EXISTENCIA DE SOLUCIONES NO TRIVIALES PARA PROBLEMAS DE DIRICHLET NO LINEALES

por

Mauricio Alexander Barrera Ceballos

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar al Título de

Magister en Matemáticas

Director: Jorge Iván Cossio Betancur

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Diciembre 2010

Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por COLCIENCIAS,
Contrato No. 574-2009, Código 111848925101.

Resumen

El objetivo de este trabajo es demostrar la existencia de soluciones débiles para dos problemas elípticos no lineales usando la teoría de puntos críticos. En el Capítulo 1 se estudia el Lema de Deformación, algunas propiedades del grado de Brouwer y se presentan algunas propiedades de los espacios de Sobolev. En el Capítulo 2 se estudia el Teorema de Punto de Silla y una Generalización del Teorema del Paso de la Montaña. En el Capítulo 3 se usan dichos teoremas para probar la existencia de soluciones débiles para problemas elípticos no lineales.

Contenido

Agradecimientos

Quiero agradecer de manera especial y sincera al profesor Jorge Cossio por aceptarme para realizar esta tesis de maestría bajo su dirección. Su apoyo en mi trabajo y su capacidad para guiar mis ideas ha sido un aporte invaluable, no solamente en el desarrollo de esta tesis, sino también en mi formación como profesional.
Agradezco inmensamente a mis padres, Luz Dary y Gonzalo, y a mi tía Luz Nelly Ceballos. Sin su apoyo, colaboración e inspiración habría sido imposible llevar a cabo este trabajo.

Introducción

Una de las principales herramientas empleadas para estudiar la existencia de soluciones de problemas elípticos no lineales es la teoría de puntos críticos. Esta teoría identifica una clase importante de problemas no lineales que pueden ser escritos en la forma

$$I'(u) = 0,$$

donde u pertenece a un espacio de Banach E adecuado e I' es la derivada de Fréchet de un cierto funcional $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$. La ventaja de esta formulación es la de poder hallar las soluciones del problema no lineal como puntos críticos de tipo *minimax* del funcional I, que en ciertas circunstancias pueden ser más fáciles de encontrar.

Este trabajo está dividido en tres capítulos. El Capítulo 1 contiene tres secciones. En la primera sección presentamos una herramienta fundamental conocida como el Lema de Deformación, que juega un papel importante en todos los resultados abstractos de tipo *minimax*. En la segunda sección presentamos la definición del grado de Brouwer y algunas de sus propiedades. Finalmente, en la tercera sección se resumen algunos resultados de Análisis tales como los Teoremas de Encaje de Sobolev y la desigualdad de Poincaré, entre otros. La prueba de estos resultados aparece en los textos que se citan como referencia. Con la ayuda de lo hecho en la primera y segunda sección se demostrará en el Capítulo 2 el Teorema de Punto de Silla y la Generalización del Teorema del Paso de la Montaña; mientras lo hecho en la tercera sección, se utilizará en la prueba de los teoremas centrales del Capítulo 3.

En el Capítulo 2 presentamos los resultados que nos permiten caracterizar en el Capítulo 3 las soluciones de un problema elíptico no lineal como puntos críticos de tipo *minimax* de un cierto funcional I definido en un espacio de Banach apropiado E. Los resultado de tipo *minimax* que estudiaremos son el Teorema de Punto de Silla y una Generalización del Teorema del Paso de la Montaña. Ambos resultados fueron publicados por P. Rabinowitz en [12]. Estos resultados involucran la condición de Palais-Smale, que aparece repetidamente en la teoría de puntos críticos y que afirma una cierta *compacidad* sobre el funcional I. A continuación se describen estos resultados de forma precisa.

Teorema. (Teorema de Punto de Silla) Sea E un espacio de Banach real. Sean X e Y subespacios cerrados tales que $E = X \oplus Y$ y $0 < \dim X < \infty$. Sea $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ un funcional que satisface la condición de Palais-Smale. Supongamos que
(I_1) Existen constantes $\alpha \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ tales que $I|_{\partial D_r(0) \cap X} \leq \alpha$, y
(I_2) Existe una constante $\beta > \alpha$ tal que $I|_Y \geq \beta$.

Entonces I posee un valor crítico $c \geq \beta$, que se caracteriza como

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{x \in \overline{D_r(0)} \cap X} I(h(x)),$$

donde $\Gamma = \Big\{ h \in C(\overline{D_r(0)} \cap X, E) : h = Id \text{ en } \partial D_r(0) \cap X \Big\}$ y $D_r(0) = \{x \in E : \|x\|_E < r\}$.

Teorema. (Generalización del Teorema del Paso de la Montaña) Sea E un espacio de Banach real. Sean X e Y subespacios cerrados tales que $E = X \oplus Y$ y $0 < \dim X < \infty$. Sea $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ un funcional que satisface la condición de Palais-Smale. Supongamos que
(I_1) Existen constantes positivas α y ρ tales que $I|_{\partial D_\rho(0) \cap Y} \geq \alpha$ y
(I_2) Existen $e \in \partial D_1(0) \cap Y$ y $R > \rho$ tal que si $Q \equiv (\overline{D_R(0)} \cap X) \oplus \{re : 0 < r < R\}$ entonces $I|_{\partial Q} \leq 0$.
Entonces I posee un valor crítico $c \geq \alpha$, que se caracteriza como

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{x \in \overline{Q}} I(h(x)),$$

donde $\Gamma = \big\{ h \in C(\overline{Q}, E) : h = Id \text{ sobre } \partial Q \big\}$.

En el Capítulo 3 se ilustra la importancia del Teorema de Punto de Silla y la Generalización del Teorema del Paso de la Montaña mediante sus aplicaciones en las demostraciones de la existencia de soluciones débiles no triviales para los problemas elípticos no lineales

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda a(x) u + p(x,u) = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

y

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, es un dominio acotado con frontera suave, Δ es el operador de Laplace, $\lambda \in \mathbb{R}$ y a es una función positiva y Lipschitz en $\overline{\Omega}$. Más adelante se precisan las hipótesis de las funciones p y f.
Este Capítulo estará dividido en dos secciones. En la primera sección se presenta la demostración de la existencia de una solución débil no trivial del problema *(1)* en el caso resonante, es decir, si $\lambda = \lambda_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$; donde $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ...$ es la sucesión de valores propios del problema

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda a(x) u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Más especificamente se demuestra el siguiente teorema con la ayuda del Teorema de Punto de Silla.

Sea p una función que satisface las siguientes condiciones:
(p_1) $p \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(p_2) Existe una constante $a_1 \geq 0$ tal que

$$|p(x,\xi)| \leq a_1 \quad \text{para todo } x \in \overline{\Omega} \text{ y } \xi \in \mathbb{R}.$$

(p_3) $P(x,\xi) := \int_0^\xi p(x,t)dt \to \infty$ cuando $|\xi| \to \infty$, uniformemente en x.

Teorema. Si $\lambda = \lambda_k < \lambda_{k+1}$ y p es una función que satisface las hipótesis *(p_1)*, *(p_2)* y *(p_3)* entonces el problema *(1)* tiene una solución débil no trivial.
Este teorema fue demostrado por P. Rabinowitz en [12].

De manera similar en la segunda sección se demuestra con la ayuda de la Generalización del Teorema del Paso de la Montaña la existencia de una solución débil no trivial del problema *(2)* en el caso asintóticamente lineal, es decir, cuando $f'(+\infty),\ f'(-\infty) \in \mathbb{R}$. Más especificamente se demuestra el siguiente teorema. Sea $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ...$ la sucesión de valores propios del operador $-\Delta$ en Ω con condición de Dirichlet cero en la frontera y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, diferenciable en el origen y que satisface las siguientes condiciones:
(i) $f(0) = 0$.
(ii) $\lambda_{k-1} \leq f'(0) < \lambda_k$ para $k \geq 2$.
(iii) $\lambda_l < f'(+\infty) \leq \lambda_{l+1}$ y $\lambda_l < f'(-\infty) \leq \lambda_{l+1}$ para $l \geq k$, donde $f'(+\infty) := \lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{f(s)}{s}$ y $f'(-\infty) := \lim\limits_{s\to-\infty} \dfrac{f(s)}{s}$. Se excluye el caso $f'(+\infty) = f'(-\infty) = \lambda_{l+1}$.
(iv) $(f(s) - \lambda_{k-1}s)s \geq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Teorema. Si f es una función que satisface las hipótesis *(i)*, *(ii)*, *(iii)* y *(iv)* entonces el problema *(2)* tiene una solución débil no trivial.
Este teorema fue demostrado por P. Hess en [6].

Capítulo 1

PRELIMINARES

Este capítulo está dividido en tres secciones. En la primera sección se presenta el Lema de Deformación y, como una consecuencia de éste, el Teorema del Paso de la Montaña. Este lema juega un papel importante en todos los resultados abstractos de tipo *minimax*. En la segunda sección presentamos la definición y algunas de las propiedades del grado de Brouwer. Finalmente en la tercera sección se resumen algunos resultados de Análisis tales como los Teoremas de Encaje de Sobolev y la desigualdad de Poincaré, entre otros. Lo que se presenta en la primera y segunda sección se utilizará en las demostraciones del Teorema de Punto de Silla y en la generalización del Teorema del Paso de la Montaña en el Capítulo 2, mientras lo presentado en la tercera sección se utilizará en las demostraciones de los resultados centrales del Capítulo 3.

1.1 EL LEMA DE DEFORMACIÓN

En esta sección presentaremos una herramienta, llamada el Lema de Deformación, que será fundamental en las pruebas del Teorema de Punto de Silla y una Generalización del Teorema del Paso de la Montaña en el Capítulo 2.

Definición 1.1 *Sean E un espacio de Banach real y U un subconjunto abierto de E. Un funcional $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es Fréchet diferenciable en $u \in U$, si existe un operador lineal continuo $I'(u) : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumpla: para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\left|I(u+h) - I(u) - I'(u)h\right| \leq \epsilon \left\|h\right\|_E \quad \textit{siempre que} \quad \left\|h\right\|_E \leq \delta.$$

$I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 en U, denotado $I \in C^1(U, \mathbb{R})$, si I es Fréchet diferenciable en cada $u \in U$ y la función $u \longmapsto I'(u)$ es continua de U en $L(E, \mathbb{R})$.

Definición 1.2 *Si I es Fréchet diferenciable en $u \in E$, u es un punto crítico de I si $I'(u) = 0$, es decir, si $I'(u)h = 0$ para todo $h \in E$. Para $c, s \in \mathbb{R}$, sean $K_c = \{u \in E : I(u) = c \;\; e \;\; I'(u) = 0\}$ y $A_s = \{u \in E : I(u) \leq s\}$. Si $K_c \neq \phi$, se dice que c es un valor crítico de I.*

Definición 1.3 *Sean E un espacio de Banach real, $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Se dice que I satisface la condición de Palais-Smale (en adelante se denotará por (PS)), si cualquier sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en E, para la cual $\{I(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y $\lim\limits_{n\to\infty} I'(u_n) = 0$, admite una subsucesión convergente.*

La condición de Palais-Smale aparece repetidamente en la teoría de puntos críticos y afirma una cierta compacidad sobre el funcional I. Es decir, si $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ y satisface la condición de Palais-Smale entonces K_c es compacto.

