UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MANIZALES

FACULTAD DE CIENCIAS Y ADMINISTRACION
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS

INTEGRALES DOBLES Y TRIPLES, DE LINEAS Y DE SUPERFICIE

Bernardo Acevedo Frías
Profesor Asociado

Manizales, Junio 1993

I.S.B.N. 958 - 9322 -04 - 2

Autor:
Bernardo Acevedo Frias
Matemático
Profesor Asociado
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales.

Revisado por:
Profesor Omar Evelio Ospina A., Matemático, Ms. Se.
Profesor Luis Alvaro Salazar S., Lic. en Matemáticas, Ms. Se.

Impreso por:
Centro de Publicaciones
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales.

Junio de 1993
Primera Edición

PRESENTACION

Nos complace hacer entrega a nuestra Comunidad Universitaria del texto del profesor BERNARDO ACEVEDO FRIAS, "Integrales dobles, triples, de línea y de superficie", donde las calidades académicas y pedagógicas de su autor se ven acentradas por el manejo riguroso, y a la vez descomplicado en formalismos, de temas reconocidamente difíciles del Cálculo; estas bondades del texto lo hacen especialmente apto para las carreras de Ingeniería y sin duda tendrá la acogida que se merece, junto con otros de la misma autoría que acrecientan la producción de textos en el Departamento.

NELSON PUERTA GARCIA
Director
Departamento de Ciencias

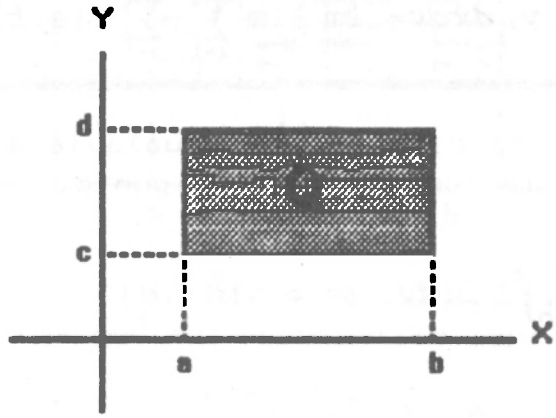
TABLA DE CONTENIDO

INTEGRALES MULTIPLES

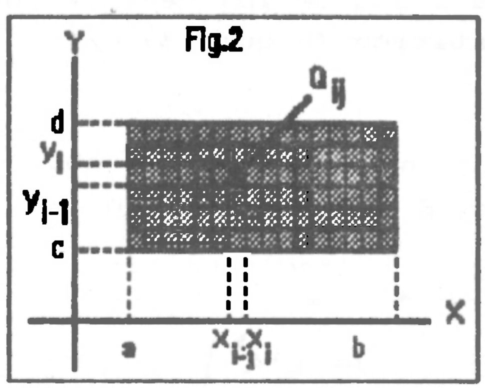
1. INTEGRALES DOBLES

1.1 *DEFINICION*

Sea ρ una región rectangular del plano XY, donde $a\leq x\leq b$ y $c\leq y\leq d$, es decir, $\rho=[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\mid x\in[a,b],\ y\in[c,d]\}$. **(Figura 1)**



Se particiona ρ en nm subrectángulos que no se traslapen asi:
Se busca una partición P_1 de $[a,b]$, de la forma $P_1=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, $x_0=a<x_1<\ldots<x_n=b$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\dfrac{b-a}{n}$, $i=1,2,3,\ldots,n$, es decir cada subintervalo de igual longitud; y una partición P_2 de $[c,d]$ de la forma $P_2=\{y_0,y_1,y_2,\ldots,y_m\}$; $y_0=c<y_1<y_2<\ldots<y_m=d$ y $\Delta y_j=y_j-y_{j-1}=\dfrac{d-c}{m}$, para $j=1,2,3,\ldots,m$. Las nm subregiones rectangulares $x_{i-1}\leq x\leq x_i$ y $y_{j-1}\leq y\leq y_j$, $i=1,2,3,\ldots,n$ y $j=1,2,3,\ldots,m$ tienen cada una una área de $\Delta x_i\Delta y_j=(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})$ y constituyen una partición P de ρ en nm subrectángulos que se enumeran en forma conveniente **(Figura 2)**



Sea f(x,y) una función definida y acotada en una región del plano XY $\varrho=[a,b]\times[c,d]$, entonces la integral doble de f(x,y) sobre ϱ, notada por $\int_{\varrho}\int f(x,y)\,dxdy$ se define por:

$$\boxed{\int_{\varrho}\int f(x,y)\,dxdy=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(a,b)\,\Delta x_i\Delta y_j}$$

Si este límite existe. (a,b) es un punto cualquiera en el subrectángulo ϱ_{ij} y f(a,b) el valor de la función en este punto.

Ejemplo 1.

Hallar el valor de $\int_{\varrho}\int K dxdy$, $\varrho=[a,b]\times[c,d]$.

Solución

$$\int_{\varrho}\int K dxdy = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(a,b)\,\Delta x_i\Delta y_j = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}k\Delta x_i\Delta y_j$$

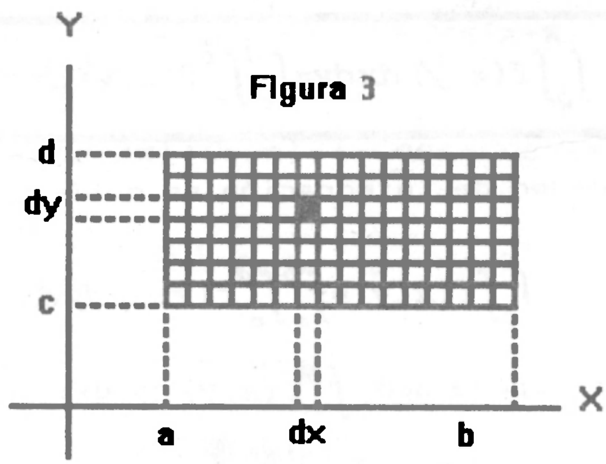
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}K\Delta x_i \lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\Delta y_j = \lim_{n\to\infty}K\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\sum_{j=1}^{m}(y_j-y_{j-1})\right)$$

$$= K\left(\lim_{n\to\infty}(x_n-x_0)\lim_{m\to\infty}(y_m-y_0)\right) = K\left(\lim_{n\to\infty}(b-a) * \lim_{m\to\infty}(d-c)\right)$$

$$= k(b-a)(d-c).$$

La integral $\int_{\varrho}\int K dxdy=K(b-a)(d-c)$ representa el volumen de una caja de lados b-a, d-c y de altura K, luego en general la integral doble $\int_{\varrho}\int f(x,y)\,dxdy$, si $f(x,y)\geq 0$ tiene una interpretación geométrica así:

Se eligen ejes paralelos a uno de los vértices de uno de los subrectángulos de la partición (Figura 3).



El área del subrectángulo que aparece en la figura 3 subrayado es dxdy. Esta área se multiplica por el valor de la función en el punto (x,y) del subrectángulo, f(x,y), entonces la integral $\int_{\varrho}\int f(x,y)\,dxdy$ es la suma de todos estos productos cuando dx y dy tienden a cero, es decir, n y m tendiendo a infinito y constituye el volumen del sólido limitado por las superficies x=a, x=b, y=d, y=c; z=0, y z=f(x,y). En conclusión

$$\int_{\varrho}\int f(x,y)\,dxdy=V(s)$$

Siendo s el sólido limitado por las superficies anteriores y $z=f(x,y)\geq 0$.

Para calcular integrales dobles no se utilizará la definición ya que ella es muy engorrosa, se buscaran técnicas que faciliten los calculos de ellas.

En integrales unidimensionales el segundo teorema fundamental del cálculo proporciona un método para calcular integrales sin exigir la definición en cada caso y aqui existe el siguiente teorema que logra el mismo objetivo en dos dimensiones y nos permite calcular ciertas integrales dobles mediante dos integraciones unidimensionales sucesivas.

Teorema 1

Sea f una función definida y acotada en un rectángulo $\varrho=[a,b]\times[c,d]$ y supongamos que f(x,y) es integrable en ϱ. Supongamos que para cada y fija $y\in[c,d]$; la integral unidimensional $\int_a^b f(x,y)\,dx$ existe y su valor es A(y). Si existe la integral $\int_c^d A(y)\,dy$ entonces

$$\int_c^d A(y)\,dy=\int_{\varrho}\int f(x,y)\,dxdy,$$ es decir:

$$\boxed{\int_Q\int f(x,y)\,dxdy=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dxdy}.$$

Si se invierte el orden de integración se obtiene una fórmula parecida a saber:

$$\int_Q\int f(x,y)=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dydx$$

que es válida si se supone que $\int_c^d f(x,y)\,dy$ existe para cada x fija en [a,b] y que es integrable en [a,b].

Este teorema proporciona una evaluación de la integral $\int_Q\int f(x,y)\,dxdy$ mediante integración reiterada. El proceso consiste en integrar f(x,y) respecto a x entre a y b (dejando a y fija) y luego se integra el resultado respecto a y entre c y d ó integrar f(x,y) respecto a y entre c y d (dejando a x fija), y luego se integra el resultado respecto a x entre a y b.

Ejemplo 1.

Hallar el valor de $\int_Q\int Cos(x+y)\,dxdy$; $Q=[0,\pi]x[0,\pi]$ (Figura 4)

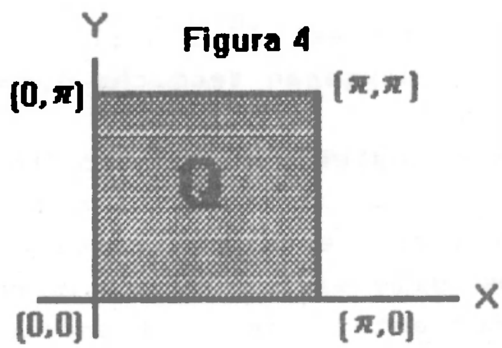


Figura 4

Solución

i) $$\int_Q\int Cos(x+y)\,dxdy = \int_0^\pi\int_0^\pi Cos(x+y)\,dxdy = \int_0^\pi Sen(x+y)\Big|_0^\pi dy$$

$$= \int_0^\pi (Sen(y+\pi)-Seny)\,dy = \Big[-Cos(y+\pi)+Cosy\Big]_0^\pi$$

$$= -Cos2\pi+Cos\pi-(-Cos\pi+Cos0) = -1-1-1-1=-4$$

ii) $$\int_Q\int Cos(x+y)\,dxdy = \int_0^\pi\int_0^\pi Cos(x+y)\,dydx = \int_0^\pi\Big[Sen(x+y)\Big|_0^\pi dx$$

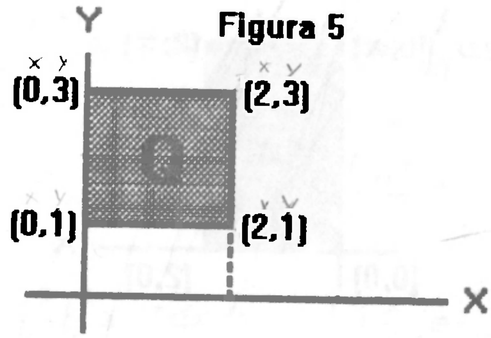
$$= \int_0^{\pi} [Sen(x+\pi) - Senx]\, dx = \Big[-Cos(x+\pi) + Cosx\Big]_0^{\pi}$$

$$= (-Cos(2\pi) + Cos\pi) - (-Cos\pi + Cos0) = -4$$

Ejemplo 2.

Hallar el valor de $\int_Q\int e^x \frac{\ln^4 y}{y}\, dx\,dy \quad Q = [0,2] \times [1,3]$ (Figura 5).

Figura 5



Solución

$$\int_Q\int e^x \frac{\ln^4 y}{y}\, dx\,dy = \int_1^3\int_0^2 e^x \frac{\ln^4 y}{y}\, dx\,dy = \int_1^3 \Big[\frac{\ln^4 y}{y} e^x\Big]_0^2 dy$$

$$= (e^2-1)\int_1^3 \frac{\ln^4 y}{y}\, dy \quad (u = Lny)$$

$$= (e^2-1)\int_0^{\ln 3} u^4\, du = (e^2-1)\frac{u^5}{5}\Big]_0^{ln3} = (e^2-1)\frac{\ln^5 3}{5}$$

Ejemplo 3.

