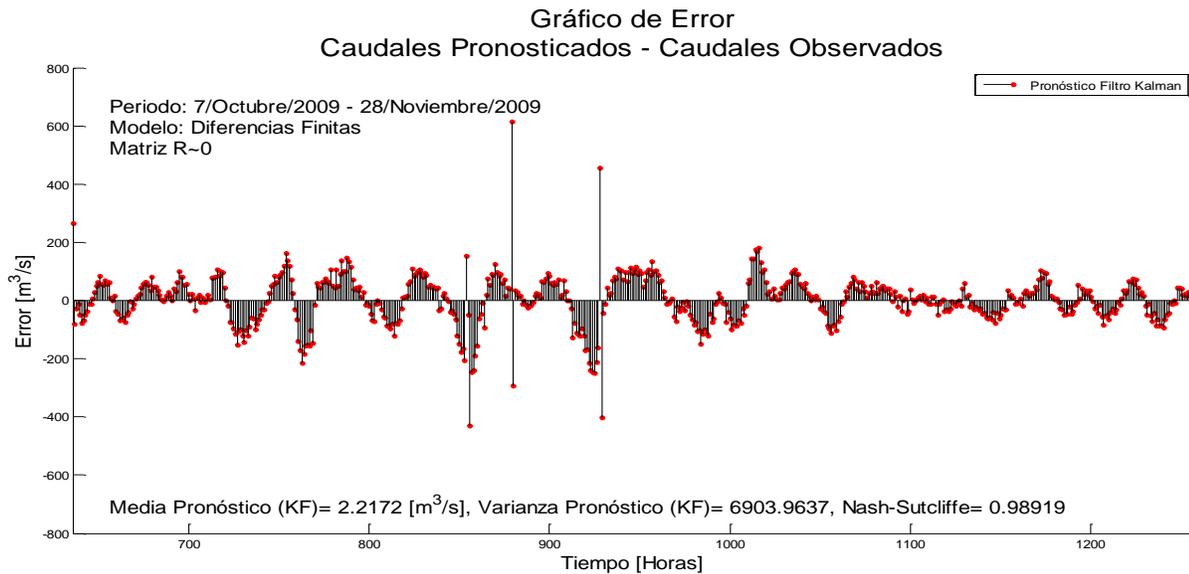
**Figura 5-16:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de diferencias finitas periodo 4, sin ruido en la medición.



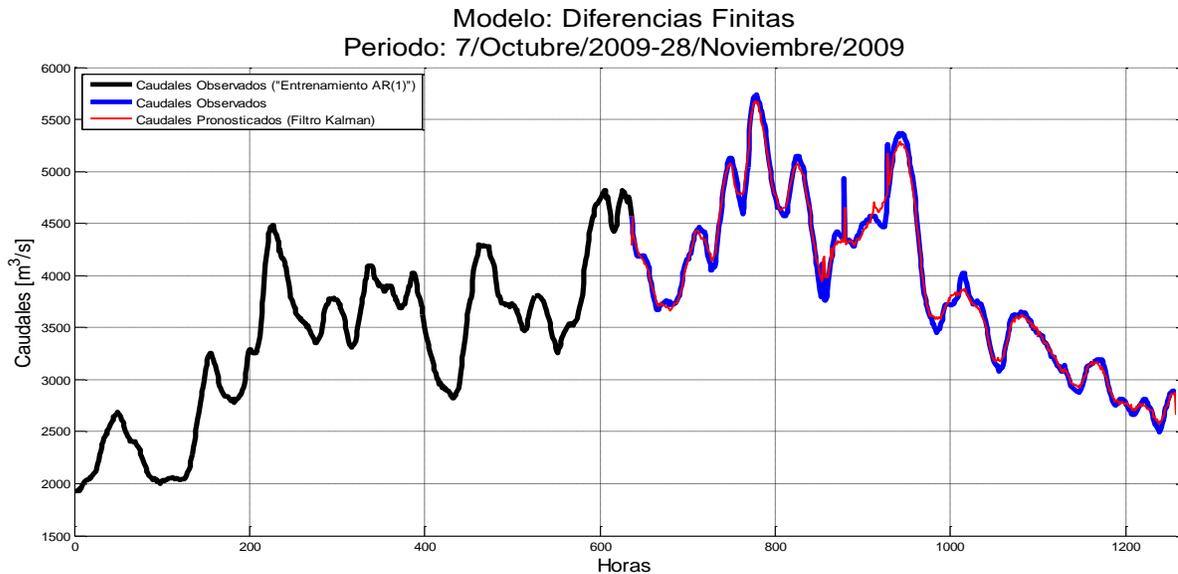
**Figura 5-17:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de diferencias finitas periodo 5, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



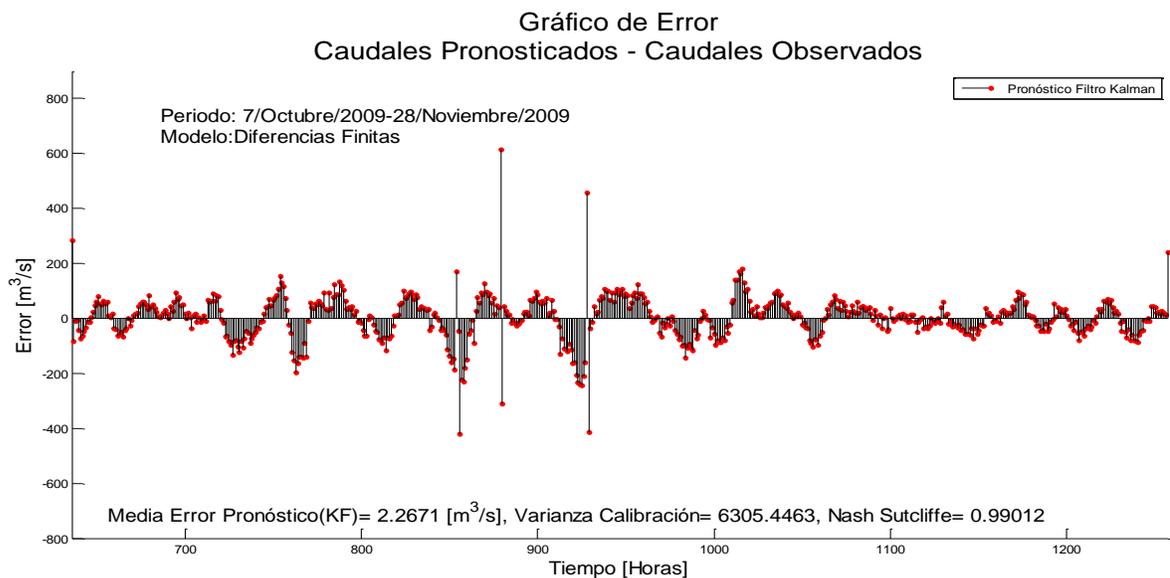
**Figura 5-18:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de diferencias finitas periodo 5, con ruido en la medición.



**Figura 5-19:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación limnigráfica de Barrancabermeja, modelo de diferencias finitas periodo 5, sin ruidos en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



**Figura 5-20:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de diferencias finitas periodo 5, sin ruido en la medición.



**Tabla 5.3:** Resumen de los resultados de parámetros estadísticos de errores en el pronóstico de caudales del filtro Kalman, indicando el resultado de la función objetivo, según tránsito de diferencias finitas.

Periodo	RESULTADOS ESTADÍSTICOS DE ERRORES DEL PRONÓSTICO (KF) DE CAUDALES. MODELO DE TRANSITO DE DIFERENCIAS FINITAS POR PERIODO					
	Con ruido en la ecuación de medición			Sin ruido en la ecuación de medición		
	Coef. De Nash Pronóstico de caudales con filtro KF	Promedio de error de pronóstico con el filtro KF (m <sup>3</sup> /s)	Varianza de error de pronóstico con el filtro KF (m <sup>6</sup> /s <sup>2</sup> )	Coef. De Nash Pronóstico de caudales con filtro KF	Promedio de error de pronóstico con el filtro KF (m <sup>3</sup> /s)	Varianza de error de pronóstico con el filtro KF (m <sup>6</sup> /s <sup>2</sup> )
1	0,99525	0,31489	3.219,53	0,99559	0,33575	2.992,6
2	0,99251	-5,46	5.123,16	0,99287	-3,54	4.891,66
3	0,97987	-1,48	6.581,45	0,98078	1,14	6.263,35
4	0,96004	2,45	3.066,3	0,97687	1,39	1.761,28
5	0,98919	2,21	6.903,96	0,99012	2,26	6.305,44

Como se había indicado al inicio de la presente sección, se muestra en la Tabla 5.3 los resultados de parámetros estadísticos, sobre la exactitud de los caudales pronosticados por el filtro Kalman en la hidrógrafa del cuarto y último embalse VS hidrógrafa observada en la estación limnigráfica (LG) de Barrancabermeja, por medio del modelo de tránsito de diferencias finitas. A continuación, se realiza los análisis correspondientes de los resultados mencionados, con y sin “ruido” en la ecuación de medición, para los cinco periodos seleccionados:

- Los resultados del coeficiente de la función objetivo de Nash-Sutcliffe son exitosos para los cinco periodos en general, si se considera que el mejor resultado posible es uno (1) y los coeficientes de estos periodos están en el rango de 0,960 a 0,995.
- El error medio o promedio calculado respecto a la hidrógrafa observada en la estación (LG) de Barrancabermeja, presenta valores bajos del orden de (-5,46 m<sup>3</sup>/s a 2,45 m<sup>3</sup>/s), tanto para el pronóstico del filtro Kalman con y sin ruido en la ecuación de medición.

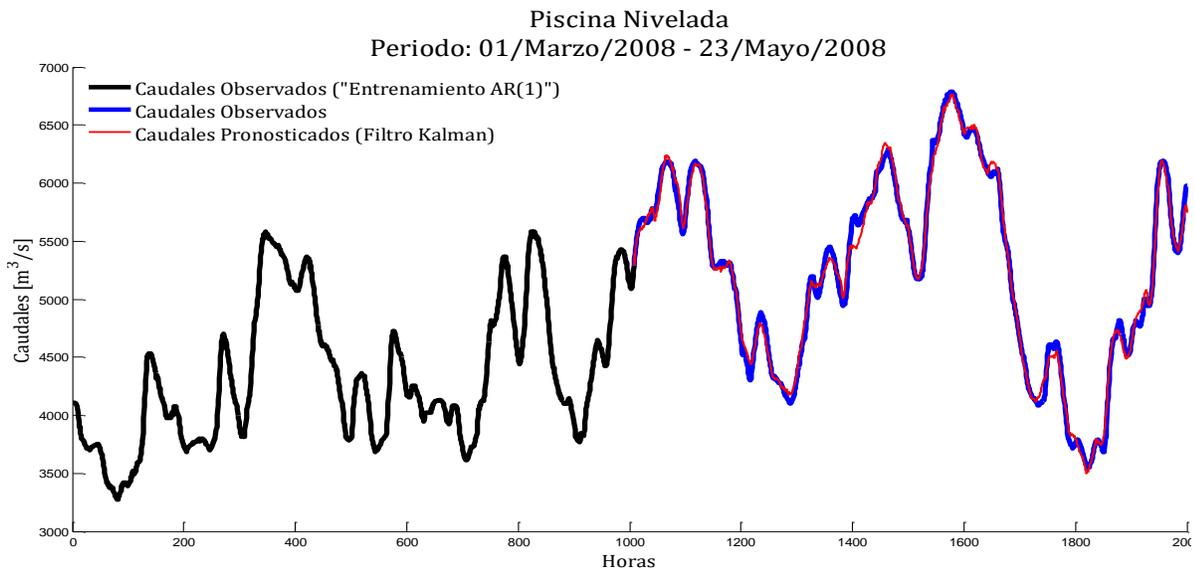
- Al observar la hidrógrafa pronosticada respecto a la hidrógrafa medida en general para los cinco periodos, se observa buen rendimiento o eficiencia del filtro Kalman, ya que logra ajustarse en la parte de ascenso o descenso de los picos de las hidrógrafas. Como es usual en los modelos de pronósticos, el filtro Kalman también tiende a presentar desajustes o variaciones, debido al cambio súbito en la tendencia del valor de los caudales en los picos y en los valles de la hidrógrafa, debido al aumento o decrecimiento de los caudales respectivamente, para estos sectores de la hidrógrafa.
- En la serie de tiempo de la hidrógrafa del periodo 3 y del periodo 5, a pesar de haberse realizado un análisis estadístico por medio del diagrama Box Plot para los datos anómalos y realizando el llenado de datos faltantes por una regresión lineal múltiple, se presentaron unos pocos datos de niveles y/o de caudales registrados no consistentes o dudosos. Estos datos en mención pueden ser por errores de medición o del aparato.
- Por ejemplo, en el periodo 3 ver Figura 5-9, al revisar el intervalo de tiempo aproximado de 580 horas a 600 horas, se presenta unos cambios abruptos en el aumento del caudal, según la tendencia de ascenso al observar en la hidrógrafa medida de la estación (LG) de Barrancabermeja, presentando unos picos de caudal instantáneos poco comunes. Lo anterior permite que en la figura de errores medios o promedios del pronóstico en el periodo 3 ver Figura 5-10, se vea reflejado altos valores de errores puntuales en el intervalo de tiempo mencionado.
- Caso similar ocurre, en el periodo 5 ver Figura 5-17, al revisar dos intervalos de tiempo. El primer intervalo de tiempo es aproximadamente de 850 horas a 880 horas, el segundo intervalo es de 910 horas a 920 horas, presentándose unos cambios abruptos en el descenso y aumento del caudal, según las dos tendencias respectivas observadas en la hidrógrafa medida de la estación (LG) de Barrancabermeja, exhibiendo unos picos de caudal instantáneos poco comunes. Lo anterior permite que en la figura de errores medios o promedios del pronóstico en el periodo 5 ver Figura 5-18, se vea reflejado altos valores de errores puntuales de caudales en los dos intervalos de tiempo mencionados.

## 5.5 Pronóstico de caudales, modelo de tránsito de piscina nivelada

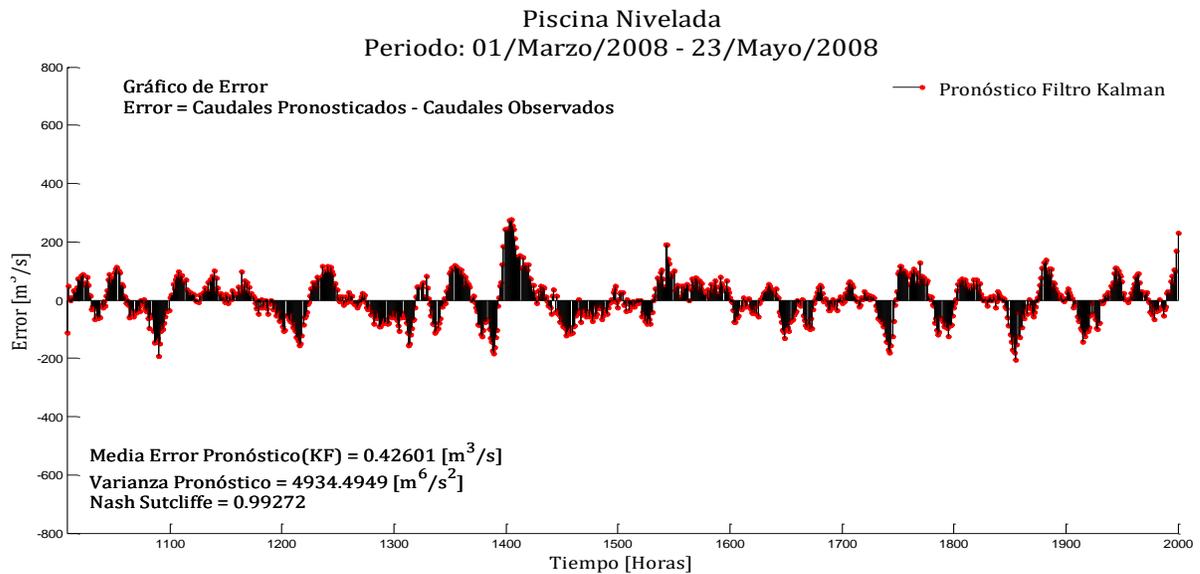
Al terminar el presente ítem se presenta una tabla con los resultados resumen de los pronósticos del filtro Kalman del modelo de tránsito lineal de piscina nivelada, de los cinco periodos seleccionados, considerando en el pronóstico con y sin ruido en la medición, se hace de esta forma porque hay similitudes en los análisis de resultados en los periodos. También se realiza un breve análisis resaltando las diferencias e indicando algunas tendencias en los resultados de la hidrógrafa pronosticada del cuarto y último embalse, respecto a la hidrógrafa medida en la estación limnigráfica (LG) de Barrancabermeja.

En el ítem 5.7 se presenta un análisis general de los resultados presentados de los pronósticos del filtro Kalman, con la estructura matricial de los tres modelos de tránsito lineales desarrollados para el proyecto.

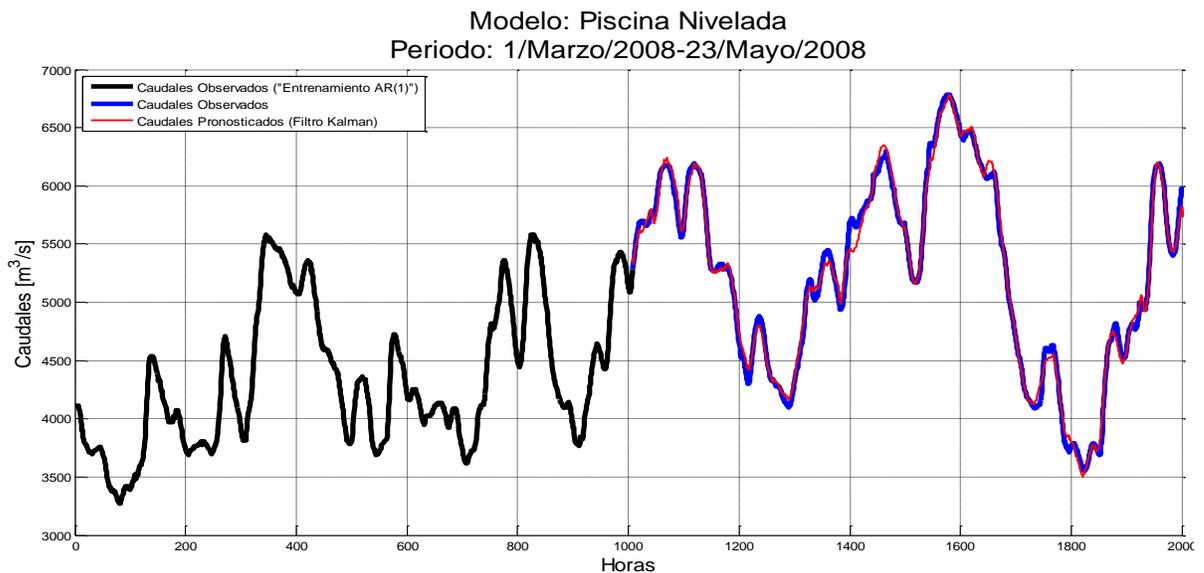
**Figura 5-21:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de piscina nivelada periodo 1, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



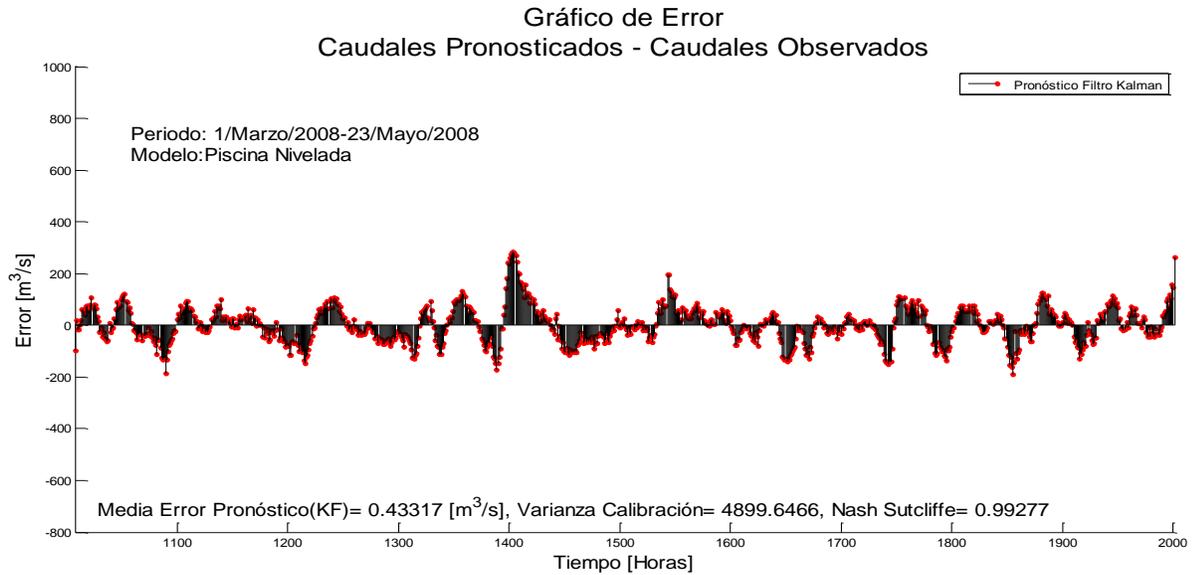
**Figura 5-22:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de piscina nivelada periodo 1, con ruido en la medición.