Lema 1.1 ***(Lema de Deformación)*** *Sea E un espacio de Banach real. Supongamos que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ y satisface la condición (PS). Si $c \in \mathbb{R}$ y $\bar{\epsilon} > 0$ entonces existen $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ y $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tales que:*

(i) *$\eta(0, u) = u$ para todo $u \in E$.*
(ii) *$\eta(t, u) = u$ para todo $t \in [0,1]$, si $I(u) \notin [c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}]$.*
(iii) *Para todo $t \in [0,1]$, $\eta(t, \cdot) : E \longrightarrow E$ es un homeomorfismo.*
(iv) *Si $K_c = \phi$ entonces $\eta(1, A_{c+\epsilon}) \subset A_{c-\epsilon}$.*

Prueba. Véase [12] (Apéndice A). ■

Con la ayuda del Lema de Deformación se puede demostrar el siguiente resultado de tipo *minimax*, llamado el Teorema del Paso de la Montaña. Este resultado permite deducir la existencia de un punto crítico de un funcional. Esta técnica fue demostrada por A. Ambrosetti y P. Rabinowitz en [2]. Además, en el Capítulo 2 presentaremos una generalización de este resultado (véase Teorema 2.2).

Teorema 1.1 ***(Teorema del Paso de la Montaña)*** *Sean E un espacio de Banach real e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ un funcional que satisface la condición de Palais-Smale. Supongamos que $I(0) = 0$,*
(I_1) Existen constantes positivas α y ρ tales que $I|_{\partial D_\rho(0)} \geq \alpha$, y
(I_2) Existe $e \in E$ tal que $\|e\|_E > \rho$ y $I(e) \leq 0$.
Entonces I posee un valor crítico $c \geq \alpha$, que se caracteriza como

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(h(x)),$$

donde $\Gamma = \{h \in C([0,1], E) : h(0) = 0 \text{ y } h(1) = e\}$.

Prueba. Véase [12], páginas 7 y 8. ■

1.2 EL GRADO DE BROUWER

En esta sección presentaremos un bosquejo de cómo se define el grado de Brouwer. Comenzaremos definiendo el grado de Brouwer para valores regulares y funciones de clase $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado. Después, definiremos el grado de Brouwer para funciones continuas en $\overline{\Omega}$ y en puntos que no sean valores regulares; para terminar presentando algunas propiedades del grado de Brouwer que serán fundamentales en las pruebas del Teorema de Punto de Silla y la Generalización del Teorema del Paso de la Montaña en el Capítulo 2.

Definición 1.4 *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) := C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Si $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ y $S_f(\Omega) = \{x \in \Omega / J_f(x) := \det f'(x) = 0\}$, entonces diremos que $y \in \mathbb{R}^n$ es un valor regular de f, si $f^{-1}(y) \cap S_f(\Omega) = \phi$. Cuando $y \in \mathbb{R}^n$ no es un valor regular, diremos que es un valor singular.*

Obsérvese que si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado, $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ y $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ es un valor regular de f, entonces $f^{-1}(y)$ es un conjunto finito.

Definición 1.5 *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Si $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ es un valor regular de f, definimos el grado de Brouwer de la función como*

$$d(f, \Omega, y) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in f^{-1}(y)} sgn(J_f(x)) & si\ f^{-1}(y) \neq \phi, \\ \qquad 0 & si\ f^{-1}(y) = \phi, \end{cases}$$

donde

$$sgn(x) := \begin{cases} 1 & si\ x > 0, \\ -1 & si\ x < 0. \end{cases}$$

Nótese que por la observación anterior el grado está bien definido.

Proposición 1.1 *Sean $f \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $y \notin f(\partial\Omega)$ y $\rho_0 = d(y, f(\partial\Omega)) > 0$. Si $y_1, y_2 \in B(y, \rho_0)$ son valores regulares entonces*

$$d(f, \Omega, y_1) = d(f, \Omega, y_2).$$

Prueba. Véase [8], página 40. ■

Ahora definimos el grado de Brouwer para un valor singular.

Definición 1.6 *Sean $f \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $y \notin f(\partial\Omega)$ y $\rho_0 = d(y, f(\partial\Omega)) > 0$. El grado de f en Ω con respecto a y se define como*

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, y_1),$$

donde $y_1 \in B(y, \rho_0)$ es un valor regular.

Nótese que por la Proposición 1.1 y el hecho de que el conjunto de valores singulares de f, es un conjunto de medida cero, entonces la definición anterior no depende la escogencia del valor regular.

A continuación definiremos el grado de Brouwer para funciones continuas en $\overline{\Omega}$.

Definición 1.7 *Sean $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $y \notin f(\partial\Omega)$ y $\rho_0 = d(y, f(\partial\Omega)) > 0$. El grado de f en Ω con respecto a y se define como*

$$d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y),$$

donde $g \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ es tal que $\|f - g\|_\infty < \dfrac{\rho_0}{2}$.

Se puede demostrar que esta definición es independiente de la escogencia de la función g (Véase [8]*, página 44).*

Presentamos ahora tres propiedades del grado de Brouwer que serán fundamentales en la prueba del Teorema de Punto de Silla y la Generalización del Teorema del Paso de la Montaña en el Capítulo 2.

Teorema 1.2 ***(Propiedades del grado de Brouwer)*** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado.*

(a) Sea $Id : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, la función identidad. Entonces

$$d(Id, \Omega, y) := \begin{cases} 1 & si\ y \in \Omega, \\ 0 & si\ y \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

(b) Sean $f, g \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tales que $f = g$ en $\partial\Omega$. Si $y \notin f(\partial\Omega)$ entonces

$$d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y).$$

(c) Sean $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ y $y \notin f(\partial\Omega)$. Si $d(f, \Omega, y) \neq 0$ entonces existe $x \in \Omega$ tal que $f(x) = y$.

Prueba. Véase [8], páginas 47 y 48. ■

La noción de grado de Brouwer puede ser generalizada a espacios de dimensión infinita. Tal generalización es conocida como el grado de Leray-Schauder.

1.3 TEOREMAS DE ENCAJES DE SOBOLEV

En esta sección se enuncian algunos resultados técnicos que se requieren para probar los resultados principales, en la primera y segunda sección del Capítulo 3. Las demostraciones de estos resultados aparecen en los textos que se citan como referencia.

Teorema 1.3 ***(Encajes de Sobolev).*** *La inclusión*

$$H_0^1(\Omega) \subset L^s(\Omega), \; donde \; 1 \leq s \leq \frac{2n}{n-2},$$

es continua.
Además, en $E := H_0^1(\Omega)$ la norma de $H^1(\Omega)$ es equivalente a la norma definida, para $u \in E$, por

$$\|u\|_E := \|\nabla u\|_2 = (\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx)^{1/2}. \qquad (1)$$

Más aún, para cada $u \in E$ se tiene la ***desigualdad de Poincaré***

$$\int_\Omega u^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx.$$

Prueba. Véase [3], páginas 168, 173 y 174. ■

En virtud del Teorema 1.3, a lo largo de este trabajo, se supondrá que $E := H_0^1(\Omega)$ está dotado de la norma dada por *(1)*.

Teorema 1.4 ***(Rellich-Kondrachov)*** *La inclusión*

$$H_0^1(\Omega) \subset L^s(\Omega), \;\; para \; todo \; s \in \left[1, \frac{2n}{n-2}\right),$$

es compacta.

Prueba. Véase [3], páginas 169 y 173. ■

Teorema 1.5 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera suave. Sea p una función que satisface las siguientes condiciones:*

(p_1) $p \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, y

(p_2) Existen $a_1 \geq 0$ y $a_2 \geq 0$ tales que

$$|p(x,\xi)| \leq a_1 |\xi|^s + a_2 \;\; para \; todo \; x \in \overline{\Omega} \; y \; \xi \in \mathbb{R},$$

donde $0 \leq s \leq \dfrac{n+2}{n-2}$. Si el funcional $I : E \to \mathbb{R}$ se define por

$$I(u) := \int_\Omega (\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - P(x,u)) dx \;\; para \; cada \; u \in E,$$

donde $P(x,\xi) := \int_0^\xi p(x,t)dt$, *entonces* $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ *y además,*

$$I'(u)v = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - p(x,u)v)dx \quad \textit{para todo } u, v \in E.$$

Además, si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión acotada en* E *tal que* $I'(u_n) \to 0$, *cuando* $n \to \infty$, *entonces* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tiene una subsucesión convergente.*

Prueba. Véase [12], Apéndice B. ■

Capítulo 2

EL TEOREMA DE PUNTO DE SILLA Y UNA GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DEL PASO DE LA MONTAÑA

En este capítulo se enuncian y demuestran el Teorema de Punto de Silla y una Generalización del Teorema del Paso de la Montaña. Ambos resultados fueron probados por P. Rabinowitz (véase [12]) y son herramientas que se utilizan para estudiar la existencia de soluciones de problemas elípticos no lineales. Estos teoremas se utilizarán en las aplicaciones a ecuaciones elípticas no lineales que haremos en el Capítulo 3.

Utilizando el Lema de Deformación y la teoría del grado de Brouwer, a continuación demostraremos el Teorema de Punto de Silla, el cual es un resultado de tipo *minimax* que permite deducir la existencia de un punto crítico de un funcional. Este resultado fue demostrado en [12] por P. Rabinowitz.

A lo largo de este trabajo denotaremos la bola abierta de centro 0 y radio r en un espacio de Banach E por $D_r(0) = \{x \in E : \|x\|_E < r\}$.

Teorema 2.1 ***(Teorema de Punto de Silla)*** *Sea E un espacio de Banach real. Sean X e Y subespacios cerrados tales que $E = X \oplus Y$ y $0 < \dim X < \infty$. Sea $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ un funcional que satisface la condición de Palais-Smale. Supongamos que*
(I_1) Existen constantes $\alpha \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ tales que $I|_{\partial D_r(0) \cap X} \leq \alpha$, y
(I_2) Existe una constante $\beta > \alpha$ tal que $I|_Y \geq \beta$.
Entonces I posee un valor crítico $c \geq \beta$, que se caracteriza como

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{x \in \overline{D_r(0)} \cap X} I(h(x)), \tag{1}$$

donde $\Gamma = \Big\{ h \in C(\overline{D_r(0)} \cap X, E) : h = Id \text{ en } \partial D_r(0) \cap X \Big\}$.

Prueba. Inicialmente observamos que para cada $h \in \Gamma$, $\max\limits_{x \in \overline{D_r(0)} \cap X} I(h(x))$ existe porque $I \circ h$ es una función escalar continua definida en $\overline{D_r(0)} \cap X$, que es un conjunto compacto. Por lo tanto $c < \infty$.

Demostremos que $c \geq \beta$. En efecto, dado que $E = X \oplus Y$, sea $P : E \to X$ la proyección de E sobre X, definida por $Pu = x$; donde $u = x + y$ con $x \in X$ e $y \in Y$. Además, si $h \in \Gamma$ y puesto que P es una función continua entonces $P \circ h \in C(\overline{D_r(0)} \cap X, X)$; y para $x \in \partial D_r(0) \cap X$, $P(h(x)) = Px = x$. Es decir, $P \circ h = Id$ en $\partial D_r(0) \cap X$.