Calcular $\int_0^1\int_0^1 \frac{x^{1/2}}{1+x^{3/4}}\, dy\,dx.$

Solución

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^{1/2}}{1+x^{3/4}}\, dy\,dx = \int_0^1 \Big[\frac{x^{1/2}}{1+x^{3/4}} y\Big]_0^1 dx$$

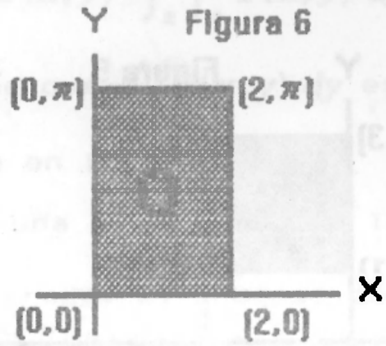
$$= \int_0^1 \frac{x^{1/2}}{1+x^{3/4}}\, dx \quad (si \quad x = z^4 \quad \rightarrow \quad dx = 4z^3\, dz)$$

$$= \int_0^1 \frac{z^2 * 4z^3}{1+z^3}\, dz = \int_0^1 \frac{4z^5}{1+z^3}\, dz = 4\int_0^1 \left(z^2 - \frac{z^2}{1+z^3}\right) dz$$

$$= \left[\frac{4}{3}z^3 - \frac{4}{3}\ln(z^3+1)\right]_0^1 = \frac{4}{3}(1-\ln 2)$$

Ejemplo 4

Calcular $\int_Q\int e^{x+y}Cosx\,dx\,dy$; $Q = [0,2] \times [0,\pi]$ (Figura 6)



Solución

$$\int_Q\int e^{x+y}Cosx\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^\pi e^y e^x Cosx\,dy\,dx = (e^\pi-1)\int_0^2 e^x Cosx\,dx$$

$$= \frac{(e^\pi-1)}{2}\left[e^x Senx + e^x Cosx\right]_0^2$$

$$= \frac{(e^\pi-1)}{2}\left[(e^2 Sen2 + e^2 Cos2) - (e^0 Sen0 + e^0 Cos0)\right]$$

$$= \frac{(e^\pi-1)}{2}\left[e^2(Sen2+Cos2)-1\right]$$

Nota

La integral $\int_0^2 e^x Cosx\,dx$ (se calculó por partes).

Teorema 2.

Sea f(x,y) una función continua en $Q = [a,b] \times [c,d]$ (Se llamará región de tipo I) entonces f(x,y) es integrable en Q y

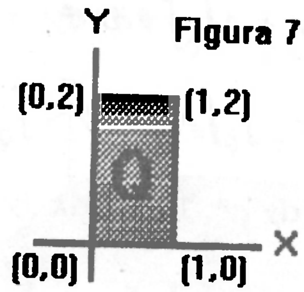
$$\int_Q\int f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy.$$

Demostración (Ejercicio).

Ejemplo 1

Calcular $\int_Q\int xe^y\,dx\,dy$; $Q = [0,1] \times [0,2]$ (Figura 7)

Figura 7



Solución

i) $$\int_Q\int xe^y\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^2 xe^y\,dy\,dx = \int_0^1\left[xe^y\right]_0^2 dx = (e^2-1)\int_0^1 x\,dx$$

$$= (e^2-1)\left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(\frac{e^2-1}{2}\right)$$

ii) $$\int_Q\int xe^y\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^1 xe^y\,dx\,dy = \int_0^2\left[\frac{x^2}{2}e^y\right]_0^1 dy = \frac{1}{2}\int_0^2 e^y\,dy$$

$$= \left.\frac{e^y}{2}\right]_0^2 = \frac{e^2-1}{2}$$

1.2 ALGUNAS PROPIEDADES

Sean $f(x,y)$, $g(x,y)$ funciones integrables en una región Q, entonces:

i) $f(x,y)\pm g(x,y)$ es integrable en Q y

$$\int_Q\int [f(x,y)\pm g(x,y)]\,dx\,dy = \int_Q\int f(x,y)\,dx\,dy \pm \int_Q\int g(x,y)\,dx\,dy.$$

ii) Si α es una constante entonces $\alpha f(x,y)$ es integrable en Q y

$$\int_Q\int \alpha f(x,y)\,dx\,dy = \alpha\int_Q\int f(x,y)\,dx\,dy$$

iii) $\int_Q\int f(x,y)\,dx\,dy = \int_{Q_1}\int f(x,y)\,dx\,dy + \ldots + \int_{Q_n}\int f(x,y)\,dx\,dy$ siendo

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ subregiones de Q que no se traslapan y $Q = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$

Ejemplos

Suponga que $\int_Q\int x\,dx\,dy=3$ y $\int_Q\int y\,dx\,dy=7$ y que $\int_Q\int dx\,dy=8$ entonces:

i) $$\int_Q\int (2x+4y)\,dx\,dy = \int_Q\int 2x\,dx\,dy + \int_Q\int 4y\,dx\,dy$$

$$= 2\int_Q\int x\,dxdy + 4\int_Q\int y\,dxdy = 2*3+4*7=34$$

ii) $$\int_Q\int (x-y)\,dxdy = \int_Q\int x\,dxdy - \int_Q\int y\,dxdy = 3-7=-4$$

iii) $$\int_Q\int 10\,dxdy = 10\int_Q\int dxdy = 10*8=80$$

iv) $$\int_Q\int [y^2-(4+4y+y^2)]\,dxdy = \int_Q\int (-4-4y)\,dxdy$$

$$= -4\int_Q\int dxdy - 4\int_Q\int y\,dxdy = -4*8-4*7=-32-28$$

Teorema

Sea f(x,y) una función continua para (x,y) en una región rectangular Q, donde $a\le x\le b$ y $c\le y\le d$, es decir $Q = [a,b]x[c,d]$ entonces:

$$\int_Q\int f(x,y)\,dxdy = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dxdy.$$

Demostración (Ejercicio).

La integral $\int_c^d\int_a^b f(x,y_j)\,dxdy$ se puede interpretar geométricamente así:

Si se forma $\int_a^b f(x,y_j)\,dx$ considerando a y_j como constante se obtiene el área de la región sombreada y vertical que aparece en la **(Figura 8)** la cual está situada en el plano $y=y_j$ y bajo la superfecie $z=f(x,y)$ entre $x=a$ y $x=b$, $y=c$ y $y=d$; y si se multiplica por dy se obtiene el volumen de la tajada que se observa en la **(Figura 9)** y así:

Figura 8

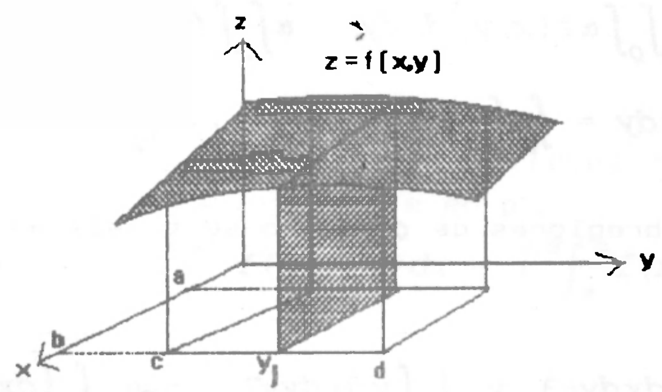
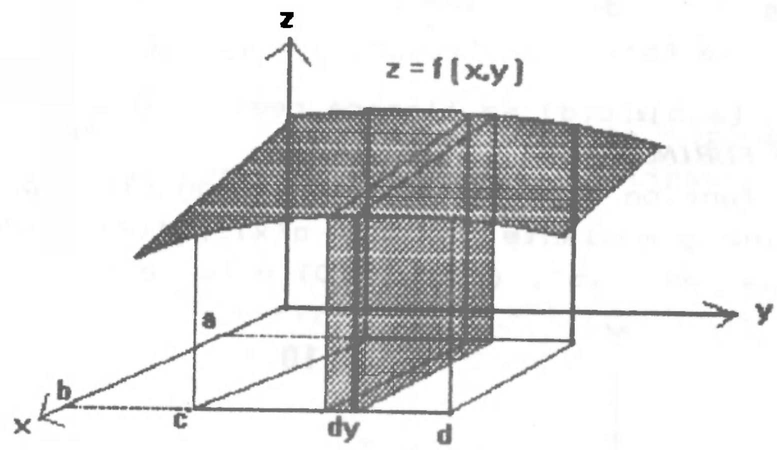


Figura 9



La integral $\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dxdy$ es la sumatoria de los volumenes de las tajadas desde y=c hasta y=d cuando dy -> 0 (m -> ∞).

Evidentemente, el resultado para f(x,y)≥0, es el volumen de la región bajo la superficie z=f(x,y) y sobre el rectángulo Q, que es precisamente la interpretación geométrica de $\int_Q\int f(x,y)\,dxdy$, si f(x,y)≥0 (análogamente $\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dydx$ tiene la misma interpretación).

Ejemplo 1

Calcular $\int_Q\int (x^2+y^2)\,dxdy$ Q = [0,4] x [0,4].

Solución

i) $$\int_Q\int (x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^4\int_0^4 (x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^4\left[\frac{x^3}{3}+xy^2\right]_0^4 dy$$

$$= \int_0^4\left(\frac{64}{3}+4y^2\right)dy = \left[\frac{64}{3}y+\frac{4y^3}{3}\right]_0^4 = \frac{256}{3}+\frac{256}{3}=\frac{512}{3}$$

ii) $$\int_Q\int (x^2+y^2)\,dydx = \int_0^4\int_0^4 (x^2+y^2)\,dydx = \int_0^4\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^4 dx$$

$$= \int_0^4 \left(4x^2+\frac{64}{3}\right) dx = \left.\frac{4x^3}{3} + \frac{64x}{3}\right]_0^4 = \frac{256}{3} + \frac{256}{3} = \frac{512}{3}$$

Nota

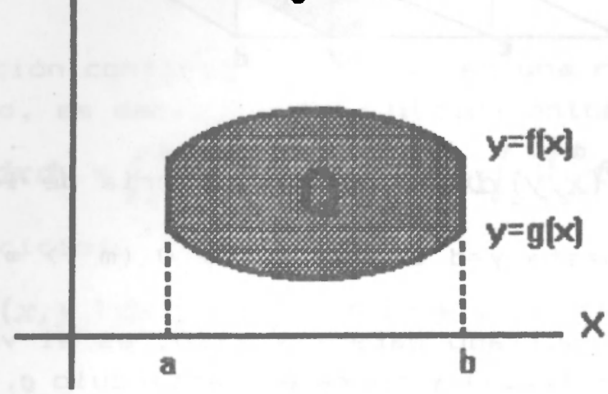
A la región ϱ = [a,b]x[c,d] se llamará región de tipo I.

1.3 ***Teorema de FUBINE***

Sea f(x,y) una función continua en una región plana ϱ.

1). Si se define ϱ mediante $a \le x \le b$ y $g(x) \le y \le f(x)$ siendo g(x) y f(x) continuas en [a,b], **(Figura 10)** entonces:

Figura 10

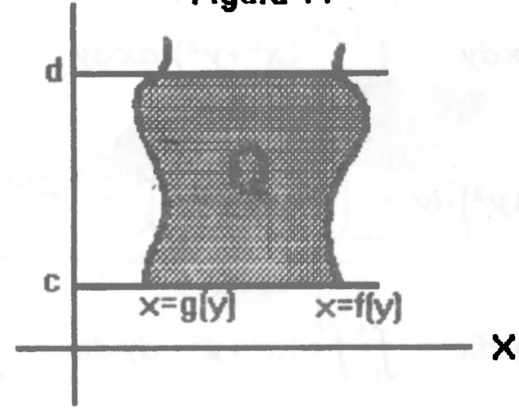


$$\int_{\varrho}\int f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} f(x,y)\,dydx.$$

A la región plana $\varrho=\{(x,y)\,|\,a \le x \le b,\ g(x) \le y \le f(x)\}$ se llamará región del tipo **II**.