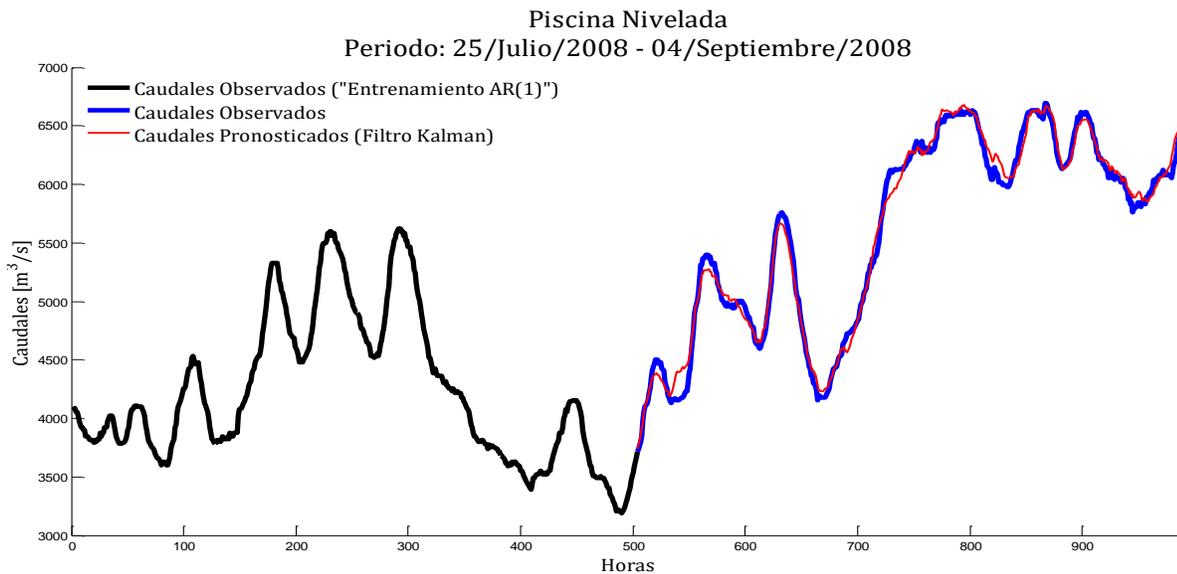
**Figura 5-23:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación limnigráfica de Barrancabermeja, modelo de piscina nivelada periodo 1, sin ruidos en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



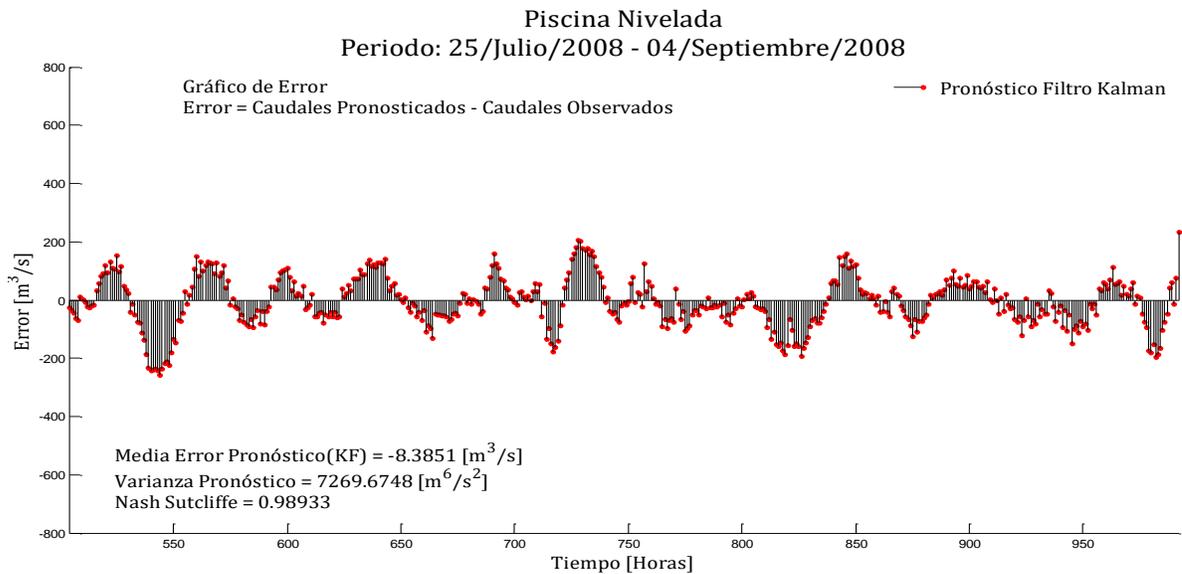
**Figura 5-24:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de piscina nivelada periodo 1, sin ruido en la medición.



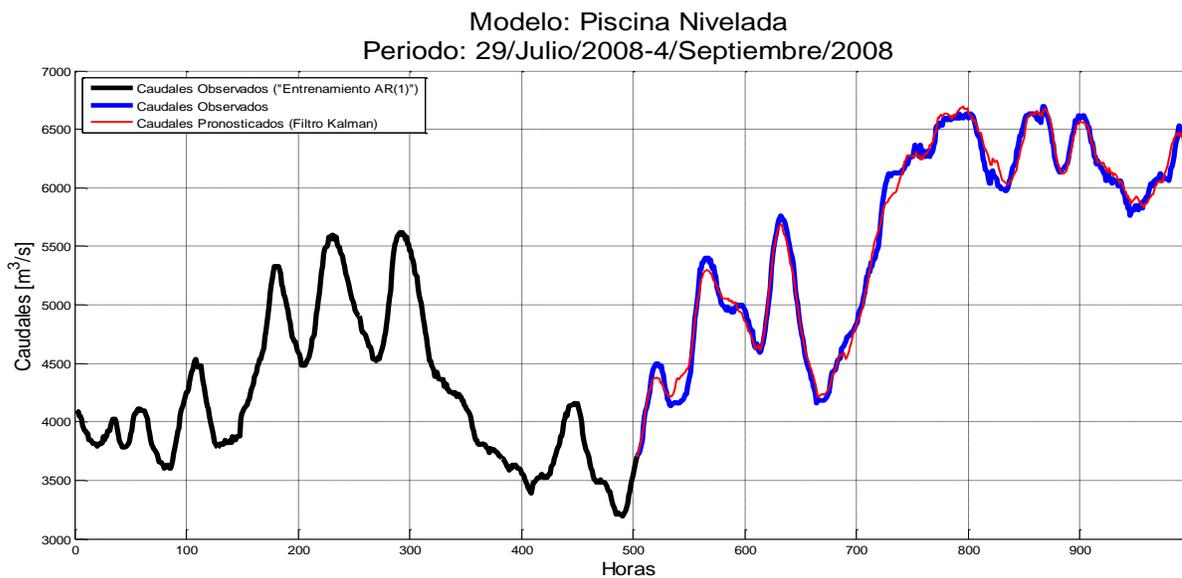
**Figura 5-25:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de piscina nivelada periodo 2, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



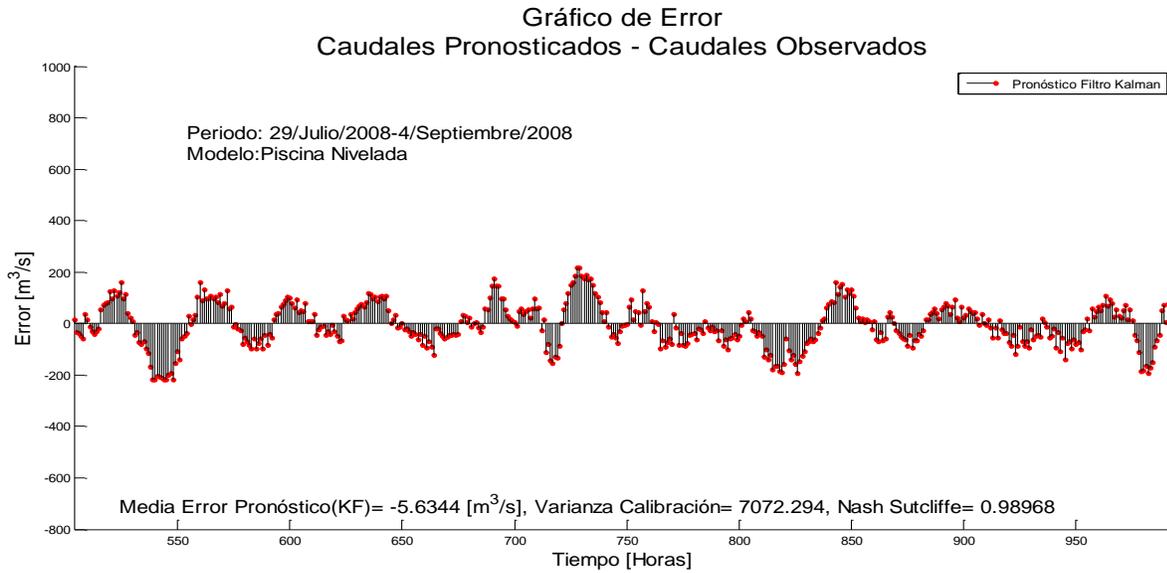
**Figura 5-26:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de piscina nivelada periodo 2, con ruido en la medición.



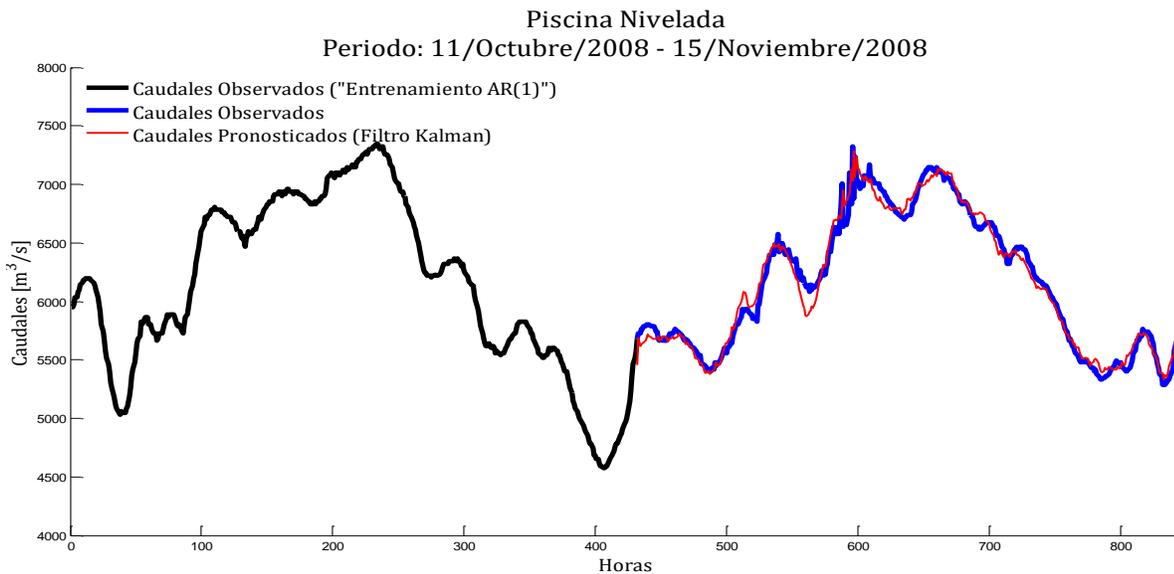
**Figura 5-27:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación limnigráfica de Barrancabermeja, modelo de piscina nivelada periodo 2, sin ruidos en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



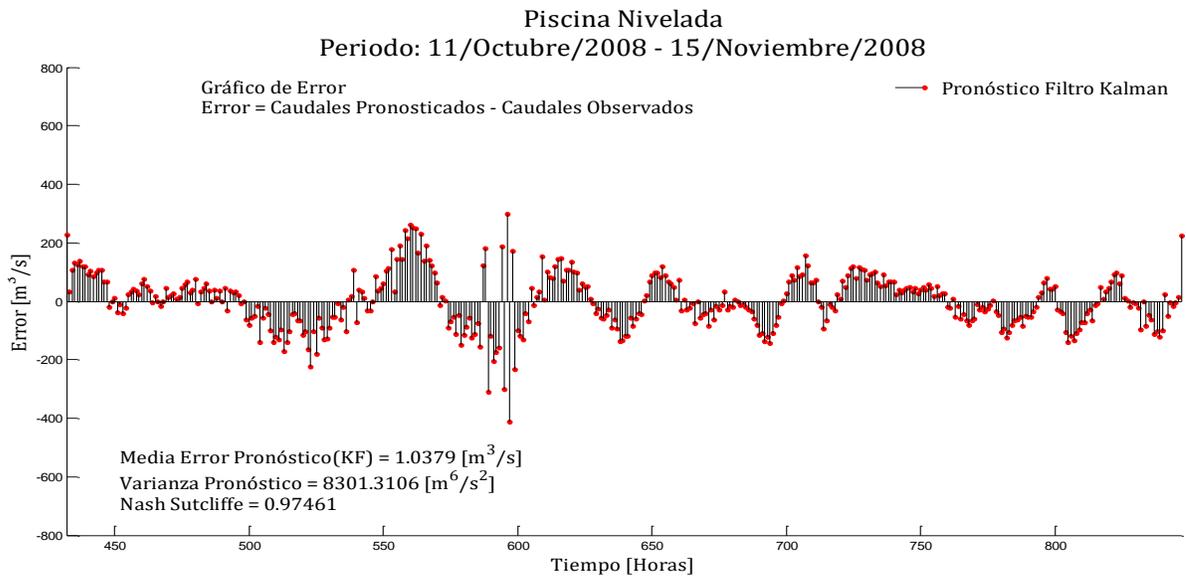
**Figura 5-28:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de piscina nivelada periodo 2, sin ruido en la medición.



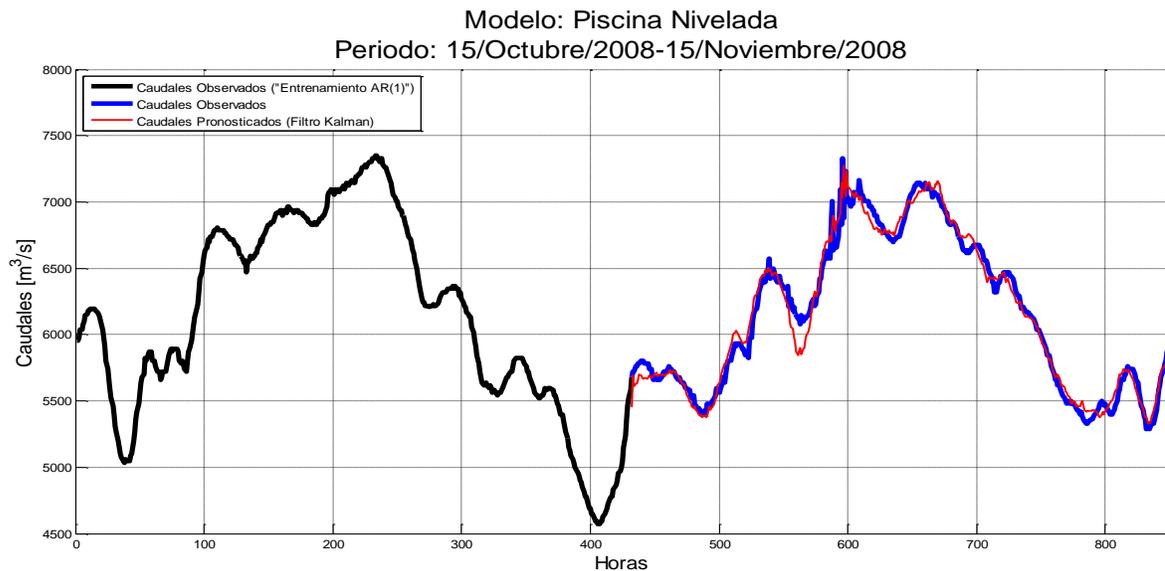
**Figura 5-29:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de piscina nivelada periodo 3, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



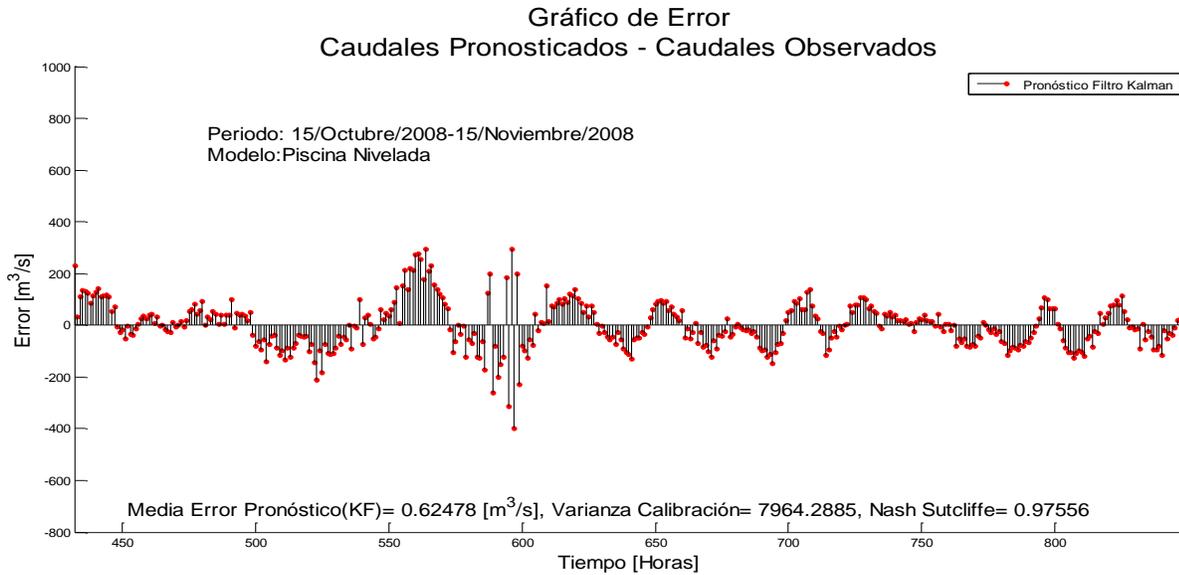
**Figura 5-30:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de piscina nivelada periodo 3, con ruido en la medición.



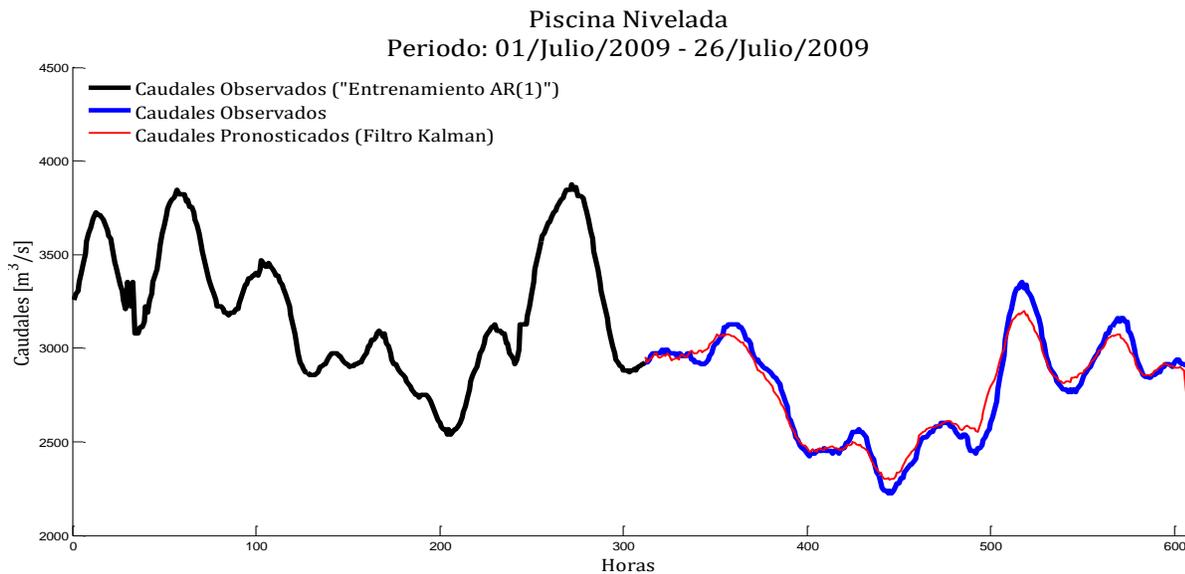
**Figura 5-31:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación limnigráfica de Barrancabermeja, modelo de piscina nivelada periodo 3, sin ruidos en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



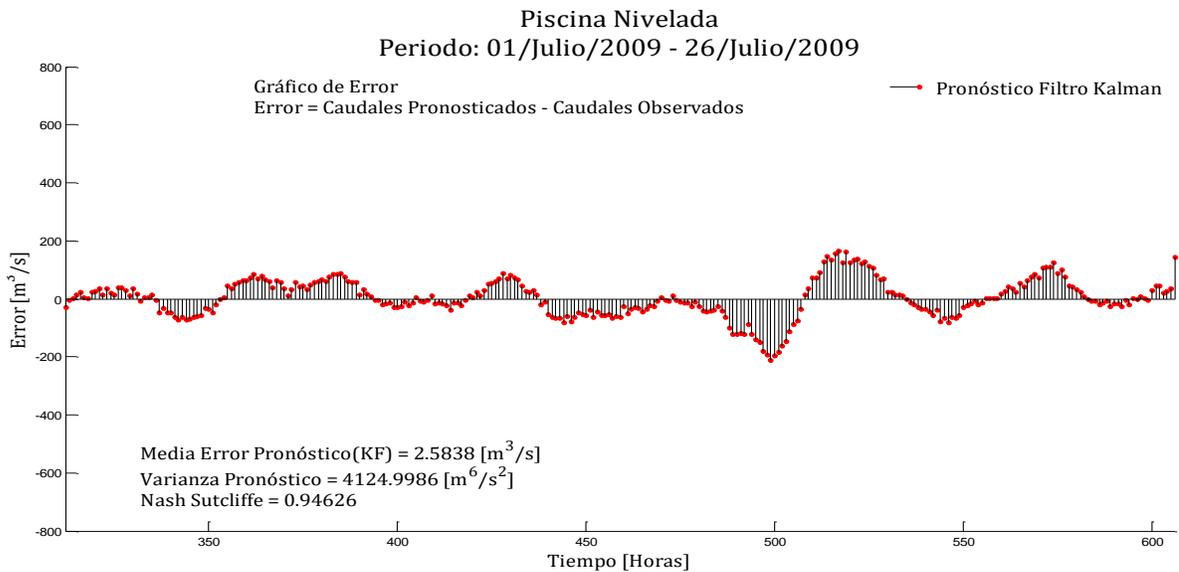
**Figura 5-32:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de piscina nivelada periodo 3, sin ruido en la medición.