Supóngase que $\dim X = n$, por lo tanto X se puede identificar con $\mathbb{R}^n$ y así $d(Ph, D_r(0) \cap X, 0)$ está bien definido. Por las propiedades *(a)* y *(b)* del Teorema 1.2, obtenemos que

$$d(Ph, D_r(0) \cap X, 0) = d(Id, D_r(0) \cap X, 0) = 1.$$

Como $d(Ph, D_r(0) \cap X, 0) \neq 0$, entonces por la propiedad *(c)* del Teorema 1.2, se sigue que existe $x \in D_r(0) \cap X$ tal que $P(h(x)) = 0$. Por lo tanto, para cada $h \in \Gamma$, existe $x = x(h) \in D_r(0) \cap X$ tal que

$$h(x) = (Id - P)h(x) \in Y.$$

De la hipótesis *(I_2)*, se sigue que

$$\max_{z \in \overline{D_r(0)} \cap X} I(h(z)) \geq I(h(x)) \geq \beta.$$

Dado que $h \in \Gamma$ era arbitraria, la anterior desigualdad implica que $c \geq \beta$.

A continuación probaremos que c es un valor crítico del funcional I. Razonando por el absurdo, supongamos que c no es un valor crítico de I, entonces $K_c = \phi$. Sea $\overline{\epsilon} = \dfrac{1}{2}(\beta - \alpha) > 0$. Por el Lema 1.1 (Lema de Deformación), existen $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$ y una función $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ que satisface las propiedades *(i), (ii), (iii)* y *(iv)* del lema. Puesto que $c < c + \epsilon$ y de la definición de c, existe $h \in \Gamma$ tal que

$$\max_{x \in \overline{D_r(0)} \cap X} I(h(x)) < c + \epsilon. \tag{2}$$

Definamos $g(x) = \eta(1, h(x))$, para todo $x \in \overline{D_r(0)} \cap X$. Observamos que $g \in C(\overline{D_r(0)} \cap X, E)$, ya que $\eta(1, \cdot)$ es un homeomorfismo (por la propiedad *(iii)* del Lema 1.1) y $h \in C(\overline{D_r(0)} \cap X, E)$. Además, dado que $c \geq \beta$ y por la hipótesis *(I_1)*, si $x \in \partial D_r(0) \cap X$ entonces

$$I(h(x)) = I(x) \leq \alpha < \alpha + \overline{\epsilon} \leq \beta - \overline{\epsilon} \leq c - \overline{\epsilon}.$$

Es decir, $I(h(x)) \notin [c - \overline{\epsilon}, c + \overline{\epsilon}]$ y por la propiedad *(ii)* del Lema 1.1, $g(x) = \eta(1, h(x)) = h(x) = x$. Por lo tanto $g \in \Gamma$.

Por *(1)* se tiene que

$$c \leq \max_{x \in \overline{D_r(0)} \cap X} I(g(x)).$$

Por *(2)*, $h(\overline{D_r(0)} \cap X) \subset A_{c+\epsilon}$ y por la propiedad *(iv)* del Lema 1.1, $g(\overline{D_r(0)} \cap X) \subset A_{c-\epsilon}$. Así

$$\max_{x \in \overline{D_r(0)} \cap X} I(g(x)) \leq c - \epsilon.$$

Luego, $c \leq c - \epsilon$, que es una contradicción. Por lo tanto c es un valor crítico de I. ■

Nuevamente por el Lema de Deformación y la teoría del grado de Brouwer, a continuación demostraremos otro resultado de tipo *minimax*, que permite deducir la existencia de un punto crítico de un funcional. Este resultado fue demostrado en [12] por P. Rabinowitz.

Teorema 2.2 ***(Generalización del Teorema del Paso de la Montaña)*** *Sea E un espacio de Banach real. Sean X e Y subespacios cerrados tales que $E = X \oplus Y$ y $0 < \dim X < \infty$. Sea $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ un funcional que satisface la condición de Palais-Smale. Supongamos que*
(I_1) Existen constantes positivas α y ρ tales que $I|_{\partial D_\rho(0) \cap Y} \geq \alpha$ y
(I_2) Existen $e \in \partial D_1(0) \cap Y$ y $R > \rho$ tal que si $Q \equiv (\overline{D_R(0)} \cap X) \oplus \{re : 0 < r < R\}$ entonces $I|_{\partial Q} \leq 0$.
Entonces I posee un valor crítico $c \geq \alpha$, que se caracteriza como

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{x \in \overline{Q}} I(h(x)), \qquad (1)$$

donde $\Gamma = \left\{h \in C(\overline{Q}, E) : h = Id \text{ sobre } \partial Q\right\}$.

Prueba. Inicialmente para cada $h \in \Gamma$, observamos que $\max_{x \in \overline{Q}} I(h(x))$ existe porque $I \circ h$ es una función escalar continua definida en $\overline{Q}$, que es un conjunto compacto. Por lo tanto $c < \infty$. Con el fin de probar que $c \geq \alpha$ demostremos la siguiente afirmación.

Afirmación. Si $h \in \Gamma$ entonces

$$h(Q) \cap \partial D_\rho(0) \cap Y \neq \phi. \qquad (2)$$

Prueba. Dado que $E = X \oplus Y$, sea $P : E \to X$ la proyección de E sobre X, definida por $Pu = x$; donde $u = x + y$ con $x \in X$ e $y \in Y$. Demostrar *(2)* es equivalente a demostrar que existe $u \in Q$ tal que

$$\begin{cases} P(h(u)) = 0 \\ \|(Id - P)h(u)\|_E = \rho. \end{cases}$$

Sea $u \in \overline{Q}$, entonces $u = x + te$, con $x \in \overline{D_R(0)} \cap X$ y $0 \leq t \leq R$. Definamos $\Phi(t, x) = (\|(Id - P)h(x + te)\|_E, Ph(x + te))$. Observamos que $\Phi \in C(\mathbb{R} \times X, \mathbb{R} \times X)$ (nótese que P y

$Id - P$ son proyecciones y por tanto son continuas). Ahora, como $h|_{\partial Q} = Id$ entonces

$$\Phi(t,x) = (\|te\|_E, x) = (t,x), \text{ para } u \in \partial Q.$$

Es decir, $\Phi = Id$ sobre ∂Q. En particular $\Phi(t,x) \neq (\rho, 0)$ para $u = x + te \in \partial Q$.
Puesto que $\mathbb{R} \times X$ se puede identificar con $\mathbb{R}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $d(\Phi, Q, (\rho, 0))$ está bien definido. Por las propiedades *(a)* y *(b)* del Teorema 1.2, obtenemos que

$$d(\Phi, Q, (\rho, 0)) = d(Id, Q, (\rho, 0)) = 1.$$

Como $d(\Phi, Q, (\rho, 0)) \neq 0$, entonces por la propiedad *(c)* del Teorema 1.2, se sigue que existe $u \in Q$ tal que $\Phi(u) = (\rho, 0)$, es decir, $P(h(u)) = 0$ y $\|(Id - P)h(u)\|_E = \rho$. De esto se sigue la afirmación. $\square$

Demostremos ahora que $c \geq \alpha$. Sea $h \in \Gamma$. Por la Afirmación anterior existe $u \in h(Q) \cap \partial D_\rho(0) \cap Y$. De la hipótesis *($I_1$)* se sigue que

$$\max_{x \in \overline{Q}} I(h(x)) \geq I(u) \geq \inf_{x \in \partial D_\rho(0) \cap Y} I(x) \geq \alpha.$$

Dado que $h \in \Gamma$ era arbitraria, la anterior desigualdad implica que $c \geq \alpha$.

A continuación demostraremos que c es un valor crítico del funcional I. Razonando por el absurdo, supongamos que c no es un valor crítico de I, entonces $K_c = \phi$. Sea $\bar{\epsilon} = \frac{1}{2}\alpha > 0$. Por el Lema 1.1 (Lema de Deformación), existen $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ y una función $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ que satisface las propiedades *(i), (ii), (iii)* y *(iv)* del lema. Puesto que $c < c + \epsilon$, de la definición de c, existe $h \in \Gamma$ tal que

$$\max_{x \in \overline{Q}} I(h(x)) < c + \epsilon. \tag{3}$$

Definamos $g(u) = \eta(1, h(u))$, para todo $u \in \overline{Q}$. Notamos que $g \in C(\overline{Q}, E)$, ya que $\eta(1, \cdot)$ es un homeomorfismo (por la propiedad *(iii)* del Lema 1.1) y $h \in C(\overline{Q}, E)$. Ahora, por la hipótesis *(I_2)* y como $c \geq \alpha$ entonces para $u \in \partial Q$ se sigue que

$$I(h(u)) = I(u) \leq 0 < \alpha - \bar{\epsilon} \leq c - \bar{\epsilon}.$$

Es decir, $I(h(u)) \notin [c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}]$ y por la propiedad *(ii)* del Lema 1.1, $g(u) = \eta(1, h(u)) = h(u) = u$. Por lo anterior $g \in \Gamma$.
Por *(1)* se tiene que

$$c \leq \max_{x \in \overline{Q}} I(g(x)).$$

Por *(3)*, $h(\overline{Q}) \subset A_{c+\epsilon}$ y por la propiedad *(iv)* del Lema 1.1, $g(\overline{Q}) \subset A_{c-\epsilon}$. Así

$$\max_{x \in \overline{Q}} I(g(x)) \leq c - \epsilon.$$

Luego, $c \leq c - \epsilon$, que es una contradicción. Por lo tanto c es un valor crítico de I. ■

La siguiente proposición se utilizará en una aplicación que haremos del Teorema 2.2 en el Capítulo 3.

Proposición 2.1 *Sea E un espacio de Hilbert real. Sean X e Y subespacios cerrados y ortogonales tales que $E = X \oplus Y$ y $0 < \dim X < \infty$. Sea $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Supongamos que $I|_X \leq 0$ y existen $e \in \partial D_1(0) \cap Y$ y $\overline{R} > \rho$, donde ρ es el de la hipótesis (I_1) del Teorema 2.2, tales que $I(u) \leq 0$ para $u \in X \oplus \mathbb{R}e$ con $\|u\|_E \geq \overline{R}$. Si $R > \overline{R}$ y $Q \equiv (\overline{D_R(0)} \cap X) \oplus \{re : 0 < r < R\}$ entonces $I|_{\partial Q} \leq 0$.*

Prueba. Sea $u = x_1 + te \in \partial Q$. Se presentan los siguientes casos:
(i) Si $t = 0$ entonces $u = x_1$, donde $x_1 \in X$ y $\|x_1\|_E \leq R$, y por tanto como $I|_X \leq 0$ se sigue que $I(u) \leq 0$.
(ii) Si $t = R$ entonces $u = x_1 + Re$, donde $x_1 \in X$ y $\|x_1\|_E \leq R$, luego por el Teorema de Pitágoras $\|u\|_E \geq R > \overline{R}$ y por tanto $I(u) \leq 0$.
(iii) Si $u = x_1 + te$, donde $x_1 \in X$, $\|x_1\|_E = R$ y $0 < t < R$, entonces por el Teorema de Pitágoras $\|u\|_E \geq R > \overline{R}$ y por tanto $I(u) \leq 0$. De esto se sigue la proposición. ■

Capítulo 3

APLICACIONES A PROBLEMAS ELÍPTICOS SEMILINEALES.

En este capítulo se usa el Teorema de Punto de Silla y la Generalización del Teorema del Paso de la Montaña presentados en el Capítulo 2 para probar la existencia de soluciones débiles no triviales para los siguientes problemas

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda a(x)u + p(x,u) = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ es un dominio acotado con frontera suave, Δ es el operador de Laplace, $\lambda \in \mathbb{R}$ y las funciones a, p y f satisfacen ciertas condiciones que serán especificadas más adelante. La demostración del resultado principal de la primera sección utiliza el Teorema de Punto de Silla (Teorema 2.1), mientras que la demostración del resultado principal de la segunda sección utiliza la Generalización del Teorema del Paso de la Montaña (Teorema 2.2).