2). Si se define ϱ mediante $c \le y \le d$ y $g(y) \le x \le f(y)$ siendo g(y) y f(y) funciones continuas en [c,d] **(Figura 11)** entonces:

Figura 11



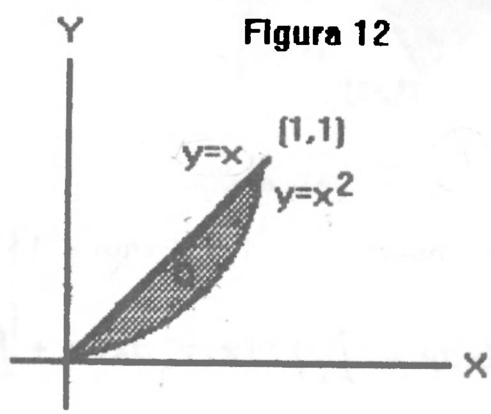
$$\int_{Q}\int f(x,y)\,dxdy = \int_{c}^{d}\int_{g(y)}^{f(y)} f(x,y)\,dxdy.$$

A la región plana $Q=\{(x,y)\,|\,g(y)\le x\le f(y),\ c\le y\le d\}$ se llamará región del tipo III.

Ciertas regiones son del tipo II y III a la vez, como lo son las regiones encerradas por circunferencias y elipses.

Ejemplo 1.

Calcular $\int_{Q}\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\,dxdy$ $\quad Q = \{(x,y)\,|\,0\le x\le 1;\ x^2\le y\le x\}$ (Figura 12)



Solución

La región Q es del tipo II (Figura 12), así que

$$\int_{Q}\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\,dxdy = \int_0^1\int_{x^2}^{x} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\,dydx = \int_0^1\int_{x^2}^{x} x^{1/2}y^{-1/2}\,dydx = \int_0^1\Big[x^{1/2}2y^{1/2}\Big]_{x^2}^{x}dx$$

$$= 2\int_0^1 x^{1/2}(x^{1/2}-x)\,dx = \int_0^1 (2x-2x^{3/2})\,dx = \Big[x^2-\frac{4}{5}x^{5/2}\Big]_0^1 = \frac{1}{5}$$

Ejemplo 2

Calcular la integral $\int_{Q}\int (x+y)\,dxdy = \int_{Q}\int f(x,y)\,dxdy$, siendo Q la región limitada por las gráficas de $x=y^2$ y $y=\frac{x}{2}-\frac{3}{2}$ (Figura 13).

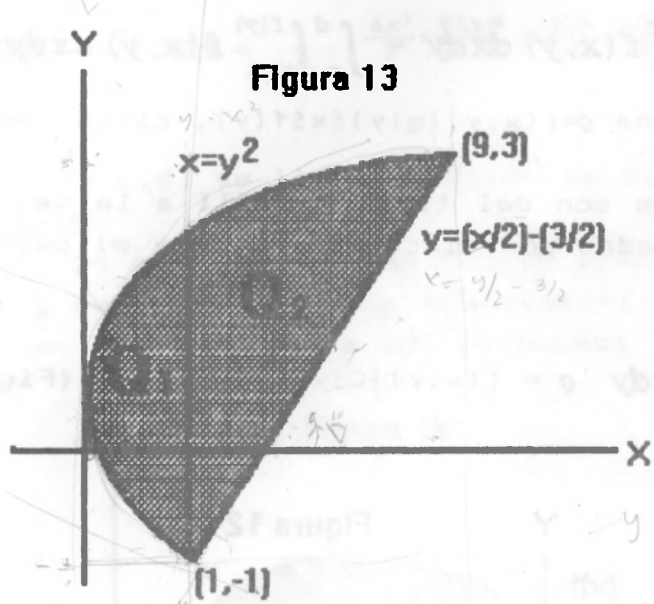


Figura 13

Solución

La región Ω es la que se observa en la (Figura 13) $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$ es una región del tipo II o III.

pues $$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \iint_{\Omega_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{\Omega_2} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_0^1\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (x+y)\,dydx + \int_1^9\int_{\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}^{\sqrt{x}} (x+y)\,dydx$$

$$= \int_0^1\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dx + \int_1^9\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 2x^{3/2}\,dx + \int_1^9\left(x^{3/2}+\frac{11x}{4}-\frac{5x^2}{2}-\frac{9}{8}\right)dx$$

$$= \frac{4}{5}x^{5/2}\Big]_0^1 + \left[\frac{2}{5}x^{5/2}+\frac{11x^2}{8}-\frac{5x^3}{24}-\frac{9x}{8}\right]_1^9 \approx 46.9.$$

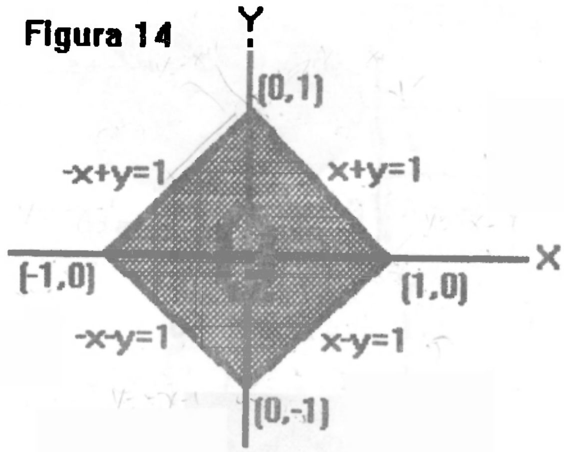
La región Ω fué considerada del tipo II, pero también se puede considerar del tipo III así:

$$\iint_{\Omega} (x+y)\,dxdy = \int_{-1}^{3}\int_{y^2}^{2(y+\frac{3}{2})} (x+y)\,dxdy \text{ (Ejercicio).}$$

Ejemplo 3.

Calcular la integral $\int_{\varrho}\int e^{x+y}dxdy$; $\varrho=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\leq 1\}$ **(Figura 14)**

Figura 14



Solución

La región ϱ se observa en la **Figura 14**, pues

$$|x|+|y|=1 \rightarrow |x|+|y|=\begin{cases} x+y & \text{si } x\geq 0,\ y\geq 0 \\ -x-y & \text{si } x<0,\ y<0 \\ -x+y & \text{si } x<0,\ y>0 \\ x-y & \text{si } x\geq 0,\ y<0 \end{cases}$$

la región ϱ de integración es de tipo II o tipo III, así:

$$\int_{\varrho}\int e^{x+y}dxdy = \int_{-1}^{0}\int_{-x-1}^{x+1} e^{x+y}dydx+\int_{0}^{1}\int_{x-1}^{1-x} e^{x+y}dydx$$

$$= \int_{-1}^{0}\left[e^{x+y}\right]_{-x-1}^{x+1}dx + \int_{0}^{1}\left[e^{x+y}\right]_{x-1}^{1-x}dx = \int_{-1}^{0}(e^{2x+1}-e^{-1})\,dx + \int_{0}^{1}(e-e^{2x-1})\,dx$$

$$= \left[\frac{e^{2x+1}}{2}-xe^{-1}\right]_{-1}^{0} + \left[ex-\frac{e^{2x-1}}{2}\right]_{0}^{1} = (e-e^{-1})$$

Si se utiliza la región del tipo III entonces:

$$\int_{\varrho}\int e^{x+y}dxdy=\int_{-1}^{0}\int_{-y-1}^{y+1} e^{x+y}dxdy + \int_{0}^{1}\int_{y-1}^{1-y} e^{x+y}dxdy=(e-e^{-1})$$

(Ejercicio)

<u>Ejemplo 5</u>.

Calcular $\displaystyle\iint_{Q} f(x,y)\,dxdy$; $Q = [0,2] \times [3,5]$ (Figura 15)

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leq 1 \\ 1 \text{ en el resto} \end{cases}$$

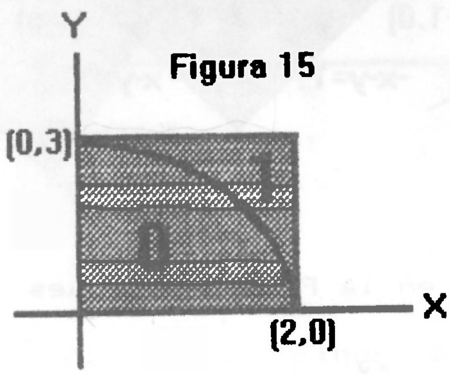


Figura 15

Solución

$$\frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{4} = \frac{4-x^2}{4} \rightarrow y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$$

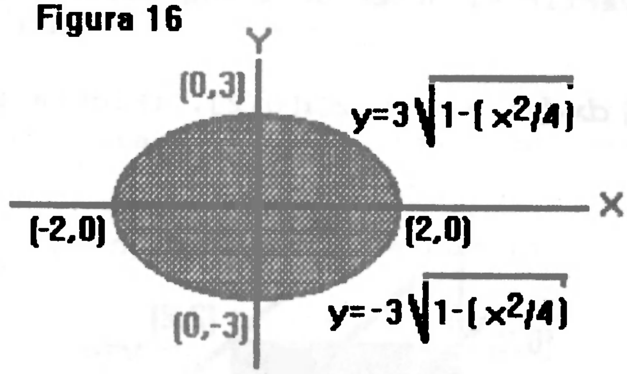
$$\int_{Q}\int f(x,y)\,dxdy = \int_{Q_1}\int f(x,y)\,dxdy + \int_{Q_2}\int f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_0^2\int_0^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} 0\,dxdy + \int_0^2\int_{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}}^{3} 1\,dydx = \int_0^2\left(3-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}\right)dx \text{ (Ejercicio).}$$

Ejemplo 6.

Calcular $\displaystyle\int_{Q}\int\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\,dxdy$; $Q=\left\{(x,y) \mid \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leq 1\right\}$. (Figura 16)

Figura 16



Solución

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow y^2=9\left(1-\frac{x^2}{4}\right) \Rightarrow y=\pm 3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\int_D\int\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\,dx\,dy = \int_{-2}^{2}\int_{-3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\,dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{-3A}^{3A}\sqrt{A^2-\frac{y^2}{9}}\,dy\,dx \quad \left(A=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right) = \int_{-2}^{2}\int_{-3A}^{3A}A\sqrt{1-\left(\frac{y}{3A}\right)^2}\,dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}A\,|Cost|\,3ACost\,dt\right)dx \quad (*)$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(3A^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}Cos^2t\,dt\right)dx = \int_{-2}^{2}\left(3A^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1+Cos2t}{2}\right)dt\right)dx$$

$$= \int_{-2}^{2}3A^2\left[\frac{t}{2}+\frac{Sen2t}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}dx = \int_{-2}^{2}\frac{3A^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{2}dx = \frac{3\pi}{2}\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx$$

$$= \frac{3\pi}{2}\left[x-\frac{x^3}{12}\right]_{-2}^{2} = \frac{3\pi}{2}\left[\left(2-\frac{8}{12}\right)-\left(-2-\frac{(-2)^3}{12}\right)\right] = \frac{3\pi}{2}\left[2-\frac{8}{12}+2-\frac{8}{12}\right]$$

$$= \frac{3\pi}{2}\left(4-\frac{8}{6}\right)=\frac{3\pi}{2}\left(\frac{24-8}{6}\right) = \frac{3\pi}{2}\left(\frac{16}{6}\right) = \frac{3\pi*8}{6}=\frac{3\pi*2*4}{2*3}=4\pi.$$

(* Si $\frac{y}{3A}=Sent$ y $y=3ASent$

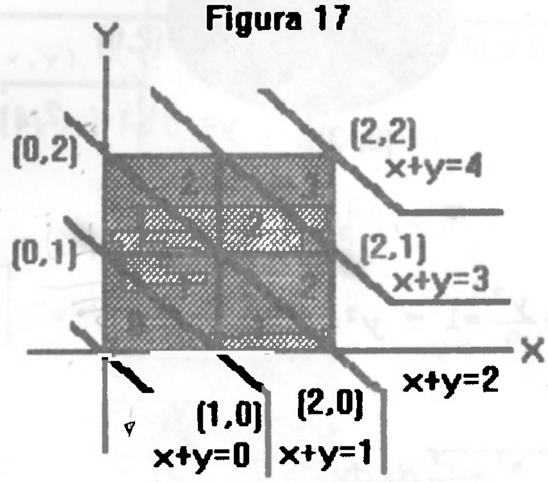
$$\sqrt{1-\left(\frac{y}{3A}\right)^2} = |Cost| \quad y \quad dy = 3ACost\,dt \;)$$

Como ejercicio invertir el orden de integración y calcule la integral.