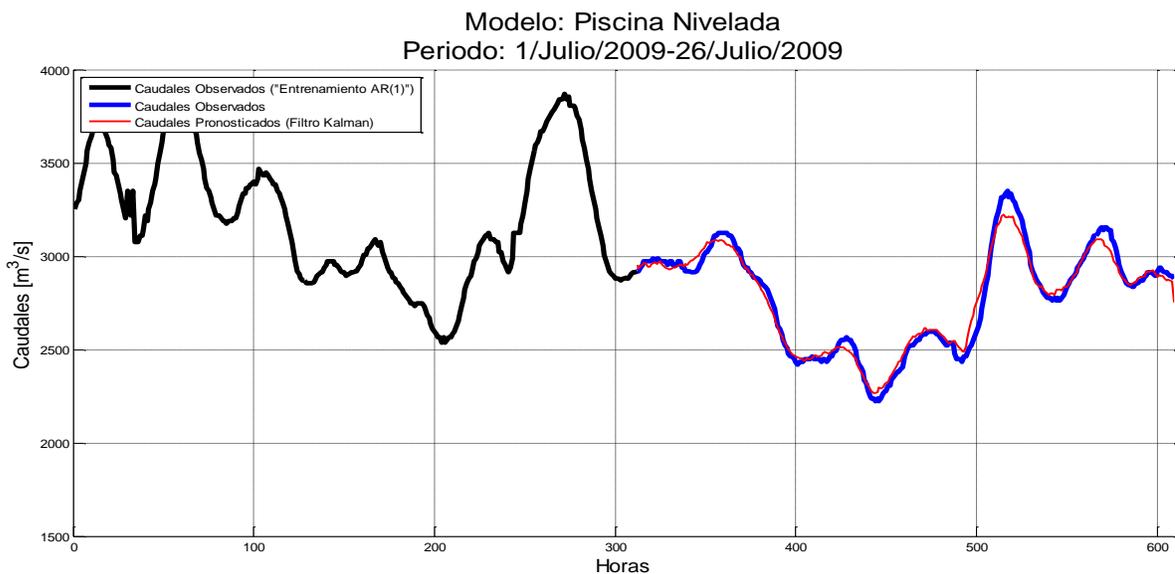
**Figura 5-33:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de piscina nivelada periodo 4, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



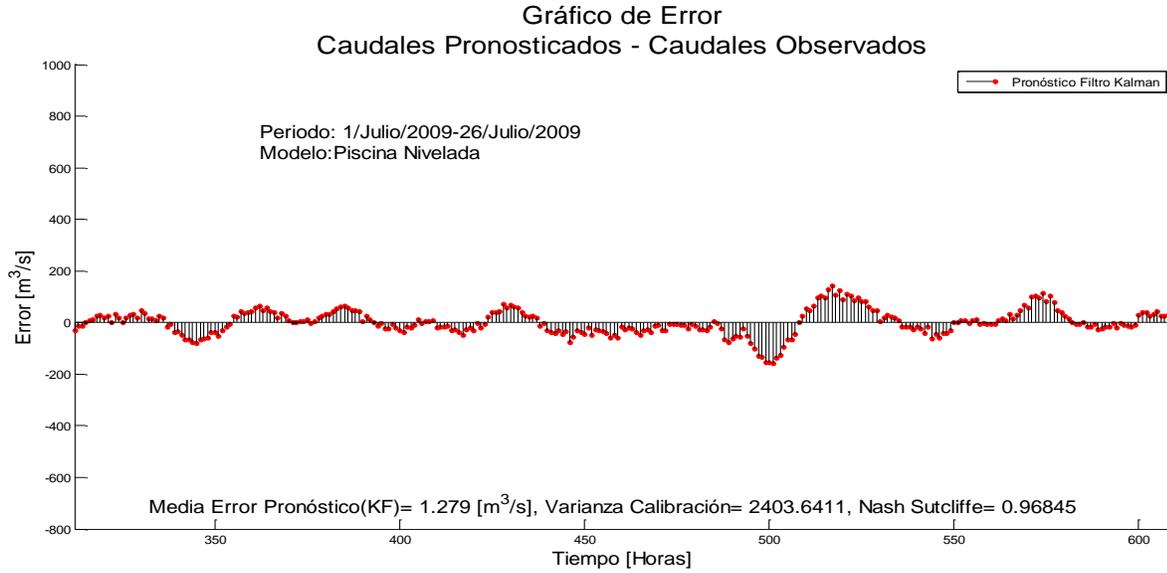
**Figura 5-34:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de piscina nivelada periodo 4, con ruido en la medición.



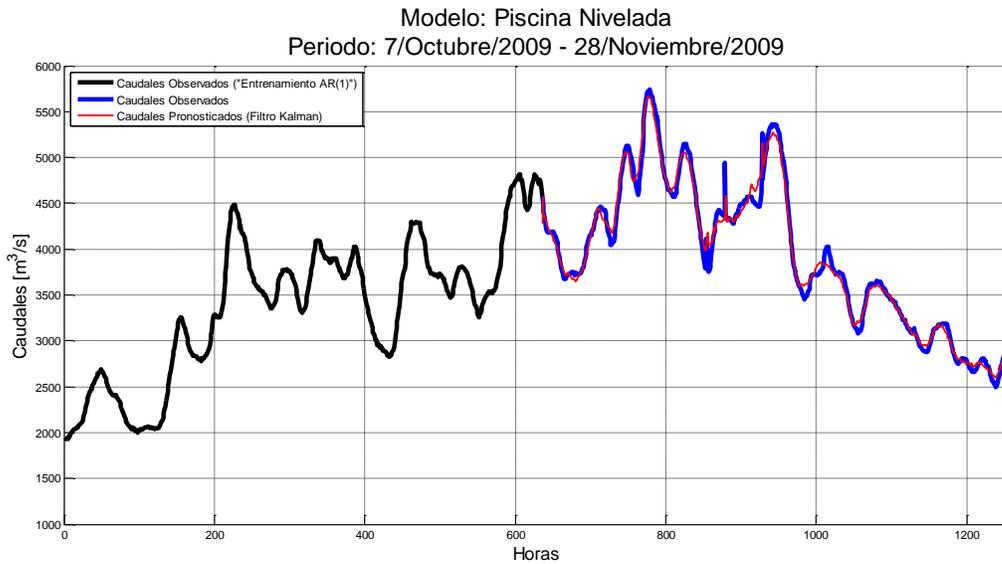
**Figura 5-35:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación limnigráfica de Barrancabermeja, modelo de piscina nivelada periodo 4, sin ruidos en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



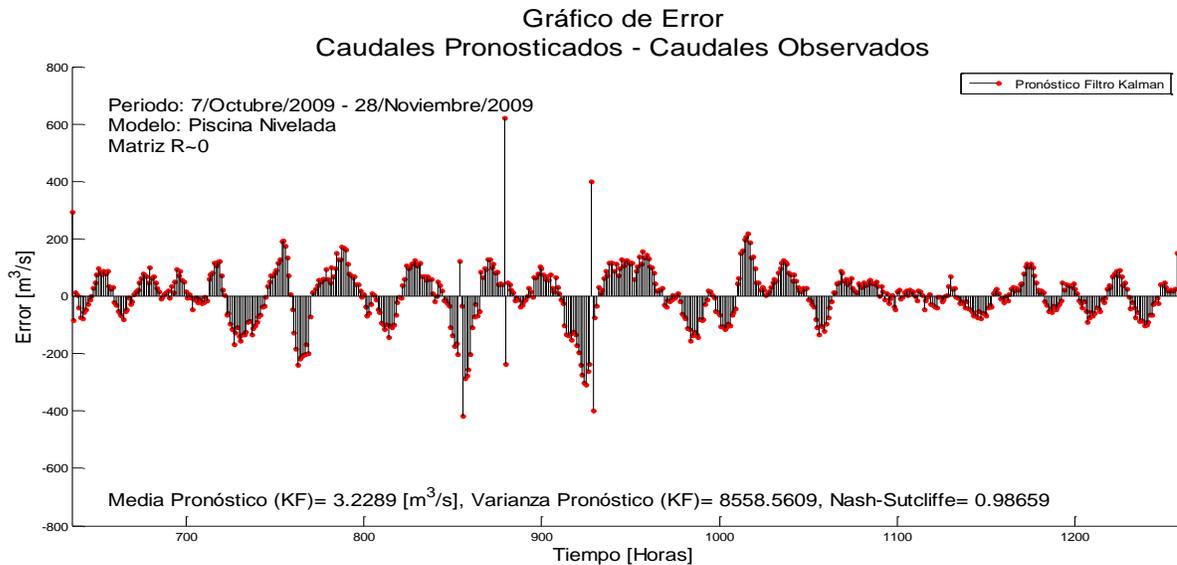
**Figura 5-36::** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de piscina nivelada periodo 4, sin ruido en la medición.



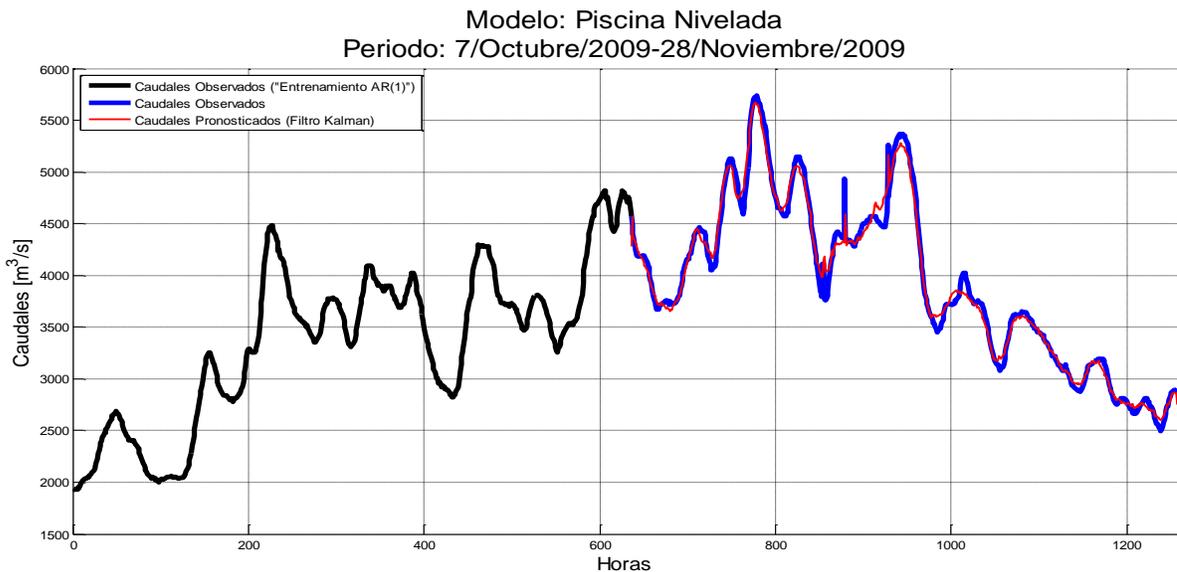
**Figura 5-37:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de piscina nivelada periodo 5, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



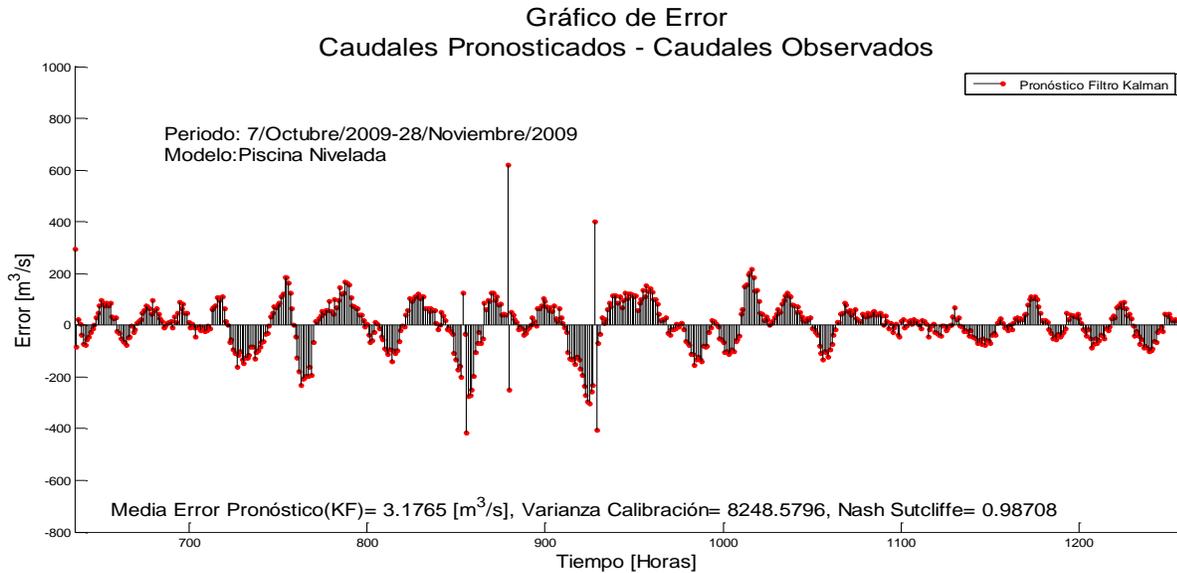
**Figura 5-38:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de piscina nivelada periodo 5, con ruido en la medición.



**Figura 5-39:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación limnigráfica de Barrancabermeja, modelo de piscina nivelada periodo 5, sin ruidos en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



**Figura 5-40:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de piscina nivelada periodo 5, sin ruido en la medición.



**Tabla 5.4:** Resumen de los resultados de parámetros estadísticos de errores en el pronóstico de caudales del filtro Kalman, indicando el resultado de la función objetivo, según tránsito de piscina nivelada.

RESULTADOS ESTADÍSTICOS DE ERRORES DEL PRONÓSTICO (KF) MODELO DE TRANSITO DE PISCINA NIVELADA POR PERIODO						
Periodo	Con ruido en la ecuación de medición			Sin ruido en la ecuación de medición		
	Coef. De Nash Pronóstico de caudales con filtro KF	Promedio de error de pronóstico con el filtro KF (m <sup>3</sup> /s)	Varianza de error de pronóstico con el filtro KF (m <sup>6</sup> /s <sup>2</sup> )	Coef. De Nash Pronóstico de caudales con filtro KF	Promedio de error de pronóstico con el filtro KF (m <sup>3</sup> /s)	Varianza de error de pronóstico con el filtro KF (m <sup>6</sup> /s <sup>2</sup> )
1	0,99272	0,42601	4.934,49	0,99277	0,43317	4.899,64
2	0,98933	-8,38	7.269,67	0,98968	-5,63	7.072,29
3	0,97461	1,03	8.301,31	0,98968	-5,63	7.072,29
4	0,94626	2,58	4.124,99	0,96845	1,27	2.403,64
5	0,98659	3,22	8.558,56	0,98708	3,17	8.248,57

Como se había indicado al inicio de la presente sección, se muestra en la Tabla 5.4 los resultados de parámetros estadísticos, sobre la exactitud de los caudales pronosticados por el filtro Kalman en la hidrógrafa del cuarto y último embalse VS hidrógrafa observada en la estación limnigráfica (LG) de Barrancabermeja, por medio del modelo de tránsito de piscina nivelada. A continuación, se realiza los análisis correspondientes de los resultados mencionados, con y sin “ruido” en la ecuación de medición, para los cinco periodos seleccionados:

- Los resultados del coeficiente de la función objetivo de Nash-Sutcliffe son exitosos para los cinco periodos en general, si se considera que el mejor resultado posible es uno (1) y los coeficientes de estos periodos están en el rango de 0,946 a 0,992.
- El error medio o promedio calculado respecto a la hidrógrafa observada en la estación (LG) de Barrancabermeja, presenta valores bajos del orden de (-8,38 m<sup>3</sup>/s a 3,22 m<sup>3</sup>/s), tanto para el pronóstico del filtro Kalman con y sin ruido en la ecuación de medición.
- Al observar la hidrógrafa pronosticada respecto a la hidrógrafa medida en general para los cinco periodos, se observa buen rendimiento o eficiencia del filtro Kalman, ya que logra ajustarse en la parte de ascenso o descenso de los picos de las hidrógrafas. Como es usual en los modelos de pronósticos, el filtro Kalman también tiende a presentar desajustes o variaciones, debido al cambio súbito en la tendencia del valor de los caudales en los picos y en los valles de la hidrógrafa, debido al aumento o decrecimiento de los caudales respectivamente, para estos sectores de la hidrógrafa.
- Lo comentado en el párrafo anterior se comprobó también, en los resultados del pronóstico del filtro Kalman utilizando la estructura de diferencias finitas, como se puede ver en los análisis del ítem anterior 5.4.
- En la serie de tiempo de la hidrógrafa del periodo 3 y del periodo 5, se presenta igualmente datos no consistentes o dudosos como ocurrió con el modelo de diferencias finitas, como se había mencionado en los análisis del anterior ítem 5.4, para los mismos intervalos de tiempo descritos. Estos datos en mención pueden ser por errores de

medición o del aparato. Esta tendencia en el resultado es lógica, ya que son los mismos periodos de tiempo y de hidrógrafas medidas en la estación (LG) de Barrancabermeja, para los modelos de diferencias finitas y de piscina nivelada.

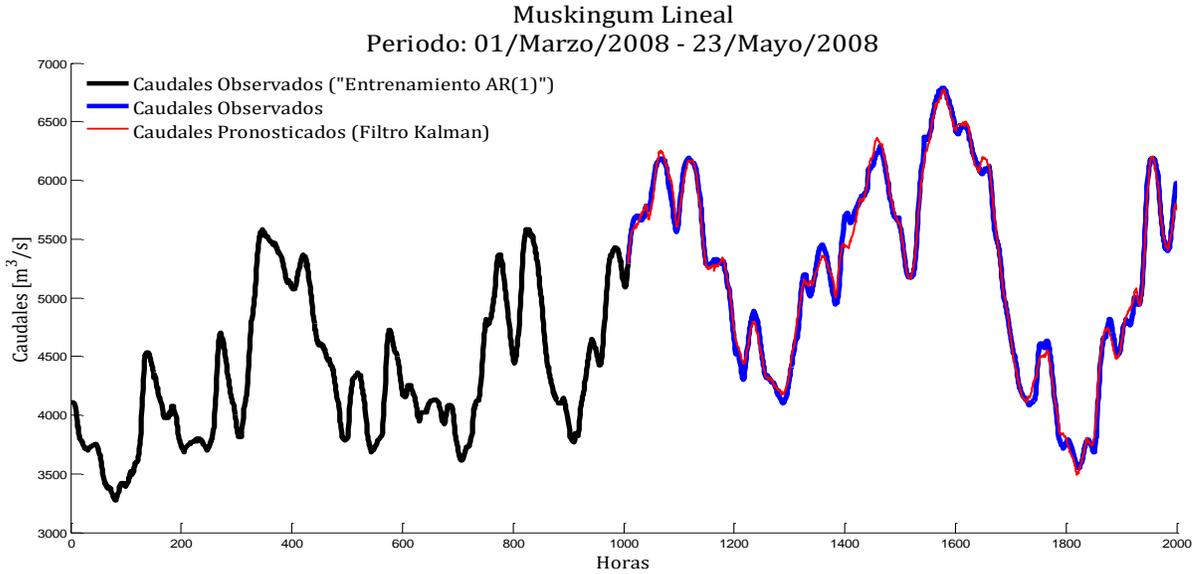
- Los datos dudosos del periodo 3 y del periodo 5, trae como consecuencia nuevamente que, en las figuras de errores medios o promedios del pronóstico, se vea reflejado altos valores de errores puntuales de caudales en tres intervalos de tiempo en total. Estos intervalos son en el periodo 3 ver Figura 5-30, el intervalo de tiempo de 580 horas a 600 horas y para el periodo 5 ver Figura 5-38 los intervalos de 850 horas a 880 horas y el segundo intervalo del período 5 es de 910 horas a 920 horas.

## **5.6 Pronóstico de caudales, modelo de transito de Muskingum**

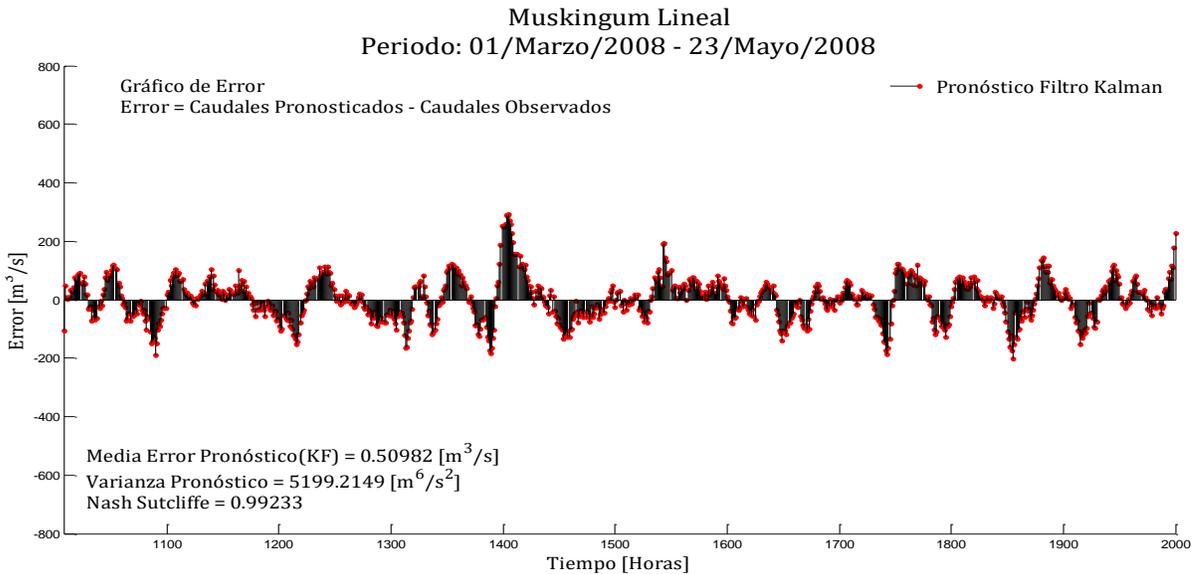
Al terminar el presente ítem se presenta una tabla con los resultados resumen de los pronósticos del filtro Kalman del modelo de transito lineal de Muskingum, de los cinco periodos seleccionados, considerando en el pronóstico con y sin ruido en la medición, se hace de esta forma porque hay similitudes en los análisis de resultados en los periodos. También se realiza un breve análisis resaltando las diferencias e indicando algunas tendencias en los resultados de la hidrógrafa pronosticada del cuarto y último embalse, respecto a la hidrógrafa medida en la estación limnigráfica (LG) de Barrancabermeja.

En el ítem 5.7 se presenta un análisis general de los resultados presentados de los pronósticos del filtro Kalman, con la estructura matricial de los tres modelos de tránsito lineales desarrollados para el proyecto.