3.1 UNA APLICACIÓN DEL TEOREMA DE PUNTO DE SILLA

En esta sección se utilizará el Teorema de Punto de Silla para probar la existencia de soluciones débiles para un problema elíptico semilineal.
Consideremos el problema

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda a(x)u + p(x,u) = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Supongamos que a es una función positiva y Lipschitz en $\overline{\Omega}$ y p es una función que satisface las siguientes condiciones:

(p_1) $p \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(p_2) Existe una constante $a_1 \geq 0$ tal que

$$|p(x,\xi)| \leq a_1 \quad \text{para todo } x \in \overline{\Omega} \ \text{ y } \ \xi \in \mathbb{R}.$$

(p_3) $P(x,\xi) := \int_0^\xi p(x,t)dt \to \infty$ cuando $|\xi| \to \infty$, uniformemente en x.

Se denotará por $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...\}$ la sucesión de valores propios y por $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ...\}$ la sucesión de funciones propias del siguiente problema

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda a(x)u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Es conocido que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ...$ y $\lambda_n \to \infty$ si $n \to \infty$ (véase [5], páginas 715-718).

Definición 3.1 *Si $u \in E := H_0^1(\Omega)$ satisface la ecuación*

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - \lambda auv - p(x,u)v)dx = 0 \quad \textit{para toda } v \in E,$$

se dice que u es una solución débil del problema (1).

A continuación presentamos el resultado central de esta sección. Este resultado garantiza la existencia de una solución débil no trivial para el problema *(1)* en el caso resonante, es decir, $\lambda = \lambda_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Este resultado fue demostrado en [12] por P. Rabinowitz.

Teorema 3.1 *Si $\lambda = \lambda_k < \lambda_{k+1}$ y p es una función que satisface las hipótesis (p_1), (p_2) y (p_3) entonces el problema (1) tiene una solución débil no trivial.*

Prueba. Sea $E := H_0^1(\Omega)$. Se define el funcional $I : E \to \mathbb{R}$ por

$$I(u) := \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{\lambda_k}{2}au^2 - P(x,u))dx \quad \text{para cada } u \in E.$$

Demostraremos a continuación que el funcional I satisface las hipótesis del Teorema 2.1. La siguiente afirmación prueba que $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ y proporciona una fórmula para calcular $I'(u)$.

Afirmación 1. El funcional I es de clase $C^1(E,\mathbb{R})$ y además

$$I'(u)v = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - \lambda_k auv - p(x,u)v)dx \quad \text{para todo } u, v \in E.$$

Prueba. Nótese que $I(u) = I_1(u) - I_2(u)$, donde $I_1(u) := \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - P(x,u))dx$ y $I_2(u) := \int_\Omega \frac{\lambda_k}{2}au^2 dx$. Como p cumple las hipótesis *(p_1)* y *(p_2)* (con $s = 0$) del Teorema 1.5, se tiene que $I_1 \in C^1(E,\mathbb{R})$ y

$$I_1'(u)v = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - p(x,u)v)dx \quad \text{para todo } u, v \in E.$$

Probemos que $I_2 \in C^1(E, \mathbb{R})$ y

$$I_2'(u)v = \int_\Omega \lambda_k auvdx \quad \text{para todo } u, v \in E.$$

En efecto, sean $\epsilon > 0$ y $u, v \in E$. Sea $S(u)v := \int_\Omega \lambda_k auvdx$. Obsérvese que

$$|I_2(u+v) - I_2(u) - S(u)v| \leq \frac{\lambda_k}{2} \int_\Omega a\,|v|^2\,dx$$

y como a es una función positiva y Lipschitz en $\overline{\Omega}$, entonces existe $M > 0$ tal que

$$a(x) \leq M \quad \text{para toda } x \in \overline{\Omega}. \tag{2}$$

Por lo tanto

$$|I_2(u+v) - I_2(u) - S(u)v| \leq \frac{\lambda_k M}{2} \int_\Omega |v|^2\,dx.$$

Luego por la desigualdad de Poincaré, se sigue que

$$|I_2(u+v) - I_2(u) - S(u)v| \leq c\,\|v\|_E^2\,.$$

Así, tomando $\delta = \dfrac{\epsilon}{c} > 0$, se tiene que

$$|I_2(u+v) - I_2(u) - S(u)v| \leq \epsilon\,\|v\|_E$$

para todo $\|v\|_E < \delta$.
Claramente $S(u)$ es lineal para cada $u \in E$, y por *(2)*, la desigualdad de Hölder y la desigualdad de Poincaré, se sigue que

$$|S(u)v| \leq c\,\|v\|_E \quad \text{para todo } v \in E.$$

Por tanto $I_2(u)$ es Fréchet diferenciable.
Queda por demostrar que I' es continua. En virtud de *(2)*, la desigualdad de Hölder y la desigualdad de Poincaré se tiene que

$$\left\|I_2'(u) - I_2'(v)\right\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})} \leq c\,\|u-v\|_E \quad \text{para todo } u, v \in E.$$

De lo anterior se sigue la Afirmación 1. $\square$

De la Afirmación 1 es claro que u es una solución débil del Problema *(1)* si y sólo si u es un punto crítico del funcional I. La existencia de un punto crítico de I se obtendrá con la ayuda del Teorema de Punto de Silla (Teorema 2.1).

Sean $X = gen\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_k\}$ y $Y = X^{\perp}$. Por lo tanto $E = X \oplus Y$. Las siguientes afirmaciones permiten demostrar que el funcional I satisface las demás hipótesis del Teorema 2.1.

La siguiente afirmación se utilizará en la demostración de la condición de Palais-Smale y la hipótesis (I_2) del Teorema 2.1.

Afirmación 2.

(a) $\|u\|_E^2 \leq \lambda_{k-1} \int_\Omega au^2dx$ para todo $u \in X^- := gen\{\varphi_j : \lambda_j < \lambda_k\}$.

(b) $\|u\|_E^2 \geq \lambda_{k+1} \int_\Omega au^2dx$ para todo $u \in Y$.

Prueba.

La sucesión de funciones propias $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal para $L^2(\Omega)$ (véase [5], página 718). Además, para cada $j \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$\int_\Omega \nabla\varphi_j \cdot \nabla v dx = \lambda_j \int_\Omega a\varphi_j v dx \quad \text{para todo } v \in E, \tag{3}$$

y en particular

$$\int_\Omega \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_j \; dx = 1 = \lambda_j \int_\Omega a\varphi_j^2 dx. \tag{4}$$

(a) Sea $u \in X^-$, entonces $u = \sum_{j\in J} a_j\varphi_j$, donde $J = \{j : \lambda_j < \lambda_k\}$ es un conjunto finito. Por lo tanto de *(3)* obtenemos que

$$\frac{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \; dx}{\int_\Omega au^2dx} = \frac{\sum_{j\in J} a_j^2 \int_\Omega \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_j \; dx}{\sum_{j\in J} a_j^2 \int_\Omega a\varphi_j^2 dx} = \frac{\sum_{j\in J} a_j^2\lambda_j \int_\Omega a\varphi_j^2 dx}{\sum_{j\in J} a_j^2 \int_\Omega a\varphi_j^2 dx} \leq \lambda_{k-1.}$$

Es decir, $\|u\|_E^2 \leq \lambda_{k-1} \int_\Omega au^2dx$ para todo $u \in X^-$.

(b) Sea $u \in Y$, entonces $u = \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j\varphi_j$. Luego, si $u_N = \sum_{j=k+1}^{N} a_j\varphi_j$ se tiene que $\|u_N - u\|_2 \to 0$, cuando $N \to \infty$. Nuevamente por *(3)* se sigue que

$$\frac{\int_\Omega \nabla u_N \cdot \nabla u_N \, dx}{\int_\Omega a{u_N}^2 dx} = \frac{\sum_{j=k+1}^{N} a_j^2 \int_\Omega \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_j \, dx}{\sum_{j=k+1}^{N} a_j^2 \int_\Omega a\varphi_j^2 dx} = \frac{\sum_{j=k+1}^{N} a_j^2 \lambda_j \int_\Omega a\varphi_j^2 dx}{\sum_{j=k+1}^{N} a_j^2 \int_\Omega a\varphi_j^2 dx} \geq \lambda_{k+1},$$

es decir,

$$\int_\Omega \nabla u_N \cdot \nabla u_N \, dx \geq \lambda_{k+1} \int_\Omega a u_N^2 dx \quad \text{para toda } N \geq k+1. \tag{5}$$

Probemos que $\int_\Omega \nabla u_N \cdot \nabla u_N \, dx \leq \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, dx$ y $\lim\limits_{N\to\infty} \int_\Omega a u_N^2 dx = \int_\Omega a u^2 dx$. En efecto, nótese que por *(3)*, *(4)* y la identidad de Parseval se tiene que

$$\int_\Omega \nabla u_N \cdot \nabla u_N \, dx = \sum_{j=k+1}^{N} a_j^2 \lambda_j \int_\Omega a\varphi_j^2 dx = \sum_{j=k+1}^{N} a_j^2 \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j^2 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, dx.$$

Por otro lado, dado que $\|u_N\|_2 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \|u\|_2$, entonces $\|u_N\|_2 \leq c_0$ para toda N. Ahora, de *(2)* y la desigualdad de Hölder se obtiene que

$$\left| \int_\Omega a u_N^2 dx - \int_\Omega a u^2 dx \right| \leq M \int_\Omega |u_N - u| \, |u_N + u| \, dx \leq M \|u_N - u\|_2 \|u_N + u\|_2$$

$$\leq M(c_0 + \|u\|_2) \|u_N - u\|_2 .$$

Puesto que $\|u_N - u\|_2 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$, entonces $\lim\limits_{N\to\infty} \int_\Omega a u_N^2 dx = \int_\Omega a u^2 dx$. De lo anterior y *(5)* se sigue que $\|u\|_E^2 \geq \lambda_{k+1} \int_\Omega a u^2 dx$ para todo $u \in Y$. Lo que concluye la prueba de la Afirmación 2. $\square$

La siguiente afirmación se utilizará en la demostración de la condición de Palais-Smale y la hipótesis (I_1) del Teorema 2.1.

Afirmación 3. Si p es una función que satisface las hipótesis *(p_1)*, *(p_2)* y *(p_3)*, entonces

$$\int_\Omega P(x,v)dx \to \infty \text{ cuando } \|v\|_E \to \infty, \text{ para } v \in X^0,$$

donde $X^0 := gen\{\varphi_j : \lambda_j = \lambda_k\}$.