Ejemplo 7.

Calcular $\int_{\varrho}\int [x+y]\, dxdy$; ϱ = [0,2]x[0,2]. (Figura 17).

Figura 17



$[x]$ parte entera de x.

Solución

$$[x+y]=0 \text{ si } 0\le x+y<1$$
$$[x+y]=1 \text{ si } 1\le x+y<2$$
$$[x+y]=2 \text{ si } 2\le x+y<3$$
$$[x+y]=3 \text{ si } 3\le x+y<4$$

$$\int_{\varrho}\int [x+y]\, dxdy = \int_0^1\int_0^{1-y}[x+y]\, dxdy + \int_0^1\int_{1-y}^{2-y}[x+y]\, dxdy +$$

$$\int_0^1\int_{2-y}^{2}[x+y]\, dxdy + \int_1^2\int_0^{2-y}[x+y]\, dxdy +$$

$$\int_1^2\int_{2-y}^{3-y}[x+y]\, dxdy + \int_1^2\int_{3-y}^{2}[x+y]\, dxdy$$

$$= \int_0^1\int_0^{1-y}0\, dxdy + \int_0^1\int_{1-y}^{2-y}1\, dxdy + \int_0^1\int_{2-y}^{2}2\, dxdy +$$

$$\int_1^2\int_0^{2-y}1\, dxdy + \int_1^2\int_{2-y}^{3-y}2\, dxdy + \int_1^2\int_{3-y}^{2}3\, dxdy$$

$$= \int_0^1 [(2-y)-(1-y)]\, dy + \int_0^1 2\,[2-(2-y)]\, dy + \int_1^2 (2-y)\, dy +$$

$$\int_1^2 2\,[(3-y)-(2-y)]\, dy + \int_1^2 3\,[(2-(3-y))]\, dy \text{ (Ejercicio).}$$

Ejemplo 7.

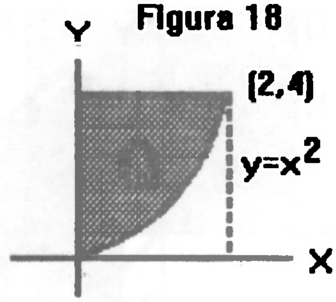
Calcular $\int_0^2\int_{x^2}^4 xe^{y^2}\,dy\,dx$

Solución

Para poder calcular esta integral, hay que invetir el orden de integración así:

En la integral $\int_0^2\int_{x^2}^4 xe^{y^2}\,dy\,dx$, significa que la región de integración ϱ esta limitada por x=2; x=0; y=4; y=x² **(Figura 18)** luego

Figura 18



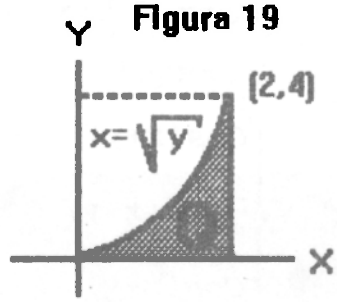
$$\int_0^2\int_{x^2}^4 xe^{y^2}\,dy\,dx = \int_0^4\int_0^{\sqrt{y}} xe^{y^2}\,dx\,dy = \int_0^4 e^{y^2}\frac{x^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \tfrac{1}{2}ye^{y^2}\,dy$$

$$= \tfrac{1}{4}(e^{16}-1).$$

Ejemplo 8

Calcular $\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 yCosx^5\,dx\,dy$.

Figura 19



Solución

En la integral $\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 yCosx^5\,dx\,dy$ se tiene que y=4; y=0; $x=\sqrt{y}$ y x=2, luego la región ϱ es la observada en la **Figura 19.**

luego invirtiendo el orden de integración se tiene que:

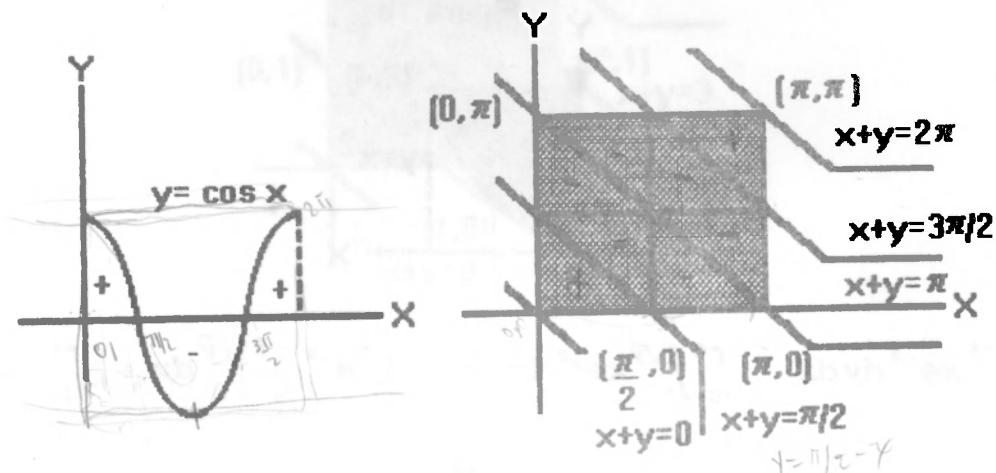
$$\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 yCosx^5\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^{x^2} yCosx^5\,dy\,dx = \int_0^2 \frac{x^4}{2}Cosx^5\,dx$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2} Cosx^5\right]_0^{x^2} dx = \frac{1}{10} Senx^5\Big]_0^2 = \frac{1}{10} Sen(32).$$

Ejemplo 9.

Colocar los límites de integración en la integral $\int_{\Omega}\int |Cos(x+y)|\,dxdy$; $\Omega = [0,\pi]\times[0,\pi]$ (Figura 20).

Figura 20



Solución

$$|Cosx| = \begin{cases} Cosx & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -Cosx & \frac{\pi}{2} \le x \le 3\frac{\pi}{2} \\ Cosx & 3\frac{\pi}{2} \le x \le 5\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{luego}$$

$$|Cos(x+y)| = \begin{cases} Cos(x+y) & si \quad 0 \le x+y \le \frac{\pi}{2} \\ -Cos(x+y) & si \quad \frac{\pi}{2} \le x+y \le 3\frac{\pi}{2} \\ Cos(x+y) & si \quad 3\frac{\pi}{2} \le x+y \le 5\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

así: $\int_{\Omega}\int |Cos(x+y)|\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} Cos(x+y)\,dydx +$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi} -Cos(x+y)\,dydx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{3\frac{\pi}{2}-x} -Cos(x+y)\,dydx +$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{\frac{3\pi}{2}-x}^{\pi} Cos(x+y)\,dy\,dx$$ (Ejercicio: Calcular las integrales).

Ejemplo 9.

Colocar los límites en la integral $\int_{Q}\int |x-y|\,dx\,dy$; $Q = [-1,1]\times[0,2]$, (Figura 21).

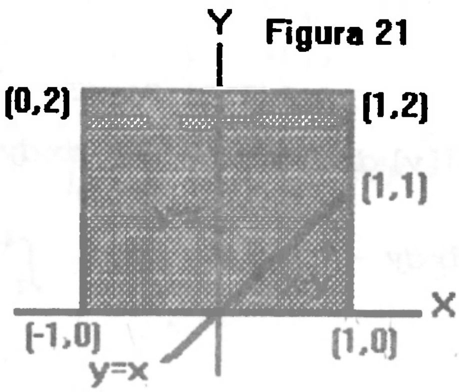


Figura 21

Solución

$$|x-y| = \begin{cases} x-y & si \quad x\geq y \\ y-x & si \quad x<y \end{cases}$$ luego $$\int_{Q}\int |x-y|\,dy\,dx = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{2}(y-x)\,dy\,dx + \int_{0}^{1}\int_{0}^{x}(x-y)\,dy\,dx + \int_{0}^{1}\int_{x}^{2}(y-x)\,dy\,dx.$$ (Como ejercicio, calcular las integrales).

Ejemplo 10.

Calcular $\int_{Q}\int \left[\frac{x}{2}\right][y]\,dx\,dy$; $Q = [0,4]\times[0,2]$ (Figura 22).

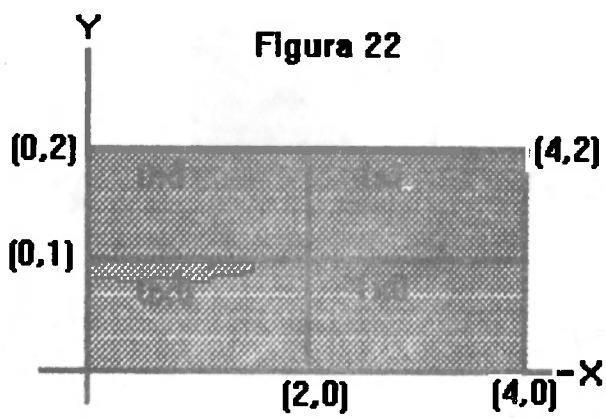


Figura 22

Solución

$$\left[\frac{x}{2}\right]=0 \quad si \quad 0\le\frac{x}{2}<1; \quad es \ decir \quad 0\le x<2$$

$$\left[\frac{x}{2}\right]=1 \quad si \quad 1\le\frac{x}{2}<2; \quad es \ decir \quad 2\le x<4$$

$$\left[\frac{x}{x}\right]=2 \quad si \quad 2\le\frac{x}{2}<3; \quad es \ decir \quad 4\le x<9$$

$$[y]=0 \ si \ 0\le y<1$$
$$[y]=1 \ si \ 1\le y<2$$
$$[y]=2 \ si \ 2\le y<3$$

luego $\int_{\Omega}\int\left[\frac{x}{2}\right][y]\,dxdy = \int_{\Omega_1}\int 0*0\,dxdy + \int_{\Omega_2}\int 1*0\,dxdy$

$$\int_{\Omega_3}\int 0*1\,dxdy + \int_{\Omega_4}\int 1*1\,dxdy = \int_2^4\int_1^2 dy\,dx = 2.$$

Nota

En Ω_4 $\left[\frac{x}{2}\right]=1$ y $[y]=1$ entonces $\left[\frac{x}{2}\right][y]=1*1$, en forma análoga en los demás casos.

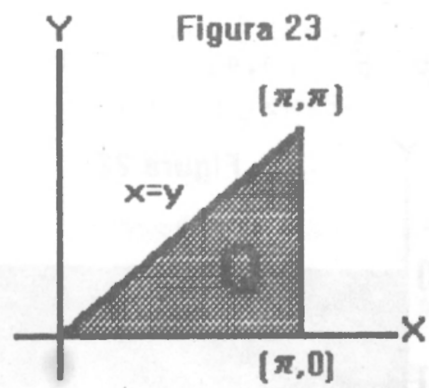
1.4 *INVERTIR EL ORDEN DE INTEGRACIÓN*

1. $\int_0^{\pi}\int_0^{x} xCosy\,dydx$

Solución

La región Ω está limitada por $x=\pi$, $x=0$; $y=x$, $y=0$ **(Figura 23)**.

Figura 23



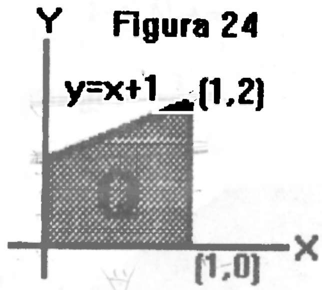
luego $\int_0^{\pi}\int_0^{x} xCosy\,dydx = \int_0^{\pi}\int_y^{\pi} xCosy\,dxdy$

2. $\int_0^1\int_0^{x+1} Sen(x+y)\,dydx$

Solución

La región Ω está limitada por $x=1$, $x=0$; $y=0$, $y=x+1$ **(Figura 24)**.