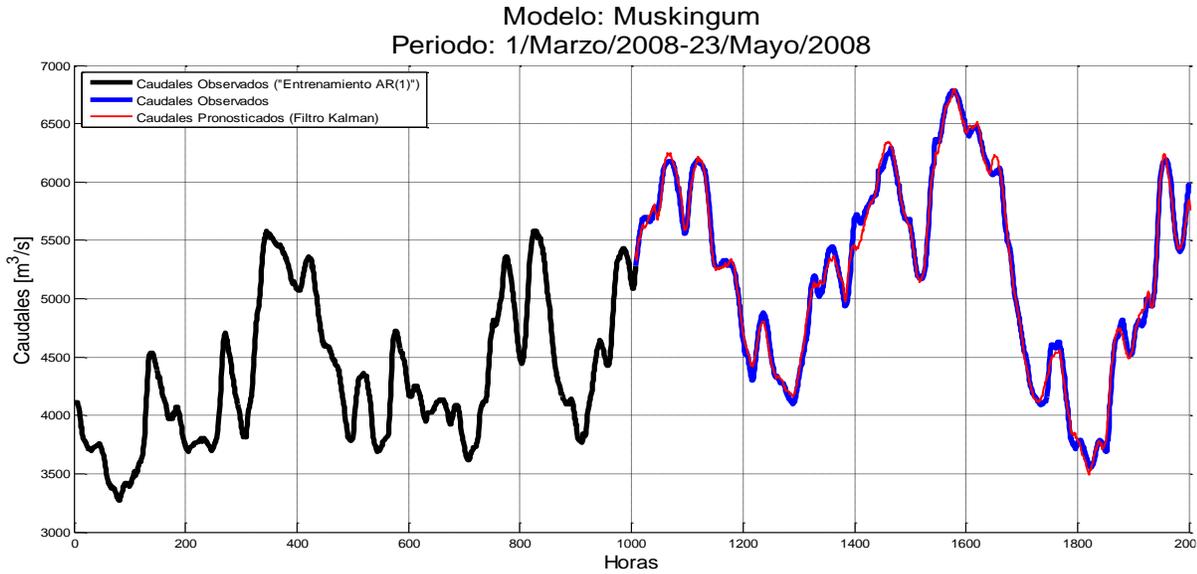
**Figura 5-41:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de Muskingum periodo 1, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



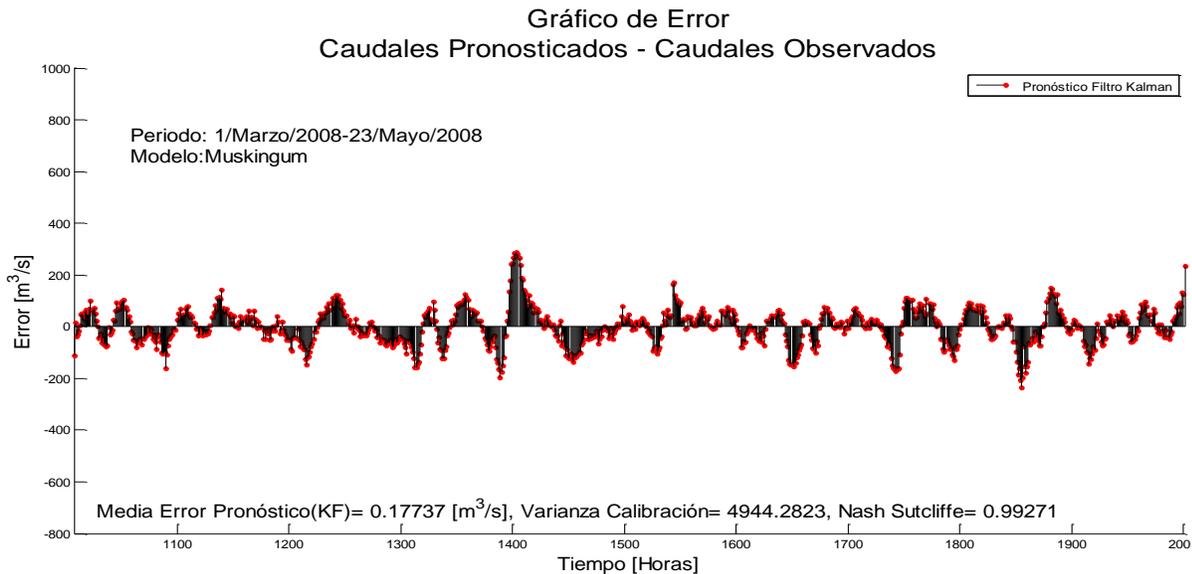
**Figura 5-42:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de Muskingum periodo 1, con ruido en la medición.



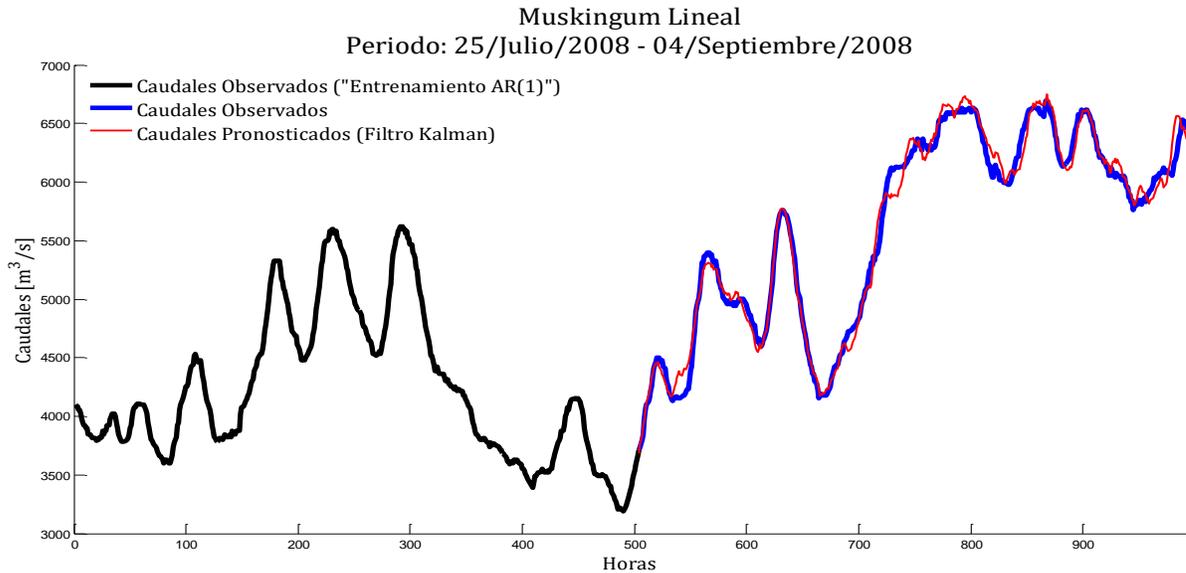
**Figura 5-43:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de Muskingum periodo 1, sin ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



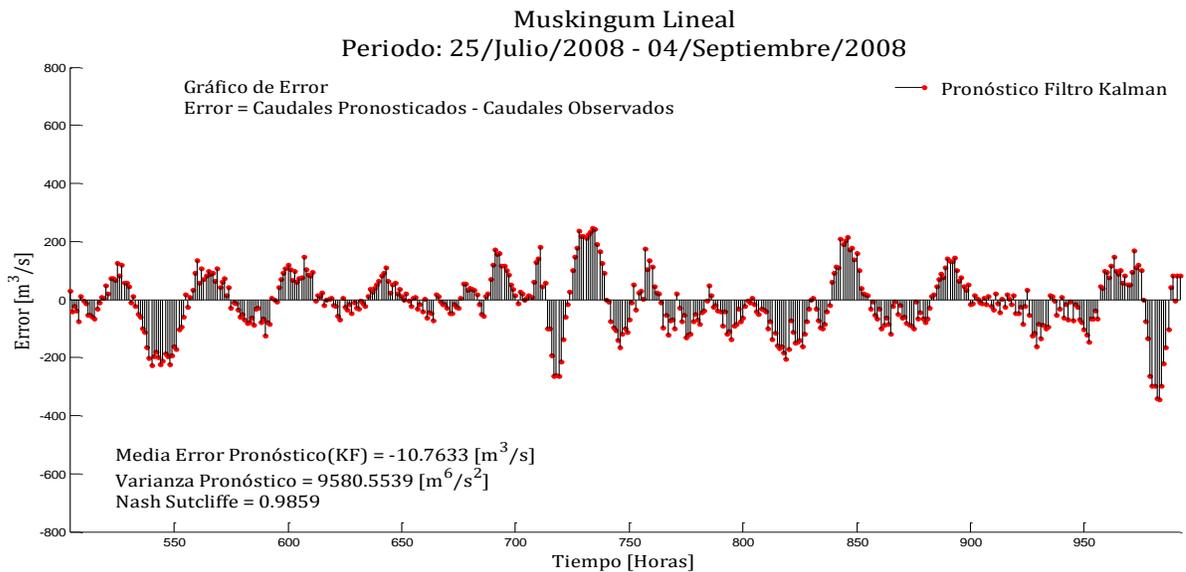
**Figura 5-44:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de Muskingum periodo 1, sin ruido en la medición.



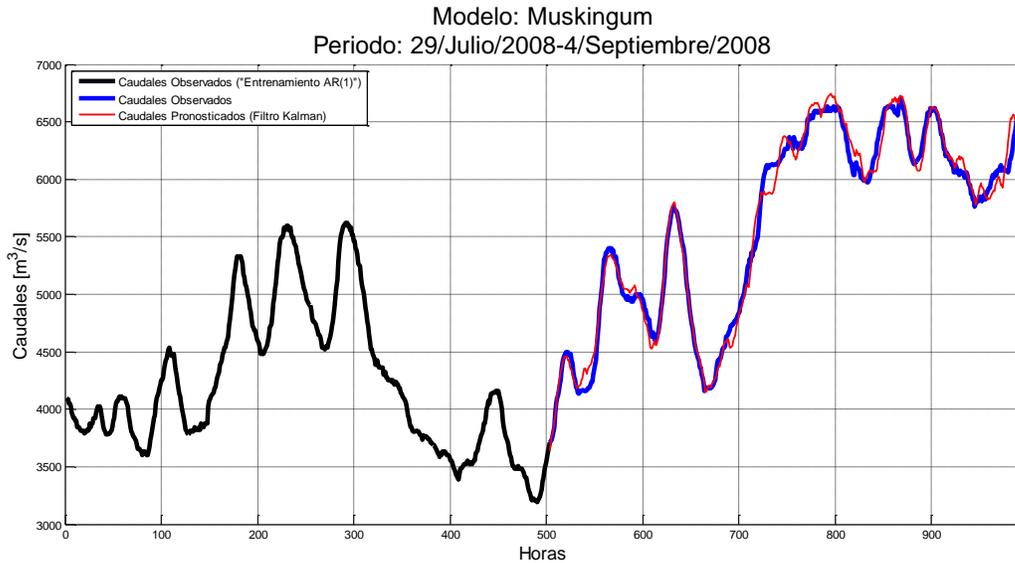
**Figura 5-45:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de Muskingum periodo 2, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



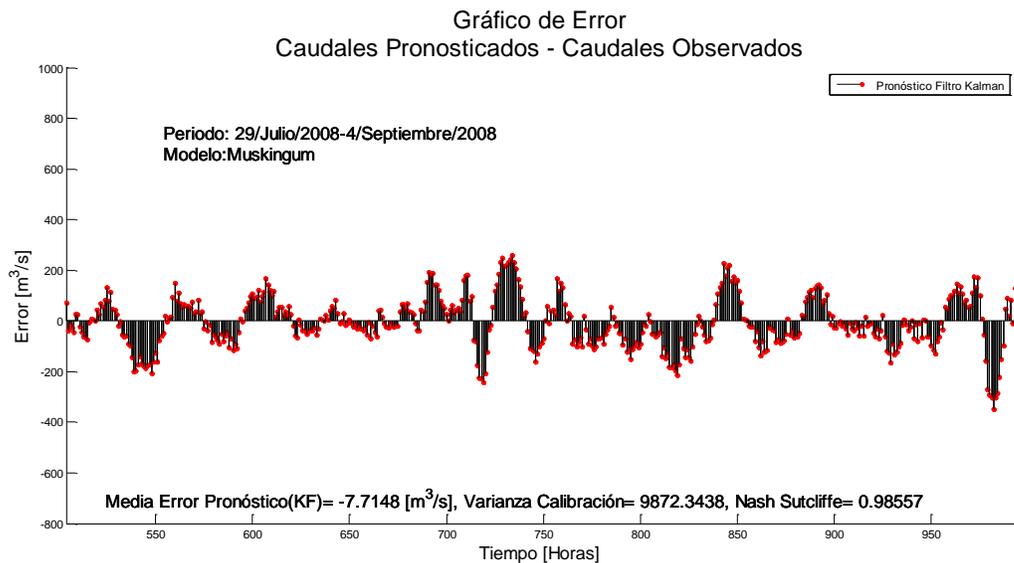
**Figura 5-46:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de Muskingum periodo 2, con ruido en la medición.



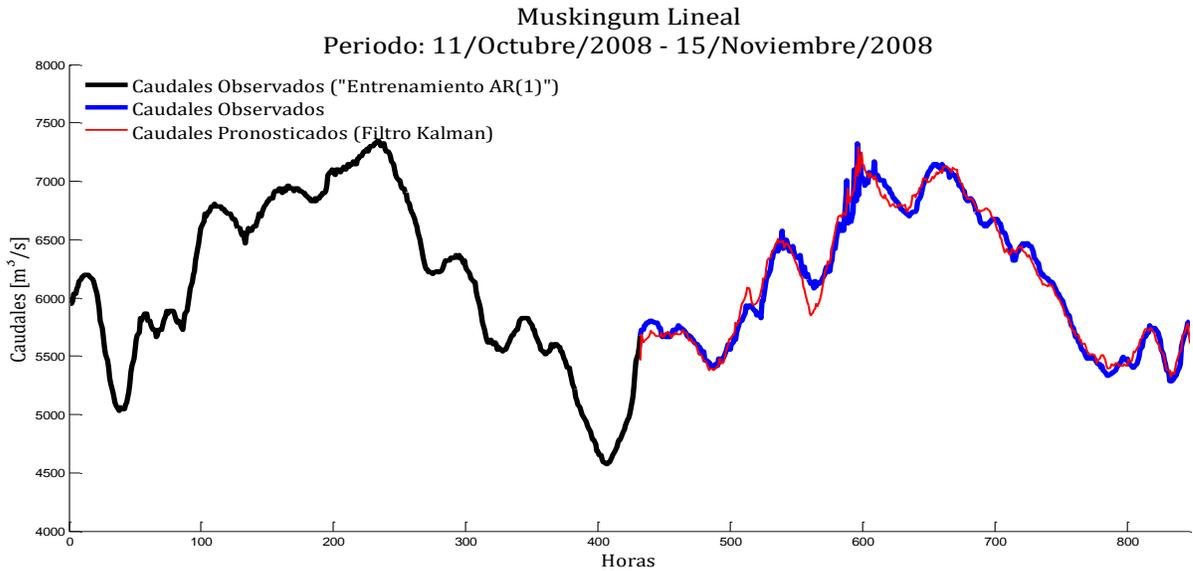
**Figura 5-47:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de Muskingum periodo 2, sin ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



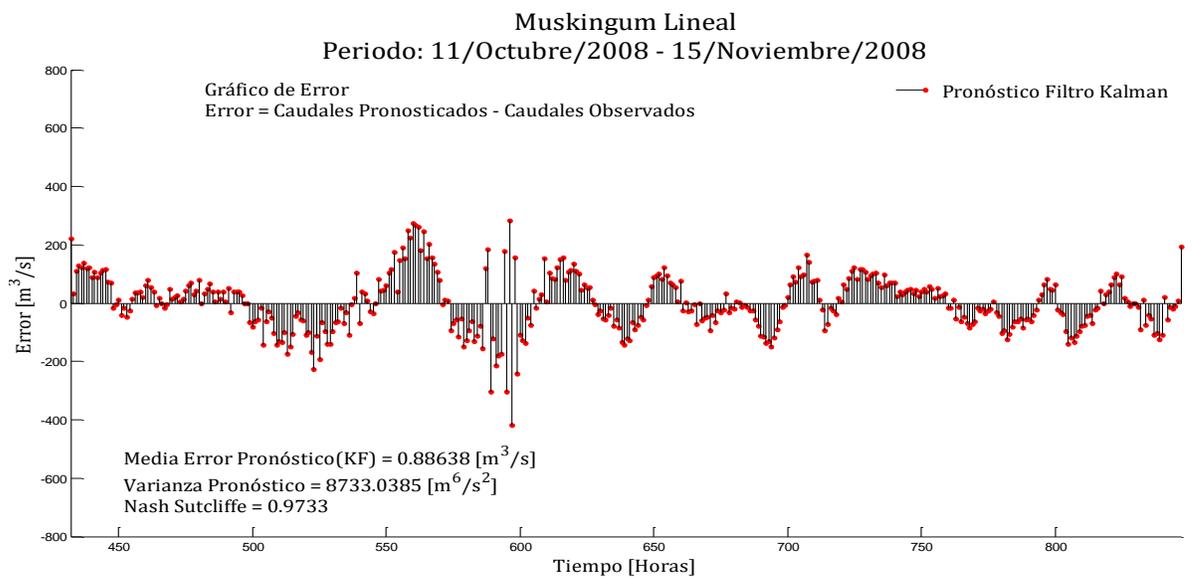
**Figura 5-48:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de Muskingum periodo 2, sin ruido en la medición.



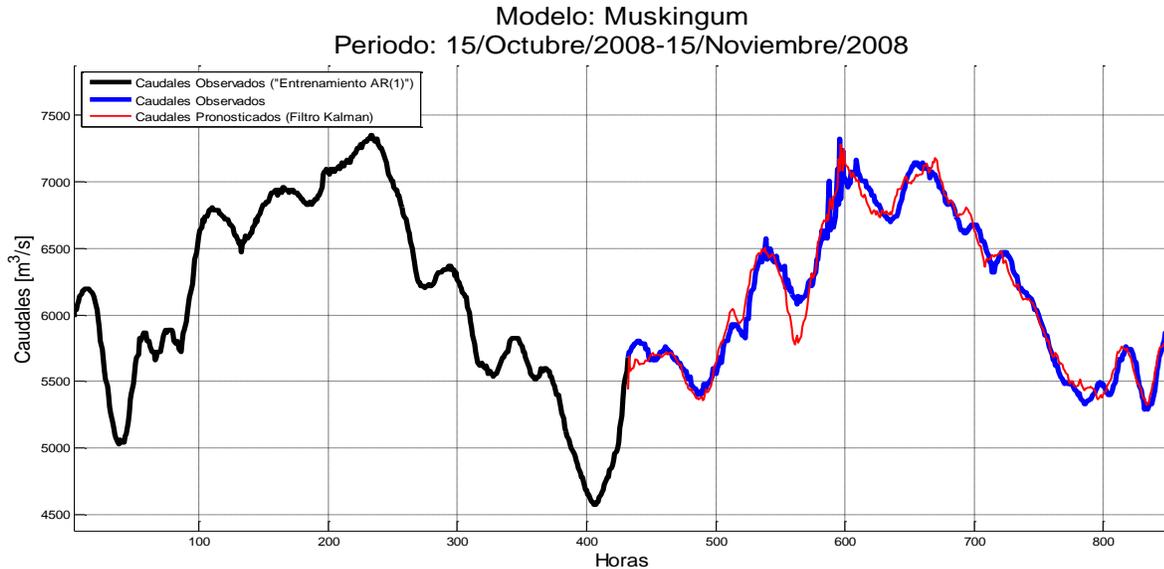
**Figura 5-49:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de Muskingum periodo 3, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



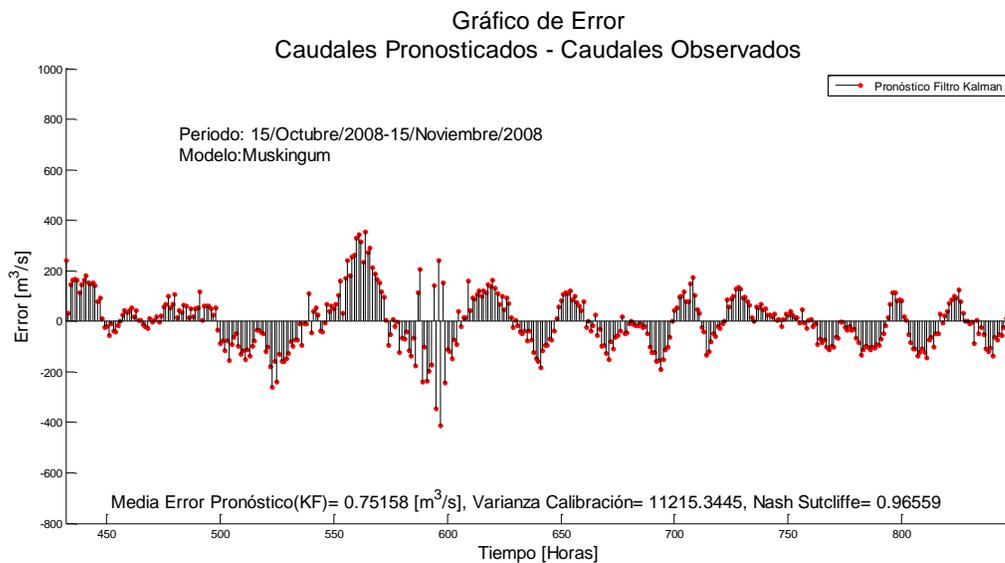
**Figura 5-50:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de Muskingum periodo 3, con ruido en la medición.



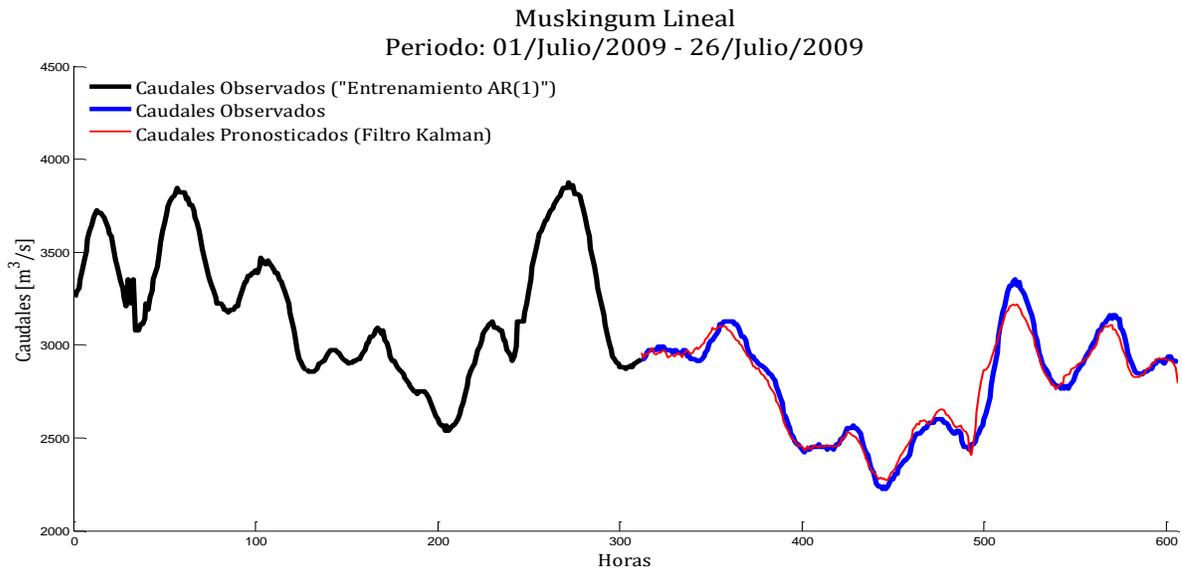
**Figura 5-51:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de Muskingum periodo 3, sin ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



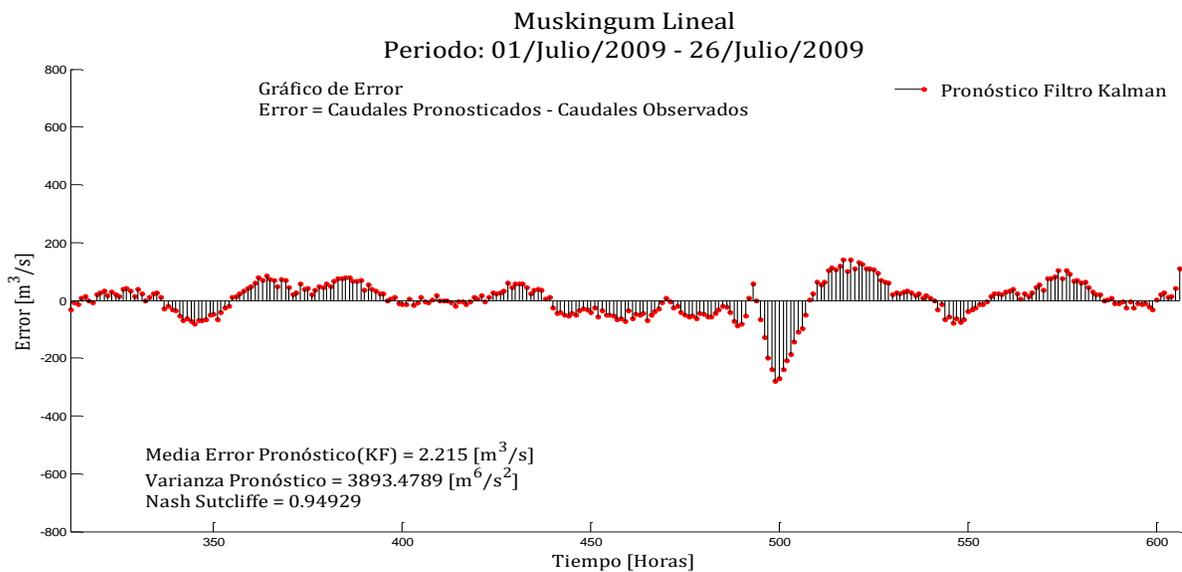
**Figura 5-52:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de Muskingum periodo 3, sin ruido en la medición.