Prueba. Sea $v \in X^0$. Dado que $\dim X^0 < \infty$, entonces todas las normas en X^0 son equivalentes. Por tanto existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$c_1 \|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq c_2 \|v\|_1 . \tag{6}$$

Para $k \in \mathbb{N}$, sean $A_k := \left\{x \in \Omega : |v(x)| \geq \frac{\|v\|_2}{k}\right\}$ y $\Omega_k := \left\{x \in \Omega : |v(x)| < \frac{\|v\|_2}{k}\right\}$, se sigue de *(6)* y la desigualdad de Hölder que

$$(m(A_k))^{1/2} \|v\|_2 \geq \int_{A_k} |v|\, dx = \int_{\Omega} |v|\, dx - \int_{\Omega_k} |v|\, dx \geq (\frac{1}{c_2} - \frac{m(\Omega)}{k}) \|v\|_2 \,.$$

Fijando $k_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\frac{1}{c_2} - \frac{m(\Omega)}{k_0} \geq \frac{1}{2c_2}$, se obtiene que $m(A_{k_0}) \geq \frac{1}{4c_2^2}$. Nótese que

$$\int_{\Omega} P(x, v(x))dx = \int_{A_{k_0}} P(x, v(x))dx + \int_{\Omega_{k_0}} P(x, v(x))dx. \qquad (7)$$

Sea $a_0 := \inf_{x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}} P(x, \xi)$. Nótese que por *($p_3$)*, $a_0 > -\infty$. Puesto que $m(\Omega)\, |a_0| \geq 0$ entonces existe $M_0 > 0$ tal que

$$-\frac{M_0}{m(\Omega)} \leq a_0. \qquad (8)$$

De *(7)* y *(8)* se sigue que

$$\int_{\Omega} P(x, v(x))dx \geq \int_{A_{k_0}} P(x, v(x))dx - M_0. \qquad (9)$$

Por la hipótesis *(p_3)*, dado $T > 0$ existe $s > 0$ tal que si $|\xi| > s$

$$P(x, \xi) \geq T \ \text{ para toda } x \in \Omega. \qquad (10)$$

Sea $v \in X^0$ tal que $\|v\|_2 \geq k_0 s$. Si $x \in A_{k_0}$ entonces $|v(x)| \geq \frac{\|v\|_2}{k_0} \geq s$, y por tanto *(10)* implica que $P(x, v(x)) \geq T$. De esto y *(9)* se obtiene que

$$\int_{\Omega} P(x, v(x))dx \geq T m(A_{k_0}) - M_0 \geq \frac{T}{4c_2^2} - M_0, \qquad (11)$$

Así, de *(11)* se sigue la Afirmación 3. $\square$

La siguiente afirmación demuestra que el funcional I satisface la condición de Palais-Smale.

Afirmación 4. Si $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en E es tal que $\{I(u_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada y $\lim_{n \to \infty} I'(u_n) = 0$ entonces existe una subsucesión convergente.

Prueba. Sea $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ tal que $\{I(u_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada y $\lim_{n \to \infty} I'(u_n) = 0$. De acuerdo con el Teorema 1.5 basta probar que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada en E para obtener la condición de Palais-Smale.

Dado que $u_n \in E$, entonces $u_n = u_n^0 + u_n^- + u_n^+$; donde $u_n^0 \in X^0$, $u_n^- \in X^-$ y $u_n^+ \in Y$. Demostremos que $\{u_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{u_n^-\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{u_n^0\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones acotadas en E. Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} I'(u_n) = 0$, para $\epsilon = 1$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$ entonces

$$\left\| I'(u_n) \right\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})} < 1.$$

Probaremos primero que $\{u_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en E. En efecto, por la desigualdad anterior obtenemos que

$$\left| I'(u_n)u_n^+ \right| < \left\| u_n^+ \right\|_E \quad \text{y} \quad \left| I'(u_n)u_n^- \right| < \left\| u_n^- \right\|_E \tag{12}$$

para toda $n \geq N_1$. Nótese que por *(12)* y la fórmula para I' (véase Afirmación 1)

$$\left\| u_n^+ \right\|_E > \left| \int_\Omega (\nabla u_n \cdot \nabla u_n^+ - \lambda_k a u_n u_n^+) dx \right| - \left| \int_\Omega p(x, u_n) u_n^+ dx \right|. \tag{13}$$

Ahora, por *(p_2)* y las desigualdades de Hölder y Poincaré tenemos que

$$\left| \int_\Omega p(x, u_n) u_n^+ dx \right| \leq a_1 \int_\Omega \left| u_n^+ \right| dx \leq N \left\| u_n^+ \right\|_E. \tag{14}$$

Así, usando *(13)* y *(14)* se obtiene que

$$\left\| u_n^+ \right\|_E > \left| \int_\Omega (\nabla u_n \cdot \nabla u_n^+ - \lambda_k a u_n u_n^+) dx \right| - N \left\| u_n^+ \right\|_E. \tag{15}$$

A continuación se demuestra que

$$\left\| u_n^+ \right\|_E > (1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}) \left\| u_n^+ \right\|_E^2 - N \left\| u_n^+ \right\|_E. \tag{16}$$

En efecto, obsérvese primero que de *(3)* y la definición de los conjuntos X^-y Y se sigue que

$$\int_\Omega (\nabla u_n^- \cdot \nabla u_n^+ - \lambda_k a u_n^- u_n^+) dx = 0. \tag{17}$$

Como $u_n = u_n^0 + u_n^- + u_n^+$, entonces

$$\left| \int_\Omega (\nabla u_n \cdot \nabla u_n^+ - \lambda_k a u_n u_n^+) dx \right| = \left| \int_\Omega (\nabla u_n^+ \cdot \nabla u_n^+ - \lambda_k a u_n^+ u_n^+) dx + \int_\Omega (\nabla u_n^- \cdot \nabla u_n^+ - \lambda_k a u_n^- u_n^+) dx \right|.$$

La Afirmacion 2 parte *(b)* y *(17)* implican que

$$\left| \int_\Omega (\nabla u_n \cdot \nabla u_n^+ - \lambda_k a u_n u_n^+) dx \right| \geq (1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}) \left\| u_n^+ \right\|_E^2. \tag{18}$$

Por lo tanto de *(15)* y *(18)* se obtiene *(16)*. Así, de *(16)* se concluye que $\{u_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en E.

Análogamente se demuestra que

$$\left\|u_n^-\right\|_E > (\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} - 1)\left\|u_n^-\right\|_E^2 - N\left\|u_n^-\right\|_E. \tag{19}$$

De *(19)* se sigue que $\{u_n^-\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en E.

Resta probar que $\{u_n^0\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en E. Puesto que $\{I(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, $u_n = u_n^0 + u_n^- + u_n^+$, *(3)*, *(17)* y la definición de I implican que, para alguna constante A_0,

$$\begin{aligned} A_0 \quad \geq \quad |I(u_n)| \geq \left|\int_\Omega P(x,u_n^0)dx\right| - \Bigg|\frac{1}{2}\int_\Omega(\left|\nabla u_n^+\right|^2 - \lambda_k a(u_n^+)^2)dx \\ +\frac{1}{2}\int_\Omega(\left|\nabla u_n^-\right|^2 - \lambda_k a(u_n^-)^2)dx - \int_\Omega(P(x,u_n) - P(x,u_n^0))dx\Bigg|. \end{aligned}$$

Ahora, por *(p_2)* y las desigualdades de Hölder y Poincaré tenemos que

$$\left|\int_\Omega(P(x,u_n) - P(x,u_n^0))dx\right| \leq a_1\int_\Omega\left|u_n^+ + u_n^-\right|dx \leq M_1\left\|u_n^+ + u_n^-\right\|_E,$$

y

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{2}\int_\Omega(\left|\nabla u_n^+\right|^2 - \lambda_k a(u_n^+)^2)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega(\left|\nabla u_n^-\right|^2 - \lambda_k a(u_n^-)^2)dx\right| \\ &\leq \frac{1}{2}(\left\|u_n^+\right\|_E^2 + \left\|u_n^-\right\|_E^2) + M_2(\left\|u_n^+\right\|_E + \left\|u_n^-\right\|_E). \end{aligned}$$

Dado que $\{u_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{u_n^-\}_{n\in\mathbb{N}}$ son acotadas en E, por las desigualdades anteriores se sigue que

$$A_0 \geq \left|\int_\Omega P(x,u_n^0)dx\right| - A_1. \tag{20}$$

Usando *(20)* se obtiene que $\{u_n^0\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en E. En efecto, si $\{u_n^0\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada en E, entonces existe una subsucesión, que por abuso se denotará igual, tal que $\left\|u_n^0\right\|_E \underset{n\to\infty}{\to} \infty$. Por la Afirmación *(3),* se sigue que

$$\int_\Omega P(x,u_n^0)dx \to \infty \text{ cuando } n\to\infty,$$

lo cual contradice *(20)*. Por lo tanto, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en E. De esto se obtiene la Afirmación 4. □

La siguiente afirmación demuestra que el funcional I satisface la hipótesis *(I_1)* del Teorema 2.1.

Afirmación 5. Existen constantes $\alpha \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ tales que $I|_{\partial D_r(0) \cap X} \leq \alpha$.

Prueba. Sean $X^0 := gen\{\varphi_j : \lambda_j = \lambda_k\}$ y $X^- := gen\{\varphi_j : \lambda_j < \lambda_k\}$. Luego, si $u \in X$ entonces $u = u^0 + u^-$, donde $u^0 \in X^0$ y $u^- \in X^-$. Nótese que

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda_k a u^2)dx - \int_\Omega P(x, u^0)dx - \int_\Omega (P(x, u^0 + u^-) - P(x, u^0))dx.$$

Con el fin de probar la Afirmación 5 demostraremos primero que existen constantes $M_2 < 0$ y $M_1 > 0$ tales que

$$I(u) \leq M_2 \left\|u^-\right\|_E^2 + M_1 \left\|u^-\right\|_E - \int_\Omega P(x, u^0)dx \quad \text{para toda } u \in X. \tag{21}$$

En efecto, por *(p₂)* y las desigualdades de Hölder y Poincaré se sigue que existe $M_1 > 0$ tal que

$$\left|\int_\Omega (P(x, u^0 + u^-) - P(x, u^0))dx\right| \leq a_1 \int_\Omega \left|u^-\right| dx \leq M_1 \left\|u^-\right\|_E. \tag{22}$$

Para obtener *(21)* resta probar que $\frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda_k a u^2)dx \leq M_2 \|u^-\|_E^2$, donde $M_2 < 0$. En efecto, puesto que $u^0 + u^- = u \in X$ entonces $u = \sum_{j=1}^{k} a_j \varphi_j$ y por tanto

$$u^0 = \sum_{j \in J_1} a_j \varphi_j \quad \text{y} \quad u^- = \sum_{j \in J_2} a_j \varphi_j,$$

donde $J_1 = \{j : \lambda_j = \lambda_k\}$ y $J_2 = \{j : \lambda_j < \lambda_k\}$. De esto y de *(3)* obtenemos que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda_k a u^2)dx = \frac{1}{2}\int_\Omega (\left|\nabla(u^0 + u^-)\right|^2 - \lambda_k a (u^0 + u^-)^2)dx$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j,i \in J_2} a_j a_i \lambda_j \int_\Omega a \varphi_j \varphi_i dx - \frac{\lambda_k}{2}\sum_{j,i \in J_2} a_j a_i \int_\Omega a \varphi_j \varphi_i dx$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j,i \in J_2} (1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_j}) a_j a_i \lambda_j \int_\Omega a \varphi_j \varphi_i dx = \frac{1}{2}\sum_{j \in J_2} (1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_j}) a_j^2.$$

Observar que $1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_j} < 0$ para toda $j \in J_2$, y así $1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_j} \leq M_0$ para toda $j \in J_2$, donde $M_0 = \max_{j \in J_2}(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_j}) < 0$. A partir de esto y la identidad de Parseval se verifica que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda_k a u^2)dx \leq M_2 \left\|u^-\right\|_E^2. \tag{23}$$

Por lo tanto, de *(22)* y *(23)* se obtiene *(21)*.

A continuación probaremos la Afirmación 5. En efecto, del Teorema de Pitágoras se tiene que $\|u\|_E^2 = \left\|u^0\right\|_E^2 + \|u^-\|_E^2$; luego si $\|u\|_E \to \infty$ se presenta que $\left\|u^0\right\|_E \to \infty$ ó $\|u^-\|_E \to \infty$.