Figura 24



luego

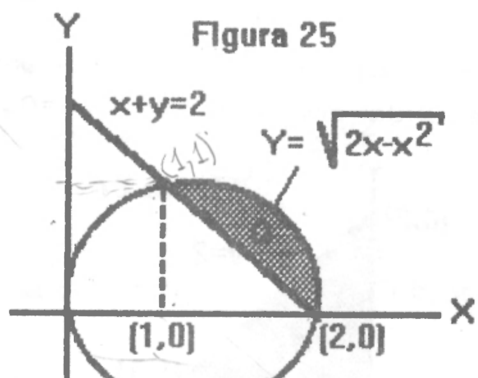
$$\int_0^1\int_0^{x+1} Sen(x+y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^1 Sen(x+y)\,dx\,dy + \int_1^2\int_{y-1}^1 Sen(x+y)\,dx\,dy.$$

3. $\int_1^2\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$

Solución

La región ϱ está limitada por x=1, x=2; y=2−x, $y=\sqrt{2x-x^2}$ (Figura 25).

Figura 25



luego

$$\int_1^2\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

4. $\int_{-6}^2\int_{\frac{x^2-4}{4}}^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$

Solución

La región ϱ está limitada por x=2, x=−6; y=2−x y $y=\frac{x^2-4}{4}$

(Figura 26). Como y=2−x entonces x=2−y y como $y=\frac{x^2-4}{4}$ entonces

$$x=\pm\sqrt{4y+4}$$

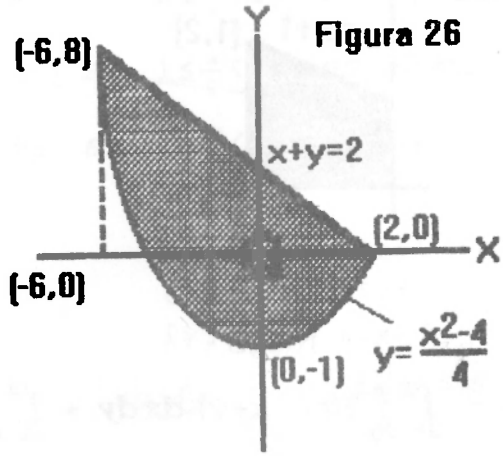


Figura 26

luego

$$\int_{-6}^{2}\int_{\frac{x^2-4}{4}}^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{4y+4}}^{\sqrt{4y+4}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{0}^{8}\int_{-\sqrt{4y+4}}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy.$$

5. $\displaystyle\int_0^1\int_0^y f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^2\int_0^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$

Solución

La región está limitada por $y=0$, $y=1$, $x=0$, $x=y$ en la primera integral y en la segunda por $y=1$, $y=2$; $x=0$, $x=2-y$. (Figura 27).

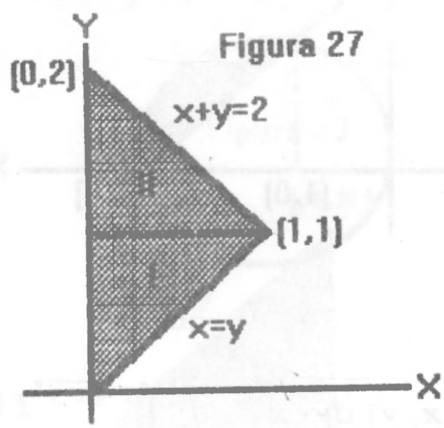


Figura 27

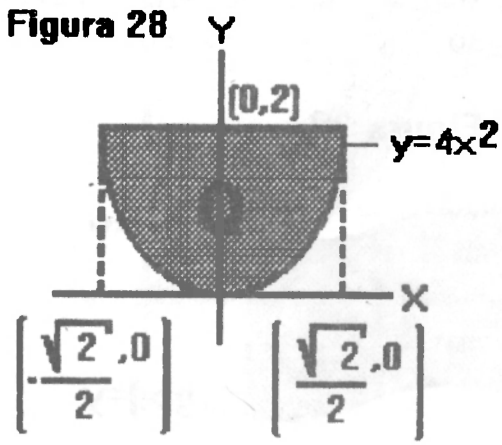
luego

$$\int_0^1\int_0^y f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^2\int_0^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_x^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$$

6. $\displaystyle\int_0^2\int_{\frac{-\sqrt{y}}{2}}^{\frac{\sqrt{y}}{2}} f(x,y)\,dx\,dy$

Solución

La región ϱ está limitada por y=0, y=2; $x=\frac{-\sqrt{y}}{2}$, $x=\frac{\sqrt{y}}{2}$ (Figura 28).



Como $x=\frac{\sqrt{y}}{2}$ entonces $2x=\sqrt{y}$, así que $y=4x^2$, y el punto de intersección con la recta y=2 es $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},2\right)$, ya que

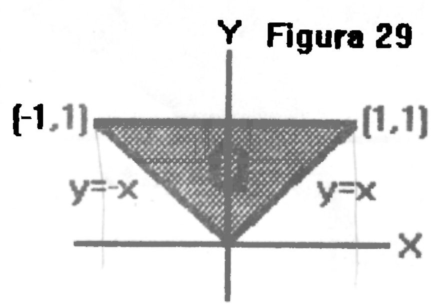
$$\frac{2}{4}=x^2 \rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ luego:}$$

$$\int_0^2\int_{-\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\frac{\sqrt{y}}{2}} f(x,y)\,dxdy = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_{4x^2}^{2} f(x,y)\,dydx.$$

7. $\int_0^1\int_{-y}^{y} f(x,y)\,dxdy$

Solución

La región ϱ está limitada por y=1, y=0; x=-y, x=y **(Figura 29).**



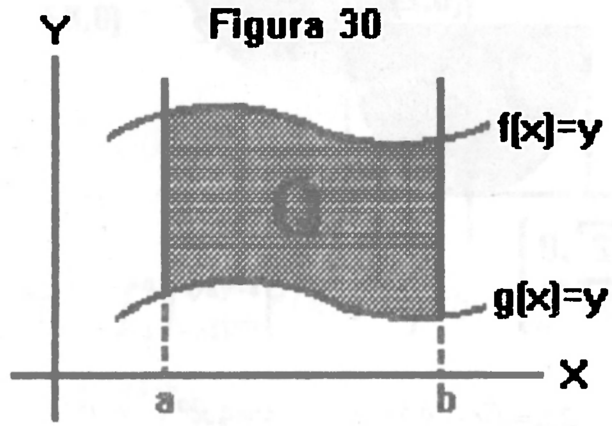
luego

$$\int_0^1\int_{-y}^{y} f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{0}\int_{-x}^{1} f(x,y)\,dydx + \int_0^1\int_{x}^{1} f(x,y)\,dydx$$

1.5 *Areas ENTRE CURVAS*

En integrales unidimensionales se demostró que el área encerrada por $x=a$, $x=b$ $a\le x\le b$ y $y=f(x)$, $y=g(x)$ siendo $g(x)\le y\le f(x)$, $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas (**Figura 30**), viene dada por:

Figura 30



Area$=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$; pero esta integral es igual a $\int_a^b\int_{g(x)}^{f(x)} dydx$ es decir:

$$\text{Area} = \int_a^b\int_{g(x)}^{f(x)} dydx = \int_Q\int dydx = \int_Q\int dxdy$$

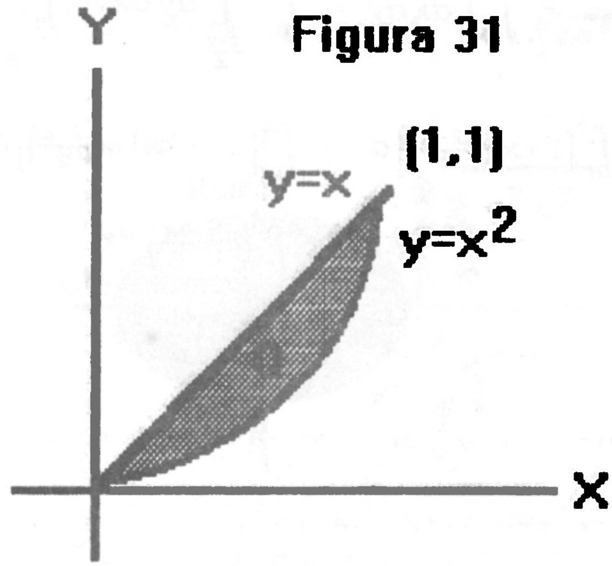
siendo Q la región antes mencionada.

1. Hallar el área encerrada por $y=x^2$, $y=x$

Solución

Como $x^2=y=x$ entonces $x^2-x=0 \rightarrow x(x-1)=0 \rightarrow x=0,\ x=1$, así los puntos de intersección de las dos curvas son $(0,0)$, $(1,1)$ (**Figura 31**).

Figura 31



luego A(ρ)=Area de la región es:

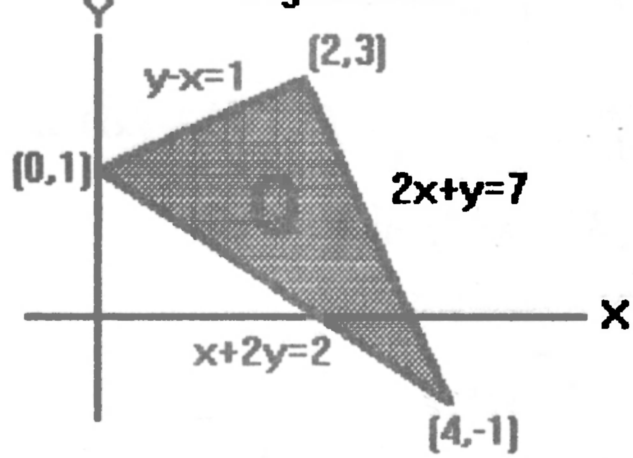
$$Q = \iint_{\rho} dx\,dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\,dx = \int_0^1 (x-x^2)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}$$

2. Hallar el área encerrada por x+2y=2, y-x=1, 2x+y=7 **(Figura 31.1)**.

Solución

Resolviendo el sistema y-x=1, 2x+y=7 se obtiene el punto de intersección (2,3). Resolviendo x+2y=2 y y-x=1 se obtiene el punto (0,1) y resolviendo x+2y=2 y 2x+y=7 se obtiene el punto (4,-1) **(Figura 31.1)**

Figura 31.1



luego Area $= \int_Q\int dxdy = \int_0^2 \int_{\frac{2-x}{2}}^{1+x} dy\,dx + \int_2^4 \int_{\frac{2-x}{2}}^{7-2x} dy\,dx$

$$= \int_0^2\left[1+x-\left(\frac{2-x}{2}\right)\right]dx + \int_2^4\left[(7-2x)-\left(\frac{2-x}{2}\right)\right]dx$$

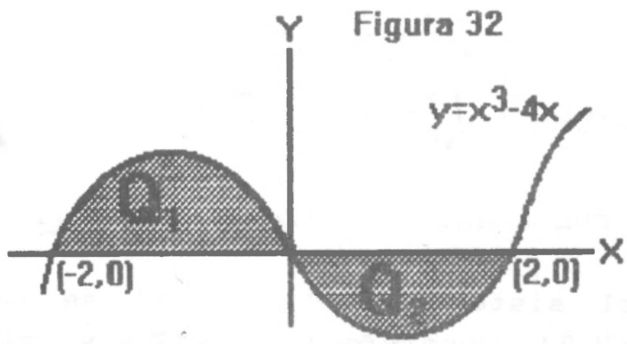
$$= \int_0^2 \frac{3}{2}x\,dx + \int_2^4\left(6-\frac{3x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{3}{4}x^2\Big]_0^2 + \left(6x-\frac{3x^2}{4}\right)_2^4 = 6.$$