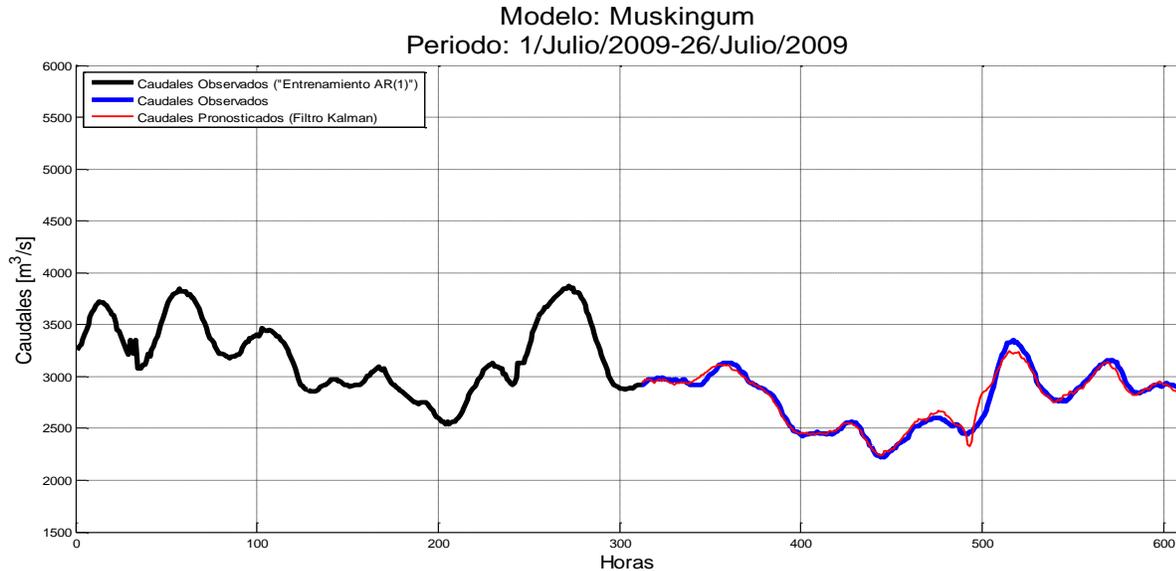
**Figura 5-53:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de Muskingum periodo 4, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



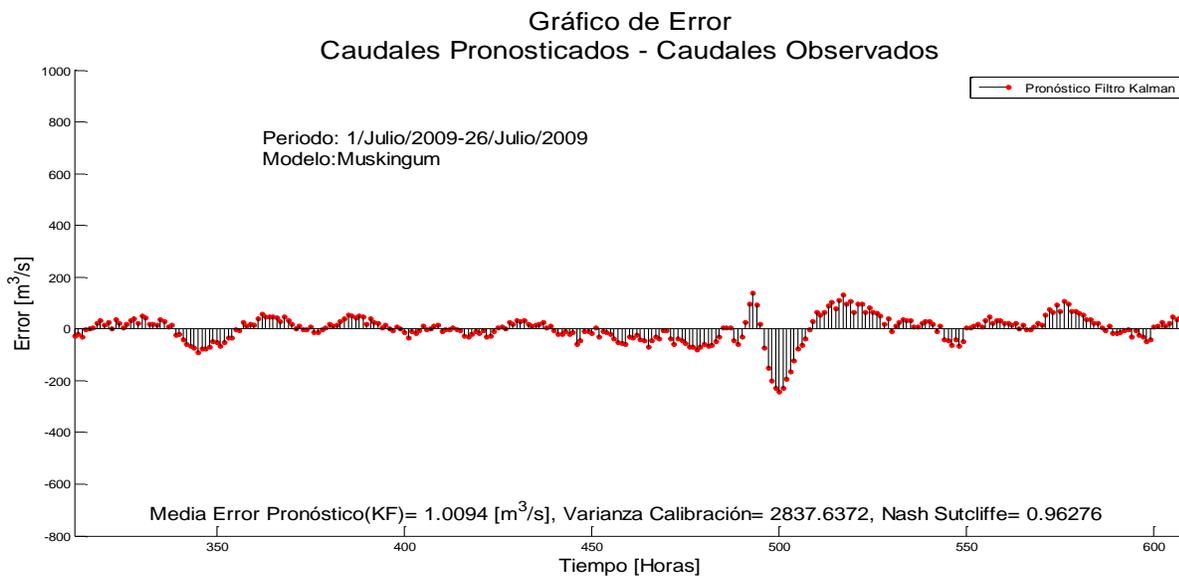
**Figura 5-54:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de Muskingum periodo 4, con ruido en la medición.



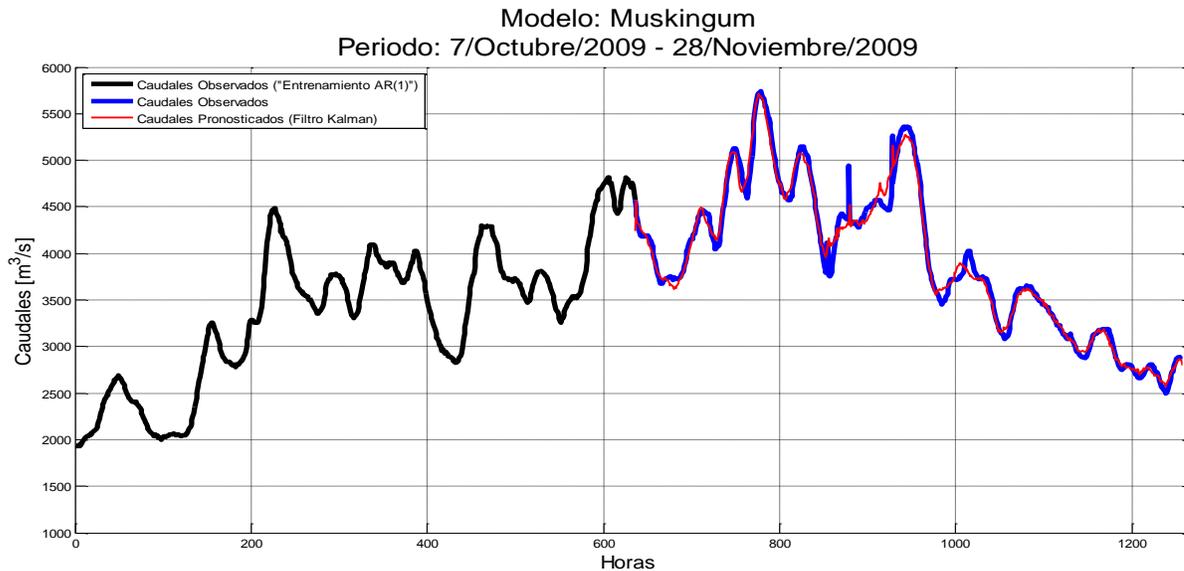
**Figura 5-55:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de Muskingum periodo 4, sin ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



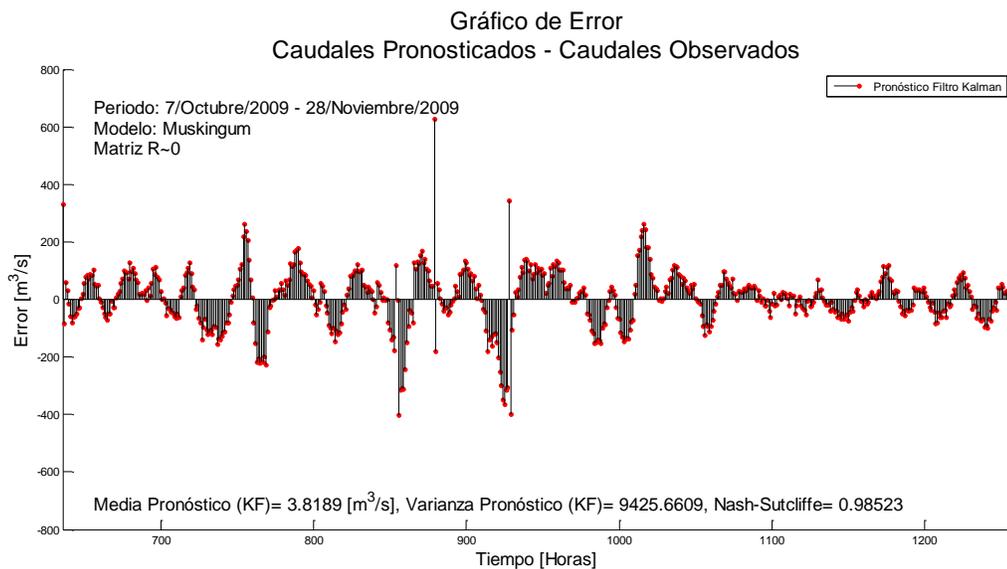
**Figura 5-56:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de Muskingum periodo 4, sin ruido en la medición.



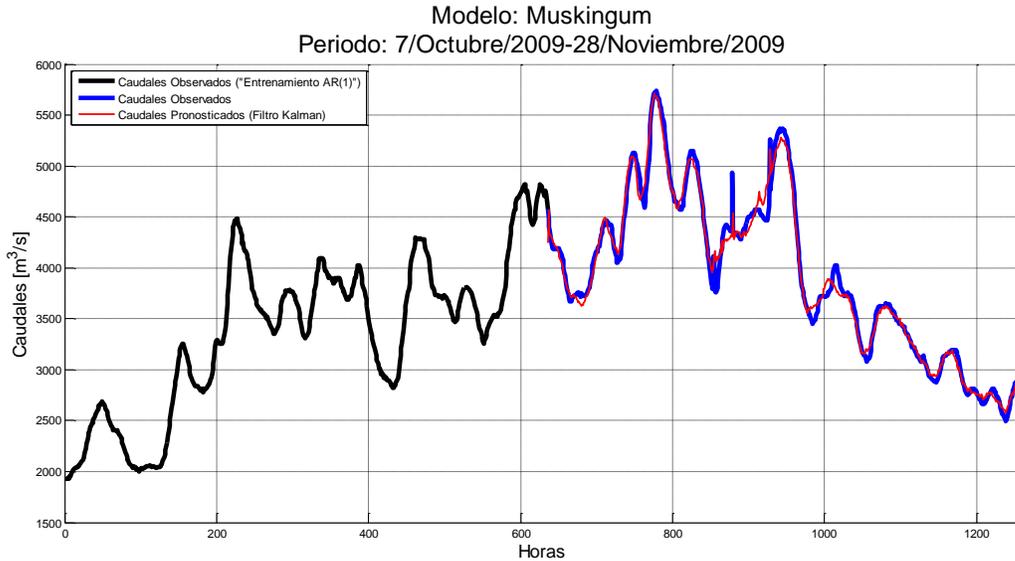
**Figura 5-57:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de Muskingum periodo 5, con ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



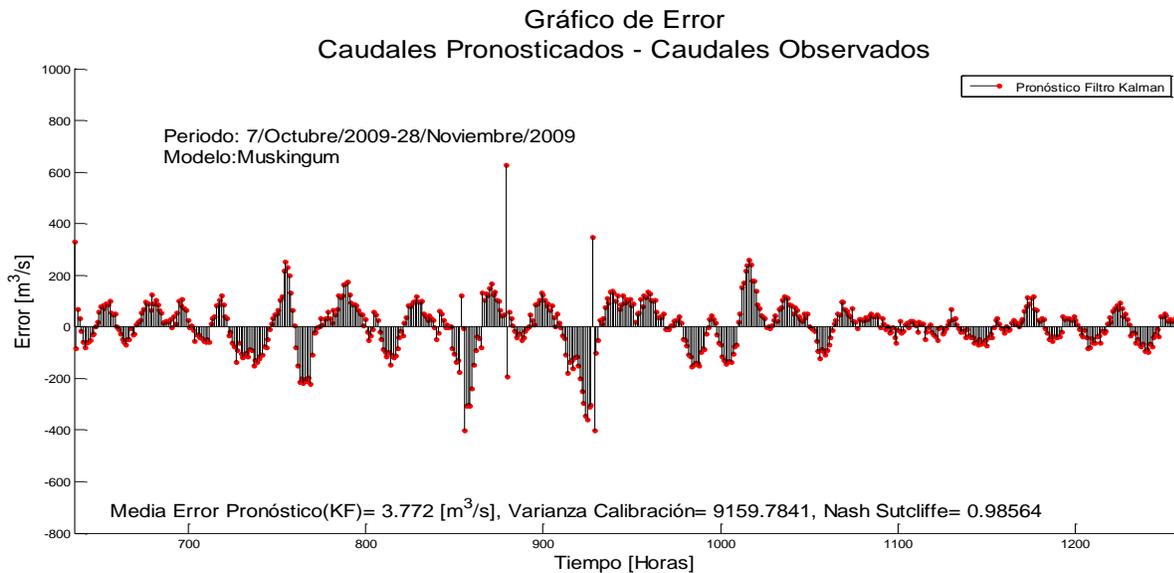
**Figura 5-58:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de Muskingum periodo 5, con ruido en la medición.



**Figura 5-59:** Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación (LG) de Barrancabermeja, modelo de Muskingum periodo 5, sin ruido en la medición. La hidrógrafa simulada corresponde a la salida del cuarto embalse.



**Figura 5-60:** Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de Muskingum periodo 5, sin ruido en la medición.



**Tabla 5.5:** Resumen de los resultados de parámetros estadísticos de errores en el pronóstico de caudales del filtro Kalman, indicando el resultado de la función objetivo, según tránsito de Muskingum.

Periodo	RESULTADOS ESTADÍSTICOS DE ERRORES DEL PRONÓSTICO (KF) MODELO DE TRANSITO DE MUSKINGUM POR PERIODO					
	Con ruido en la ecuación de medición			Sin ruido en la ecuación de medición		
	Coef. De Nash Pronóstico de caudales con filtro KF	Promedio de error de pronóstico con el filtro KF ( $m^3/s$ )	Varianza de error de pronóstico con el filtro KF ( $m^6/s^2$ )	Coef. De Nash Pronóstico de caudales con filtro KF	Promedio de error de pronóstico con el filtro KF ( $m^3/s$ )	Varianza de error de pronóstico con el filtro KF ( $m^6/s^2$ )
1	0,99233	0,50982	5.199,21	0,99271	0,17737	4.944,28
2	0,9859	-10,76	9.580,55	0,98557	-7,71	9.872,34
3	0,9733	0,88638	8.733,03	0,96559	0,75158	11.215,34
4	0,94929	2,21	3.893,47	0,96276	1,01	2.837,63
5	0,98523	3,81	9.425,66	0,98564	3,77	9.159,78

Como se había indicado al inicio de la presente sección, se muestra en la Tabla 5.5 los resultados de parámetros estadísticos, sobre la exactitud de los caudales pronosticados por el filtro Kalman en la hidrógrafa del cuarto y último embalse VS hidrógrafa observada en la estación limnigráfica (LG) de Barrancabermeja, por medio del modelo de tránsito de piscina nivelada. A continuación, se realiza los análisis correspondientes de los resultados mencionados, con y sin “ruido” en la ecuación de medición, para los cinco periodos seleccionados:

- Los resultados del coeficiente de la función objetivo de Nash-Sutcliffe son exitosos para los cinco periodos en general, si se considera que el mejor resultado posible es uno (1) y los coeficientes de estos periodos están en el rango de 0,962 a 0,992.
- El error medio o promedio calculado respecto a la hidrógrafa observada en la estación (LG) de Barrancabermeja, presenta valores bajos del orden de (-10,76  $m^3/s$  a 3,81

m<sup>3</sup>/s), tanto para el pronóstico del filtro Kalman con y sin ruido en la ecuación de medición.

- Al observar la hidrógrafa pronosticada respecto a la hidrógrafa medida en general para los cinco periodos, se observa buen rendimiento o eficiencia del filtro Kalman, ya que logra ajustarse en la parte de ascenso o descenso de los picos de las hidrógrafas. Como es usual en los modelos de pronósticos, el filtro Kalman también tiende a presentar desajustes o variaciones, debido al cambio súbito en la tendencia del valor de los caudales en los picos y en los valles de la hidrógrafa, debido al aumento o decrecimiento de los caudales respectivamente, para estos sectores de la hidrógrafa.
- Lo comentado en el párrafo anterior se comprobó también, en los resultados del pronóstico del filtro Kalman utilizando la estructura de diferencias finitas, piscina nivelada y también el modelo de Muskingum, como se puede ver en los análisis del ítem anterior 5.4 y 5.5.
- En la serie de tiempo de la hidrógrafa del periodo 3 y del periodo 5, se presenta igualmente los mismos datos no consistentes o dudosos, como se había mencionado en los análisis del anterior ítem 5.4 y 5.5, para los mismos intervalos de tiempo descritos. Estos datos en mención pueden ser por errores de medición o del aparato. Esta tendencia en el resultado es lógica, ya que son los mismos periodos de tiempo y de hidrógrafas medidas en la estación (LG) de Barrancabermeja, para los modelos de diferencias finitas, piscina nivelada y de Muskingum.
- Los datos dudosos del periodo 3 y del periodo 5, trae como consecuencia nuevamente que, en las figuras de errores medios o promedios del pronóstico, se vea reflejado altos valores de errores puntuales de caudales en tres intervalos de tiempo en total. Estos intervalos son en el periodo 3 ver Figura 5-50 el intervalo de tiempo de 580 horas a 600 horas y para el periodo 5 ver Figura 5-58 los intervalos de 850 horas a 880 horas y el segundo intervalo del período 5 es de 910 horas a 920 horas.

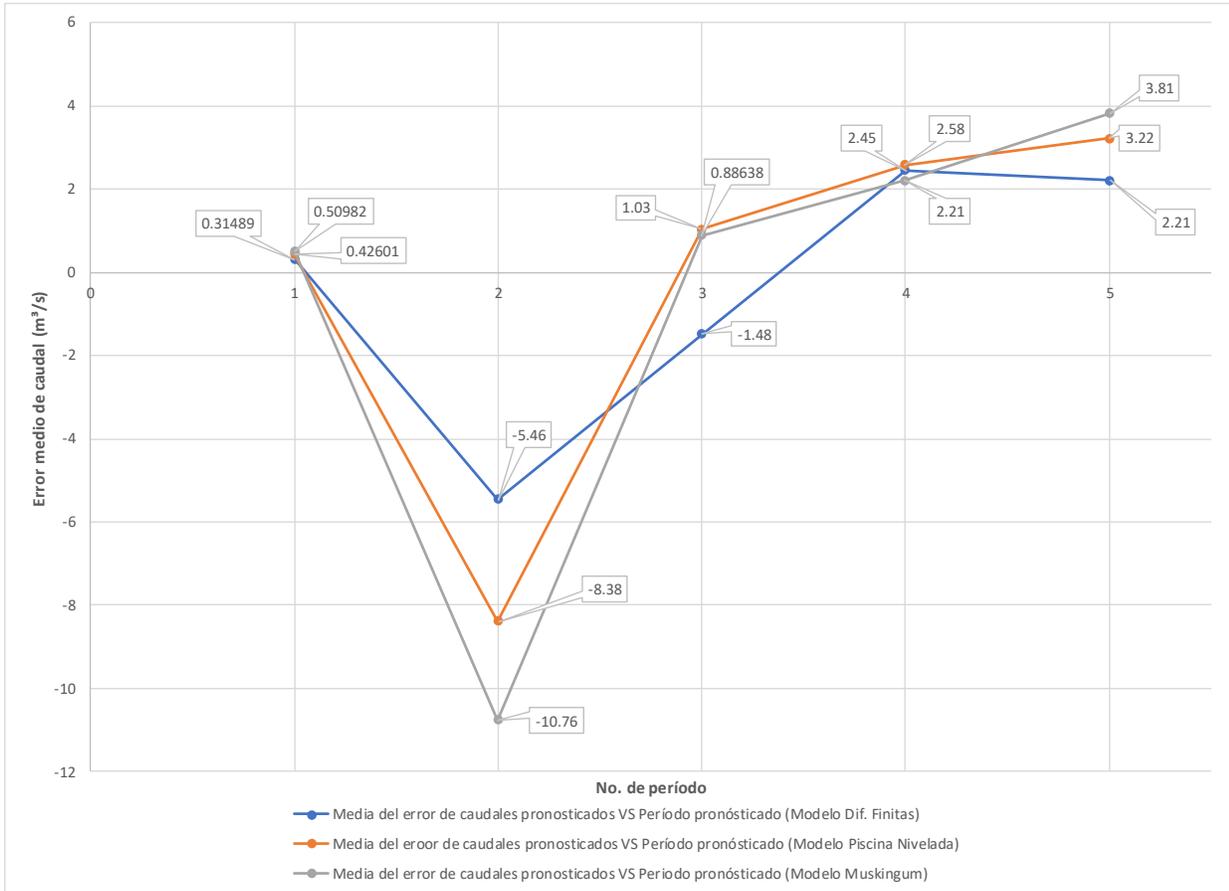
## **5.7 Análisis de los resultados del pronóstico de caudales**

Para el pronóstico de caudales en la hidrógrafa del cuarto y último embalse respecto a la hidrógrafa medida en la estación limnigráfica (LG) de Barrancabermeja en los cinco periodos, se realizaron en los tres modelos lineales de tránsito, los siguientes cálculos para poder cuantificar y analizar los resultados del pronóstico con el filtro Kalman: la varianza del error del caudal pronosticado, la media o promedio del error del caudal pronosticado y el coeficiente de Nash en la serie de tiempo pronosticado para cada periodo.