(I) Si $\left\|u^0\right\|_E \to \infty$, entonces de *(21)* se obtiene que

$$I(u) \leq -\int_\Omega P(x,u^0)dx - \frac{M_1^2}{4M_2}$$

y de la Afirmación 3 se sigue que $\int_\Omega P(x,u^0)dx \to +\infty$ y por tanto $I(u) \to -\infty$ cuando $\|u\|_E \to \infty$.

(II) Si $\|u^-\|_E \to \infty$, entonces de *(21)* se obtiene que

$$I(u) \leq M_2(\left\|u^-\right\|_E + \frac{M_1}{2M_2})^2 - a_0 m(\Omega) - \frac{M_1^2}{4M_2},$$

donde $a_0 = \inf\limits_{x\in\overline{\Omega},\xi\in\mathbb{R}} P(x,\xi)$, el cual existe por *($p_3$)*. De esto se tiene que $I(u) \to -\infty$ cuando $\|u\|_E \to \infty$.

De lo anterior obtenemos que $I(u) \to -\infty$ cuando $\|u\|_E \to \infty$, y por tanto se sigue la Afirmación 5. $\square$

La siguiente afirmación demuestra que el funcional I satisface la hipótesis *(I_2)* del Teorema 2.1.
Afirmación 6. Existe una constante $\beta > \alpha$ tal que $I|_Y \geq \beta$.

Prueba. Sea $u \in Y$. La Afirmacion 2 parte *(b)* implica que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda_k a u^2)dx \geq \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}) \|u\|_E^2 . \qquad (24)$$

Ahora, por *(p_2)* y las desigualdades de Hölder y Poincaré tenemos que

$$\left|\int_\Omega P(x,u)dx\right| \leq a_1 \int_\Omega |u|\, dx \leq N \|u\|_E . \qquad (25)$$

Por lo tanto, de *(24) y (25)* se sigue que

$$I(u) \geq \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}) \|u\|_E^2 - N\|u\|_E \quad \text{para toda } u \in Y.$$

Puesto que $(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}) > 0$, se sigue la Afirmación 6. $\square$

Por las Afirmaciones 1, 4, 5 y 6 el funcional I satisface las hipótesis del Teorema de Punto de

Silla, (Teorema 2.1), con lo cual se concluye que el Problema *(1)* tiene una solución débil no trivial u. ■

3.2 UNA APLICACIÓN DE LA GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DEL PASO DE LA MONTAÑA

En esta sección se utilizará la Generalización del Teorema del Paso de la Montaña para probar la existencia de soluciones débiles para un problema elíptico semilineal.
Consideremos el problema

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ es un dominio acotado con frontera suave, Δ es el operador de Laplace. Se denotará por $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...\}$ la sucesión de valores propios y por $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ...\}$ la sucesión de funciones propias de $-\Delta$ con condición de Dirichlet cero en la frontera. Es conocido que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ...$ y $\lambda_n \to \infty$, si $n \to \infty$ (véase [7]).

Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, diferenciable en el origen y que satisface las siguientes condiciones:

(i) $f(0) = 0$.
(ii) $\lambda_{k-1} \leq f'(0) < \lambda_k$, para cierto $k \geq 2$.
(iii) $\lambda_l < f'(+\infty) \leq \lambda_{l+1}$ y $\lambda_l < f'(-\infty) \leq \lambda_{l+1}$ para cierto $l \geq k$, donde $f'(+\infty) := \lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{f(s)}{s}$ y
$f'(-\infty) := \lim\limits_{s\to-\infty} \dfrac{f(s)}{s}$. Se excluye el caso $f'(+\infty) = f'(-\infty) = \lambda_{l+1}$.
(iv) $(f(s) - \lambda_{k-1}s)s \geq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Definición 3.2 *Si* $u \in E := H_0^1(\Omega)$ *satisface la ecuación*

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - f(u)v)dx = 0 \quad \textit{para toda } v \in E,$$

se dice que u es una solución débil del problema (1).

A continuación presentamos el resultado central de esta sección. Éste garantiza la existencia de una solución débil no trivial para el problema *(1)* en el caso asintóticamente lineal, es decir, cuando $f'(+\infty),\ f'(-\infty) \in \mathbb{R}$. Este resultado fue demostrado en [6] por P. Hess.

Teorema 3.2 *Si f es una función que satisface las hipótesis (i), (ii), (iii) y (iv) entonces el problema (1) tiene una solución débil no trivial.*

Prueba. Sea $E := H_0^1(\Omega)$. Se define el funcional $I : E \to \mathbb{R}$ por

$$I(u) := \int_\Omega (\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(u))dx \text{ para cada } u \in E,$$

donde $F(\xi) := \int_0^\xi f(t)dt$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

Demostraremos a continuación que el funcional I satisface las hipótesis del Teorema 2.2. La siguiente afirmación prueba que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$.
Afirmación 1. El funcional I es de clase $C^1(E, \mathbb{R})$ y además

$$I'(u)v = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - f(u)v)dx \text{ para todo } u, v \in E.$$

Prueba. Puesto que $f'(+\infty),\ f'(-\infty) \in \mathbb{R}$, para $\epsilon = 1$ existen constantes $K_2 > 0$ y $K_1 < 0$ tales que

$$|f(s)| < (1 + |f'(+\infty)|) |s| \quad \forall s > K_2 \text{ y } |f(s)| < (1 + |f'(-\infty)|) |s| \quad \forall s < K_1.$$

Por la continuidad de f en $[K_1, K_2]$ existe una constante $M_1 > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq M_1 \text{ para todo } s \in [K_1, K_2].$$

Si hacemos $a_1 := \max \{1 + |f'(-\infty)|, 1 + |f'(+\infty)|\}$ y $a_2 := M_1$ se obtiene que

$$|f(s)| \leq a_1 |s| + a_2 \text{ para todo } s \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

La Afirmación 1 se sigue de *(2)* y del Teorema 1.5. □

De la Afirmación 1 es claro que u es una solución débil del Problema *(1)* si y sólo si u es un punto crítico del funcional I. La existencia de un punto crítico de I se obtendrá con la ayuda de la Generalización del Teorema del Paso de la Montaña (Teorema 2.2).

Sean $X = gen \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_{k-1}\}$ y $Y = X^\perp$. Por lo tanto $E = X \oplus Y$. Las siguientes afirmaciones permiten demostrar que el funcional I satisface las demás hipótesis del Teorema 2.2.

De manera similar a la demostración de la Afirmación 2 del Teorema 3.1 se prueba la siguiente afirmación que será utilizada en las demostraciones de la Afirmación 3 y las hipótesis *(I_1)* y *(I_2)* del Teorema 2.2.

Afirmación 2.

(a) $\|u\|_E^2 \leq \lambda_{k-1} \int_\Omega u^2 dx$ para todo $u \in X$.

(b) $\|u\|_E^2 \geq \lambda_k \int_\Omega u^2 dx$ para todo $u \in Y$.

Definamos la función $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$\gamma(t) := \begin{cases} f'(+\infty)t & \text{si } t \geq 0, \\ f'(-\infty)t & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Consideremos el problema

$$\begin{cases} \Delta u + \gamma(u) = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

La siguiente afirmación se utilizará en la demostración de la condición de Palais-Smale.

Afirmación 3. Supongamos que $\lambda_l \leq f'(-\infty) \leq \lambda_{l+1}$ y $\lambda_l \leq f'(+\infty) \leq \lambda_{l+1}$ para algún $l \in \mathbb{N}$, y además que

(a) Si $l > 1$ entonces los dos casos $f'(+\infty) = f'(-\infty) = \lambda_l$ y $f'(+\infty) = f'(-\infty) = \lambda_{l+1}$ están excluídos, y

(b) Si $l = 1$ entonces los tres casos $f'(-\infty) = \lambda_1$, $f'(+\infty) = \lambda_1$ y $f'(+\infty) = f'(-\infty) = \lambda_2$ están excluídos.

Entonces el problema *(3)* admite sólo la solución trivial.

Prueba. Sea $u \in E$. Sean $\Omega_1 := \{x \in \Omega : u(x) < 0\}$, $\Omega_2 := \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$ y $\Omega_3 := \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$. Por tanto, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ y definamos

$$p(x) := \begin{cases} f'(-\infty) & \text{si } x \in \Omega_1, \\ \widehat{\lambda} \text{ con } \lambda_l < \widehat{\lambda} < \lambda_{l+1,} & \text{si } x \in \Omega_2, \\ f'(+\infty) & \text{si } x \in \Omega_3. \end{cases}$$

Así $\gamma(u(x)) = u(x)p(x)$.

Sea u una solución débil del Problema *(3)*, por lo tanto

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - p(x)uv)dx = 0 \quad \forall v \in E. \tag{4}$$

Obsérvese que por la definición de p se sigue que

$$\lambda_l \leq p(x) \leq \lambda_{l+1} \quad a.e\ x \in \Omega. \tag{5}$$

A continuación demostraremos que $u = 0$. En efecto, sean $X_1 = gen\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_l\}$ y $Y_1 = X_1^{\perp}$. Por lo tanto $E = X_1 \oplus Y_1$. Si $u \in E$ entonces $u = x_1 + y_1$, donde $x_1 \in X_1$ y $y_1 \in Y_1$. Si hacemos $v = x_1 - y_1$ en *(4)* se obtiene que

$$(\|x_1\|_E^2 - \int_\Omega p(x) x_1^2 dx) - (\|y_1\|_E^2 - \int_\Omega p(x) y_1^2 dx) = 0. \tag{6}$$

Por otro lado, de *(5)* se sigue que

$$\int_\Omega p(x) x_1^2 dx \geq \lambda_l \|x_1\|_2^2 \quad \text{y} \quad \int_\Omega p(x) y_1^2 dx \leq \lambda_{l+1} \|y_1\|_2^2. \tag{7}$$

Además,

$$\|x_1\|_E^2 \leq \lambda_l \|x_1\|_2^2 \quad \forall x_1 \in X_1 \quad \text{y} \quad \|y_1\|_E^2 \geq \lambda_{l+1} \|y_1\|_2^2 \quad \forall y_1 \in Y_1. \tag{8}$$

De *(6)*, *(7)* y *(8)* se concluye que

$$\|x_1\|_E^2 - \int_\Omega p(x) x_1^2 dx = 0 \quad \text{y} \quad \|y_1\|_E^2 - \int_\Omega p(x) y_1^2 dx = 0 \tag{9}$$

Probemos que $x_1 = 0$. En efecto, dado que $x_1 \in X_1$ entonces $x_1 = \sum_{j=1}^{l} a_j \varphi_j$, donde $\|\varphi_j\|_2 = 1$ $\forall j$. Ahora, para cada $j \in \mathbb{N}$

$$\int_\Omega \nabla \varphi_j \cdot \nabla v \, dx = \lambda_j \int_\Omega \varphi_j v dx \text{ para todo } v \in E. \tag{10}$$

Como para $i \neq j$, se tiene que

$$\int_\Omega \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx = 0, \tag{11}$$

de *(10)* y *(11)* se obtiene que

$$\|x_1\|_E^2 = \sum_{j=1}^{l} a_j^2 \lambda_j \int_\Omega \varphi_j^2 dx = \sum_{j=1}^{l} a_j^2 \lambda_j. \tag{12}$$

Por otro lado, de *(7)* y la identidad de Parseval se concluye que

$$\int_\Omega p(x)x_1^2 dx \geq \lambda_l \|x_1\|_2^2 = \lambda_l \sum_{j=1}^{l} a_j^2. \tag{13}$$

Por lo tanto de *(9)*, *(12)* y *(13)* se sigue que

$$0 \leq \sum_{j=1}^{l-1} (\lambda_j - \lambda_l) a_j^2.$$

Observamos que $\lambda_j - \lambda_l < 0$ para todo $1 \leq j \leq l-1$ y por tanto $a_j = 0$ para todo $1 \leq j \leq l-1$. De esto se obtiene que $x_1 = a_l \varphi_l$. Ahora, *(9) y* lo anterior implican que

$$a_l^2 \left(\int_\Omega (\lambda_l - p(x)) \varphi_l^2 dx \right) = 0.$$

De las hipótesis *(a)* o *(b)*, se sigue que $p \not\equiv \lambda_l$ y por tanto $a_l = 0$. De esto se obtiene que $x_1 = 0$. Por una demostración similar a la anterior se concluye que $y_1 = 0$. Luego $u = 0$ y así queda demostrada la Afirmación 3. $\square$

La siguiente afirmación demuestra que el funcional I satisface la condición de Palais-Smale.

Afirmación 4. Si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en E es tal que $\{I(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y $\lim\limits_{n\to\infty} I'(u_n) = 0$ entonces existe una subsucesión convergente.

Prueba. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tal que $\{I(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y $\lim\limits_{n\to\infty} I'(u_n) = 0$. De acuerdo con el Teorema 1.5 basta probar que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada para obtener la condición de Palais-Smale.

Demostremos primero que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $L^2(\Omega)$. En efecto, supongamos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es una sucesión acotada en $L^2(\Omega)$, por tanto existe una subsucesión, que por abuso se denotará igual, tal que $\|u_n\|_2 \underset{n\to\infty}{\to} \infty$. Sea $v_n := \dfrac{u_n}{\|u_n\|_2}$. Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} I'(u_n) = 0$, dado $\epsilon = 1$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$ entonces

$$\|I'(u_n)\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})} < 1.$$

Por lo anterior y las definiciones de v_n y I' se sigue que

$$\frac{\|v_n\|_E}{\|u_n\|_2} > \left| \|v_n\|_E^2 - \frac{1}{\|u_n\|_2} \int_\Omega f(u_n) v_n dx \right| \quad \forall n \geq N_1. \tag{14}$$

Nótese que

$$\frac{1}{\|u_n\|_2} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

por lo tanto existe $M_0 > 0$ tal que

$$\frac{1}{\|u_n\|_2} \leq M_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Además, de *(2)* se sigue que

$$\left|\frac{1}{\|u_n\|_2}\int_\Omega f(u_n)v_n dx\right| \leq \frac{1}{\|u_n\|_2}\int_\Omega (a_1\,|u_n| + a_2)v_n dx. \tag{16}$$

Ahora, por *(15)* y la desigualdad de Hölder en *(16)* se concluye que

$$\left|\frac{1}{\|u_n\|_2}\int_\Omega f(u_n)v_n dx\right| \leq a_1 + a_2 M_0 (m(\Omega))^{1/2} := M_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

De la anterior desigualdad y *(14)* se obtiene que

$$0 < \|v_n\|_E^2 < \frac{\|v_n\|_E}{\|u_n\|_2} + M_1 \quad \forall n \geq N_1. \tag{17}$$

Por la desigualdad de Poincaré, se sigue que existe $M_2 > 0$ tal que

$$\frac{1}{\|v_n\|_E} \leq \frac{M_2}{\|v_n\|_2} = M_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Por tanto de *(15)*, *(17)* y *(18)* se sigue que $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en E. Por lo tanto existe una subsucesión, que por abuso se denotará igual, tal que

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{en } E$$

para algún $v \in E$. Dado que el encaje $E \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es compacto,

$$v_n \to v \quad \text{en } L^2(\Omega). \tag{19}$$

Obsérvese que como $\|v_n\|_2 = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, $\|v\|_2 = 1$. Es decir, $v \neq 0$.

A continuación probaremos que v es un solución débil del Problema *(3)*. Es claro de la definición de I' que para $w \in E$ fijo se tiene que

$$\left|\int_\Omega \nabla v_n \cdot \nabla w dx - \frac{1}{\|u_n\|_2}\int_\Omega f(u_n) w dx\right| \leq \frac{\|I'(u_n)\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}\,\|w\|_E}{\|u_n\|_2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De esto se sigue que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega \nabla v_n \cdot \nabla w dx - \frac{1}{\|u_n\|_2}\int_\Omega f(u_n) w dx\right) = 0. \tag{20}$$

Puesto que $v_n \rightharpoonup v$ en E se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \nabla v_n \cdot \nabla w dx = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w dx \quad w \in E. \tag{21}$$

Demostremos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\|u_n\|_2}\int_\Omega f(u_n) w dx = \int_\Omega \gamma(v) w dx \quad \forall w \in E. \tag{22}$$

En efecto, Observamos que *(2)*, *(15)* y la desigualdad de Hölder implican que $\frac{f(u_n)}{\|u_n\|_2} \in L^2(\Omega)$, y puesto que $\gamma(v) \in L^2(\Omega)$ nuevamente por la desigualdad de Hölder se sigue que

$$\left|\int_\Omega \left(\frac{f(u_n)}{\|u_n\|_2} - \gamma(v)\right) w dx\right| \leq \left\|\frac{f(u_n)}{\|u_n\|_2} - \gamma(v)\right\|_2 \|w\|_2 \quad \forall w \in E. \tag{23}$$

Definamos $h(t) := f(t) - \gamma(t)$ para $t \in \mathbb{R}$. Nótese que

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{h(t)}{t} = 0 \ \text{ y } \ \lim_{t\to-\infty}\frac{h(t)}{t} = 0. \tag{24}$$

Por lo tanto

$$\left\|\frac{f(u_n)}{\|u_n\|_2} - \gamma(v)\right\|_2 \leq \left\|\frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|_2} - \gamma(v)\right\|_2 + \left\|\frac{h(u_n)}{\|u_n\|_2}\right\|_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Observamos que $\gamma(v) = f'(+\infty)v^+ - f'(-\infty)v^-$, donde $v^+ := \max\{0, v\}$ y $v^- := \max\{0, -v\}$. Por otro lado, de *(19)* se sigue que $v_n^+ \to v^+$ y $v_n^- \to v^-$ en $L^2(\Omega)$ y por lo tanto

$$\gamma(v_n) \underset{n\to\infty}{\to} \gamma(v) \ \text{ en } L^2(\Omega). \tag{25}$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|_2} - \gamma(v)\right\|_2^2 &= \int_{u_n\geq 0}\left(\frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|_2} - \gamma(v)\right)^2 dx + \int_{u_n<0}\left(\frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|_2} - \gamma(v)\right)^2 dx \\
&= \int_{u_n\geq 0}(f'(+\infty)v_n^+ - \gamma(v))^2 dx + \int_{u_n<0}(-f'(-\infty)v_n^- - \gamma(v))^2 dx \\
&= \int_{u_n\geq 0}(\gamma(v_n) - \gamma(v))^2 dx + \int_{u_n<0}(\gamma(v_n) - \gamma(v))^2 dx \\
&\leq 2\|\gamma(v_n) - \gamma(v)\|_2^2 .
\end{aligned}$$

De *(25)* y lo anterior se obtiene que

$$\left\| \frac{\gamma(u_n)}{\|u_n\|_2} - \gamma(v) \right\|_2 \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0. \qquad (26)$$

Dado $\epsilon > 0$, por *(24)*, existe $T > 0$ tal que

$$|h(t)| < \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}\,|t| \quad \forall\,|t| \geq T. \qquad (27)$$

Por la continuidad de h existe $k > 0$ tal que

$$|h(t)| \leq k \ \ \forall t \in [-T, T]\,. \qquad (28)$$

De *(27)* y *(28)* se sigue que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{h(u_n)}{\|u_n\|_2} \right\|_2^2 &= \frac{1}{\|u_n\|_2}\left(\int_{|u_n|\geq T} (h(u_n(x)))^2 dx + \int_{|u_n|\leq T} (h(u_n(x)))^2 dx\right) \\
&\leq \frac{1}{\|u_n\|_2^2}\left(\frac{\epsilon}{2}\,\|u_n\|_2^2 + m(\Omega)k^2\right) \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{m(\Omega)k^2}{\|u_n\|_2^2}.
\end{aligned}$$

Puesto que $\dfrac{m(\Omega)k^2}{\|u_n\|_2^2} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$, lo anterior implica que

$$\left\| \frac{h(u_n)}{\|u_n\|_2} \right\|_2 \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0. \qquad (29)$$

Luego, de *(26)* y *(29)* se concluye que

$$\left\| \frac{f(u_n)}{\|u_n\|_2} - \gamma(v) \right\|_2 \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0. \qquad (30)$$

Así, de *(23)* y *(30)* se sigue *(22)*.
Por tanto de *(20)*, *(21)* y *(22)* se obtiene que

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w dx = \int_\Omega \gamma(v) w dx \ \ \forall w \in E.$$

Es decir, $v \neq 0$ es un solución débil del Problema *(3)*. Lo cual es un absurdo, ya que por la Afirmación 3 la única solución débil del problema *(3)* es la solución trivial. Por lo tanto $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $L^2(\Omega)$.

Del acotamiento de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $L^2(\Omega)$, *(2)* y la desigualdad de Hölder se sigue que

$$\left|\int_\Omega f(u_n)u_n dx\right| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{31}$$

Obsérvese que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n\|_E > \left|I'(u_n)u_n\right| \geq \|u_n\|_E^2 - \left|\int_\Omega f(u_n)u_n dx\right| \quad \forall n \geq N_1.$$

De la desigualdad anterior y *(31)* se sigue que

$$\|u_n\|_E^2 - \|u_n\|_E < M. \quad \forall n \geq N_1.$$

Por lo tanto $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en E y así queda demostrada la Afirmación 4. $\square$

La siguiente afirmación demuestra que el funcional I satisface la hipótesis *(I_1)* del Teorema 2.2.

Afirmación 5. Existen $\alpha > 0$ y $\rho > 0$ tales que $I|_{\partial D_\rho(0)\cap Y} \geq \alpha$.

