

**Análisis Dinámico y Control de un Manipulador
de 5 Grados de Libertad
(SCORBOT ER V PLUS)**

JAIME ENRIQUE ARANGO CASTRO



**Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales
Facultad de Ingeniería y Arquitectura
Departamento de Eléctrica, Electrónica y Computación
Manizales, Colombia
2008**

**Análisis Dinámico y Control de un Manipulador
de 5 Grados de Libertad
(SCORBOT ER V PLUS)**

**Jaime Enrique Arango Castro
Ingeniero Electrónico**

Tesis presentada en cumplimiento de los requerimientos
para optar por el título de
Magíster en Automatización Industrial

Directora
Dra. Fabiola Angulo García

**Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales
Facultad de Ingeniería y Arquitectura
Departamento de Eléctrica, Electrónica y Computación
Manizales, Colombia
2008**

DEDICATORIA

A mis maravillosos padres, inspiración interminable.

AGRADECIMIENTOS

A mis profesores, que con el tiempo se convierten en amigos. En especial a Fabiola Angulo García, por su apoyo, colaboración y confianza.

A mi familia, por su dedicación incansable, apoyo reiterado y fuente de inspiración.

A todos mis compañeros e integrantes del grupo de trabajo PCI, por su ayuda tanto en lo académico como en lo personal.

A la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales, por permitirme continuar desarrollando esta parte tan importante de mi vida, en sus espacios y con su gente excepcional.

INDICE GENERAL

1. INTRODUCCIÓN	1
1.1 Motivación	1
1.2 Trabajos previos: “Modelo Cinemático, Dinámico y de Manipulabilidad del robot SCORBOT ER V PLUS”	3
1.3 Fundamentos de control de manipuladores robóticos de múltiples grados de libertad	5
1.3.1 Control mediante Linealización por Realimentación	6
1.3.2 Control Adaptativo	7
1.4 Desarrollo del trabajo y contribuciones	10
2. ANÁLISIS DE LA DINAMICA DEL MANIPULADOR DE CINCO GRADOS DE LIBERTAD (SCORBOT ER V PLUS)	13
2.1 Introducción	13
2.2 Modelo dinámico del manipulador de cinco grados de libertad. Método de Newton – Euler	14
2.2.1 Representación Compacta y Matriz De Rotación del Efector Final	14
2.2.2 Representación en Variables de Estado	16
2.2.3 Validación del modelo dinámico modificado (forma compacta)	17
2.2.3.1 Modelo Dinámico Inverso	17
2.2.3.2 Modelo Dinámico Directo	22
2.3 Análisis de condiciones de Equilibrio	23
2.3.1 Análisis de estabilidad	25
2.3.2 Efectos de la carga y la fricción viscosa (sin saturación en los torques de los actuadores)	29

2.3.3	Respuestas ante perturbaciones	32
2.3.4	Diagramas de Bifurcaciones (efecto de la saturación en los torques)	37
3.	CONTROL NO LINEAL MEDIANTE LINEALIZACIÓN POR REALIMENTACIÓN	43
3.1	Introducción	43
3.2	Linealización por Realimentación para un manipulador de cinco grados de libertad	43
3.2.1	Sin Saturación en los actuadores	46
3.2.1.1	Regulación	46
3.2.1.2	Rastreo	49
3.2.2	Efecto de la Saturación de los actuadores	51
3.2.2.1	Regulación	52
3.2.2.2	Rastreo	56
4.	CONTROL NO LINEAL ADAPTATIVO	61
4.1	Introducción	61
4.2	Control Adaptativo para un manipulador de cinco grados de libertad	61
4.2.1	Sin saturación de los actuadores	62
4.2.2	Efecto de la saturación de los actuadores	66
5.	CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS	72
	BIBLIOGRAFÍA	75
	ANEXOS	77

INDICE DE FIGURAS

1.1 SCORBOT ER-V PLUS.	2
1.2 Esquema general del Control adaptativo	8
2.1 SCORBOT ER V PLUS	13
2.2 Trayectorias y Velocidades propuestas por Durango y Calderón	19
2.3 Torques comparados con Hemero y error correspondiente	19
2.4 Trayectoria de validación	20
2.5 Torques calculados y superpuestos con Hemero	21
2.6 Error comparativo con Hemero	21
2.7 Posiciones y Velocidades (Modelo dinámico directo)	23
2.8 Posición de referencia del manipulador	25
2.9 Péndulo con torque	26
2.10 Posiciones de equilibrio con simetría respecto al eje horizontal	31
2.11 Respuesta a impulso con: $m_1 = 0 \quad \gamma = 0 \quad x_2 = \pi/4$	32
2.12 Respuesta a impulso con: $m_1 = 0.2 \quad \gamma = 0 \quad x_2 = \pi/4$	33
2.13 Respuesta a impulso con: $m_1 = 0 \quad \gamma = 0.1 \quad x_2 = \pi/4$	33
2.14 Respuesta a impulso con: $m_1 = 0.2 \quad \gamma = 0.1 \quad x_2 = \pi/4$	34
2.15 Respuesta a impulso con: $m_1 = 0 \quad \gamma = 0 \quad x_2 = -\pi/4$	35
2.16 Respuesta a impulso con: $m_1 = 0.2 \quad \gamma = 0 \quad x_2 = -\pi/4$	35
2.17 Respuesta a impulso con: $m_1 = 0 \quad \gamma = 0.1 \quad x_2 = -\pi/4$	36
2.18 Respuesta a impulso con: $m_1 = 0.2 \quad \gamma = 0.1 \quad x_2 = -\pi/4$	36

2.19 Sin restricción en los torques, no se presentan bifurcaciones	38
2.20 Respuesta amortiguada para $\gamma = 0.1$ y $m_l = 2.5$ Kg	39
2.21 Desplazamiento del punto de equilibrio a partir de $m_l = 2.14$ Kg	39
2.22 Para $\gamma = 0$ aparecen oscilaciones a partir de $m_l = 2.14$ Kg.	41
2.23 Oscilación de x_2 para $\gamma = 0$ y $m_l = 2.2$ Kg.	42
3.1 Posiciones para $\lambda = 2$	47
3.2 Velocidades para $\lambda = 2$	47
3.3 Errores de Posición	48
3.4 Señales de Control	48
3.5 Rastreo para $\lambda = 35$ y $m_l = 3$ Kg	49
3.6 Velocidad de rastreo para $\lambda = 35$ y $m_l = 3$ Kg	50
3.7 Errores de Posición máximo de 2.8% con $\lambda = 35$ y $m_l = 3$ Kg	50
3.8 Señales de control para el rastreo con $\lambda = 35$ y $m_l = 3$ Kg	51
3.9 Posiciones para: a) $m_l = 8.8$ Kg b) $m_l = 8.9$ Kg	53
3.10 Velocidades para: a) $m_l = 8.8$ Kg y b) $m_l = 8.9$ Kg	54
3.11 Errores de Posición para: a) $m_l = 8.8$ Kg y b) $m_l = 8.9$ Kg	55
3.12 Señales de control para: a) $m_l = 8.8$ Kg y b) $m_l = 8.9$ Kg	56
3.13 Posiciones para: a) $m_l = 1.2$ Kg y b) $m_l = 1.21$ Kg	57
3.14 Velocidades para: a) $m_l = 1.2$ Kg y b) $m_l = 1.21$ Kg	58
3.15 Errores de Posición para: a) $m_l = 1.2$ Kg y b) $m_l = 1.21$ Kg	59
3.16 Señales de control para: a) $m_l = 1.2$ Kg (izq.) b) $m_l = 1.21$ Kg	60
4.1 Posiciones de Salida para $m_l = 3$	63
4.2 Velocidades de las articulaciones con $m_l = 3$	64
4.3 Adaptación de parámetros m_{sl} y p_1	64

4.4 Errores relativos de posición, máximo de 5.05% en x_4	65
4.5 Torques de Control para $m_l = 3$	66
4.6 Posiciones para $m_l = 1.18 \text{ Kg}$	67
4.7 Velocidades para $m_l = 1.18 \text{ Kg}$	68
4.8 Errores relativos de Posición $m_l = 1.18 \text{ Kg}$.	69
4.9 Errores relativos de Posición $m_l = 1.17 \text{ Kg}$	69
4.10 Parámetros estimados para $m_l = 1.17 \text{ Kg}$	70
4.11 Parámetros estimados para $m_l = 1.18 \text{ Kg}$	70
4.12 Señales de control para $m_l = 1.18 \text{ Kg}$	71

INDICE DE TABLAS

2.1. Trayectorias de validación propuestas por Durango y Calderón	18
2.2. Trayectoria de validación para el caso de mayor esfuerzo inicial	20
2.3 Valores propios, variación de carga, fricción y posición (sin saturación)	30
2.4. Valores Propios para $\gamma = 0.1$, para algunos valores de m_l entre 1 y 7 Kg.	40
2.5. Valores Propios para $\gamma = 0$, variando m_l entre 2.1 y 2.16 Kg.	41
A1. Programas para modelado y análisis del sistema dinámico	78
A2. Programas para simulación de estrategias de control en tareas de Regulación y Rastreo.	79

RESUMEN

El trabajo presentado a continuación es el resultado del estudio de la dinámica no lineal y de algunos sistemas de control para un manipulador de cinco grados de libertad, como el SCORBOT ER V PLUS. Dicha dinámica está representada por un sistema de diez (10) ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales, se obtiene de la representación compacta de la dinámica del manipulador, y está construida con base en la formulación de Newton-Euler.

El análisis de la dinámica se enfocó en las áreas de estabilidad de los puntos de equilibrio, respuesta ante perturbaciones y diagramas de bifurcaciones en la presencia de saturación en los actuadores. En la parte de control se usaron los sistemas de control no lineal: control mediante linealización por realimentación y control adaptativo. En el primer caso, se realizaron las tareas de Regulación y Rastreo, analizando primero la condición en la que no se incluye el efecto de la saturación de los actuadores y, posteriormente el caso en el que se tiene en cuenta dicho fenómeno. Para el Control Adaptativo se desarrolló la tarea de Rastreo con base en una ley de control que aprovecha la dependencia lineal del modelo dinámico con relación a los parámetros inerciales de la carga, adaptándose a los cambios de la misma. Para este controlador se analiza también la condición en la que no se incluye el efecto de la saturación de los actuadores y el caso en el que se tiene en cuenta dicho fenómeno.

CAPITULO 1. INTRODUCCIÓN

1.1 MOTIVACIÓN

Con el proceso de industrialización y automatización de las labores de producción en el mundo, se han alcanzado niveles mayores de desarrollo que exigen cada vez soluciones más elaboradas y complejas. Con el desarrollo industrial, se presentan retos para el ser humano trabajador, debido a la exigencia física de sus labores y en general, a causa de la dificultad, riesgo o imposibilidad para realizarlas por parte de personas. Por otro lado, debido a la exigencia constante del mejoramiento de la productividad de las empresas, se realizan labores repetitivas y monótona.

El manipulador robótico puede jugar un papel importante en este tipo de requerimientos, reemplazando o complementando las labores humanas en actividades en las cuales es benéfico para el proceso productivo desde algún punto de vista que lo justifique, bien sea económico, por el mejoramiento de la productividad o de seguridad del trabajador.

Es de interés en este trabajo de tesis de maestría, poder realizar un análisis de la dinámica de éste tipo de manipuladores, que permita diseñar estrategias de control no lineal con el objeto de llevar a cabo actividades de posicionamiento y seguimiento de trayectorias, de manera que puedan ser evaluadas diferentes técnicas de control.

Existen manipuladores comerciales que utilizan estrategias de control desacopladas lineales, que no tienen en cuenta las no linealidades propias de un sistema de este tipo [1] [2]. En los casos en los que además de realizar las tareas programadas se requiere precisión, es conveniente considerar un modelo dinámico compacto que tenga en cuenta los efectos no lineales para generar estrategias de control que compensen de manera adecuada estos efectos.

La Universidad Nacional Sede Manizales, en los laboratorios del grupo de investigación de Percepción y Control Inteligente (PCI) ubicado en el Campus La Nubia, cuenta con un Manipulador de carácter didáctico, fabricado por la empresa israelí *Eshed Robotec* denominado SCORBOT ER V PLUS y mostrado en la Figura 1.1, de cinco articulaciones rotatorias y una pinza de agarre como herramienta y efector final. Además, está provisto de un controlador para manejar las actividades básicas de desplazamiento y posicionamiento del manipulador a manera de caja negra, sin tener acceso a la manera como el controlador realiza las tareas programadas, es decir, no se conoce de qué manera desempeña su labor.

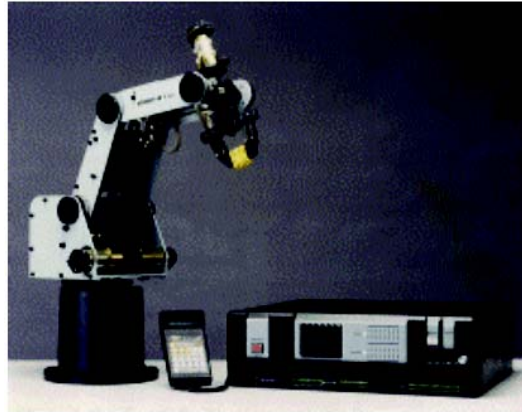


Fig 1.1 SCORBOT ER-V PLUS. Tomado de [3]

La posibilidad de aplicar y comparar estrategias de control no lineal como control mediante linealización por realimentación y control adaptativo, aplicadas a un manipulador de múltiples grados de libertad como el SCORBOT ER-V PLUS, permite valorar su posibilidad de uso en sistemas de tanta complejidad dinámica como el analizado en este documento.

1.2 TRABAJOS PREVIOS: “MODELO CINEMÁTICO, DINÁMICO Y DE MANIPULABILIDAD DEL ROBOT SCORBOT ER V PLUS”[4]

Durango y Calderón en [4] realizaron un trabajo de Tesis para la Maestría en Sistemas Automáticos de la Producción de la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad Tecnológica de Pereira, donde cuentan con un manipulador igual al que tiene la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales.

El trabajo realizado por Durango y Calderón presenta de manera detallada la formulación de los modelos cinemático y dinámico, directo e inverso y de manipulabilidad, aplicados específicamente al SCORBOT ER V PLUS.

Para el presente trabajo, se han usado los procedimientos presentados por Durango y Calderón en [4] para el cálculo simbólico de los Modelos Dinámicos Directo e Inverso, y se han modificado de manera tal que se puedan realizar análisis de estabilidad de sistemas no lineales y plantear estrategias de control no lineal.

Existen básicamente dos aproximaciones para la obtención de los modelos dinámicos de un manipulador: Dinámica de Lagrange (fundamentada en el equilibrio de Energía) y la combinación de la Dinámica de Newton y Euler (Equilibrio de Fuerzas y Momentos) [1] [5] [6]. El trabajo de Durango y Calderón se enfoca en el modelado de Newton-Euler, puesto que permite un cálculo numérico más simple y por lo tanto en menor tiempo [7].

El modelo Dinámico de Newton-Euler consiste en un conjunto de ecuaciones de movimiento recursivas que fue planteado por Luh et al [7], refiriendo todas las velocidades, aceleraciones, matrices de inercia, localización de centros de masa, fuerzas y momentos al sistema de coordenadas propios de cada eslabón del manipulador. El procedimiento se convierte en la aplicación de un algoritmo iterativo que calcula las fuerzas en cada articulación desde la base hasta efector final y que se devuelve desde el efector final a la base calculando los momentos individuales. El algoritmo para el cálculo del Modelo

Dinámico Inverso de Newto-Euler, implementado por Durango y Calderón en [4], se presenta aquí por conveniencia:

$$\begin{aligned}
{}^i\omega_i &= {}^{i-1}\mathbf{R}_i^T {}^{i-1}\omega_{i-1} + \hat{\mathbf{e}}_z \dot{q}_i \\
{}^i\dot{\omega}_i &= {}^{i-1}\mathbf{R}_i^T {}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} + \hat{\mathbf{e}}_z \ddot{q}_i + ({}^{i-1}\mathbf{R}_i^T {}^{i-1}\omega_{i-1}) \times \hat{\mathbf{e}}_z \dot{q}_i \\
{}^i\ddot{\mathbf{P}}_i &= {}^{i-1}\mathbf{R}_i^T \left({}^{i-1}\ddot{\mathbf{P}}_{i-1} + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{P}_i + {}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} \left({}^{i-1}\omega_{i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{P}_i \right) \right) \\
{}^i\ddot{\mathbf{s}}_i &= {}^i\ddot{\mathbf{P}}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i\hat{\mathbf{s}}_i + {}^i\omega_i \times \left({}^i\omega_i \times {}^i\hat{\mathbf{s}}_i \right) \\
{}^i\hat{f}_i &= m_i {}^i\ddot{\mathbf{s}}_i \\
{}^i\hat{n}_i &= {}^i\mathbf{I}_i {}^i\dot{\omega}_i + {}^i\omega_i \times \left({}^i\mathbf{I}_i {}^i\omega_i \right) \\
{}^i f_i &= {}^i\mathbf{R}_{i+1} {}^{i+1} f_{i+1} + {}^i\hat{f}_i \\
{}^i n_i &= {}^i\mathbf{R}_{i+1} {}^{i+1} n_{i+1} + {}^i\hat{n}_i + {}^i\hat{\mathbf{s}}_i \times {}^i\hat{f}_i + {}^i\mathbf{P}_{i+1} \times \left({}^i\mathbf{R}_{i+1} {}^{i+1} f_{i+1} \right) \\
\tau_i &= \hat{\mathbf{e}}_z^T {}^i n_i
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Donde: ${}^i\omega_i$ y ${}^i\dot{\omega}_i$ son la velocidad y aceleración angular del marco de referencia del eslabón i ; q_i , \dot{q}_i y \ddot{q}_i son las posiciones, velocidades y aceleraciones angulares de las articulaciones; ${}^{i-1}\mathbf{R}_i^T$ es la matriz de rotación transpuesta del marco de referencia del eslabón i respecto del marco de referencia del eslabón anterior; $\hat{\mathbf{e}}_z = [0 \ 0 \ 1]^T$; ${}^{i-1}\mathbf{P}_i$, ${}^{i-1}\dot{\mathbf{P}}_i$ y ${}^{i-1}\ddot{\mathbf{P}}_i$ son las posiciones, velocidades y aceleraciones lineales del marco de referencia del eslabón i con respecto al marco de referencia del eslabón anterior; ${}^i\ddot{\mathbf{s}}_i$ es la aceleración lineal del centro de masa del eslabón i , ${}^i\hat{\mathbf{s}}_i$ es la distancia desde el marco de referencia i al centro de masa del eslabón del mismo eslabón; m_i es la masa del eslabón i y ${}^i\mathbf{I}_i$ es el tensor de inercia asociado al eslabón i ; ${}^i\hat{f}_i$ y ${}^i\hat{n}_i$ son la fuerza y momentos que son necesarios aplicar en el centro de masa del eslabón i ; ${}^i f_i$ y ${}^i n_i$ son la fuerza y momento que son necesarios aplicar en la articulación i para realizar el movimiento y τ_i es el par o torque que es necesario aplicar en la articulación i para generar el movimiento.

Este algoritmo fue modificado en la función `dina_ESTADO.m`, en la que se calcula el modelo dinámico inverso de forma Compacta [1] que permite transformar la dinámica del

sistema a variables de estado, y la matriz de rotación del efector final con respecto a la base, que es de utilidad al considerar fuerzas externas aplicadas al efector final.

El modelo dinámico obtenido cuenta con una gran cantidad de términos, razón por la cual no se incluyen las ecuaciones en este documento. Las funciones para obtener estos cálculos se anexan a este documento.

1.3 FUNDAMENTOS DE CONTROL DE MANIPULADORES ROBOTICOS DE MULTIPLES GRADOS DE LIBERTAD

El control de manipuladores seriales con varios eslabones es un problema de Múltiples Entradas y Múltiples Salidas (MIMO). Para ello se utiliza el modelo dinámico inverso en el que se controlan los pares aplicados en las articulaciones (Entradas) para alcanzar una posición del efector final, como resultado del posicionamiento adecuado de dichas articulaciones (Salidas) o el rastreo de trayectorias.

Una representación general del modelo dinámico del manipulador corresponde a una expresión de la forma:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (1.2)$$

Donde \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ y $\ddot{\mathbf{q}}$ son los vectores de posición, velocidad y aceleración angular de las articulaciones del manipulador, $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ es la matriz de inercias, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es la matriz de términos de Coriolis y Centrífugos, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es el vector de términos gravitacionales y $\boldsymbol{\tau}$ es el vector de torques aplicados al manipulador.

Se propone la implementación de dos estrategias de control fundamentales: Control mediante Linealización por realimentación y Control Adaptativo. Estas se estudiarán detalladamente en capítulos posteriores. Ahora se hará una introducción a las implicaciones teóricas de dichas estrategias de control para sistemas MIMO.

1.3.1 CONTROL MEDIANTE LINEALIZACIÓN POR REALIMENTACIÓN

Al igual que para el caso de sistemas SISO (Single Input – Single Output), en sistemas de Múltiples Entradas y Múltiples Salidas (MIMO), como es el caso de de un manipulador de más de un grado de libertad, la estrategia de diseño del controlador consistirá primero en la generación de una relación lineal entre la entrada y la salida y después la formulación de una ley de control basada en estrategias de control lineal.

Sea un sistema MIMO, definido como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (1.3)$$

De igual forma que para un sistema SISO, si es necesario diferenciar la salida del sistema r_i veces para obtener una relación explícita entre la salida y_i y la entrada u_i , entonces se dirá que el sistema tiene grado relativo parcial r_i . En este caso, el grado relativo total será la suma de los grados relativos parciales del sistema.

Para el caso MIMO, la relación entrada – salida expresada en términos de la derivada de Lie, puede presentarse de la forma [2]:

$$y_i^{(r_i)} = L_f^{r_i} h_i + \sum_{j=1}^m L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i u_j \quad (1.4)$$

Que es equivalente a:

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \dots \\ \dots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(\mathbf{x}) \\ \dots \\ \dots \\ L_f^{r_m} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \mathbf{E}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (1.5)$$

Donde $\mathbf{E}(\mathbf{x})$, conocida como matriz de desacople, es invertible.

Así pues, la ley de control, también conocida como Ley de Control de Desacople, puede expresarse de la forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{E}(\mathbf{x})^{-1} \begin{bmatrix} v_1 - L_f^1 h_1(\mathbf{x}) \\ \dots \\ \dots \\ v_m - L_f^m h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Que lleva a m ecuaciones, de la forma:

$$y_i^{(r_i)} = v_i \quad (1.7)$$

El caso en el que el grado relativo total sea igual al orden del sistema, no existe Dinámica Interna, de esa forma se obtiene una linealización Entrada – Estado del sistema. Así pues, se puede diseñar la nueva entrada v_i de la misma forma como se hace para el caso SISO, para realizar regulación y rastreo, sin preocuparse por la estabilidad de la dinámica interna.

1.3.2 CONTROL ADAPTATIVO

En el caso en el que se cuenta con un sistema que posee parámetros que pueden variar lentamente, es necesario utilizar leyes de control y mecanismos de adaptación capaces de ajustarse a esos cambios. Para esto existen algunas aproximaciones fundamentales: Control adaptativo por Modelo de Referencia (MRAC por sus iniciales en inglés), Control Adaptativo de Auto-sintonización y versiones adaptativas de otras estrategias de control como el caso del Control mediante Linealización por Realimentación o Control Robusto.

En general, un controlador adaptativo es un sistema que cuenta con dos lazos de realimentación, el primero incluye la salida de la planta y el controlador, y el segundo que contiene los elementos de ajuste con base en los parámetros. Tal como lo presenta Astrom et al. [6], se puede generalizar mediante el diagrama de bloques mostrado en la Figura 1.2.

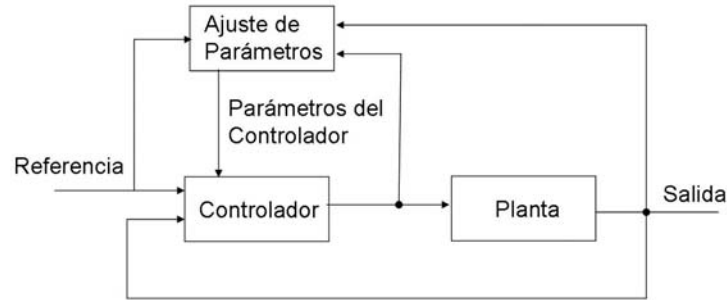


Fig. 1.2 Esquema general del Control adaptativo [6]

Para los casos en los que alcanzar una posición no es suficiente, y se hace necesario seguir una trayectoria especificada, como por ejemplo, evadir obstáculos o completar una tarea en un tiempo estipulado, es necesario definir una precisión en el rastreo de dicha trayectoria. Si además de realizar estas tareas, se requiere considerar la variación de la carga manejada por el manipulador, es necesario contar con unas leyes de control que se adapten a dichas condiciones cambiantes.