### **5.7.1 Análisis de los resultados del pronóstico, con y sin ruidos en la ecuación de medición del filtro Kalman**

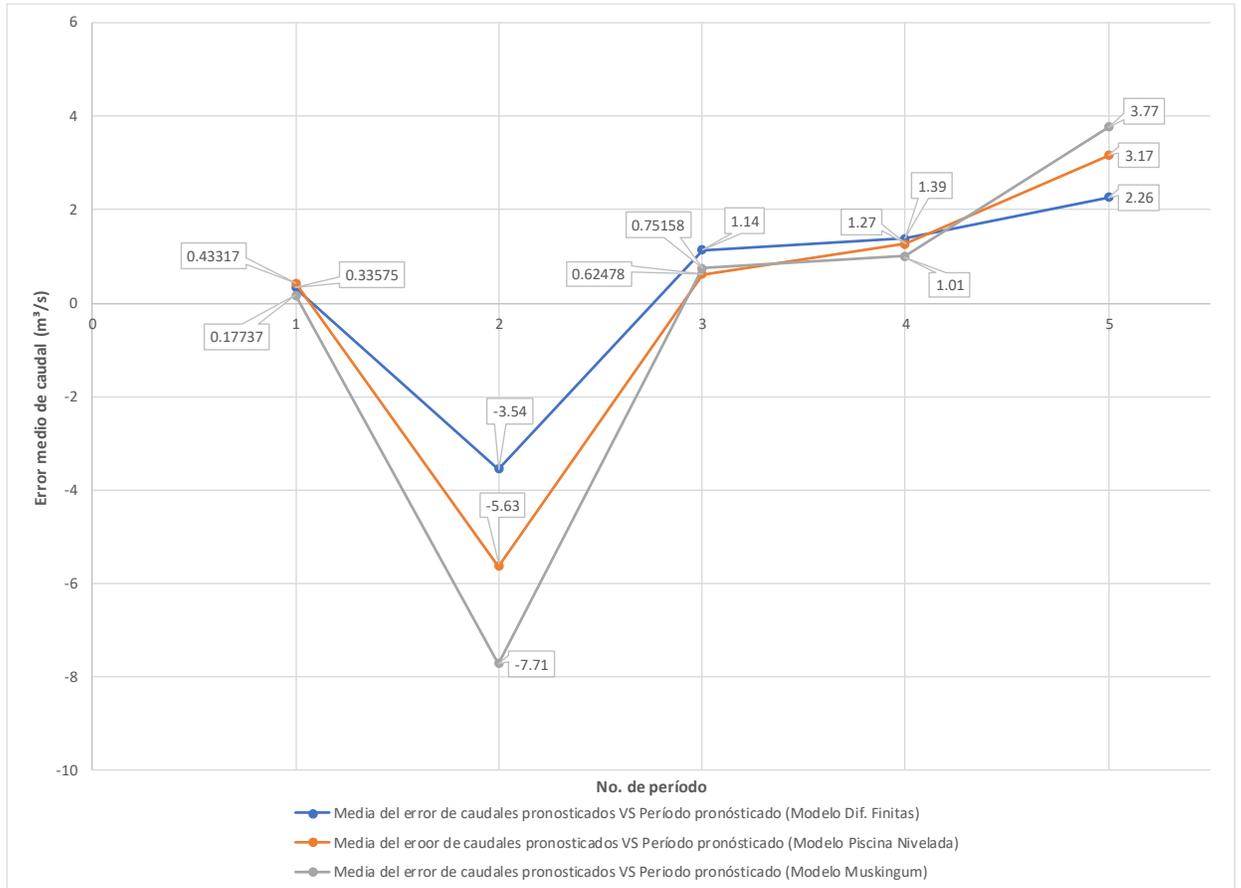
En la siguiente Figura 5-61 se indica los resultados de la media o promedio del error del caudal pronosticado con el filtro Kalman para la mitad del intervalo de tiempo de cada uno de los cinco periodos.

**Figura 5-61:** Media o promedio del error del caudal pronosticado con el filtro Kalman VS hidrógrafa observada en la estación (LG) de Barrancabermeja, en cada uno de los cinco periodos, para los 3 modelos de tránsito desarrollados. Considerando ruido.



A continuación, se describe los análisis de los resultados de Figura 5-61 y Figura 5-62.

**Figura 5-62:** Media o promedio del error del caudal pronosticado con el filtro Kalman VS hidrógrafa observada en la estación (LG) de Barrancabermeja, en cada uno de los cinco periodos, para los 3 modelos de tránsito desarrollados. Sin considerar ruido.

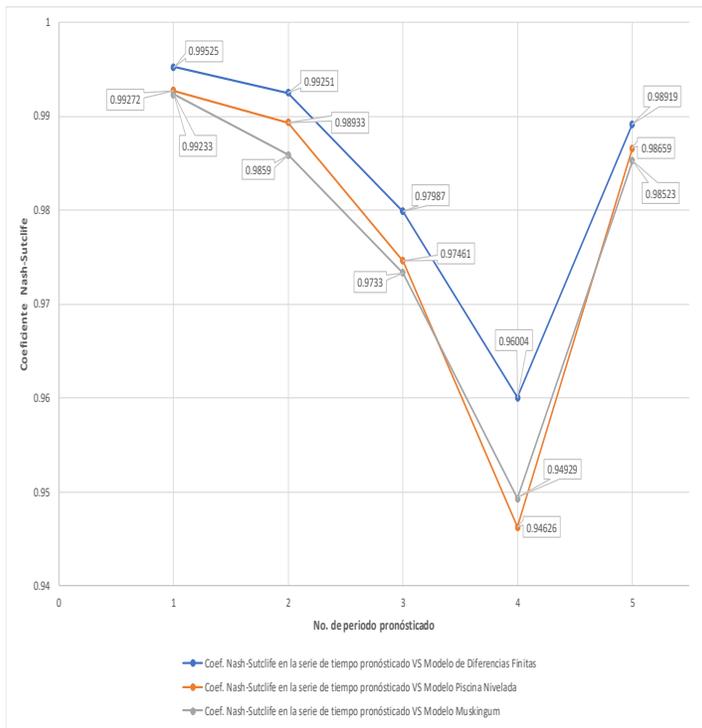


Por los resultados del promedio del error de caudales pronosticados por periodo, bajo las condiciones realizadas con el Filtro de Kalman-Bucy se observa en la Figura 5-61 y Figura 5-62 anterior, que el modelo de tránsito por diferencias finitas presenta los menores valores de promedios de errores de caudales pronosticados de forma general, en los cinco periodos simulados y al respecto de los tres modelos de tránsito.

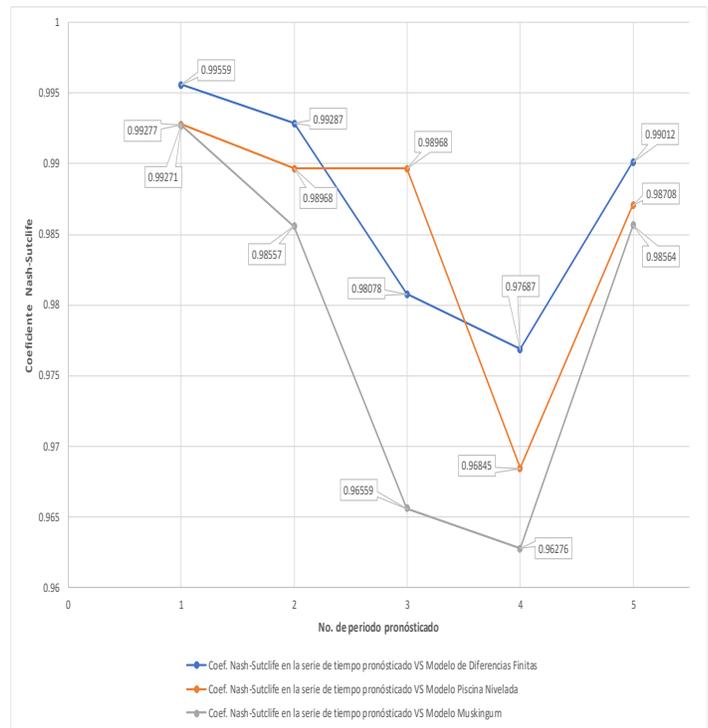
Adicionalmente por el orden de magnitud de los caudales en las hidrógrafas, con valores hasta más de 7000 m³/s, encontrar que los promedios del error del caudal pronosticado tienen valores en el rango de (-10,76 m³/s) en valor absoluto o de 3,81 m³/s, son realmente resultados bajos, indicado que el pronóstico con el filtro Kalman es eficiente.

**Figura 5-63:** Gráfica (a) resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe en el pronóstico de caudales con el filtro Kalman en los cinco periodos y tres modelos de tránsito, considerando ruido en la medición. Gráfica (b) resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe en el pronóstico de caudales con el filtro Kalman en los cinco periodos y tres modelos de tránsito, no considerando ruido en la medición.

**Gráfica (a).**



**Gráfica (b).**



La Figura 5-63 indica los resultados de los coeficientes o función objetivo de Nash-Sutcliffe para el pronóstico de caudales por el filtro de Kalman en cada uno de los cinco periodos y los tres modelos de tránsito desarrollados con o sin ruido en la ecuación de medición del filtro. El modelo de tránsito por diferencias finitas presenta la tendencia de los mejores y más altos valores cercanos a uno, en el coeficiente de Nash-Sutcliffe, el modelo de tránsito de piscina nivelada la segunda mejor tendencia y el tránsito de Muskingum presenta la tendencia de los valores menores de este coeficiente. Es importante indicar que las diferencias de los resultados del coeficiente son poco significativas entre los tres modelos de tránsito propuestos.

Al revisar los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe en el proceso de calibración y validación de los tránsitos, el que presenta la mejor tendencia de este coeficiente es para

el modelo de tránsito de Muskingum, ver Figura 4-48 y Figura 4-49, el modelo de tránsito de diferencias finitas es el que tiene los resultados más bajos de este coeficiente. Al revisar nuevamente la Figura 5-63 se encuentra que, en los pronósticos del filtro de Kalman, mejora los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe es en el modelo de diferencias finitas y en cambio para el modelo de Muskingum estos valores del coeficiente disminuyen.

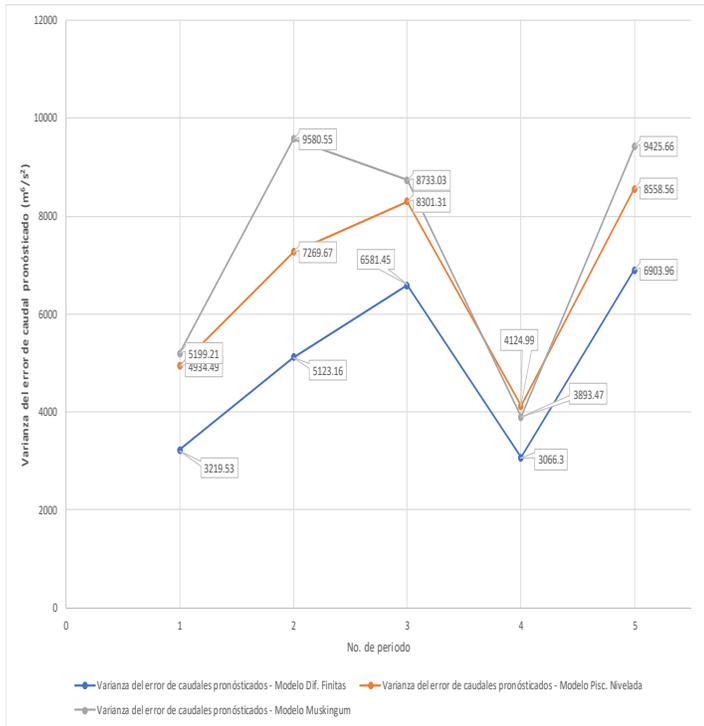
Adicionalmente al detallar los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe en el pronóstico de caudales por medio del filtro Kalman (ver Figura 5-63), no hay una diferencia significativa en los resultados de este coeficiente si se considera o no ruido en la ecuación de medición.

La explicación principal de la mínima diferencia de los valores del coeficiente de Nash-Sutcliffe, debe ser por la matriz (R) de varianza del error, en la ecuación de medición, teniendo presente que, si no hay ruido en dicha ecuación, por la estructura matemática del filtro Kalman, es cero esta matriz. En caso contrario es decir cuando se considera "ruido" se considera que hay errores en la medición de  $\pm 5$  cm aleatoriamente, tomando todos los valores de cero de la matriz (R) en su diagonal, excepto el último valor de la posición (4,4) porque en este punto se tienen los datos medidos en la estación de Barrancabermeja.

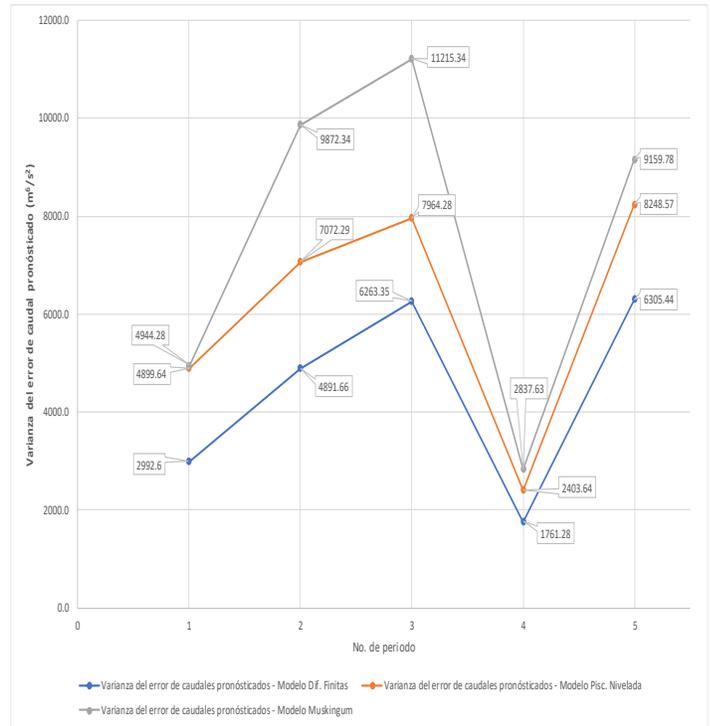
La diferencia es mínima en las dos condiciones de ruido o no ruido en la ecuación de medición para la aplicación del filtro Kalman en el pronóstico de caudales, otra situación sería si se tuviera hidrógrafas intermedias en el tramo de estudio, haciendo que se tuvieran valores en toda la diagonal de la matriz (R). Al tener esta información de hidrógrafas intermedias y al considerar ruido en la ecuación de medición, los resultados del pronóstico de caudales serían significativamente diferentes al no considerar ruido y se vería reflejado en los valores del coeficiente de Nash-Sutcliffe acercándolos probablemente aún más al valor de uno.

**Figura 5-64:** Gráfica (a) resultados de la varianza del error de caudales pronosticados con el filtro Kalman en los cinco periodos y tres modelos de tránsito, considerando ruido en la medición. Gráfica (b) resultados de la varianza del error de caudales pronosticados con el filtro Kalman en los cinco periodos y tres modelos de tránsito, no considerando ruido en la medición.

**Gráfica (a).**



**Gráfica (b).**



En la Figura 5-64 se indica los resultados de la varianza del error del pronóstico de caudales horarios por el filtro de Kalman en cada uno de los cinco periodos y los tres modelos de tránsito desarrollados con o sin ruido en la ecuación de medición del filtro. El modelo de tránsito por diferencias finitas presenta la tendencia de los más bajos y mejores de la varianza en el error de caudales del pronóstico, el modelo de tránsito de piscina nivelada es la segunda mejor tendencia y el tránsito de Muskingum presenta la tendencia de los valores mayores de la varianza.

### 5.7.2 Conclusiones específicas del pronóstico de caudales horarios con el filtro Kalman

El modelo de tránsito por diferencias finitas presenta la tendencia de los mejores y más altos valores cercanos a uno, en el valor de la función objetivo de Nash-Sutcliffe, el modelo de tránsito de piscina nivelada la segunda mejor tendencia y el tránsito de Muskingum presenta la tendencia de los valores menores de la función objetivo. Es importante indicar que las diferencias de los resultados de la función objetivo son poco significativas entre los tres modelos de tránsito propuestos.

La conclusión principal sobre la estructura matemática en la aplicación del Filtro Kalman para el pronóstico de caudales horarios considerando ruidos en la ecuación de medición, es que de esta forma presenta un leve mejor pronóstico, en comparación cuando se simula el filtro sin ruidos en la ecuación mencionada.

La razón del leve mejor pronóstico de caudales para el filtro de Kalman al emplear ruidos en la ecuación de medición debe ser por los valores en la posición (4,4) de la matriz (R) ya que es el único valor existente y medible de la diagonal de esta matriz, en la otra situación de sin “ruido” en la ecuación de medición la matriz (R) simplemente es cero. Esto es por la escasa o limitada información al no tener hidrógrafas, en los puntos o salidas al terminar cada uno de los cuatro embalses utilizados.

EL criterio más importante de examinar los resultados y eficiencia del pronóstico del presente estudio es con los valores, de la función objetivo o coeficiente de Nash-Sutcliffe de los caudales pronosticados horarios con el filtro Kalman por medio de la estructura matemática de los tres modelos de tránsitos propuestos.

Otra forma de cuantificar la precisión o eficiencia del pronóstico de caudales horarios, con el filtro Kalman y específicamente en el modelo de tránsito de diferencias finitas, es por medio del cálculo de los errores promedios de los caudales pronosticados, en cada uno de los cinco periodos. El modelo de diferencias finitas tiene los menores errores promedios en los pronósticos de caudales horarios y el de mayores errores promedios, es para el

modelo de Muskingum, como se había encontrado anteriormente de forma similar, con la tendencia de los resultados de la función objetiva de Nash-Sutcliffe.

La precisión hallada al aplicar el filtro Kalman para el pronóstico de caudales horarios es alta, debido a los resultados obtenidos, según los promedios del error del pronóstico, porque están en un rango de (3,81 m<sup>3</sup>/s y (-10,76) m<sup>3</sup>/s en valor absoluto). Si este rango de promedios del error del pronóstico se compara respecto a la magnitud de caudales que se utilizaron en los cinco periodos, se obtiene generalmente un porcentaje de error menor al 1,5% del valor usual de caudales registrados en la estación limnigráfica de Barrancabermeja.

Una forma adicional de cuantificar la precisión del pronóstico de caudales horarios con el filtro Kalman es por medio de la varianza del error de caudales del pronóstico. El modelo de tránsito por diferencias finitas presenta la tendencia de los más bajos y mejores valores de la varianza en el error de caudales del pronóstico horario, el modelo de tránsito de piscina nivelada es la segunda mejor tendencia y el tránsito de Muskingum presenta la tendencia de los valores mayores de la varianza.

No se encontró la razón de porque los resultados de la varianza de errores de caudales en el pronóstico y del coeficiente de Nash-Sutcliffe en el pronóstico, presenta los menores resultados en el período 4 respecto a los otros periodos, para los tres modelos lineales de tránsito desarrollados.

## 6. Capítulo 6. Conclusiones

Existen en la actualidad diversos y complejos modelos para el pronóstico de caudales en ríos, en los cuales se relacionan un número importante de procesos físicos cuya interacción permite entender el comportamiento hidrológico de la red hídrica en una cuenca y cómo esta interacción se refleja en la magnitud y variabilidad de los caudales. Algunos de estos modelos incluyen procesos lluvia–escorrentía e incluso modelos tan complejos en los cuales se incluye hasta la temperatura superficial del mar, (Moreno y Salazar, 2008).

Mediante la realización de este trabajo se implementó la herramienta matemática de Filtro Kalman acoplada a diferentes modelos de tránsito de crecientes agregados para el pronóstico de caudales en tiempo real, con una resolución temporal horaria en un tramo del Río Magdalena. Los resultados de la modelación indican un ajuste adecuado de acuerdo con la función objetivo-planteada a lo largo de las simulaciones y en las cuales se muestra la parsimonia del modelo y su aplicabilidad en nuestro medio.

La implementación y acople de los modelos lineales de tránsito agregados planteados a lo largo del presente estudio con la estructura matemática del Filtro Kalman resulta ser la esencia de este trabajo y gracias a su bondad de ajuste y sus resultados cercanos a los datos observados permite concluir que la estructura acoplada permite obtener pronósticos horarios de caudales, adecuados a pesar de las limitantes de información en el tramo de estudio, así como la calidad y disponibilidad de la misma.

Tal vez el principal aporte del proyecto es que, no obstante, de utilizar herramientas de tránsitos tradicionales, estas muestran un rendimiento eficiente en el pronóstico de

caudales horarios con el Filtro Kalman, haciendo que por su parsimonia sean fáciles de implementar, en comparación de modelos más elaborados y complejos.

Haciendo alusión al principio filosófico denominado la **navaja de Occam** cuando dos teorías en igualdad de condiciones tienen las mismas consecuencias, la teoría más simple tiene más probabilidades de ser correcta que la compleja, ya depende cuál de las dos teorías es la más correcta y cual finalmente se escoja. De acuerdo con esto el objetivo de pronosticar caudales con la metodología propuesta se logró, aunque pueda haber modelos más elaborados.

*"Si una persona es perseverante, aunque sea dura de entendimiento, se hará inteligente; y aunque sea débil, se transformará en fuerte."* **Leonardo Da Vinci**

## 6.1 Conclusiones

La modelación realizada consistió en implementar tres modelos lineales de tránsito de crecientes, considerando ríos tributarios significativos que es poco usual, así como las áreas aferentes que aportan directamente al río principal. Estos modelos sirvieron de base en la implementación del filtro Kalman ya que representan el comportamiento físico del sistema de una forma adecuada y permiten, tener un pronóstico de las “entradas” y “salidas”, en cada uno de los cuatro embalses o subtramos, que sectorizaron el tramo de estudio sobre el río Magdalena.

Los tres modelos lineales de tránsito desarrollados son diferencias finitas, piscina nivelada y Muskingum, los cuales fueron calibrados con la función objetivo de Nash-Sutcliffe, arrojando buenos resultados en el proceso de calibración y de validación, el valor óptimo de la función objetivo es de uno y el valor de cero es el de peor precisión. Al revisar los resultados de calibración y de validación de los tres modelos de tránsito, es el modelo de Muskingum, el que presenta los mejores valores de la función objetivo de Nash-Sutcliffe, fluctuando en el rango de 0,942 a 0,973, (ver Figura 4-48 y Figura 4-49).

Los tres modelos lineales de tránsitos tienen el parámetro “K” a calibrar, el cual representa el tiempo de viaje, para cada uno de los cinco periodos de tránsito por modelo. Al observar los resultados del parámetro “K” de la Figura 4-52, tienden a conservar el tiempo de viaje calculado en la función de correlación cruzada (ver Tabla 3.13). Sin embargo, el modelo de Muskingum presenta un ligero mejor ajuste, cuando se compara con el valor de la sumatorias del parámetro (K) sobre los resultados de la función de correlación cruzada. El grado de precisión de los valores del parámetro de K es por los valores óptimos hallados, por la función objetivo de Nash-Sutcliffe.

Los resultados presentados en la Figura 4-52 y la Tabla 3.13, corresponden a la sumatoria del parámetro “K” de cada uno de los cinco periodos y de los tres modelos de tránsito. Se encontró de los resultados mencionados del parámetro “K”, para el periodo 1, periodo 2 y periodo 5, son los periodos que mejor ajuste tienen, al tiempo de tránsito a la función de correlación cruzada. El modelo de tránsito de Muskingum y el modelo de tránsito de Piscina Nivelada, son los de mejor acercamiento al tiempo de viaje hallado por la función de correlación cruzada.