Prueba. Sea $\epsilon > 0$. Como $f'(0) \in \mathbb{R}$, existe $0 < \delta < 1$ tal que si $|s| < \delta$ entonces

$$\left|f(s) - f'(0)s\right| < \epsilon\,|s|\,. \tag{32}$$

Usando *(32)* se sigue que

$$\left|F(s) - \frac{f'(0)}{2}s^2\right| \leq \int_0^s \left|f(t) - f'(0)t\right| dt \leq \frac{\epsilon}{2}\,|s|^2\,, \quad \forall s \in (-\delta, \delta). \tag{33}$$

Por otro lado, como $f'(+\infty),\ f'(-\infty) \in \mathbb{R}$, existen constantes $K_2 > 0$ y $K_1 < 0$ con $K_2 > 1$ y $K_1 < -1$, tales que

$$|f(s)| < (\epsilon + f'(+\infty))\,|s| \quad \forall s > K_2 \text{ y } |f(s)| < (\epsilon + f'(-\infty))\,|s| \quad \forall s < K_1.$$

Sea $C_\epsilon^{(1)} := \max\{\epsilon + f'(-\infty), \epsilon + f'(+\infty)\}$, por lo tanto

$$|f(s)| < C_\epsilon^{(1)}\,|s| \quad \forall s \in (-\infty, K_1) \cup (K_2, \infty). \tag{34}$$

De *(34)* y de la continuidad de f en $[K_1, 0] \cup [0, K_2]$ se tiene que existe $C_\epsilon^{(2)}$ tal que

$$\int_0^s |f(t)|\,dt \leq C_\epsilon^{(2)}\,|s|^2 \quad \forall s \in (-\infty, K_1) \cup (K_2, \infty). \tag{35}$$

Además,

$$\left|F(s) - \frac{f'(0)}{2}s^2\right| \leq \int_0^s |f(t)|\,dt + \frac{f'(0)}{2}\,|s|^2\,,$$

entonces por *(35)* se concluye que

$$\left|F(s) - \frac{f'(0)}{2}s^2\right| \leq C_\epsilon^{(3)} |s|^2 \quad \forall s \in (-\infty, K_1) \cup (K_2, \infty). \tag{36}$$

Por *(32)* y la continuidad de f en $[K_1, -\delta] \cup [\delta, K_2]$, existe $C_\epsilon^{(4)}$ tal que

$$\int_0^s |f(t)|\, dt \leq C_\epsilon^{(4)} |s|^2 \quad \forall s \in [K_1, -\delta] \cup [\delta, K_2]\,,$$

y por tanto

$$\left|F(s) - \frac{f'(0)}{2}s^2\right| \leq C_\epsilon^{(5)} |s|^2 \quad \forall s \in [K_1, -\delta] \cup [\delta, K_2]\,. \tag{37}$$

Ahora, de *(36)* y *(37)* se obtiene que

$$\left|F(s) - \frac{f'(0)}{2}s^2\right| \leq C_\epsilon |s|^2 \quad \forall s \in (-\infty, -\delta] \cup [\delta, \infty)\,, \tag{38}$$

donde $C_\epsilon := \max\left\{C_\epsilon^{(3)}, C_\epsilon^{(5)}\right\}$.
Sea $0 < \eta \leq \dfrac{4}{n-2}$. Obsérvese que si hacemos $C' := \dfrac{C_\epsilon}{\delta^\eta}$ entonces

$$C_\epsilon |s|^2 \leq C' |s|^{2+\eta} \quad \forall |s| \geq \delta.$$

De la desigualdad anterior, *(33)* y *(38)* se sigue que

$$\left|F(s) - \frac{f'(0)}{2}s^2\right| \leq \frac{\epsilon}{2} |s|^2 + C' |s|^{2+\eta} \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{39}$$

A continuación demostraremos la afirmación. Sea $u \in Y$. Puesto que

$$I(u) = \frac{1}{2} \|u\|_E^2 - \frac{f'(0)}{2} \int_\Omega u^2 dx - \int_\Omega (F(u) - \frac{f'(0)}{2}u^2) dx,$$

de la Afirmación 2 parte *(b)* se concluye que

$$I(u) \geq \frac{1}{2}(1 - \frac{f'(0)}{\lambda_k}) \|u\|_E^2 - \int_\Omega (F(u) - \frac{f'(0)}{2}u^2) dx. \tag{40}$$

Por el Teorema 1.3 la inclusión $H_0^1(\Omega) \subset L^{2+\eta}(\Omega)$ es continua. Así, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{2+\eta}^{2+\eta} \leq C \|u\|_E^{2+\eta}\,. \tag{41}$$

Por la desigualdad de Poincaré, existe $K > 0$ tal que

$$\|u\|_2^2 \leq K \|u\|_E^2 . \qquad (42)$$

Luego, de *(39)*, *(41)* y *(42)* se sigue que existe una constante positiva C_1 tal que

$$\left| \int_\Omega (F(u) - \frac{f'(0)}{2} u^2) dx \right| \leq C_1 (\frac{\epsilon}{2} + C' \|u\|_E^\eta) \|u\|_E^2 . \qquad (43)$$

Por lo tanto, si $\rho > 0$ es tal que $\rho < (\frac{\epsilon}{2C'})^{1/\eta}$, entonces para todo $u \in Y$ con $\|u\|_E = \rho$, de *(43)* se sigue que

$$\left| \int_\Omega (F(u) - \frac{f'(0)}{2} u^2) dx \right| \leq C_1 \epsilon \|u\|_E^2 . \qquad (44)$$

De *(40)* y *(44)* se concluye que

$$I(u) \geq \frac{1}{2}(1 - \frac{f'(0)}{\lambda_k}) \|u\|_E^2 - C_1 \epsilon \|u\|_E^2 \quad \forall u \in \partial D_\rho(0) \cap Y. \qquad (45)$$

Por tanto, si escogemos $\epsilon := \dfrac{1 - \dfrac{f'(0)}{\lambda_k}}{4C_1} > 0$, de *(45)* se obtiene que

$$I(u) \geq \frac{1}{4}(1 - \frac{f'(0)}{\lambda_k}) \rho^2 \quad \forall u \in \partial D_\rho(0) \cap Y.$$

De esta última desigualdad se sigue la Afirmación 5 haciendo $\alpha := \frac{1}{4}(1 - \frac{f'(0)}{\lambda_k})\rho^2 > 0$. $\square$

Las siguientes dos afirmaciones serán utilizadas en la demostración de la hipótesis *(I_2)* del Teorema 2.2.

Afirmación 6. $I|_X \leq 0$.

Prueba. Sea $u \in X$. De la hipótesis *(iv)*, se tiene que

$$f(s) \geq \lambda_{k-1} s \quad \forall s > 0 \;\text{ y }\; f(s) \leq \lambda_{k-1} s \quad \forall s < 0,$$

y por lo tanto

$$F(s) \geq \frac{\lambda_{k-1}}{2} s^2 \quad \forall s \in \mathbb{R}. \qquad (46)$$

De *(46)*, la Afirmación 2 parte *(a)* y de la definición de I se sigue que

$$I(u) \leq \frac{\lambda_{k-1}}{2} \int_{\Omega} u^2 dx - \frac{\lambda_{k-1}}{2} \int_{\Omega} u^2 dx = 0.$$

Se concluye así la prueba de la Afirmación 6. $\square$

Afirmación 7. Existen $e \in \partial D_1(0) \cap Y$ y $\overline{R} > \rho$ tales que $I(u) \leq 0$ para toda $u \in X_1 := X \oplus \mathbb{R}e$ con $\|u\|_E > \overline{R}$.

Prueba. Sea $e = \varphi_k$, entonces $e \in \partial D_1(0) \cap Y$. Nótese que si $u \in X_1$ entonces $u = v + t\varphi_k$, donde $v \in X$ y $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx + \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_k|^2 \, dx - \int_{\Omega} F(u) dx. \tag{47}$$

Por la Afirmación 2 parte *(a) y (10)* se sigue que

$$\begin{aligned} I(u) &\leq \frac{\lambda_{k-1}}{2} \int_{\Omega} v^2 dx + \frac{\lambda_k}{2} \int_{\Omega} (t\varphi_k)^2 dx - \int_{\Omega} F(u) dx. \qquad (48) \\ &< \frac{\lambda_k}{2} (\|v\|_2^2 + \|t\varphi_k\|_2^2) - \int_{\Omega} F(u) dx \\ &= \frac{\lambda_k}{2} \|u\|_2^2 - \int_{\Omega} F(u) dx. \end{aligned}$$

Sea $\epsilon > 0$ tal que

$$f'(+\infty) > \lambda_l + \frac{3}{2}\epsilon \text{ y } f'(-\infty) > \lambda_l + \frac{3}{2}\epsilon. \tag{49}$$

Por otra parte, como $f'(+\infty) \in \mathbb{R}$ entonces existe $C_1 > 0$ tal que

$$\left| f(s) - f'(+\infty)s \right| < \frac{\epsilon}{2} |s| \quad \forall s > C_1. \tag{50}$$

De *(49)* y *(50)* se obtiene que

$$f(s) > (\lambda_l + \epsilon)s - a \quad \forall s > 0, \text{ donde } a > 0 \text{ es una constante.} \tag{51}$$

De *(51)* se concluye que

$$F(s) > \frac{1}{2}(\lambda_l + \epsilon)s^2 - a|s| \quad \forall s > 0. \tag{52}$$

De manera similar se demuestra que

$$F(s) > \frac{1}{2}(\lambda_l + \epsilon)s^2 - a_0 |s| \quad \forall s < 0, \text{ donde } a_0 > 0 \text{ es una constante.} \tag{53}$$

Por tanto de *(52)*, *(53)* y la desigualdad de Hölder se tiene que que existe $C > 0$ tal que

$$-\int_{\Omega} F(u)dx \leq -\frac{1}{2}(\lambda_l + \epsilon) \|u\|_2^2 + C \|u\|_2 \tag{54}$$

De *(48)* y *(54)* se sigue que

$$I(u) \leq \frac{1}{2}(\lambda_k - (\lambda_l + \epsilon)) \|u\|_2^2 + C \|u\|_2 . \tag{55}$$

Como $\lambda_k \leq \lambda_l$ se tiene que $\lambda_k - (\lambda_l + \epsilon) < 0$. Sea $\|u\|_2 \geq \overline{R}$ con $\overline{R} > \dfrac{2C}{(\lambda_l + \epsilon) - \lambda_k} > 0$ y $\overline{R} > \rho$. De esto y *(55)* se sigue que $I(u) \leq 0$ para $u \in X_1$ con $\|u\|_2 \geq \overline{R}$. Como las normas $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_E$ son equivalentes en X_1, por ser un espacio finito dimensional, entonces se sigue la Afirmación 7. □

Por las Afirmaciones 6 y 7 se verifican las hipótesis de la Proposicion 2.1, por lo tanto el funcional I satisface la hipótesis *(I_2)* del Teorema 2.2.

Como el funcional $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, satisface la condición de Palais-Smale y las demás hipótesis de la Generalización del Teorema del Paso de la Montaña, se concluye que el Problema *(1)* tiene al menos una solución débil no trivial u. ■

Bibliografía

[1] H. Amann, *Ordinary Differential Equations*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1990.

[2] A. Ambrosetti and P Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. **14** (1973), 349-381.

[3] H. Brezis, *Análisis Funcional*, Alianza Ed., Madrid, 1983.

[4] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1985.

[5] L. Gasinski and Nikolaos S. Papageorgiou, *Nonlinear Analysis*, Chapman & Hall/CRC, 2006.

[6] P. Hess, *On Nontrivial Solutions of a Nonlinear Elliptic Boundary Value Problem*, Conferenze del Seminario Di Matematica Dell'Universita Di Bari, number 173, 1980.

[7] S. Kesavan, *Topics in Functional Analysis and Applications*, Wiley Eastern Limited, 1989.

[8] S. Kesavan, *Nonlinear Functional Analysis*, Hindustan Book Agency, India, 2004.

[9] J. R. Munkres, *Topología*, Prentice-Hall, Madrid, 2002.

[10] P. H. Rabinowitz, *Some Critical Point Theorems and Applications to Semilinear Elliptic Partial Differential Equations*, Ann. Scuola Norm. sup., Pisa 2 (1978), pp. 215-223.

[11] P. H. Rabinowitz, *Some Minimax Methods Theorems and Applications to Nonlinear Partial Differential Equations*, Nonlinear Analysis, Academic Press, New York, 1978, pp. 161-177.

[12] P. H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, regional Conference Series in Mathematics, number 65, American Mathematical Society, Providence, R.I, 1986.