Se pretende plantear una estrategia de control adaptativo para la condición en la cual se tiene como parámetro variable la carga manejada por el manipulador. De manera específica, se considerará la carga como si hiciera parte del último eslabón del manipulador, teniendo efecto directamente en las características inerciales de dicho elemento.

Para alcanzar el objetivo de encontrar una ley de control y una ley de adaptación para el parámetro variable, teniendo en cuenta que se plantea una trayectoria deseada $q_d(t)$, se define $\tilde{a} = \hat{a} - a$ como el error de estimación de parámetros, siendo \hat{a} el parámetro estimado y con base en la posibilidad de representar la dinámica del manipulador como una relación lineal en función de los parámetros, se presenta la relación [2]:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{a} \quad (1.8)$$

Donde:

$\mathbf{H}(\mathbf{q})$, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ dependen linealmente de a_i , y $\dot{\mathbf{q}}_r$ es una manipulación notacional denominada vector de “velocidad de referencia” [2], que resulta del “error de velocidad” \mathbf{s} , definido con base en la superficie de deslizamiento de primer orden (discusión que no esta dentro de los alcances de este trabajo) como:

$$\mathbf{s} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r \quad (1.9)$$

Donde:

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \dot{\mathbf{q}}_d - \Lambda \tilde{\mathbf{q}} \quad (1.10)$$

Es decir, es la diferencia entre la velocidad deseada $\dot{\mathbf{q}}_d$ y el error de posición $\tilde{\mathbf{q}}$, donde Λ es una matriz simétrica positiva definida.

Para el control adaptativo de trayectorias, Slotine et al. [2] plantea leyes de control y adaptación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{Y}\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{K}_D \mathbf{s} \\ \dot{\hat{\mathbf{a}}} &= -\Gamma \mathbf{Y}^T \mathbf{s} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Siendo $\mathbf{Y}\hat{\mathbf{a}}$ el término “feedforward”, $\mathbf{K}_D \mathbf{s}$ un término Proporcional Derivativo y Γ una matriz simétrica positiva definida.

Con el objeto de determinar la estabilidad del sistema controlado, se puede usar la función candidata de Lyapunov:

$$V(t) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{s}^T \mathbf{H} \mathbf{s} + \tilde{\mathbf{a}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\mathbf{a}} \right] \quad (1.12)$$

Derivando, se obtiene:

$$\dot{V}(t) = \mathbf{s}^T \mathbf{Y} \tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{s}^T \mathbf{K}_D \mathbf{s} + \dot{\hat{\mathbf{a}}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\mathbf{a}} \quad (1.13)$$

Mediante la utilización de la ley de adaptación presentada en (1.11), se llega a:

$$\dot{V}(t) = -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_D \mathbf{s} \leq 0 \quad (1.14)$$

Como lo demuestra Slotine et al. [2], usando el lema de Barbalat se puede comprobar que $\tilde{\mathbf{q}}$ y $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ tienden a cero cuando t tiende a infinito. Así pues, se puede garantizar la estabilidad global del sistema y la convergencia del error de rastreo.

Esta concepción no necesariamente permite estimar exactamente el valor de los parámetros, simplemente genera valores que permiten que la tarea planteada se realice.

1.4 DESARROLLO DEL TRABAJO Y CONTRIBUCIONES

Además de trabajar en el análisis de sistemas dinámicos complejos, área que actualmente se encuentra en vías de desarrollo alrededor del mundo, este documento puede servir de base para enfrentarse a problemas de aplicación práctica con base en el conocimiento cada vez mas profundo y detallado de sus características.

Este trabajo pretende darle continuidad al proceso de modelado cinemático y dinámico para un manipulador de cinco grados de libertad, realizado para un trabajo de maestría previo [4], aportando el análisis dinámico y algunas estrategias de control aplicables a dicho sistema.

Se presenta en el Capitulo 2 un Análisis de la Dinámica de un Manipulador de 5 grados de libertad como el SCORBOT ER V Plus, con el objeto de determinar su comportamiento dinámico. Para esto, se parte del modelo dinámico planteado por Durango y Calderón [4], y

se calcula una representación compacta y una transformación a la ecuación de estado, con base en la cual se realiza una validación, usando los resultados obtenidos en [4]. Posteriormente en el mismo capítulo se presenta un análisis de estabilidad usando el método indirecto de Lyapunov mediante un símil con el comportamiento del péndulo con torque y mediante el cálculo y análisis de los valores propios del sistema linealizado alrededor de diferentes puntos de equilibrio y con perturbaciones. Finalmente se muestra el análisis de bifurcaciones al variar los parámetros de carga y fricción viscosa con la presencia de saturación en los torques de los actuadores.

En el Capítulo 3 se plantea como estrategia de control la Linealización por Realimentación para sistemas de Múltiples Entradas y Múltiples Salidas (MIMO), teniendo en cuenta que un manipulador de varios grados de libertad, corresponde a un sistema de este tipo. Se desarrolla el procedimiento para obtener una relación lineal entre las entradas y las salidas y con base en eso imponer una dinámica lineal deseada. Se desarrolla pues, la metodología de implementación de este tipo de controladores tanto para las tareas de regulación como de rastreo y se calculan los errores de posición correspondientes. Finalmente se analizan los efectos de la carga, la fricción y la saturación de los actuadores para las mismas tareas de control mencionadas anteriormente.

En el Capítulo 4 se presenta la alternativa de control adaptativo, de especial interés debido a las condiciones cambiantes de parámetros tan significativos como la carga. Para plantear la estrategia de control se requirió obtener una representación del modelo compacto que fuera lineal en función del parámetro, en este caso la masa puntual de la carga. Para esto se partió de una representación de un modelo de dos grados de libertad y posteriormente se calculó para el modelo de cinco grados de libertad, teniendo en cuenta que dicho cálculo se hace de manera analítica y para ecuaciones de gran tamaño. Posteriormente, se implementaron las leyes de adaptación y control para trayectorias definidas y se analizó el error de posición. Finalmente, se evaluaron los efectos de la carga, la fricción y la saturación en los actuadores.

En el Capitulo 5 se presentan las Conclusiones y se plantean los trabajos que en el futuro podrían complementar esta investigación.

Para la divulgación de los adelantos en esta investigación, se presentó un artículo aprobado al evento internacional CAR'S AND FOF de 2007, con el nombre "Feedback Linearization Control For A Multiple Joint Manipulator".

Finalmente, se colaboró en la realización del artículo "Modelado, identificación paramétrica y control del robot Scrobot-ER V plus", presentado para publicación en la revista indexada *Ingeniería y Competitividad* de la Universidad del Valle y que actualmente se encuentra en evaluación. Esto, como resultado del apoyo a la tesis de grado de los estudiantes Alexander Constain y Karoll Torres de la Universidad del Cauca [8], dirigidos por el Doctor en Robótica Oscar Andres Vivas Albán.

CAPITULO 2. ANÁLISIS DE LA DINAMICA DEL MANIPULADOR DE CINCO GRADOS DE LIBERTAD (SCORBOT ER V PLUS)

2.1 INTRODUCCIÓN

Como herramienta fundamental en el diseño de sistemas de control existen estrategias de análisis que permiten comprender detalladamente las características del sistema analizado y plantear soluciones eficientes para su funcionamiento.

En este capítulo se presentan los procedimientos usados para analizar características del modelo dinámico de un manipulador de cinco grados de libertad conocido como el SCORBOT ER V PLUS, de la empresa Eshed Robotec y que se presenta en la Fig. 2.1.

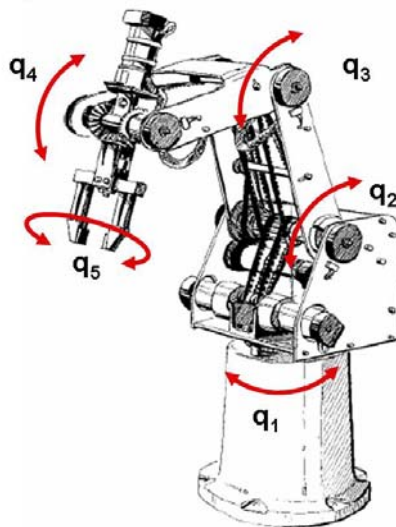


Fig. 2.1. SCORBOT ER V PLUS. Tomado de [3]

2.2 MODELO DINÁMICO DEL MANIPULADOR DE CINCO GRADOS DE LIBERTAD. MÉTODO DE NEWTON – EULER

El modelo dinámico del SCORBOT es la representación matemática de un sistema de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO), de cinco grados de libertad, con parámetros cinemáticos e inerciales definidos.

Utilizando las herramientas simbólicas de Matlab®, Durango y Calderón [4] lograron obtener una expresión analítica del modelo dinámico del manipulador, que permitió realizar análisis y simulación del sistema para el consiguiente planteamiento de estrategias de control.

En general, se han desarrollado dos métodos para la obtención del modelo dinámico de un manipulador robótico. El primero de ellos está enfocado al balance de energía y es conocido como el método de Lagrange y el segundo (usado para este trabajo y presentado en el Capítulo 1) que hace uso de las leyes de la mecánica de Newton y Euler para obtener un modelo de balance de fuerzas y momentos.

El modelo dinámico analítico de un manipulador de cinco grados de libertad cuenta con una gran cantidad de términos, que aumentan a medida que se incrementan los grados de libertad. Para un manipulador de cinco grados de libertad se puede obtener una ecuación de estado compuesta por diez ecuaciones diferenciales de primer orden altamente no lineales.

2.2.1 Representación Compacta y Matriz De Rotación del Efecto Final

Para obtener el Modelo Dinámico en forma compacta, de tal forma que sea posible realizar análisis y simulación, se cuenta con un algoritmo iterativo desarrollado por Walker y Paul [7], que permite de manera sistemática obtener una representación de la dinámica del sistema mediante el empleo de leyes de Newton y Euler.

El método permite obtener una expresión general de la forma:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.1)$$

Donde \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ y $\ddot{\mathbf{q}}$ son los vectores de posición, velocidad y aceleración angular de las articulaciones del manipulador, $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ es la matriz de inercias, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es la matriz de términos de Coriolis y Centrífugos, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es el vector de términos gravitacionales y $\boldsymbol{\tau}$ es el vector de torques aplicados al manipulador. En el caso de un manipulador de cinco grados de libertad $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ es una matriz de 5×5 ; $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es un vector de 5×1 ; $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es un vector de 5×1 y $\boldsymbol{\tau}$ es un vector de 5×1 .

Durango y Calderón [4] usaron las herramientas simbólicas de Matlab® para implementar el algoritmo descrito por Walker y Paul [7], para la obtención del modelo dinámico inverso, para lo cual se asumieron los parámetros inerciales del SCORBOT. A dicha implementación se le han aplicado modificaciones que hacen posible obtener una representación compacta del modelo dinámico y adicionalmente el cálculo de la matriz de rotación que permita incluir el efecto de la aplicación de una fuerza externa, representada por una carga puntual en el centro de gravedad del efector final. Esto se encuentra en la función `dina_ESTADO.m`, anexa a este documento. Es necesario tener en cuenta que se usa la posición de referencia planteada por Durango y Calderón [4] y mostrada más adelante en este capítulo en la figura 2.8.

La matriz de rotación del efector final con respecto a la base, corresponde a la multiplicación de las matrices de rotación de cada elemento del manipulador en relación con el anterior, desde la base hasta la última articulación. Así pues, la matriz de rotación corresponde a:

$${}^0\mathbf{R}_T = {}^R\mathbf{R}_0 {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{R}_4 {}^4\mathbf{R}_5 {}^5\mathbf{R}_T \quad (2.2)$$

Donde ${}^{i-1}\mathbf{R}_i$ es la matriz de rotación del elemento i con respecto al elementos $i-1$, y los subíndices R y T , corresponden a los marcos de Referencia y del efector final (Herramienta o Tool en Ingles) respectivamente. Esta referencia se incluye, puesto que el cálculo no está incluido dentro del modelado presentado por Durango y Calderón [4], permitiendo entender que dicho modelado no considera el sistema con capacidad para desplazar carga.

Para obtener la representación compacta se calculan de manera independiente los términos simbólicos de la matriz de Inercias $\mathbf{H}(\mathbf{q})$, de la matriz de términos de Coriolis y centrífugos $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y de la matriz de términos gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ (presentados en los archivos anexos H_Hinv.m, Cs.m y Gs.m). Estas matrices simbólicas cuentan con cientos de términos, y están incluidas en los archivos de simulación presentados en los anexos.

2.2.2 Representación en Variables de Estado

Los términos de la ecuación en forma simbólica permiten calcular la representación en variables de estado, usando el siguiente vector de estado:

$$\mathbf{x} = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4, \dot{q}_5] \quad (2.3)$$

De esta forma, la transformación correspondiente resulta en la ecuación de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_6 \\ \dot{x}_2 &= x_7 \\ \dot{x}_3 &= x_8 \\ \dot{x}_4 &= x_9 \\ \dot{x}_5 &= x_{10} \\ \dot{x}_6 &= \mathbf{H}(\mathbf{x})_{\text{Fila1}}^{-1} (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})) \\ \dot{x}_7 &= \mathbf{H}(\mathbf{x})_{\text{Fila2}}^{-1} (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})) \\ \dot{x}_8 &= \mathbf{H}(\mathbf{x})_{\text{Fila3}}^{-1} (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})) \\ \dot{x}_9 &= \mathbf{H}(\mathbf{x})_{\text{Fila4}}^{-1} (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})) \\ \dot{x}_{10} &= \mathbf{H}(\mathbf{x})_{\text{Fila5}}^{-1} (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})) \end{aligned} \quad (2.4)$$

En forma compacta se puede expresar como: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})$, con $\mathbf{x} \in R^n$, $\boldsymbol{\tau} \in R^m$, para $n = 10$, $m = 5$. Por conveniencia en la notación, en adelante no se incluirá el tamaño de las matrices para los tratamientos analíticos relacionados con la anterior ecuación de estado.

Cabe recordar, que una cualidad derivada de las condiciones geométricas y físicas del manipulador hace que $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ sea una matriz positiva definida y por tanto invertible en todos los casos.

El procedimiento para la obtención de las expresiones analíticas de esta transformación es mostrado en la primera parte del archivo anexo Esp_Estado_Jacob.m.

2.2.3 Validación del Modelo Dinámico Modificado (forma compacta)

Con la representación en variables de estado, es posible realizar una validación del modelo dinámico directo e inverso, mediante la comparación con una herramienta de análisis para Robótica conocida como Hemero y desarrollada por Ollero [9], que posibilita la realización de simulaciones simultaneas del comportamiento del modelo modificado. Durango y Calderón [4] realizan la validación haciendo una comparación similar para sus modelos.

2.3.3.1 Modelo Dinámico Inverso

Para un conjunto de posiciones, velocidades y aceleraciones, es posible calcular los torques necesarios en cada uno de los actuadores del manipulador que permiten alcanzar dichas condiciones. Para esto basta con resolver el problema dinámico inverso, que corresponde a la solución de:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (2.5)$$

La función anexa scorbot_dyn_inv_conv.m es una versión transformada de la función presentada por Durango y Calderón [4], en la cual se tiene como parámetros generales de entrada: las posiciones, velocidades, aceleraciones, parámetros inerciales y la fricción, en

caso de ser considerada; y se obtienen como salida los torques requeridos para una condición específica. Esta función es utilizada de manera recursiva para el cálculo de torques en posiciones específicas en el estudio de estabilidad del manipulador. Se puede verificar que la transformación hecha a la función original consiste en realizar una representación de forma compacta, tras el cálculo de manera individual de la expresión simbólica de cada uno de los términos de (2.1).

Esta misma función es utilizada para la validación del modelo dinámico inverso con base en trayectorias articulares individuales predefinidas, usando como referencia las herramientas de Hemero, y realizando una comparación de los torques de salida mediante verificación del error, que permite corroborar el correcto funcionamiento de las funciones y la adecuada obtención de las modificaciones hechas al modelo presentado por Durango y Calderón [4]. Es por esto que se utilizan las mismas trayectorias planteadas por ellos, pero usando la función modificada para el cálculo de la dinámica inversa.

De esta forma, las trayectorias propuestas por Durango y Calderón [4] son:

<i>Posiciones</i>	<i>Velocidades</i>	<i>Aceleraciones</i>
$x_1 = 5,4106 \sin(0,1571t) + 0,4363$	$\dot{x}_1 = 0,85 \cos(0,1571t)$	$\ddot{x}_6 = -0,1335 \sin(0,1571t)$
$x_2 = 0,2879t + 0,8727$	$\dot{x}_2 = 0,2879$	$\ddot{x}_7 = 0$
$x_3 = 0,04538t^2 - 2,2689$	$\dot{x}_3 = 0,09076t$	$\ddot{x}_8 = 0,09076$
$x_4 = e^{0,17116t} - 4,8397$	$\dot{x}_4 = 0,17116e^{0,17116t}$	$\ddot{x}_9 = 0,02929575e^{0,17116t}$
$x_5 = 0,02513(t - 5)^3$	$\dot{x}_5 = 0,07539(t - 5)^2$	$\ddot{x}_{10} = 0,15078(t - 5)$

Tabla 2.1. Trayectorias de validación propuestas por Durango y Calderón [4].

La figura 2.2 muestra las posiciones y velocidad presentadas en la Tabla 2.1.

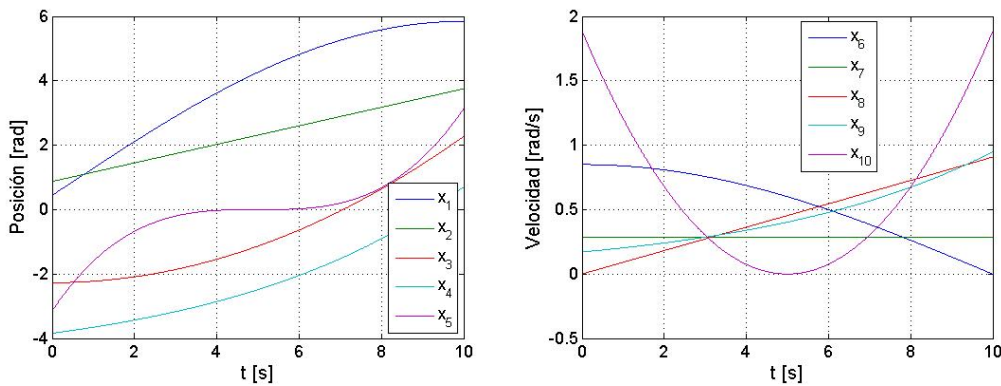


Fig. 2.2. Trayectorias y Velocidades propuestas por Durango y Calderón [4]

Los resultados obtenidos después de la aplicación de estas trayectorias a las función de cálculo de la dinámica inversa modificada, se presentan en la Fig. 2.3. Nótese que el error es muy bajo.

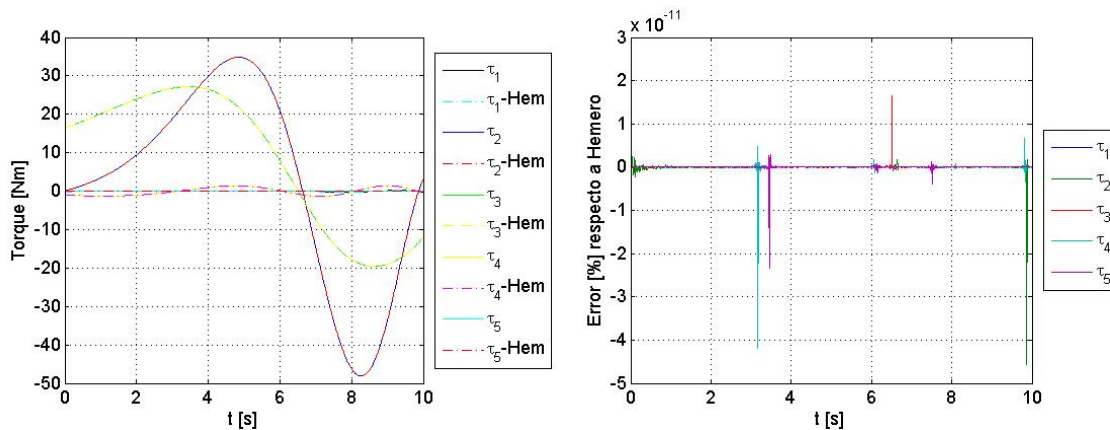


Fig. 2.3. Torques comparados con Hemero y Error correspondiente.

Se aprecia la similitud con la misma validación realizada por Durango y Calderon [4], demostrando la correcta implementación de las modificaciones a la función correspondiente.

En la figura 2.4 se presenta una trayectoria en la que se varía la posición desde la condición de mayor esfuerzo, correspondiente a la posición del brazo extendido totalmente. En esta situación, las posiciones, velocidades y aceleraciones están definidas por:

<i>Posiciones</i>	<i>Velocidades</i>	<i>Aceleraciones</i>
$x_1 = 0$	$\dot{x}_1 = 0$	$\ddot{x}_6 = 0$
$x_2 = 0.2879t + 0.8727$	$\dot{x}_2 = 0.2879$	$\ddot{x}_7 = 0$
$x_3 = 0$	$\dot{x}_3 = 0$	$\ddot{x}_8 = 0$
$x_4 = -\frac{\pi}{2}$	$\dot{x}_4 = 0$	$\ddot{x}_9 = 0$
$x_5 = 0$	$\dot{x}_5 = 0$	$\ddot{x}_{10} = 0$

Tabla 2.2. Trayectoria de validación para el caso de mayor esfuerzo inicial.

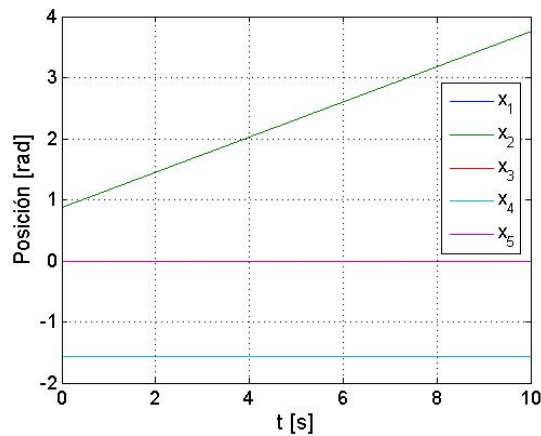


Fig. 2.4 Trayectoria de validación.

La trayectoria de validación consiste en un desplazamiento lineal que tiene como condición inicial el brazo extendido, con una inclinación dada por $x_2 = 0.87 \text{ rad}$. El desplazamiento se realiza en un plano manteniendo x_1 constante ($x_1 = 0$), y permaneciendo extendido durante toda la trayectoria, hasta la posición final $x_2 = 3.74 \text{ rad}$. La velocidad y la aceleración permanecen constantes, como puede verse en la Tabla 2.2.

En la Fig. 2.5 se muestra la gráfica de torques aplicados a las articulaciones para lograr el movimiento planteado. Este resultado se obtiene al utilizar la función de cálculo de

dinámica inversa. Para el caso de la articulación x_2 , se puede observar el pico de torque en el arranque ($\tau_2 = 9.11 \text{ Nm}$), el cruce por cero en el punto en el que el brazo está vertical ($x_2 = \pi/2$) y el máximo en valor absoluto (mínimo negativo) en el que $\tau_2 = -14.32 \text{ Nm}$, que ocurre cuando la posición del manipulador está totalmente horizontal ($x_2 = \pi$).

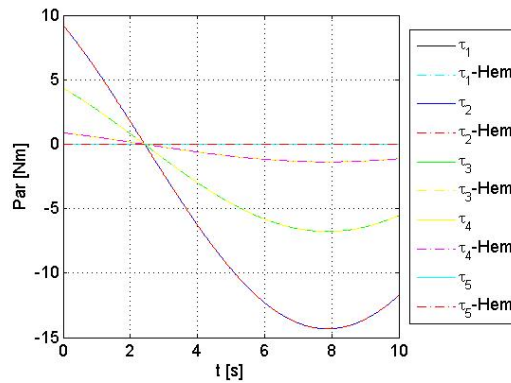


Fig 2.5 Torques calculados y superpuestos con Hemero

La Fig. 2.6 muestra la gráfica del error comparativo entre las salidas de las funciones de cálculo de la dinámica inversa modificada y la presentada en Hemero. Se puede ver que el error es del orden de 10^{-14} que demuestra la validez de las modificaciones.

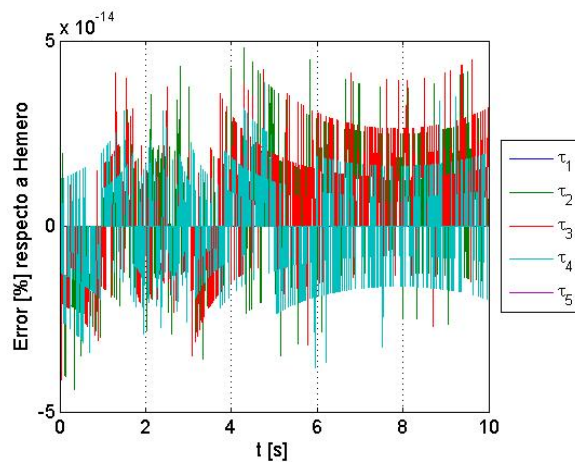


Fig 2.6. Error comparativo con Hemero.

2.3.3.2 Modelo Dinámico Directo

Se pretende obtener expresiones de posición, velocidad y aceleración para un conjunto de torques especificado, bien sea para la condición estática o en movimiento (trayectorias). Como se presenta en [1] [4] [5], este es un problema más complejo, puesto que existen varias soluciones para cada conjunto de torques. En términos generales, el problema consiste en dar solución al sistema de ecuaciones de estado (2.4), para lo cual se pueden usar los algoritmos de integración clásicos (Runge-Kutta). En Matlab® existe un conjunto de algoritmos de integración conocidos como los ODE, de los cuales se utilizan el ODE45 y el ODE15, que permiten ajuste automático o manual de paso de integración y que con base en un intervalo de tiempo específico y condiciones iniciales correspondientes se puede obtener la integración de trayectorias completas para sistemas suaves y continuos.

Así pues, desde el punto de vista general, la solución a este problema consiste en resolver la ecuación:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}(\mathbf{q})^{-1}(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})) \quad (2.6)$$

Como se expuso anteriormente, se cuenta con la condición derivada de las características físicas de $\mathbf{H}(\mathbf{q})$, que garantizan que en todos los casos sea una matriz definida positiva y por lo tanto siempre sea invertible.

Para la validación de este modelo es importante tener en consideración el efecto del estado transitorio. Teniendo en cuenta para la validación, que la respuesta del sistema cuenta de manera natural con un periodo transitorio, es necesario presentar la respuesta después de un razonable tiempo de estabilización. Así pues, la validación consiste en la visualización del comportamiento del sistema después de un tiempo de estabilización suficiente (en este caso de 7 segundos), tal como se muestra en la función anexa Est_Estacion_700.m. Esta consideración mejora los resultados de validación presentados por Durango y Calderón [4].

Se requieren los vectores de torques correspondientes a una posición o a una trayectoria, para lo cual se usa el mismo sistema de archivo y de validación propuesto por Durango y

Calderón [4], compuesto por vectores de torques obtenidos en la simulación de trayectorias del modelo dinámico inverso. La simulación del sistema aislando el tiempo transitorio y capturando la respuesta del sistema a partir de 7 segundos se presentan en las Fig. 2.7.

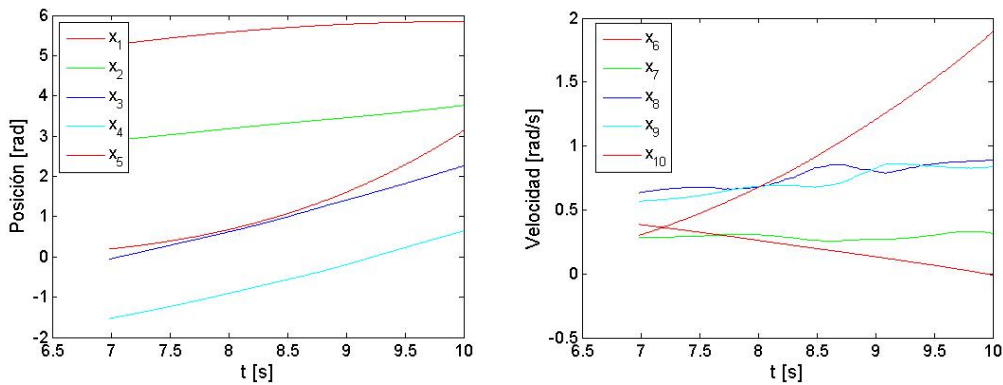


Fig 2.7. Posiciones y Velocidades (Modelo dinámico directo)

2.3 ANÁLISIS DE CONDICIONES DE EQUILIBRIO

En la práctica, la operación de un manipulador está en función de la posición y la orientación del efector final. Es convencional contar con un marco de referencia asociado al efector final y por tanto la posición de las articulaciones estará en función de la posición y orientación de este elemento del manipulador.

Un manipulador puede ser considerado, desde el punto de vista físico, como un péndulo con torque, cuyo cuerpo está compuesto por un conjunto de eslabones articulados, y las características de su comportamiento pueden ser comparables bajo ciertas condiciones.

Desde el punto de vista del sistema dinámico, para un péndulo con torque se puede afirmar que existen varios puntos de equilibrio (posiciones y velocidades) asociados a cada torque posible, y que para cada punto de equilibrio existirá un torque relacionado (problemas dinámicos directo e inverso respectivamente).

El caso del manipulador, teniendo en cuenta las diferentes posibles soluciones al problema dinámico directo, se puede afirmar que para un conjunto de torques (dependiendo de la

cantidad de articulaciones que tenga) pueden existir varias posiciones articulares posibles (si son físicamente alcanzables), mientras que, para cada conjunto de posiciones articulares alcanzables (físicamente posibles) existe un conjunto de torques relacionados. Así pues, para obtener una posición deseada del efector final, que es equivalente a decir: para llevar el manipulador a una posición de equilibrio deseada, existen diferentes soluciones posibles (configuración de las diferentes articulaciones) y por lo tanto diferentes conjuntos de torques posibles asociados.

Para el análisis de estabilidad, es convencional el cálculo de los puntos de equilibrio, que requiere de darle solución a la ecuación:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = 0 \quad (2.7)$$

Mediante un sistema de generación de condiciones iniciales aleatorias, y teniendo en cuenta que para un conjunto de torques pueden existir varias posiciones asociadas, se implementó un algoritmo para dar solución a (2.7) con diferentes conjuntos de Torques. Cabe anotar que las condiciones iniciales están enmarcadas dentro de los límites impuestos por las condiciones mecánicas del manipulador y buscan soluciones alcanzables para dichas condiciones. Este algoritmo es presentado en la función anexa Sol_nolineal1.m.

Como resultados se obtuvieron algunas de las posiciones asociadas a dichos conjuntos de torques, que representan las posiciones de equilibrio correspondientes, y que permitirán hacer un análisis más específico de la estabilidad de esos puntos de equilibrio.

Desde otro punto de vista, se puede afirmar que para cada posición articular alcanzable en equilibrio existe un conjunto de torques asociados. Bajo este punto de vista, se escoge un conjunto de configuraciones intuitivamente críticas que permiten analizar las condiciones de estabilidad.

Con relación a la geometría del manipulador y con base en la designación hecha por Durango y Calderón [4], se cuenta con una posición de referencia mostrada en la figura 2.8. En esta ubicación, todas las posiciones son: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ rad.

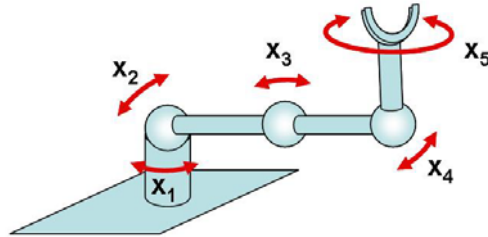


Fig 2.8. Posición de referencia del manipulador

2.3.1 Análisis de estabilidad

Para realizar análisis de estabilidad y partiendo de la representación en variables de estado del sistema, se utiliza el método indirecto de Lyapunov que permite identificar características de estabilidad con base en el estudio del modelo linealizado alrededor de un punto de equilibrio específico.

El procedimiento de linealización consiste en realizar el cálculo de la matriz jacobiana asociada al sistema y analizar los valores propios de esa matriz para los diferentes puntos de equilibrio.

Debido a la similitud de las características del manipulador con un péndulo con torque, se presentará un análisis para la dinámica no lineal de este último, que permita aproximarse a algunas características de estabilidad del robot.

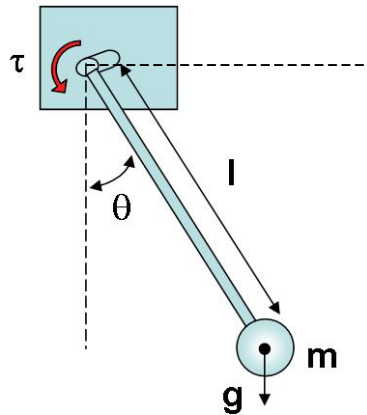


Fig. 2.9 Péndulo con torque

Para el caso del péndulo con torque mostrado en la Fig. 2.9, se pueden determinar las regiones de operación en las cuales los puntos de equilibrio son estables e inestables. Mediante el análisis presentado a continuación, es posible comprender porqué los puntos de equilibrio (posiciones articulares) ubicados por encima del eje horizontal son inestables, mientras que los que están ubicados por debajo del mismo son estables. Para ilustrar este punto se parte del modelo dinámico análogo al caso del manipulador y que bajo ciertas condiciones puede comportarse de la misma forma. La dinámica del péndulo con torque está dada por:

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgl \sin \theta = \tau \quad (2.8)$$

La representación en variables de estado de este sistema corresponde al vector de estados: $x = [\theta, \dot{\theta}]$.

La ecuación de estado correspondiente:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{ml^2} \tau - \frac{b}{ml^2} x_2 - \frac{g}{l} \sin x_1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Los puntos de equilibrio de este sistema ($\mathbf{f}(\mathbf{x}, \tau) = 0$) son:

$$\begin{aligned} x_2 = 0 = x_2^* \\ \tau = mgl \sin x_1 \Rightarrow \sin x_1 = \frac{\tau}{mgl} \Rightarrow x_1 = \arcsin\left(\frac{\tau}{mgl}\right) = x_1^* \end{aligned} \quad (2.10)$$

Donde x_1^* y x_2^* son las variables de estado en equilibrio. Así pues, el sistema se encuentra en equilibrio cuando la velocidad es cero ($x_2 = 0$), y dicha posición (x_1) depende del torque τ , de la masa m y de la longitud l ; o visto de otra forma, el torque necesario para mantener la posición de equilibrio depende de la masa, la longitud y del seno de la posición.

Ya que m , g , y l son constantes positivas, de (2.10) se puede concluir que para que el sistema esté en equilibrio, se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \tau > 0, \quad \text{para} \quad 0 < x_1 < \pi \\ \tau < 0, \quad \text{para} \quad \pi < x_1 < 2\pi \\ \tau = 0, \quad \text{para} \quad x_1 = 0, x_1 = \pi \end{aligned} \quad (2.11)$$

Desde el punto de vista del análisis de estabilidad por el método indirecto de Lyapunov, al calcular la matriz Jacobiana se obtiene:

$$A = \left. \frac{\partial f(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x^*, \tau} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_1 & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}_{x^*, \tau} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_1^* & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

El $\det[\lambda I - A] = 0$, permite obtener la ecuación característica:

$$\lambda^2 + \frac{b}{ml^2} \lambda + \frac{g}{l} \cos x_1^* = 0 \quad (2.13)$$

Que tiene como raíces:

$$\lambda = -\frac{b}{2ml^2} \pm \frac{\sqrt{\frac{b^2}{m^2l^4} - 4\frac{g}{l}\cos x_1^*}}{2} \quad (2.14)$$

El comportamiento mencionado en la literatura sobre el análisis de la dinámica del péndulo, permite clasificar su estabilidad en función de la posición con respecto al eje horizontal (péndulo colgante o invertido), como lo presenta Shen et. al. en [9]; de la misma forma que se caracteriza mediante del análisis del comportamiento de las raíces de (2.13).

La interpretación física que resulta de evaluar el efecto de una perturbación para el sistema en equilibrio, puede ayudar a comprender el comportamiento del manipulador.

Al aplicar una perturbación al sistema en equilibrio (permanece el torque constante y se desvía de la posición de equilibrio), y dependiendo de si la posición se encuentra por encima o por debajo del eje horizontal, se puede afirmar que:

- a. Si la posición está por encima del eje horizontal:
 - Si la perturbación desvía la posición de equilibrio hacia arriba, entonces:
 $\tau > a_1 \sin x_1$ y el péndulo tiende a subir.
 - Si la perturbación desvía la posición de equilibrio hacia abajo, entonces:
 $\tau < a_1 \sin x_1$ y al péndulo tiende a caer.

- b. Si la posición está por debajo del eje horizontal:
 - Si la perturbación desvía la posición de equilibrio hacia arriba, entonces:
 $\tau < a_1 \sin x_1$ y al péndulo tiende a caer (hacia el punto de equilibrio).
 - Si la perturbación desvía la posición de equilibrio hacia abajo, entonces:
 $\tau < a_1 \sin x_1$ y al péndulo tiende a subir (hacia el punto de equilibrio).

2.3.2 Efectos de la carga y la fricción viscosa(sin saturación en los torques de los actuadores).

El modelo del manipulador con fricción viscosa, cuenta con un término adicional. Así pues, se tiene que:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\gamma}\dot{\mathbf{q}} \quad (2.15)$$

Donde $\boldsymbol{\gamma}$ corresponde al coeficientes de fricción viscosa en Nm/(rad/s).

Puesto que se cuenta con la representación del modelo del manipulador de cinco grados de libertad de manera analítica, es posible calcular la matriz Jacobiana para el análisis de estabilidad del manipulador, bajo condiciones específicas de posición, fricción y carga.

Con base en una condición de equilibrio específica y su correspondiente posición simétrica respecto al eje horizontal, se pretende cambiar la carga en valores incrementales considerando el sistema con y sin fricción viscosa. Las posiciones de equilibrio seleccionadas corresponden a las mostradas en la Fig. 2.10 , para las cuales las posiciones A y B se diferencian por el valor de x_2 (tienen los mismos valores en los torques), así:

$$\begin{aligned} x_1 = x_3 = x_5 &= 0 \\ x_2 = \pm \pi/4, x_4 &= -\pi/2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Se obtienen los valores propios correspondientes a la variación de las condiciones de carga entre 0 y 2 kg (definiendo $m_{sl} = m_5 + m_l$, como adición de masa al último eslabón del manipulador en el mismo centro de gravedad), considerando el efecto de la fricción viscosa, para lo cual se usan coeficientes de fricción viscosa de 0, 0.1 y 3 Nm/(rad/s). No se incluye el efecto de saturación de torques de los actuadores.

Se obtuvieron los resultados que se resumen en la Tabla 2.3, sin saturación de torques:

	m_1			
	0	0.2	0.4	2
A				
$\gamma=0$	-6.394438027	-6.605602147	-6.810294659	-8.26697752
$X_2 = \pi/4$	-3.641674331	-3.69013946	-3.73968238	-4.22253382
$X_1=X_3=X_5=0$	-2.124185685	-2.258769117	-2.379534378	-2.981558503
$X_4 = -\pi/2$	0	0	0	0
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	2.124185685	2.258769117	2.379534378	2.981558503
	3.641674331	3.690139455	3.739682383	4.222533817
	6.394438027	6.605602147	6.810294659	8.26697752
A				
$\gamma=0.1$	-7.921624395	-8.128964505	-8.330005392	-9.763897342
$X_2 = \pi/4$	-3.914378723	-3.96891719	-4.025922342	-4.570699853
$X_1=X_3=X_5=0$	-2.312203035	-2.433041561	-2.539763485	-3.047953306
$X_4 = -\pi/2$	-1.067234356	-1.064274473	-1.06156265	-1.046005122
	-0.111898451	-0.10776863	-0.103930576	-0.080851495
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	1.91082687	2.054531993	2.185816446	2.890816842
	3.426673407	3.471216963	3.51465703	3.916165565
	5.21188496	5.415051678	5.612865271	7.034457645
A				
$\gamma=3$	-86.34014753	-86.33344287	-86.33091539	-86.40267726
$X_2 = \pi/4$	-32.01703067	-31.92823419	-31.84687951	-31.38015365
$X_1=X_3=X_5=0$	-20.7144482	-20.62464868	-20.55004514	-20.28532167
$X_4 = -\pi/2$	-3.953361931	-3.940467691	-3.928758974	-3.862031811
	-3.356953522	-3.233058904	-3.117917265	-2.425544846
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	0.241312521	0.271692264	0.30148991	0.527983799
	0.67382791	0.72266601	0.77110232	1.147600126
	2.128189745	2.2005223	2.26655314	2.641133341
B				
$\gamma=0$	0	0	0	0
$X_2 = -\pi/4$	0	0	0	0
$X_1=X_3=X_5=0$	0	0	0	0
$X_4 = -\pi/2$	0	0	0	0
	- 2,12418568450517i	- 2,2587691168637i	- 2,37953437757904i	- 2,9815585028846i
	2,12418568450517i	2,2587691168637i	2,37953437757904i	2,9815585028846i
	- 3,64167433073855i	- 3,69013945542023i	- 3,739682382656i	- 4,22253381728111i
	3,64167433073855i	3,69013945542023i	3,739682382656i	4,22253381728111i
	- 6,39443802686954i	- 6,60560214702529i	- 6,81029465853688i	- 8,26697752028563i
	6,39443802686954i	6,60560214702529i	6,81029465853688i	8,26697752028563i
B				
$\gamma=0.1$	0	0	0	0
$X_2 = -\pi/4$	0	0	0	0
$X_1=X_3=X_5=0$	0	0	0	0
$X_4 = -\pi/2$	0	0	0	0
	-0.111898451	-0.10776863	-0.103930576	-0.080851495
	-1.067234356	-1.064274473	-1.06156265	-1.046005122
	-0,20556 - 2,13789i	-0,19288 - 2,27492i	-0,179243 - 2,39753i	-0,07462903 - 2,993391i
	-0,20556 + 2,137890i	-0,19288 + 2,2749i	-0,17924313 + 2,397533i	-0,0746290 + 2,993391i
	-0,241805 - 3,61191i	-0,24775 - 3,6592i	-0,2556 - 3,708024i	-0,3320633 - 4,20212i
	-0,241805 + 3,61191i	-0,24775 + 3,659216i	-0,2556158 + 3,708024i	-0,332063 + 4,202124i
	-1,35203 - 6,21682i	-1,35441 - 6,43440i	-1,356317 - 6,64479i	-1,36386 - 8,132442i
	-1,35203 + 6,21682i	-1,3544198 + 6,43440i	-1,356317 + 6,644798i	-1,36386 + 8,1324i
B				
$\gamma=3$	0	0	0	0
$X_2 = -\pi/4$	0	0	0	0
$X_1=X_3=X_5=0$	0	0	0	0
$X_4 = -\pi/2$	0	0	0	0
	-0.245718048	-0.277046248	-0.307844054	-0.544227983
	-0.708806037	-0.763422157	-0.818097988	-1.262586929
	-1,017279 - 2,71705i	-0,96340 - 2,782412i	-0,9148 - 2,83949i	-2,425544846
	-1,017279 + 2,71705i	-0,96340 + 2,782412i	-0,914879 + 2,83949i	-0,6521 - 3,12320i
	-3.356953522	-3.233058904	-3.117917265	-0,652142 + 3,12320i
	-19.5338	-19.36437532	-19.20832766	-18.24574669
	-32.01703067	-31.92823419	-31.84687951	-31.38015365
	-85.44174484	-85.37201695	-85.30654535	-84.8764668

Tabla 2.3 Valores propios, variación de carga, fricción y posición (sin saturación)

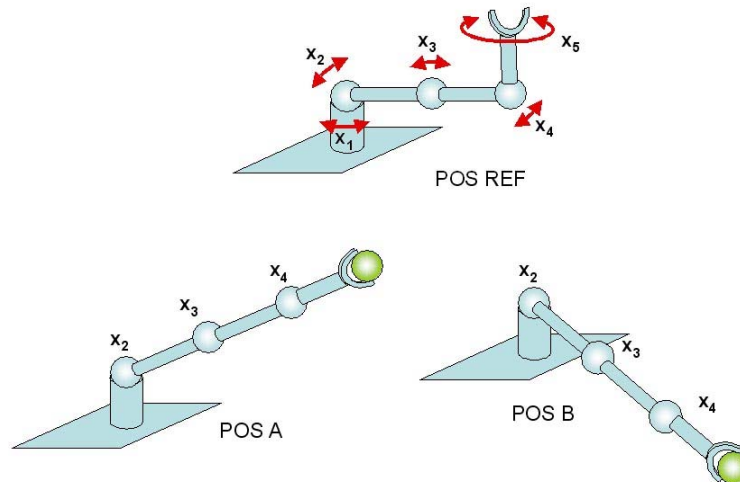


Fig. 2.10. Posiciones de equilibrio con simetría respecto al eje horizontal

De la Tabla 2.3 se puede concluir que:

- Para todos los casos, hay por lo menos un par de valores propios iguales a cero, correspondientes a la articulación de la base (x_1), condición que podría caracterizar un subespacio de equilibrio. Para el caso en que no hay fricción ($\gamma = 0$), existe otro par de valores propios iguales a cero, correspondientes a la articulación de la muñeca (x_5) que para la condición ($\gamma = 0$) podría caracterizar otro subespacio de equilibrio. Cabe anotar dos situaciones adicionales: la condición $\gamma = 0$ es en la práctica una condición irreal, además, se puede verificar revisando las ecuaciones de la dinámica, que $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})$ es independiente de x_1 y x_5 , lo que explica, de manera verificable, que la dinámica no depende de estas posiciones y permite comprender dicha condición.
- Tal como en el caso del péndulo, cuando la fricción es cero ($\gamma = 0$), los valores propios correspondientes a articulaciones 2, 3 y 4 de la configuración **A**, están agrupados en pares reales de signo contrario, caracterizando puntos de silla.
- Para el caso en que la fricción es diferente de cero ($\gamma = 0.1$, $\gamma = 3$), y comparando los valores propios de las posiciones **A** y **B**, para las articulaciones 2, 3, 4 y 5, se puede

verificar que al pasar de la posición **A** a la **B** existe un cambio en las condiciones de estabilidad al cambiar de puntos de silla o inestables a puntos estables (nodos y focos).

2.3.3 Respuestas ante perturbaciones

Las anteriores conclusiones van acompañadas de simulaciones para todos los casos presentados en la Tabla 2.3. Dichas simulaciones consisten en ubicar el sistema en equilibrio y al cabo de 2 seg. generar un par de perturbaciones así: la primera en el efector final representada por un impulso (incremento súbito de la carga $m_l = 10$ Kg) de muy corta duración (0.1 seg), y la segunda la aplicación de un torque de impulso en la articulación 5 ($\tau_5 = 1$ Nm) para verificar las condiciones de estabilidad reflejadas por los valores propios presentados en la Tabla 2.3.

Así pues, para los casos de la Posición **A** (Ver Tabla 2.3), los resultados de las simulaciones son:

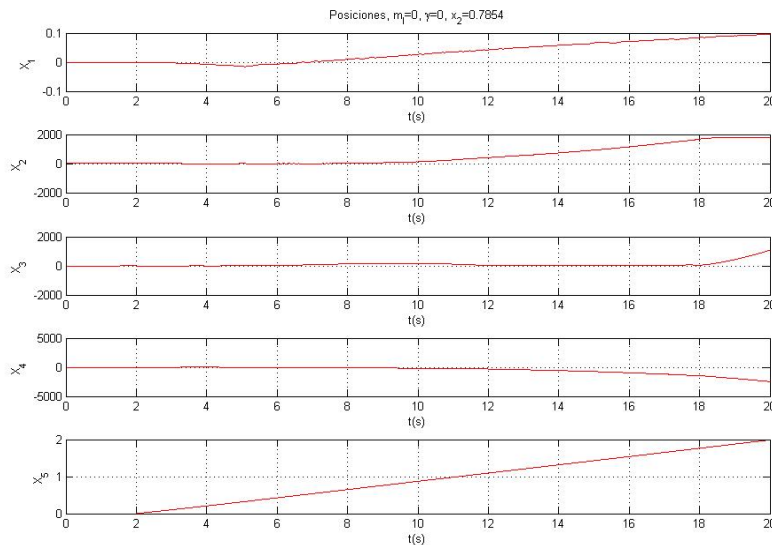


Fig. 2.11 Respuesta a impulso con: $m_l = 0$ $\gamma = 0$ $x_2 = \pi/4$

Nótese en la Fig. 2.11 como al aplicar las perturbaciones a los 2 seg., las posiciones tienden a crecer indefinidamente (Inestabilidad).

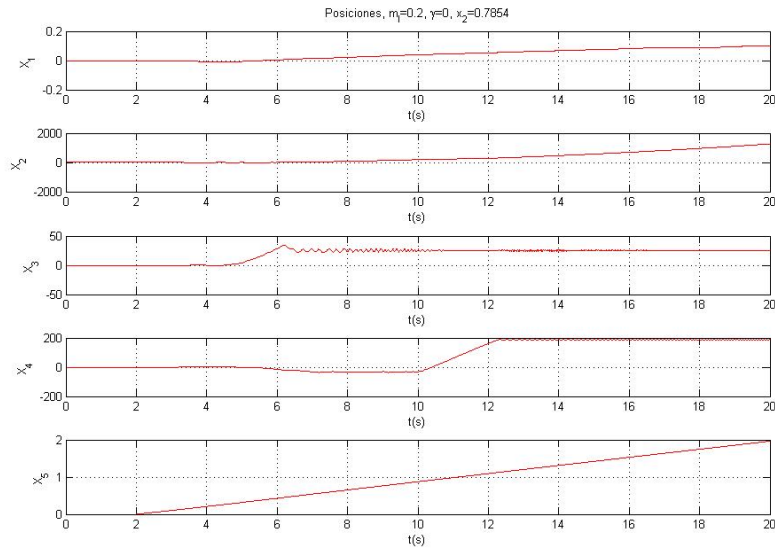


Fig. 2.12 Respuesta a impulso con: $m_1 = 0.2$ $\gamma = 0$ $x_2 = \pi/4$

Nótese en la Fig. 2.12 como al aplicar las perturbaciones a los 2 seg., las posiciones se salen del punto de equilibrio y crecen. Las posiciones x_3 y x_4 tienden a un atractor estable ubicado en otra parte del espacio de estado.

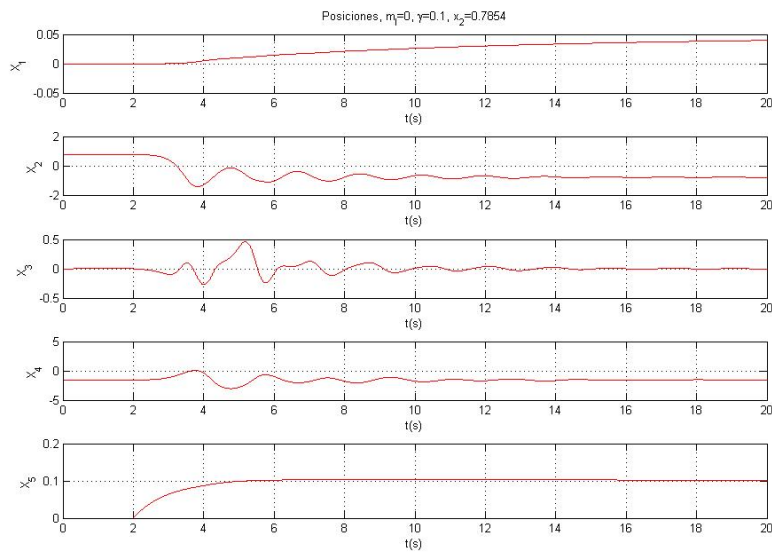


Fig. 2.13 Respuesta a impulso con: $m_1 = 0$ $\gamma = 0.1$ $x_2 = \pi/4$

Nótese en la Fig. 2.13 como al aplicar las perturbaciones a los 2 seg., la posición x_2 se sale de su posición de equilibrio inestable y se desplaza hasta la posición de equilibrio estable, simétrica respecto al eje horizontal. Las posiciones x_3 y x_4 vuelven a la posición de equilibrio después de que la posición x_2 se ubica en la Posición **B** en la cual el sistema es estable. Además, la posición x_5 se desvía de su posición original y se estabiliza nuevamente en otra posición, de manera amortiguada, debido a la presencia de la fricción viscosa.

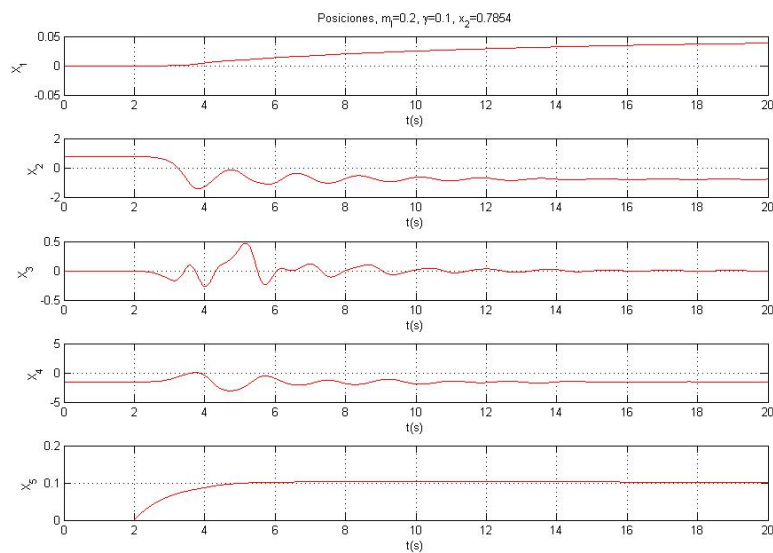


Fig. 2.14 Respuesta a impulso con: $m_l = 0.2$ $\gamma = 0.1$ $x_2 = \pi/4$

Nótese en la Fig. 2.14 como al aplicar las perturbaciones a los 2 seg., ocurre exactamente lo mismo que en el caso anterior.

Para los casos de la Posición **B** (Ver Tabla 2.3), los resultados de las simulaciones son:

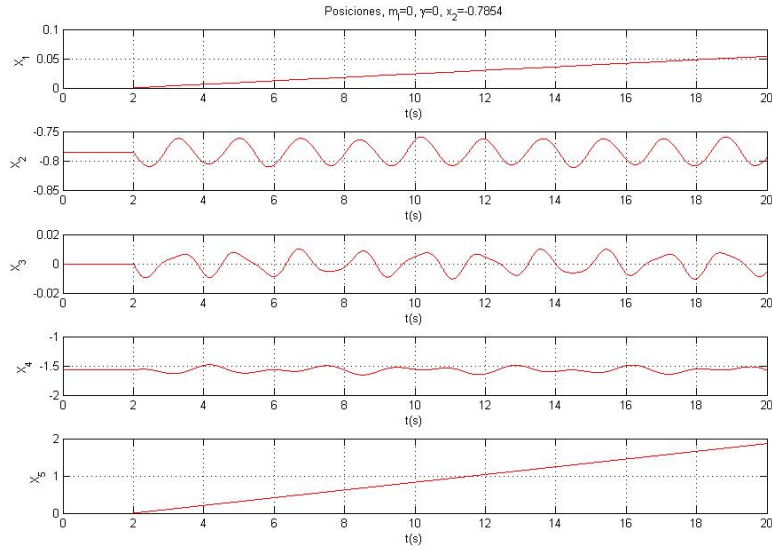


Fig. 2.15 Respuesta a impulso con: $m_1 = 0$ $\gamma = 0$ $x_2 = -\pi/4$

Nótese en la Fig. 2.15 como al aplicar las perturbaciones a los 2 seg., las posiciones x_2 , x_3 y x_4 tienen comportamiento oscilatorio, que era de esperarse por los valores complejos conjugados con parte real igual a cero, apreciables en la Tabla 2.3. Además, la posición x_5 se desvía del punto de equilibrio, creciendo indefinidamente.

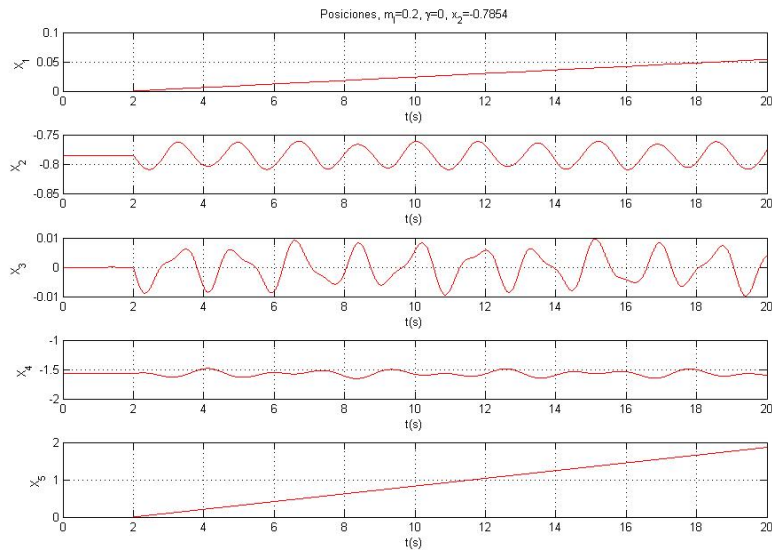


Fig. 2.16 Respuesta a impulso con: $m_1 = 0.2$ $\gamma = 0$ $x_2 = -\pi/4$

Nótese en la Fig. 2.16 como al aplicar las perturbaciones a los 2 seg., ocurre exactamente lo mismo que en el caso anterior.

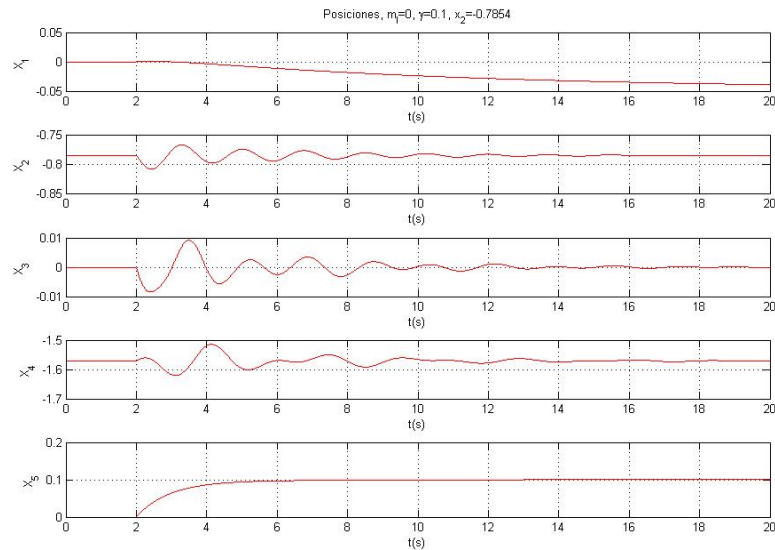


Fig. 2.17 Respuesta a impulso con: $m_l = 0$ $\gamma = 0.1$ $x_2 = -\pi/4$

Nótese en la Fig. 2.17 como al aplicar las perturbaciones a los 2 seg., las posiciones x_2 , x_3 y x_4 vuelven a la posición de equilibrio después de un tiempo t finito (Estables). Además, la posición x_5 se desvía de su posición original y se estabiliza nuevamente en otra posición, de manera amortiguada, debido a la presencia de la fricción viscosa.

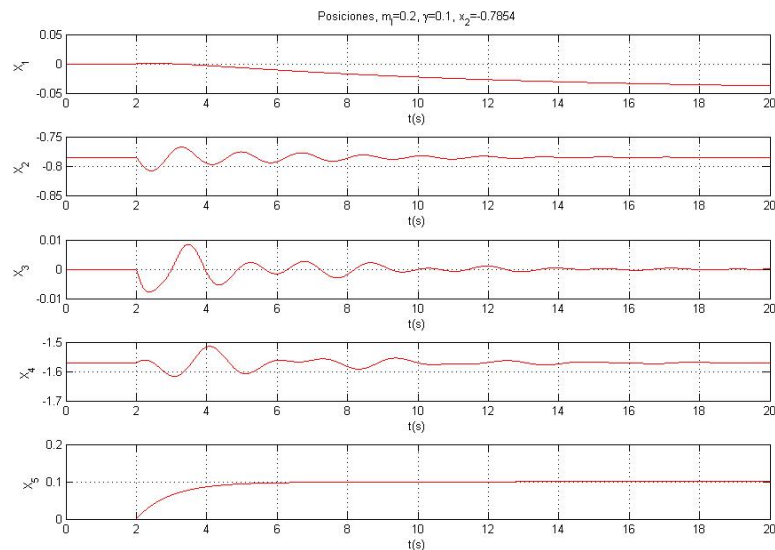


Fig. 2.18 Respuesta a impulso con: $m_l = 0.2$ $\gamma = 0.1$ $x_2 = -\pi/4$

Nótese en la Fig. 2.18 como al aplicar las perturbaciones a los 2 seg., ocurre exactamente lo mismo que en el caso anterior.

2.3.4 Diagramas de Bifurcaciones (efecto de la saturación en los torques)

Se pretende identificar el comportamiento de las características de equilibrio del sistema ante la variación del parámetro principal que es la carga (m_l), desde la condición sin fricción ($\gamma = 0$), hasta condiciones con fricción diferente de cero que se asemejen más a una situación real. Además, y como se verá a continuación, se introducirá otro parámetro práctico que es la saturación en los torques, como un valor límite que genera variación en la respuesta del sistema. Todo esto para la condición inicial de equilibrio dada por la Posición **B** presentada en la Fig. 2.10.

Para los casos en los que no hay saturación en los torques, el diagrama de bifurcaciones es repetitivo. Simplemente, después de ubicarse en el punto de equilibrio (que depende de un conjunto de torques) y al variar la carga, el sistema permanece en el punto de equilibrio sin variar sus condiciones de estabilidad. Esto es entendible intuitivamente, debido al hecho de que para cada incremento en la carga se calcula un nuevo conjunto de torques que hacen que el sistema permanezca en equilibrio, y al no tener restricciones dichos torques pueden crecer para soportar la condición. En la Fig. 2.19 se muestra un diagrama de bifurcaciones en el cual se varía tanto la fricción como la carga para el caso en el que no hay restricciones en los torques. Nótese la superposición de los resultados, que hacen parecer que no hubiera variaciones en la fricción.

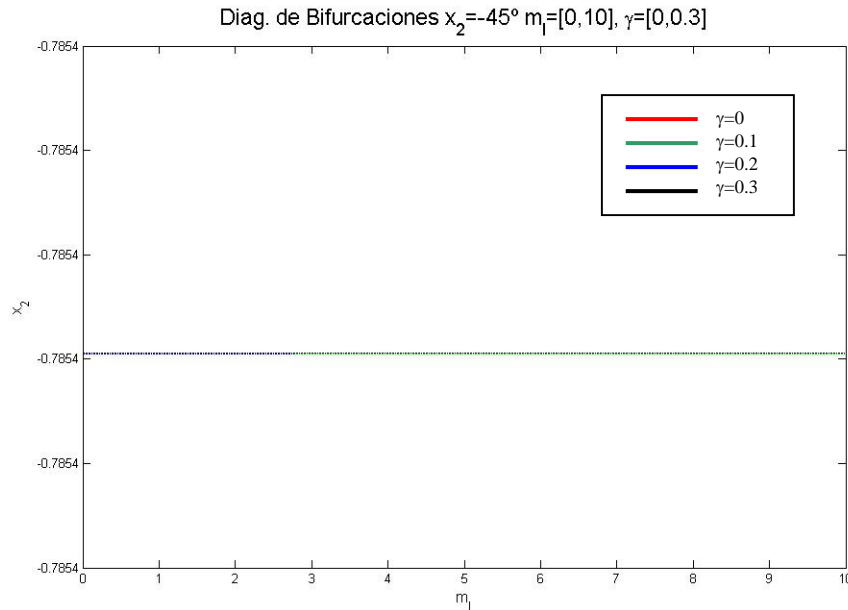


Fig. 2.19 Sin restricción en los torques, no se presentan bifurcaciones

Todas las condiciones descritas hasta ahora, ocurren en situaciones en las que los torques aplicados no tienen restricción. Esta es una condición ideal, debido a que en todo los casos prácticos los motores tienen como especificación mecánica la definición del torque nominal, que limita de manera real las posibilidades de operación.

Tomando como referencia el máximo torque necesario para mantener el sistema en la posición de equilibrio de mayor esfuerzo (brazo extendido totalmente, en posición horizontal), obtenido usando las funciones de cálculo de la dinámica inversa, que corresponde a un $\tau_{\max} = 14.323 \text{ Nm}$, y teniendo en cuenta un margen de seguridad del 30% (asumiendo que las características eléctricas de todos los motores son iguales), se define como torque de saturación el valor de $\tau_{\text{sat}} = 18.2 \text{ Nm}$.

Para el caso en que la fricción viscosa es diferente de cero ($\gamma = 0.1$), se presenta un amortiguamiento que se incrementa al aumentar γ . Esto genera un consecuente incremento en la rata de disminución de las oscilaciones desde el transitorio al estacionario, como se presenta en la Fig. 2.20 para el caso de x_2 . Adicionalmente, ocurre un desplazamiento de la posición de equilibrio a medida que aumenta la carga, debido a que

los torques se recalculan cada vez, hasta llegar a la posición vertical (punto de equilibrio estable con $x_2 = -\pi/2$), situación que puede apreciarse en la Fig. 2.21.

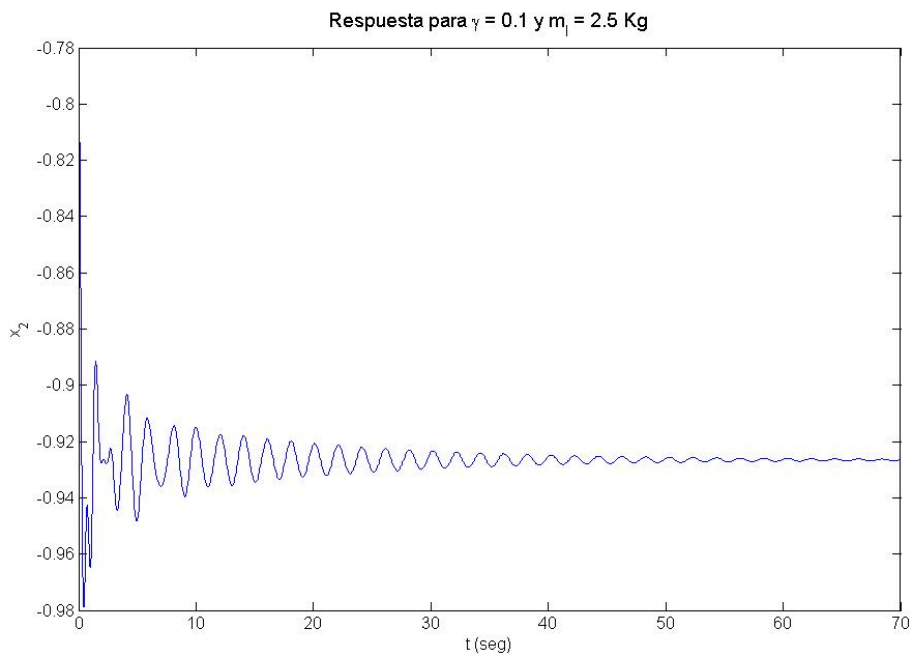


Fig. 2.20 Respuesta amortiguada para $\gamma = 0.1$ y $m_1 = 2.5$ Kg.

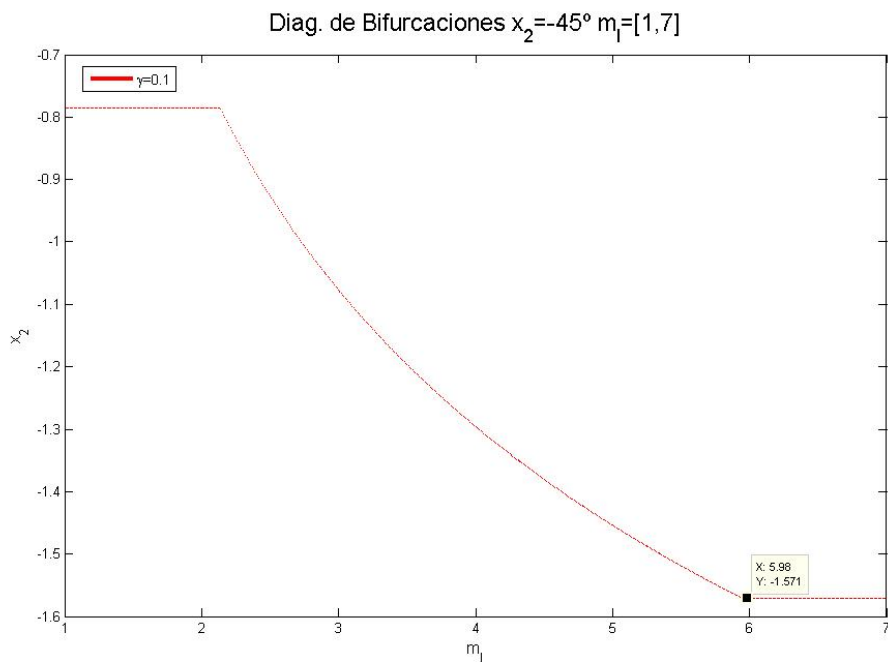


Fig. 2.21 Desplazamiento del punto de equilibrio a partir de $m_1 = 2.14$ Kg.

m_l				
1	2.08	4.12	5.44	7
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
-0.0939	-0.08	-0.0898	-0.0952	-0.1011
-1.0546	-1.0454	-1.0519	-1.0555	-1.0596
-0.1354 - 2.6916i	-0.0711 - 3.0102i	-0.0354 - 3.4250i	-0.0256 - 3.5947i	-0.0217 - 3.7660i
-0.1354 + 2.6916i	-0.0711 + 3.0102i	-0.0354 + 3.4250i	-0.0256 + 3.5947i	-0.0217 + 3.7660i
-0.2860 - 3.8703i	-0.3347 - 4.2312i	-0.3801 - 5.2197i	-0.3704 - 5.7122i	-0.3176 - 6.1135i
-0.2860 + 3.8703i	-0.3347 + 4.2312i	-0.3801 + 5.2197i	-0.3704 + 5.7122i	-0.3176 + 6.1135i
-1.3602 - 7.2390i	-1.3641 - 8.1997i	-0.9881 - 9.0669i	-0.7831 - 8.6866i	-0.8817 - 10.0281i
-1.3602 + 7.2390i	-1.3641 + 8.1997i	-0.9881 + 9.0669i	-0.7831 + 8.6866i	-0.8817 + 10.0281i

Tabla 2.4. Valores Propios para $\gamma = 0.1$, para algunos valores de m_l entre 1 y 7 Kg.

Para valores de fricción más grandes ($\gamma = 3$), también se presenta un desplazamiento del punto de equilibrio hasta la posición vertical, al igual que sucede con el caso de fricción viscosa pequeña ($\gamma = 0.1$) mostrada en la Fig. 2.21, que es la condición de equilibrio estable principal. En este caso no se presentan bifurcaciones.

Al realizar un análisis de los valores propios del Jacobiano del sistema para los casos en que la fricción es diferente de cero ($\gamma = 0.1$), con una variación en intervalo cerrado de $m_l = [1, 7]$ y mediante incrementos de $m_{inc} = 0.12$ (teniendo en cuenta que la variación en las posiciones de equilibrio sucede a partir de $m_l = 2.14$ Kg) se puede verificar la condición de estabilidad ($\text{Re}(\lambda_i) < 0, i = 1 \dots 5$) y ausencia de bifurcaciones, tal como se muestra en la Tabla 2.4.

Para la condición en la cual la fricción es igual a cero ($\gamma = 0$), no es posible verificar las características de estabilidad de esta misma manera, puesto que como se muestra en la Tabla 2.5, los valores propios significativos están muy cercanos a cero y presentan cambios inconsistentes para variaciones del parámetro tan pequeñas como $m_{inc} = 0.005$ Kg, posiblemente debido a errores numéricos concurrentes en los algoritmos anidados de cálculo de los valores propios. Por ejemplo, En la Tabla 2.5 puede notarse claramente un cambio de un par de valores propios de cero a dos valores reales positivo y negativo, que podría indicar la aparición de una condición de punto de silla para el valor del parámetro

$m_l = 2.14$ Kg, pero al evaluar la continuidad de la condición se observan variaciones bruscas en estos y otros valores, que no permiten concluir definitivamente.

m_l						
2.1	2.135	2.14	2.145	2.15	2.155	2.16
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0.000405644	-0.001503234	-0.002015399	-0.002341152	-0.001920669
0	0	-0.001296165	0.002906332	0.004572836	0.003807764	0.002733754
- 3.003287i	- 3.010580i	- 3.0119781i	- 3.0124943i	- 3.011591i	- 3.01056223i	- 3.009386741i
3.003287i	3.0105806i	3.01197816i	3.01249i	3.0115910i	3.010562230i	3.00938674i
- 4.2578091i	- 4.2702539i	- 4.272384i	- 4.274420i	- 4.27656335i	- 4.27939407i	- 4.28233773i
4.2578091i	4.2702530i	4.27238i	4.2744200i	4.27656335i	4.27939407i	4.2823377i
- 8.349524i	- 8.378222i	- 8.382786i	-0.00013 - 8.38904i	0.00037 - 8.3983643i	0.00042 - 8.411397i	-0.00059 - 8.424204i
8.3495246i	8.378221i	8.3827865i	-0.00013 + 8.38904i	0.00037 + 8.3983649i	0.00042 + 8.411397i	-0.00059 + 8.424204i

Tabla 2.5. Valores Propios para $\gamma = 0$, variando m_l entre 2.1 y 2.16 Kg.

Para esta condición, se puede observar en las Fig. 2.22 como a partir de $m_l = 2.14$ Kg empieza a desplazarse el punto de equilibrio y a presentarse oscilaciones (como era de esperarse) que varían en amplitud. En la Fig. 2.23 se muestra la característica oscilatoria de x_2 para el caso en que $m_l = 2.2$ Kg.

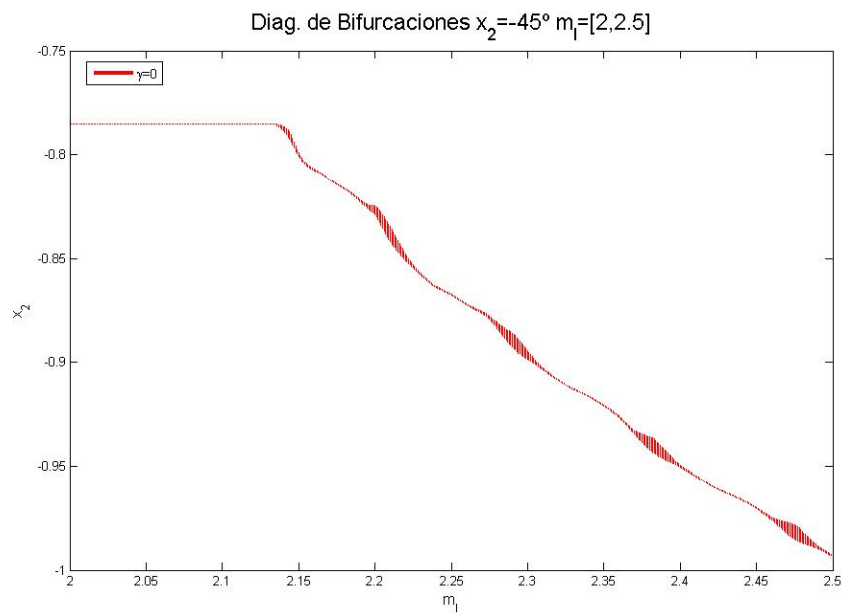


Fig. 2.22 Para $\gamma = 0$ aparecen oscilaciones a partir de $m_l = 2.14$ Kg.

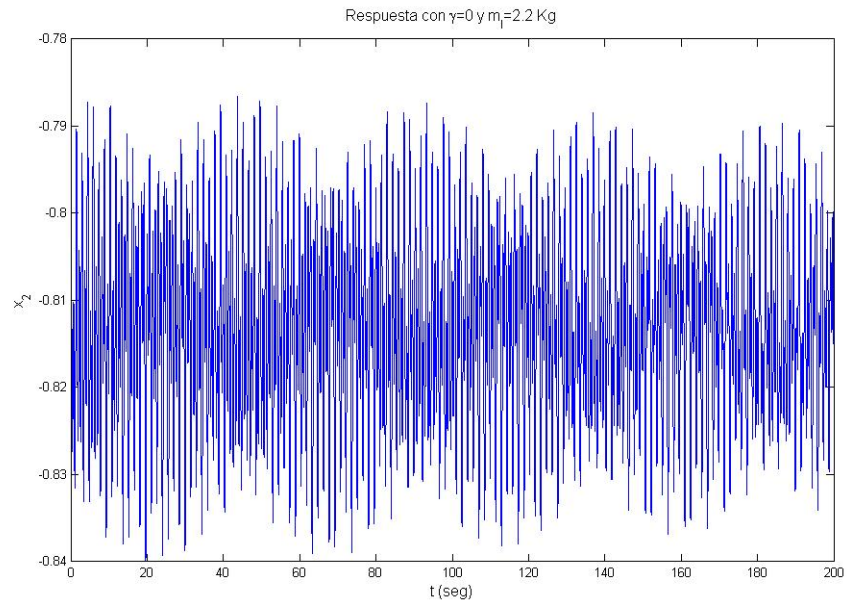


Fig. 2.23 Oscilación de x_2 para $\gamma = 0$ y $m_l = 2.2$ Kg.

Así pues, se nota que aunque la dinámica que describe el manipulador es altamente no lineal, y para las condiciones analizadas, no se encontraron fenómenos no lineales asociados tales como doblamiento de periodo, etc.

CAPITULO 3. CONTROL NO LINEAL MEDIANTE LINEALIZACIÓN POR REALIMENTACIÓN

3.1 INTRODUCCIÓN

El objetivo de este tipo de control es aplicar una transformación a un sistema no lineal, mediante la cual se obtenga un modelo lineal, lo que se logra mediante la cancelación algebraica de la no linealidades del sistema y el uso de alguna de las reconocidas estrategias de control lineal, para imposición de alguna dinámica que permita llevar a cabo actividades de regulación o rastreo.

Así pues, en lugar de realizar una “linealización” mediante la selección de los elementos de orden inferior (despreciando los de orden superior) por la aplicación de las Series de Taylor (Cálculo de la matriz Jacobiana) de la ecuación de estados del sistema, lo que se pretende es obtener una versión simplificada de la dinámica, mediante operaciones algebraicas que cancelen las no linealidades de la misma.

3.2 LINEALIZACIÓN POR REALIMENTACIÓN PARA UN MANIPULADOR DE CINCO GRADOS DE LIBERTAD

Partiendo de la representación simbólica compacta del manipulador de cinco grados de libertad, obtenida para el análisis, y considerando las condiciones planteadas para la linealización por realimentación para un manipulador de múltiples grados de libertad, se definen como salidas del sistema el vector de posiciones del manipulador, así:

$$\mathbf{y} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5]^T \quad (3.1)$$

Para la obtención de la relación de entrada – salida y el consecuente cálculo del grado relativo, se realizan diferenciaciones consecutivas de la salida, de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{y}} = [\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \quad \dot{x}_3 \quad \dot{x}_4 \quad \dot{x}_5]^T = [x_6 \quad x_7 \quad x_8 \quad x_9 \quad x_{10}]^T \quad (3.2)$$

Y,

$$\ddot{\mathbf{y}} = [\dot{x}_6 \quad \dot{x}_7 \quad \dot{x}_8 \quad \dot{x}_9 \quad \dot{x}_{10}]^T = \mathbf{H}(\mathbf{x})^{-1}(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})) \quad (3.3)$$

Como τ (excitación) aparece en la segunda derivada de la salida significa que el sistema tiene grado relativo parcial $r_i = 2$ para $i = 1 \dots 5$, y por tanto grado relativo total $r = 10$. Ya que $r = n$, es decir, el grado relativo total es igual a orden del sistema, significa que no tiene dinámica interna y es posible plantear de manera directa una estrategia de control basada en la linealización entrada salida, sin tener que analizar la estabilidad de la dinámica interna. Dado que el grado relativo es igual al orden del sistema, es equivalente a tener una linealización entrada estado.

Para los casos de regulación y de rastreo se puede plantear la entrada de control:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{v} + \mathbf{C}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (3.4)$$

Esta entrada de control cumple con el objetivo de cancelar los términos no lineales y se define en términos de la “nueva entrada” \mathbf{v} .

Usando (3.4) en (3.3), se obtiene una relación entre la salida \mathbf{y} y la “nueva entrada” \mathbf{v} de la forma:

$$\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{v} \quad (3.5)$$

Si se define la “nueva entrada” \mathbf{v} como:

$$\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{y}}_d - k_0(\mathbf{y} - \mathbf{y}_d) - k_1(\dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_d) \quad (3.6)$$

Donde \mathbf{y}_d es el vector de salidas deseadas y k_0 y k_1 son constantes positivas, que aseguran la estabilidad y convergencia de la nueva dinámica impuesta.

De esta forma, se consigue una dinámica estable en lazo cerrado de la forma:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{y}}} + k_1\dot{\tilde{\mathbf{y}}} + k_0\tilde{\mathbf{y}} = 0 \quad (3.7)$$

Donde $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_d$, es el vector de error de salidas.

Así pues, si para el manipulador de cinco grados de libertad, se escoge la “nueva entrada” \mathbf{v} de la forma:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -k_0(x_1 - x_{1d}) - k_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_{1d}) \\ -k_0(x_2 - x_{2d}) - k_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_{2d}) \\ -k_0(x_3 - x_{3d}) - k_1(\dot{x}_3 - \dot{x}_{3d}) \\ -k_0(x_4 - x_{4d}) - k_1(\dot{x}_4 - \dot{x}_{4d}) \\ -k_0(x_5 - x_{5d}) - k_1(\dot{x}_5 - \dot{x}_{5d}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_0(x_1 - x_{1d}) - k_1(x_6 - \dot{x}_{1d}) \\ -k_0(x_2 - x_{2d}) - k_1(x_7 - \dot{x}_{2d}) \\ -k_0(x_3 - x_{3d}) - k_1(x_8 - \dot{x}_{3d}) \\ -k_0(x_4 - x_{4d}) - k_1(x_9 - \dot{x}_{4d}) \\ -k_0(x_5 - x_{5d}) - k_1(x_{10} - \dot{x}_{5d}) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Donde x_{id} y \dot{x}_{id} ($i=1\dots5$), son las posiciones y velocidades deseadas. Las aceleraciones deseadas son iguales a cero, y k_0 y k_1 son los parámetros del controlador lineal.

Sin pérdida de generalidad, se propone $k_0 = \lambda^2$ y $k_1 = 2\lambda$ con $\lambda > 0$, condición suficiente para asegurar la ubicación de los polos inducidos en el semiplano complejo izquierdo [2].

3.2.1 Sin Saturación en los actuadores

A continuación se presenta la respuesta del sistema para el caso con carga ($m_l = 4$), con fricción ($\gamma = 0.1$) y sin saturación en los torques de los actuadores del manipulador (condición ideal). Adicionalmente, se plantea como referencia de error de posición de las articulaciones un valor de $e_{ref} = 10^{-3} \text{ rad}$, que permite concluir sobre los resultado en términos de un error relativo porcentual.

Debido a que en este caso no hay saturación en los actuadores, es posible hacer variación de la carga en un rango muy amplio, sin detrimento de la respuesta del controlador. En todos los casos probados se presenta un comportamiento similar al mostrado a continuación.

3.2.1.1 Regulación

Para valores de posiciones deseadas:

$$\begin{aligned}
 x_{1d} &= 0.872 \text{ rad} \\
 x_{2d} &= 1.047 \text{ rad} \\
 x_{3d} &= 1.221 \text{ rad} \\
 x_{4d} &= 1.396 \text{ rad} \\
 x_{5d} &= 1.571 \text{ rad}
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

Con $\lambda = 2$, se obtuvieron los resultados mostrados en las Fig. 3.1 a 3.4.

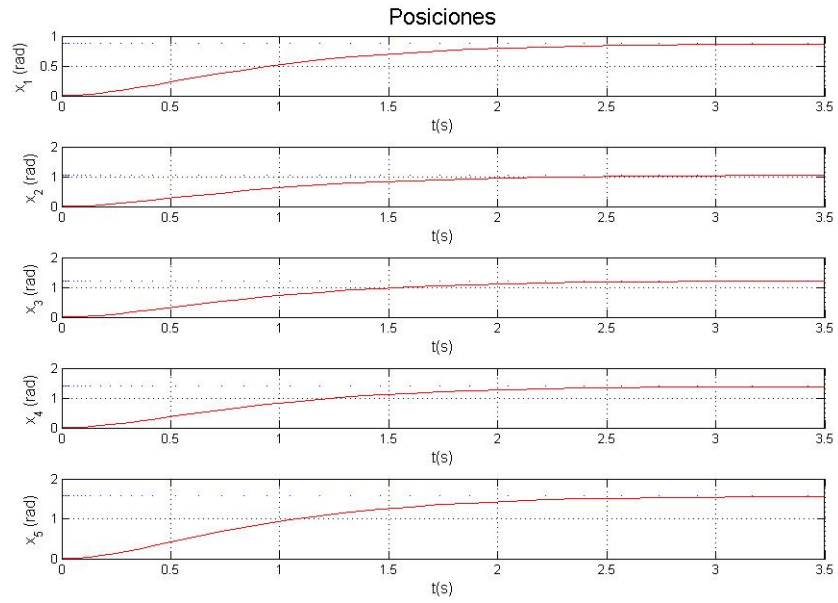


Fig. 3.1 Posiciones para $\lambda = 2$

En la Fig. 3.1 se observa el comportamiento sobreamortiguado de la respuesta de las posiciones. En la Fig. 3.2 se presentan las velocidades de respuesta del sistema, de acuerdo con la dinámica impuesta.

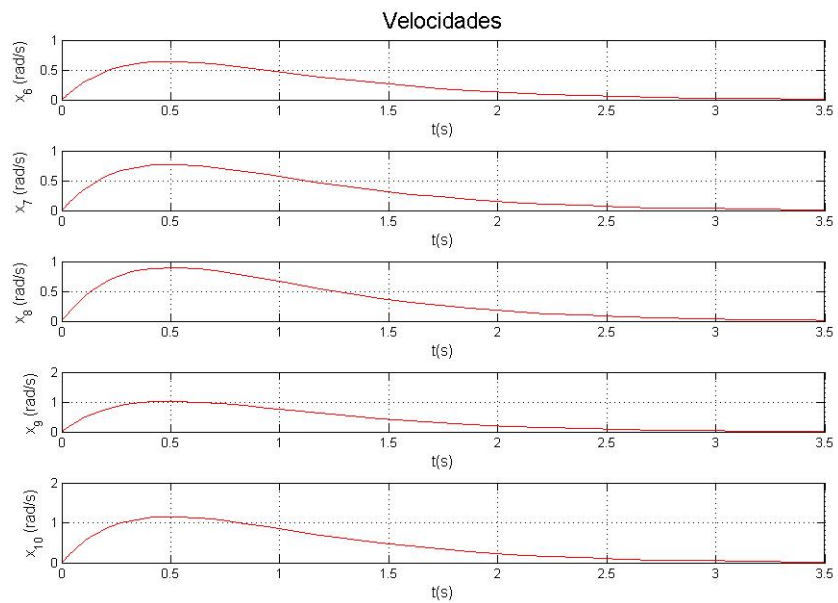


Fig. 3.2 Velocidades para $\lambda = 2$

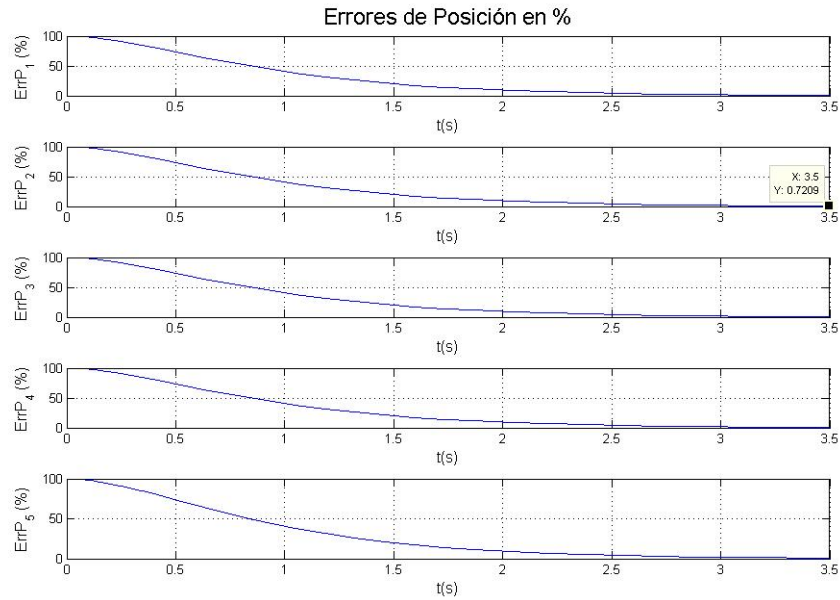


Fig. 3.3 Errores de Posición

En la Fig. 3.3 se aprecia la convergencia del error, que en 3.5 seg tiene un valor de $e_{\%} = 0.72\%$ para la articulación x_2 , que es la variable más crítica del sistema, puesto que toda la carga inercial del manipulador y de la carga útil tienen que ser soportadas y manejadas por esta articulación.

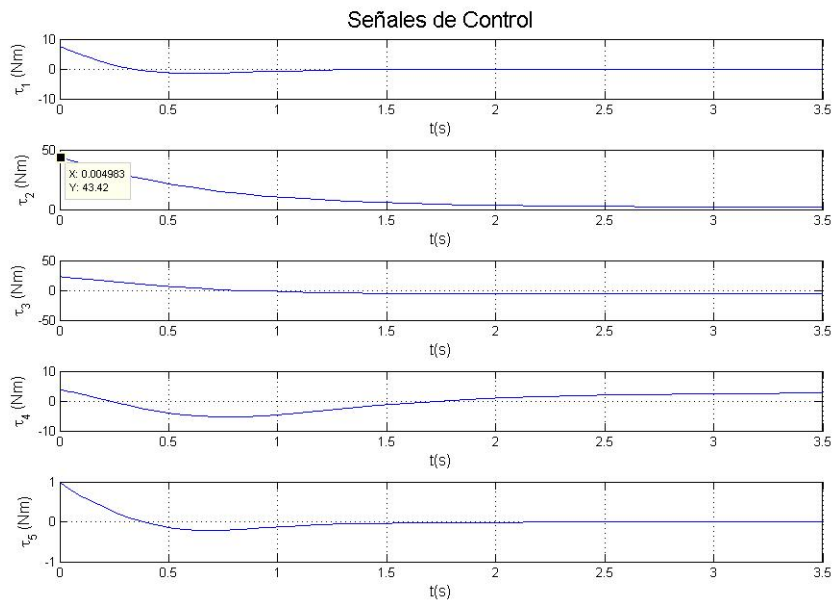


Fig. 3.4 Señales de Control

La Fig. 3.4 muestra las señales de control que permiten ubicar el sistema en equilibrio y cumplir con la tarea de regulación. Nótese que en el caso del sistema sin saturación en los torques, la señal de control τ_2 presenta valores muy por encima del valor de τ_{sat} . Cabe anotar, que sin esta restricción el sistema es capaz de realizar tareas de regulación para carga importantemente grandes.

3.2.1.2 Rastreo

Teniendo las trayectorias definidas como:

$$\begin{aligned} x_{d1}(t) = x_{d3}(t) = x_{d5}(t) &= \frac{\pi}{6} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{30}t\right)\right) \\ x_{d2}(t) = x_{d4}(t) &= \frac{\pi}{4} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{30}t\right)\right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Para lograr la actividad de rastreo con un error de posiciones en estado estacionario aceptablemente bajo (menor al 3%, teniendo presente que el $e_{ref} = 10^{-3} \text{ rad}$), es necesario incrementar considerablemente el valor de $\lambda = 35$, con lo cual se obtienen los resultados mostrados en las Fig. 3.5 a 3.8.

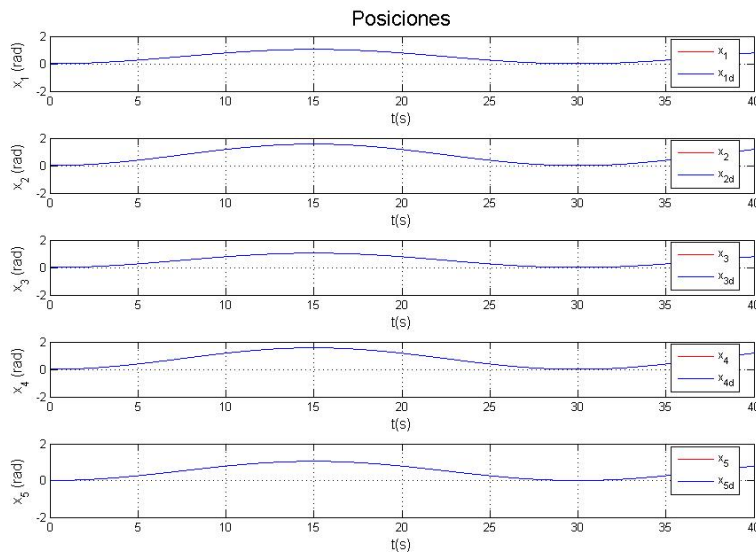


Fig. 3.5 Rastreo para $\lambda = 35$ y $m_l = 3 \text{ Kg}$

La Fig. 3.5 muestra la superposición de las señales obtenidas con el modelo y las deseadas, permitiendo verificar de manera visual el seguimiento de las trayectorias.

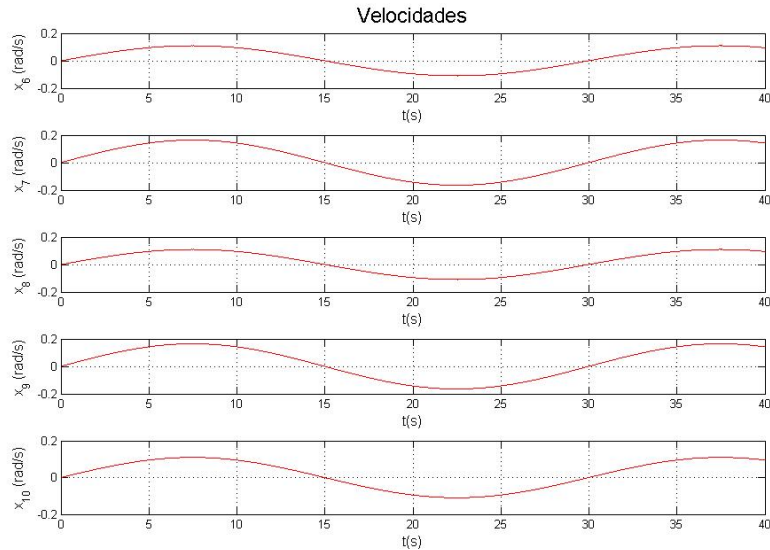


Fig. 3.6 Velocidad de rastreo para $\lambda = 35$ y $m_l = 3$ Kg

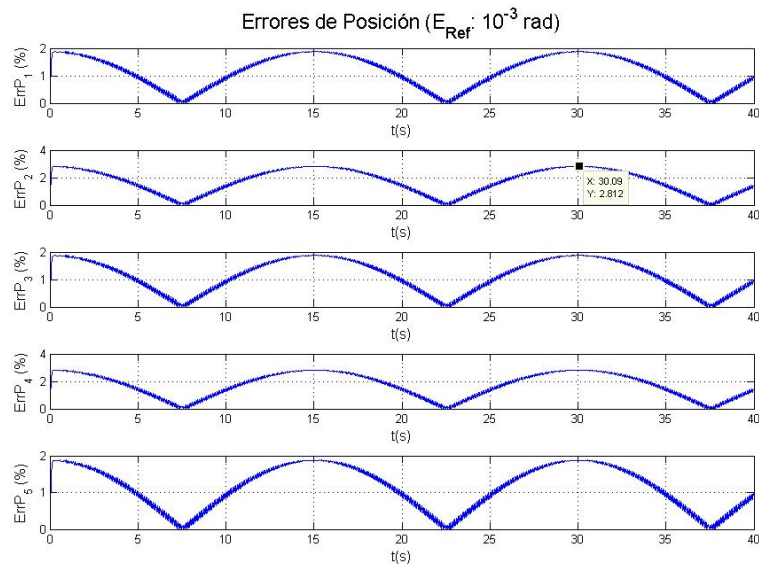


Fig. 3.7 Errores de Posición máximo de 2.8% con $\lambda = 35$ y $m_l = 3$ Kg

Existe un error de posición relativo que no supera el 2.8%. En estas condiciones se puede afirmar que se tiene un rastreo satisfactorio, utilizando esta estrategia de control.

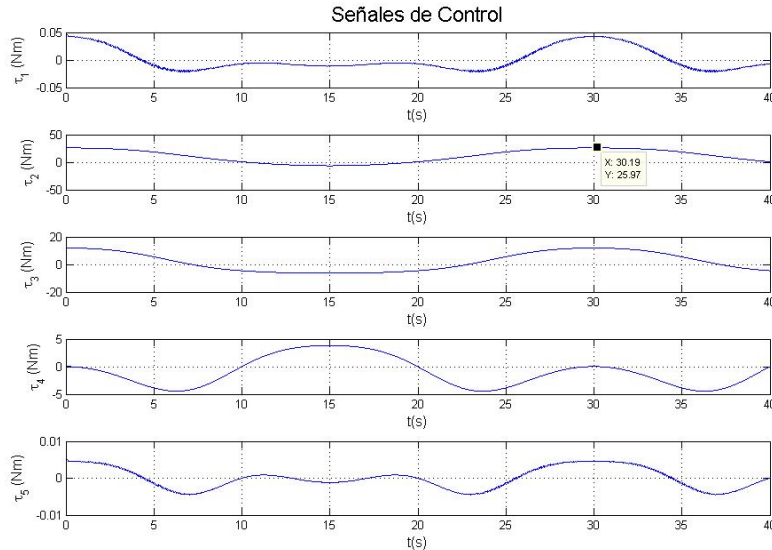


Fig. 3.8 Señales de control para el rastreo con $\lambda = 35$ y $m_l = 3 \text{ Kg}$

Las señales de control son continuas y suaves, y tienen como valor máximo $\tau_2 = 25.97$ Nm, para la articulación x_2 . Nótese que tanto el error de posición como los torques tienen una periodicidad con periodo $T = 30$ seg, como era de esperarse por las trayectorias deseadas propuestas en (3.10). Esta condición permite afirmar que se encuentran en estado estacionario y que el error de posición depende directamente del valor de λ y de que tan “exigente” sea el error de referencia e_{ref} (para este caso $e_{ref} = 10^{-3} \text{ rad}$).

3.2.2 Efecto de la Saturación de los actuadores

En la práctica, existen limitaciones de operabilidad de un manipulador, dependientes entre otras causas, de las características geométricas (espacio de trabajo), eléctricas y mecánicas de los motores encargados de realizar las labores de regulación o rastreo, según el caso.

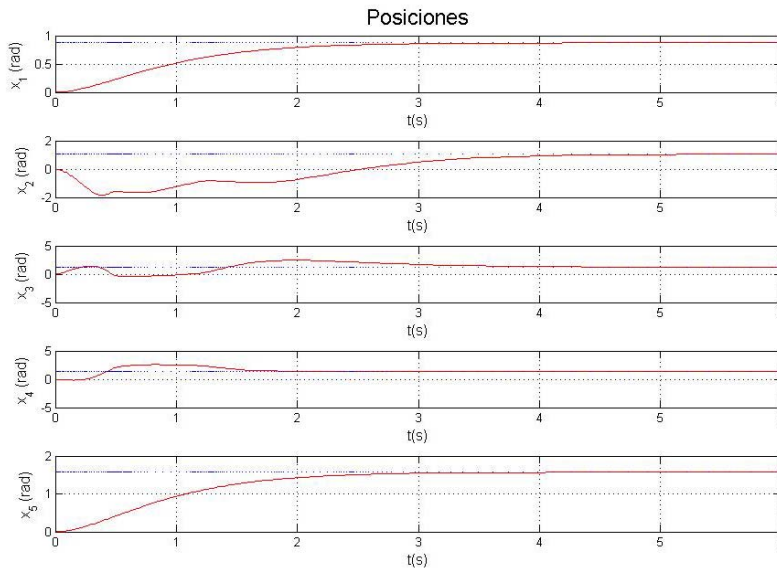
Se pretende evaluar el efecto de la carga y la saturación de los motores, para identificar el impacto en la respuesta del controlador tanto para rastreo como para regulación, con el objetivo de identificar las condiciones de carga máxima posible, que resultan de la interacción de las restricciones del manipulador. Adicionalmente, se plantea como

referencia de error de posición de las articulaciones un valor de $e_{ref} = 10^{-3} \text{ rad}$, que permite concluir sobre los resultado en términos de un error relativo porcentual.

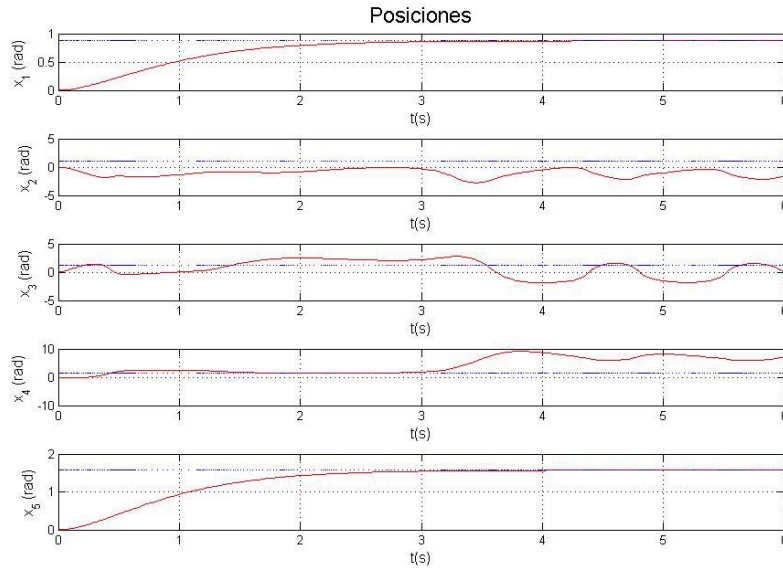
3.2.2.1 Regulación

Se tiene la misma consideración descrita anteriormente para la definición del torque de saturación con el valor de $\tau_{sat} = 18.2 \text{ Nm}$.

Para las mismas posiciones deseadas, presentadas en (3.9) y con $\lambda = 2$, el sistema es capaz de manejar una carga hasta de $m_l = 8.8 \text{ Kg}$, utilizando esta estrategia de control. En las Fig. 3.9 a 3.12, se muestra el comportamiento comparativo entre este caso y el caso en que $m_l = 8.9 \text{ Kg}$, en el que el error de estado estacionario aumenta significativamente y ya no es capaz de cumplir con la tarea de regulación. Esto es un claro indicador de que probablemente el sistema controlado presenta una bifurcación en este punto.



a)

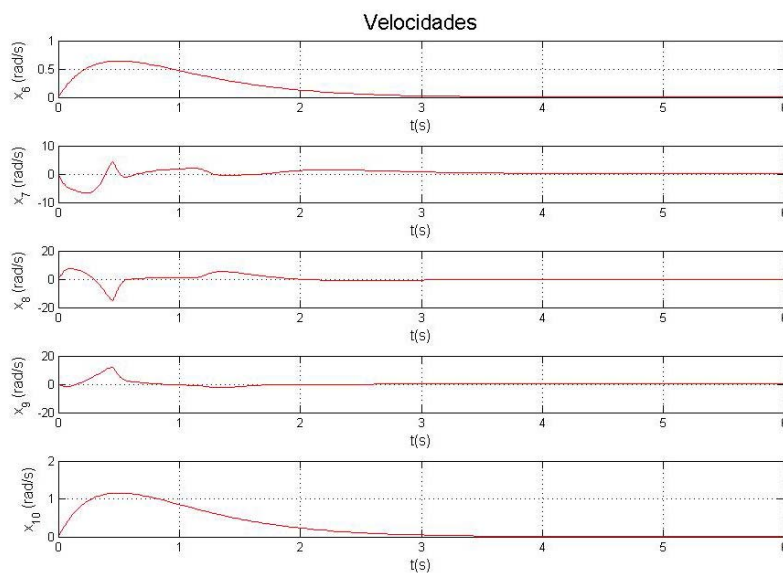


b)

Fig. 3.9 Posiciones para: a) $m_l = 8.8$ Kg b) $m_l = 8.9$ Kg

Puede observarse en la parte b) de la Fig. 3.9 cómo para las Posiciones de las articulaciones x_2 , x_3 y x_4 no es posible alcanzar el valor deseado en estado estacionario.

La Fig 3.10 muestra la respuesta de las velocidades de las articulaciones para las condición en la que hay saturación en los torques y una carga a) $m_l = 8.8$ y b) $m_l = 8.9$ Kg.



a)

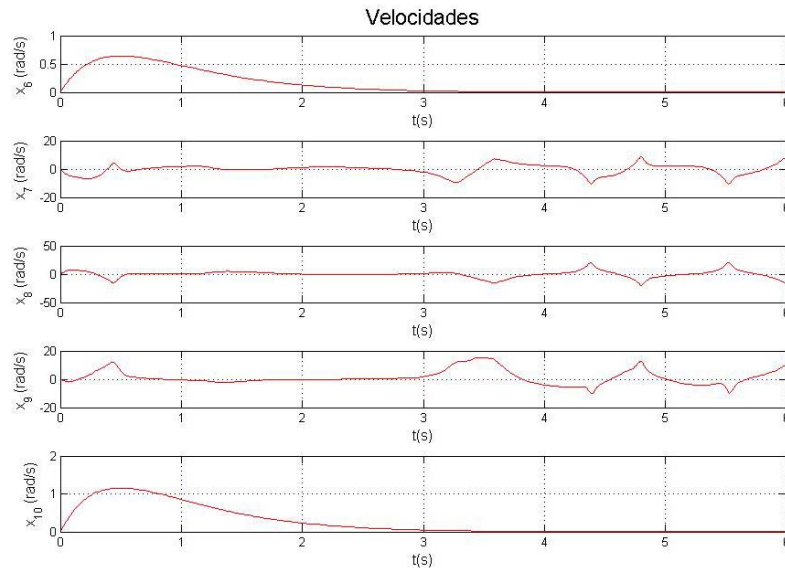
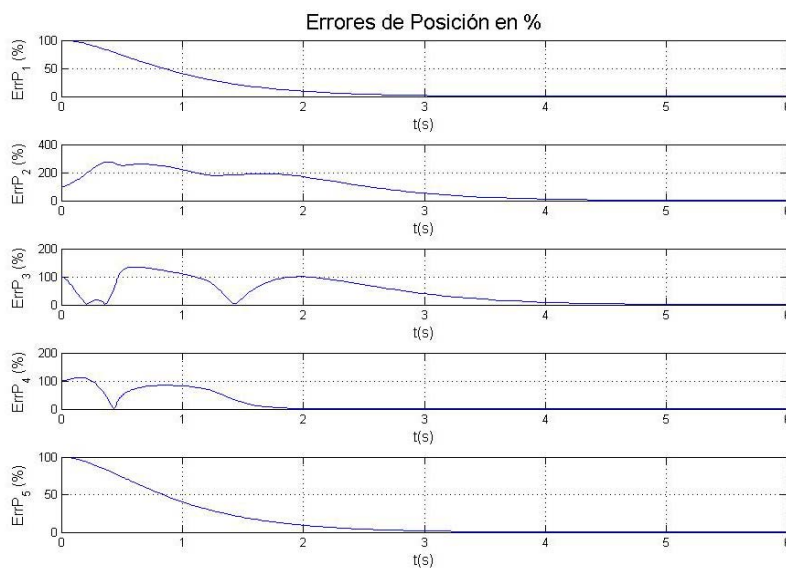
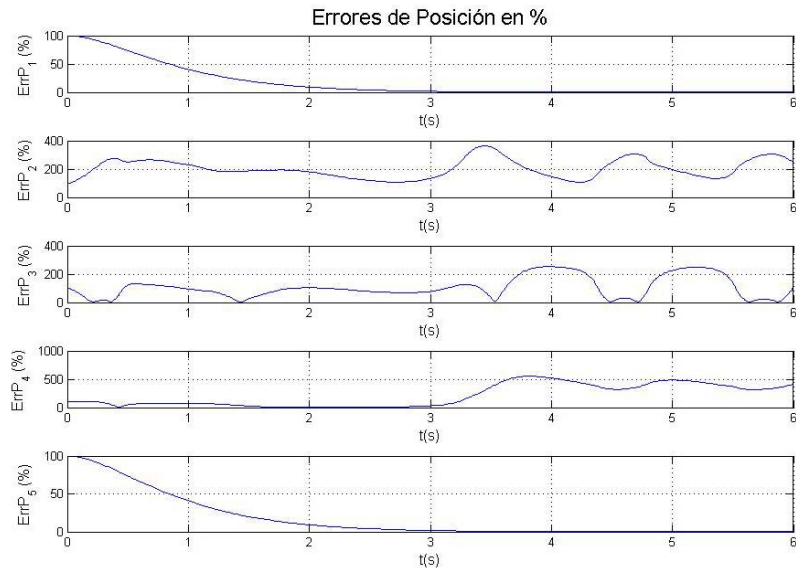


Fig. 3.10 Velocidades para: a) $m_l = 8.8$ Kg y b) $m_l = 8.9$ Kg

Como se puede ver en la Fig. 3.11, los errores de posición no convergen para el caso b) $m_l = 8.9$ Kg y presentan un valor muy grande en estado estacionario para las articulaciones x_2 , x_3 y x_4 . Mientras que para a) $m_l = 8.8$ el error a los 5.5 seg es de 0.75% para x_2 .

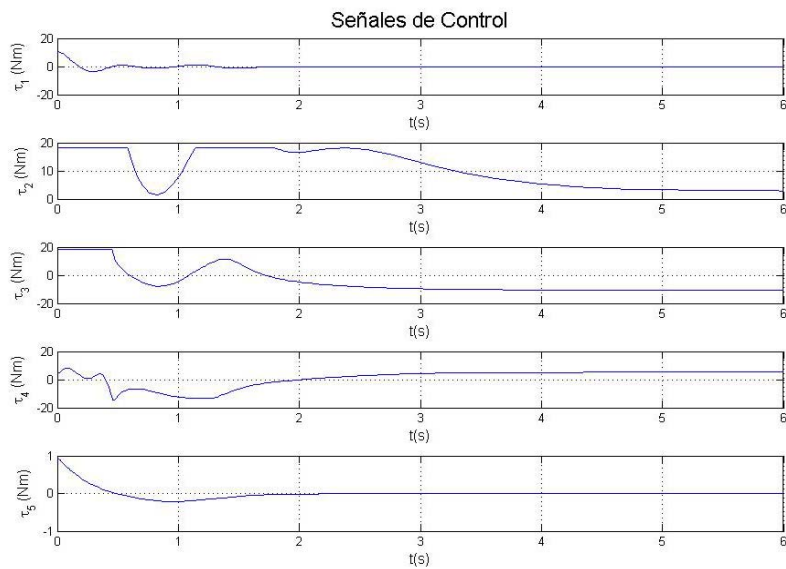


a)

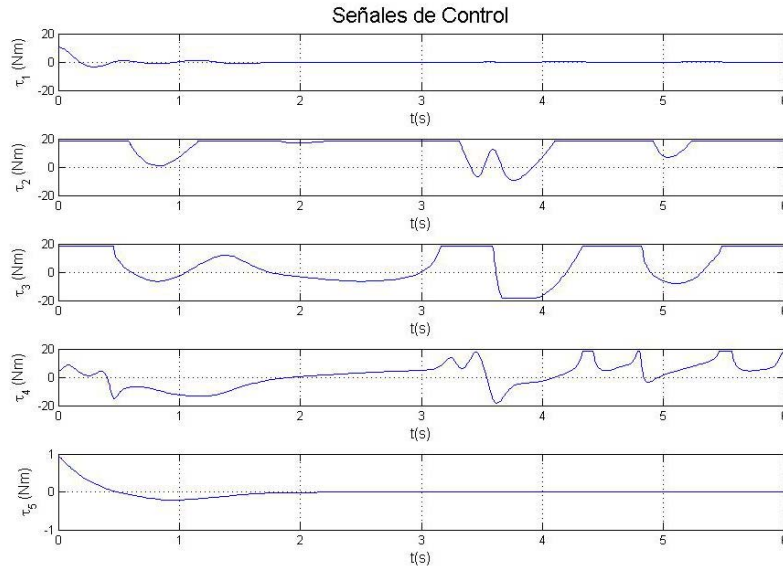


b)

Fig. 3.11 Errores de Posición para: a) $m_l = 8.8$ Kg y b) $m_l = 8.9$ Kg



a)



b)

Fig. 3.12 Señales de control para: a) $m_l = 8.8$ Kg y b) $m_l = 8.9$ Kg

En la parte b) de la Fig. 3.12 puede notarse el efecto de la saturación en los torques de control de las articulaciones x_2 , x_3 y x_4 . Para el caso de x_2 el torque permanece saturado a partir de los 6 segundos.

3.2.2.2 Rastreo

Para las trayectorias:

$$\begin{aligned}
 x_{d1}(t) = x_{d3}(t) = x_{d5}(t) &= \frac{\pi}{6} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{30}t\right)\right) \\
 x_{d2}(t) = x_{d4}(t) &= \frac{\pi}{4} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{30}t\right)\right)
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

Con $\lambda = 35$ y con $\tau_{sat} = 18.2$ Nm, se obtuvieron los resultados mostrados en las Fig. 3.13 a 3.16.

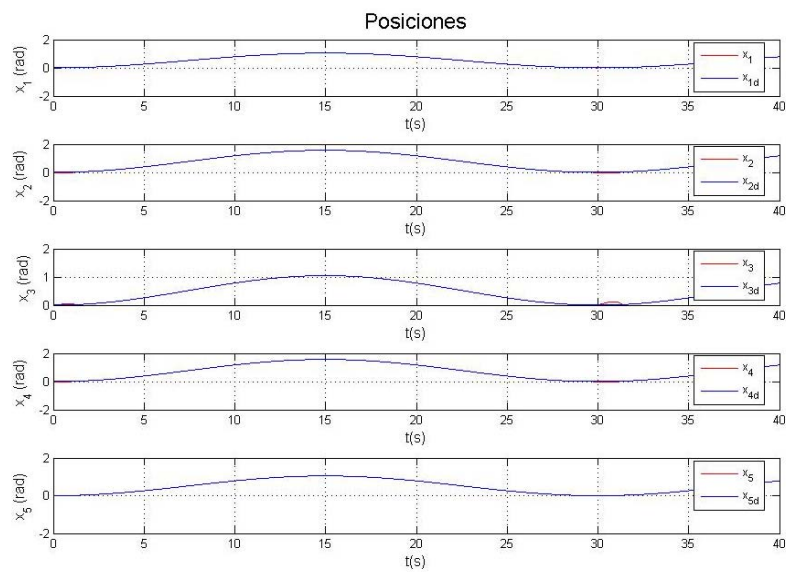
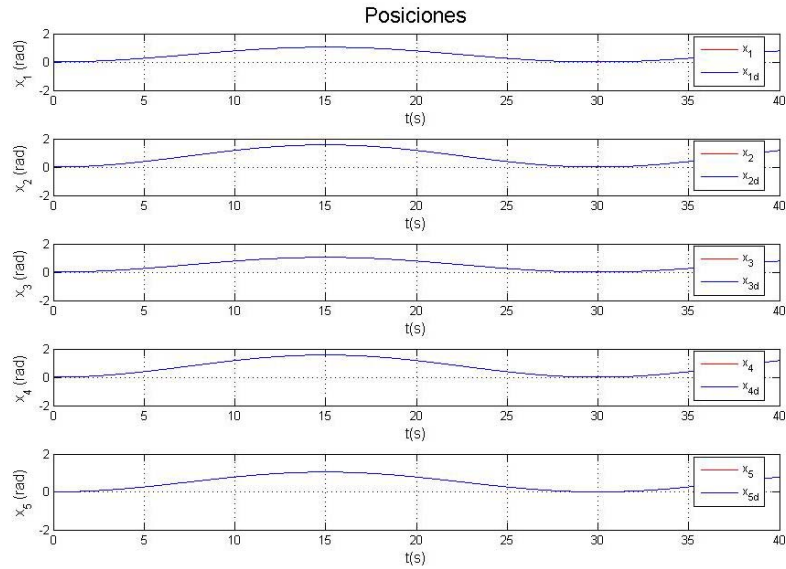
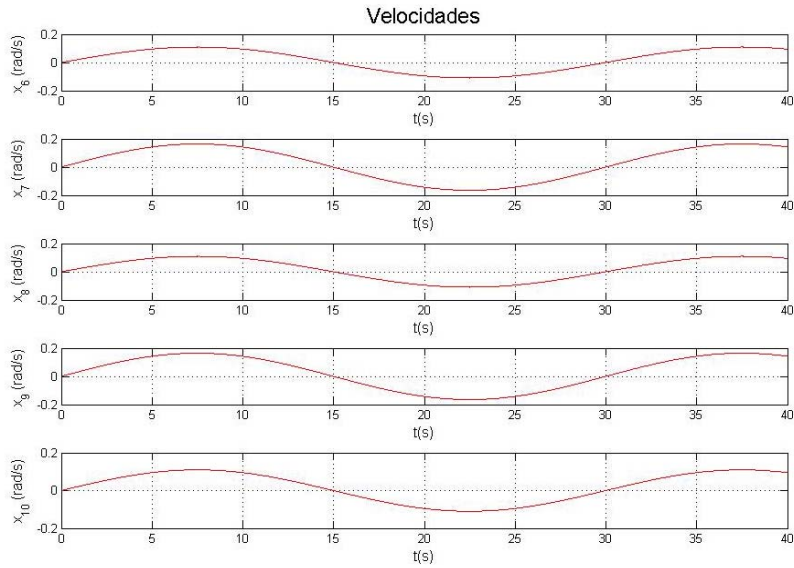
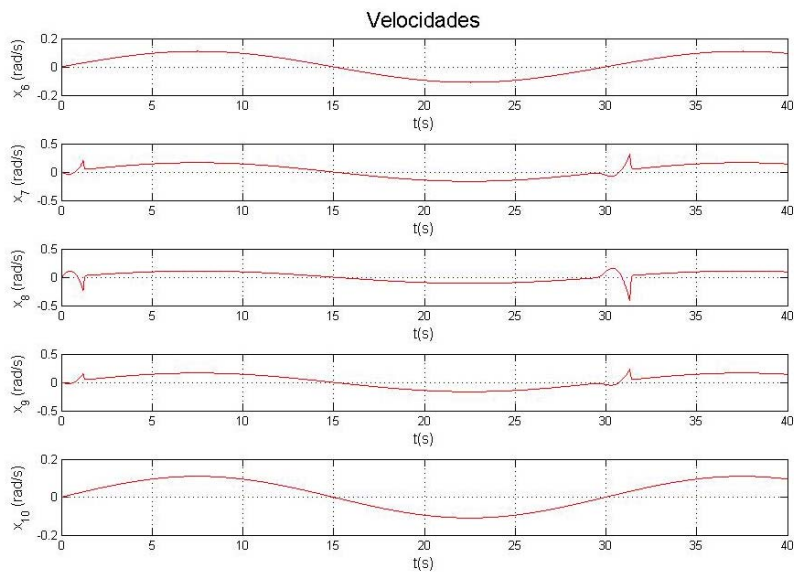


Fig. 3.13 Posiciones para: a) $m_l = 1.2 \text{ Kg}$ y b) $m_l = 1.21 \text{ Kg}$

Al probar el controlador para rastreo con saturación en los actuadores, se puede observar una disminución apreciable de la carga manejable, puesto que para el caso b) $m_l = 1.21 \text{ Kg}$ el controlador pierde la capacidad de realizar su tarea. Este se define como el máximo de operabilidad del manipulador en función de la carga para esta estrategia de control.



a)



b)

Fig. 3.14 Velocidades para: a) $m_1 = 1.2$ Kg y b) $m_1 = 1.21$ Kg

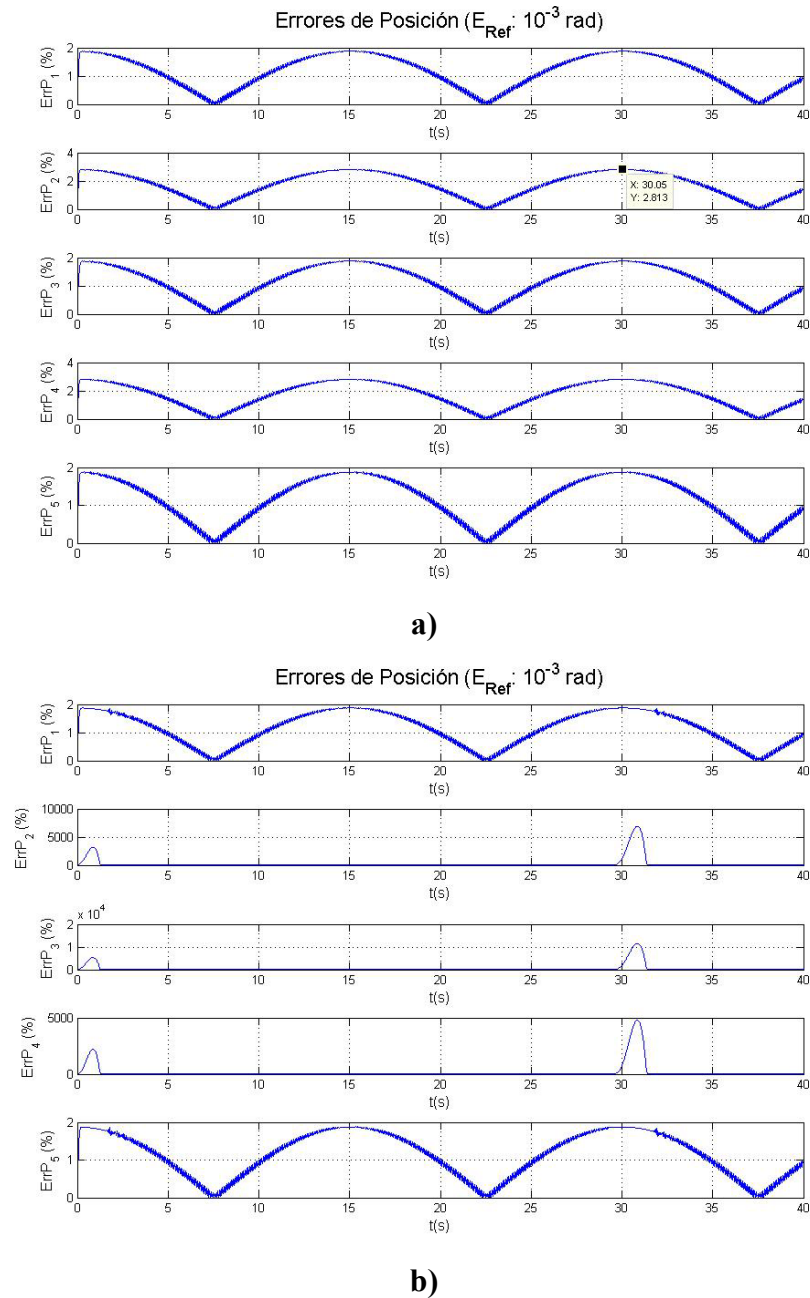
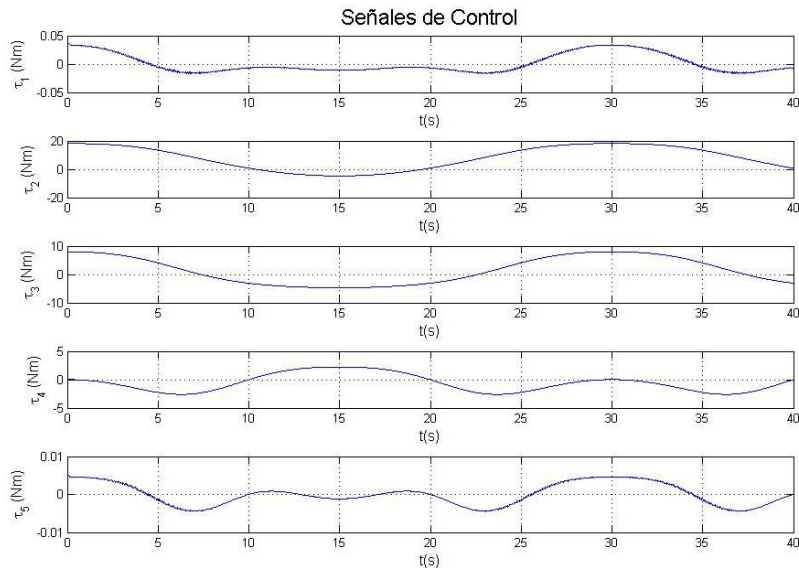


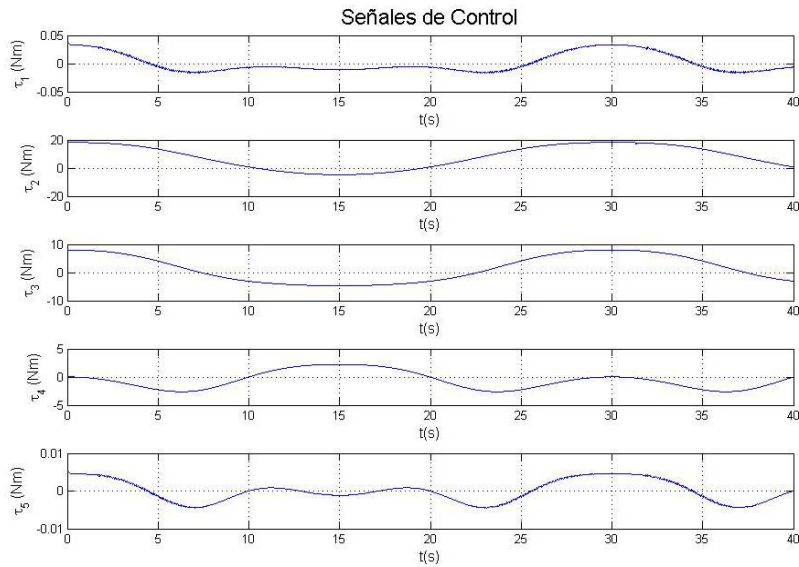
Fig. 3.15 Errores de Posición para: a) $m_l = 1.2 \text{ Kg}$ y b) $m_l = 1.21 \text{ Kg}$

Se observa en la parte b) de la Fig. 3.15 el aumento en el error de posición en el momento de mayor esfuerzo, correspondiente al cambio de dirección de las articulaciones al pasar por la posición más baja. Este error relativo en x_2 puede alcanzar valores hasta de 6922% respecto del error de referencia ($e_{ref} = 10^{-3} \text{ rad}$) y es periódico con periodo $T = 30 \text{ seg}$ (que

asegura que se encuentra en estado estacionario). Para a) $m_l = 1.2$ Kg el error no supera el 2.9%.



a)



b)

Fig. 3.16 Señales de control para: a) $m_l = 1.2$ Kg (izq.) b) $m_l = 1.21$ Kg

En conclusión, al presentarse saturación en las señales de control para la tarea de rastreo, se genera un error de posición inaceptable para cualquier aplicación. Este error se presenta como un fenómeno transitorio periódico en el punto de mayor esfuerzo de la trayectoria.

CAPITULO 4. CONTROL NO LINEAL ADAPTATIVO

4.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se estudió la estrategia de control de linealización por realimentación para controlar la posición de las diferentes articulaciones, con el objetivo de realizar regulación o rastreo. Se partió del conocimiento preciso de las características inerciales y no se incluyó en la ley de control una dependencia de los cambios en las características inerciales de la carga. Los cambios en la carga a menudo son considerables; para un controlador con parámetros constantes pueden generarse velocidades de respuesta reducida, limitada precisión e incluso causar inestabilidad [2].

Una tarea de control que requiera precisión y velocidad tendrá que ser capaz de adaptarse a cambios en la carga. Teniendo en cuenta que los parámetros inerciales del manipulador no cambian en el tiempo, es lógico pensar que después de conocerlos (vía medición o estimación) y dependiendo de la aplicación, sea conveniente controlar el manipulador adaptándose solamente a las características cambiantes de la carga [2].

4.2 CONTROL ADAPTATIVO PARA UN MANIPULADOR DE CINCO GRADOS DE LIBERTAD

Para este caso, el controlador cuenta con un parámetro de adaptación a las propiedades de la masa de carga, teniendo en cuenta que las características del manipulador no cambian y que pueden ser medidas o identificadas y usadas como parámetros constantes.

La carga puede ser descrita como máximo por 10 parámetros entre los que están la masa, tres parámetros que describen la posición del centro de masa y seis parámetros que

describen la matriz de inercia de de la carga. Además se puede considerar la carga como si hiciera parte del último del último elemento del manipulador [2].

Para el control adaptativo implementado se consideró una carga puntual ubicada en el centro de masa del último elemento del manipulador. Por tanto, tiene un parámetro a ser identificado, que corresponde a la suma de la masa del último elemento del manipulador y la masa de la carga y está definida como: $m_{sl} = m_5 + m_l$, donde, m_5 es la masa del último elemento del manipulador y m_l corresponde a la masa de la carga.

Con base en el modelo dinámico compacto obtenido en el proceso de análisis, se requiere conseguir una representación del modelo que sea lineal respecto del parámetro variable, es decir que la dinámica sea equivalente a:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} m_{sl} & p_1 \end{bmatrix}^T \quad (4.1)$$

Esta labor requiere de la obtención analítica de cada uno de los términos mediante el uso de la herramienta simbólica de Matlab®, en función de los parámetros m_{sl} y de la inclusión de un parámetro “virtual” adicional $p_1 = 1$, correspondiente al factor común de los términos de $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ que no dependen de m_{sl} .

4.2.1 Sin saturación de los actuadores

Tras obtener una representación de este tipo, es posible aplicar las leyes de control y adaptación presentadas en el Capítulo 1, con el objetivo inicial de realizar el seguimiento de trayectorias sin restricciones en las señales de control, es decir, en el caso en que los actuadores no tuvieran saturación.

Inicialmente, se plantean trayectorias deseadas de la forma:

$$\begin{aligned} q_{d1}(t) &= \frac{\pi}{6} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{30}t\right)\right) = q_{d3}(t) = q_{d5}(t) \\ q_{d2}(t) &= \frac{\pi}{4} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{30}t\right)\right) = q_{d4}(t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Adicionalmente, teniendo:

$$\begin{aligned} \Lambda &= 150\mathbf{I} \\ \mathbf{K}_D &= 350\mathbf{I} \\ \Gamma &= \text{diag}[1.2 \quad 1.8] \end{aligned} \quad (4.3)$$

Con condiciones iniciales iguales a cero, incluyendo el desconocimiento a priori del valor del parámetro (es decir $\hat{\mathbf{a}}(0) = 0$) y para $m_{5l} = m_5 + m_l = 4$, con la condición asumida de que $m_5 = 1$, se obtuvieron los siguientes resultados:

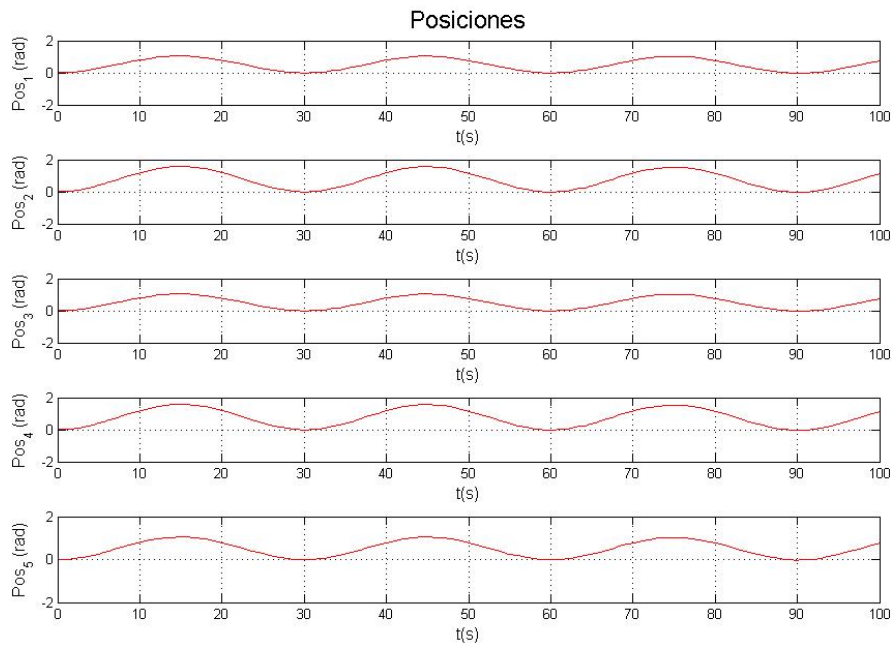


Fig. 4.1 Posiciones de Salida para $m_l = 3$

La Fig. 4.1 muestra en el mismo gráfico una superposición de las trayectorias deseadas y medidas para cada una de las articulaciones, nótese una superposición muy aproximada.

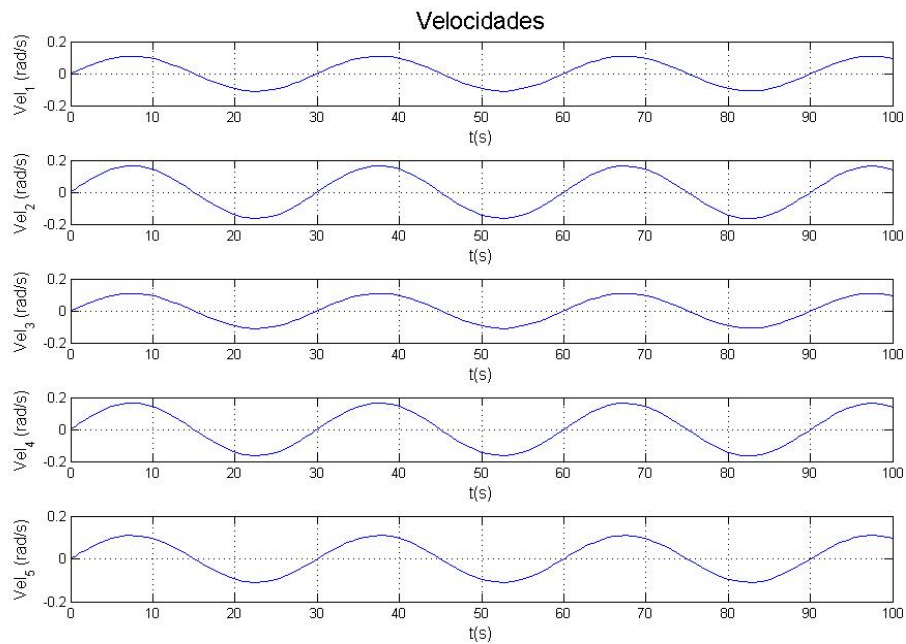


Fig. 4.2 Velocidades de las articulaciones con $m_l = 3$

La Fig. 4.2 muestra la característica de las velocidades angulares de las articulaciones en las condiciones impuestas inicialmente.

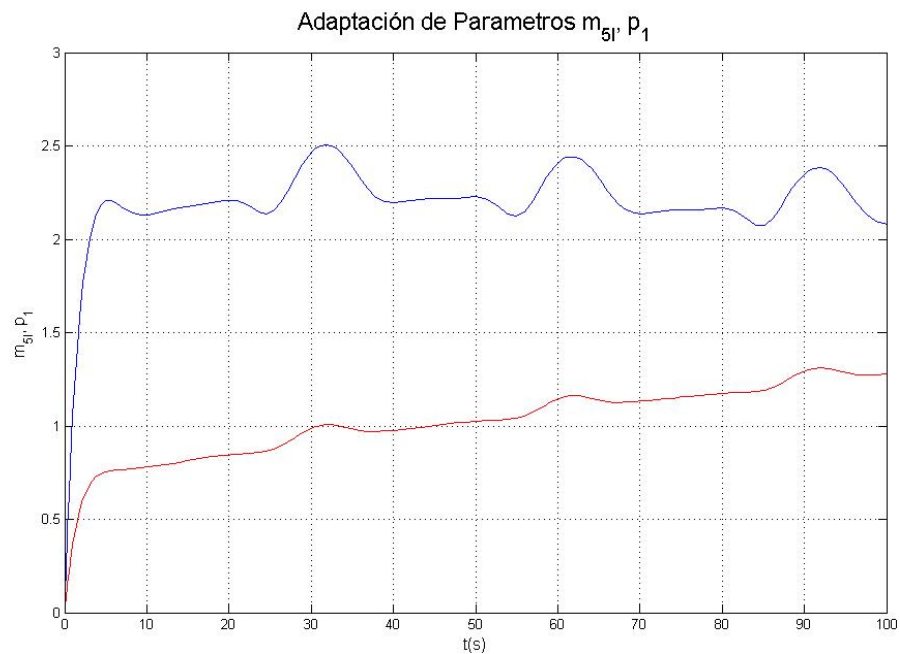


Fig. 4.3 Adaptación de parámetros m_{5l} y p_1

La Fig. 4.3 muestra una gráfica del proceso de adaptación de los parámetros, buscando cumplir con la tarea de control asignada.

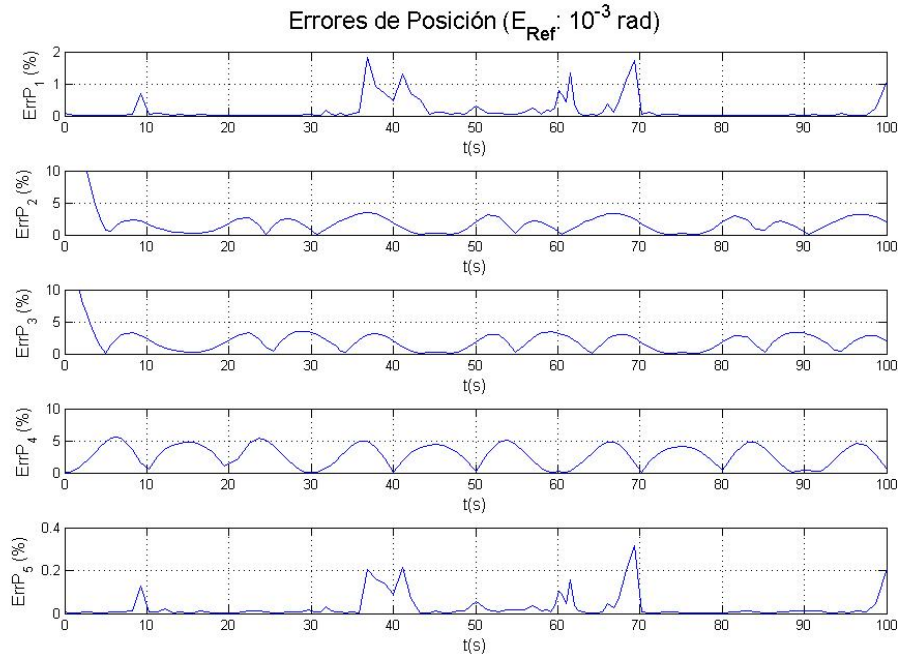


Fig. 4.4 Errores relativos de posición, máximo de 5.05% en x_4

La Fig. 4.4 muestra una gráfica del error relativo de posición, tomando como referencia un error $e_{ref} = 10^{-3}$ rad, como una relación entre las posiciones de salida simuladas y las deseadas. En este caso, el error de rastreo no tiende estrictamente a cero de manera asintótica, pero para efectos prácticos, converge en constantes de tiempo finitas que dependen para trayectorias determinadas de las matrices de ganancia Λ , K_D y Γ [2]. Para las condiciones planteadas se cuenta con errores máximos de 3.3% para x_2 , 3.06% para x_3 y 5.05% para x_4 .

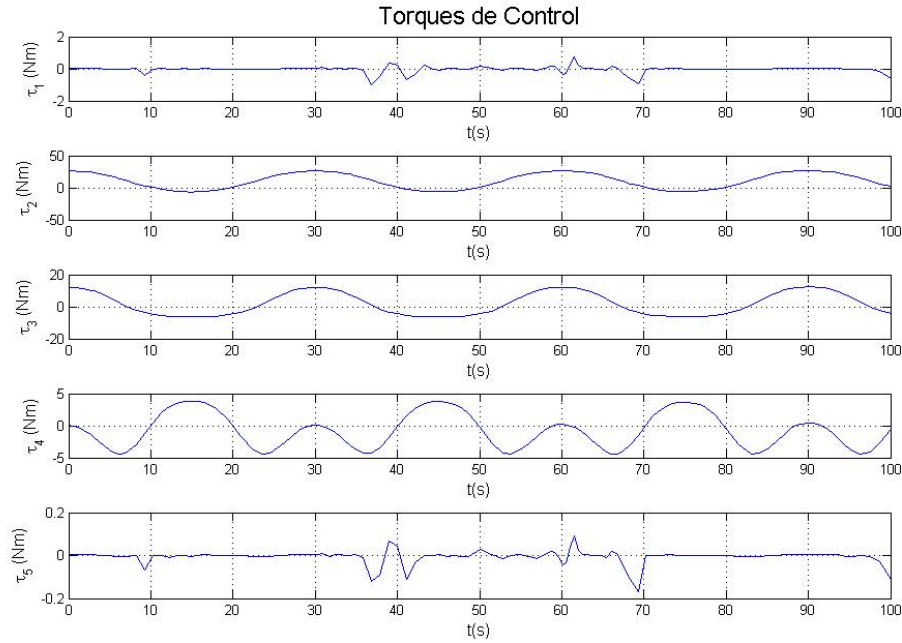


Fig. 4.5 Torques de Control para $m_l = 3$

La Fig. 4.5 muestra las señales de control, o torques de control aplicados en cada articulación, para obtener la tarea de rastreo planteada. En este caso se presentan valores en los torques de hasta 26.01 Nm para τ_2 , que están por encima del valor saturación propuesto de $\tau_{sat} = 18.2$ Nm. Nótese la periodicidad en las señales, con periodo $T = 30$ seg, que garantizan que el sistema se encuentra en estado estacionario.

4.2.2 Efecto de la saturación de los actuadores

Para este caso se tienen las mismas trayectorias deseadas:

$$\begin{aligned}
 q_{d1}(t) &= \frac{\pi}{6} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{30}t\right)\right) = q_{d3}(t) = q_{d5}(t) \\
 q_{d2}(t) &= \frac{\pi}{4} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{30}t\right)\right) = q_{d4}(t)
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Teniendo:

$$\begin{aligned} \Lambda &= 150\mathbf{I} \\ \mathbf{K}_D &= 350\mathbf{I} \\ \Gamma &= \text{diag}[1.2 \quad 1.8] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Se imponen las mismas condiciones de saturación presentadas hasta ahora, es decir, en las que $\tau_{sat} = 18.2$ Nm. Para estas condiciones se obtuvo un límite de carga en el cual el error de posición aumenta progresivamente, empezando a ser crítico para el valor en el cual $m_l = 1.18$ Kg, valor próximo al encontrado para el caso de Linealización por Realimentación, presentado anteriormente.

Usando $m_l = 1.18$ Kg, se obtuvieron los resultados mostrados en las Fig. 4.6 a 4.10, que se comparan con el comportamiento para el caso de $m_l = 1.17$ Kg.

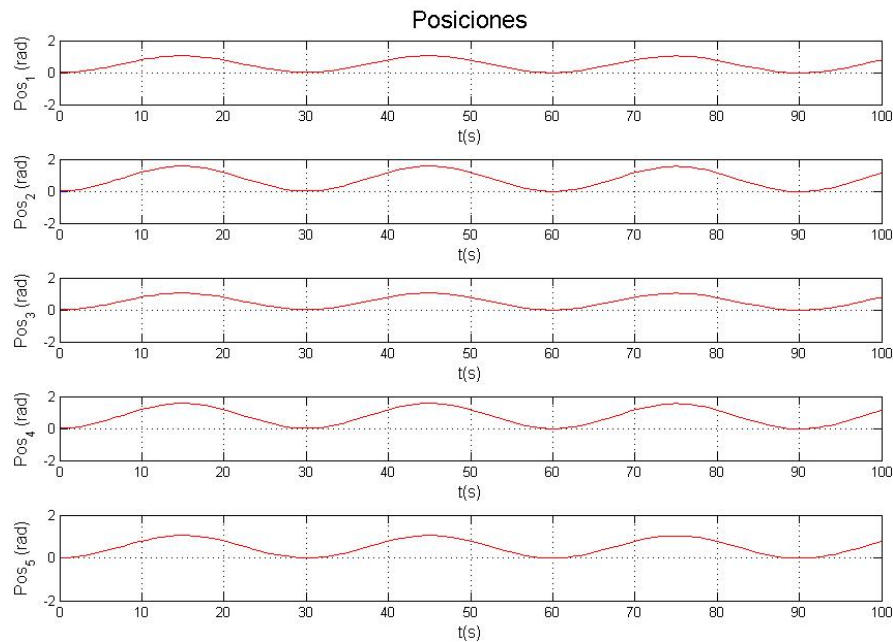


Fig. 4.6 Posiciones para $m_l = 1.18$ Kg .

La Fig. 4.6 muestra las trayectorias de salida de las articulaciones del manipulador, desde el punto de vista visual tiene un comportamiento similar para el caso de $m_l = 1.17$ Kg. La Fig. 4.7 muestra las velocidades.

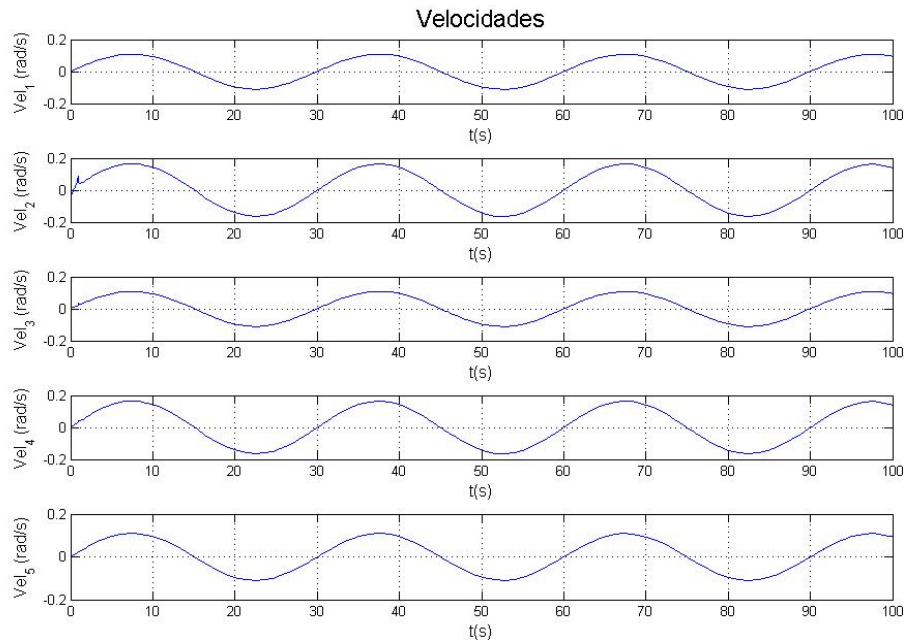


Fig. 4.7 Velocidades para $m_l = 1.18$ Kg .

En la Fig. 4.8 se observa cómo al comienzo el error relativo de posición es grande mientras se estiman los valores iniciales de los parámetros, para llegar a un valor máximo de $e_{\%} = 7.69\%$ para x_2 , en la parte correspondiente al primer ciclo completo de la trayectoria. Para un valor de $m_l = 1.17$ Kg el error relativo máximo para x_2 es $e_{\%} = 3.5\%$. Pero nótese cómo después de los 90 segundos se presente otro pico apreciable en el error de posición. La Fig. 4.9 muestra como para el valor $m_l = 1.17$ Kg no se presenta este comportamiento.

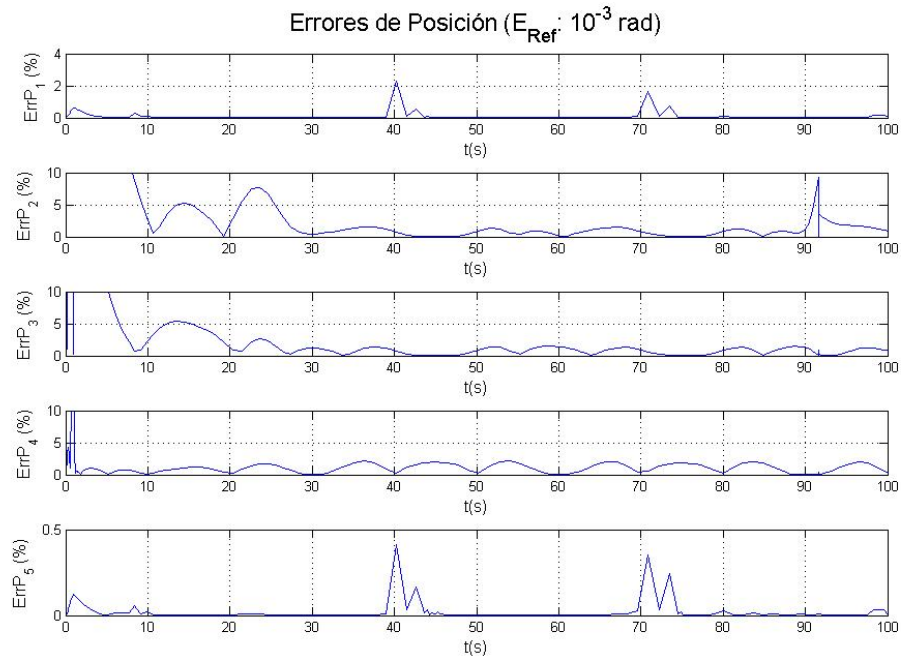


Fig. 4.8 Errores relativos de Posición $m_l = 1.18$ Kg.

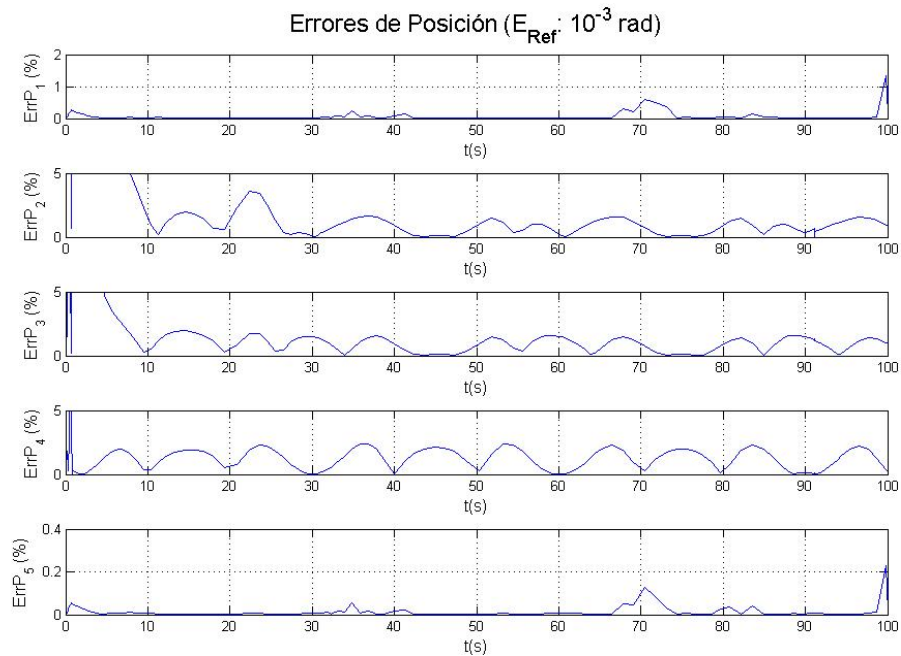


Fig. 4.9 Errores relativos de Posición $m_l = 1.17$ Kg.

La Fig. 4.10 muestra la convergencia de los parámetros estimados para el caso de $m_l = 1.17$ Kg, en la Fig. 4.11 la convergencia de los parámetros para el caso de $m_l = 1.18$ Kg.

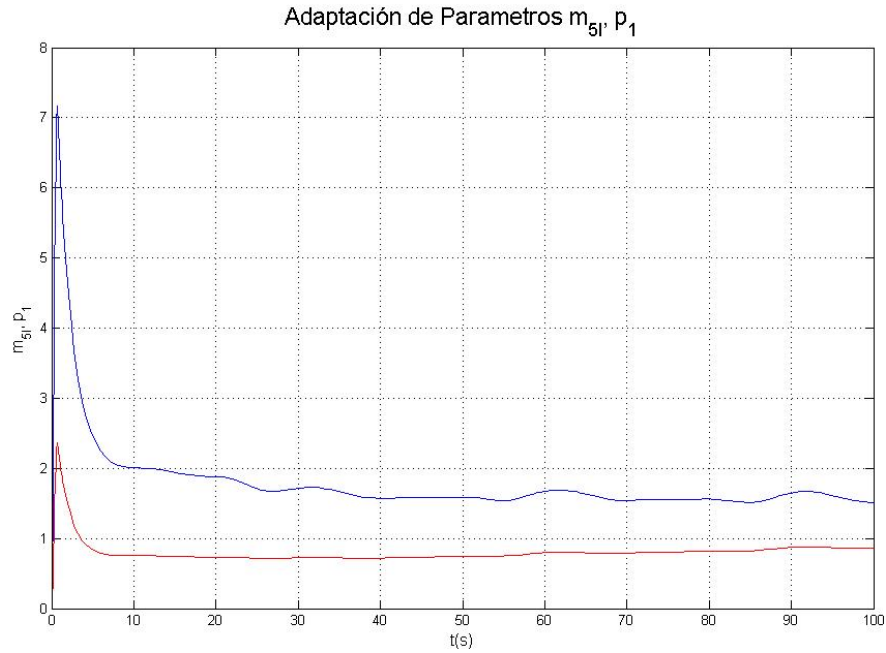


Fig. 4.10 Parámetros estimados para $m_l = 1.17$ Kg

El transitorio propio de la estimación de parámetros se hace más grande a medida que se aumenta la carga, así como la rata de convergencia durante el primer ciclo de la trayectoria.

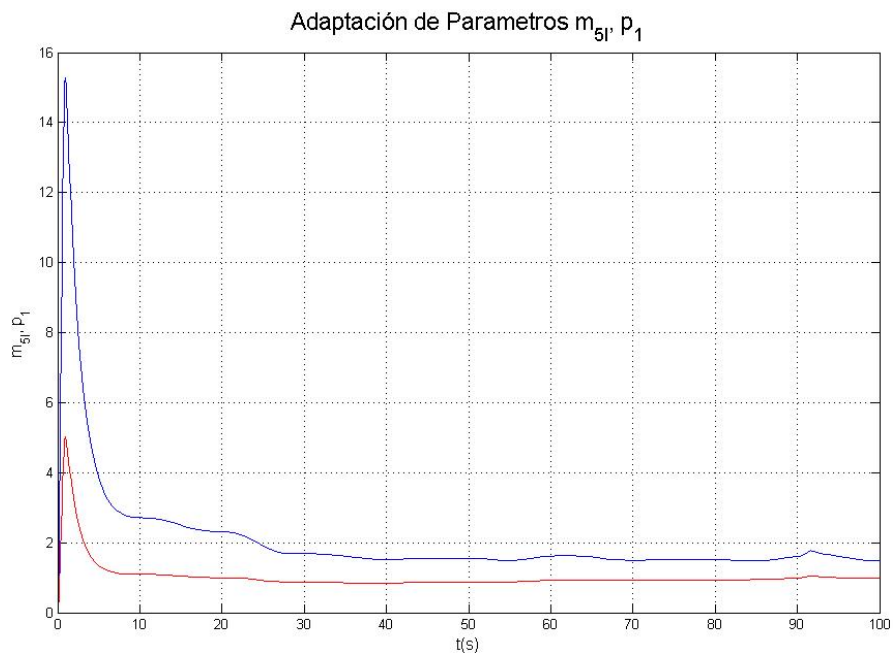


Fig. 4.11 Parámetros estimados para $m_l = 1.18$ Kg

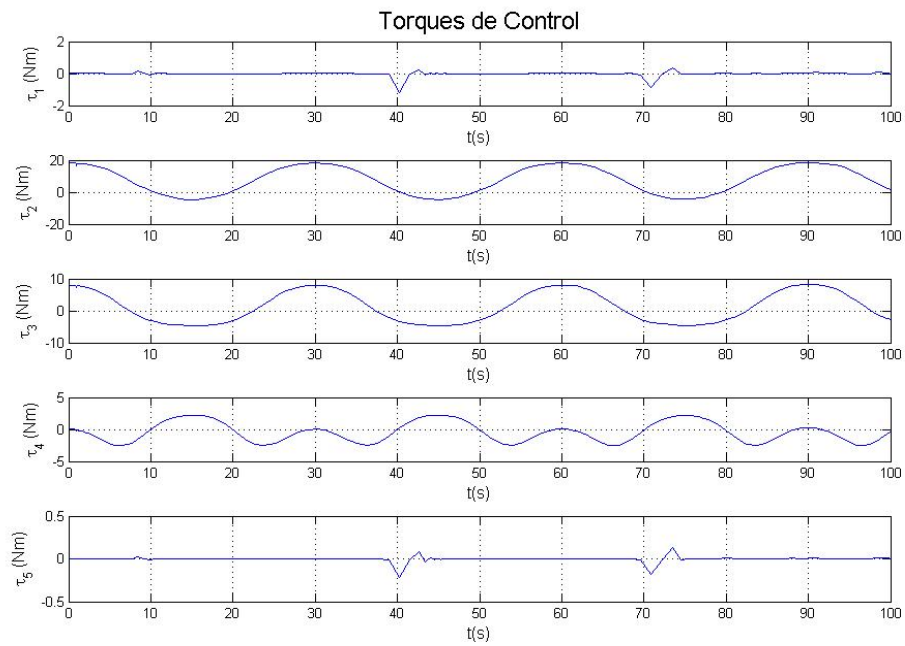


Fig. 4.12 Señales de control para $m_l = 1.18 \text{ Kg}$

La Fig. 4.12 muestra las señales de control para el caso $m_l = 1.18 \text{ Kg}$, nótese la leve saturación de las señales de control en los momentos de mayor esfuerzo (en el momento en que se cambia de dirección en los puntos más bajos de las trayectorias).

CAPITULO 5. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

Teniendo en cuenta que un manipulador robótico de cinco grados de libertad es un sistema dinámico de Múltiples entradas y Múltiples salidas (MIMO), se presentan las siguientes conclusiones, aplicables al manipulador SCORBOT ER V PLUS:

- Asumir inicialmente las características inerciales es una condición que permite realizar una caracterización a escala del comportamiento del sistema dinámico, con la pretensión de comprender de manera clara las diferentes implicaciones de dicho comportamiento. También permite realizar una validación del modelo dinámico y de la posibilidad de implementar estrategias de control no lineal y su comportamiento. Además de poder aproximarse a una estrategia de control adaptativa, que no pretende calcular de manera exacta el valor de los parámetros sino de cumplir con su labor de control, en el futuro se puede implementar una tarea de identificación fuera de línea (Off Line) de los parámetros inerciales reales del manipulador para complementar el análisis de los resultados de este trabajo.
- Contar con el manipulador físicamente en el laboratorio del grupo de investigación “Percepción y Control Inteligente” de la Universidad Nacional Sede Manizales, constituye una invaluable herramienta para concretar las abstracciones propias de la teoría de sistemas dinámicos y de control no lineal.
- Mediante el análisis del sistema dinámico desde el punto de vista de los puntos de equilibrio y de la estabilidad (mediante el Teorema Indirecto de Lyapunov), y entendiendo su similitud con sistemas dinámicos con un nivel de complejidad inferior, fue posible entender y caracterizar la dependencia entre las posiciones de equilibrio y la estabilidad de dichos puntos. Es de interés futuro el poder demostrar la relación entre la estabilidad asociada a un subespacio de equilibrio y los valores

propios del sistema linealizado. No fue posible hallar bifurcaciones totalmente caracterizadas al realizar variación de los parámetros de carga, fricción viscosa y saturación de las señales de control de los actuadores. Se pudieron encontrar condiciones en las cuales el sistema pasa de ser estable a desplazar el punto de equilibrio en presencia de oscilaciones, pero debido a condiciones numéricas no se pudo caracterizar completamente esta condición. Para el futuro se plantea la inclusión del análisis de los efectos de la Fricción de Coulomb, como característica de sistemas dinámicos no suaves del tipo Filippov.

- La primera tarea de control planteada fue Linealización por Realimentación, que funciona de manera adecuada al realizar las actividades de regulación y rastreo para las consignas articulares planteadas. Este tipo de control utiliza el modelo del sistema y presupone la precisión del mismo, es por esto que no está preparado para condiciones variables presentes en algunas aplicaciones reales, como es el caso de movilización de carga. Se encontró un límite máximo de carga posible. En este caso se requiere de una estrategia de control capaz de asumir los efectos de dichas variaciones.
- El controlador adaptativo aplicado al manipulador, está diseñado para ajustar sus parámetros de manera continua, con base en la variación de parámetros como la carga. Se pudo verificar la capacidad de realizar tareas de rastreo de trayectorias ante diferentes cargas, encontrando límites de funcionamiento hasta los cuales es capaz de realizar su labor de manera adecuada.
- El efecto de la saturación de los torques, es una de las posibles consideraciones de tipo práctico que permiten aproximarse al comportamiento del manipulador en condiciones reales, y conocer los verdaderos efectos de las variaciones de parámetros en aplicaciones prácticas. Dado que se encontró un límite del parámetro aproximadamente igual por los dos métodos de control, se plantea como posible tema de estudio a continuar, el análisis de las bifurcaciones y de la dinámica del sistema controlado, variando los parámetros. Dadas las características del transitorio

que se presentan en $m_l = 1.18$, instante en el que el torque se satura, es posible que el sistema presente una bifurcación por colisión de borde. Se propone en un trabajo futuro el análisis de esta situación y otras que se puedan presentar a medida que se varían los parámetros del sistema controlado.

- Aunque este trabajo se limita al análisis dinámico del manipulador, en el futuro se puede realizar un análisis cinemático que permita, entre otras cosas, evaluar el nivel de precisión de los movimientos, en términos de desplazamiento cartesiano y compararlo con estándares de tolerancia en aplicaciones industriales como el ISO h6.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Craig, John J. Introduction to Robotics: Mechanics and Control. 2 ed. Reading : Addison – Wesley, 1989. 450 p.
- [2] Slotine, J-J. E., Li, W. Applied Nonlinear Control. Prentice Hall Englewood Cliffs. New Jersey, 1991.
- [3] Eshed Robotec. SCORBOT-ER V plus : User´s Manual. s. l. : ESHED, 1982. 144 p.
- [4] Durango, Sebastián y Calderon, Marco T. Modelo cinemático, dinámico y de manipulabilidad del robot Scorbot ER V PLUS. Tesis de Maestría. Universidad Tecnológica de Pereira, 2006.
- [5] Fu, K.S.; Gonzalez, R.C.; Lee, C.S. Robotics. Control, Sensing, Vision and Intelligence. 1 ed. McGraw Hill. 1989, 598 p.
- [6] Wittenmark B. Astrom K.J. Adaptive Control. Addison Wesley Publishing Company, 1995.
- [7] Luh, J. Y. S., Walker, M. W. y Paul, R. P. C. On-Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators. Citado por YOSHIKAWA, Tsuneo. Foundations of Robotics. Cambridge : The MIT Press, 1990.
- [8] Costain, Alexander. Torrez, Carol. “Modelado, Identificación Paramétrica Y Control De Un Robot De Cinco Grados De Libertad”, Monografía Universidad del Cauca, Junio 2008.
- [9] Shen, Jinglay. Sanyal Amit. Chiaturvedi Nalin. “Dynamics and Control of a 3D pendulum”, 43th IEEE Conference on Decision and Control, Diciembre 2004.
- [10] Majid M. Moghaddam and Ali Bazaei. “On Approximate Feedback linearization of Robot Manipulators”, IEEE International conference on Control and Automation, June 2003.
- [11] Ke-Ping Liu, Wen You, Yuan-Chun Li. “Combining A Feedback Linearization Approach With Input Shaping For Flexible Manipulator Control”. IEEE Second International Conference on Mache Learning and Cybernetics, November 2003.
- [12] Won – Kee Son, Jin-Young Choi, et al. “ Robust control of feedback linearizable system with uncertainty and input constrains”. Sice Korea. July 2001.

- [13] Chih-Lyang Hwang and Shau-Fu Chao. “A Fuzzy-Model-Based Variable Structure Control for Robot Arms: Theory and Experiments “. IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, 2004
- [14] Niaona Zhang, Yong Feng, Xinghuo Yu. . “Optimization Of Terminal Sliding Control For Two-Link Flexible Manipulators”. 30th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, 2004
- [15] Martinez, Adriana M., Colorado, Julián D. y Carolina Bachenheimer. “Control No Lineal De Un Brazo Robótico De 2 Grados De Libertad”, Congreso de la Asociación Colombiana de Automática, Marzo 2007.

ANEXOS

Durante el progreso de esta investigación se desarrollaron y modificaron programas utilizando diferentes herramientas matemáticas y simbólicas de MatLab® en su versión 7.0. Dichos programas permiten realizar las actividades de obtención y validación de modelos dinámicos del manipulador de cinco grados de libertad, análisis de estos modelos e implementación de los algoritmos de los controladores para las tareas de regulación y rastreo.

El modelo dinámico compacto de un manipulador de cinco grados de libertad está compuesto por centenares de términos. Debido a esto, y por consideraciones prácticas, se hará una relación y breve descripción de los programas que se incluyeron en el CD de anexos.

La Tabla A1 contiene los programas y funciones usadas para la obtención, validación, simulación y análisis de la dinámica de un manipulador de 5 grados de libertad (como el SCORBOT ER V PLUS).

MODELO DINAMICO: OBTENCIÓN, VALIDACIÓN, SIMULACIÓN Y ANÁLISIS.	
PROGRAMA	DESCRIPCIÓN
<i>dina_ESTADO.m</i>	Modelo Dinámico Inverso, formulación compacta de Newton – Euler. Calculo de la matriz de rotación del efector final respecto a la base. Modificación de la función <i>dina1.m</i> presentada en [4].
<i>H_invH.m</i>	Formulación Simbólica de la matriz de Inercias y su inversa (5×5), para la formulación compacta de Newton-Euler, usando parámetros definidos de masas, momentos de inercia y centros de masas.
<i>Cs.m</i>	Formulación Simbólica del vector de términos Centrífgos y de Coriolis (5×1), para la formulación compacta de Newton-Euler, usando parámetros definidos de masas, momentos de inercia y centros de masas.
<i>Gs.m</i>	Formulación Simbólica del vector de términos gravitacionales (5×1), para la formulación compacta de Newton-Euler, usando parámetros definidos de masas, momentos de inercia y centros de masas.

<i>scorbot_dyn_inv_conv.m</i>	Función paramétrica para el cálculo del vector de torques en función de la dinámica inversa compacta (5×1). Modificación de la función <i>scorbot_dyn_inv.m</i> presentada en [4].
<i>Calc_Tao1.m</i>	Cálculo de torques usando la función paramétrica modificada <i>scorbot_dyn_inv_conv.m</i> , para una posición específica de las articulaciones.
<i>valida_dyn_1_conv.m</i>	Validación del modelo DINAMICO INVERSO del SCORBOT. <ul style="list-style-type: none"> • Usa la función: <i>scorbot_dyn_inv_conv.m</i> • Requiere herramienta <i>Hemero: rne.m</i> • Utiliza: <i>scorbot_hem_m.m</i> Es una modificación del programa Prueba_dyn_1.m presentado en [4].
<i>Jacobiano.m</i>	Cálculo de la Matriz Jacobiana simbólica (10×10), con base en la Ecuación de Estados.
<i>Esp_Estado_Jacob2.m</i>	Modelo dinámico inverso para el SCORBOT ER V PLUS. Formulación COMPACTA recursiva de Newton – Euler. Obtención de la Ecuación de Estado (10 ecuaciones), usando los resultados de: <ul style="list-style-type: none"> • <i>Jacobiano.m</i>: Cálculo de la Matriz Jacobiana simbólica con base en la Ecuación de Estado. • <i>Cs.m</i> : Vector simbólico de términos de Coriolis y Centrífugos. • <i>Gs.m</i> : Vector simbólico de términos Gravitacionales • <i>H_Hinv.m</i> : Matriz simbólica de Inercias e Inversa. • <i>Calc_Tao1.m</i>: Recálculo de torques usando la dinámica inversa. Incluye efectos de fricción viscosa. Calcula valores propios del sistema con cambios de la carga m_l (recalculando torques para las posiciones de equilibrio correspondientes) para realizar análisis de estabilidad.
<i>Est_Estacion_700.m</i>	Simulación del Modelo Dinámico Directo, resultados para diferentes momentos del estado transitorio, aislándolo del estado estacionario.
<i>Sol_nolineal1.m</i>	Obtención y prueba de los puntos de equilibrio dándole solución a $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = 0$, para valores aleatorios en el espacio de trabajo del manipulador.
<i>Bifurcaciones1.m</i>	Obtención del diagrama de bifurcaciones al variar los parámetros de fricción viscosa γ y la carga m_l .
<i>Equil_T_nocero3.m</i>	Simulación del modelo dinámico inverso para realizar análisis ante perturbaciones en la carga y en los torques de la muñeca. Utiliza la Ecuación de Estados <i>ecuacion5.m</i> .

Tabla A1. Programas para modelado y análisis del sistema dinámico.

La Tabla A2 presenta los programas y funciones usadas para la simulación del controlador mediante linealización por realimentación y el controlador adaptativo, inicialmente para el caso en que no se tiene saturación en los torques de los actuadores, y posteriormente para el caso en el que se presenta dicha condición de saturación.

SISTEMAS DE CONTROL NO LINEAL: LINEALIZACIÓN POR REALIMENTACIÓN Y CONTROL ADAPTATIVO	
PROGRAMA	DESCRIPCIÓN
<i>Linealiza1a.m</i>	Función para la aplicación del controlador mediante linealización por realimentación, para el caso de Regulación . Incluye el parámetro τ_{sat} para el análisis de condiciones con saturación en los torques.
<i>Control1.m</i>	Aplicación de la función <i>Linealiza1a.m</i> para la simulación de la tarea de Regulación , para el caso en que no se tiene saturación en los torques de los actuadores, y posteriormente para el caso en el que se presenta dicha condición de saturación.
<i>Linealiza2a.m</i>	Función para la aplicación del controlador mediante linealización por realimentación, para el caso de Rastreo . Incluye el parámetro τ_{sat} para el análisis de condiciones con saturación en los torques.
<i>Control2.m</i>	Aplicación de la función <i>Linealiza2a.m</i> para la simulación de la tarea de Rastreo , para el caso en que no se tiene saturación en los torques de los actuadores, y posteriormente para el caso en el que se presenta dicha condición de saturación.
<i>Y.m</i>	Transformación de la dinámica para obtener una relación lineal con respecto al parámetro m_5 , para el planteamiento de la ley de control adaptativo.
<i>Adapta6.m</i>	Función para la aplicación del controlador adaptativo, para el caso de Rastreo . Incluye el parámetro τ_{sat} para el análisis de condiciones con saturación en los torques.
<i>Adapta_1param.m</i>	Aplicación de la función <i>Adapta6.m</i> para la simulación de la tarea de Rastreo , para el caso en que no se tiene saturación en los torques de los actuadores, y posteriormente para el caso en el que se presenta dicha condición de saturación.

Tabla A2. Programas para simulación de estrategias de control en tareas de Regulación y Rastreo.