Los errores promedios de caudales mostrados en la Figura 4-50 y Figura 4-51, son: el promedio de las diferencias de caudales observados en la hidrógrafa de la estación limnigráfica de Barrancabermeja respecto a los caudales obtenidos de la hidrógrafa transitada calibrada y validada en el cuarto y último embalse de cada uno de los cinco periodos, en cada instante de tiempo. Estos errores promedio de caudales están calculados en cada uno de los tres modelos lineales de tránsito desarrollados. Sin embargo, en el proceso de calibración en el modelo de transito de diferencias finitas, presenta levemente una mayor tendencia de errores promedio de caudales.

Para encontrar cuál de los tres modelos de transito lineales desarrollados, es el que mejor calibro y valido en el proceso, basados en los resultados de los cinco periodos, se escogieron tres criterios: los mejores valores de la función objetivo de Nash-Sutcliffe, el menor valor de promedio o media de los errores de caudales y la sumatoria del parámetro “K” de cada embalse respecto a la función de autocorrelación. Por los argumentos anteriores se escoge el modelo de Muskingum, como el modelo de mejor calibración por tener los mejores resultados de la función objetivo de Nash, esto debe ser porque son dos

parámetros para calibrar que tiene este tránsito, el cual es el parámetro “K” y el parámetro “X”.

Se observó que en cuanto más se acercaba el valor objetivo de Nash-Sutcliffe al valor óptimo uno (1), mejor son los resultados en el proceso de calibración y validación del parámetro “K” y “X” (modelo de Muskingum) y también los resultados del tiempo de viaje por embalse. Es importante mencionar que la función objetivo se calculó aleatoriamente por el programa MCAT, los valores del parámetro “K” o “X” se modificaban cada vez cuando se hacía un tránsito nuevo en el software de Matlab.

Entendiendo el modelo de tránsito como la representación física del movimiento de agua en el río, se llevó a cabo un proceso riguroso de calibración que resultó fundamental para el posterior proceso de pronóstico. En este paso del protocolo de modelación resultó muy importante seleccionar el rango de valores de los parámetros ya que (ver Tabla 3.13, Tabla 4.1 y Figura 4-52), al escoger un rango muy amplio, los valores de (k) calibrados resultaron ser muy bajos en comparación con el tiempo de tránsito (teórico) correspondiente con la longitud de cada embalse, resultando velocidades muy altas de flujo.

El parámetro (k) en los diferentes modelos planteados representa físicamente el tiempo de viaje de la onda y la calibración de este parámetro tenía que realizarse de manera que se aproximara a la realidad física. En algunos casos la calibración de este parámetro para cada uno de los embalses o tramos de estudio considerados resultó ser bastante sensible ya que se obtuvieron diferentes combinaciones “válidas”.

Por la representación física del parámetro (K), se hizo necesario restringir el rango de calibración de una manera adecuada que permitiese que la suma total de los tiempos de viaje resultase aproximadamente similar a los resultados obtenidos con la función de correlación cruzada entre la estación “aguas arriba” (Puerto Berrío) y la estación “aguas abajo” (Barrancabermeja). El parámetro “K” el cuál se calculó para cada periodo de tiempo, presentaba un valor promedio cercano a las 16 horas, a lo largo de todo el tramo de estudio, ver Figura 4-52 y la Tabla 3.13. Aunque generalmente el tiempo de 16 horas en las simulaciones se presentaba con facilidad.

En cada uno de los modelos presentados se realizaron pruebas de Monte Carlo para el proceso de calibración usando la herramienta de análisis MCAT. La función objetivo de Nash resultó la mejor para este proceso ya que se probaron las funciones RMSE y Bias las cuales arrojaron resultados que no permitieron una interpretación adecuada del proceso. Los resultados de las dos últimas funciones objetivos mencionadas RMSE Y BIAS no se presentan.

En el proceso de calibración el modelo de Muskingum presentó el menor error en general para los cinco periodos, entre la hidrógrafa simulada con el tránsito en comparación con la hidrógrafa observada (Barrancabermeja) obteniéndose una función objetivo de Nash-Sutcliffe cercana a la unidad. Este comportamiento se deba quizá a que involucra un parámetro adicional (X) en comparación con los modelos de piscina nivelada y diferencias finitas. Sin embargo, la baja interpretación física que tiene el parámetro adicional "X" no permite concluir porqué resulta ser el mejor modelo calibrado, sin embargo, al comparar las diferencias de resultados de los otros dos modelos son mínimos. Esto se vio reflejado en las cortas diferencias de los errores medios de calibración y validación de los caudales, así como en los resultados de los valores del coeficiente de Nash-Sutcliffe.

En vista de ello y teniendo en cuenta la parsimonia de los modelos de piscina nivelada y diferencias finitas, ya que solamente se presenta un parámetro en el modelo físico se hizo necesario continuar con el proceso de modelación con todos los modelos y no restringir el proceso de pronóstico solamente al que mejor calibrase.

Es importante mencionar que, para el pronóstico de caudales, existen modelos más elaborados (Moreno y Salazar, 2008) y con mayor número de variables, sin embargo, los modelos desarrollados en este trabajo, a pesar de su sencillez presentan resultados muy buenos en todas las fases del proceso de modelación, lo cual es muy conveniente para el tipo de información que contamos en nuestro medio. Adicionalmente un producto del trabajo es que, con modelos sencillos y prácticos, con información hidrométrica básica se logra implementar el filtro de Kalman para el pronóstico de caudales entre estaciones limnigráficas a nivel nacional.

Para generar buenos modelos de alerta o de emergencia, es necesario implementar estas herramientas de pronóstico aguas arriba de las zonas con riesgo de inundación y así ganar el tiempo suficiente de aviso, por el tránsito de la onda que depende de las características del río, lo cual puede representar tiempos superiores hasta de un día.

Para determinar cuál de los tres filtros Kalman con sus respectivos modelos de tránsito lineales desarrollados, es el que mejor pronostico caudales horarios, basados en los resultados de los cinco periodos, se escogieron los siguientes criterios: la varianza del error del caudal pronosticado, la media o promedio del error del caudal pronosticado y el coeficiente de Nash en la serie de tiempo pronosticado para cada periodo. Adicionalmente se pronosticó el filtro de Kalman, al considerar o no ruido en la ecuación de medición del filtro, con el objetivo de revisar cuál de los dos tipos de pronósticos da mejores resultados.

Los resultados del promedio del error de caudales pronosticados por periodo, bajo las condiciones realizadas con el Filtro de Kalman-Bucy se observa en la Figura 5-61 (con ruido) y Figura 5-62 (sin ruido). El modelo de tránsito por diferencias finitas presenta los menores promedios de errores de caudales pronosticados de forma general, en los cinco periodos simulados y al respecto de los tres modelos de tránsito.

La Figura 5-63 indica los resultados de los coeficientes o función objetivo de Nash-Sutcliffe para el pronóstico de caudales por el filtro de Kalman en cada uno de los cinco periodos y los tres modelos de tránsito desarrollados con o sin ruido en la ecuación de medición del filtro. El modelo de tránsito por diferencias finitas presenta la tendencia de los mejores y más altos valores cercanos a uno, en el coeficiente de Nash-Sutcliffe, el modelo de tránsito de piscina nivelada la segunda mejor tendencia y el tránsito de Muskingum presenta la tendencia de los valores menores de este coeficiente. Es importante indicar que las diferencias de los resultados del coeficiente son poco significativas entre los tres modelos de tránsito propuestos, como se puede observar en la Figura 5-63.

Los resultados de la función objetivo coeficiente de Nash-Sutcliffe en el proceso de calibración y validación de los tránsitos, el que presenta la mejor tendencia de este coeficiente es para el modelo de tránsito de Muskingum, ver Figura 4-48 y Figura 4-49, el modelo de tránsito de diferencias finitas es el que tiene los resultados más bajos de este

coeficiente. Al revisar los resultados del pronóstico del filtro Kalman, en la Figura 5-63 se encuentra que, en los pronósticos, mejora los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe para el modelo de diferencias finitas y en cambio el modelo de Muskingum estos valores del coeficiente disminuyen.

La aplicación del filtro Kalman para el pronóstico de caudales horarios, considerando ruidos en la ecuación de medición, presenta un muy ligero mejor pronóstico en comparación cuando se simula sin ruidos, en las ecuaciones del filtro, ver coeficientes de Nash-Sutcliffe en la Figura 5-63.

La razón probablemente del leve mejor pronóstico de caudales para el filtro de Kalman al emplear ruidos en la ecuación de medición debe ser por los valores en la posición (4,4) de la matriz (R) ya que es el único valor existente (Estación (LG) Barrancabermeja) y medible de la diagonal de esta matriz, en la otra situación de sin “ruido” en la ecuación de medición la matriz (R) simplemente es cero.

Es importante resaltar, de la ecuación de medición la matriz (R), es posible obtener todos los valores de la diagonal de esta matriz, siempre y cuando se tenga la información de hidrógrafas, de las estaciones limnigráficas intermedias en el tramo de estudio, adicionalmente que estén ubicadas las estaciones, preferiblemente al terminar cada subtramo o después de un afluente tributario de importancia. Estimula para próximos trabajos, hacer pronósticos de caudales horarios considerando el ruido por la matriz (R) y conocer si mejora los resultados sustancialmente en los pronósticos.

Por los resultados del promedio del error de caudales pronosticados por periodo, bajo las condiciones realizadas con el Filtro de Kalman-Bucy se observa en la Figura 5-61y Figura 5-62, que el modelo de tránsito por diferencias finitas presenta los menores promedios de errores de caudales pronosticados de forma general, en los cinco periodos simulados y al respecto de los tres modelos de tránsito.

Una forma de cuantificar los mejores resultados del filtro Kalman y específicamente para el modelo de tránsito de diferencias finitas, se puede reflejar en los errores promedios de los caudales pronosticados en cada uno de los cinco periodos y en los valores del

coeficiente de Nash-Sutcliffe de los caudales pronosticados, respecto a los otros dos modelos de tránsito de Piscina Nivelada y Muskingum al aplicar el filtro.

El aumento de la precisión del pronóstico de caudales con el filtro de Kalman por el modelo de diferencias finitas, en comparación a los resultados del proceso de calibración-validación, se puede atribuir porque el modelo de Muskingum tiene dos parámetros “K” y “X” en las ecuaciones para el pronóstico, mientras que el pronóstico con el modelo de diferencias finitas tiene un solo parámetro “K”.

Se realizó un breve análisis de los resultados de pronósticos de caudales horarios por el filtro Kalman, como es la media del error de los caudales pronosticados y al compararlos respecto a la magnitud de los caudales, que se utilizaron en los cinco periodos, se obtiene generalmente un porcentaje de error menor al 1,5%, si se toman los valores medidos de los caudales en la hidrógrafa de la estación limnigráfica de Barrancabermeja, ver Figura 5-61 y Figura 5-62.

## 6.2 Recomendaciones

El potencial para futuras investigaciones en la implementación del filtro Kalman para pronósticos de caudales, se puede extender a modelos matemáticos no lineales que representen el comportamiento físico del sistema en cuanto al movimiento o volumen de almacenamiento (S) del agua en el río. La forma de volver no lineal fácilmente el proceso físico es por medio del volumen de almacenamiento (S), con base en el planteamiento expuesto en el marco teórico del capítulo 2 por medio de la ecuación No. 2.2 ( $S = KQ$ ), elevando el caudal “Q” a un exponente “m” quedando de la siguiente forma no lineal la ecuación No. 2.2 ( $S = KQ^m$ ). Al plantear esta ecuación no-lineal, se debe profundizar en la implementación para el pronóstico con el filtro Kalman extendido (EKF) y/o filtro Kalman “unscented” (UKF).

En un análisis realizado brevemente sobre el filtro Kalman EKF y UKF, se encontró por ejemplo que al utilizar el filtro Kalman EKF, la ecuación ( $S = KQ^m$ ), produce ecuaciones

no lineales implícitas, impidiendo generar matrices jacobianas, las cuales si se pueden resolver no son triviales en la mayoría de las aplicaciones y son fundamentales para el filtro EKF. Sin embargo, en un reducido análisis realizado para el filtro UKF, es posible implementarlo. Siempre y cuando si se interpreta bien este método UKF, consiste en principio “en transformar la no-linealidad del sistema en una nube de puntos transformados por medio de una aproximación de una distribución gaussiana”, esta transformación es de un alto nivel de complejidad matemática, pero hay más posibilidad de abordar el problema expuesto, por el filtro Kalman UKF, según el exiguo análisis realizado, si se compara con el filtro Kalman EKF.

Otra aplicación futura de investigación para próximos trabajos es hacer pronósticos de caudales horarios con el filtro Kalman, es considerando el ruido por la matriz (R) de una forma completa y conocer si mejora los resultados sustancialmente en los pronósticos, tanto para modelos físicos lineales o no lineales. Siempre y cuando se tenga la información de hidrógrafas, de las estaciones limnigráficas intermedias en el tramo de estudio, adicionalmente que estén ubicadas las estaciones, preferiblemente al terminar cada subtramo o después de un afluente tributario de importancia.

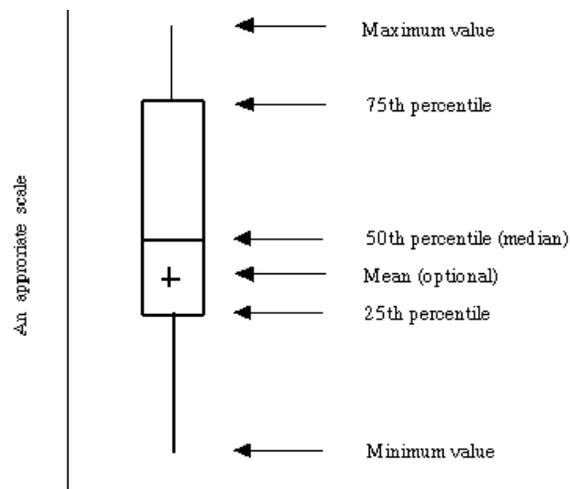
Observando los valores de la función objetivo de Nash de los pronósticos (Figura 5-63), se puede concluir que el grado de implementación del filtro Kalman para el pronóstico de caudales en tiempo real, para un tramo del rio magdalena es buena, debido que los valores de la función objetivo están en el rango de 0,946 (94.6%) y 0,995 (99,5%), cuando el valor ideal es 1 (100%). En parte estos resultados del pronóstico del filtro, es por la representación física en el tramo de estudio que genera, los modelos de transito desarrollados y por la resolución temporal horaria de caudales suministrada por el IDEAM.

## Anexo A: Análisis de datos atípicos

Un diagrama de caja es un gráfico, basado en cuartiles, mediante el cual se visualiza un conjunto de datos. Está compuesto por un rectángulo, la "caja", y dos brazos, los "bigotes".

Es un gráfico que suministra información sobre los valores mínimo y máximo, los cuartiles Q1, Q2 o mediana y Q3, y sobre la existencia de valores atípicos y la simetría de la distribución.

**Figura A2.1:** Grafica de un Boxplot típico



Ejemplo de aplicación:

Ordenar los datos y obtener el valor mínimo, el máximo, luego obtener los cuartiles Q1, Q2 y Q3 y el Rango Inter Cuartilico (RIC). En el siguiente ejemplo:

**Valor 7:** es el Q1 (25% de los datos)

**Valor 8.5:** es el Q2 o mediana (el 50% de los datos)

**Valor 9:** es el Q3 (75% de los datos)

Rango Inter Cuartilico RIC (Q3-Q1) = 2 (El cual representa el borde superior e inferior de la caja en la gráfica)

Para dibujar los bigotes, las líneas se extienden desde la caja, calculando los límites superiores e inferior, ( $L_i$ ) y ( $L_s$ ), que identifiquen a los valores atípicos.

Para ello se calcula cuándo se consideran atípicos los valores. Son aquellos inferiores a  $Q1-1.5*RIC$  o superiores a  $Q3+1.5*RIC$ .

En el ejemplo:

**Inferior:**  $7-1.5*2=4$ ; **Superior:**  $9+1.5*2=12$

Ahora se buscan los últimos valores NO son atípicos, ubicados en los extremos de los bigotes.

En el ejemplo: 5 y 10

Marcar como atípicos todos los datos que están fuera del intervalo ( $L_i$ ,  $L_s$ ).

En el ejemplo: 0.5 y 3.5

Además, se pueden considerar valores extremadamente atípicos cuando exceden  $Q1-3*RIC$  o  $Q3+3*RIC$ .

A manera de ejemplo:

**Inferior:**  $7-3*2=1$

**Superior:**  $9+3*2=15$

## Anexo B: Método de Regresión Lineal Múltiple

La regresión lineal múltiple, se aplicó para completar los datos faltantes o los datos anómalos que se presentaron en la serie de datos.

En la mayor parte de los problemas de investigación donde se aplica el análisis de regresión se necesita más de una variable independientemente en el modelo de regresión. La complejidad de la mayor parte de los mecanismos científicos es tal que para ser capaces predecir una respuesta importante se necesita un modelo de regresión Múltiple.

Cuando en este modelo es lineal en los coeficientes se denomina modelo de regresión lineal múltiple. Para el caso de K variables independientes  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , la media de  $Y| x_1, x_2, \dots, x_k$  está dada por la regresión lineal múltiple.

$$\mu_{Y|x_1, x_2, \dots, x_k} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \dots + \beta_k x_k \quad (\text{A 2.1})$$

Y la respuesta estimada se obtiene de la ecuación de regresión de la muestra

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + \dots + b_K X_K \quad (\text{A 2.2})$$

Donde cada coeficiente de regresión  $\beta_i$  se estima por  $b_i$  de los datos de muestra con el uso del método de mínimos cuadrados. Cuando  $k=1.0$ , se puede pensar que las medidas de  $\mu_{Y|X}$  no caen en una línea recta pero que se describen de forma más apropiada con el **modelo de regresión polinomial**.

Se desea ajustar la ecuación siguiente ecuación polinomial:

$$\mu_{Y|X_1, X_2, \dots, X_k} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \dots + \beta_r X^r \quad (A 2.3)$$

Para las n observaciones  $[(X_i, Y_i); i = 1, 2, \dots, n]$ . Cada observación,  $Y_i$ , satisface la ecuación:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \dots + \beta_k X_k \quad (A 2.4)$$

$$Y_i = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2^i \dots \dots b_r X_r \quad (A2.5)$$

Donde r es el grado del polinomio. El número de pares, n, debe ser al menos tan grande como r+1, el número de parámetros a estimar. Nótese que el modelo polinomial se puede considerar como un caso especial del modelo de regresión lineal múltiple más general, donde hacemos  $X_1 = X$ ,  $X_2 = X^2$ , ...,  $X_r = X^r$ . Las ecuaciones normales toman la forma.

$$nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^n X_i + b_2 \sum_{i=1}^n X_i^2 + \dots + b_r \sum_{i=1}^n X_i^r = \sum_{i=1}^n Y_i \quad (A2.5)$$

$$b_0 \sum_{i=1}^n X_i + b_1 \sum_{i=1}^n X_i^2 + b_2 \sum_{i=1}^n X_i^3 + \dots + b_r \sum_{i=1}^n X_i^{r+1} = \sum_{i=1}^n X_i Y_i \quad (A2.6)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad = \quad \quad \quad \vdots$$

$$b_0 \sum_{i=1}^n X_i^r + b_1 \sum_{i=1}^n X_i^{r+1} + b_2 \sum_{i=1}^n X_i^{r+2} + \dots + b_k \sum_{i=1}^n X_i^{2r} = \sum_{i=1}^n X_i^r Y_i \quad (A2.7)$$

Que se resuelven para  $b_0, b_1, \dots, b_r$ , resolviendo las anteriores ecuaciones, los coeficientes como si fueran un sistema de ecuaciones lineal.

## **Anexo C. Cartografía de la zona de estudio sobre el río Magdalena (Puerto Berrío – Barrancabermeja)**

## Anexo D. Algoritmos

A continuación, se presentan los algoritmos más importantes

### **NOMBRE DEL ARCHIVO DE MATLAB: SALIDA.**

```
clear all
```

```
clc
```

```
%% Carga de Datos
```

```
CargaNiveles
```

```
CargaCurvas
```

```
CargaFechas
```

```
CargaPeriodos
```

```
CargaCaudales
```

```
GraficaCurvas
```

```
%% Graficos Iniciales. Etapa 1.
```

```
% load CauRMa1, load Fechas1
```

```
% Caudales = CauRMa1; Niveles = Niv1m; Periodo = 1; Qmax=7000; pmin=0.7;
```

```
% Ejecuta_Etapa1(Caudales,Niveles,Periodo,Qmax,pmin)
```

```
% pause
```

```
%
```

```
% load CauRMa2, load Fechas2
```

```
% Caudales = CauRMa2;Niveles = Niv2m; Periodo = 2; Qmax=7000; pmin=0.7;
```

```
% Ejecuta_Etapa1(Caudales,Niveles,Periodo,Qmax,pmin)
```

```
% pause
```

```
%
```

```
% load CauRMa3, load Fechas3
```

```

% Caudales = CauRMa3; Niveles = Niv3m; Periodo = 3; Qmax=8000; pmin=0.5;
% Ejecuta_Etapa1(Caudales,Niveles,Periodo,Qmax,pmin)
% pause
%
% load CauRMa4, load Fechas4
% Caudales = CauRMa4; Niveles = Niv4m; Periodo = 4; Qmax=5000; pmin=0.4;
% Ejecuta_Etapa1(Caudales,Niveles,Periodo,Qmax,pmin)
% pause
%
load CauRMa5, load Fechas5
Caudales = CauRMa5; Niveles = Niv5m; Periodo = 5; Qmax=6000; pmin=0.6;
Ejecuta_Etapa1(Caudales,Niveles,Periodo,Qmax,pmin)

%% MODELO DIFERENCIAS FINITAS (Activar por modelo y periodo)
%-----
%% Modelo a, Periodo 1 (LISTO)
% load CauRMa1, load Fechas1
% Caudales = CauRMa1; Niveles = Niv1m; Periodo = 1;
% Model = 'a'; Rez = 17;
% Ejecuta_Etapa2(Caudales,Model,Periodo,Rez)
% % %
% load sa1w, load sa1x, load sa1y, load sa1z
% s1 = sa1w; s2 = sa1x; s3 = sa1y; s4 = sa1z;
% Qmin = 3000; Qmax = 7000; Qmin2 = 1500; Qmax2 = 5000; n1 = 1700; n2 = 1800;
Fechas = Fechas1;
%
Ejecuta_Etapa3(Caudales,Rez,s1,s2,s3,s4,Model,Periodo,Qmin,Qmax,Qmin2,Qmax2,n1,
n2,Fechas)
%-----
%% Modelo a, Periodo 2 (LISTO)
% load CauRMa2, load Fechas2
% Caudales = CauRMa2; Niveles = Niv2m; Periodo = 2;
% Model = 'a'; Rez = 17;

```

```
% Ejecuta_Etapa2(Caudales,Model,Periodo,Rez)
%
% load sa2w, load sa2x, load sa2y, load sa2z
% s1 = sa2w; s2 = sa2x; s3 = sa2y; s4 = sa2z;
% Qmin = 3000; Qmax = 7000; Qmin2 = 2000; Qmax2 = 6000; n1 = 600; n2 = 680; Fechas
= Fechas2;
%
Ejecuta_Etapa3(Caudales,Rez,s1,s2,s3,s4,Model,Periodo,Qmin,Qmax,Qmin2,Qmax2,n1,
n2,Fechas)
%-----
%% Modelo a, Periodo 3 (LISTO)
% load CauRMa3, load Fechas3
% Caudales = CauRMa3; Niveles = Niv3m; Periodo = 3;
% Model = 'a'; Rez = 18;
% % Ejecuta_Etapa2(Caudales,Model,Periodo,Rez)
%
% load sa3w, load sa3x, load sa3y, load sa3z
% s1 = sa3w; s2 = sa3x; s3 = sa3y; s4 = sa3z;
% Qmin = 4000; Qmax = 8000; Qmin2 = 2500; Qmax2 = 8000; n1 = 190; n2 = 280; Fechas
= Fechas3;
%
Ejecuta_Etapa3(Caudales,Rez,s1,s2,s3,s4,Model,Periodo,Qmin,Qmax,Qmin2,Qmax2,n1,
n2,Fechas)
%-----
%% Modelo a, Periodo 4 (LISTO)
% load CauRMa4, load Fechas4
% Caudales = CauRMa4; Niveles = Niv4m; Periodo = 4;
% Model = 'a'; Rez = 19;
% Ejecuta_Etapa2(Caudales,Model,Periodo,Rez)
%
% load sa4w, load sa4x, load sa4y, load sa4z
% s1 = sa4w; s2 = sa4x; s3 = sa4y; s4 = sa4z;
```

```
% Qmin = 2000; Qmax = 4500; Qmin2 = 1000; Qmax2 = 4500; n1 = 200; n2 = 300; Fechas
= Fechas4;
%
Ejecuta_Etapa3(Caudales,Rez,s1,s2,s3,s4,Model,Periodo,Qmin,Qmax,Qmin2,Qmax2,n1,
n2,Fechas)
%-----
%% Modelo a, Periodo 5 (LISTO)
% load CauRMa5, load Fechas5
% Caudales = CauRMa5; Niveles = Niv5m; Periodo = 5;
% Model = 'a'; Rez = 19;
% % Ejecuta_Etapa2(Caudales,Model,Periodo,Rez)
%
% load sa5w, load sa5x, load sa5y, load sa5z
% s1 = sa5w; s2 = sa5x; s3 = sa5y; s4 = sa5z;
% Qmin = 1000; Qmax = 6000; Qmin2 = 1000; Qmax2 = 6000; n1 = 900; n2 = 1000; Fechas
= Fechas5;
%
Ejecuta_Etapa3(Caudales,Rez,s1,s2,s3,s4,Model,Periodo,Qmin,Qmax,Qmin2,Qmax2,n1,
n2,Fechas)
%-----
%% MODELO PISCINA NIVELADA
%-----
%% Modelo b, Periodo 1 (LISTO)
% load CauRMa1, load Fechas1
% Caudales = CauRMa1; Niveles = Niv1m; Periodo = 1;
% Model = 'b'; Rez = 17;
% Ejecuta_Etapa2(Caudales,Model,Periodo,Rez)
%
% load sb1w, load sb1x, load sb1y, load sb1z
% s1 = sb1w; s2 = sb1x; s3 = sb1y; s4 = sb1z;
% Qmin = 3000; Qmax = 7000; Qmin2 = 2000; Qmax2 = 5000; n1 = 1700; n2 = 1800;
Fechas = Fechas1;
```

```
%
Ejecuta_Etapa3(Caudales,Rez,s1,s2,s3,s4,Model,Periodo,Qmin,Qmax,Qmin2,Qmax2,n1,
n2,Fechas)
%-----
%% Modelo b, Periodo 2 (LISTO)
% load CauRMa2, load Fechas2
% Caudales = CauRMa2; Niveles = Niv2m; Periodo = 2;
% Model = 'b'; Rez = 17;
% Ejecuta_Etapa2(Caudales,Model,Periodo,Rez)
%
% load sb2w, load sb2x, load sb2y, load sb2z
% s1 = sb2w; s2 = sb2x; s3 = sb2y; s4 = sb2z;
% Qmin = 3000; Qmax = 7000; Qmin2 = 2000; Qmax2 = 6000; n1 = 600; n2 = 680; Fechas
= Fechas2;
%
Ejecuta_Etapa3(Caudales,Rez,s1,s2,s3,s4,Model,Periodo,Qmin,Qmax,Qmin2,Qmax2,n1,
n2,Fechas)
% %-----
%% Modelo b, Periodo 3 (LISTO)
% load CauRMa3, load Fechas3
% Caudales = CauRMa3; Niveles = Niv3m; Periodo = 3;
% Model = 'b'; Rez = 18;
% Ejecuta_Etapa2(Caudales,Model,Periodo,Rez)
%
% load sb3w, load sb3x, load sb3y, load sb3z
% s1 = sb3w; s2 = sb3x; s3 = sb3y; s4 = sb3z;
% Qmin = 4000; Qmax = 8000; Qmin2 = 2500; Qmax2 = 8000; n1 = 190; n2 = 280; Fechas
= Fechas3;
%
Ejecuta_Etapa3(Caudales,Rez,s1,s2,s3,s4,Model,Periodo,Qmin,Qmax,Qmin2,Qmax2,n1,
n2,Fechas)
%-----
%% Modelo b, Periodo 4 (LISTO)
```

```
% load CauRMa4, load Fechas4
% Caudales = CauRMa4; Niveles = Niv4m; Periodo = 4;
% Model = 'b'; Rez = 19;
% Ejecuta_Etapa2(Caudales,Model,Periodo,Rez)
%
% load sb4w, load sb4x, load sb4y, load sb4z
% s1 = sb4w; s2 = sb4x; s3 = sb4y; s4 = sb4z;
% Qmin = 2000; Qmax = 4500; Qmin2 = 1000; Qmax2 = 4500; n1 = 200; n2 = 300; Fechas
= Fechas4;
%
Ejecuta_Etapa3(Caudales,Rez,s1,s2,s3,s4,Model,Periodo,Qmin,Qmax,Qmin2,Qmax2,n1,
n2,Fechas)
%-----
%% Modelo b, Periodo 5 (LISTO)
% load CauRMa5, load Fechas5
% Caudales = CauRMa5; Niveles = Niv5m; Periodo = 5;
% Model = 'b'; Rez = 19;
% Ejecuta_Etapa2(Caudales,Model,Periodo,Rez)
%
% load sb5w, load sb5x, load sb5y, load sb5z
% s1 = sb5w; s2 = sb5x; s3 = sb5y; s4 = sb5z;
% Qmin = 1000; Qmax = 6000; Qmin2 = 1000; Qmax2 = 6000; n1 = 900; n2 = 1000; Fechas
= Fechas5;
%
Ejecuta_Etapa3(Caudales,Rez,s1,s2,s3,s4,Model,Periodo,Qmin,Qmax,Qmin2,Qmax2,n1,
n2,Fechas)
%-----
%% MODELO MUSKINGUM
%-----
%% Modelo c, Periodo 1 (LISTO)
% load CauRMa1, load Fechas1
% Caudales = CauRMa1; Niveles = Niv1m; Periodo = 1;
% Model = 'c'; Rez = 17;
```

```
% Ejecuta_Etapa2(Caudales,Model,Periodo,Rez)
%
% load sc1w, load sc1x, load sc1y, load sc1z
% s1 = sc1w; s2 = sc1x; s3 = sc1y; s4 = sc1z;
% Qmin = 3000; Qmax = 7000; Qmin2 = 2000; Qmax2 = 5000; n1 = 1700; n2 = 1800;
Fechas = Fechas1;
%
Ejecuta_Etapa3(Caudales,Rez,s1,s2,s3,s4,Model,Periodo,Qmin,Qmax,Qmin2,Qmax2,n1,
n2,Fechas)
%-----
%% Modelo c, Periodo 2 (LISTO)
% load CauRMa2, load Fechas2
% Caudales = CauRMa2; Niveles = Niv2m; Periodo = 2;
% Model = 'c'; Rez = 17;
% Ejecuta_Etapa2(Caudales,Model,Periodo,Rez)
%
% load sc2w, load sc2x, load sc2y, load sc2z
% s1 = sc2w; s2 = sc2x; s3 = sc2y; s4 = sc2z;
% Qmin = 3000; Qmax = 7000; Qmin2 = 2000; Qmax2 = 6000; n1 = 600; n2 = 680; Fechas
= Fechas2;
%
Ejecuta_Etapa3(Caudales,Rez,s1,s2,s3,s4,Model,Periodo,Qmin,Qmax,Qmin2,Qmax2,n1,
n2,Fechas)
%-----
%% Modelo c, Periodo 3 (LISTO)
% load CauRMa3, load Fechas3
% Caudales = CauRMa3; Niveles = Niv3m; Periodo = 3;
% Model = 'c'; Rez = 18;
% Ejecuta_Etapa2(Caudales,Model,Periodo,Rez)
%
% load sc3w, load sc3x, load sc3y, load sc3z
% s1 = sc3w; s2 = sc3x; s3 = sc3y; s4 = sc3z;
```

```
% Qmin = 4000; Qmax = 8000; Qmin2 = 2500; Qmax2 = 8000; n1 = 190; n2 = 280; Fechas
= Fechas3;
%
Ejecuta_Etapa3(Caudales,Rez,s1,s2,s3,s4,Model,Periodo,Qmin,Qmax,Qmin2,Qmax2,n1,
n2,Fechas)
%-----
%% Modelo c, Periodo 4 (LISTO)
% load CauRMa4, load Fechas4
% Caudales = CauRMa4; Niveles = Niv4m; Periodo = 4;
% Model = 'c'; Rez = 19;
% Ejecuta_Etapa2(Caudales,Model,Periodo,Rez)
%
% load sc4w, load sc4x, load sc4y, load sc4z
% s1 = sc4w; s2 = sc4x; s3 = sc4y; s4 = sc4z;
% Qmin = 2000; Qmax = 4500; Qmin2 = 1000; Qmax2 = 4500; n1 = 200; n2 = 300; Fechas
= Fechas4;
%
Ejecuta_Etapa3(Caudales,Rez,s1,s2,s3,s4,Model,Periodo,Qmin,Qmax,Qmin2,Qmax2,n1,
n2,Fechas)
%-----
%% Modelo c, Periodo 5 (LISTO)
% load CauRMa5, load Fechas5
% Caudales = CauRMa5; Niveles = Niv5m; Periodo = 5;
% Model = 'c'; Rez = 19;
% Ejecuta_Etapa2(Caudales,Model,Periodo,Rez)
%
% load sc5w, load sc5x, load sc5y, load sc5z
% s1 = sc5w; s2 = sc5x; s3 = sc5y; s4 = sc5z;
% Qmin = 1000; Qmax = 6000; Qmin2 = 1000; Qmax2 = 6000; n1 = 900; n2 = 1000; Fechas
= Fechas5;
%
Ejecuta_Etapa3(Caudales,Rez,s1,s2,s3,s4,Model,Periodo,Qmin,Qmax,Qmin2,Qmax2,n1,
n2,Fechas)
```

```
%% pronostico uk
load CauRMa1
Caudales = CauRMa1; Periodo = 1; Rez=17;
Ejecuta_Etapa4(Caudales,Periodo,Rez)
pause
%
% load CauRMa2
% Caudales = CauRMa2; Periodo = 2; Rez=17;
% Ejecuta_Etapa4(Caudales,Periodo,Rez)
% pause
%
% load CauRMa3
% Caudales = CauRMa3; Periodo = 3; Rez=18;
% Ejecuta_Etapa4(Caudales,Periodo,Rez)
% pause
%
% load CauRMa4
% Caudales = CauRMa4; Periodo = 4; Rez=19;
% Ejecuta_Etapa4(Caudales,Periodo,Rez)
% pause
%
% load CauRMa5
% Caudales = CauRMa5; Periodo = 5; Rez=19;
% Ejecuta_Etapa4(Caudales,Periodo,Rez)

%% Modelo a, Periodo 1
% load CauRMa1, load uk1, load k_dif
% Caudales = CauRMa1; Periodo = 1; Model='a'; Rez=17; kpar=k_dif; xpar=[];
% uk=uk1; Qmin=3000; Qmax=7000;
% KF_Pronosticado_V1(Caudales,Model,Periodo,uk,Rez,kpar,xpar,Qmin,Qmax)
%
%% Modelo a, Periodo 2
% load CauRMa2, load uk2, load k_dif
```

```
% Caudales = CauRMa2; Periodo = 2; Model='a'; Rez=17; kpar=k_dif; xpar=[]; uk=uk2;
% KF_Pronosticado_V1(Caudales,Model,Periodo,uk,Rez,kpar,xpar)
%
%% Modelo a, Periodo 3
% load CauRMa3, load uk3, load k_dif
% Caudales = CauRMa3; Periodo = 3; Model='a'; Rez=18; kpar=k_dif; xpar=[]; uk=uk3;
% KF_Pronosticado_V1(Caudales,Model,Periodo,uk,Rez,kpar,xpar)

%% Modelo a, Periodo 4
% load CauRMa4, load uk4, load k_dif
% Caudales = CauRMa4; Periodo = 4; Model='a'; Rez=19; kpar=k_dif; xpar=[]; uk=uk4;
% KF_Pronosticado_V1(Caudales,Model,Periodo,uk,Rez,kpar,xpar)

%% Modelo a, Periodo 5
% load CauRMa5, load uk5, load k_dif
% Caudales = CauRMa5; Periodo = 5; Model='a'; Rez=18; kpar=k_dif; xpar=[]; uk=uk5;
% KF_Pronosticado_V1(Caudales,Model,Periodo,uk,Rez,kpar,xpar)

%%
%% Modelo b, Periodo 1
% load CauRMa1, load uk1, load k_pis
% Caudales = CauRMa1; Periodo= 1; Model='b'; Rez=17; kpar=k_pis; xpar=[]; uk=uk1;
% KF_Pronosticado_V1(Caudales,Model,Periodo,uk,Rez,kpar,xpar)
%
%% Modelo b, Periodo 2
% load CauRMa2, load uk2, load k_pis
% Caudales = CauRMa2; Periodo = 2; Model='b'; Rez=17; kpar=k_pis; xpar=[]; uk=uk2;
% KF_Pronosticado_V1(Caudales,Model,Periodo,uk,Rez,kpar,xpar)
%
%% Modelo b, Periodo 3
% load CauRMa3, load uk3, load k_pis
% Caudales = CauRMa3; Periodo = 3; Model='b'; Rez=18; kpar=k_pis; xpar=[]; uk=uk3;
% KF_Pronosticado_V1(Caudales,Model,Periodo,uk,Rez,kpar,xpar)
```

```
%  
%% Modelo b, Periodo 4  
% load CauRMa4, load uk4, load k_pis  
% Caudales = CauRMa4; Periodo = 4; Model='b'; Rez=19; kpar=k_pis; xpar=[]; uk=uk4;  
% KF_Pronosticado_V1(Caudales,Model,Periodo,uk,Rez,kpar,xpar)  
%  
%% Modelo b, Periodo 5  
% load CauRMa5, load uk5, load k_pis  
% Caudales = CauRMa5; Periodo = 5; Model='b'; Rez=18; kpar=k_pis; xpar=[]; uk=uk5;  
% KF_Pronosticado_V1(Caudales,Model,Periodo,uk,Rez,kpar,xpar)  
%  
%%  
%% Modelo c, Periodo 1  
% load CauRMa1, load uk1, load k_mus, load x_mus  
% Caudales = CauRMa1; Periodo = 1; Model='c'; Rez=17; kpar=k_pis; xpar=x_mus;  
uk=uk1;  
% KF_Pronosticado_V1(Caudales,Model,Periodo,uk,Rez,kpar,xpar)  
  
%% Modelo c, Periodo 2  
% load CauRMa2, load uk2, load k_mus, load x_mus  
% Caudales = CauRMa2; Periodo = 2; Model='c'; Rez=17; kpar=k_mus; xpar=x_mus;  
uk=uk2;  
% KF_Pronosticado_V1(Caudales,Model,Periodo,uk,Rez,kpar,xpar)  
%  
%% Modelo c, Periodo 3  
% load CauRMa3, load uk3, load k_mus, load x_mus  
% Caudales = CauRMa3; Periodo = 3; Model='c'; Rez=18; kpar=k_pis; xpar=x_mus;  
uk=uk3;  
% KF_Pronosticado_V1(Caudales,Model,Periodo,uk,Rez,kpar,xpar)  
%  
%% Modelo c, Periodo 4  
% load CauRMa4, load uk4, load k_mus, load x_mus
```

```
% Caudales = CauRMa4; Periodo = 4; Model='c'; Rez=19; kpar=k_pis; xpar=x_mus;
uk=uk4;
% KF_Pronosticado_V1(Caudales,Model,Periodo,uk,Rez,kpar,xpar)
%
%% Modelo c, Periodo 5
% load CauRMa5, load uk5, load k_mus, load x_mus
% Caudales = CauRMa5; Periodo = 5; Model='c'; Rez=18; kpar=k_pis; xpar=x_mus;
uk=uk5;
% KF_Pronosticado_V1(Caudales,Model,Periodo,uk,Rez,kpar,xpar)
```

**NOMBRE DEL ARCHIVO DE MATLAB: diferenciasfin.**

%% Tránsito Agregado de Crecientes. Tránsito Hidrológico en Ríos  
% Método de Diferencias Finitas con Tributarios:  $dS/dt=I-Q$  con  $S=kQ$

%% Variables

%I: Hidrógrafa de entrada (Estación aguas arriba). [Ndat x 1]

%Qtrib: Hidrógrafas de caudales tributarios. [Ndat x Ntri]

%k: Coeficientes de almacenamiento del modelo. [Nemb x 1]

%dt: Intervalo de tiempo considerado.

%% -----

function [QSE] = diferenciasfin(I,Qtrib,k,dt)

% Espacio en Memoria y matrices -----

Ndat=length(I); %Número de Datos

Nemb=size(Qtrib,2); %Número de embalses

Uk=zeros(Nemb,1);

QSE=zeros(Nemb,Ndat);

k=k(1:Nemb);

A=matrizA\_df(k,dt); %Subrutina de Matriz A

B=matrizB\_df(k,dt); %Subrutina de Matriz B

% Condiciones Iniciales -----

QSE(1,1)=I(1)+Qtrib(1,1);

if Nemb>1

for i=1:Nemb-1

QSE(i+1,1)=QSE(i,1)+Qtrib(1,i+1);

end

else

end

% Tránsito de la creciente -----

```
for i=1:Ndat-1
    for j=1:Nemb
        if j==1
            Uk(j,1)=(i+1)+Qtrib(i+1,1);
        else
            Uk(j,1)=Qtrib(i+1,j);
        end
    end
    Xk=QSE(:,i);
    QSE(:,i+1)=(A*Xk)+(B*Uk);
end

QSE=QSE';

End
```

## Bibliografía

Ayuso Muñoz, José Luis. Circulación de flujos métodos de cálculo usuales en el diseño de canales y embalses en cuencas pequeñas. Ciudad Córdoba, España. 1990, 110 p. Monografía 179, servicio de publicaciones, Universidad de Córdoba. Facultad de Ingeniería. Departamento de Ingeniería Rural.

Bras Rafael L. and Rodríguez - Iturbe Ignacio, (1993). Random functions and Hydrology. Dover Publications, Inc.

Moreno Cadavid Julián y Enrique Salazar, José 2008. Generación de series sintéticas de caudales usando un modelo Matalas con medias condicionadas. Artículo presentado en la revista Avances en Recursos Hidráulicos, núm.17, mayo, 2008, pp. 17-24.

Chatfield Christopher 1989, The Analysis of time series an introduction, Chapman & Hall, Fourth edition, Scholl of mathematical sciences university of Bath.

Chi – Tsong Chen. Linear System Theory and Design. The Oxford series in electrical and computer engineering, Oxford University press, 1999 – Third Edition. 334 p.

Chow, Ven Te; Maidment, David y Mays, Larry. Hidrología aplicada. Bogotá: Mc-Graw Hill. 1994. 584 p.

Gabel Robert A. y Roberts Richard A., 1975. Señales y sistemas lineales. Editorial Limusa. 432 p.

Gardner William A., 1986. Introduction to random process with applications to signals and systems. Macmillan Publishing Company, Inc. University of California, Davis. 427-p.

Grossman Stanley I., 1996. Algebra lineal, quinta edición. México. Mc-Graw Hill. 634 p.

Imperial College of Science Technology and Medicine. User manual Monte-Carlo Analysis Tool (MCAT-V2.0). London, 2000. 25 p.

Kalman, R.E.,(1960). A New Approach to Linear Filtering and Predictions Problems, Research Institute for Advanced Study, Baltimore Md. Journal of Basic Engineering, 82 (series D): P. 35-45 ASME.

KALMAN, R y R. BUCY. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. Journal of Basic Engineering. March, 1961.

Konstantine P. Georgakakos and Rafael L. Bras, (June 1982). Real-Time, Statistically Linearized, Adaptive Flood Routing. Paper of Water Resources Research, Vol. 18, 3, Pages 513 – 524.

Meyer Carl D, 2000. Matrix Analysis and applied linear algebra. Edition: SIAM (Society for industrial and applied mathematics Philadelphia), North Carolina State University Raleigh. 705-p.

Ming Jin and Danny L. Fread (1993). A Kalman Filter Enhanced – Real Time Dynamic Flood Routing Model. Paper Hydrologic Research Laboratory and National Weather Service, congress of international association for Hydraulic Research. Tokyo Japón pp 265-272

Mohinder S. Grewal and Angus P, 2001. Andrews. Kalman filtering: theory and practice using Matlab, second edition. Jhon Willey & Sons, Inc. California State University at Fullerton and Rockwell Science Center. 395-p.

Nathabandu T. Kottegoda and Renzo Rosso, 1997, *Statistics, probability, and reliability for civil and environmental engineers*, Mc Graw Hill. Department of Hydraulic, environmental and surveying engineering polytechnic of Milan, Italy.

Pascual Alejandro, 2006. *EKF y UKF: dos extensiones del Filtro de Kalman para sistemas no lineales aplicados al control de un péndulo invertido*. Monografía para el curso Tratamiento Estadístico de señales. Instituto de Ingeniería Eléctrica – Facultad de Ingeniería –UDELAR.

Ponce Víctor Miguel, 1989. *Engineering Hydrology Principles and Practices*, Prentice-Hall, Inc. San Diego State University, California E.E.U.U. 628 p.

Rosas Jorge y Obregón Neira Nelson, 2005. *Adaptación de la tecnología del filtro Kalman para la predicción de precipitación puntual en Colombia*. Tesis de Maestría en Recursos Hidráulicos, Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá. 67 p.