3. Hallar el área encerrada por $y=x^3-4x$ y el eje x.

Solución

$y=x^3-4x=x(x^2-4)=x(x-2)(x+2) \Rightarrow x=0,\ x=2,\ x=-2$ son los puntos de intersección de la curva con el eje x. **(Figura 32).**



luego $A(Q) = \int_Q\int dxdy = \int_{Q_1}\int dxdy + \int_{Q_2}\int dxdy$

$$= \int_{-2}^0 \int_0^{x^3-4x} dy\,dx + \int_0^2 \int_{x^3-4x}^0 dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^0 (x^3-4x)\,dx + \int_0^2 [0-(x^3-4x)]\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^0 - \left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_0^2$$

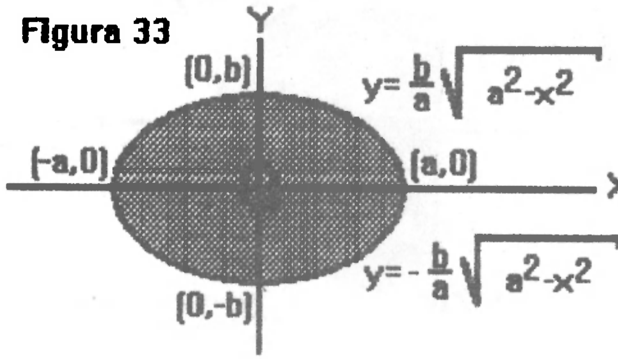
$$= 4-(-4)=8.$$

4. Hallar el área encerrada por $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Solución

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2} \to y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) \to y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \text{ (Figura 33).}$$

Figura 33



$$\text{luego } A(\rho) = \int_{\rho}\int dxdy = \int_{-a}^{a}\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dydx$$

$$= \int_{-a}^{a}\frac{2b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= \frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx \overset{*}{=} \frac{2b}{a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|Cost|\,a^2Costdt$$

$$= 2ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2}Cos^2tdt = 2ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1+Cos2t}{2}\right)dt$$

$$= 2ab\left[\frac{t}{2}+\frac{Sen2t}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi ab$$

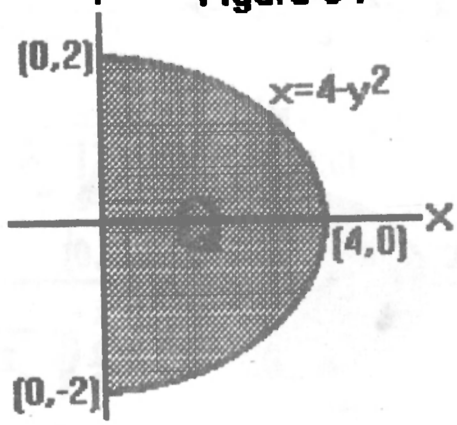
* $x=aSent$, $dx=aCostdt$, $\sqrt{a^2-x^2}=a|Cost|$, cuando $x=-a \to Sent=-1$, $t=-\frac{\pi}{2}$ y

cuando $x=a$, $Sent=1 \to t=\frac{\pi}{2}$.

5. Hallar el área encerrada por $x=4-y^2$ y el eje y **(Figura 34).**

Solución

Figura 34



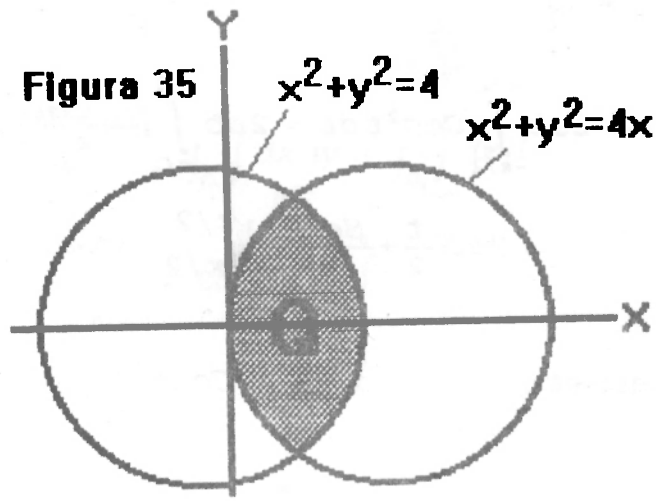
$$A(Q) = \iint_Q dxdy = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-y^2} dxdy$$

$$= \int_{-2}^{2} (4-y^2)\, dy = 2\int_{0}^{2} (4-y^2)\, dy = \frac{32}{3}.$$

6. Hallar el área común a $x^2+y^2=4$ y $x^2+y^2=4x$; es decir $x^2+y^2=4$ y $(x-2)^2+y^2=4$. (Figura 35)

Solución

Figura 35



Los círculos se cortan en $(1, \pm\sqrt{3})$ (Ejercicio). Luego

$$A(Q) = \iint_Q dxdy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dxdy$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} [\sqrt{4-y^2}-(2-\sqrt{4-y^2})]\, dy$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (-2+2\sqrt{4-y^2})\, dy$$

$$= 2*2\int_{0}^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-y^2}-1)\, dy$$

$$= 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{4-y^2}+2ArcSen\frac{1}{2}y-y\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \left(\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}\right).\ \text{(Ejercicio).}$$

1.6 *EJERCICIOS*

I. Calcular las integrales siguientes:

1. $\int_0^1\int_0^{\pi/2} (ArcSenx)\, Seny\, dy\, dx$
2. $\int_0^1\int_1^2 (lnx)\sqrt{y}\, dx\, dy$
3. $\int_0^3\int_0^4 (1-x^2-y^2)\, dx\, dy$
4. $\int_0^4\int_0^4 \frac{dy\, dx}{(x+1)\,(y+2)}$
5. $\int_0^1\int_0^1 \frac{y}{1+x^2}\, dx\, dy$
6. $\int_0^{-1}\int_3^2 \left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)\left(\frac{y^3+8}{y+2}\right) dx\, dy$
7. $\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y)\, dy\, dx$
8. $\iint_Q xy\, dx\, dy \quad Q = [0,1]x[0,2]$
9. $\iint_Q \frac{dx\, dy}{(x+y+2)^2} \quad Q = [1,2]x[1,3]$

10. $\int_{Q}\int |y-x^2|\,dx\,dy \quad Q = [-1,1]\times[-1,1]$

11. $\int\int_{Q} |y-x^3|\,dx\,dy \quad Q = [-1,1]\times[-1,1]$

12. $\int_0^1 \int_{y^2}^{y^{1/3}} x^2y^3\,dx\,dy$

13. $\int_0^1 \int_0^{1-y} dx\,dy$

14. $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} xy\,dx\,dy$

15. $\int_0^1 \int_{2y-2}^{1-y} x\cos^2 y\,dx\,dy$

16. $\int_{-1}^{1} \int_{1-y^2}^{y^2-1} x^2y^3\,dx\,dy$

II. Invertir el orden de integración

1. $\int_0^1 \int_x^{2x} f(x,y)\,dy\,dx$

2. $\int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$

3. $\int_{-2}^{2} \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$

4. $\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$

5. $\int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^3 \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)\,dy\,dx$

6. $\int_0^4 \int_0^{y^2} f(x,y)\,dx\,dy$

7. $\int_0^2 \int_{y/2}^{3-y} f(x,y)\,dx\,dy$

8. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx\,dy$

9. $\int_{-2}^2 \int_{x^2}^{8-x^2} dy\,dx$

III. Calcular las integrales siguientes

1. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^4 Sen\,y^3\,dy\,dx$

2. $\int_0^2 \int_{x^2}^4 xe^{y^2}\,dy\,dx$

3. $\int_0^4 \int_{x/2}^2 e^{y^2}\,dy\,dx$

4. $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y\,Cos\,x^5\,dx\,dy$

5. $\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2}\,dx\,dy$

6. $\int_0^1 \int_{2y}^2 Cos\,x^2\,dx\,dy$

7. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 Sen\,\pi y^3\,dy\,dx$

8. $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy$

IV Hallar el área encerrada por

1. $y+x^2=6$; $y+2x-3=0$
2. $y=x^2$; $y=\sqrt{x}$ $x=y^2$
3. $y-x=6$, $y-x^3=0$, $2y+x=0$ $y=-\frac{x}{2}$
4. $2y^2=x+4$, $x=y^2$
5. $x=4y-y^3$, $x=0$
6. $y=x^3-x^2-6x$, $y=0$
7. $y=x$, $y=3x$, $x+y=4$
8. $x=2y^{1/3}$, $x=\frac{y}{2}$

9. $x^2+y^2=1$

10. $4x^2+\frac{y^2}{5}=1$

11. Encerrada en el triángulo de vétices (0,0), (8,0), (4,10)

12. $y=\sqrt{x}, \quad y=x^3$.

V Dibujar la región de integración

1. $$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 4xy\,dx\,dy$$

2. $$\int_0^2 \int_0^{x^2} Sen(xy)\,dy\,dx$$

3. $$\int_0^{\pi} \int_0^{Senx} dy\,dx$$

4. $$\int_0^1 \int_1^{e^y} x^2\,dx\,dy$$

5. $$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} yCosx\,dy\,dx.$$

VI En cada una de las integrales en los numerales I, IV, V invertir el orden de integración.

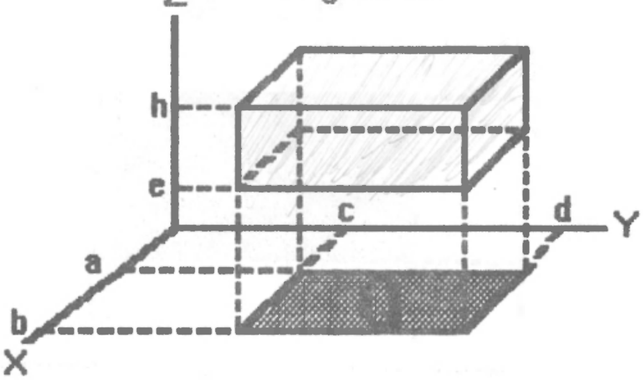
2. INTEGRALES TRIPLES

2.1 ***DEFINICIÓN.***

Sea f(x,y,z) una función continua en un paralelepípedo S de la forma S=[a,b] x [c,d] x [e,h]. **(Figura 36)**, se define la integral triple de f en S por:

$$\boxed{\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dx = \int_a^b\int_c^d\int_e^h f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx}$$

Figura 36



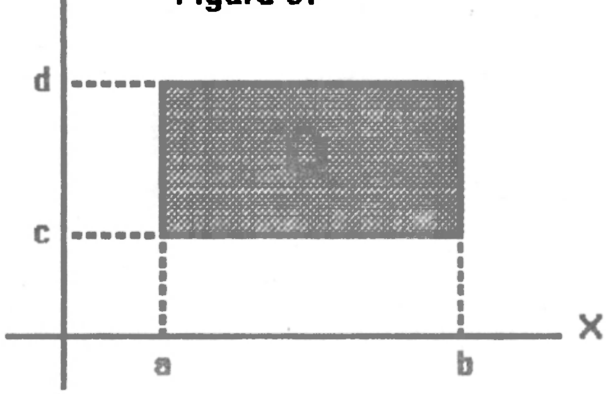
y se puede calcular así:

1.]
$$\iiint_S f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \int\!\!\int_Q \left[\int_e^h f(x,y,z)\,dz\right] dx\,dy$$

$$= \int\!\!\int_Q G(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\int_a^b G(x,y)\,dx\,dy.$$

Donde Q es la proyección de S en el plano xy **(Figura 37)**

Figura 37



G(x,y) es el resultado de integrar $\int_a^h f(x,y,z)\,dz$, con x,y fijos en [a,b]x[c,d], luego:

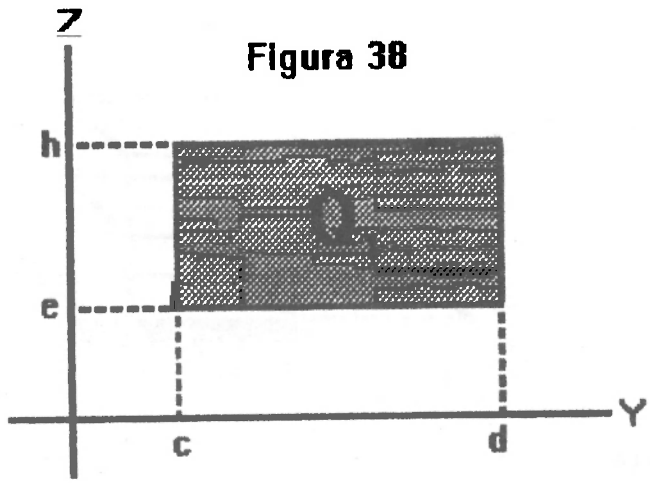
$$\iiint_S f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy = \int_a^b\int_c^d\int_e^h f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_c^d\int_a^b\int_e^h f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy.$$

Si hemos proyectado S en el plano xy.

2. Si proyectamos S en el plano zy (Figura 38) tenemos:

Figura 38



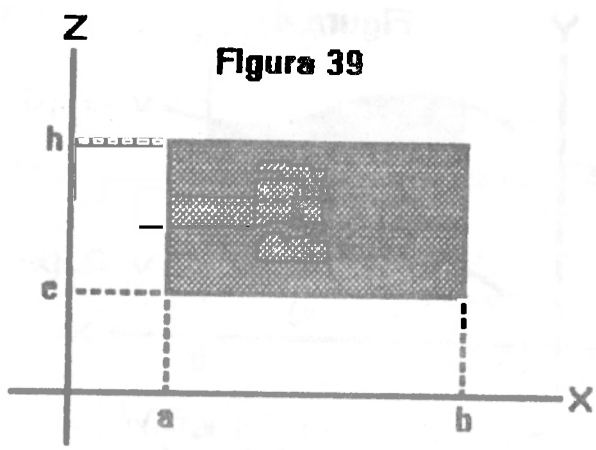
$$\iiint_S f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy = \iint_{Q_1}\left[\int_a^b f(x,y,z)\,dx\right]dz\,dy$$

$$= \int_c^d\int_e^h\int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$$

$$= \int_e^h\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

3. Si proyectamos S en el plano zx (Figura 39) tenemos:

Figura 39



$$\iiint_S f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy = \int_{Q_1}\!\!\int\left[\int_c^d f(x,y,z)\,dy\right]dz\,dx$$

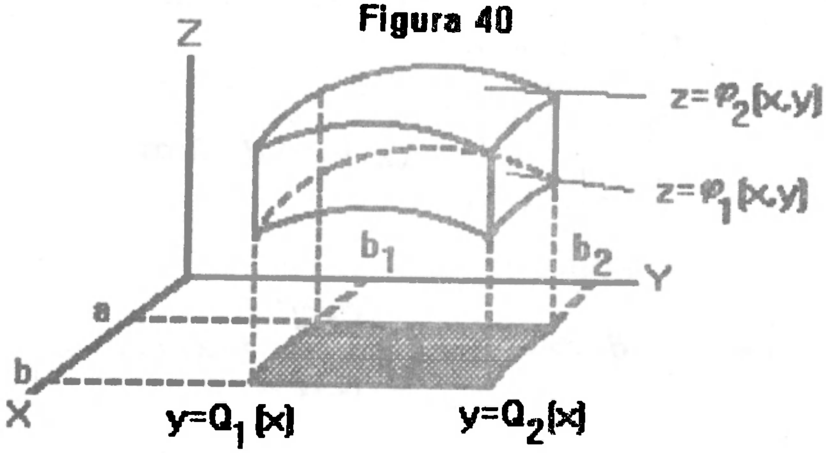
$$= \int_a^b\int_e^h\int_c^d f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$$

$$= \int_e^h\int_a^b\int_c^d f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz.$$

En forma más general:

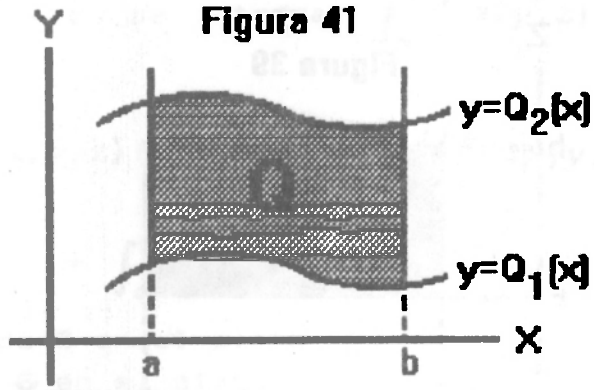
Sea S el sólido limitado por las desigualdades $a\le x\le b$, $Q_1(x)\le y\le Q_2(x)$, $\varphi_1(x,y)\le z\le \varphi_2(x,y)$. (Figura 40), f, φ_1, ϕ_2, Q_1, Q_2 funciones continuas, entonces:

Figura 40



1. Proyectando S en el plano xy (Figura 41) se tiene:

Figura 41



$$\iiint_S f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy = \iint_D \left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dx\,dy$$

$$= \int_a^b \int_{Q_1(x)}^{Q_2(x)} \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

2. Proyectando S en el plano zy tenemos:

$b_1 \le y \le b_2;\ \ Q_1(y) \le z \le Q_2(y),\ \ \varphi_1(y,z) \le x \le \varphi_2(y,z).$

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy = \iint_Q \left[\int_{\varphi_1(y,z)}^{\varphi_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right] dz\,dy$$

$$= \int_{b_1}^{b_2} \left[\int_{Q_1(y)}^{Q_2(y)} \left[\int_{\varphi_1(y,z)}^{\varphi_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right] dz\right] dy$$

$$= \int_{b_1}^{b_2} \int_{Q_1(y)}^{Q_2(y)} \int_{\varphi_1(y,z)}^{\varphi_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy.$$

3. Proyectando S en el plano ZX tenemos:

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy = \iint_D \left[\int_{\varphi_1(x,z)}^{\varphi_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy\right] dx\,dz$$

$$= \int_a^b \int_{Q_1(x)}^{Q_2(x)} \left[\int_{\varphi_1(x,z)}^{\varphi_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy\right] dz\,dx.$$

Ejemplos

1. Calcular $\int_0^1\int_0^x\int_0^{x+y}(x+y+z)\,dz\,dy\,dx$

Solución

$$\int_0^1\int_0^x\int_0^{x+y}(x+y+z)\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^x xz+yz+\frac{z^2}{2}\Big]_0^{x+y}dy\,dx$$

$$= \int_0^1\int_0^x\left(x(x+y)+y(x+y)+\frac{(x+y)^2}{2}\right)dy\,dx$$

$$= \int_0^1\int_0^x\left(\frac{3x^2}{2}+3xy+\frac{3y^2}{2}\right)dy\,dx$$

$$= \int_0^1\left[\frac{3x^2y}{2}+\frac{3xy^2}{2}+\frac{3y^3}{6}\right]_0^x dx$$

$$= \int_0^1\frac{7x^3}{2}dx = \frac{7}{8}.$$

2. Calcular $\int_1^2\int_y^{y^2}\int_0^{\ln x} ye^z\,dz\,dx\,dy$

Solución

$$\int_1^2\int_y^{y^2}\int_0^{\ln x} ye^z\,dz\,dx\,dy = \int_1^2\int_y^{y^2} ye^z\Big]_0^{\ln x}dx\,dy$$

$$= \int_1^2\int_y^{y^2} y(x-1)\,dx\,dy$$

$e^{\ln x} = x$

$$= \int_1^2 y\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_y^{y^2}dy$$

$$= \int_1^2\left(\frac{y^5}{2}-y^3-\frac{y^3}{2}+y^2\right)dy$$

$$= \frac{y^6}{12}-\frac{3y^4}{8}+\frac{y^3}{3}\Big]_1^2 = \frac{47}{24}.$$

3. Calcular $\int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta} dr\,d\theta\,du$

Solución

$$\int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta} dr\,d\theta\,du = \int_0^1\int_0^{\pi/2} r\Big]_0^{\cos\theta}d\theta\,du$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} Cos\theta \, d\theta \, du$$

$$= \int_0^1 Sen\theta \Big]_0^{\pi/2} du = \int_0^1 du = 1.$$

4. Calcular $\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 xyz \, dz \, dy \, dx$

Solución

$$\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 xyz \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^2 xy \frac{z^2}{2}\Big]_0^3 dy \, dx$$

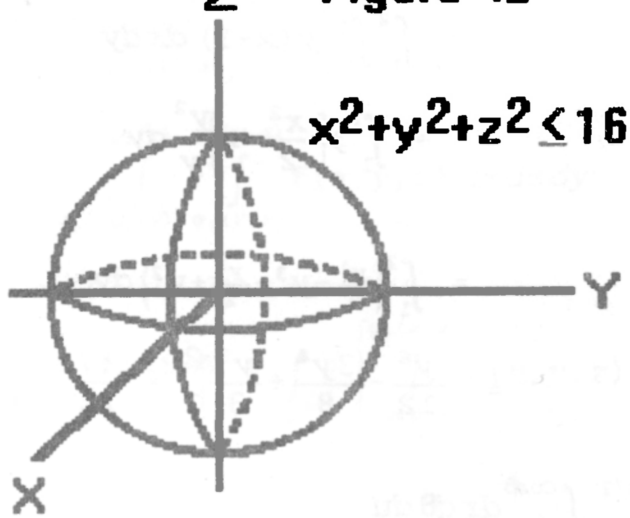
$$= \frac{9}{2}\int_0^1 \int_0^2 xy \, dy \, dx = \frac{9}{2}\int_0^1 x\frac{y^2}{2}\Big]_0^2 dx$$

$$= \frac{9}{2} * \frac{4}{2} * \int_0^1 x \, dx = \frac{9}{2} * \frac{4}{2} * \frac{x^2}{2}\Big]_0^1$$

$$= \frac{9}{2} * \frac{4}{2} * \frac{1}{2}.$$

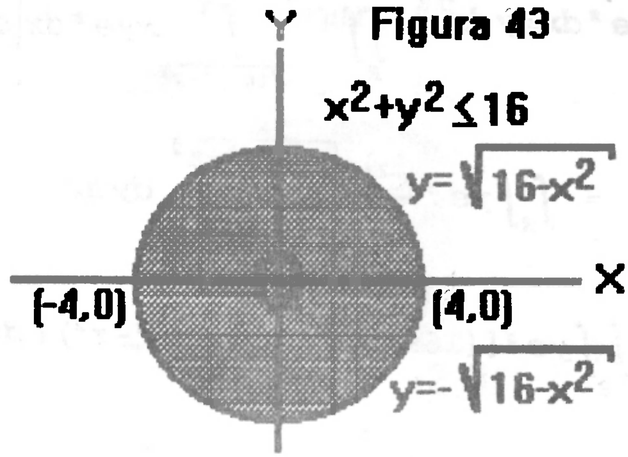
5. Colocar los límites de integración de dos formas diferentes y calcular $\iiint_S xye^z \, dx \, dy \, dz$ $S=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 16\}$ **(Figura 42)**.

Figura 42



i). Proyectando S en el plano xy **(Figura 43)** tenemos:

Figura 43



$$\iiint_S xye^z\,dx\,dy\,dz = \int_Q\int\left[\int_{-\sqrt{16-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} xye^z\,dz\right]dx\,dy$$

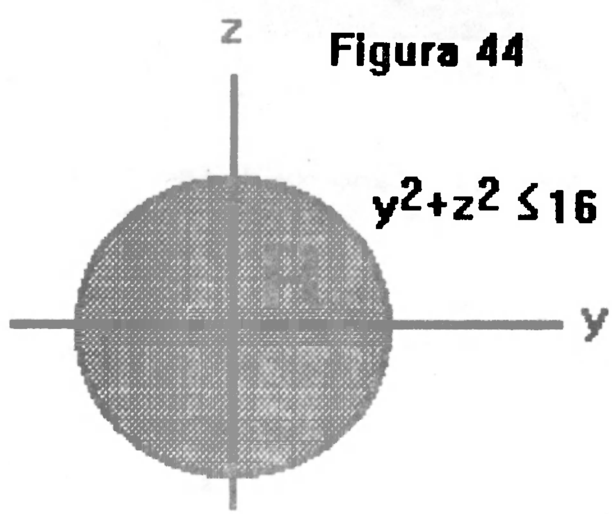
$$= \int_Q\int xye^z\Big|_{-\sqrt{16-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}}dx\,dy$$

$$= \int_Q\int xy\left[e^{+\sqrt{16-x^2-y^2}}-e^{-\sqrt{16-x^2-y^2}}\right]dx\,dy$$

$$= \int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} xy\left(e^{\sqrt{16-x^2-y^2}}-e^{-\sqrt{16-x^2-y^2}}\right)dy\,dx = 0. \text{ (probarlo).}$$

ii). Proyectando S en el plano yz (Figura 44) tenemos:

Figura 44



$$\iiint_S xye^z\,dx\,dy\,dz = \iint_R \left[\int_{-\sqrt{16-y^2-z^2}}^{\sqrt{16-y^2-z^2}} xye^z\,dx\right] dy\,dz$$

$$= \int_R\int ye^z \frac{x^2}{2}\Big]_{-\sqrt{16-y^2-z^2}}^{\sqrt{16-y^2-z^2}} dy\,dz$$

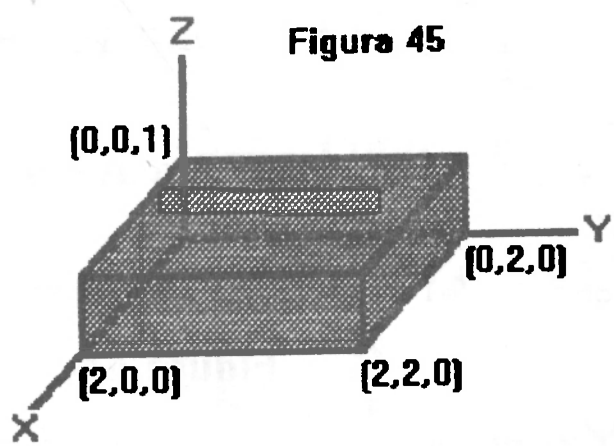
$$= \frac{1}{2}\int_R\int ye^z[(16-y^2-z^2)-(16-y^2-z^2)]\,dz\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} ye^z * 0\,dz\,dy = 0.$$

Hacerlo proyectando S en el plano xz.

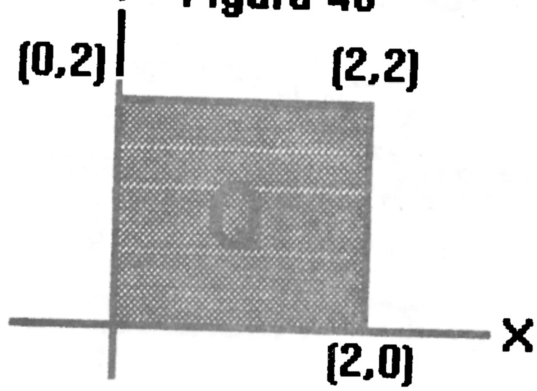
6.) Colocar los límites de integración en la integral $\iiint_S xyz\,dx\,dy\,dz$ a las diversas proyecciones; siendo S el sólido mostrado en la (Figura 45).

Figura 45



i). Proyectando S en el plano xy (Figura 46) tenemos:

Figura 46



$$\iiint_S xyz\,dx\,dy\,dz = \int_Q\int\left[\int_0^1 xvz\,dz\right]dx\,dy$$

$$= \int_Q\int xy * \frac{z^2}{2}\Big]_0^1 dx\,dy$$

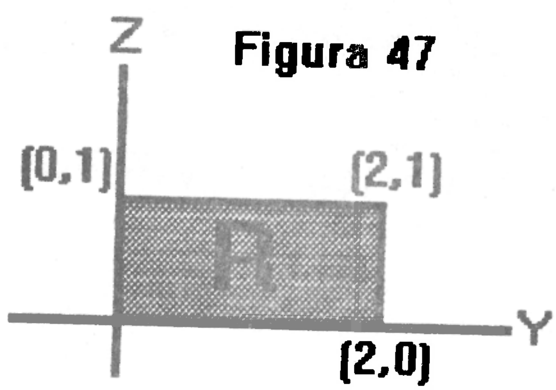
$$= \int_Q\int \tfrac{1}{2} xy\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2\int_0^2 xy\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2\int_0^2 xy\,dy\,dx \text{ (Ejercicio).}$$

ii). Proyectando S en el plano yz. (Figura 47) tenemos:

Figura 47



$$\iiint_S xyz\,dx\,dy\,dz = \int_R\int\left[\int_0^2 xyz\,dx\right]dy\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_R\int yx^2z\Big]_0^2 dy\,dz$$

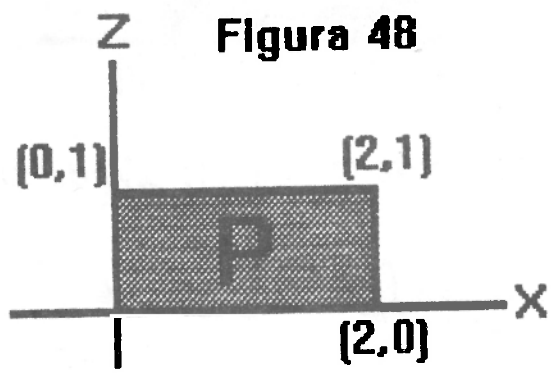
$$= \frac{1}{2}\int_R\int yz*4\,dy\,dz$$

$$2\int_0^2\int_0^1 yz\,dz\,dy$$

$$= 2\int_0^1\int_0^2 yz\,dy\,dz \text{ (Ejercicio).}$$

iii). Proyectando S en el plano xz **(Figura 48)** tenemos:

Figura 48



$$\iiint_S xyz\,dx\,dy\,dz = \int_P\int\left[\int_0^2 xyz\,dy\right]dx\,dz$$

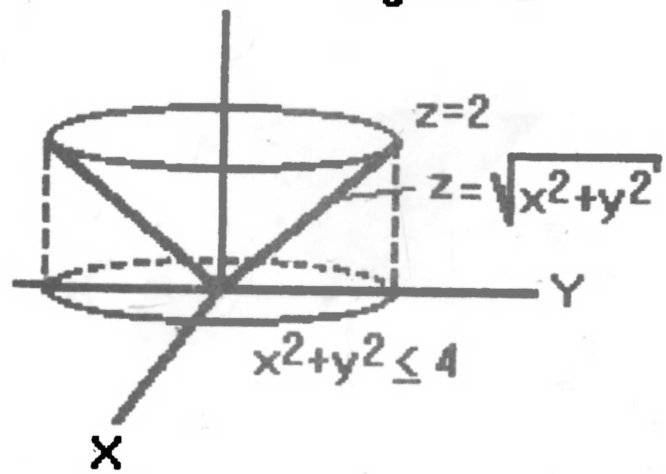
$$= 2\int_P\int xz\,dx\,dz$$

$$= 2\int_0^2\int_0^1 xz\,dz\,dx$$

$$= 2\int_0^1\int_0^2 xz\,dx\,dz. \text{ (Ejercicio)}$$

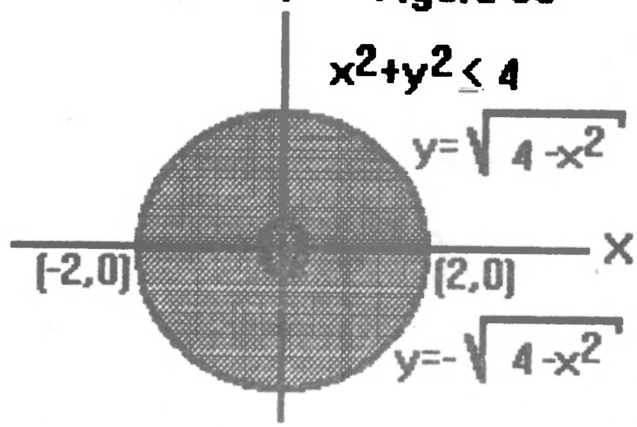
7) Colocar los límites de 2 formas diferentes y calcular la integral $\iiint_S xye^z\,dx\,dy\,dz$. $S = \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \le z \ \ y \ \ z=2\}$ **(Figura 49)**.

Figura 49



i). Proyectando S en el plano xy (Figura 50) tenemos:

Figura 50



$$\iiint_S xye^z\,dx\,dy\,dz = \iint_\Omega \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xye^z\,dz\right]dx\,dy$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} xy\left(e^2-e^{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy\,dx = 0.$$

ii). Proyectando S en el plano xz (Figura 51) tenemos:

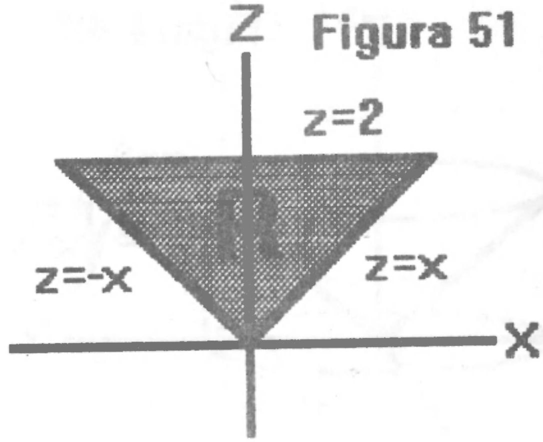


Figura 51

$$\iiint_S xye^z\,dx\,dy\,dz = \iint_R \left[\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} xye^z\,dy \right] dx\,dz$$

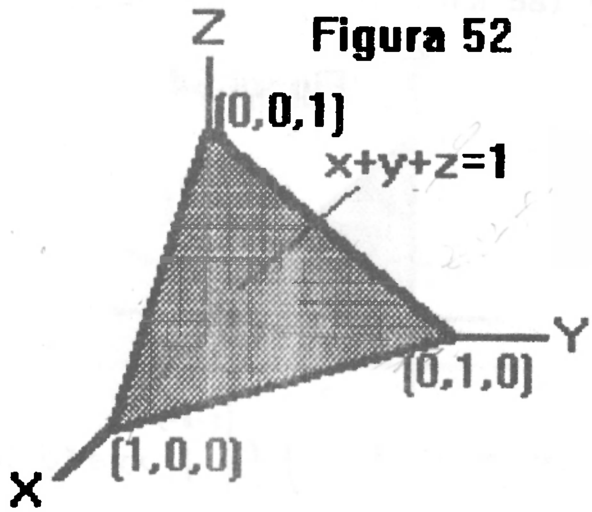
$$= \frac{1}{2}\iint_R xe^z y^2 \Big|_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} dx\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\iint_R xe^z \left[(z^2-x^2)-(z^2-x^2)\right] dx\,dz$$

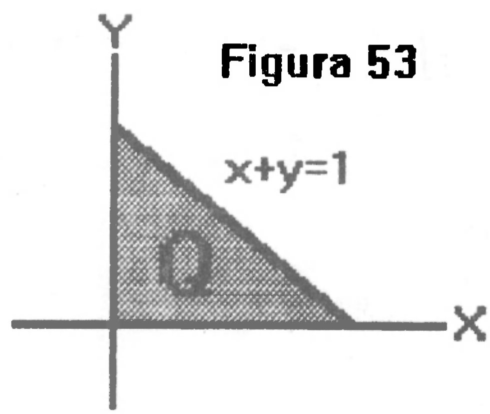
$$= \frac{1}{2}\int_0^2\int_{-z}^{z} xe^z * 0\,dx\,dz = 0.$$

(Hacer la proyección en el plano yz).

8. Colocar los límites de integración de dos formas diferentes en la integral $\iiint_S xye^z\,dx\,dy\,dz$. $S=\{(x,y,z) \mid x+y+z\leq 1\}$ y los planos coordenados (Figura 52).



i). Proyectando S en el plano xy (Figura 53) tenemos:



$$\iiint_S xye^z\,dx\,dy\,dz = \iint_Q \left[\int_0^{1-x-y} xye^z\,dz\right] dx\,dy$$

$$= \iint_Q xy(e^{1-x-y}-1)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} xy(e^{1-x-y}-1)\,dy\,dx.$$

ii). Proyectando S en el plano zy (Figura 54) tenemos: