



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Modelamiento de la hidrodinámica de la separación gravimétrica de minerales en jigs

Manuel Alejandro Ospina Alarcón

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Minas, Departamento de Materiales y Minerales
Medellín, Colombia

2014

Modelamiento de la hidrodinámica de la separación gravimétrica de minerales en jigs

Manuel Alejandro Ospina Alarcón

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Doctor en Ingeniería – Ciencia y Tecnología de los Materiales

Director:

Ph. D. Moisés Oswaldo Bustamante Rúa

Línea de Investigación:

Procesamiento de Minerales, Modelación de Equipos de Concentración

Grupo de Investigación:

Instituto de Minerales CIMEX

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Minas, Departamento de Materiales y Minerales

Medellín, Colombia

2014

(La inteligencia nos hace hombres libres.....La educación nos hace ricos)

Gracias a esas personas importantes en mi vida, que siempre estuvieron listos para brindarme toda su ayuda, ahora deseo regresar un poquito de todo lo inmenso que me han otorgado. Con todo mi cariño esta tesis se las dedico a ustedes:

Papá Iván

Mamá Rosalba

Hermanos y primos

Tíos y tías

Al más especial de todos, a ti Señor porque hiciste realidad este sueño, por todo el amor con el que me rodeas y porque me tienes en tus manos. Esta tesis es para ti.

Agradecimientos

Quiero agradecer a:

Néstor Ricardo Rojas Reyes por sus asesorías y por tomarse el tiempo de leer y corregir esta tesis y los Artículos que se publicaron.

Dr. Oswaldo Bustamante, por su tiempo y dedicación.

A Mineros S.A y Colciencias, por la financiación del proyecto.

Al Instituto de Minerales CIMEX, y a las personas que lo componen, Rosa, Lady, Fernando y Luis Ángel.

Al Departamento de Materiales y Minerales de la Universidad Nacional y a su secretaria Gloria Ruiz.

A la Universidad de Concepción y al profesor Arturo Barrientos.

Publicaciones resultantes de esta investigación

En eventos

1. Manuel Ospina y Oswaldo Bustamante. “Estudio hidrodinámico de equipos de concentración gravimétrica tipo jig. XII Jornadas Argentinas de Tratamiento de Minerales. 15 al 17 de octubre de 2014. San Luis-Argentina.
2. Lina Chica, Manuel Ospina y Oswaldo Bustamante. “Uso de CFD para la simulación de procesos mineralúrgicos de concentración gravimétrica”. III Congreso Internacional de Materiales, Energía y Medio Ambiente. 2 al 4 de noviembre de 2011. Barranquilla-Colombia.
3. Manuel Ospina y Oswaldo Bustamante. “Simulación de la dinámica de sistemas particulados en jigs mediante técnicas CFD. IV Latinometalurgia”. 19 al 21 de octubre de 2011. Cusco-Perú.

Artículos

1. Manuel Ospina, Arturo Barrientos y Oswaldo Bustamante. “Assessment and modeling of hydrodynamic forces on gravity concentrator device type jig. Facultad de Ingeniería. En evaluación.
2. Manuel Ospina, Arturo Barrientos y Oswaldo Bustamante. “Influencia de la forma de onda de pulsación en la estratificación de partículas de alta densidad en un equipo jig”. Dyna. En evaluación.

Resumen

El jig es un equipo de concentración gravimétrica donde minerales de diferentes tamaños y densidades se estratifican en un medio fluido mediante las diferentes velocidades de sedimentación que alcanzan las partículas con base al movimiento de un lecho de partículas las cuales son fluidizadas intermitentemente por la pulsación del fluido en un plano vertical. La estratificación causa que las partículas se configuren en capas con densidad variable desde el fondo hasta la parte superior de la columna del jig. Este arreglo de partículas se desarrolla por medio de la variación continua de las diferentes fuerzas hidrodinámicas que actúan sobre las partículas.

En esta investigación se analizaron suspensiones de arenas negras con concentraciones volumétricas de sólidos variando desde el 1% hasta el 4%. Las suspensiones están compuestas por partículas con tamaños entre 125 μm a 2000 μm y con densidades relativas entre 3 y 14. Además se estudió el efecto del tamaño y la densidad de las partículas sobre la fuerza de arrastre, la fuerza de empuje, la fuerza debida al gradiente de presión, la fuerza de masa virtual y la fuerza de Basset, obteniéndose una relación exponencial de las fuerzas respecto al tamaño y una relación lineal de las fuerzas respecto a la densidad. Se presentan los resultados numéricos y experimentales de una modelación matemática que muestra el efecto de interacción hidrodinámica generado en un jig cuando se alimentan suspensiones de partículas minerales de alta densidad. Se encuentra que este efecto de interacción es fuertemente gobernado por la fuerza de arrastre, la fuerza de empuje, la fuerza debida al gradiente de presión, la fuerza de masa virtual y la fuerza de Basset, las cuales son dependientes del tamaño y la densidad de las partículas minerales presentes en la suspensión.

Además del efecto hidrodinámico clásico analizado para las fuerzas de arrastre y empuje se obtiene la simulación numérica de las fuerzas inerciales en suspensiones de minerales pesados, en fluido Newtoniano (agua), hecho que el autor no encontró reportado en la literatura consultada. Debido al tamaño micrométrico, forma y distribución

de tamaño de las partículas de arenas negras, se determinó fijar la razón de aspecto de las partículas a una forma esférica con el objetivo de que el cálculo de las fuerzas de interacción hidrodinámicas fuera reproducible.

Por último se propone un modelo matemático a partir de las ecuaciones de conservación de la masa y el momentum para el fluido y una ecuación de movimiento de las partículas. El sistema de ecuaciones diferenciales se resolvió numéricamente para encontrar las trayectorias de las partículas al interior del lecho pulsado del jig. A partir de una gran cantidad de trayectorias de partículas de diferentes tamaños y densidades se pudo obtener un buen ajuste entre el modelo y los datos de laboratorio (porcentaje de error máximo 7%), pudiendo llegar a la conclusión que el modelo predice de manera adecuada el fenómeno de interacción sólido-líquido al interior del jig.

Palabras clave: Simulación numérica, Flujo sólido-líquido, Concentración gravimétrica, Jig, Suspensiones de alta densidad, Interacción sólido-líquido.

Abstract

Jig is a gravity concentrating device where different minerals are sorting in a fluid by stratification, based upon the movement of a bed of particles which are intermittently fluidized by the pulsation of the fluid in a vertical plane. The stratification causes particles to be arranged in layers with increasing density from the top to the bottom. This particle arrangement is developed by several continuously varying hydrodynamic forces acting on the particles.

Black sands suspensions were analyzed with solids volume fraction ranging from 1% to 4%. The suspensions are composed of particles with sizes between 125 μm to 2000 μm and relative densities ranging from 3 to 14. The size and density effects of the particles on the drag force, buoyancy force, pressure gradient force, virtual mass force and Basset force were also investigated resulting in an exponential relationship of the forces regarding to the size and a linear relationship of the forces regarding to the density.

In this study we present numerical and experimental results about mathematic modeling that show the hydrodynamic interaction effect generated in a jig when high density minerals suspensions are fed. It is found that the interaction effect is strongly governed by the drag force, buoyancy force, pressure gradient force, virtual mass force and Basset force which are depending on the size and density of the mineral particles present in the suspension.

Besides to the classical hydrodynamic effect analyzed for drag and buoyancy forces, the numerical simulation of inertial forces in heavy mineral suspensions in Newtonian fluid (water) is obtained. Which the author not found reported at the literature. Due to the micrometric size, shape and particle size distribution of black sands, it was determined that the particles were perfectly spherical with the objective that the calculations of the hydrodynamic forces were reproducible.

Finally a mathematical model from the mass and momentum conservation equations to the fluid and the motion equation to the particles is proposed. The differential equations systems are solved numerically to find particles trajectories into the pulsating jig bed. From a lot of particle trajectories of different sizes and densities we could obtain a concentration profile which was compared with experimental data. We found a good fit between the model and experimental data, and we can conclude that the model predicts adequately the solid-liquid interaction phenomenon inside the jig.

Keywords: Numerical simulation, solid-liquid Flow, gravity concentration, jig, high density suspensions, solid-liquid interaction.

Contenido

	Pág.
Resumen	VII
Abstract	IX
Lista de tablas	XVII
Lista de Símbolos y abreviaturas	XVIII
Introducción	1
1. Antecedentes Teóricos	5
1.1 Concentración de minerales en jigs	5
1.2 Velocidad mínima de fluidización y velocidad terminal.....	7
1.3 Efecto de la densidad y el tamaño de partícula sobre la velocidad de las partículas	10
1.4 Simulación de flujos multifase.....	13
1.4.1 Aproximación Euleriana-Lagrangiana.....	14
1.4.2 Hidrodinámica de la fase líquida	15
1.4.3 Ecuación de movimiento de partículas	16
1.4.4 Turbulencia	18
1.4.5 Modelamiento promediado en el tiempo.....	20
2. Planteamiento del Problema	23
2.1 El Problema	24
2.2 Hipótesis.....	26
2.3 Importancia del problema	26
2.4 Delimitación del problema.....	27
2.5 Objetivos de la Tesis	28
2.5.1 Objetivo general	28
2.5.2 Objetivos específicos	28
3. Trabajo Teórico y Experimental	29
3.1 Metodología para la obtención del MSBF aplicada al jig	29
3.1.1 Descripción verbal del proceso	30

3.1.2	Definición de sistemas de procesos (SdeP) sobre el jig.....	32
3.1.3	Aplicación del principio de conservación sobre cada uno de los SdeP	33
3.2	Desarrollo Experimental	40
3.2.1	Equipos de caracterización, ensayos y pruebas de laboratorio.....	40
3.2.2	Diseño experimental	42
4.	Resultados y Discusión.....	45
4.1	Descripción de la Geometría	45
4.1.1	Independencia de malla.....	47
4.2	Condiciones de Frontera	49
4.3	Estrategias de solución	52
4.3.1	Convergencia de la solución	53
4.4	Resultados de la caracterización del mineral.....	54
4.4.1	Distribución granulométrica y cálculo de densidad.....	54
4.4.2	Resultados Experimentales	56
4.5	Importancia de las fuerzas hidrodinámicas.....	64
4.6	Velocidades de sedimentación obstaculizada	68
4.7	Efecto de la adición de la pulsación.....	70
4.8	Trayectorias de partículas	74
4.8.1	Efecto de las fuerzas inerciales sobre la trayectoria de las partículas..	78
4.8.2	Fuerzas de interacción partícula-fluido	82
4.9	Análisis de sensibilidad	86
4.10	Validación experimental del modelo	88
5.	Conclusiones y recomendaciones	99
5.1	Conclusiones.....	99
5.2	Recomendaciones.....	101
A.	Anexo: Matriz de Diseño Experimental	103
B.	Anexo: Código para definir los perfiles de velocidad en la condición de frontera a la entrada de la columna del jig	113
C.	Anexo: Evaluación de la fuerza de Basset.....	121
	Bibliografía	122

Lista de figuras

	Pág.
Figura 1-1: Representación conceptual de los diferentes estados de fluidización en la estratificación de partículas (Mukherjee, Bhattacharjee, & Mishra, 2006)....	6
Figura 1-2: Sistema de fuerzas sobre una partícula en la separación en jig.(Bustamante et al., 2007).	9
Figura 1-3: Clasificación Geldart de partículas (Geldart, 1973).	10
Figura 1-4: Efecto del tamaño de partícula sobre la velocidad de sedimentación (Li et al., 2013; Oshitani et al., 2013).....	11
Figura 1-5: Efecto de la densidad de partícula sobre la velocidad de sedimentación (Li et al., 2013; Oshitani et al., 2013).....	11
Figura 1-6: Estratificación de las partículas en el jig (Bustamante et al., 2007).	12
Figura 1-7: Diferencia de presión como una función de la velocidad de fluidización. Partículas de tamaño uniforme en el lado izquierdo y distribución de tamaño en el lado derecho (Di Felice, 1994).....	13
Figura 1-8: Perfiles de velocidad a lo largo de la altura del jig.	19
Figura 3-1: Diagrama del jig.	30
Figura 3-2: Diagrama de bloques del SdeP sobre el jig.	32
Figura 3-3: Desplazamiento vertical de partícula perfil de pulsación senoidal.	38
Figura 3-4: Desplazamiento vertical de partícula perfil de pulsación Trapezoidal.	39
Figura 3-5: Microscopio electrónico de Barrido (SEM).....	41
Figura 3-6: Espectrofotómetro de absorción atómica.	41
Figura 3-7: Concentrador jig a escala de laboratorio.	42
Figura 4-1: Jig a escala de laboratorio usado en la simulación.....	46
Figura 4-2: a) Dimensiones del dominio computacional 2D usado en la simulación. Espesor 0.03 m. b) Vista de la geometría y malla del jig.	47
Figura 4-3: Influencia del tamaño de la malla en la predicción de los resultados de velocidad.....	48
Figura 4-4: Influencia del tamaño de la malla en la predicción de los resultados de presión.	48
Figura 4-5: Perfil de pulsación senoidal aplicado en la condición de frontera a la entrada.....	50
Figura 4-6: Perfil de pulsación triangular aplicado en la condición de frontera a la entrada.....	51
Figura 4-7: Perfil de pulsación diente de sierra adelantado aplicado en la condición de frontera a la entrada.	51

Figura 4-8:	Perfil de pulsación diente de sierra atrasado aplicado en la condición de frontera a la entrada.....	51
Figura 4-9:	Perfil de pulsación trapezoidal aplicado en la condición de frontera a la entrada.	52
Figura 4-10:	Monitoreo de residuales estado no estacionario en un tiempo de 5 segundos.	53
Figura 4-11:	Distribución de tamaño de partícula (DTP) de la descarga (concentrado) del jig terciario.	55
Figura 4-12:	Ajuste de la DTP a Rosin-Rammler.....	56
Figura 4-13:	Grafica de interacción de variables.	58
Figura 4-14:	Grafica de efectos en las variables principales.....	58
Figura 4-15:	Modelo experimental para la predicción de la recuperación de oro en el jig.	59
Figura 4-16:	Gráficos de contorno donde se logran las mayores recuperaciones de oro.	60
Figura 4-17:	Superficie de respuesta Amplitud vs Frecuencia.	60
Figura 4-18:	Superficie de respuesta Amplitud vs flujo agua de "hutch".	61
Figura 4-19:	Superficie de respuesta Frecuencia vs flujo agua de "hutch".....	61
Figura 4-20:	Superficie de respuesta Tamaño de partícula vs flujo agua de "hutch"...	61
Figura 4-21:	Superficie de respuesta Amplitud vs LPA.	62
Figura 4-22:	Superficie de respuesta Frecuencia vs LPA.	62
Figura 4-23:	Superficie de respuesta LPA vs flujo agua de "hutch".	62
Figura 4-24:	Superficie de respuesta LPA vs Tamaño.....	63
Figura 4-25:	Superficie de respuesta Amplitud vs Tamaño.....	63
Figura 4-26:	Superficie de respuesta Frecuencia vs Tamaño.....	63
Figura 4-27:	Importancia relativa de las diferentes fuerzas hidrodinámicas respecto a la densidad, para partículas minerales de tamaño uniforme.....	65
Figura 4-28:	Importancia relativa de las diferentes fuerzas hidrodinámicas respecto al tamaño, para partículas minerales de densidad constante.	66
Figura 4-29:	Comparación de las fuerzas de Basset, masa virtual y gradiente de presión respecto a la densidad.	66
Figura 4-30:	Comparación de las fuerzas de Basset, masa virtual y gradiente de presión respecto a la densidad.	67
Figura 4-31:	Velocidades de sedimentación de partículas en función del tamaño y la densidad en agua completamente en reposo.	68
Figura 4-32:	Velocidad de sedimentación de partículas en función del tamaño y la densidad en agua a una velocidad de flujo ascendente de 0.088 m/s.	69
Figura 4-33:	Movimiento de partículas en flujo pulsante con perfil de pulsación senoidal.	70
Figura 4-34:	Movimiento de partículas en flujo pulsante con perfil de pulsación triangular.	71
Figura 4-35:	Movimiento de partículas en flujo pulsante con un perfil de pulsación diente de sierra adelantado.....	71

Figura 4-36:	Movimiento de partículas en flujo pulsante con un perfil de pulsación diente de sierra atrasado.....	71
Figura 4-37:	Movimiento de partículas en flujo pulsante con un perfil de pulsación trapezoidal.....	72
Figura 4-38:	Patrones de trayectoria de partículas de 300 μm sometidas al perfil senoidal.....	74
Figura 4-39:	Patrones de trayectoria de partículas de 300 μm sometidas al perfil triangular.....	75
Figura 4-40:	Patrones de trayectoria de partículas de 300 μm sometidas al perfil diente de sierra adelantado.....	76
Figura 4-41:	Patrones de trayectoria de partículas de 300 μm sometidas al perfil diente de sierra atrasado.....	76
Figura 4-42:	Patrones de trayectoria de partículas de 300 μm sometidas al perfil trapezoidal.....	77
Figura 4-43:	Comparación de la trayectoria de partícula con los diferentes perfiles para una partícula de 300 μm y 4089 kg/m^3	77
Figura 4-44:	Efecto de las fuerzas de Basset y masa virtual sobre la trayectoria de una partícula fina variando la densidad relativa.....	79
Figura 4-45:	Efecto de la fuerza de Basset y masa virtual sobre la trayectoria de una partícula fina con densidad relativa $DR=3.562$	79
Figura 4-46:	Efecto de las fuerzas de Basset y masa virtual sobre la trayectoria de una partícula gruesa con densidad relativa $DR=3.562$	80
Figura 4-47:	Efecto de las fuerzas de Basset y masa virtual sobre la trayectoria de una partícula gruesa con densidad relativa $DR=13.8$	81
Figura 4-48:	Fuerza de Interacción adimensional partícula–fluido para un perfil senoidal.....	83
Figura 4-49:	Fuerza de interacción adimensional partícula –fluido para un perfil triangular.....	83
Figura 4-50:	Fuerza de interacción adimensional partícula-fluido para un perfil diente de sierra atrasado.....	84
Figura 4-51:	Fuerza de interacción adimensional para un perfil diente de sierra adelantado.....	84
Figura 4-52:	Fuerza de interacción adimensional partícula-fluido para un perfil trapezoidal.....	85
Figura 4-53:	Efecto de la velocidad inicial sobre la trayectoria de partícula de diámetro $d_p=300 \mu\text{m}$	86
Figura 4-54:	Efecto de la velocidad inicial sobre la trayectoria de partícula de diámetro $d=417 \mu\text{m}$	87
Figura 4-55:	Trayectoria de partícula simulada a diferentes densidades.....	87
Figura 4-56:	Comparación de la Trayectoria de partícula mediante la inclusión de las diferentes fuerzas hidrodinámicas.....	88
Figura 4-57:	Numero de Reynolds y coeficiente de arrastre calculado por el Modelo.....	89
Figura 4-58:	Velocidades calculadas por el modelo en 4 ciclos de pulsación.....	89
Figura 4-59:	Velocidades calculadas por el modelo en un ciclo de pulsación.....	90

Figura 4-60:	Fuerza de arrastre sobre la partícula calculada en 4 ciclos de pulsación. .	91
Figura 4-61:	Fuerza de Arrastre sobre la partícula calculada en un ciclo de pulsación..	91
Figura 4-62:	Fuerza de Basset sobre la partícula calculada en 4 ciclos de pulsación....	92
Figura 4-63:	Fuerza de Basset sobre la partícula calculada en un ciclo de pulsación....	93
Figura 4-55:	Ajuste de la velocidad experimental y numérica.	95
Figura 4-65:	Ajuste de la caída de presión experimental y numérica.	96

Lista de tablas

	Pág.
Tabla 3-1: Características del jig a escala de laboratorio.	31
Tabla 3-2: Parámetros de funcionamiento y respectivos niveles de operación.	43
Tabla 4-1: Tipos de malla para independencia.	47
Tabla 4-2: Características de los perfiles de pulsación utilizados.	52
Tabla 4-3: Distribución Granulométrica, Concentrado de jig terciario.	54
Tabla 4-4: Densidades reales.	55
Tabla 4-5: Pesos de concentrados y colas.	56
Tabla 4-6: Tenores de oro de cabeza, concentrado y colas.	57
Tabla 4-7: Pruebas de validación diseño experimental.	64
Tabla 4-8: Fracciones de tamaño y densidad utilizados para el cálculo de la velocidad.	94
Tabla 4-9: Comparación de las velocidades experimentales y calculadas por el modelo.	95
Tabla 4-10: Comparación de la caída de presión experimental y calculada por el modelo.	96
Tabla A-5-1: Orden de desarrollo de las pruebas en el jig y resultado de cada uno de los índices metalúrgicos.	103

Lista de Símbolos y abreviaturas

Símbolos

Símbolo	Término	Unidad SI
a	Aceleración	$\frac{m}{s^2}$
A	Amplitud de pulsación	m
A_p	Área de sección transversal de la partícula	m^2
C_d	Coefficiente de Arrastre	Adimensional
d_p	Diámetro de partícula	m
D_h	Perímetro mojado de la columna del jig	m
F	Frecuencia de oscilación	$\frac{1}{s}$
F_a	Flujo de alimento de mineral	$\frac{m^3}{s^2}$
$F_{\text{concentrado}}$	Flujo corriente de concentrado	$\frac{m^3}{s^2}$
F_{h2o}	Flujo de agua de "hutch"	$\frac{m^3}{s^2}$
F_B	Fuerza de Basset	$\frac{Kg \cdot m}{s^2}$
F_D	Fuerza de Arrastre	$\frac{Kg \cdot m}{s^2}$
F_i	Fuerzas que actúan sobre una partícula debido a la interacción viscosa con el agua	$\frac{Kg \cdot m}{s^2}$
F_{MV}	Fuerza de Masa Virtual	$\frac{Kg \cdot m}{s^2}$
F_b	Fuerza de Empuje	$\frac{Kg \cdot m}{s^2}$
$F_{\nabla p}$	Fuerza de vida al gradiente de	$\frac{Kg \cdot m}{s^2}$

	presión	
F_{rechazo}	Flujo corriente de rechazo	$\frac{m^3}{s^2}$
F_{S-L}	Fuerzas de interacción hidrodinámicas	$\frac{Kg \cdot m}{s^2}$
F_{p-l}	Fuerza de interacción hidrodinámica adimensional	Adimensional
F_w	Termino de transferencia de momentum	$\frac{Kg \cdot m}{s^2}$
G	Vector aceleración de la gravedad	$\frac{m}{s^2}$
g_i	Componente de la Aceleración de la gravedad	$\frac{m}{s^2}$
H_0	Altura del lecho poroso artificial empacado	m
H_{max}	Altura del lecho poroso artificial fluidizado	m
m_p	Masa de la partícula	Kg
N_s	Numero de sedimentación	Adimensional
P	Presión	Pa
P_e	Numero de Peclet	Adimensional
R_e	Número de Reynolds	Adimensional
R_{es}	Número de Reynolds basado en la velocidad terminal de Stokes	Adimensional
t	Tiempo	s
\hat{t}	Tiempo característico	Adimensional
T	Periodo de oscilación	s
u_l	Vector velocidad del fluido	$\frac{m}{s}$
u_{li}	Componente de velocidad del fluido	$\frac{m}{s}$
U_{mf}	Velocidad mínima de fluidización	$\frac{m}{s}$
u_p	Vector velocidad de la partícula	$\frac{m}{s}$
u_{pi}	Componente de velocidad de la partícula	$\frac{m}{s}$
u_{px}	Velocidad horizontal de la partícula	$\frac{m}{s}$

u_{py}	Velocidad vertical de la partícula	$\frac{m}{s}$
u_t	Velocidad terminal de la partícula	$\frac{m}{s}$
u_s	Velocidad terminal en régimen de Stokes	$\frac{m}{s}$
\hat{u}_l	Velocidad característica del fluido	Adimensional
\hat{u}_0	Velocidad inicial de la partícula	Adimensional
\hat{u}_p	Velocidad característica de las partículas	Adimensional
V_p	Volumen de la partícula	m^3
x	Posición horizontal de la partícula	m
x_i	Coordenada espacial	m
\mathbf{x}_p	Vector Posición de la partícula	m
X_i	Fracción de masa de mineral de interés	Adimensional
y	Posición vertical de la partícula	m

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI
Γ	Viscosidad compuesta	Pa·s
ε_{mf}	Porosidad en el estado de mínima fluidización	Adimensional
μ	Micra	m
μ_l	Viscosidad del fluido	Pa·s
μ_t	Viscosidad turbulenta	Pa·s
ρ_a	Densidad de la corriente de alimento	$\frac{Kg}{m^3}$
$\rho_{concentrado}$	Densidad de la corriente de concentrado	$\frac{Kg}{m^3}$
ρ_l	Densidad líquido	$\frac{Kg}{m^3}$
ρ_s	Densidad del sólido	$\frac{Kg}{m^3}$
$\rho_{rechazo}$	Densidad de la corriente de rechazo	$\frac{Kg}{m^3}$

τ	Variable de integración	s
τ_r	Tiempo de relajación	s
φ	Representación de las variables de flujo instantáneas	Depende de la variable a promediar
$\bar{\varphi}$	Representación del valor promedio de la variable	Depende de la variable a promediar
φ'	Representación de la parte fluctuante de la variable	Depende de la variable a promediar
ϕ_l	Fracción volumétrica del fluido	Adimensional
ϕ_s	Esfericidad de la partícula	Adimensional
χ	Relación de densidad	Adimensional

Abreviaturas

Abreviatura Término

CFD	Dinámica de fluidos computacional
DEM	Método de elementos discretos
DPM	Modelo discreto de partículas
DRX	Difracción de rayos X
DTP	Distribución de tamaño de partícula
FVS	Fracción volumétrica de sólidos
GLP	Galones por minuto
gpt	Gramos por tonelada
LPA	Lecho poroso artificial
MSBF	Modelo semifísico de base fenomenológica
SdeP	Sistemas de procesos
SEM	Microscopio electrónico de barrido
SP _I	Sistema de proceso I
SP _{II}	Sistema de proceso II
SP _{III}	Sistema de proceso III
SIMPLE	Método semi-implícito para resolver las ecuaciones vinculadas a la presión

Abreviatura Término

SENO	Perfil de pulsación senoidal
STB	Perfil de pulsación diente de sierra atrasado
STF	Perfil de pulsación diente de sierra adelantado
RANS	Ecuaciones de Navier-Stokes promediadas mediante esfuerzos de Reynolds
TRA	Perfil de pulsación trapezoidal
TRI	Perfil de pulsación triangular

Introducción

En aplicaciones industriales de procesamiento de minerales, la separación sólido-sólido de sistemas particulados de minerales recuperables económicamente, requiere del uso de diferentes propiedades diferenciales que generen corrientes enriquecidas en un mineral de interés y otras corrientes enriquecidas en minerales de ganga. La separación de estas corrientes, se conoce en minería como concentración de minerales y forma parte del grueso de procesos que configuran una planta de procesamiento de minerales, junto con los procesos de fragmentación, clasificación, sedimentación, filtración y secados de minerales (Bustamante, Gaviria, & Restrepo, 2008).

La concentración gravimétrica de partículas minerales en ciclos pulsantes ha sido objeto de diferentes investigaciones experimentales por varios años (Burt, 1999; Gaudin, 1939; Gupta, 2003; Mayer, 1964; Tavares & King, 1995; Viduka, Feng, Hapgood, & Schwarz, 2012, 2013a, 2013b)

Los jigs son concentradores gravimétricos que se han convertido en uno de los principales equipos de recuperación en minería aluvial de oro y metales pesados, básicamente son actores protagónicos en las plantas de concentración ocupando etapas “*rougher*” por las condiciones de operación (alta capacidad y razón de enriquecimiento relativamente baja) y son también muy utilizados en la industria del reciclaje de materiales plásticos (Lopamudra, Sahoo, Tripathy, Biswal, & Sahu, 2012). En la industria minera son utilizados para el lavado de carbón (Li, Zhao, Xu, & Xia, 2013) y para la concentración de minerales pesados ya que poseen una alta eficiencia, además de ser favorables con el medio ambiente debido a que no utilizan ningún tipo de reactivo o agente contaminante (Li et al., 2013).

Al interior del jig las partículas sólidas se encuentran suspendidas en una corriente de flujo de agua que oscila de forma ascendente y descendente generando movimientos diferenciales a las partículas, lo cual produce una estratificación que varía de acuerdo a tamaños, formas y densidad de las partículas, gobernada por cuatro principios:

aceleración diferencial al inicio de la caída, sedimentación obstaculizada, alcanzar el mínimo nivel de energía potencial y escurrimiento intersticial (Burt, 1984).

Hasta ahora, el diseño de la capacidad del jig se ha basado en el cálculo del área necesaria para el transporte de la pulpa a una determinada concentración de descarga, unido a un sistema de movimiento del pulso que permita favorecer los mecanismos identificados de separación, además, de la elección de equipos de los muchos ofrecidos por distintos fabricantes (L. Dong et al., 2014; Oshitani et al., 2013). La aplicación de un modelo hidrodinámico puede cambiar este panorama, éste permitiría elegir detalles constructivos de la alimentación y descarga del jig, ya que usando la modelación hidrodinámica del flujo en un jig, es posible determinar los patrones de flujo en el equipo y en la alimentación los cuales gobiernan la separación. La naturaleza compleja del transporte de flujos multifase de partículas sólidas, hacen la modelación del fenómeno de interacción sólido-líquido muy interesante y a la vez se convierte en todo un reto para la optimización del equipo (Burt, 1999).

En las pasadas décadas se llevaron a cabo numerosas investigaciones teóricas y experimentales de concentración gravimétrica en Jigs de mezclas polidispersas (Beniuk & Vadeikis, 1994; Burt, 1984, 1999; Di Felice, 1994, 1995; Ergun, 1952; Kallio, Hermanson, Fagerudd, & Engblom, 2003; Li et al., 2013; Lyman, 1992; Mayer, 1964). Sin embargo, la mayoría de esos estudios se hicieron bajo condiciones de fluidización batch con la particularidad que el fondo del lecho de partículas era cerrado impidiendo que las partículas salieran del lecho y permitiendo que las partículas se sedimentaran en el fondo del lecho (Mukherjee & Mishra, 2007; Pickett & Riley, 1985; Richardson & Zaki, 1954; Rong & Lyman, 1993a, 1993b). Hasta el momento no se han realizado análisis teóricos acerca del comportamiento del jig con partículas de diferentes tamaños y densidades en los cuales se tenga una adición continua tanto de flujo de líquido como de partículas, especialmente en condiciones de estado dinámico o transitorio.

En esta investigación se estudia el modelamiento de interacción hidrodinámico de flujos sólido-líquido, pues el propósito de esta tesis de doctorado fue desarrollar un modelo fundamental, el cual pueda predecir el estado complejo y el comportamiento inestable de las partículas y el fluido en un jig. El método se basa en modelos hidrodinámicos y el conocimiento del comportamiento de sedimentación de las especies individuales en la mezcla de sólidos. Esta investigación se limita a los aspectos dinámicos del fluido y no se

toman en cuenta fenómenos de transferencia de calor y masa, las partículas se consideran esféricas y tanto el fluido como las partículas se consideran incompresibles. Se desprecia la fricción de la pared de la columna del jig y las interacciones entre partículas, que no sean de efectos hidrodinámicos transmitidos por el fluido se desprecian ya que el fenómeno electrocinético y de superficie están fuera del alcance de esta investigación.

Esta tesis se divide esencialmente en dos partes. En la primera parte se describe la teoría fundamental para poder entender los conceptos y la nomenclatura utilizada junto con el planteamiento del problema donde se justifica la aplicabilidad del modelo. En el capítulo 1 se describe el fenómeno físico de concentración en jigs. También se presenta algunas aplicaciones históricas y actuales de lechos fluidizados pulsados y se plantea la teoría general de flujos multifase asociados a modelos de turbulencia y a la aproximación Euleriana-Lagrangiana aplicada a diferentes alternativas de modelamiento.

Posteriormente en el capítulo 2 se desarrolla el planteamiento del problema que genera la hipótesis de investigación, además del objetivo general y los objetivos específicos que responden a la pregunta generada de la hipótesis. El capítulo 3 describe el modelo de trayectoria de partículas implementado. En la sección 3.1 el modelo de trayectorias es evaluado para la simulación de partículas de diferentes densidades y tamaños alimentadas al interior de la cámara del jig. La sección 3.2 trata de forma detallada la simulación del modelo aplicado al jig, la sensibilidad ante variación de parámetros operacionales tales como densidad y tamaño de partícula y la inclusión o no de las fuerzas hidrodinámicas involucradas.

En la segunda parte, se muestran los resultados a partir de las simulaciones realizadas junto con un análisis detallado de los fenómenos hidrodinámicos de interés y el desarrollo del modelo de trayectorias. Específicamente el capítulo 4 presenta y discute los resultados de simulación los cuales se comparan con los datos experimentales obtenidos de las pruebas a escala de laboratorio. Finalmente en el capítulo 5 se muestran las conclusiones generadas a partir de los objetivos planteados mediante la simulación y validación de los datos experimentales con el modelo de trayectorias. Además de los trabajos futuros que se pueden realizar a partir de esta investigación.

1. Antecedentes Teóricos

En este capítulo se presentan de forma muy general algunos antecedentes teóricos de la concentración gravimétrica en jigs además de la simulación de flujos multifase.

El flujo multifásico es un término bastante general y aparte de flujos sólido-líquido, existen otras situaciones de flujo que pueden entrar en la misma categoría (Versteeg & Malalasekera, 2007; Yeoh & Tu, 2009). Pese a que la configuración general es similar, la precisión de los modelos y las técnicas computacionales pueden ser muy diferentes de un caso a otro. Esta investigación se enfoca principalmente en flujos sólido-líquido relativamente diluidos. En la literatura se pueden encontrar descripciones más generales de flujos multifase, por ejemplo en los textos escritos por Fan & Zhu (2005), Kleinstreuer (2003) y Heng & Tu (2009). (Fan & Zhu, 2005; Kleinstreuer, 2003; Yeoh & Tu, 2009).

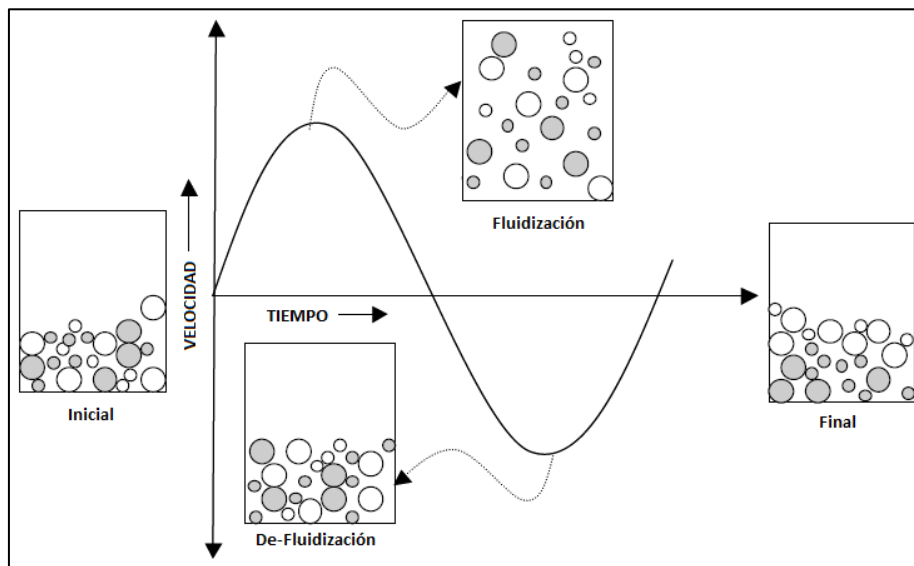
1.1 Concentración de minerales en jigs

La concentración de minerales es un fenómeno en el cual los materiales sólidos particulados se estratifican en un medio líquido. La estratificación ocurre cuando un movimiento armónico del flujo de un líquido pasa a través del lecho de mineral. Dependiendo de las características de amplitud y frecuencia de pulsación del flujo, las propiedades de las partículas y del tipo de fluido, se pueden obtener diferentes estados de fluidización que generaran la estratificación de las partículas y por ende su posterior concentración. La estratificación de partículas al interior de la cámara del jig se debe principalmente a la pulsación de agua donde la amplitud y la frecuencia de pulsación controlan la dinámica del fluido. Mientras que en un caso extremo una combinación de amplitud y frecuencia pueden generar alta turbulencia desarrollando un sistema de mezcla intenso de no-separación; en la otra situación la amplitud y frecuencia son muy bajas, y no proporciona la energía mecánica suficiente para promover la estratificación. Lo anterior implica que en la cámara de separación del jig deben existir condiciones

mecánicas que incrementen la energía cinética de las partículas, pero que a la vez disipen energía mecánica en la estratificación, mediante diferenciales de movimiento en cada una de las partículas para obtener una estratificación óptima (Burt, 1984, 1999; Bustamante et al., 2008; L. Dong et al., 2014; Gaudin, 1939; Jinnouchi, Kita, Tanaka, & Sawada, 1984).

La Figura 1-1 describe la situación donde el movimiento ascendente y descendente del fluido pasa a través de un lecho de partículas. Si la tasa de flujo es lenta, el fluido simplemente fluye a través de los intersticios entre las partículas y el lecho permanece estático, esta situación se conoce como lecho empaquetado. Por el contrario si la rapidez aumenta, las fuerzas hidrodinámicas entre el fluido y las partículas aumentan y el lecho comienza a expandirse en volumen. Cuando la fuerza de arrastre se equilibra con la fuerza gravitacional las partículas están todas suspendidas en el flujo, en este punto el lecho se encuentra en un estado de fluidización y las partículas comienzan a mostrar un comportamiento tipo fluido (Bustamante et al., 2008; Mukherjee & Mishra, 2007).

Figura 1-1: Representación conceptual de los diferentes estados de fluidización en la estratificación de partículas (Mukherjee, Bhattacharjee, & Mishra, 2006).



La estratificación de las partículas en respuesta a una determinada velocidad del fluido se analiza en diferentes etapas considerando la naturaleza cíclica del proceso (Figura 1-1). En la etapa de ascenso del fluido las partículas se fluidizan momentáneamente permitiendo la segregación. En la etapa de succión, es decir, durante el descenso la

mayoría de las partículas se segregan mediante una condición de sedimentación obstaculizada, que se inicia con una aceleración diferencial al inicio de la caída.

Bajo condiciones de sedimentación obstaculizada, el criterio de concentración de partículas juega un rol importante durante la segregación de las partículas (Pickett & Riley, 1985). El criterio de concentración CC (ecuación (1.1)) (Burt, 1999)

$$CC = \frac{\rho_p^{-1}}{\rho_t^{-1}} \quad (1.1)$$

está basado en las características solamente asociada a la densidad de las partículas, no habla para nada del diámetro de partículas, forma y razón de aspecto de éstas en el alimento y el cual no se puede alterar durante el tiempo que duren las oscilaciones. Como consecuencia de esto, se puede ejercer muy poco control durante la etapa de succión y es por esta razón que la etapa de ascenso la cual domina la fluidización de las partículas se puede controlar cuidadosamente para mejorar la separación de las partículas. De esta manera el perfil de pulsación de agua es el principal parámetro que se debe tener en cuenta para poder obtener una adecuada fluidización en términos de la amplitud y frecuencia a la cual las partículas se estratificarán (Lyman, 1992; Mukherjee et al., 2006; Rong & Lyman, 1991a).

1.2 Velocidad mínima de fluidización y velocidad terminal

Uno de los parámetros de diseño más importante para el lecho del jig es la velocidad mínima de fluidización U_{mf} . A esta velocidad la fuerza de arrastre y las fuerzas gravitacionales se encuentran en equilibrio, ocasionando que el lecho del jig comience a presentar un comportamiento de fluidización. Una ecuación empírica muy utilizada para U_{mf} se puede escribir de la siguiente forma (Ergun, 1952):

$$150 \frac{(1-\varepsilon_{mf})^2}{\varepsilon_{mf}^3} \frac{\mu_f U_{mf}}{(\phi_s d_s)^2} + 1.75 \frac{(1-\varepsilon_{mf})}{\varepsilon_{mf}^3} \frac{\rho_f U_{mf}^2}{\phi_s d_s} = (1 - \varepsilon_{mf})(\rho_s - \rho_f)g \quad (1.2)$$

donde ε_{mf} es la porosidad en el estado de mínima fluidización, ρ_s y ρ_f son la densidad del sólido y del líquido respectivamente, g es la aceleración de la gravedad, μ_f es la viscosidad del fluido, ϕ_s es la esfericidad de la partícula y d_s es el diámetro de la partícula.

Esta ecuación se conoce como la ecuación de Ergun y se formuló a partir de extensas observaciones experimentales considerándose válida para diversos casos de fluidización (Di Felice, 1994, 1995; Ergun, 1952; Richardson & Zaki, 1954). El diámetro y los términos de densidad son normalmente conocidos y se asumen partículas esféricas con lo que la esfericidad toma el valor de la unidad. El término de porosidad ϵ_{mf} se define como la relación del volumen total del líquido al volumen del lecho en el estado de mínima fluidización. La porosidad se puede calcular a partir de datos de empaquetamiento aleatorio o se puede obtener de la literatura, pero con el fin de obtener un valor preciso de U_{mf} , la porosidad debería determinarse experimentalmente. Normalmente el valor de la porosidad se encuentra alrededor de 0.4, pero puede variar dependiendo del material utilizado (Kunii & Levenspiel, 1991).

Cabe señalar, que el valor de U_{mf} obtenido a partir de la ecuación de Ergun es la velocidad superficial mínima de fluidización. La velocidad superficial es una velocidad que representa correctamente la tasa de flujo volumétrico, donde el flujo ocupa completamente la sección transversal de la columna del jig. Esta velocidad es una medida muy útil, ya que es independiente de la geometría del lecho del jig (L. Dong et al., 2014; Oshitani et al., 2013; Richardson & Zaki, 1954).

Cuando se simulan y diseñan concentradores gravimétricos de la clase del jig, otra cantidad importante que se debe estimar es la velocidad terminal de las partículas, es decir, la velocidad de caída libre de una partícula individual en un medio líquido en reposo conocida como velocidad de sedimentación (Concha, 2001). En un jig la concentración de partículas disminuye a lo largo de la altura del lecho y cerca de la parte superior la interacción entre las partículas es bastante baja. Por lo tanto, con el fin de mantener las partículas livianas y finas suspendidas en la parte superior de la cámara de separación del jig, la velocidad del fluido debe superar la velocidad de sedimentación de dichas partículas. La velocidad terminal u_t se puede calcular considerando el balance de fuerzas de una partícula que cae libremente en un líquido en reposo (ver Figura 1-2). Para una partícula individual el balance entre la fuerza de arrastre y las fuerzas gravitacionales puede expresarse como (Asakura, Harada, Funayama, & Nakajima, 1997; Gupta, 2003; Karantzavelos & Frangicos, 1984; Mukherjee & Mishra, 2007):

$$\frac{1}{2}C_d\rho_f A_p u_t^2 = (\rho_p - \rho_f)gV_p \quad (1.3)$$

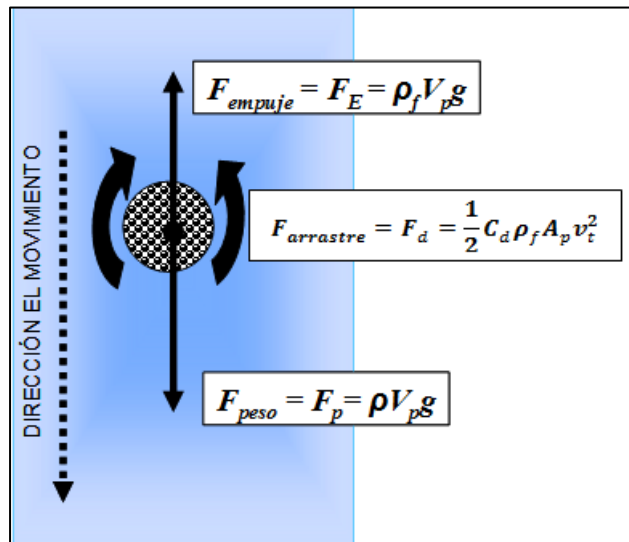
donde u_t es la velocidad terminal, C_d el coeficiente de arrastre, A_p el área de sección transversal de una partícula y V_p es el volumen de la partícula. La única desventaja de usar esta ecuación de arrastre es el coeficiente de arrastre, que generalmente depende de la velocidad. Normalmente las velocidades que se manejan en el jig se ubican en la región de transición entre velocidades bajas (arrastre en régimen de Stokes) y velocidades altas (arrastre en régimen Newtoniano) (Oshitani et al., 2013). La correlación de Schiller-Naumann es una relación empírica muy conocida que se puede usar para estimar el coeficiente de arrastre en estos casos. La correlación se puede escribir de la siguiente manera (Schiller & Naumann, 1933):

$$C_d = \begin{cases} \frac{24}{Re} [1 + 0.15(Re)^{0.687}], & 1 \leq Re \leq 1000 \\ 0.44, & Re > 1000 \end{cases} \quad (1.4)$$

Donde Re es el número de Reynolds definido por:

$$Re = \frac{\rho_f u_t d_p}{\mu_f} \quad (1.5)$$

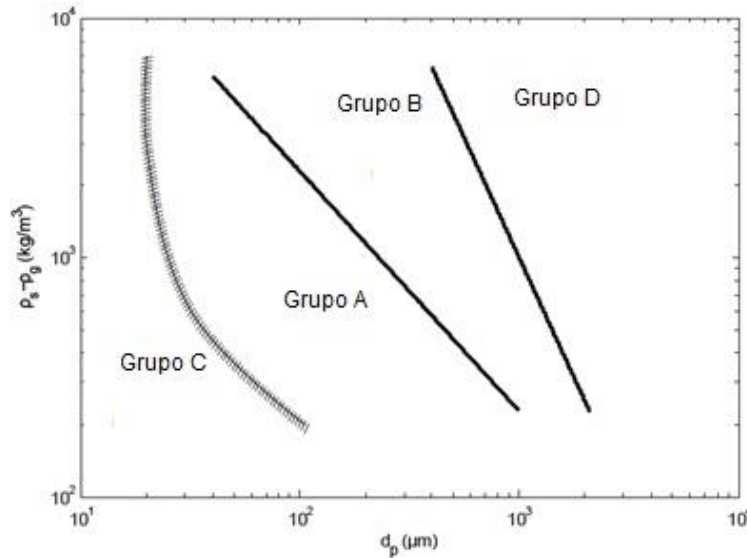
Figura 1-2: Sistema de fuerzas sobre una partícula en la separación en jig. (Bustamante et al., 2008).



1.3 Efecto de la densidad y el tamaño de partícula sobre la velocidad de las partículas

El diámetro de las partículas es uno de los factores más importantes que afecta el comportamiento del jig. Por ejemplo, el diámetro juega un papel muy importante en la clasificación de Geldart (1973) de un lecho fluidizado (Figura 1-3) (Geldart, 1973).

Figura 1-3: Clasificación Geldart de partículas (Geldart, 1973).



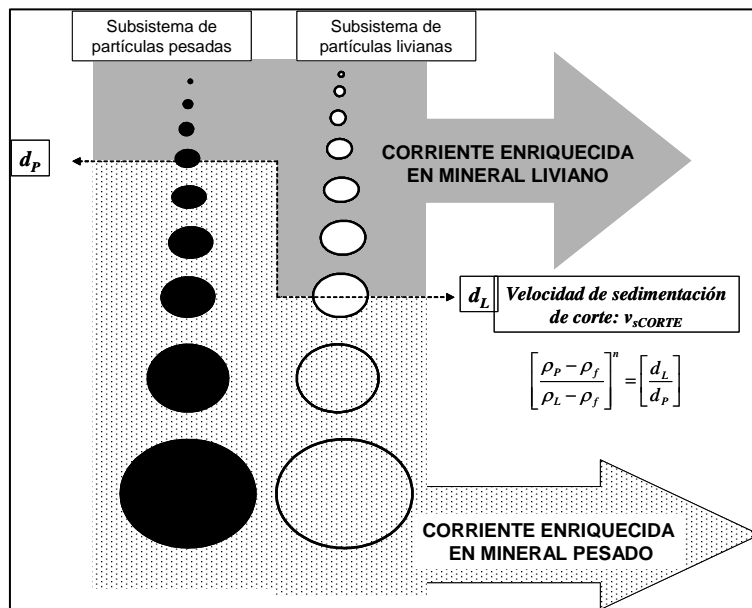
También las velocidades de fluidización y terminal de las partículas dependen fuertemente del diámetro y de la densidad e inclusive cambios pequeños en el tamaño y la densidad de partícula afectan estas velocidades sustancialmente (Figuras 1-4 y 1-5). Por tanto, no es suficiente considerar solamente el tamaño promedio de las partículas, ya que también la distribución de tamaño de partícula afecta el comportamiento del jig (Li et al., 2013; Oshitani et al., 2013).

En un jig, es muy normal que las partículas gruesas y densas tiendan a salir por la parte inferior del lecho (suspensión densa), mientras que las partículas finas y livianas fluyan más fácilmente en la región superior. Si se lleva a cabo una simulación usando solo el diámetro promedio para todo el lecho del jig y alimentamos una suspensión mineral caracterizada por una distribución de tamaño de partícula de diferentes gravedades específicas, puede ser difícil predecir la distribución correcta de las partículas alimentadas en la dirección vertical, ya que las diferencias de velocidad de sedimentación

De acuerdo a lo anterior, se puede ver fácilmente que la separación en un jig favorece la separación de partículas pesadas gruesas respecto a las partículas livianas finas, mientras que existe una región de separación “borrosa” compuesta por gruesos livianos y finos pesados que difícilmente se separan.

En la práctica, es necesario un estrecho control del tamaño de la alimentación a los equipos gravimétricos, para reducir el efecto del tamaño y hacer que el movimiento relativo de las partículas dependa de la densidad entre ellas.

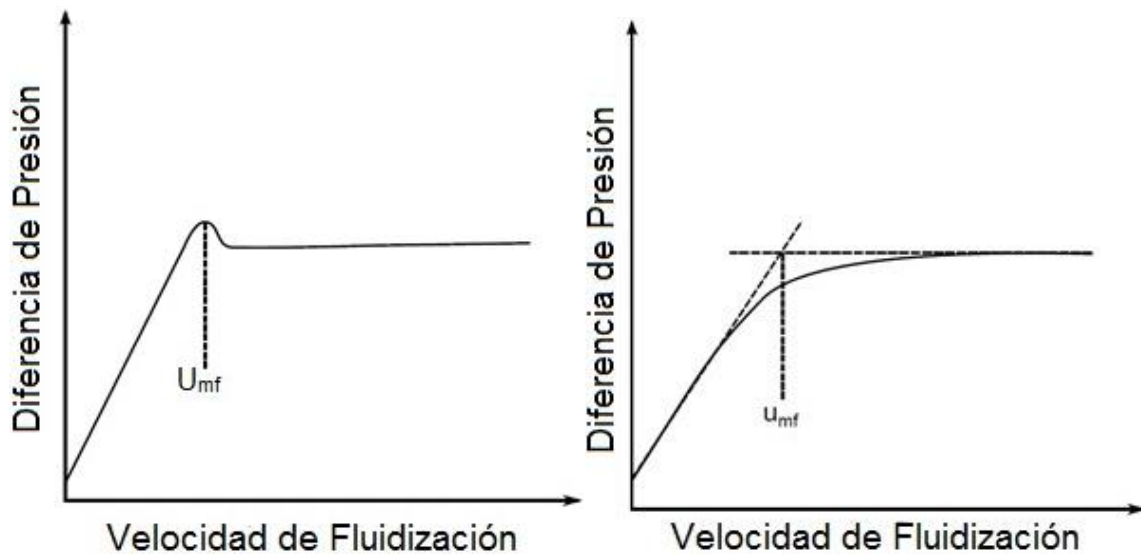
Figura 1-6: Estratificación de las partículas en el jig (Bustamante et al., 2008).



La forma de la distribución de tamaño también afecta la caída de presión y el comportamiento de mínima fluidización del lecho del jig. La Figura 1-7 muestra la caída de presión de fluidización líquida como una función de la velocidad para dos distribuciones de tamaño diferentes. En la gráfica de la izquierda de la Figura 1-7, las partículas tienen un tamaño uniforme y en la gráfica de la derecha la distribución de tamaño es amplia. Con partículas uniformes la caída de presión incrementa linealmente con el aumento de la velocidad del fluido, hasta que se alcanza la velocidad mínima de fluidización. Después de ese punto la caída de presión disminuye ligeramente y luego permanece casi constante en la región donde el lecho está totalmente dilatado. Por otro lado, con una distribución de tamaño amplia, la velocidad mínima de fluidización no se define fácilmente, debido a que las partículas más finas comienzan a fluidizarse antes que las partículas más gruesas, ocasionando que el lecho del jig se encuentre en un

estado parcialmente fluidizado. En este caso U_{mf} se define como se muestra en el lado derecho de la Figura 1-7 (Di Felice, 1994). Además de la influencia sobre la caída de presión, la distribución de tamaño puede afectar la porosidad del lecho. Las partículas finas pueden ocupar los espacios vacíos que se encuentran entre las partículas gruesas y de esta forma reducen los espacios vacíos dentro del lecho del jig que puede ocupar el fluido.

Figura 1-7: Diferencia de presión como una función de la velocidad de fluidización. Partículas de tamaño uniforme en el lado izquierdo y distribución de tamaño en el lado derecho (Di Felice, 1994)



1.4 Simulación de flujos multifase

Actualmente existen en la literatura técnicas numéricas que puede ayudar a predecir el comportamiento de flujo al interior de los equipos de concentración gravimétrica (K. J. Dong, Kuang, Vince, Hughes, & Yu, 2010; Ferreira Feil, Hoffmann Sampaio, & Wotruba, 2012; Galvin, Pratten, Lambert, Callen, & Lui, 2002; Lopamudra et al., 2012; Mishra & Mehrotra, 2001; Mukherjee et al., 2006; Viduka et al., 2012, 2013a, 2013b; Xia, Peng, & Wolfe, 2007). La aproximación Euleriana-Lagrangiana es una de estas técnicas. En esta aproximación, las partículas sólidas y su comportamiento se modelan usando las ecuaciones de movimiento de Newton. Dependiendo de su aplicación, este método puede dar resultados detallados y muy precisos en un intervalo amplio de condiciones de flujo y mezcla mineral. No obstante, el costo computacional de esta aproximación es muy alto, especialmente cuando se tienen suspensiones muy densas y su aplicación está

limitada principalmente a cálculos en escala de longitud pequeña y a uso investigativo. En la aproximación Lagrangiana la distribución de tamaño de partícula (DTP) se incluye con muy poca codificación y esfuerzo computacional, ya que las propiedades de cada una de las partículas, tales como diámetro y densidad, están bien definidas (Niemi, 2012).

Esta investigación, se centra en el modelamiento y simulación de la hidrodinámica en estado transiente al interior de la cámara de separación del jig, que actualmente es la aproximación que se realiza en flujos sólido-líquido. Las simulaciones de flujo tiempo-dependientes son muy demandantes computacionalmente, debido a que se deben usar tiempos de muestreo muy pequeños y mallas computacionales finas para obtener resultados precisos (Kallio et al., 2003). Además, en procesos de concentración gravimétrica a escala industrial el comportamiento promedio del flujo es a menudo una propiedad de interés y para obtener buenos valores promedios, se requieren grandes periodos de simulación transiente. Con flujos convencionales homogéneos (sin partículas sólidas) las simulaciones se pueden desarrollar en estado estacionario usando las ecuaciones de flujo tiempo-promediadas y ecuaciones constitutivas adecuadas. El cálculo en estado estacionario podría acelerar las simulaciones multifase por varios órdenes de magnitud, pero desafortunadamente, las ecuaciones constitutivas de flujos convencionales no se pueden aplicar directamente a suspensiones de partículas. Estas ecuaciones constitutivas aplicables a la simulación del jig se encuentran bajo investigación activa y permanente (Ferreira Feil et al., 2012; Lopamudra et al., 2012; Viduka et al., 2012, 2013a, 2013b).

1.4.1 Aproximación Euleriana-Lagrangiana

En esta aproximación la fase líquida se modela mediante las ecuaciones de Navier-Stokes, pero la fase sólida se modela usando una gran cantidad de partículas individuales que obedecen las ecuaciones de movimiento de Newton. Existen muchos métodos, cada uno de ellos con diferente grado de complejidad, que se pueden describir como Eulerianos – Lagrangianos. La principal diferencia entre ellos radica en la manera en que se modelan las colisiones partícula-partícula y las interacciones entre las fases. Además en las diferentes aproximaciones una partícula numérica puede actuar como una partícula física individual o una colección representativa de muchas partículas (Niemi, 2012; Versteeg & Malalasekera, 2007).

La aproximación Euleriana-Lagrangiana se aplica de manera adecuada en situaciones donde la suspensión es diluida o concentrada y las partículas tienen un efecto despreciable sobre el campo de flujo. En estos casos, se pueden resolver separadamente las ecuaciones de Navier-Stokes para la fase líquida y con base a esa solución se puede determinar las trayectorias de las partículas. La aproximación más simple es usar el mismo campo de velocidad para las partículas, de manera que ellas siguen el flujo del medio continuo. En una aproximación un poco más sofisticada podrían usarse campos de velocidad separados para las dos fases, asumiendo acoplamiento de una vía, esto es, las trayectorias de las partículas se ven afectadas por los efectos de la fuerza de arrastre y la turbulencia, pero la fase líquida no se ve afectada por la presencia de las partículas. Estos modelos son rápidos de calcular y adecuados en el modelamiento de dispersión de partículas pequeñas (Mukherjee & Mishra, 2007; Niemi, 2012). En el caso de suspensiones como en el jig, las partículas ocupan una parte considerable del volumen total y no se pueden despreciar tan fácilmente la interacción sólido - líquido. Una suposición fundamental de este tipo de modelamiento se basa en que la fase sólida puede tener una fracción volumétrica relativamente alta. Las trayectorias de las partículas se calculan individualmente en intervalos especificados durante el cálculo del movimiento del fluido. Esto hace al modelo adecuado para simular equipos de concentración gravimétrica como es el caso del jig (Niemi, 2012; Tavares & King, 1995; Versteeg & Malalasekera, 2007).

1.4.2 Hidrodinámica de la fase líquida

El campo de velocidad del agua se calcula a partir de las ecuaciones de conservación en estado transiente, como en el modelo propuesto no existe intercambio de masa o reacción química entre el fluido y las partículas minerales, la ecuación de continuidad de la fase líquida en su forma vectorial se puede formular sin el término de intercambio de la siguiente manera (Concha & Barrientos, 1993):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_l \phi_l) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_l \phi_l \mathbf{u}_l) = 0 \quad (1.6)$$

El balance de momento para el fluido en el flujo multifase se describe en la siguiente formulación general (Concha & Barrientos, 1993):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 \phi_1 \mathbf{u}_1) + \nabla \cdot (\rho_1 \phi_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1) = -\nabla P + \nabla \cdot \phi_1 \mathbf{T} + \rho_1 \phi_1 \mathbf{g} + \mathbf{F}_w \quad (1.7)$$

donde P , \mathbf{T} , ϕ_l son la presión, el tensor de esfuerzos viscosos del fluido y la fracción volumétrica del fluido respectivamente, ρ_l la densidad del fluido, \mathbf{u}_l el vector del campo de velocidad del fluido, \mathbf{F}_w el termino de intercambio de momentum entre el sólido y el líquido y \mathbf{g} el vector de aceleración de la gravedad

Se asume que el tensor de esfuerzo sigue una relación de esfuerzo-deformación Newtoniana (Concha & Barrientos, 1993):

$$\mathbf{T} = \phi_1 \mu_l (\nabla \mathbf{u}_1 + \nabla \mathbf{u}_1^T) + \phi_1 (\lambda_l - \frac{2}{3} \mu_l) (\nabla \cdot \mathbf{u}_1) \mathbf{I} \quad (1.8)$$

donde μ_l y λ_l son las viscosidades de cizalladura y global respectivamente e \mathbf{I} el tensor identidad.

1.4.3 Ecuación de movimiento de partículas

La trayectoria de cada una de las partículas sólidas se calcula mediante integración del balance de fuerzas, el cual se escribe en un marco de referencia Lagrangiano. A partir de la segunda ley de movimiento de Newton, este balance de fuerzas puede escribirse como:

$$m_{pi} \frac{d\mathbf{u}_{pi}}{dt} = \sum \mathbf{F}_i \quad (1.9)$$

$$m_{pi} \frac{d\mathbf{u}_{pi}}{dt} = \mathbf{F}_{bi} + \mathbf{F}_{Di} + \mathbf{F}_{MVi} + \mathbf{F}_{Bi} + \mathbf{F}_{Vpi} + \dots \quad (1.10)$$

donde m_{pi} es la masa de cada partícula, \mathbf{u}_{pi} es la velocidad de la partícula i , \mathbf{F}_i son las diferentes fuerzas hidrodinámicas involucradas. \mathbf{F}_{bi} es la fuerza de empuje ocasionada por la gravedad, la masa de líquido alrededor de una partícula y la masa de la partícula, \mathbf{F}_{Di} es la fuerza de arrastre que ejerce el fluido sobre la partícula i , \mathbf{F}_{MVi} es la masa adherida a la partícula ocasionada por la aceleración relativa del líquido y la partícula, \mathbf{F}_{Bi} es la fuerza de historia debida a la inercia de la partícula y \mathbf{F}_{Vpi} es la presión del líquido ejercida sobre una partícula asociada a la aceleración del líquido. De esta manera cada una de las fuerzas se puede representar por (Basset, 1888; Kunii & Levenspiel, 1991; Lamb, 1945):

$$\mathbf{F}_{b i} = V_{pi}(\rho_{pi} - \rho_f)\mathbf{g} \quad (1.11)$$

$$\mathbf{F}_{D i} = \frac{\pi}{8} C_{Di} \rho_l d_{pi}^2 |\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_{pi}| (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_{pi}) \quad (1.12)$$

$$\mathbf{F}_{MV i} = \frac{1}{2} \rho_l V_{pi} \left(\frac{D\mathbf{u}_l}{Dt} - \frac{d\mathbf{u}_{pi}}{dt} \right) \quad (1.13)$$

$$\mathbf{F}_{B i} = \frac{3}{2} d_{pi}^2 \sqrt{\pi \mu_l \rho_l} \int_0^t \frac{\frac{D\mathbf{u}_l}{Dt} - \frac{d\mathbf{u}_{pi}}{dt}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad (1.14)$$

$$\mathbf{F}_{Vp} = \rho_l V_{pi} \frac{D\mathbf{u}_l}{Dt} \quad (1.15)$$

En las ecuaciones anteriores \mathbf{u}_l , ρ_f , μ_f son, la velocidad, la densidad y la viscosidad del líquido, respectivamente, ρ_{pi} , d_{pi} y V_{pi} son la densidad, el diámetro y el volumen de una partícula sólida i , respectivamente, \mathbf{g} es el vector de aceleración de la gravedad y C_{di} es el coeficiente de arrastre definido para cada partícula.

La ecuación (1.10) incorpora fuerzas hidrodinámicas adicionales en el balance de fuerzas que pueden ser importantes bajo circunstancias especiales. La primera de ellas es la fuerza de “masa virtual”, que se define como la fuerza requerida para acelerar el fluido alrededor de la partícula. Otra fuerza que puede ser significativa es la fuerza debida al gradiente de presión en el fluido, relacionada a la aceleración del fluido y la fuerza de historia de Basset que describe la fuerza ocasionada por el retraso en el desarrollo de la capa límite con la aceleración relativa de una partícula moviéndose a través de un fluido acelerado (Basset, 1888). La fuerza de Basset es difícil de implementar y comúnmente se desprecia por razones prácticas; sin embargo, esta fuerza es sustancialmente grande cuando la partícula se acelera a una velocidad alta, por ejemplo en lechos pulsados donde continuamente ocurren cambios de velocidad del fluido ocasionando que las partículas se aceleren modificando su trayectoria (Krecic, 1995).

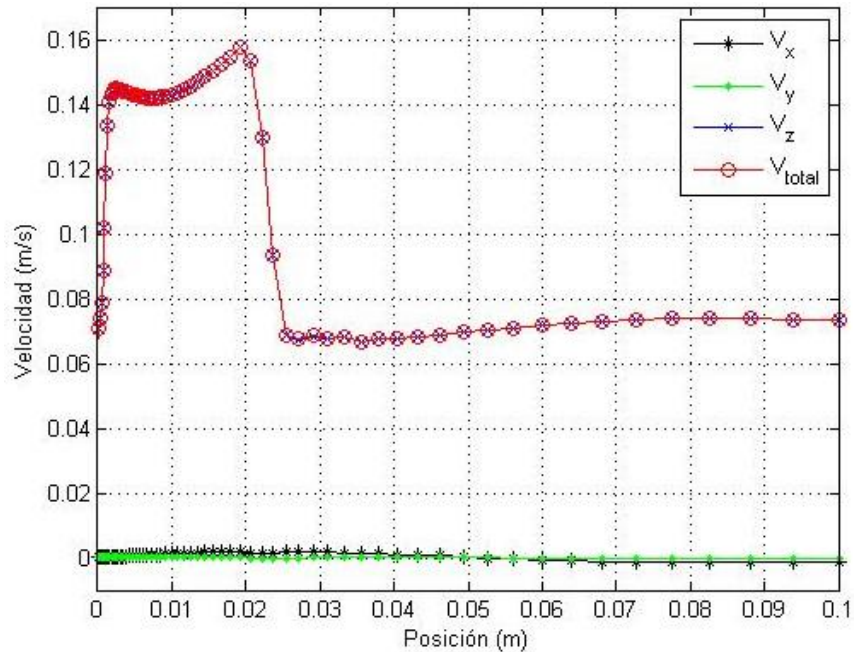
En la ecuación (1.10) se describen las fuerzas hidrodinámicas que se aplican comúnmente sobre una esfera dejando al lector interesado referirse a (Crowe, Sommerfeld, & Tsuji, 1998) donde se da una descripción completa del balance de fuerzas sobre una partícula. El modelo Euleriano–Lagrangiano es la aproximación teórica menos simplificada en flujos multifase, limitado solamente por el tipo de modelo de turbulencia aplicado y por la descripción de las fuerzas aplicadas (Versteeg &

Malalasekera, 2007; Yeoh & Tu, 2009; Yu, Zhou, Wang, & Cai, 2005). En teoría es posible obtener la trayectoria de objetos de forma irregular de cualquier tipo de material con tamaños y densidades bastante diferentes que fluyen en cualquier tipo de geometría y dominio computacional, entre otras por ejemplo estudio de coalescencia y fractura.

1.4.4 Turbulencia

Aun con los computadores de hoy en día, en la mayoría de cálculos de flujo, las escalas de flujo turbulento no se pueden resolver completamente y debe usarse alguna forma de modelar la turbulencia en las simulaciones. En la actualidad los fenómenos de turbulencia siguen aún estudiándose, y para flujos de una sola fase existen varios modelos de turbulencia relativamente aceptables. Desafortunadamente, para los flujos sólido-líquido no existen modelos de turbulencia válidos y el fenómeno de turbulencia en flujos multifase son inclusive menos entendidos que en el caso de una fase individual. Existen algunos modelos disponibles, pero en su mayoría son para flujos diluidos y su validez es cuestionada. Por lo general estos modelos se derivan a partir de los modelos de fase individual, como por ejemplo a partir del modelo $k-\epsilon$. (Versteeg & Malalasekera, 2007)

El modelamiento de la turbulencia en flujos sólido-líquido es complicado, ya que las fluctuaciones de la velocidad de la fase líquida y sólida están relacionadas fuertemente. Inclusive una cantidad relativamente pequeña de partículas comienza a afectar el comportamiento turbulento de la fase líquida y en regiones densas las fluctuaciones de la turbulencia son muy diferentes de las que aparecen en los flujos de una sola fase. El modelamiento correcto de la turbulencia requiere un buen conocimiento de las interacciones sólido-sólido y sólido-líquido en las regiones densas, pero desafortunadamente dichas interacciones no son fáciles de medir experimentalmente. Otra cosa que complica la situación es el hecho de que en los jigs las fluctuaciones turbulentas en las regiones diluidas son muy anisotrópicas, en donde las oscilaciones de la velocidad son sustancialmente más grandes en la dirección vertical que en las direcciones laterales (ver Figura 1-8) (Yu et al., 2005). Esto causa inconvenientes con modelos de turbulencia simple donde se asume que la turbulencia es isotrópica.

Figura 1-8: Perfiles de velocidad a lo largo de la altura del jig.

Pese a las limitaciones y complejidades con la turbulencia en flujos sólido-líquido, se están investigando en la literatura nuevos modelos de turbulencia. Por ejemplo existe una secuencia de modelos mejorados por (Yu et al., 2005; Zeng & Zhou, 2006; Zhou, 2011), los cuales son similares al modelo de esfuerzos de Reynolds aplicado a un fluido individual. Desafortunadamente, esos modelos tienden a ser demasiado complicados y requieren muchas constantes que se deben determinar empíricamente. Por esta razón, en la práctica los jigs son aun simulados usando algún modelo simple de turbulencia para las turbulencias a escala local (Ferreira Feil et al., 2012; Lopamudra et al., 2012; Viduka et al., 2012, 2013a, 2013b; Xia et al., 2007; Xia & Peng, 2007). Aunque los modelos no son muy precisos, en las regiones diluidas, los resultados son de alguna manera más reales utilizando estos modelos que cuando no se toman en cuenta y muchas veces los modelos de turbulencia ayudan de alguna manera a que los cálculos sean más estables, además los términos en la ecuación de movimiento, tales como el arrastre y el empuje,

son de varios ordenes de magnitud mayor y los errores en el modelo de turbulencia no son tan significativos sobre la trayectoria de las partículas.

1.4.5 Modelamiento promediado en el tiempo

Como se mencionó al inicio de este capítulo, las simulaciones en jigs se suelen realizar en régimen transitorio (Xia et al., 2007; Xia & Peng, 2007), lo que genera problemas de desempeño cuando se requiere calcular los campos de flujo medios para geometrías industriales considerablemente grandes. El cálculo de los campos de velocidad en flujos sólido-líquido sería mucho más rápido si las simulaciones se realizaran en estado estacionario utilizando modelos constitutivos adecuados como se hace habitualmente con flujos de una sola fase líquida (Yeoh & Tu, 2009; Zeng & Zhou, 2006; Zhou, 2011). De la misma manera que en flujos simples, las ecuaciones de flujo sólido-líquido promediadas en el tiempo se pueden derivar usando el procedimiento de promedio de Reynolds transiente (URANS). El método URANS es una aproximación muy conocida y se ha presentado en detalle en muchos textos de CFD (Ferziger & Peric, 2002; Versteeg & Malalasekera, 2007). En el método URANS las variables de flujo instantáneas (φ) como la presión y la velocidad se dividen en una parte estable y una parte fluctuante:

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varphi' \quad (1.16)$$

donde $\bar{\varphi}$ representa el valor promedio y φ' es la parte fluctuante.

Las ecuaciones URANS para una fase individual se obtienen tomando el promedio de Reynolds sobre la ecuación de momentum. Después de realizar simplificaciones, las ecuaciones resultantes son muy similares a las ecuaciones de Navier-Stokes, pero con un término adicional de esfuerzos, conocido como esfuerzos de Reynolds, el cual se modela implementando un modelo de turbulencia adecuado (Zeng & Zhou, 2006; Zhou, 2011).

Cuando se trata con flujos multifase, es de gran utilidad considerar el promedio de masa ponderada, el cual se conoce como promedio de Favre (Sobral, Oliveira, & Cunha, 2007). Similar a la descomposición de Reynolds, las variables locales pueden dividirse en dos partes:

$$\varphi = \langle \varphi \rangle + \langle \varphi'' \rangle \quad (1.17)$$

Donde el promedio de Favre se define como (densidad constante, pero fracción volumétrica variable):

$$\langle \varphi \rangle = \frac{\overline{\alpha_q \varphi}}{\overline{\alpha_q}} \quad (1.18)$$

Para la parte fluctuante el promedio se hace cero

$$\langle \varphi'' \rangle = 0 \quad (1.19)$$

Luego las ecuaciones de flujo del fluido (ecuaciones (1.6) y (1.7)) se pueden escribir en forma de componentes como:

$$\frac{\partial \phi_1 \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1 \rho_1 u_{1,i}}{\partial x_i} = 0 \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial \phi_1 \rho_1 u_{1,i}}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1 \rho_1 u_{1,i} u_{1,j}}{\partial x_j} = -\phi_1 \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi_1 \tau_{1,ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi_1 \tau_{1,ij}^M}{\partial x_i} + \phi_1 \rho_1 g_i \quad (1.21)$$

Las ecuaciones (1.20) y (1.21) son iguales a las ecuaciones (1.6) y (1.7), pero se escribieron de forma más compacta en notación indicial y los esfuerzos turbulentos τ^M ya están incluidos en las ecuaciones.

Cuando el promedio de Favre se aplica sobre las velocidades y el promedio en el tiempo sobre la presión y la fracción volumétrica, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \overline{\phi_1 \rho_1}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\phi_1 \rho_1 U_{1,i}}}{\partial x_i} = 0 \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial \overline{\phi_1 \rho_1 U_{1,i}}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\phi_1 \rho_1 U_{1,i} U_{1,j}}}{\partial x_j} = -\overline{\phi_1} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - \overline{\phi_1'} \frac{\partial \overline{p'}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\phi_1 \tau_{1,ij}}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\phi_1 \tau_{1,ij}^M}}{\partial x_j} + \overline{\phi_1} \rho_1 g_i - \frac{\partial \overline{\rho_1 u_{1,i}'' u_{1,i}''}}{\partial x_i} \quad (1.23)$$

donde $U_{1,i} \equiv \langle u_{1,i} \rangle$.

De las ecuaciones promediadas (ecuación (1.23)) se aprecia que han aparecido dos nuevos términos ocasionados por el método de promedios y se tendrá que utilizar para la mayoría de ellos relaciones constitutivas adecuadas. Es claro que la aproximación es relativamente nueva y se requiere de una validación posterior para que pueda representar una ventaja en la modelación de jigs.

2. Planteamiento del Problema

El procesamiento de minerales es el área de la metalurgia que se dedica a la extracción y preparación del mineral para la obtención del metal valioso (Fuerstenau & Kenneth, 2003). Esta área consta de tres operaciones fundamentales: la liberación o desprendimiento de los minerales valiosos de los minerales de desecho (trititación y molienda), la clasificación por tamaño y la separación de esos minerales valiosos de los minerales de ganga (concentración de minerales) (Schilitt & Kenyen, 1992).

La concentración de minerales es la operación que emplea la diferencia de propiedades físicas o volumétricas de las sustancias minerales para elevar el tenor o concentración (en porcentaje) de una mena, mediante el uso de equipos de separación sólido-sólido produciendo la segregación de dos o más especies y generando una corriente enriquecida en el mineral de interés (Wills, 1997). Uno de los métodos de concentración que se caracteriza por ser altamente dependiente del tamaño de partícula y la diferencia de densidades entre los sólidos (velocidades de sedimentación) es la concentración gravimétrica (Burt, 1984).

La concentración gravimétrica se usa para tratar una gran variedad de minerales (Bustamante et al., 2008), que varían desde los sulfuros pesados como la galena (densidad relativa 7,5) hasta el carbón (densidad relativa 1,3), en algunos casos con tamaños de partículas por debajo de 50 μm . Este tipo de proceso perdió importancia en la primera mitad del siglo XX debido al desarrollo del proceso de flotación espumante (Beniuk & Vadeikis, 1994), pero en las últimas dos décadas muchas compañías han estado evaluando los sistemas de concentración gravimétrica debido al alto costo de los reactivos de flotación, la simplicidad relativa de los procesos gravimétricos y la baja contaminación ambiental (Rong & Lyman, 1993a, 1993b; Vince, Purdon, Gibson, & Hughes, 2007).

2.1 El Problema

La técnica de fluidización es ampliamente usada en la industria debido a sus diferentes aplicaciones (Coimbra & Rangel, 1998; Crowe et al., 1998; Di Felice, 1994, 1995; Ergun, 1952; Geldart, 1973; Kallio et al., 2003; Kleinstreuer, 2003; Kunii & Levenspiel, 1991). Principalmente ha sido empleada como un proceso de mezclado en la industria química, donde se busca mejorar las reacciones, combustión y las tasas de transferencia de calor de varias especies de partículas (Niemi, 2012). En la industria minera, esta técnica se utiliza para la separación y concentración de partículas minerales que poseen diferentes propiedades físicas (Burt, 1999; K. J. Dong et al., 2010; Ferreira Feil et al., 2012; Li et al., 2013). El jig es un ejemplo de los dispositivos comúnmente empleados para la concentración y separación de minerales aprovechando técnicas de fluidización mediante corrientes pulsadas. En las últimas dos décadas (K. J. Dong et al., 2010; Ferreira Feil et al., 2012; Galvin et al., 2002; Lopamudra et al., 2012; Mishra & Mehrotra, 2001; Mukherjee et al., 2006; Mukherjee & Mishra, 2007; Srinivasan, Mishra, & Mehrotra, 1999; Steiner, 1996; Viduka et al., 2013a, 2013b, 2012; Xia et al., 2007), ha crecido el interés en investigar el comportamiento de fluidización de las partículas en gran detalle para mejorar la eficiencia de separación y poder entender su posterior concentración.

La separación de especies de partículas con respecto a su gravedad específica a través de una altura del lecho del jig en procesos de concentración gravimétrica es el resultado de la estratificación de un sistema particulado bajo la influencia de las fuerzas de gravedad e hidrodinámicas, bajo un escenario conformado por diferentes parámetros operacionales que afectan el proceso de estratificación al interior de la cámara de separación en un jig, entre los que se incluyen la amplitud y frecuencia de pulsación, el espesor del lecho, la tasa de agua de "hutch", el flujo y las características del alimento (Mukherjee et al., 2006; Oshitani et al., 2013).

En décadas pasadas se realizaron un número considerable de investigaciones enfocadas en formular modelos matemáticos sencillos y aplicables industrialmente del jig (Gaudin, 1939; Jinnouchi & Kawashima, 1979; Jinnouchi et al., 1984; Mayer, 1964; Tavares & King, 1995; Vetter, Brouckaert, & Wright, 1987), correlacionando las variables más importantes del proceso de concentración gravimétrica. Estos estudios se basan esencialmente en teorías de separación mediante corrientes pulsadas o conceptos

físicos que se han propuesto a lo largo de la historia por diferentes investigadores. De forma muy general estos estudios pueden clasificarse como:

- Teoría clásica basada en el comportamiento de una partícula individual (Gaudin, 1939).
- Teoría de mínima energía potencial (Mayer, 1964; Tavares & King, 1995).
- Teoría de dispersión de suspensiones de partículas (Vetter et al., 1987).
- Teoría de disipación de energía (Jinnouchi & Kawashima, 1979; Jinnouchi et al., 1984; Rong & Lyman, 1993a, 1993b).
- Análisis estadístico (Vinogradav et al., 1968).
- Análisis empírico (Karantzavelos & Frangicos, 1984; Rong & Lyman, 1991a, 1991b).

Lyman (Lyman, 1992) entrega una descripción muy amplia de las teorías anteriormente mencionadas, y a partir de un análisis de variación de parámetros operacionales (Amplitud y frecuencia de pulsación, tasa de alimento de mineral y flujo de agua de “hutch”) de los diferentes tipos de jig (mecánicos e hidráulicos) es evidente que las teorías existentes solamente proporcionan una explicación cualitativa del proceso de estratificación, lo cual no es muy relevante desde el punto de vista de diseño y operación del equipo. Por lo anterior, un modelo que describa el movimiento de cada partícula individual y que detalle el comportamiento global del conjunto de partículas dispersas en flujo pulsante, conducirá a una mejor representación que permita una descripción cuantitativa de los sub-procesos involucrados en el proceso de concentración gravimétrica tales como: segregación, estratificación, porosidad dinámica, recuperación y razón de enriquecimiento.

El estado actual del modelamiento fenomenológico en jigs (Li et al., 2013; Oshitani et al., 2013; Viduka et al., 2013a) presenta deficiencias en cuanto a poder predecir el movimiento de las partículas en el interior del equipo debido a que este tipo de operación unitaria es confinada. Los modelos actualmente existentes describen la dinámica de las partículas mediante métodos de elementos discretos y el fluido que es tratado como un

medio continuo (K. J. Dong et al., 2010; Kuang, Chu, Yu, Zou, & Feng, 2008; Viduka et al., 2012, 2013a, 2013b). La solución a estos modelos se logra con ayuda de nuevas técnicas computacionales, y la más reciente es la dinámica de fluidos computacional (Versteeg & Malalasekera, 2007; Yeoh & Tu, 2009). En estas aproximaciones se asume que el fluido está en estado estacionario y que no es afectado por las pulsaciones generadas. Estas aproximaciones no toman en cuenta las líneas de corriente de las partículas, sólo asumen que la eficiencia del jig se ve afectada por ellas, sin embargo no estudian su trayectoria, para mejorar el desempeño del equipo.

El problema surge entonces por la necesidad de modelar el movimiento de las partículas en el interior del jig, debido a los escasos modelos fenomenológicos que expliquen de forma clara el fenómeno de interacción sólido-líquido para un mejor entendimiento de la concentración en el jig.

2.2 Hipótesis

Se puede desarrollar a partir de la teoría de interacción sólido-líquido un modelo semifísico de base fenomenológica (MSBF) de trayectorias de partículas dispersas en un fluido Newtoniano en la cámara de separación de un Jig. Si se modelan las trayectorias de las partículas en un escenario tan altamente dinámico, como lo es el interior de la cámara de separación del Jig, se puede explicar y predecir la estratificación de las partículas y las características de los subsistemas particulados de salida, contribuyendo al mejor entendimiento del desempeño de este equipo con fines metalúrgicos. Como el uso del modelo será descriptivo y predictivo se toma como nivel de detalle la escala microscópica, que conduce a un modelo de parámetros distribuidos.

2.3 Importancia del problema

Existe especial interés en la industria minera nacional en estudiar la estratificación de partículas al interior de la cámara de separación del jig para controlar y poder entender mejor el proceso de concentración en jigs. El análisis de la concentración de partículas requiere de un modelo microscópico donde la descripción del comportamiento de las partículas es de suma importancia.

Modelando las trayectorias de las partículas en un escenario tan altamente dinámico, como lo es el interior de la cámara de separación del jig, se puede predecir la

estratificación de las partículas y las características de los subsistemas particulados de salida, contribuyendo al mejor entendimiento del desempeño de este equipo con fines metalúrgicos.

Se podrá estudiar el efecto de la separación en el Jig asociado a las principales variables de operación por medio de estudios experimentales y numéricos donde se analiza el campo de velocidad y la distribución de las partículas. Estos resultados serían útiles para explicar las principales características del flujo y el movimiento de las partículas.

La naturaleza dinámica del proceso se ve influenciado principalmente por la interacción partícula-fluido, por lo tanto si se investiga el comportamiento del flujo de partículas en el interior del Jig, se obtendría información acerca del mecanismo de clasificación en este tipo de operación unitaria.

2.4 Delimitación del problema

Se pretende modelar la dinámica de las partículas minerales que se separan en un Jig, cuando este trabaja con suspensiones minerales de diferentes densidades, de manera que, se evalúa el impacto de la estratificación y la trayectoria de las partículas sobre el funcionamiento del equipo como concentrador gravitacional. Para cumplir con este objetivo se hará una modelación fenomenológica con herramientas de la mecánica del medio continuo basadas en los principios físicos que rigen la concentración de minerales en jigs.

El modelo semifísico de base fenomenológica (MSBF) que se elaborara para el Jig pretende responder la siguiente pregunta: ¿Cómo es el movimiento de las partículas al interior del Jig, ante cambios en las variables externas (frecuencia y amplitud del caudal de agua y caudal de alimentación de sólidos minerales)?. Se pretende seguir los cambios en los estados internos del proceso. Como se trata de un sistema con fuertes interacciones hidrodinámicas, debido a las fuerzas que involucran las velocidades y aceleraciones relativas entre el fluido y las partículas (arrastre, empuje, gradiente de presión, Basset y masa virtual), la posición y la velocidad de las partículas serían los estados o variables internas de interés.

2.5 Objetivos de la Tesis

2.5.1 Objetivo general

El alcance de esta tesis es modelar la interacción hidrodinámica de las partículas que se encuentran al interior del lecho del jig para establecer el efecto que puede tener el movimiento de las partículas sobre el funcionamiento del equipo en la concentración de minerales pesados.

2.5.2 Objetivos específicos

- Obtener la trayectoria de las partículas en la cámara de separación del jig cuando se opera como concentrador, variando parámetros operacionales.
- Calcular las fuerzas relevantes que actúan sobre las partículas y mostrar como ellas se ven influenciadas por el tamaño y la densidad de las partículas.
- Establecer el efecto de los parámetros de funcionamiento sobre la estratificación y trayectoria de las partículas, que evalúan la eficiencia del jig como equipo concentrador.

3. Trabajo Teórico y Experimental

3.1 Metodología para la obtención del MSBF aplicada al jig

El modelamiento matemático es una herramienta muy poderosa que poseen los ingenieros a la hora de conceptualizar un proceso, ya que permiten convertir un problema real en un problema matemático, y de esta manera interpretarlo y resolverlo. Desafortunadamente, la falta de conocimiento sobre todos los fenómenos que ocurren en un proceso es una condición frecuente en la práctica industrial. Tal situación ocurre por la baja disponibilidad de estudios fenomenológicos y por algunas dificultades para modelar, heredadas de experiencias anteriores (Alvarez, Lamanna, Vega, & Revollar, 2009): la potencia computacional insuficiente indujo la falsa apreciación de que los modelos de base fenomenológica son complejos. La solución de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales ha sido una de las mayores dificultades que se ha enfrentado. Tal situación se ha reflejado directamente en la baja disponibilidad de modelos precisos, lo que ha causado por ejemplo problemas de diseño en procesos industriales que deben variar su punto de operación (Alvarez et al., 2009; Hangos & Cameron, 2001). Actualmente es posible superar tales dificultades y usar modelos de base fenomenológica para predecir y describir el comportamiento del proceso, explotando las capacidades del modelo para adquirir conocimiento sobre los fenómenos del proceso, a medida que se trabaja con el proceso mismo (Biegler, Grossman, & Westerberg, 1997; Puigjaner, Ollero, de Prada, & Jimenez, 2006; Seider, Seader, & Lewin, 2003).

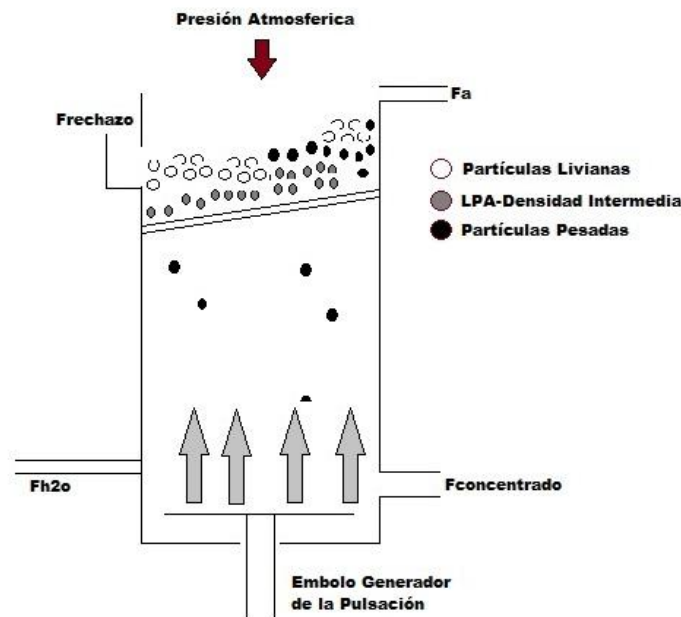
En esta sección se presentan los MSBF de parámetros distribuidos (Hangos & Cameron, 2001) como herramienta útil en el diseño, control y optimización de procesos de concentración gravimétrica. Se realiza una descripción detallada de un método para la obtención de MSBF a partir del conocimiento y principios básicos del proceso de concentración: balances de materia y cantidad de movimiento, así como la obtención de las ecuaciones constitutivas. Se aplica el procedimiento descrito al jig. En particular se

modela el jig a escala piloto perteneciente al instituto de minerales CIMEX. El modelo se contrasta con el comportamiento del jig real a través de simulación.

3.1.1 Descripción verbal del proceso

Se pretende la separación de minerales de alta densidad de los minerales de baja densidad en un equipo de concentración gravimétrica tipo Jig (ver Figura 3-1), de acuerdo a una estratificación de las partículas presentes en una corriente de alimento (F_a) cuya carga de sólidos es inferior al 10% en volumen.

Figura 3-1: Diagrama del jig (Bustamante et al., 2008).



La estratificación se produce por la transmisión de energía mecánica la cual es generada por el movimiento de un pistón que ejerce presión sobre el agua (F_{h_2o}) en la cámara de separación interna del Jig de manera anarmónica, generando un movimiento en pulsos (ascenso y descenso) del sistema particulado que ingresa a la cámara de separación del Jig, de modo que se obtiene una estratificación del lecho que forman las partículas, la cual es usada posteriormente para producir la separación de los minerales.

La cámara de separación del Jig está abierta a la atmósfera, en su interior se encuentra una criba donde se deposita un lecho de partículas que poseen una densidad intermedia respecto a los minerales que se pretenden separar (lecho poroso artificial (LPA)). El LPA

posee una altura inicial H_0 (lecho empacado) que asciende hasta una altura H_{max} , (lecho totalmente fluidizado) de acuerdo al movimiento de ascenso y descenso de F_{h2o} .

La corriente F_{h2o} contiene agua a una tasa de flujo mayor o igual a la velocidad mínima de fluidización de las partículas que se pretenden separar. El movimiento anarmónico de F_{h2o} genera una interacción hidrodinámica entre las dos fases presentes en el proceso (interacción sólido-líquido). Dicha interacción altera el movimiento de las partículas minerales presentes en la cámara de separación del Jig.

El movimiento de ascenso del agua y las partículas minerales se denomina etapa de fluidización. En esta etapa las partículas minerales ascienden desde una altura H_0 hasta una altura H_{max} iniciándose la estratificación de las partículas. En el inicio de la estratificación las partículas minerales que presentan mayor densidad tienden a depositarse en la parte inferior del lecho, mientras que las partículas con menor densidad se ubican en la parte superior del lecho. Cuando se inicia la etapa de descenso, las partículas más densas poseen una velocidad de sedimentación mayor que las partículas menos densas, esto permite que antes de la compactación del lecho, las partículas minerales más pesadas se depositen rápidamente por debajo de la criba, obteniéndose después de varios ciclos de pulsación, una separación completa de las partículas minerales en dos corrientes $F_{rechazo}$ y $F_{concentrado}$. EL proceso se lleva a cabo bajo condiciones de temperatura ambiente y no hay presencia de reacción química. El jig del que se tomaron datos reales para validar el modelo, tiene las condiciones reportadas en la Tabla 3-1.

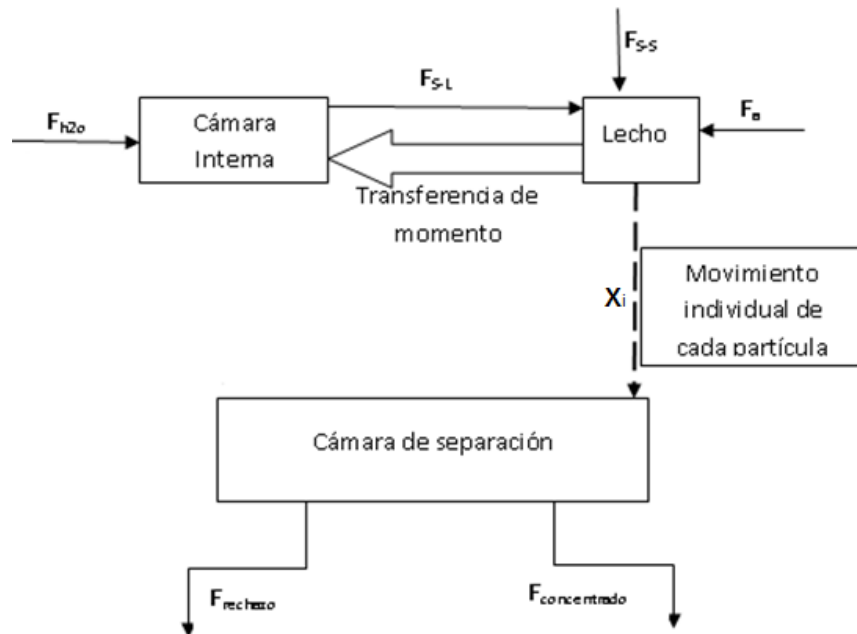
Tabla 3-1: Características del jig a escala de laboratorio.

CARACTERÍSTICAS	VALOR
Flujo de Alimentación de Mineral (F_a)	100 gr/min
Flujo de agua de Huchth (F_{h2o})	1.5 gal/min
Altura del LPA	0.025 m
Diámetro de las partículas del LPA	0.003 m
Amplitud de pulsación	0.005 m
Frecuencia de pulsación	5 Hz
Volumen de la cámara de separación del jig ($l_x a_x h$)	0.05x0.03x0.1 m ³

3.1.2 Definición de sistema de procesos (SdeP) sobre el jig

Aunque el Jig está compuesto solamente por un tanque abierto a la atmósfera, en él se pueden distinguir tres sub-procesos: el primer sub-proceso está ocupado por el agua, donde se genera el ciclo de pulsación (cámara interna del Jig), el segundo sub-proceso está ocupado por el material que se pretende separar (lecho del Jig) y el tercer sub-proceso es la cámara donde ocurre la separación. Se pueden nombrar sistema de proceso I (SP_I) a la región “Cámara interna” compuesta por agua; sistema de proceso II (SP_{II}) a la región “lecho” que está compuesta por una mezcla de material sólido y agua y sistema de proceso III (SP_{III}) a la región “cámara de separación” que representa la separación de los minerales de interés y donde se generan las dos corrientes de salida del Jig. En la Figura 3-2 se presenta el diagrama de bloques que representa los tres sistemas de procesos y sus interacciones.

Figura 3-2: Diagrama de bloques del SdeP sobre el jig.



Como se observa en la Figura 3-2, la interacción entre SP_I y SP_{II} se da a través de la interacción de las fuerzas hidrodinámicas y un intercambio de momento. La primera interacción se da por medio de la fuerza F_{S-L} (arrastre, empuje, gradiente de presión, masa virtual y Basset) que causa el movimiento de las partículas sólidas. La segunda interacción se da a través del intercambio de momento entre las fuerzas resultantes de todas las interacciones sólido-líquido (F_w) (flecha gruesa). La relación de SP_{II} con SP_{III} se

da en la cámara de separación donde las partículas minerales se dividen en dos corrientes, $F_{rechazo}$ corriente que contiene las partículas minerales de baja densidad y $F_{concentrado}$ corriente que contiene las partículas minerales de alta densidad.

3.1.3 Aplicación del principio de conservación sobre cada uno de los SdeP

Por lo general en los procesos minero-metalúrgicos, las ecuaciones de conservación están fundamentadas en los balances de masa y energía. Mediante balances de materia y cantidad de movimiento, se pueden obtener y relacionar las variables más significativas del proceso de concentración gravimétrica en jigs, llamadas estados en el sentido dado en Kalman, 1960. (Kalman, 1960). La universalidad del principio de conservación le da a la estructura del MSBF un fundamento fenomenológico fuerte, además de dotarlo de características muy interesantes (Alonso & Ydstie, 1996; Fradkov, Miroshnik, & Nikiforov, 1999). Por el objetivo que se tiene para el modelo, el SdeP de interés es el mineral contenido en el lecho (SdeP_{II}). Por lo tanto el principio de conservación solo se aplicará a este SdeP y no a los SdeP_I y al SdeP_{III} que representan fases individuales.

Teniendo en cuenta la clasificación de las corrientes de la Figura 3-2, puestas como subíndices en las ecuaciones, es posible realizar un balance de masa, primero global y luego por componentes sobre el jig y considerando que el volumen de control en todo momento en el jig es constante se tiene:

$$\frac{dM_{mineral}}{dt} = \rho_a F_a + \rho_l F_{h_2o} - \rho_{rechazo} F_{rechazo} - \rho_{concentrado} F_{concentrado} \quad (3.1)$$

$$\frac{dX_i}{dt} = \frac{1}{V_T} (X_{ia} F_a - X_{i-rechazo} F_{rechazo} - X_{i-concentrado} F_{concentrado})$$

(3.2)

De las ecuaciones (3.1) y (3.2),

$$\rho_a F_a + \rho_l F_{h_2o} = \rho_{rechazo} F_{rechazo} + \rho_{concentrado} F_{concentrado} \quad (3.3)$$

$$X_{ia} F_a = X_{i-rechazo} F_{rechazo} + X_{i-concentrado} F_{concentrado} \quad (3.4)$$

Como se mencionó en el capítulo 2, el modelo del jig es de parámetros distribuidos el cual puede derivarse considerando balances microscópicos de conservación aplicados a

un punto particular en el jig. A continuación se muestra el resultado de aplicar el principio de conservación de la masa y cantidad de movimiento en el jig:

- Conservación de la masa para el agua en su forma vectorial:

El agua es tratada como una fase continua que se mueve a través de la cámara del jig y se modela de tal forma que la fracción volumétrica del agua modifica las ecuaciones de estándar de Navier-Stokes. Así las ecuaciones que gobiernan el movimiento del agua son la ecuación de continuidad y momentum, en términos de las variables medias locales sobre una celda computacional y son dadas en su forma vectorial por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 \phi_1) + \nabla \cdot (\rho_1 \phi_1 \mathbf{u}_1) = 0 \quad (3.5)$$

- Conservación de la cantidad de movimiento para el agua en su forma vectorial:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 \phi_1 \mathbf{u}_1) + \nabla \cdot (\rho_1 \phi_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1) = -\nabla P + \nabla \cdot \phi_1 \mathbf{T} + \rho_1 \phi_1 \mathbf{g} + \frac{\sum_{i=1}^{k_c} \mathbf{F}_{wi}}{\Delta V} \quad (3.6)$$

donde P , \mathbf{T} , ϕ_1 y ΔV son, la presión, el tensor de esfuerzos viscosos del fluido, la fracción volumétrica del agua y el volumen de una celda computacional respectivamente. El término de transferencia de momentum \mathbf{F}_{wi} en la ecuación (3.6) relaciona la sumatoria de las fuerzas de interacción entre el agua y las partículas presentes en una celda computacional.

- Conservación del momentum para las partículas en su forma vectorial:

Para las partículas minerales ampliamente distribuidas en tamaño y densidad, la descripción de la trayectoria de las partículas y la interacción entre las partículas y el agua dependen del cálculo correcto de las fuerzas hidrodinámicas involucradas. El cálculo de la trayectoria de las partículas requiere la solución de dos ecuaciones diferenciales ordinarias, una para el cálculo de la posición y otra para el cálculo de la velocidad que en su forma vectorial son:

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{u}_p \quad (3.7)$$

$$m_p \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \sum \mathbf{F}_i \quad (3.8)$$

Las ecuaciones diferenciales parciales (ecuaciones (3.5) y (3.6)) y ordinarias (ecuaciones (3.7) y (3.8)), son las ecuaciones que brindan toda la información sobre la dinámica de interés del equipo de concentración.

Las variables de las ecuaciones dinámicas de balance esenciales (ecuaciones 3.7 y 3.8) son la posición y la velocidad de las partículas (\mathbf{x}_i y \mathbf{u}_i), así como las variables de entrada, que son el flujo de alimento de mineral y el flujo de agua de “*hutch*”. También está la perturbación representada por la amplitud y frecuencia de pulsación del agua a la entrada.

Respecto a los parámetros que se consideran como variables, dependerá de la función que se le dé al modelo diseño, control, etc. Por ahora las variables que resultan evidentes son la caída de presión a través del LPA y las diferentes fuerzas hidrodinámicas involucradas en la ecuación de movimiento de las partículas minerales. Por su parte las constantes son: el volumen de agua contenido en todo momento en la cámara de separación del jig. (V_T), que se asume constante para la operación en estado estacionario, el volumen del lecho poroso artificial y todas las densidades de todas las corrientes, que se asumen varían poco con el cambio en la fracción volumétrica del alimento típico de operación.

El modelo del jig se basa en una descripción matemática Euleriana-Lagrangiana que toma en cuenta la interacción sólido-líquido. En este modelo, el balance de fuerzas sobre una partícula se extiende para calcular el efecto de la variación continua del agua sobre las partículas. El comportamiento del fluido es de carácter no estacionario y altamente turbulento. De esta manera el balance de fuerzas sobre una partícula alimentada al jig en forma vectorial es:

$$m_p \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = (\rho_p - \rho_l)V_p \mathbf{g} - \frac{\pi}{8} \rho_l d_p^2 C_d (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_l) |\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_l| - \frac{1}{2} \rho_l V_p \left(\frac{d\mathbf{u}_p}{dt} - \frac{D\mathbf{u}_l}{Dt} \right) - \rho_l V_p \frac{D\mathbf{u}_l}{Dt} - \dots - \frac{3}{2} \cdot d_p^2 \cdot \sqrt{\pi \cdot \mu_l \cdot \rho_l} \cdot \int_0^t \left(\frac{D\mathbf{u}_l}{Dt} - \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} \right) \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad (3.9)$$

En la ecuación (3.9) las fuerzas involucradas son de izquierda a derecha: la fuerza de empuje, la fuerza de arrastre, la fuerza de masa virtual, la fuerza debida al gradiente de presión y la fuerza de historia de Basset respectivamente.

Cuando la fuerza de arrastre obtenida en la ecuación (3.9) se encuentra en equilibrio con el peso total de la partícula, se obtiene la velocidad terminal u_s de las partículas en régimen de Stokes (Coimbra & Rangel, 1998).

$$u_s = \frac{d_p^2 \Delta \rho g}{18 \mu_l} \quad (3.10)$$

Es importante aclarar que despreciar la parte transiente de la inercia del flujo no implica que el flujo sea estable, esto significa que las fuerzas que actúan sobre el fluido están en equilibrio dinámico y este equilibrio dinámico ocurre en una escala de tiempo mucho más pequeña que el tiempo requerido para que se desarrolle el movimiento de la partícula. Por lo tanto, la estructura instantánea del flujo depende solamente de las condiciones de frontera del problema, en este caso, el flujo y la fuerza que actúa sobre las partículas se dice que están en un estado cuasi-estacionario (Sobral et al., 2007).

Ahora con el objetivo de obtener la versión unidimensional en la dirección vertical de la ecuación (3.9) se adopta el sentido positivo del movimiento hacia abajo. Mediante esta convención, las fuerzas que resisten el movimiento de la partícula son fuerzas negativas. Obtenemos entonces:

$$m_p \frac{du_p}{dt} = (\rho_p - \rho_l) V_p g - \frac{\pi}{8} \rho_l d_p^2 C_d (u_p - u_l) |u_p - u_l| - \frac{1}{2} \rho_l V_p \left(\frac{du_p}{dt} - \frac{Du_l}{Dt} \right) - \rho_l V_p \frac{Du_l}{Dt} - \frac{3}{2} \cdot d_p^2 \cdot \sqrt{\pi \cdot \mu_l \cdot \rho_l} \cdot \int_0^t \left(\frac{Du_l}{Dt} - \frac{du_p}{dt} \right) \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad (3.11)$$

donde u_p y u_l son las velocidades unidireccionales de la partícula y el fluido respectivamente y g es la aceleración de la gravedad.

La ecuación (3.11) puede hacerse adimensional escogiendo la velocidad terminal de Stokes u_s en la ecuación (3.10) y el tiempo de relajación (Zimmels, 1983):

$$\tau_r = \frac{\rho_p d_p^2}{18 \mu_l} \quad (3.12)$$

como las escalas de velocidad y tiempo característicos, respectivamente. Definiendo las variables adimensionales (Sobral et al., 2007; Zimmels, 1983):

$$\hat{u}_p = \frac{u_p}{u_s} \quad (3.13)$$

$$\hat{u}_l = \frac{u_l}{u_s} \quad (3.14)$$

$$\hat{t} = \frac{t}{\tau_r} \quad (3.15)$$

Organizando y agrupando términos la ecuación (3.11) puede escribirse en forma adimensional como:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\chi\right) \frac{d\hat{u}_p}{d\hat{t}} = 1 - \frac{C_d Re_s}{24} (\hat{u}_p - \hat{u}_l) |\hat{u}_p - \hat{u}_l| + \frac{1}{2}\chi \frac{D\hat{u}_l}{D\hat{t}} - \chi \frac{D\hat{u}_l}{D\hat{t}} - \sqrt{\frac{9}{2\pi}} \chi \int_0^{\tau_r \hat{t}} \left(\frac{d\hat{u}_p}{d\hat{t}} - \frac{D\hat{u}_l}{D\hat{t}}\right) \frac{d\zeta}{\sqrt{\hat{t}-\zeta}} \quad (3.16)$$

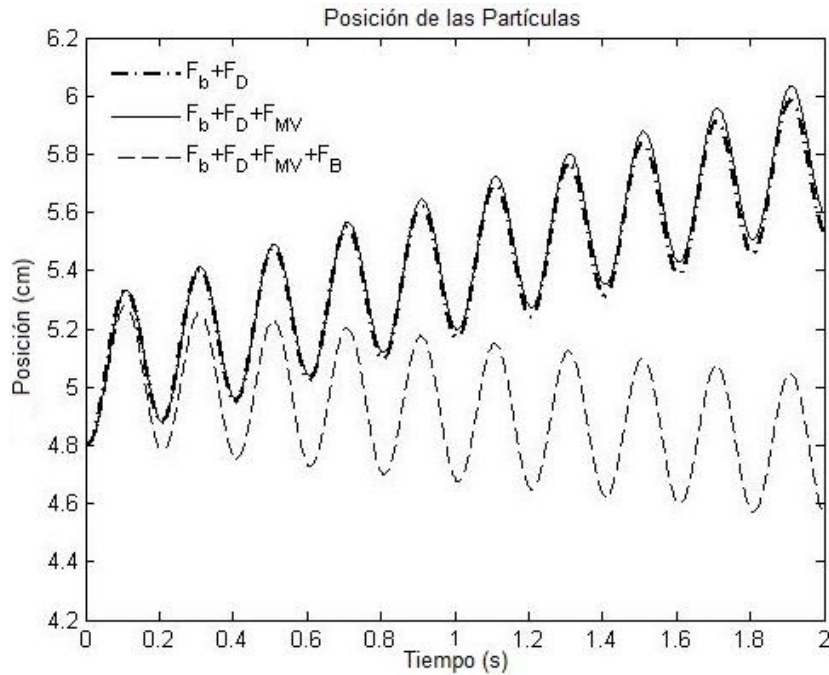
En la ecuación (3.16) se definen tres parámetros relevantes que gobiernan el movimiento de las partículas: la relación de densidad ($\chi = \rho_l/\rho_p$), el coeficiente de arrastre (C_d) y el número de Reynolds basado en la velocidad terminal de Stokes ($Re_s = \rho_l d_p u_s / \mu_l$). Cabe señalar que si se escoge la velocidad terminal de la partícula u_t como una escala de velocidad, en lugar de u_s , se encuentra el número de sedimentación $N_s = u_s/u_t$ (nótese que para régimen de Stokes, $u_t = u_s$ y $N_s = 1$). La ecuación (3.16) es una ecuación integro-diferencial no lineal asociada a una condición inicial $\hat{u}_p(0) = \hat{u}_0$ la cual hasta el momento no se le ha encontrado aún una solución analítica (Viduka et al., 2013b)

Es adecuado nombrar a los términos relacionados a las aceleraciones (tercer, cuarto y quinto término del lado derecho de la ecuación (3.16)) fuerzas inerciales. En la mayoría de los estudios relacionados con el movimiento y estratificación de las partículas en el jig, las fuerzas inerciales se asumen pequeñas y se desprecian, es decir, solo hay un estudio, de conocimiento de los autores, disponible en la literatura que proporcione un análisis general del efecto de las fuerzas inerciales sobre la estratificación, velocidades y trayectorias de las partículas en el jig. (Asakura et al., 1997; Asakura, Mizuno, Nagao, & Harada, 2007; Asakura, Nagao, & Mizuno, 2007) han sido los únicos estudios que han mencionado la inclusión de la fuerza de Basset para obtener la trayectoria y la respuesta dinámica en el tiempo de una partícula individual de tamaño y densidad constante en un jig.

La importancia de los términos inerciales especialmente la fuerza de Basset no es fácil de determinar (Rudinger, 1980). Se sabe sin embargo, que los términos inerciales pueden despreciarse para relaciones de densidad $\rho_l/\rho_p \ll 1$ tales como los que se componen de sistemas de partículas que se mueven en gases, donde la densidad de las

partículas es de tres o más órdenes de magnitud mayor que la densidad del gas. El movimiento en estado estable y la velocidad terminal no se ven afectados por este término; sin embargo, cuando se analiza la ecuación de movimiento (ecuación (3.16)), se observa que todos los términos inerciales, tienen como parámetro la relación de densidad χ , debiéndose incluir definitivamente en el análisis de trayectoria. La no inclusión de los términos de aceleración del agua puede dar lugar a resultados erróneos y físicamente inaceptables, es decir, en sistemas particulados donde la densidad de las partículas es del mismo orden de magnitud que la del fluido (como es el caso del jig), el término χ domina la trayectoria de las partículas (Figuras 3-3 y 3-4).

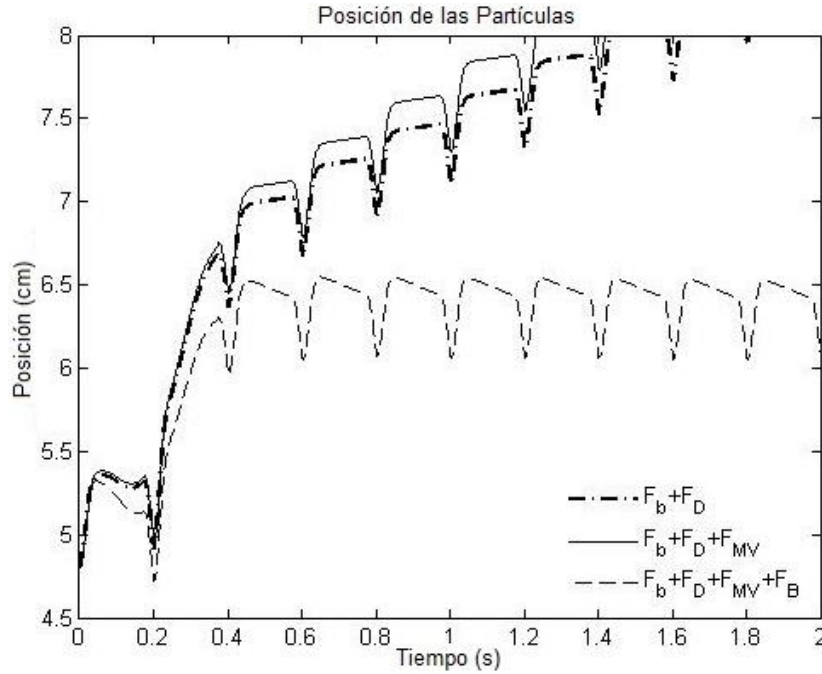
Figura 3-3: Desplazamiento vertical de partícula perfil de pulsación senoidal.



Las Figuras 3-3 y 3-4 muestran el desplazamiento vertical de una partícula de $DR=3.562$ y diámetro $d=300 \mu\text{m}$ bajo dos perfiles de pulsación diferente. Se observa que el movimiento es significativamente afectado por la inclusión de la fuerza de masa virtual y la fuerza de Basset. Cuando solo se toma en cuenta la fuerza de empuje y arrastre sobre la ecuación de movimiento, se puede pensar que las partículas de estas características se reportan en la corriente de rechazo, sin embargo con la inclusión de las fuerzas inerciales las partículas en realidad se concentran bajo las condiciones de amplitud y frecuencia ajustadas dadas en la Tabla 3-1. No incluir el efecto del agua da lugar a una

aceleración inicial infinitamente grande que es físicamente inaceptable (Lamb, 1945; Milne Thompson, 1974).

Figura 3-4: Desplazamiento vertical de partícula perfil de pulsación Trapezoidal.



- Acoplamiento entre las fases

Las partículas que ocupan una celda computacional reducen la fracción volumétrica del agua. De esta manera las dos fases están acopladas por medio de la fracción volumétrica del agua y el término de intercambio de fuerzas F_{wi} en la ecuación (3.6), que toma en cuenta la transferencia de momentum de las partículas y el agua. Tanto la fracción volumétrica como el término de intercambio de fuerzas pueden calcularse a partir del número de partículas en una celda computacional.

- Fracción volumétrica del agua

La fracción volumétrica del agua, ϕ_l , en una celda computacional se calcula reduciendo los volúmenes totales de todas las n partículas dispersas dentro de una celda computacional a partir del volumen de una celda computacional:

$$\phi_l = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n V_{pi}}{V_{cel}} \tag{3.17}$$

Donde V_{pi} es el volumen de la partícula i y V_{cel} es el volumen de la celda computacional.

- Término de transferencia de momentum

El término de transferencia de momentum F_{wi} en la ecuación (3.6) relaciona las fuerzas de interacción entre el agua y las partículas por unidad de celda computacional. Únicamente las fuerzas de presión y gravedad actúan sobre una partícula inmóvil en un líquido inmóvil. El término de transferencia de momentum describe la interacción entre el agua y las partículas cuando existe una velocidad relativa entre las partículas y el fluido a su alrededor, por ello, la fuerza de gradiente de presión y la fuerza de empuje no se incluyen en el término de transferencia de momentum. De esta manera se toman en cuenta tres contribuciones para el término de interacción de fuerzas, el término de la fuerza de arrastre F_D , el término de la fuerza de masa virtual F_{MV} y el término de la fuerza de Basset F_B . Para una partícula i , el término de intercambio de fuerza de una partícula es dado por:

$$F_{wi} = F_{Di} + F_{MVi} + F_{Bi} \quad (3.18)$$

El signo opuesto del término de fuerza en la ecuación (3.18) se usa cuando se sustituye en la ecuación (3.6) ya que son fuerzas opuestas ejercidas por las partículas sobre el agua.

La falta de conocimiento respecto al fenómeno físico de interacción sólido-fluido, la necesidad de desarrollar modelos fenomenológicos adecuados, la demanda de datos de alta calidad a escala real, la necesidad de desarrollar técnicas de análisis de datos para comprender mejor los resultados y el alto costo de dispositivos eficaces de medición por parte de la industria constituyen aspectos que requieren de herramientas numéricas como la utilizada en esta investigación.

3.2 Desarrollo Experimental

3.2.1 Equipos de caracterización, ensayos y pruebas de laboratorio

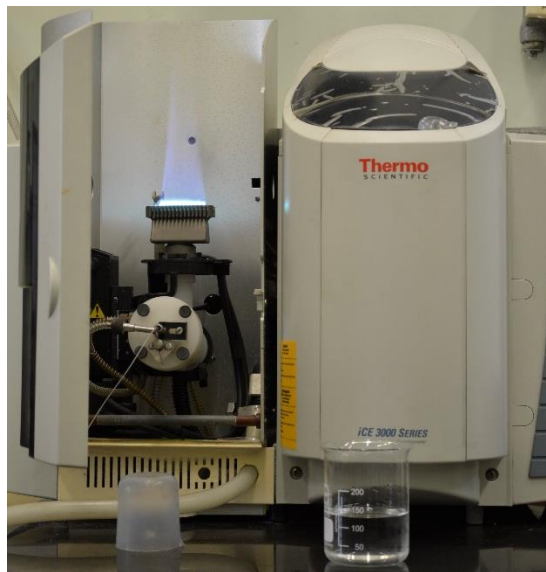
La caracterización química y física del mineral de arenas negras se efectuó usando los siguientes equipos:

- Determinación de composición de pátinas y química mineralógica: se determinó usando Microscopia electrónica de Barrido (SEM) JEOL JSM-5910LV, con analizador cuantitativo para análisis químico. (ver Figura 3-5).
- Análisis químico elemental: se efectuó en un Espectrofotómetro de absorción atómica, Marca Thermo-Element, modelo iCE 3300. (ver Figura 3-6).

Figura 3-5: Microscopio electrónico de Barrido (SEM).



Figura 3-6: Espectrofotómetro de absorción atómica.



- Se diseñó un jig a escala de laboratorio. La columna del jig se construyó totalmente en acrílico con el fin de apreciar el mineral alimentado y poder tener una mejor apreciación del fenómeno de interacción entre las partículas minerales, el LPA y el agua. Además, se le puede variar la amplitud por medio de una biela cuyo interior posee una excéntrica: La frecuencia de pulsación se manipula con un motor dotado de un variador de velocidad. El jig cuenta con medidores de flujo y de presión para tener un monitoreo del flujo de agua que ingresa al jig y medir la caída de presión a través del LPA. En la Figura 3-7 se puede apreciar el jig con todos los instrumentos mencionados.

Figura 3-7: Concentrador jig a escala de laboratorio.



3.2.2 Diseño experimental

Se desarrolló un diseño experimental factorial completo donde se involucraron las variables que ejercen mayor control en el funcionamiento del equipo (agua de inyección (“*hutch*”), amplitud del pulso, frecuencia del pulso, granulometría, altura del lecho) mediante una matriz experimental. Este diseño factorial consta de 5 factores donde la frecuencia, agua de “*hutch*” y la granulometría poseen cada uno 3 niveles (alto, medio, bajo) y la amplitud y altura del lecho poseen cada uno dos niveles (alto y bajo) dando como resultado un total de 108 pruebas más las réplicas, se tiene entonces un total de 216 pruebas. La Tabla 3-2 resume los valores que se tomaron en cuenta para los diferentes parámetros de funcionamiento. Las variables de respuesta son los principales índices metalúrgicos. (Razón de concentración (RC), Recuperación (R), Rendimiento (V), Razón de enriquecimiento (R_E)).

Tabla 3-2: Parámetros de funcionamiento y respectivos niveles de operación.

Niveles	Alto	Medio	Bajo
Frecuencia (Hz)-F	9	7	5
Amplitud del pulso (mm)-A	7	-	5
Tamaño (malla serie Tyler)-T	+50	-50 +100	-100
Flujo de agua de "hutch" (gal/min)-H	2,5	2,0	1,5
Lecho poroso artificial (LPA) (cm)	3,75	-	2,5

Se planteó la siguiente metodología, la cual se siguió paso por paso. Esta metodología trata de reunir la componente teórica, la práctica y el planeamiento del trabajo.

1. Planteamiento de un diseño Experimental. Desarrollo del Diseño Experimental. Montaje de Jig a escala de laboratorio.
2. Según el diseño de Experimentos propuesto, se planean los procedimientos para llevar a cabo las pruebas experimentales en el Jig a escala de laboratorio y la toma de datos (Anexo A).
3. Realización de pruebas en el Jig a escala de laboratorio con suspensiones de muestra de mineral de aluvión para observar el proceso de concentración en Jigs, variando las condiciones planteadas. Toma y caracterización de las muestras.
4. Análisis de los resultados de los ensayos realizados.
5. Formulación de los modelos que mejor describan el proceso de concentración en jigs.
6. Validación del modelo obtenido con datos del jig a escala de laboratorio.

4. Resultados y Discusión

Con el propósito de simular y validar el modelo fenomenológico, se desarrollaron unas series de simulaciones computacionales. Los casos de pruebas simulados se basaron en la cámara de separación del jig a escala de laboratorio (ver Figuras 4-1 y 4-2), a partir de los resultados experimentales disponibles realizados en el jig ubicado en el instituto de minerales CIMEX de la Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín.

En la sección 4.1 se da una descripción de la geometría simulada y la construcción de la malla, las condiciones de frontera se especifican en la sección 4.2, en la sección 4.3 se plantea la configuración de las simulaciones y la convergencia de la solución, los resultados de la caracterización del mineral utilizado y el diseño de experimentos se llevan a cabo en la sección 4.4, la medida de las fuerzas involucradas, las velocidades de las partículas y el efecto de la adición de la pulsación sobre las velocidades se presentan en las secciones 4.5, 4.6 y 4.7 respectivamente, la sección 4-8 da las medidas de las trayectorias de las partículas junto con los resultados a partir de cinco perfiles de pulsación diferente y finalmente la validez de la aproximación del modelo de trayectorias se discute en la sección 4.9.

4.1 Descripción de la Geometría

En todos los casos de simulación se usó la misma geometría y malla computacional, la cual se realizó a partir del jig a escala de laboratorio. Una imagen del jig se muestra en la Figura 4-1 donde se aprecia su construcción en acrílico transparente para permitir mediciones ópticas. En la Figura 4-2 se presenta el dominio computacional con las dimensiones relevantes. La distancia entre la pared frontal y trasera es de solamente 0.03 m, con lo cual se pueden realizar las simulaciones del dispositivo en un dominio bidimensional. Todas las simulaciones se llevaron a cabo en 2D ya que en una simulación 3D previa (Ver Figura 1-8) se observó que el mayor gradiente de velocidad ocurre en la dirección vertical pudiéndose despreciar en la simulación el espesor de la

columna del jig, además la simulación 2D permite usar una malla de tamaño bastante fina sin requerimientos computacionales excesivos.

Figura 4-1: Jig a escala de laboratorio usado en la simulación.



Como se muestra en la Figura 4-2, solamente la parte de la columna de la cámara de separación del jig se incluyó en el dominio computacional. La mayor parte del dominio computacional consistió en una sección de tubería vertical rectangular, que tiene 0.1 m de altura y 0.05 m de ancho. La columna se dividió en volúmenes de control rectangulares de 8.3×10^{-4} m de ancho y 10^{-3} m de alto. La cantidad total de celdas computacionales fue de 6000. Los casos de simulación se ejecutaron en un cluster de ordenadores y un máximo de 4 núcleos fueron utilizados por cada caso. Cada una de las simulaciones tomó 5 días de cálculo.

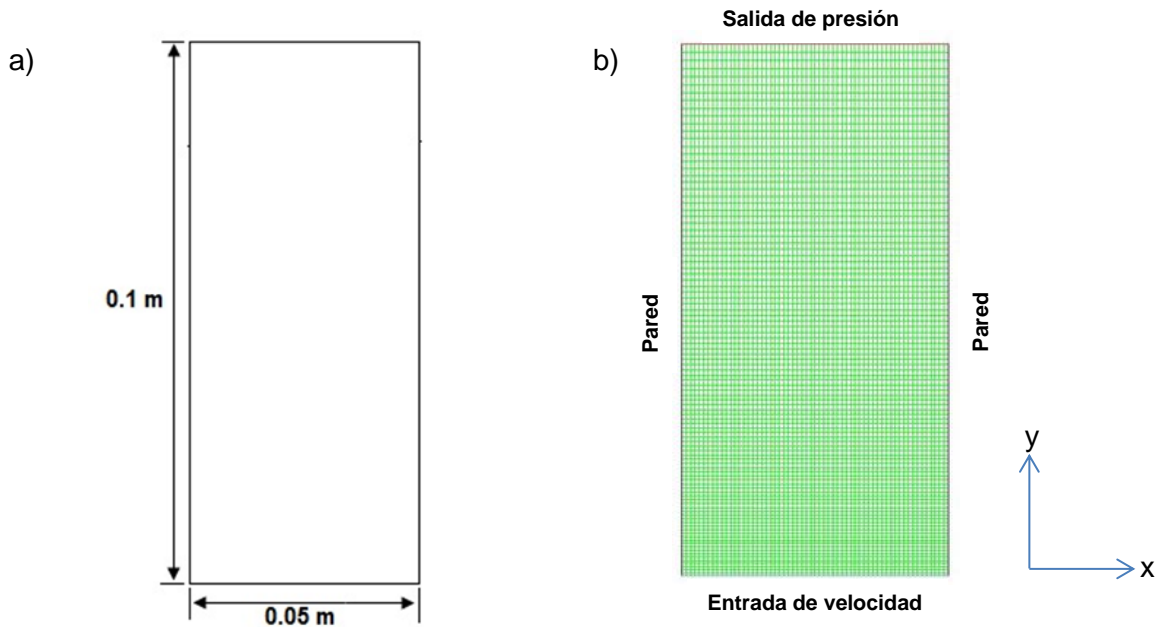
Para la simulación se realizó el mallado del dominio computacional con la que se discretiza la solución del sistema de ecuaciones diferenciales (ecuaciones 3.5, 3.6 y 3.9). La ortogonalidad, la razón de aspecto y la conectividad de la malla se evaluaron de forma automática en el software durante la generación de esta. La Figura 4-2 b) muestra los resultados de la generación del mallado en el Jig. Los nodos, las caras y las celdas

generadas en el mallado con los que se evaluó la independencia de mallas se aprecian en la Tabla 4-1. La malla en el sistema no es uniforme, las líneas más densas se establecen en la mitad inferior de la columna donde el jig presenta mayor gradiente de velocidad y presión.

Tabla 4-1: Tipos de malla para independencia.

Número de Malla	Celda	Cara	Nodo
1	1800	3690	1891
2	6000	12160	6161
3	12600	25430	12831

Figura 4-2: a) Dimensiones del dominio computacional 2D usado en la simulación. Espesor 0.03 m. b) Vista de la geometría y malla del jig.



4.1.1 Independencia de malla

Los resultados del ensayo numérico para verificar que la solución es independiente del tamaño de la malla (independiente del número de nodos, caras y celdas) se puede comprobar en las Figuras 4-3 y 4-4 donde se muestran los perfiles de velocidad y presión respectivamente para una línea que pasa horizontalmente por el LPA (Puntos [0.0 0.025] y [0.05 0.025]). De acuerdo a esto se decide escoger la malla 2 para realizar el análisis del campo de flujo de agua y la trayectoria de las partículas en estado no estacionario

para el modelo de turbulencia k- ϵ disperso, pues por costo computacional es más rápido cuando se tiene menor cantidad de celdas, nodos y caras.

Figura 4-3: Influencia del tamaño de la malla en la predicción de los resultados de velocidad.

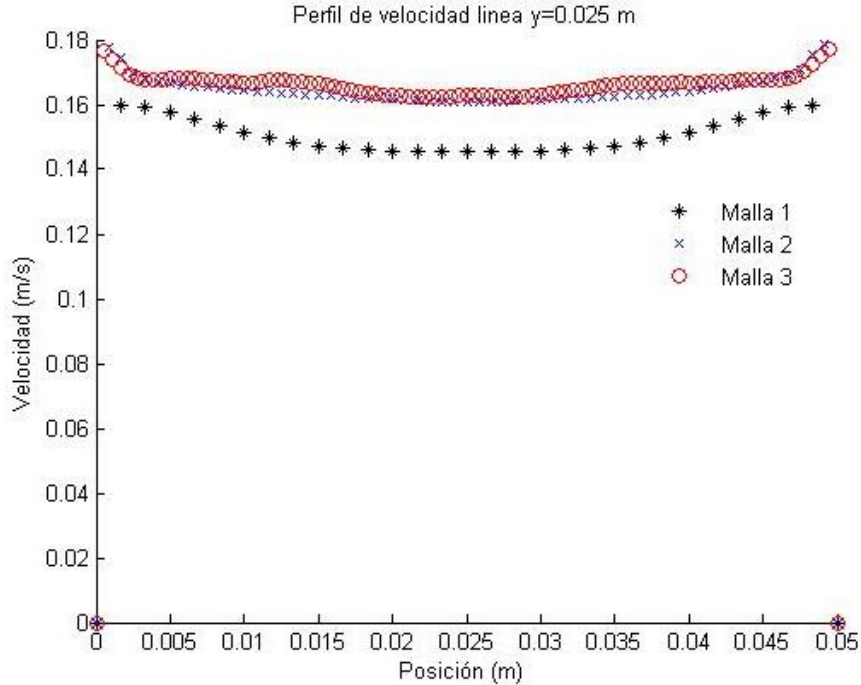
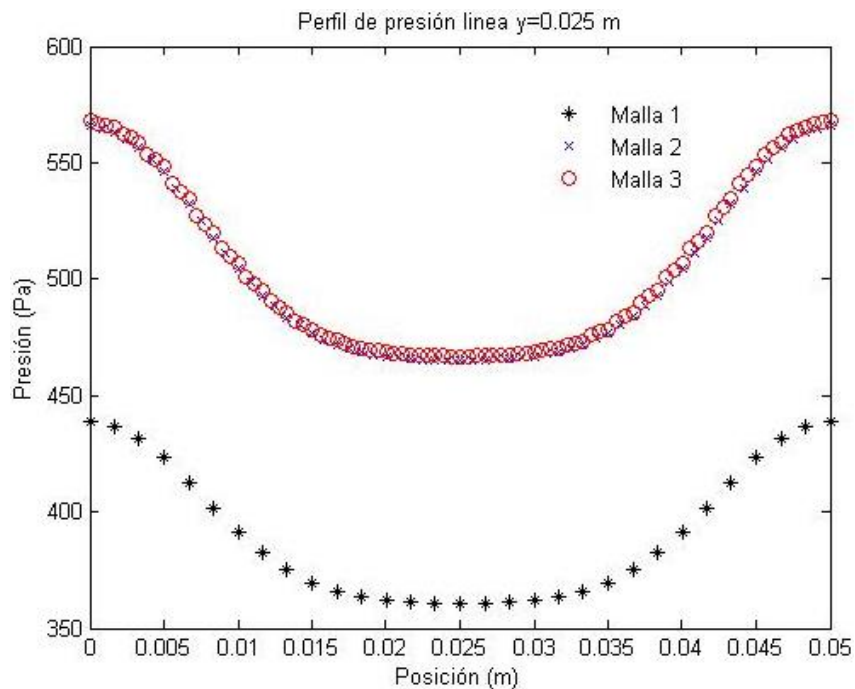


Figura 4-4: Influencia del tamaño de la malla en la predicción de los resultados de presión.



4.2 Condiciones de Frontera

En el dominio computacional hay cuatro tipos de condiciones de frontera: la entrada de agua en el fondo, la salida en la parte superior, la entrada de sólidos en el lado derecho de la columna y las paredes. De estas cuatro, las condiciones de frontera de salida y pared se configuraron de la siguiente manera: para la salida se utilizó la condición de frontera “*pressure outlet*”, es decir, el valor de presión se fijó al valor de la presión atmosférica en la frontera. Dado que con la salida de presión (“*pressure outlet*”) es posible que la dirección del flujo se invierta temporalmente, las propiedades del flujo también deberían darse para el reflujo (“*back flow*”). Para esos casos la fracción de sólidos y los flujos para los valores escalares se ajustaron a cero.

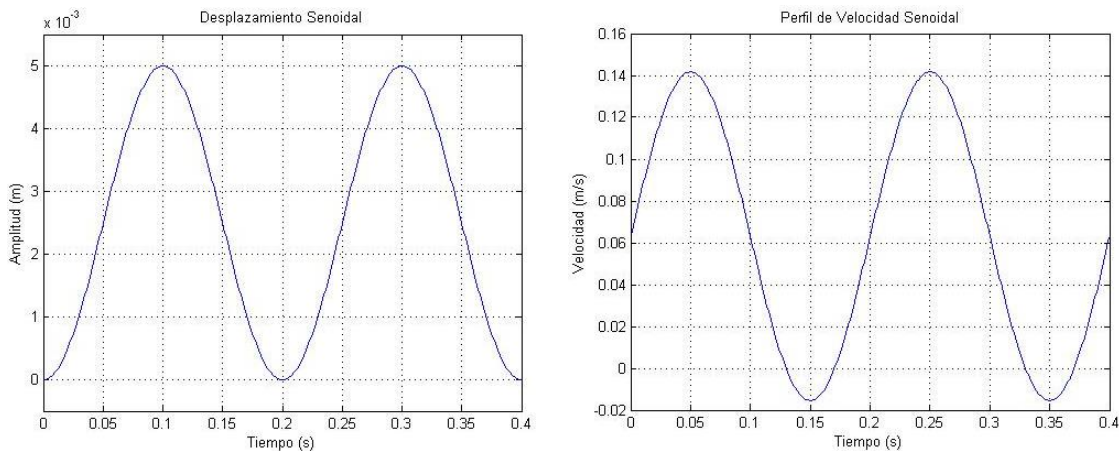
En las paredes se ajustó condición de frontera no deslizante para el agua, que es la condición que normalmente se utiliza. Para las partículas la condición de frontera en la pared es un poco más complicada, ya que las partículas sólidas no se pegan a las paredes del jig como lo hace el agua y la condición de frontera no deslizante no sería físicamente correcta. Una alternativa es usar la condición de frontera de deslizamiento libre (“*free slip*”), pero esto podría subestimar los efectos friccionales de la pared. Como un acuerdo entre la condición no deslizante y deslizamiento libre es posible usar una condición de frontera de deslizamiento parcial.

Un modelo de deslizamiento parcial bastante conocido e implementado con frecuencia se desarrolló por Johnson y Jackson (Johnson & Jackson, 1987); este modelo utiliza un coeficiente de reflexión especular que describe de manera adecuada los efectos de fricción entre las partículas y las paredes. El valor del coeficiente de fricción debe estar entre cero y uno, cuando el coeficiente es cero representa condición de deslizamiento libre. Desafortunadamente no existe en la literatura pautas generales de cómo elegir el valor de este parámetro y el valor correcto depende fuertemente del problema físico que se pretende modelar. Debido a que no existe información adecuada disponible, en todas las simulaciones se usó un valor de 0.001 para el coeficiente de reflexión especular con el objetivo de presentar en las paredes un efecto de fricción.

En el jig real, en la parte inferior de la columna asciende el agua con un perfil de velocidad a través del lecho poroso artificial (LPA) generando una caída de presión. La parte inferior de la columna se especificó como una única condición de frontera de entrada de velocidad. La entrada de velocidad se modeló con cinco perfiles de pulsación

diferentes, los cuales se encuentran comúnmente en el entorno industrial (Burt, 1984; Viduka et al., 2013b). Los perfiles de desplazamiento del pistón que generan el movimiento ascendente y descendente del agua utilizados para la modelación son: senoidal (SENO), triangular (TRI) (ciclo Bird), trapezoidal (TRA), diente de sierra adelantado (STF de sus siglas en inglés Sawtooth Forward) y diente de sierra atrasado (STB de sus siglas en inglés Sawtooth Backward) (Burt, 1984). Estos desplazamientos generan los perfiles de velocidad a la entrada de la cámara del jig mostrados en las Figuras 4-5 a 4-9. En todas las simulaciones se asume la entrada de velocidad de agua variable con una frecuencia de oscilación de 5 Hz y una amplitud que depende del perfil de pulsación, la Tabla 4-2 muestra cada una de las velocidades máximas y mínimas generadas con cada uno de los perfiles utilizados. Además se asume que el flujo de agua se distribuye uniformemente a la entrada de la cámara del jig.

Figura 4-5: Perfil de pulsación senoidal aplicado en la condición de frontera a la entrada.



La variación de la forma del pulso afecta la proporción del ciclo durante el cual los diferentes mecanismos de concentración ocurren. El movimiento senoidal es el más sencillo de reproducir mecánicamente y es consecuentemente el más usado en jigs mecánicos que utilizan un pistón o diafragma para generarle el movimiento armónico al flujo de agua. La Figura 4-5 muestra el desplazamiento del fluido en un jig mecánico, así como su velocidad. La velocidad del flujo a través del lecho del jig es proporcional a la velocidad de desplazamiento del diafragma. Cuando la velocidad del diafragma es grande, la velocidad del flujo a través del lecho también es grande.

Figura 4-6: Perfil de pulsación triangular aplicado en la condición de frontera a la entrada.

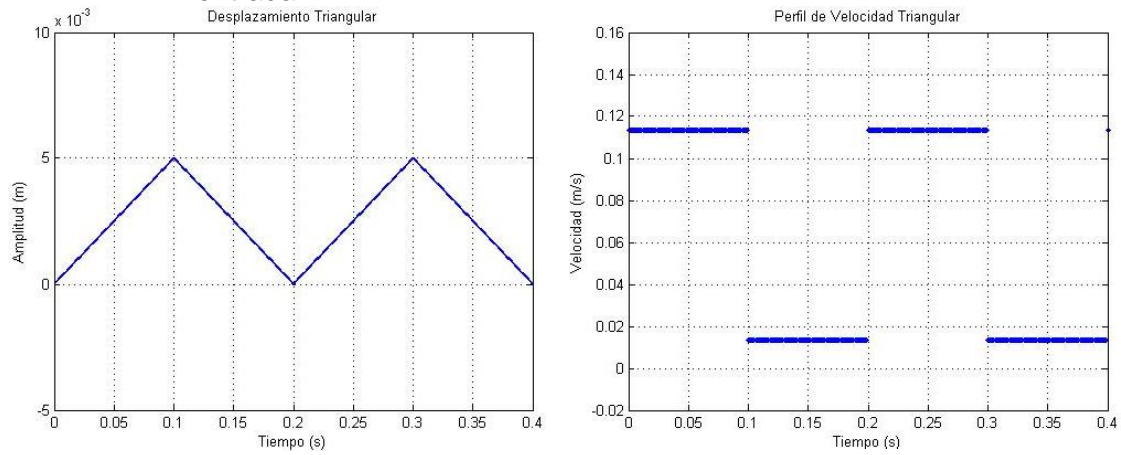


Figura 4-7: Perfil de pulsación diente de sierra adelantado aplicado en la condición de frontera a la entrada.

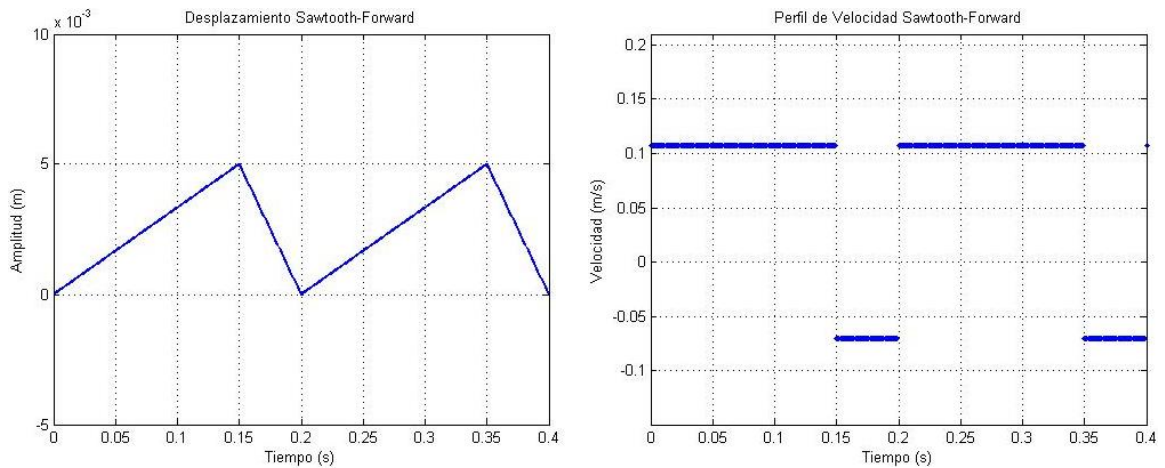


Figura 4-8: Perfil de pulsación diente de sierra atrasado aplicado en la condición de frontera a la entrada.

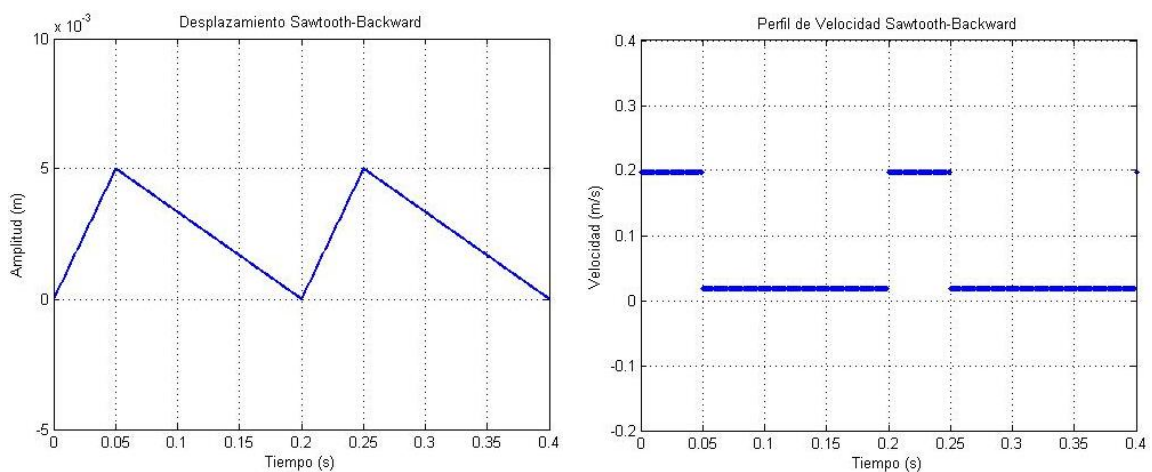
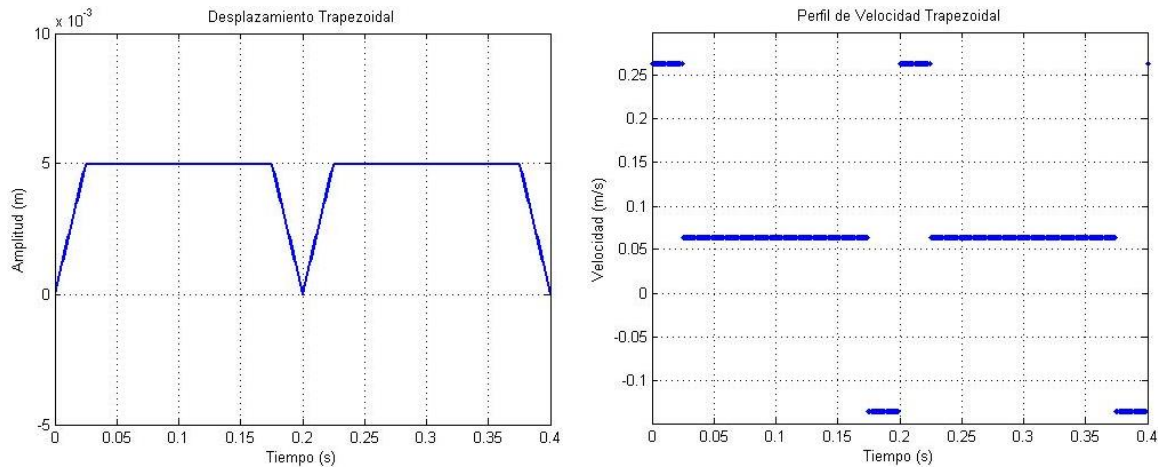


Figura 4-9: Perfil de pulsación trapezoidal aplicado en la condición de frontera a la entrada.



La entrada de flujo para el perfil de pulsación senoidal se estableció utilizando una ecuación de onda seno, mientras que los otros perfiles utilizan la función escalón (Ver Anexo B). Los perfiles de pulsación se comparan en base a que la amplitud y frecuencia de pulsación se mantienen constantes en $A= 5\text{mm}$ y $T= 0.2\text{ s}$ (300 ciclos/min) respectivamente, y solo se cambia la forma del perfil. Cada perfil incluye un periodo de fluidización con un movimiento del agua hacia arriba (valor positivo en la velocidad) y un periodo de succión con un movimiento del agua hacia abajo (valor negativo de la velocidad). Debe recalarse que el flujo se refiere al movimiento del agua y no al movimiento de las partículas minerales. En todos los casos se utilizó el mismo tamaño de la malla para asegurar resultados comparables independientes del tamaño de malla (Tabla 4-1).

Tabla 4-2: Características de los perfiles de pulsación utilizados.

Perfil de velocidad	Frecuencia (Hz)	Vel. Máxima (m/s)	Vel. Mínima (m/s)
Senoidal	5	0.1417	-0.01537
Triangular	5	0.1132	0.01713
Trapezoidal	5	0.2632	-0.1368
Diente de sierra adelantado	5	0.1076	-0.0702
Diente de sierra atrasado	5	0.1965	0.01872

4.3 Estrategias de solución

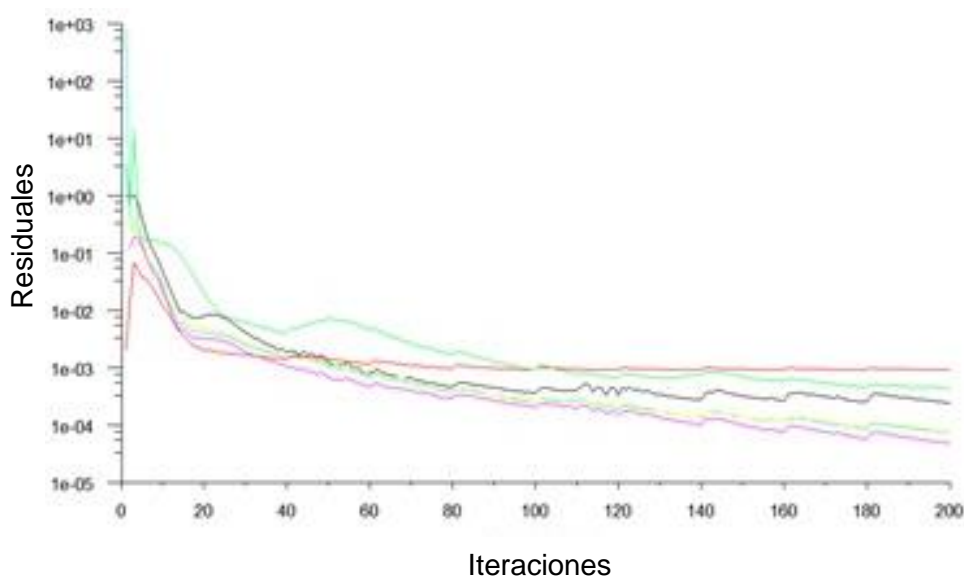
Las simulaciones se llevaron a cabo en estado transiente (no estacionario) con un tamaño de paso de 1 ms y la inicialización se realizó colocando una cantidad homogénea de material sólido en el dominio. El esquema de simulación para el acoplamiento de fases fue el algoritmo SIMPLE y para la fracción volumétrica y para las ecuaciones de momentum se utilizó el esquema “Quick” como una discretización espacial (Versteeg &

Malalasekera, 2007). El esquema “*upwind*” de primer orden se utilizó para las demás ecuaciones (Versteeg & Malalasekera, 2007). Las simulaciones de flujos multifase tienden a presentar bastantes problemas de estabilidad y por esta razón, se tuvo que utilizar factores de relajación relativamente bajos para las ecuaciones de momentum y fracción volumétrica. Por lo general los factores deben estar alrededor de 0.3 o inclusive un poco menos (Versteeg & Malalasekera, 2007; Yeoh & Tu, 2009). El modelo de turbulencia utilizado en las simulaciones fue el modelo $k-\epsilon$ disperso de FLUENT y su papel principal fue la estabilidad de las simulaciones. El material del LPA en todos los casos consistió de partículas esféricas de acero con un diámetro de 0.003 m y una densidad de 6690.7 kg/m^3 .

4.3.1 Convergencia de la solución

La convergencia de la simulación para estado no estacionario se muestra en la Figura 4-10. Se observa la tendencia de los residuales a disminuir y a no presentar cambios bruscos de oscilación, lo que indica un buen cierre del sistema de ecuaciones (acoplamiento de la presión con la velocidad) Por otra parte el balance de flujo másico es inferior al 0.003% del flujo total de entrada, indicando un buen cierre del balance de flujo másico e indicando que la simulación está acorde con el fenómeno físico que se pretende analizar.

Figura 4-10: Monitoreo de residuales estado no estacionario en un tiempo de 5 segundos.



4.4 Resultados de la caracterización del mineral

Para la realización de las pruebas experimentales, se utilizó el mineral proveniente de la corriente del concentrado del jig terciario en la draga 14 de la Empresa Mineros S.A. Esta corriente está fuertemente enriquecida con arenas negras que acompañan el oro nativo y de tamaño relativamente grueso ($100 \mu\text{m} < d_p < 300 \mu\text{m}$), como se puede apreciar en la evaluación de la distribución de tamaño de partícula (DTP) y de la densidad real realizada a continuación.

4.4.1 Distribución granulométrica y cálculo de densidad

Se evaluó la DTP y densidad real, con la serie de tamices U.S.A. Standard, en un Ro-Tap, los datos de la DTP y de la densidad real se presentan en la Tabla 4-3 y 4-4 respectivamente. En la Figura 4-11 se grafican los porcentajes retenidos para cada intervalo de tamaño de partícula y en la Figura 4-12 se observa como esta DTP se ajusta a una distribución tipo Rosin-Rammler (ecuación 4.1).

$$Y = 1 - e^{-\left(\frac{d_p}{326.131}\right)^{1.961}} \quad (4.1)$$

De la ecuación 4.1 la Y representa el porcentaje pasante acumulado de mineral y d_p el diámetro de la partícula en micrómetros. Al ajustar los datos experimentales de distribución de tamaño del mineral a la ecuación 4.1 se obtienen las curvas representadas en la Figura 4-12, donde se aprecia la tendencia de los datos experimentales a seguir la distribución Rosin-Rammler con un coeficiente de ajuste $R^2=0.9752$.

Tabla 4-3: Distribución Granulométrica, Concentrado de jig terciario.

Malla número	Abertura, micras	Peso retenido, (gr)	% retenido, en peso	% retenido Acumulado	% pasante acumulado
10	2000	0	0	0.0	100.0
20	840	12.65	0.6	0.6	99.4
30	595	92.75	4.2	4.8	95.2
40	420	167.04	7.6	12.4	87.6
50	297	497.6	22.7	35.1	64.9
60	250	350.2	16.0	51.1	48.9
70	210	297.2	12.7	63.8	36.2
100	149	478.4	21.8	85.7	14.3
120	125	314.10	14.3	100	0.0

Sin embargo, cabe aclarar, que en la región donde el tamaño de partícula es fino ($d_p < 125 \mu\text{m}$), el comportamiento de las distribuciones de tamaño se aleja de la tendencia presentando un error del 8.4%, lo cual indica que este modelo no describe correctamente la distribución de tamaño de partículas en dicha región. Pero para el intervalo de tamaño que se trabajó ($d_p > 125 \mu\text{m}$) la distribución de tamaño se ajusta bastante bien.

Tabla 4-4: Densidades reales.

MUESTRA	Masa (m) (gr)	Vol. Inicial (V_i) (cm^3)	Vol. Final (V_f) (cm^3)	Densidad (ρ) (gr/cm^3)
1	35.4	60	70	3.54
2	17.2	30	35	3.44
3	4.9	7	8.4	3.5
4	31.1	50	59	3.45
5	17.6	35	40	3.52
6	4.1	6	7.2	3.47
7	45	65	78	3.46
8	19	40	46	3.5
9	4.5	8	9.3	3.46

Densidad promedio real = $3.48 \text{ gr} / \text{cm}^3$

Figura 4-11: Distribución de tamaño de partícula (DTP) de la descarga (concentrado) del jig terciario.

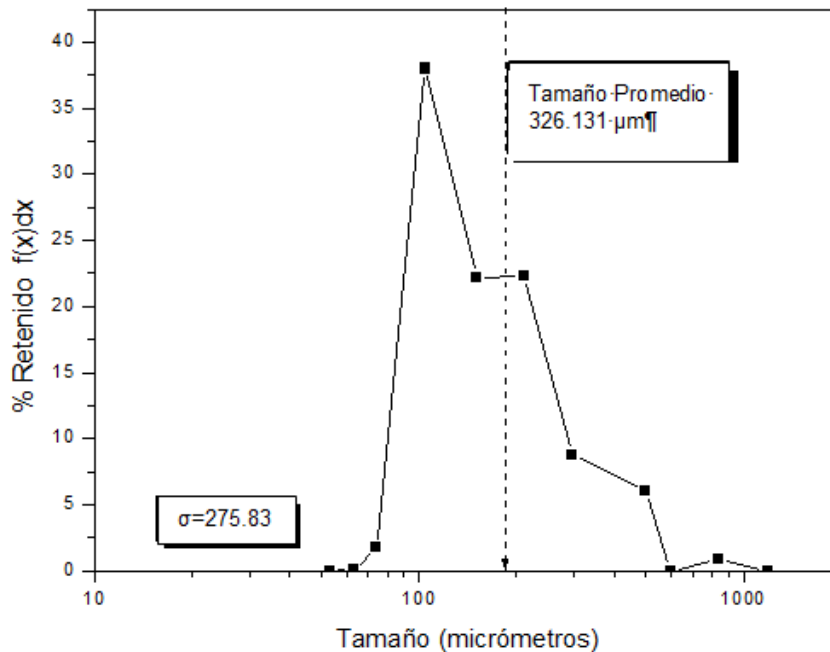
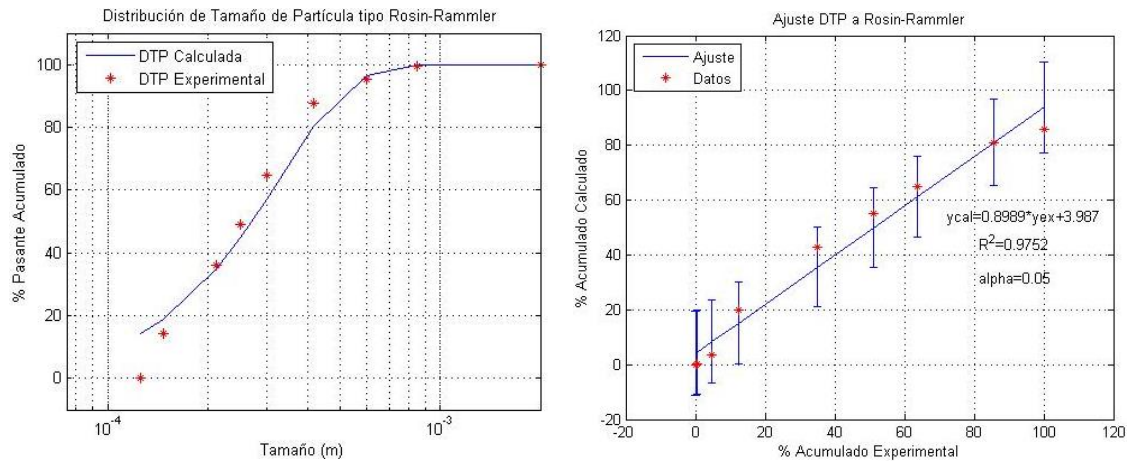


Figura 4-12: Ajuste de la DTP a Rosin-Rammler.

4.4.2 Resultados Experimentales

Para complementar la caracterización del mineral es necesario determinar los valores de los tenores del material alimentado en cada una de las muestras definidas para la realización de las pruebas de concentración por gravedad. Estas se realizaron por el método de ensaye al fuego no convencional, tomando como base 100 gr de cada muestra, para realizar la concentración en batea disminuyendo de esta manera el sesgo por el efecto pepita (Bustamante et al., 2008; Gupta, 2003). La Tabla 4-5 muestra los pesos obtenidos de concentrados y colas de cada una de las muestras que se generaron del mineral analizado. Las muestras se dividen en cuatro clases, la muestra numero 1 corresponde al material global, las muestras 2, 3 y 4 son las fracciones de tamaño en las que se fraccionó el material para el análisis de tenores.

Tabla 4-5: Pesos de concentrados y colas.

Muestra	Peso (gr)	Concentrado (gr)	Colas (gr)
1- Concentrado Jig	100	5.4	94.3
1'- Contra muestra concentrado jig	100	7.2	98.7
2- +50 ($d_p > 300 \mu\text{m}$)	100	11.1	88.9
2'- Contra muestra +50	100	15.5	85.4
3- -50+100 ($150 \mu\text{m} < d_p < 300 \mu\text{m}$)	100	13.5	86.3
3'- Contra muestra -50+100	100	9.5	90.2
4- -100 ($d_p < 150 \mu\text{m}$)	100	19.1	80.6
4'- Contra muestra -100	100	17.7	82.3

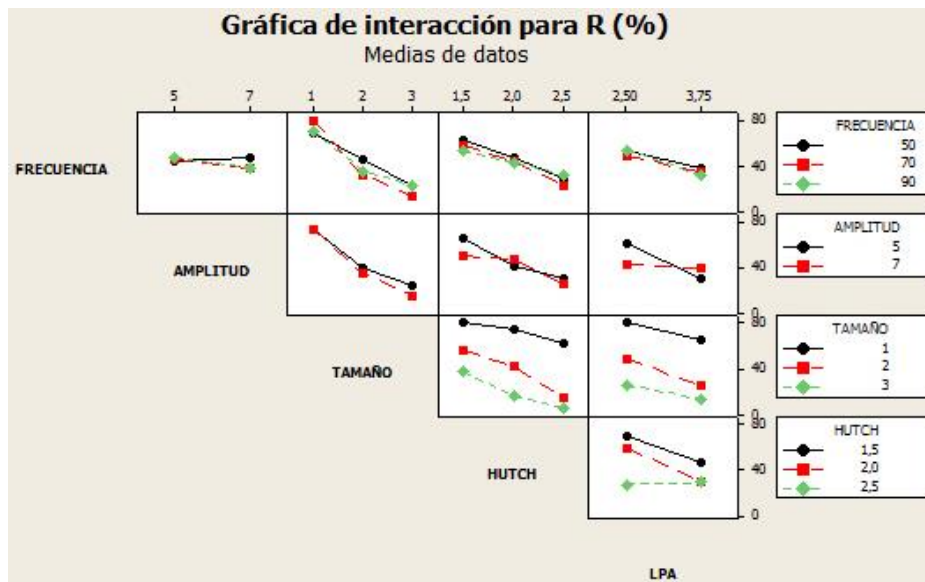
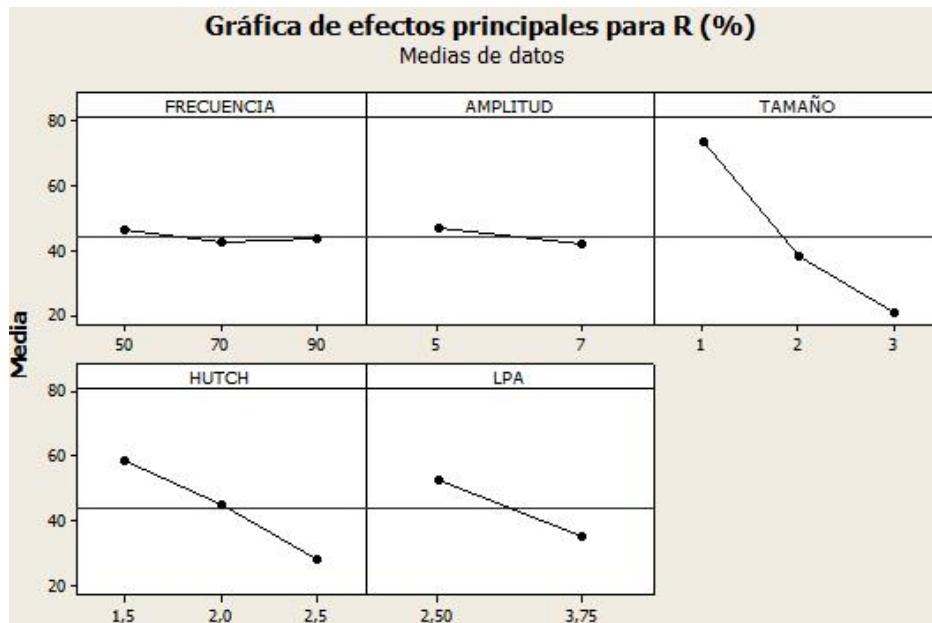
Para el ensaye al fuego no convencional se funde todo el concentrado en batea de cada muestra individualmente, y para las colas se define muestra y contra muestra, cada una de estas con un peso de 25 gr por el método de cuarteo (Bustamante et al., 2008; Fuerstenau & Kenneth, 2003). En la Tabla 4-6 se expresan los cálculos de los tenores de cabeza, concentrado y colas, además de los índices metalúrgicos para cada una de las muestras analizadas.

Tabla 4-6: Tenores de oro de cabeza, concentrado y colas.

Muestra	Cabeza (gpt)	Concentrado (gpt)	Colas (gpt)	R (%)	R _E	R _C	V
1	283,5	4983,36574	15,390	94,863	17,579	18,531	0,0539
1'	201,7	2778,52083	1,780	99,181	13,776	13,89	0,0719
2	133,4	1198,55856	0,439	99,707	8,982	9,009	0,110
2'	44,7	287,297419	0,156	99,705	6,432	6,451	0,154
3	111,6	794,15037	5,132	96,022	7,115	7,409	0,134
3'	116,9	1195,43947	3,689	97,142	10,230	10,531	0,094
4	342,0	1749,06806	9,972	97,640	5,114	5,238	0,190
4'	63,5	330,263842	6,302	91,830	5,199	5,662	0,176

Luego de la caracterización mineralógica se realiza la matriz experimental que se calculó con ayuda del paquete estadístico Minitab 15[®] donde se varían de forma aleatoria los parámetros de operación del jig. Para la preparación de la pulpa de alimentación se trabajó con un porcentaje de sólidos del 5 al 10% en volumen. En el Anexo A se presenta la tabla del orden en que se llevaron a cabo las pruebas experimentales.

Según el diseño de experimentos planteado en el Anexo A, se combinan diferentes variables operacionales con el fin de obtener un modelo que reproduzca las condiciones de operación del jig. Al final de realizadas todas las pruebas experimentales se obtienen las ecuaciones fundamentales del proceso de concentración del jig. En las Figuras 4-13 a 4-30 y en la Tabla 3-5 se muestra que las principales variables de operación en especial la frecuencia, amplitud y el tamaño de partícula, tiene un mayor efecto en el porcentaje de recuperación de oro y que las interacciones entre estas variables hacen que la recuperación de oro varíe considerablemente. Existe una diferencia significativa en la recuperación de oro generada por la interacción de las variables operacionales y además los efectos principales de las diferentes variables también afectan la recuperación de oro en el jig.

Figura 4-13: Grafica de interacción de variables.**Figura 4-14:** Grafica de efectos en las variables principales.

Como ayuda para interpretar los resultados de este experimento se construyeron las gráficas de las respuestas promedio de la concentración de oro para cada combinación de las variables operacionales, estas gráficas se muestran en las Figuras 4-13 y 4-14. En la Figura 4-13 se aprecia que las rectas entre cada una de las variables no son paralelas, indicando que la interacción entre las variables es significativa y afectará considerablemente la recuperación de oro. En general se consigue una recuperación

superior al 80% con un intervalo del tamaño de partícula entre 125 µm y 300 µm (150 µm <math>d_p < 300 \mu m</math>), con un flujo de agua de “hutch” de 1.5 GMP y una altura del LPA de 2.5 cm. De la Figura 4-14 si se cambian la frecuencia y la amplitud de un valor bajo (5 Hz y 5 mm respectivamente) a uno alto (9 Hz y 7 mm respectivamente) la recuperación disminuye por debajo del 40 % para los valores altos de la frecuencia y amplitud de pulsación.

De las gráficas anteriores, se puede obtener un modelo experimental para la recuperación de oro en función de las variables operacionales. En la Figura 4-15 se aprecia el ajuste del modelo para el diseño de experimentos tomando en cuenta las variables que son significativas (frecuencia y amplitud de pulsación, intervalo de tamaño de partícula, flujo de agua y altura del LPA) y las interacciones entre ellas. Estos coeficientes son razonables puesto que se tiene un coeficiente de ajuste (R^2) mayor del 80% ($R^2=96,87\%$) indicando además que a partir de un modelo empírico podemos optimizar el equipo de concentración, pero limitándolo a que el modelo está muy sujeto a los datos experimentales obtenidos y no es un modelo que se pueda generalizar a la mayoría de equipos de concentración gravimétrica debido a la poca explicación que se puede obtener del fenómeno en el interior de la cámara de separación del jig.

Figura 4-15: Modelo experimental para la predicción de la recuperación de oro en el jig.

Coeficientes de regresión estimados de R (%) utilizando datos en unidades sin codificar	
Término	Coef
Constante	551,431
FRECUENCIA	-0,169078
AMPLITUD	-31,1530
TAMAÑO	-39,8733
HUTCH	-111,844
LPA	-111,412
FRECUENCIA*FRECUENCIA	0,00617497
TAMAÑO*TAMAÑO	8,93082
HUTCH*HUTCH	-6,00006
FRECUENCIA*AMPLITUD	-0,159492
FRECUENCIA*TAMAÑO	-0,0235823
FRECUENCIA*HUTCH	0,326846
FRECUENCIA*LPA	-0,132454
AMPLITUD*TAMAÑO	-1,91738
AMPLITUD*HUTCH	5,39358
AMPLITUD*LPA	10,5389
TAMAÑO*HUTCH	-6,78483
TAMAÑO*LPA	1,33331
HUTCH*LPA	20,3955
S = 0,01755 PRESS = 0,01169	
R-cuad. = 97,70% R-cuad. (pred.) =94,65% R-cuad. (ajustado) = 96,87%	

El modelo experimental permite interpretar los efectos de interacción entre las variables operacionales a partir de las gráficas de superficies y contornos generadas por cada par de variables (Figuras 4-16 a 4-26). De estas gráficas y del modelo experimental se puede maximizar la recuperación de oro cuando se consideran valores del tamaño de partícula en un intervalo de $150 \mu\text{m} < d_p < 300 \mu\text{m}$, un flujo de agua de “hutch” en 1.5 GPM , una altura del lecho a la mitad de la altura total del rifle (2,5 cm), una frecuencia de 5Hz y una amplitud de 5mm; con estos valores se predicen recuperaciones de oro entre el 90% y 96%.

Figura 4-16: Gráficos de contorno donde se logran las mayores recuperaciones de oro.

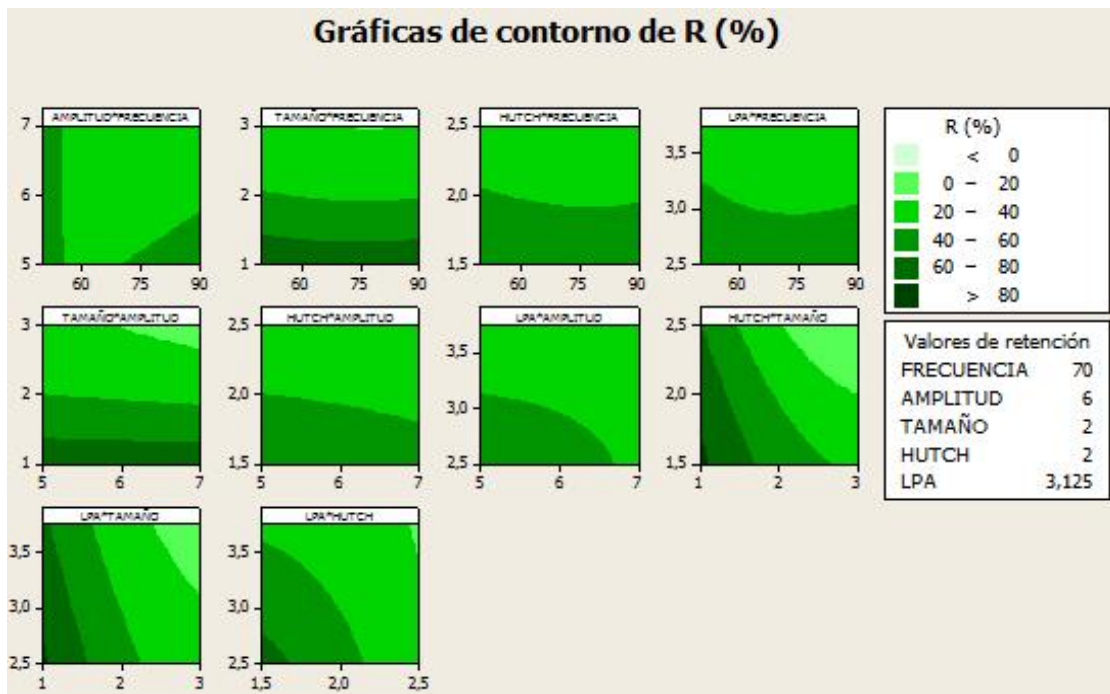


Figura 4-17: Superficie de respuesta Amplitud vs Frecuencia.

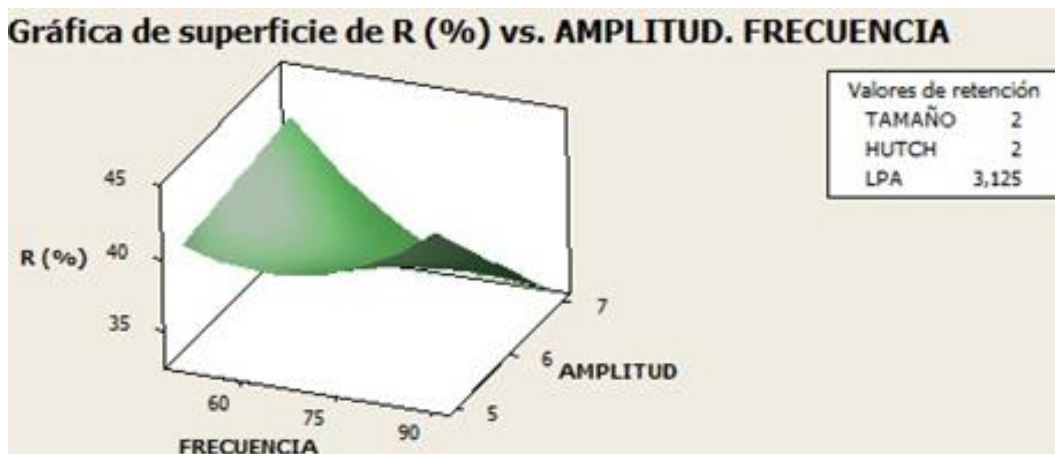


Figura 4-18: Superficie de respuesta Amplitud vs flujo agua de “hutch”.

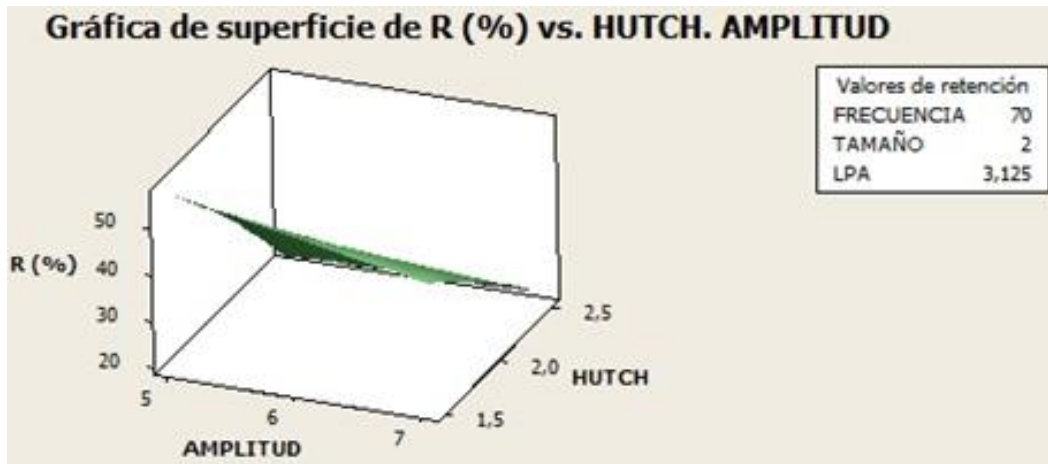


Figura 4-19: Superficie de respuesta Frecuencia vs flujo agua de “hutch”.

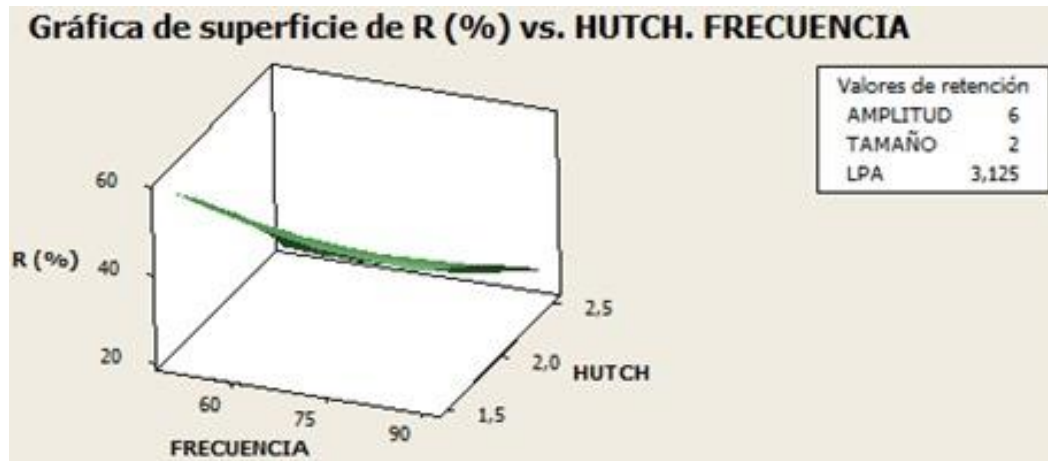


Figura 4-20: Superficie de respuesta Tamaño de partícula vs flujo agua de “hutch”.

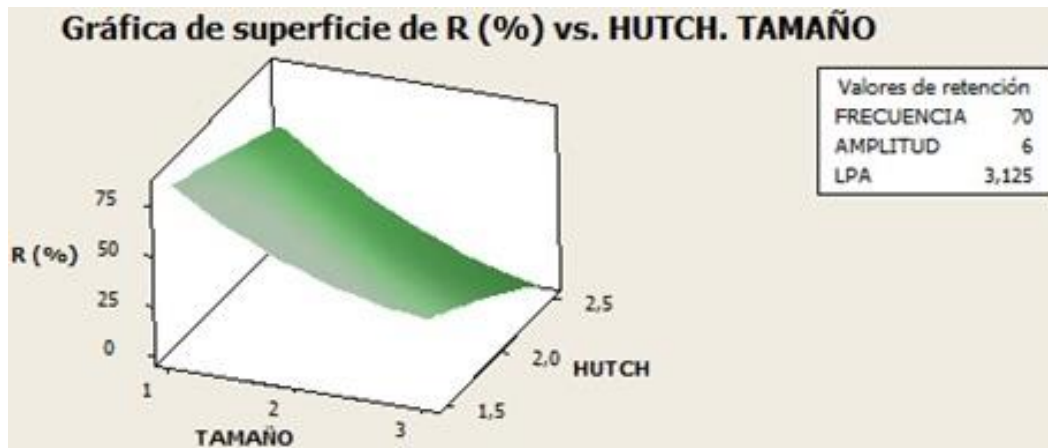


Figura 4-21: Superficie de respuesta Amplitud vs LPA.

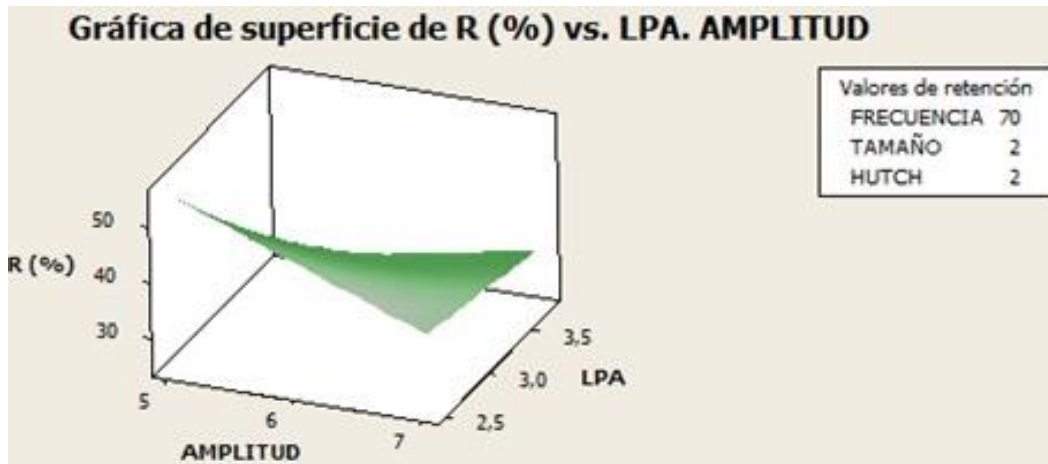


Figura 4-22: Superficie de respuesta Frecuencia vs LPA.

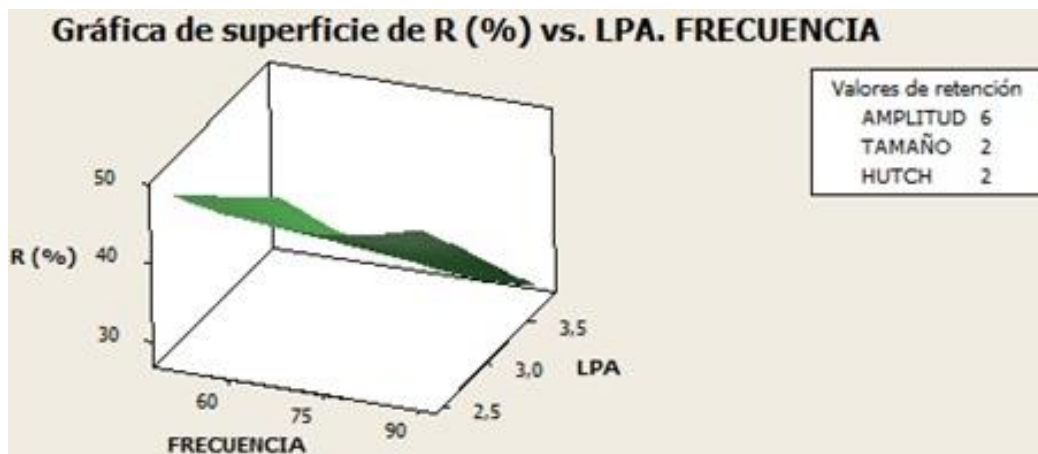


Figura 4-23: Superficie de respuesta LPA vs flujo agua de "hutch".

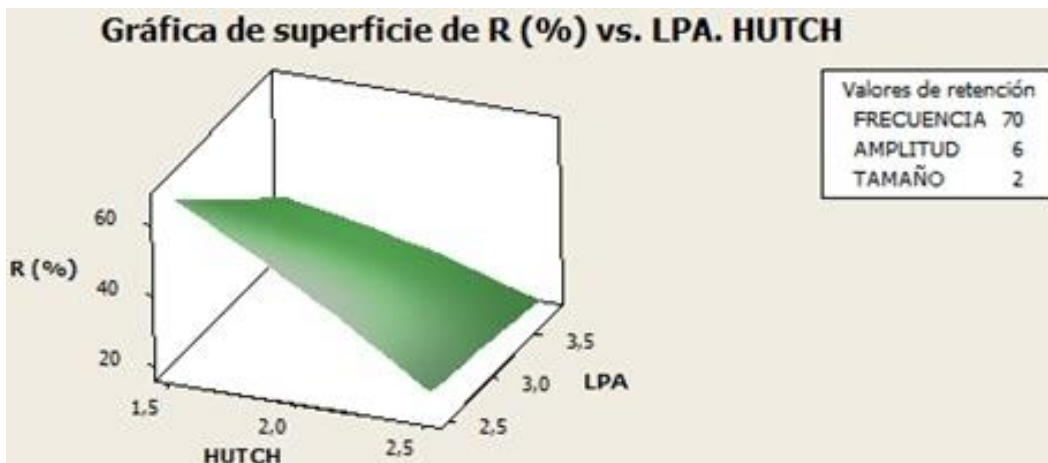


Figura 4-24: Superficie de respuesta LPA vs Tamaño.

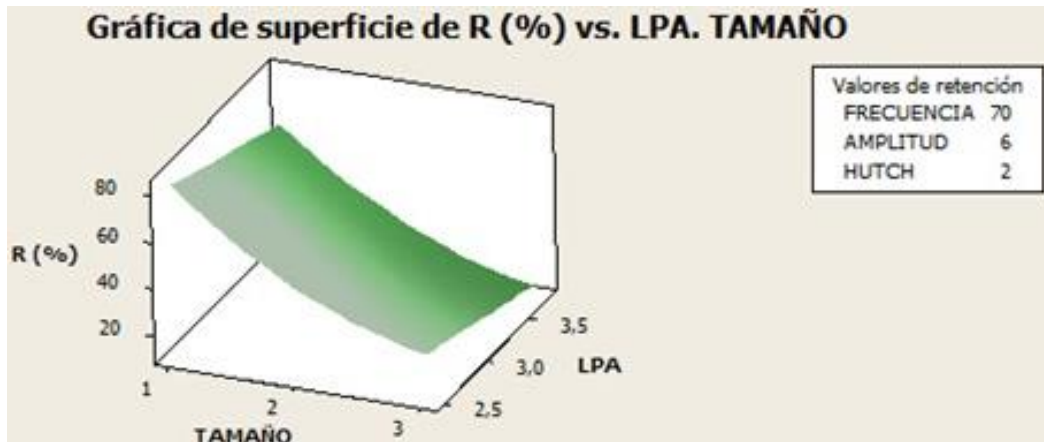


Figura 4-25: Superficie de respuesta Amplitud vs Tamaño.

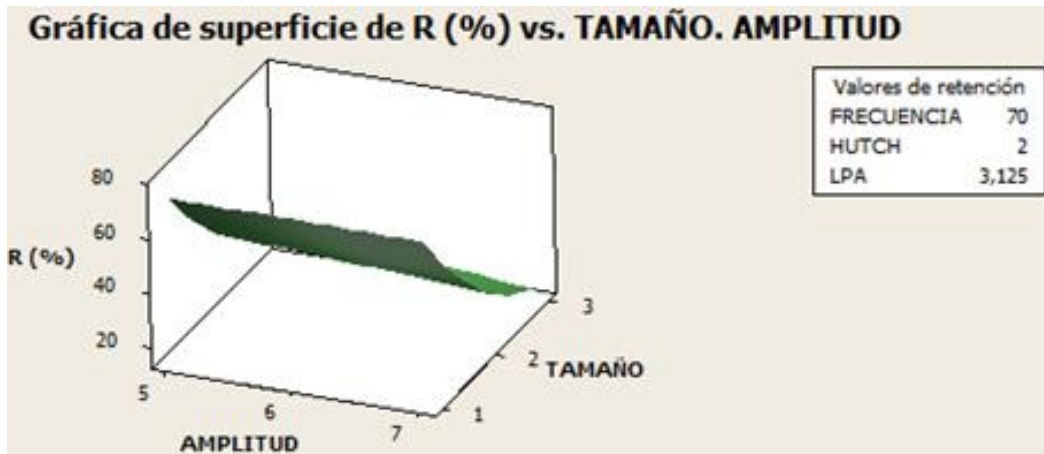
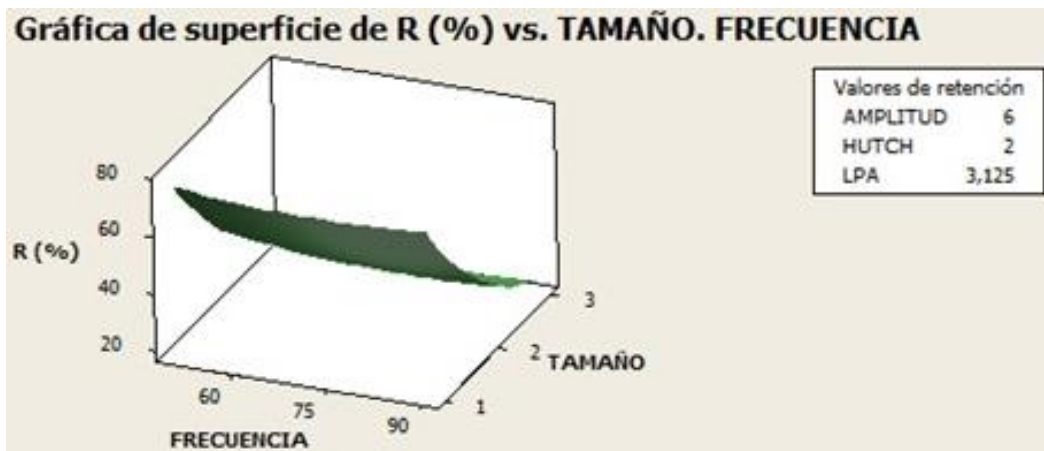


Figura 4-26: Superficie de respuesta Frecuencia vs Tamaño.



Para corroborar el análisis estadístico anteriormente realizado y poder asegurar que la mayor recuperación de oro se encuentre entre el 90% y 96%, se realizaron otros 12 experimentos con los valores entregados por el diseño de experimentos de cada una de las variables operacionales. La Tabla 4-7 muestra que la recuperación de oro para cada uno de los ensayos realizados se encuentra en el intervalo propuesto.

Tabla 4-7: Pruebas de validación diseño experimental.

Re	Rc	V	R %
6,58	6,78	14.74	95.0
6.47	6.69	14.94	96.7
10.81	10.98	9.11	94.52
15.3	54.9	9.1	95.9
17.77	17.87	5.59	93.45
7.7	8.26	12.1	93.2
14.7	17.57	3.11	94.22
15.3	13.58	2.34	95.21
2.23	2.26	7.89	97.71
15.08	15.62	6.40	96.54
1.77	1.78	4.6	92.48
43,8	22.5	3.54	97.64

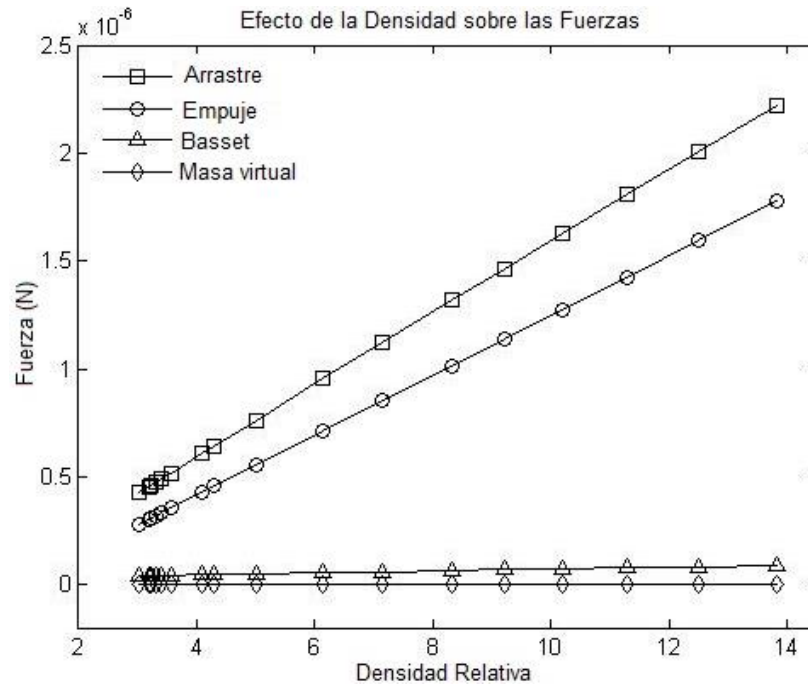
4.5 Importancia de las fuerzas hidrodinámicas

Se desarrolló un análisis de la influencia de cada una de las diferentes fuerzas hidrodinámicas planteada en la ecuación de trayectoria de las partículas para diferentes tamaños y densidades de partícula en flujo de agua pulsante. Los resultados de estos análisis se muestran en las Figuras 4-27 y 4-28. En la Figura 4-27 las partículas tienen un tamaño uniforme de 300 μm pero con una composición de densidades relativas en el intervalo de 3 a 13.8. La velocidad de fluidización del agua es de 5.841 cm/s y la concentración de sólidos es alrededor del 3% en un instante de tiempo $t=5$ s. Se aprecia que la fuerza de arrastre y la fuerza de empuje son las fuerzas dominantes y ambas tienen una relación lineal respecto a la densidad de las partículas. La fuerza de masa virtual tiene el orden de magnitud más pequeño de todas las fuerzas: 10^{-10} N. La fuerza de Basset es aproximadamente un orden de magnitud más bajo que la fuerza de arrastre.

En la Figura 4-28 se comparan las magnitudes relativas de las diferentes fuerzas hidrodinámicas involucradas, para todas las partículas con densidad relativa de 3.42 y manteniendo los otros parámetros constantes. El intervalo de tamaño es de 125 μm a

2000 μm . Se muestra en la Figura 4-28, que la fuerza de arrastre y la fuerza de empuje siguen siendo las fuerzas dominantes con una relación exponencial respecto al tamaño. Sin embargo, es de notar que las fuerzas de Basset, gradiente de presión y masa virtual pueden aumentar alrededor del 10% de la fuerza de arrastre para algunos tamaños de partícula.

Figura 4-27: Importancia relativa de las diferentes fuerzas hidrodinámicas respecto a la densidad, para partículas minerales de tamaño uniforme.



Comparando las Figuras 4-27 y 4-28 se observa que el tamaño de partícula tiene mayor efecto que la densidad sobre los cambios de magnitud de las fuerzas. Las fuerzas de Basset, gradiente de presión y masa virtual son relativamente pequeñas, pero si existe un flujo pulsante en el jig, existe una aceleración del flujo de líquido, y estas fuerzas pueden aumentar en uno o dos órdenes de magnitud conforme se aumenta el tamaño y la densidad de las partículas. En flujos uniformes donde no existe un gradiente de velocidad, estas fuerzas pueden despreciarse sin errores considerables.

Las Figuras 4-29 y 4-30 muestran que en el caso de los intervalos de densidad y tamaño considerados en este estudio, la fuerza de Basset es más significativa que la fuerza de masa virtual y que la fuerza debida al gradiente de presión. Además de la Figura 4-29 puede verse que a medida que aumentamos la densidad la fuerza de Basset y masa

virtual varían de manera exponencial, influenciando considerablemente el movimiento de las partículas y su posterior concentración.

Figura 4-28: Importancia relativa de las diferentes fuerzas hidrodinámicas respecto al tamaño, para partículas minerales de densidad constante.

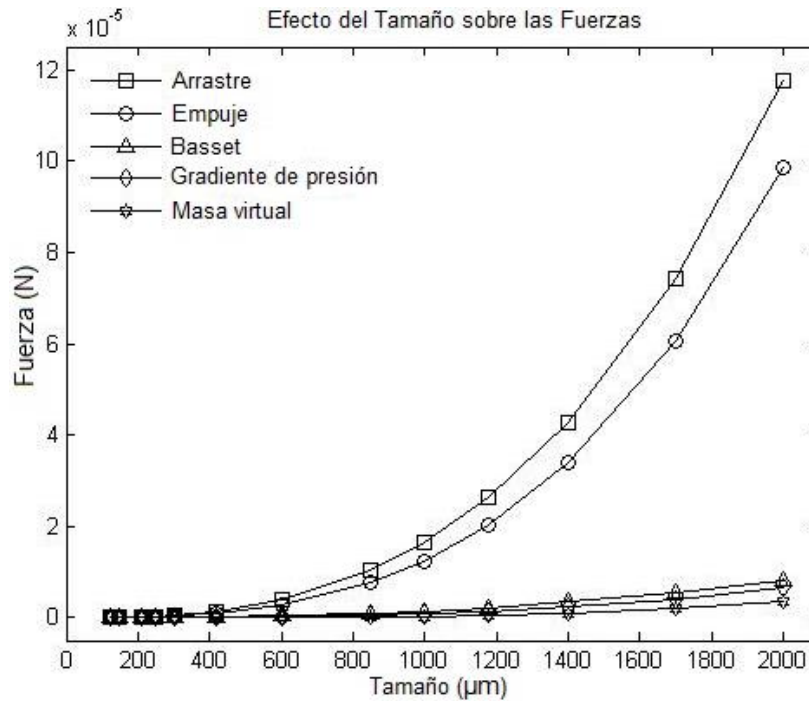


Figura 4-29: Comparación de las fuerzas de Basset, masa virtual y gradiente de presión respecto a la densidad.

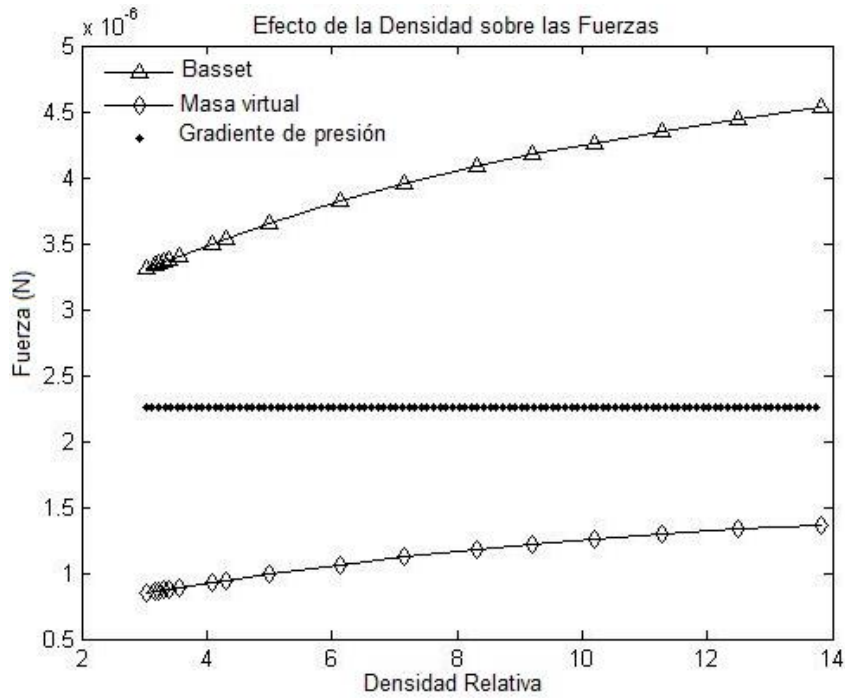
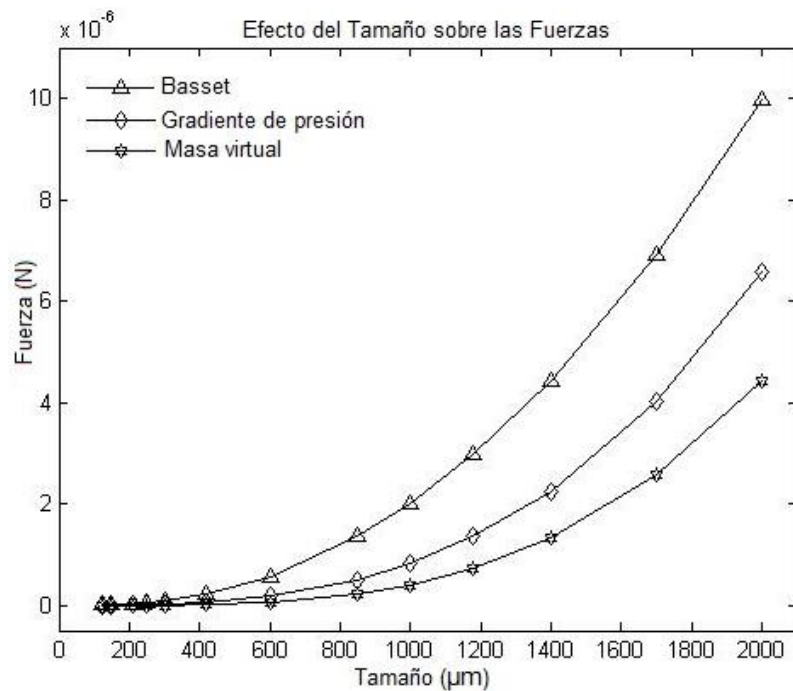


Figura 4-30: Comparación de las fuerzas de Basset, masa virtual y gradiente de presión respecto al tamaño.



La adición de las fuerzas inerciales (Basset, masa virtual y gradiente de presión) actúa modificando la altura y la longitud de las partículas al interior del jig, apreciándose que las fuerzas se afectan significativamente con el aumento del diámetro de la partícula. Este

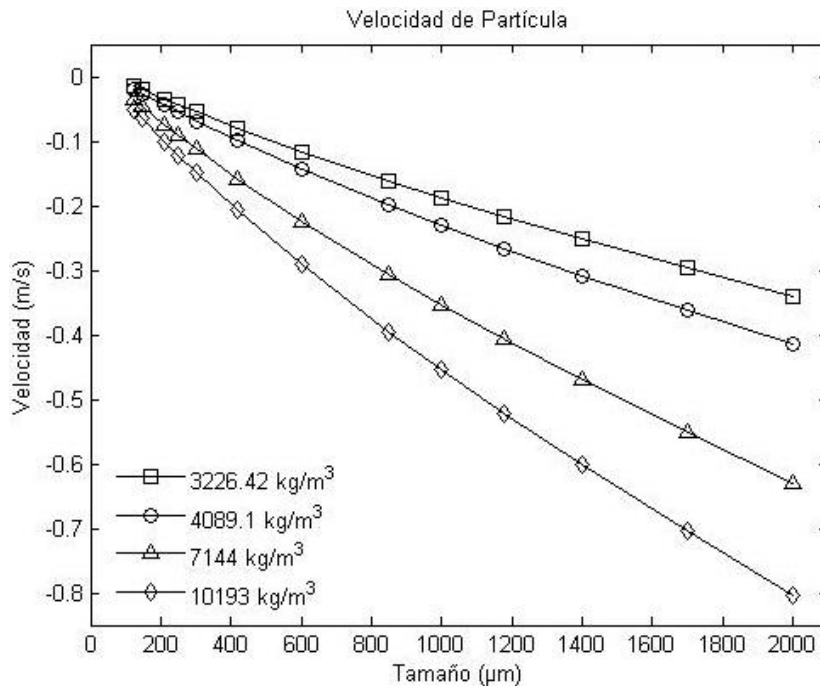
efecto se aprecia en la Figuras 4-28, a medida que se varia el diámetro, las fuerzas aumentan de manera exponencial, con la fuerza de Basset mayor a la fuerza de masa virtual (Figura 4-30).

En este estudio, las cinco fuerzas se mantienen en el cálculo de trayectoria ya que existen gradientes de velocidad altos en el jig, pese a que el costo computacional aumente considerablemente.

4.6 Velocidades de sedimentación obstaculizada

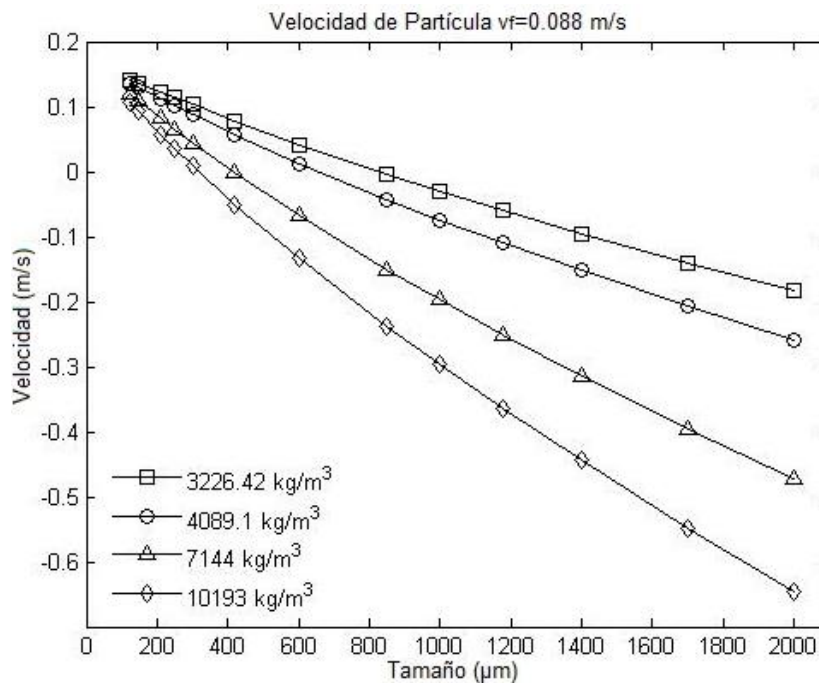
El jig es un equipo que favorece la sedimentación obstaculizada causada por una corriente de agua ascendente creando un lecho fluidizado al interior de la cámara de separación. Las partículas que posean velocidades de sedimentación obstaculizada menores a la velocidad del agua ascendente se reportarán en el sobre-flujo como producto de rechazo (producto liviano), por el contrario, si las velocidades de sedimentación obstaculizada de las partículas es mayor que la velocidad de la corriente de agua ascendente, se sedimentarán en el bajo-flujo como concentrado (producto pesado).

Figura 4-31: Velocidades de sedimentación de partículas en función del tamaño y la densidad en agua completamente en reposo.



La velocidad de sedimentación obstaculizada de las partículas se determina mediante sus propiedades físicas, tales como la densidad y el tamaño y por las propiedades de la suspensión, tales como la densidad de la suspensión. Los cambios de la velocidad de sedimentación obstaculizada de las partículas involucrando un intervalo amplio de densidades y tamaños, se muestran en las Figuras 4-31 y 4-32. En estas figuras, una partícula con una velocidad positiva se reportará en la corriente de rechazo y una con velocidad negativa se reportará en la corriente de concentrado. En la Figura 4-31 se muestran las velocidades terminales de partículas de diferentes tamaños y densidades en agua completamente en reposo. Se puede determinar a partir de la Figura 4-31 que la velocidad terminal incrementa con el tamaño y la densidad en agua estática. En la Figura 4-32, si se agrega un flujo de agua ascendente ($v_f=0.088$ m/s), el tamaño de partícula comenzará a ser significativo en la separación. Las partículas finas pesadas se reportan en la corriente de rechazo si su tamaño es inferior a un límite. Por ejemplo, una partícula cuya densidad es de 4089.1 kg/m^3 y cuyo tamaño es mayor a $700 \mu\text{m}$, se reportará en la corriente de concentrado ya que su velocidad de sedimentación es mayor a la velocidad del agua que asciende (Figura 4-32).

Figura 4-32: Velocidad de sedimentación de partículas en función del tamaño y la densidad en agua a una velocidad de flujo ascendente de 0.088 m/s.



4.7 Efecto de la adición de la pulsación

Se puede realizar un seguimiento del movimiento de las partículas al interior de la cámara de separación del jig, donde se observa la estratificación de las partículas. Cuando las partículas son alimentadas a la cámara del jig la estratificación ocurre después de 6 ciclos de pulsación. Las Figuras 4-33 a 4-37 muestran el movimiento pulsante de partículas que poseen un tamaño de $250\ \mu\text{m}$ y diferentes densidades; sometidas a un flujo de agua con los diferentes perfiles de pulsación (senoidal, triangular, diente de sierra adelantado, diente de sierra atrasado y trapezoidal), los cinco perfiles poseen una amplitud de $A=5\ \text{mm}$ y un periodo de oscilación de $T=0.2\ \text{s}$. Como el movimiento de las partículas es pulsante, se demuestra el efecto de interacción sólido-liquido presente entre las fases en el jig, donde las partículas oscilan a la misma frecuencia que el agua pero su amplitud es directamente proporcional a la amplitud del agua. El movimiento de las partículas se ve fuertemente afectado por la densidad. A medida que variamos la densidad de las partículas, las más livianas ($\rho=3188\ \text{kg/m}^3$ y $\rho=3562\ \text{kg/m}^3$) siguen un movimiento ascendente y se depositan en la corriente de sobre flujo, mientras que las partículas más pesadas ($\rho=5007\ \text{kg/m}^3$ y $\rho=6134\ \text{kg/m}^3$) se sedimentan en la parte inferior del jig saliendo por la corriente de concentrado.

Figura 4-33: Movimiento de partículas en flujo pulsante con perfil de pulsación senoidal.

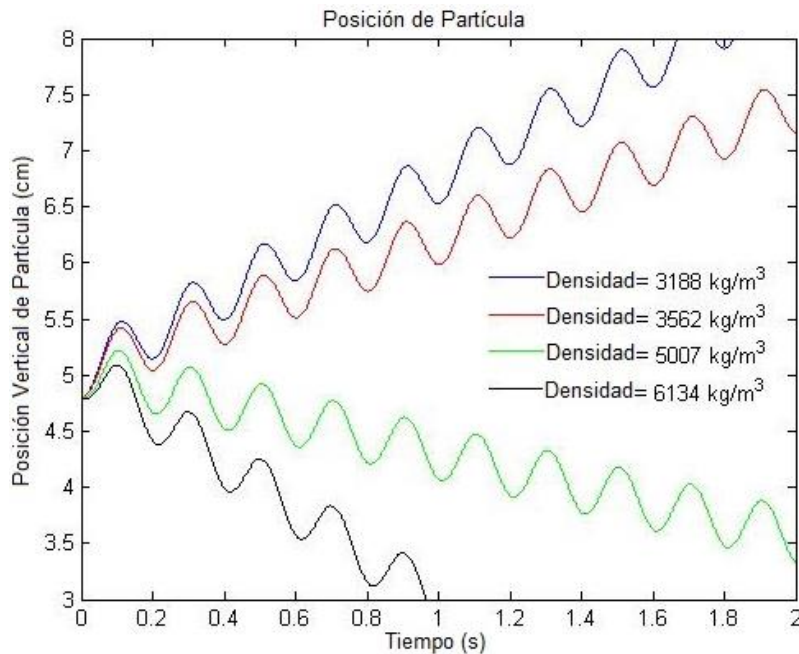


Figura 4-34: Movimiento de partículas en flujo pulsante con perfil de pulsación triangular.

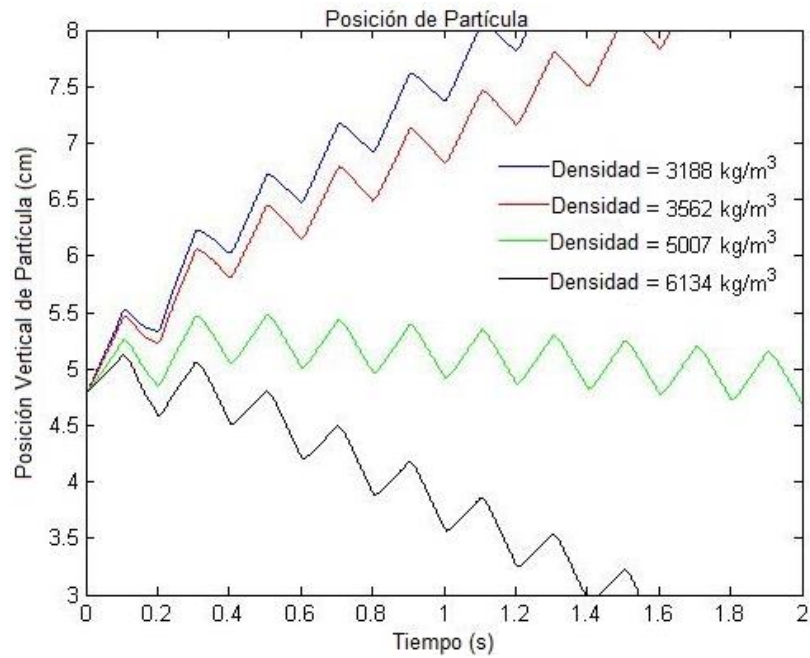


Figura 4-35: Movimiento de partículas en flujo pulsante con un perfil de pulsación diente de sierra adelantado.

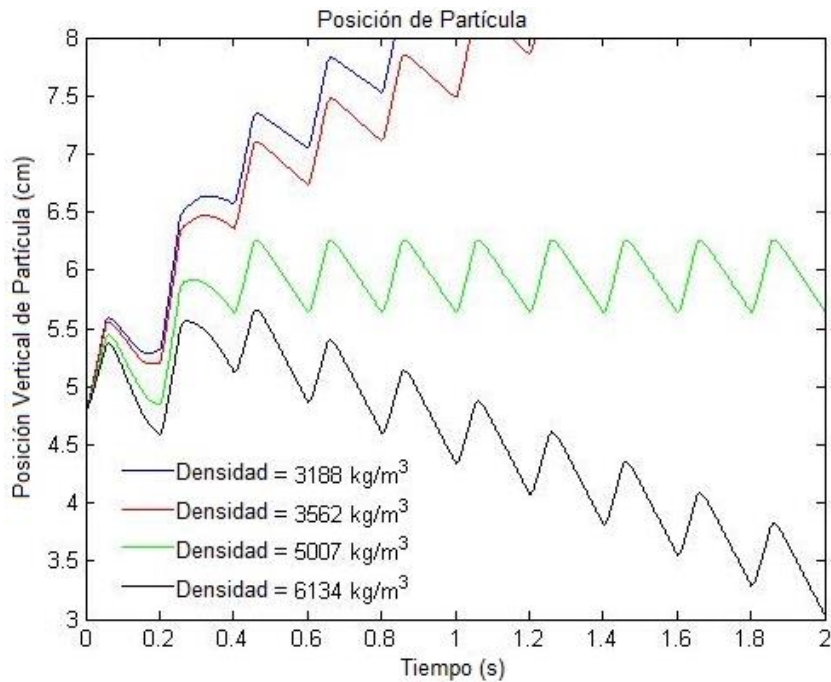


Figura 4-36: Movimiento de partículas en flujo pulsante con un perfil de pulsación diente de sierra atrasado.

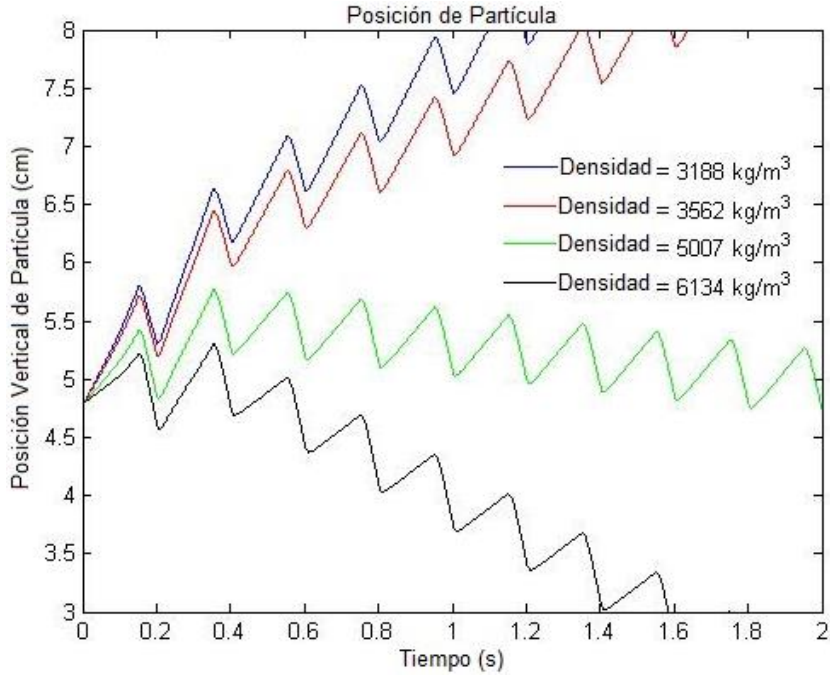
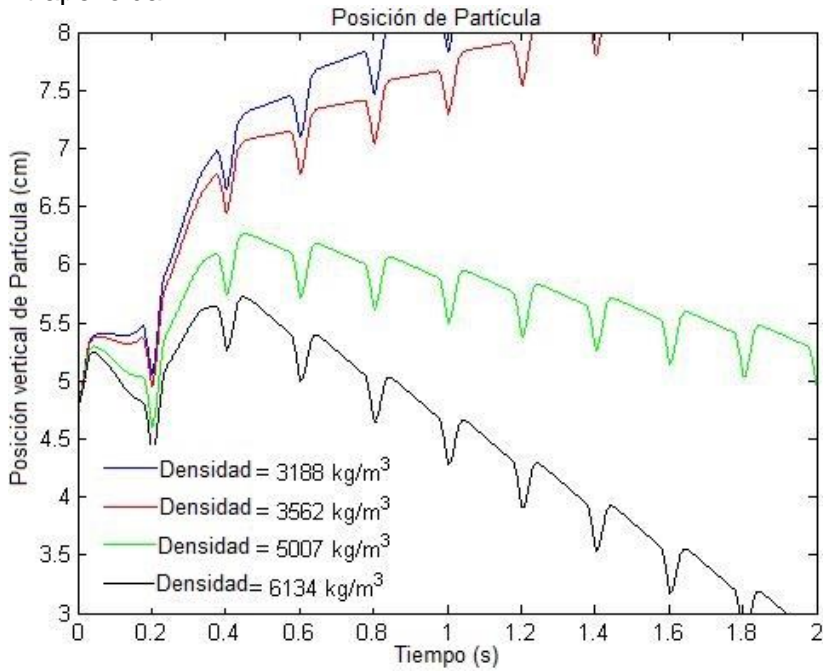


Figura 4-37: Movimiento de partículas en flujo pulsante con un perfil de pulsación trapezoidal.



La tasa a la cual las partículas alcanzan su estratificación es diferente en todos los perfiles, mientras una partícula liviana sometida a un perfil de pulsación senoidal tarda alrededor de $t=2$ s en salir de la columna del jig, la misma partícula sale de la columna en tan solo $t=1$ s cuando se le aplica una onda de pulsación trapezoidal. Con las partículas

pesadas ocurre todo lo contrario, tarda más en salir una partícula pesada con un perfil trapezoidal que con uno senoidal.

El análisis anterior muestra la necesidad de estudiar la manera como se estratifican las partículas sometidas a diferentes perfiles de pulsación, esto con el objetivo de optimizar el equipo de concentración y lograr una buena recuperación de las partículas minerales de interés.

La posición del desplazamiento vertical (ver Figuras 4-33 a 4-37) cuantifica el comportamiento graficando la altura de los diferentes tipos de partículas por separado. Todos los perfiles muestran estratificación gradual. Las posiciones verticales revelan que las partículas alcanzan la altura de descarga de mayor a menor en el siguiente orden: Trapezoidal (2 ciclos), diente de sierra atrasado (2.2 ciclos), diente de sierra adelantado (3 ciclos), triangular (3.5 ciclos) y senoidal (6 ciclos). Y la profundidad de concentrado de mayor a menor de la siguiente manera: senoidal (2 ciclos), triangular (2.2 ciclos), diente de sierra adelantado (2.3 ciclos), diente de sierra atrasado (2.6 ciclos) y trapezoidal (2.8 ciclos). Se demuestra que la altura de pico de las partículas es directamente proporcional a la velocidad máxima de pulsación a la entrada. Es decir las partículas tienen la misma frecuencia de pulsación pero su amplitud es proporcional al valor de velocidad aplicada.

La posición en dirección vertical de cada tipo de partícula entrega una buena comprensión del proceso de concentración gravimétrica en jigs. Comenzando desde una condición inicial donde cada tipo de partícula es inyectada desde la misma posición y a la misma velocidad; las partículas livianas se mueven hacia arriba mucho más rápido que las partículas pesadas durante el periodo de fluidización. Durante el periodo de succión, todas las partículas caen, pero las partículas más pesadas caen mucho más rápido que las livianas. Los resultados anteriores dan a entender que se pueden optimizar los perfiles de pulsación para mejorar el desempeño del equipo concentrador, en cuanto a la recuperación, razón de enriquecimiento y al consumo de tiempo y energía.

En las Figuras 4-33 a 4-37 se observa la diferencia de estratificación entre los perfiles de pulsación. Entre más grande sea la distancia de separación de las partículas livianas y pesadas, mayor será la estratificación en el lecho del jig. La Figuras 4-33 a 4-37 indican que todos los perfiles estratifican las partículas alrededor del cuarto ciclo. Puede verse que después del sexto ciclo de pulsación existe poca diferencia en el grado de

separación entre los perfiles triangular, diente de sierra atrasado y diente de sierra adelantado, mientras que los perfiles senoidal y trapecoidal necesitan más ciclos de pulsación para poder obtener una estratificación completa de las partículas.

4.8 Trayectorias de partículas

Se revisaron los patrones de trayectorias de partículas que pueden ayudar a entender el proceso de estratificación al interior de la cámara de separación del jig. Las Figuras 4-38 a 4-43 muestran la trayectoria que siguen las partículas obtenidas con los cinco perfiles de pulsación para un diámetro de 300 μm y una variación de densidad en el intervalo de 3029 a 13822 kg/m^3 . Para cada perfil de pulsación, las partículas se inyectaron desde la misma posición ($x=0.048$, $y=0.048$ m) y a la misma velocidad ($u_{px}=0.001587$ m/s y $u_{py}=0$ m/s). Todos los perfiles revelan patrones muy diferentes en cuanto a la velocidad de estratificación y al valor de densidad de corte a la cual las partículas se reportan como rechazo o concentrado. En el ciclo de perfil senoidal (Figura 4-38) las partículas con una densidad mayor o igual a 3562 kg/m^3 se estratifican completamente; este comportamiento es muy diferente en todos los demás perfiles donde solamente las partículas con una densidad mayor o igual a 4089 kg/m^3 se reportan en la corriente de concentrado (Figuras 4-39 a 4-42). Un análisis general de las Figuras 4-38 a 4-43 muestra que el tiempo de residencia de las partículas en la cámara del jig es bastante sensible al perfil de pulsación aplicado, al tamaño y a la densidad de las partículas. Una partícula de densidad $\rho < 3563$ kg/m^3 saldrá más rápido cuando se le aplica un perfil STB que cuando se le aplica uno SENO debido a que el perfil STB produce un pulso de fluidización muy grande en un intervalo de tiempo muy pequeño generando una velocidad del fluido más grande que la velocidad de sedimentación de la partícula fina con un periodo de defluidización (succión) grande aumentando la aceleración diferencial y el escurrimiento intersticial permitiendo la sedimentación obstaculizada de las partículas gruesas. Caso contrario si la densidad es $\rho > 3563$ kg/m^3 , la partícula permanecerá menor tiempo aplicándole un perfil SENO y se quedará un tiempo mayor con un perfil STB. Esto se puede ver de forma más clara en la Figura 4-43 donde una partícula de densidad $\rho = 4089$ kg/m^3 permanecerá un tiempo mayor en el interior de la cámara con un perfil STB que con los demás perfiles de pulsación.

Figura 4-38: Patrones de trayectoria de partículas de 300 μm sometidas al perfil senoidal.

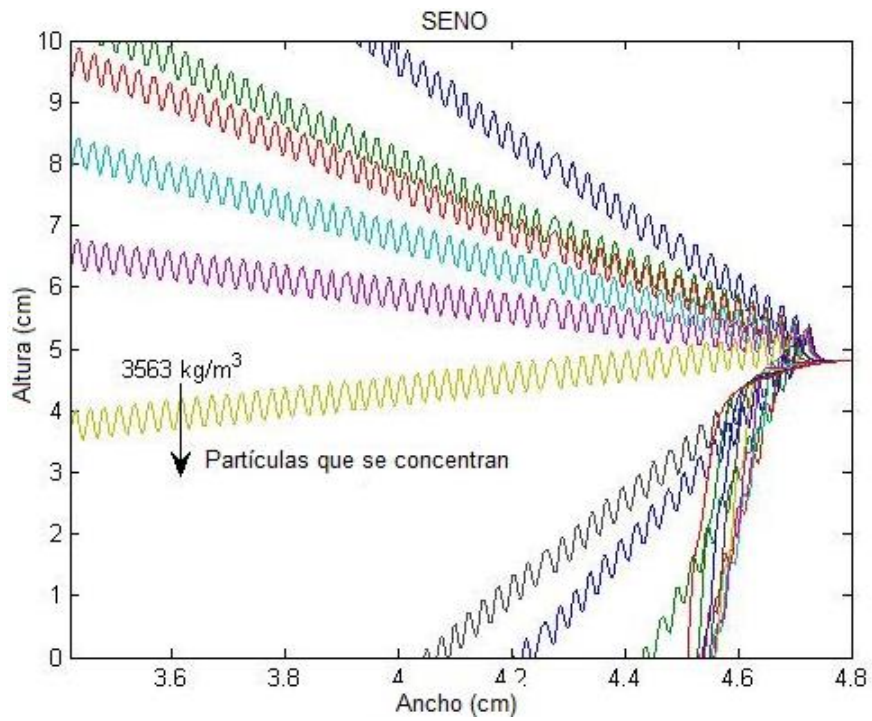


Figura 4-39: Patrones de trayectoria de partículas de 300 µm sometidas al perfil triangular.

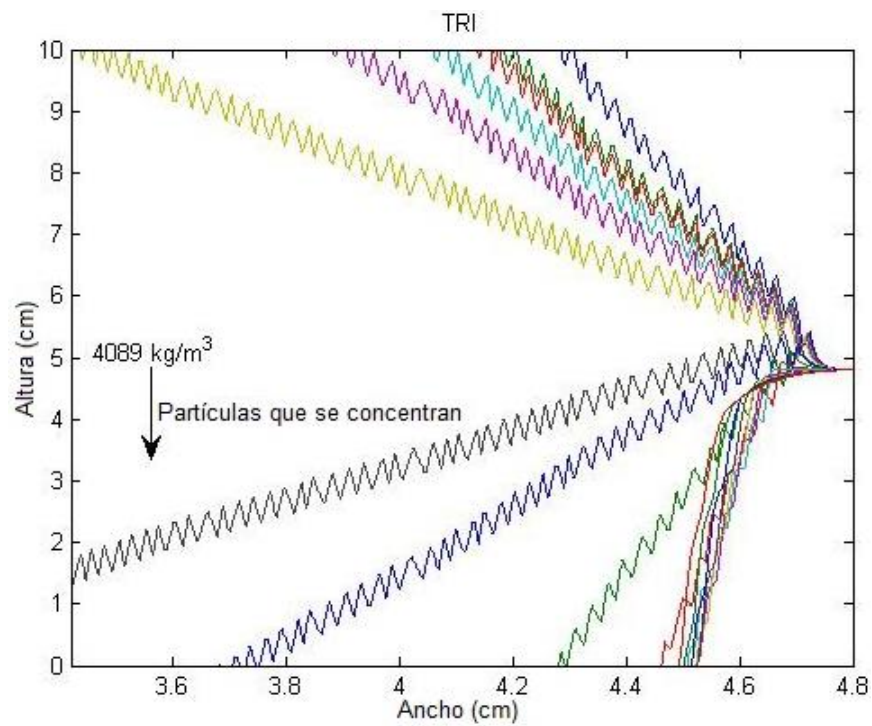


Figura 4-40: Patrones de trayectoria de partículas de 300 μm sometidas al perfil diente de sierra adelantado.

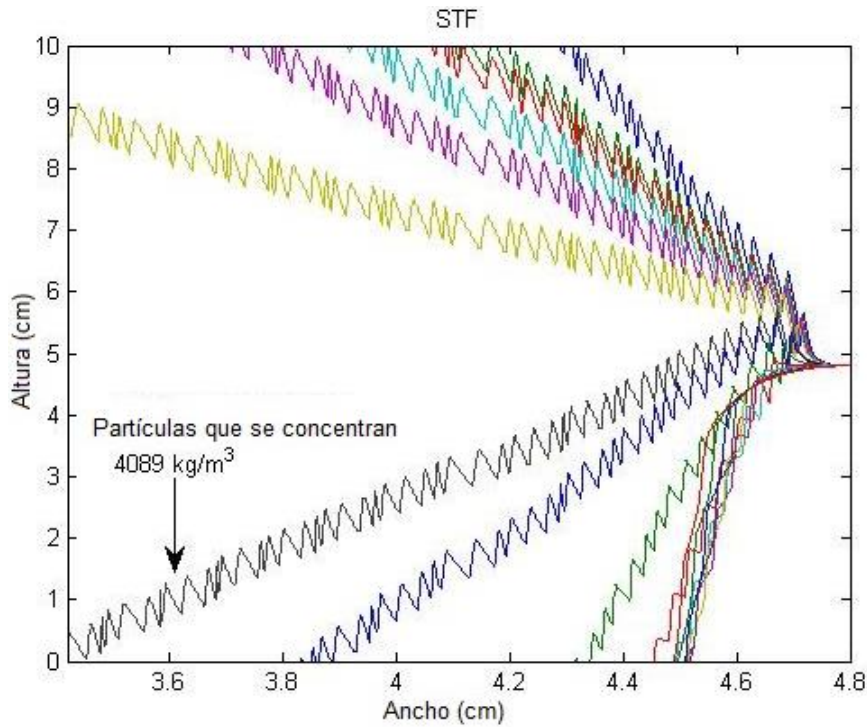


Figura 4-41: Patrones de trayectoria de partículas de 300 μm sometidas al perfil diente de sierra atrasado.

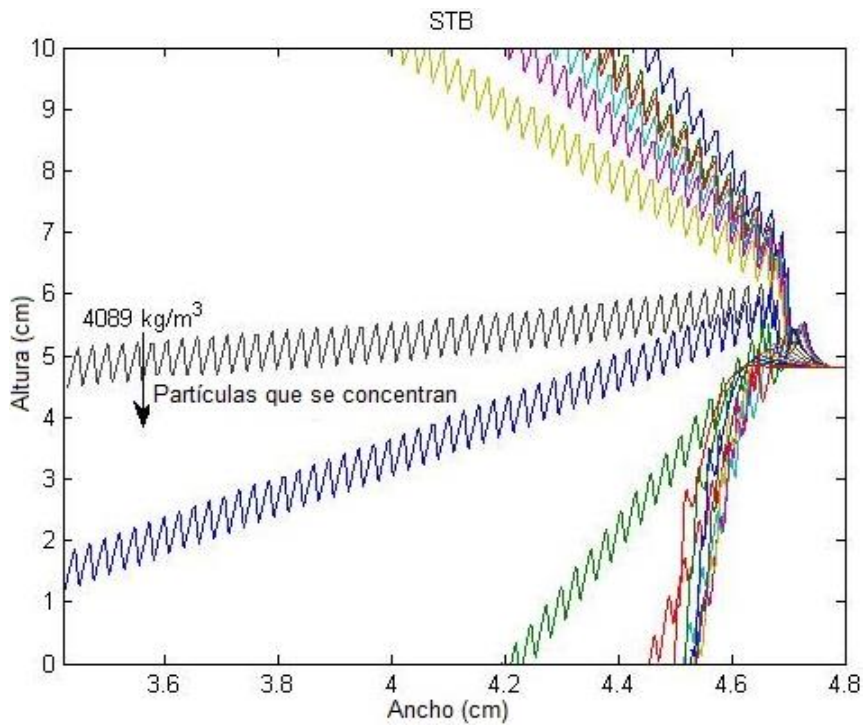


Figura 4-42: Patrones de trayectoria de partículas de 300 μm sometidas al perfil trapezoidal.

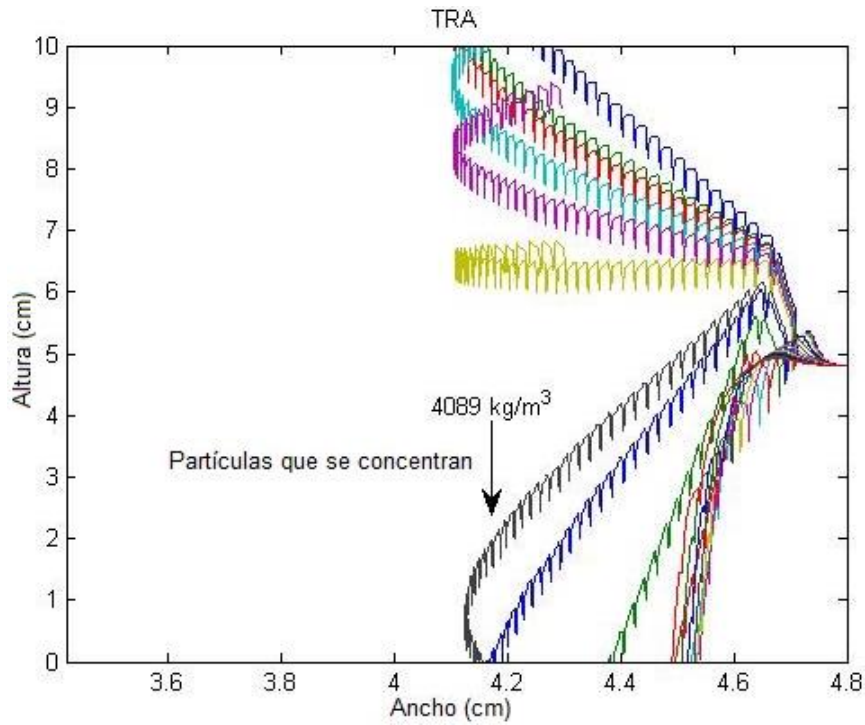
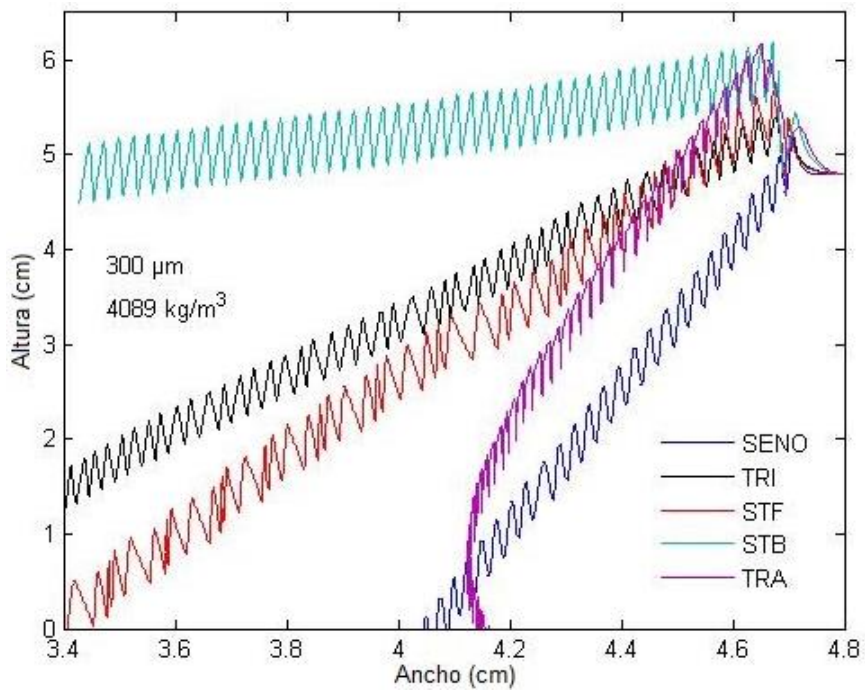


Figura 4-43: Comparación de la trayectoria de partícula con los diferentes perfiles para una partícula de 300 μm y 4089 kg/m^3 .



La Figura 4-43 muestra la sensibilidad que posee la trayectoria de las partículas ante la forma del perfil de pulsación. Se aprecian los desplazamientos de una partícula de tamaño $d_p = 300 \mu\text{m}$ y densidad $\rho_p = 4089$. A medida que avanza la estratificación hacia la parte inferior de la columna, una partícula de estas características tendrá un mayor tiempo de residencia ($t=20$ s) en la cámara del jig con el perfil STB generando un mayor consumo de agua y un gasto de energía innecesario.

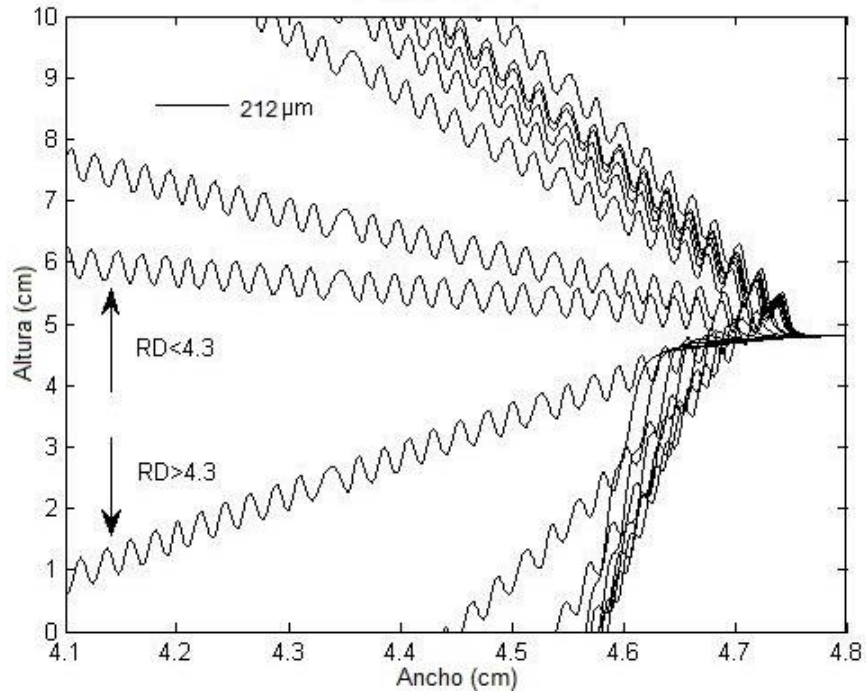
4.8.1 Efecto de las fuerzas inerciales sobre la trayectoria de las partículas

En esta sección se muestra el efecto que tiene la combinación de las diferentes fuerzas hidrodinámicas en la determinación de la trayectoria de las partículas que ingresan a la cámara de separación del jig. Los parámetros que se mantienen constantes, a menos que se especifique lo contrario, son: el diámetro de la partícula y la velocidad inicial de la partícula en la dirección axial y longitudinal, que son $d=212 \mu\text{m}$, $u_{px}=0.001587$ m/s y $u_{py}=0$ respectivamente, la densidad relativa se evalúa en dos valores uno de densidad baja $DR=3.562$ y otra de densidad alta $DR=13.8$. Para el análisis, las partículas se pulsaron en una zona de $5 \times 10 \text{ cm}^2$ inyectándose desde una posición $x=0.048$ m e $y=0.048$ m (Figura 4-2). Para efectos de validación del modelo con los datos experimentales se le impartió al agua una forma de onda senoidal donde la amplitud y frecuencia de la velocidad de oscilación del flujo se fijaron en 0.08816 m/s y 5 Hz, respectivamente. Se toman estos valores de referencia para el modelo pues de la sección 4-4 el diseño de experimentos entregó que la máxima recuperación se logra con una frecuencia de 5Hz y una amplitud de pulsación de 5mm , dando la velocidad de oscilación anteriormente mencionada.

La formulación elemental del modelo contiene las fuerzas de arrastre, gravedad y gradiente de presión. La fuerza de masa virtual y la fuerza de Basset se añaden sucesivamente al modelo para observar la diferencia que pueden presentar las trayectorias de las partículas cuando se desprecian estas fuerzas.

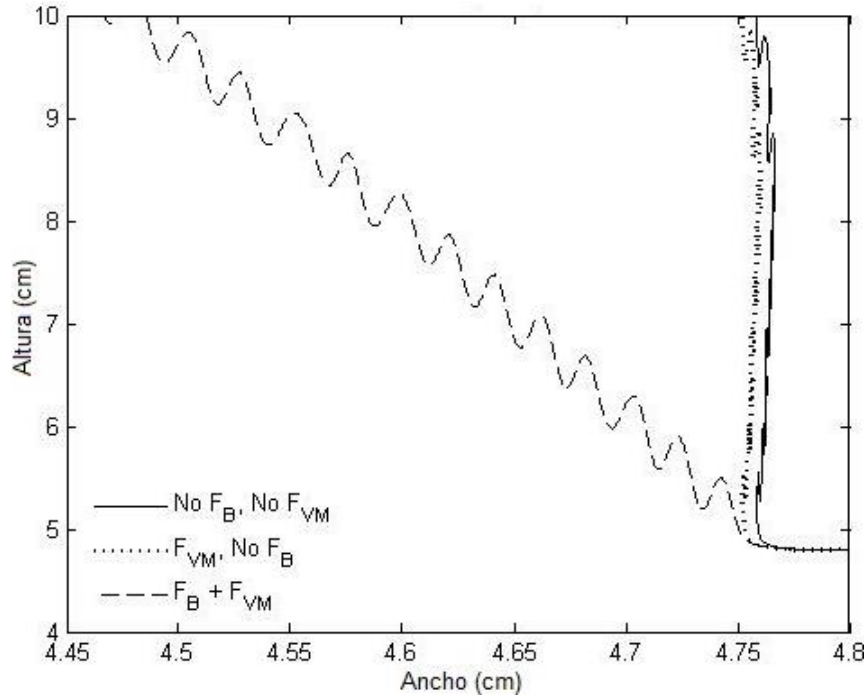
Las Figuras 4-44 y 4-45 muestran los resultados. Para este caso, en la Figura 4-44 se observa la trayectoria completa de las partículas de tamaño uniforme ($d_p = 212 \mu\text{m}$) que varían en un intervalo de densidad relativa de $DR=3.026$ a $DR=13.8$ en el jig. En esta figura las partículas que poseen una densidad relativa menor a 4.3 se reportan directamente en la corriente de rechazo (sobre-flujo) mientras las otras ($DR > 4.3$) caen al fondo del lecho del jig reportándose en la corriente de concentrado.

Figura 4-44: Efecto de las fuerzas de Basset y masa virtual sobre la trayectoria de una partícula fina variando la densidad relativa.



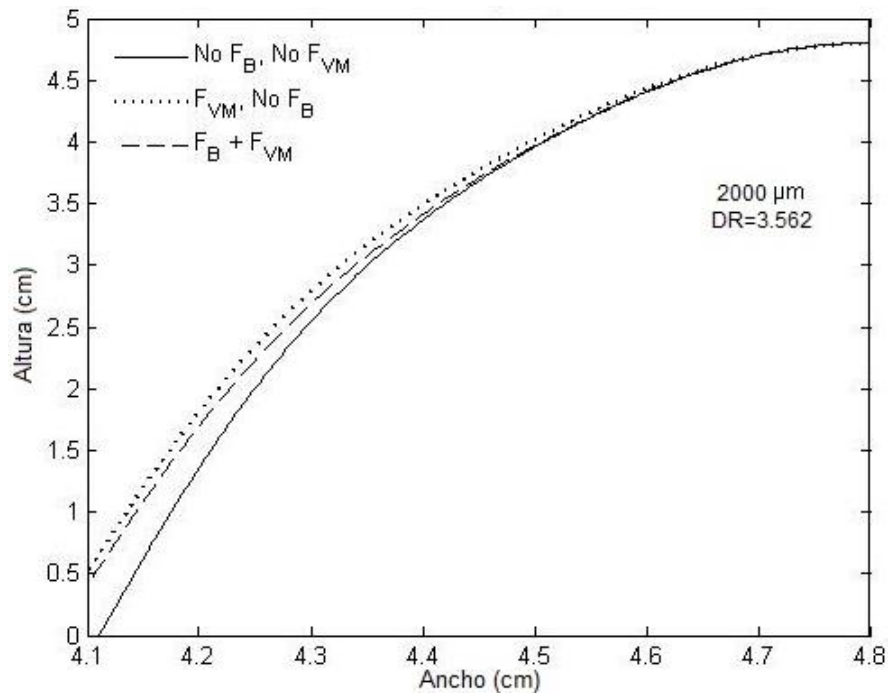
En la Figura 4-45 (partícula de $DR=3.562$), la fuerza de Basset incrementa la longitud de la trayectoria de las partículas alrededor de 10 veces el diámetro de la partícula mientras que la fuerza de masa virtual parece tener un efecto menor sobre la trayectoria (1.5 diámetros de partícula). Los resultados de la fuerza de masa virtual son consistentes con el análisis acerca del gradiente de velocidad desarrollado alrededor de la partícula debido a su tamaño. Cuando se incluye la fuerza de Basset, la amplitud de las oscilaciones de la partícula disminuyen mientras que el desplazamiento longitudinal incrementa, desplazando la partícula y ocasionando que se incremente su tiempo de residencia en el interior de la cámara del jig.

Figura 4-45: Efecto de la fuerza de Basset y masa virtual sobre la trayectoria de una partícula fina con densidad relativa $DR=3.562$.



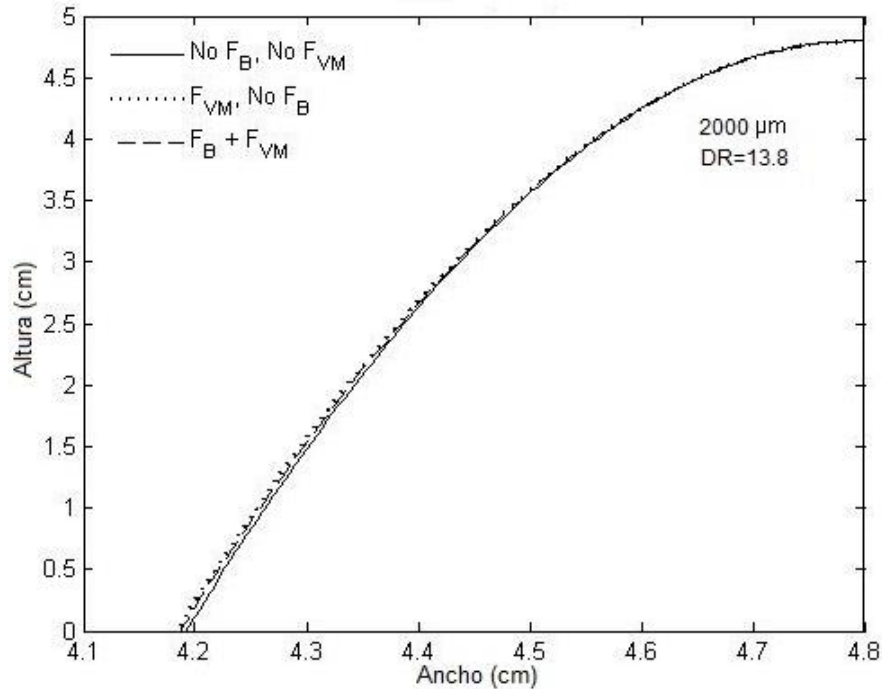
Cuando el modelo se analiza con un diámetro de partícula grueso se escoge un diámetro de 2000 μm aproximado al límite de operación del equipo bajo las condiciones de amplitud y frecuencia mencionadas, las densidades relativas utilizadas fueron 3.562 y 13.8, los demás parámetros permanecen en el mismo valor del caso anterior. Las Figuras 4-46 y 4-47 muestran que las fuerza de Basset y masa virtual tienen menos efecto sobre la trayectoria para tamaños de partícula grueso y densidades altas que para tamaños finos. Este resultado es esperado ya que el gradiente de velocidad de la partícula aumenta a medida que el diámetro y la densidad aumentan. Las fuerzas de Basset, masa virtual y Gradiente de presión tienen poco efecto sobre la trayectoria de partículas. La fuerza de Basset y masa virtual tienen un efecto mayor sobre las partículas finas-livianas que sobre las gruesas-pesadas, lo cual se debe a que estas fuerzas son significativas en valores de número de Reynolds de partícula (ecuación 1.4) menores a 1000. (Lukerchenco, Dolansky, & Vlasak, 2012; Niño & Garcia, 1994).

Figura 4-46: Efecto de las fuerzas de Basset y masa virtual sobre la trayectoria de una partícula gruesa con densidad relativa $DR=3.562$.



Las fuerzas hidrodinámicas que actúan sobre la trayectoria de las partículas en un equipo de concentración gravimétrica varían significativamente con el tamaño, la densidad de las partículas y las propiedades de la suspensión. La fuerza de masa virtual y Basset afectan significativamente la trayectoria de las partículas en la cámara del jig. Finalmente se muestra a partir de las Figuras 4-45, 4-46 y 4-47 que despreciar estas fuerzas en el modelo de movimiento de partículas para lechos pulsados no genera una buena explicación del fenómeno de interacción sólido-líquido en equipos de concentración gravimétrica.

Figura 4-47: Efecto de las fuerzas de Basset y masa virtual sobre la trayectoria de una partícula gruesa con densidad relativa DR=13.8.



4.8.2 Fuerzas de interacción partícula-fluido

La Figura 4-48 entrega los valores de fuerza con perfil de pulsación senoidal, donde se indica si las partículas livianas o pesadas tienen suficiente fuerza de interacción partícula-fluido para superar su respectiva fuerza gravitacional y lograr un movimiento ascendente. La fuerza de interacción adimensional partícula-fluido (F_{p-i}) está dada como:

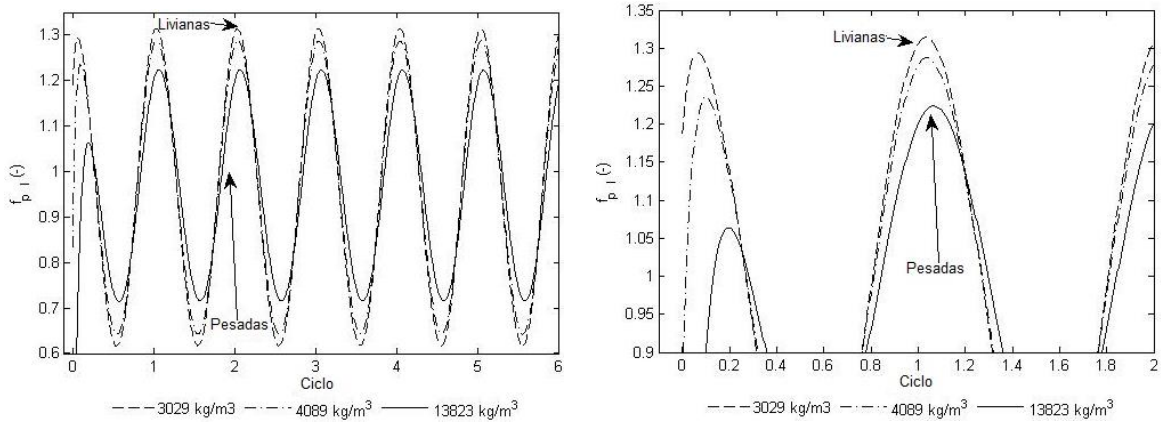
$$F_{p-i} = \frac{(V_{p,i}\rho_l g + F_{D,i} + F_{VM,i} + F_{p,i} + F_{B,i})}{m_i g} \quad (4.2)$$

Las diferencias entre la fuerza de interacción partícula-fluido adimensional para las partículas livianas y pesadas en un sistema identifica cuál partícula tiene mayor aceleración.

En la Figura 4-48, cuando la velocidad del agua, asciende las partículas livianas tienen una fuerza ascendente más grande superando su fuerza gravitacional mientras que las partículas pesadas tienen una fuerza ligeramente menor. A medida que avanzan los ciclos este proceso se invierte gradualmente debido a que las partículas livianas se mueven hacia la parte superior donde la porosidad es cada vez mayor experimentando menor interacción hidrodinámica; al inicio del primer ciclo de pulsación las partículas livianas tienen una fuerza $F_{p-i} > 1$ resultando en una aceleración ascendente, mientras

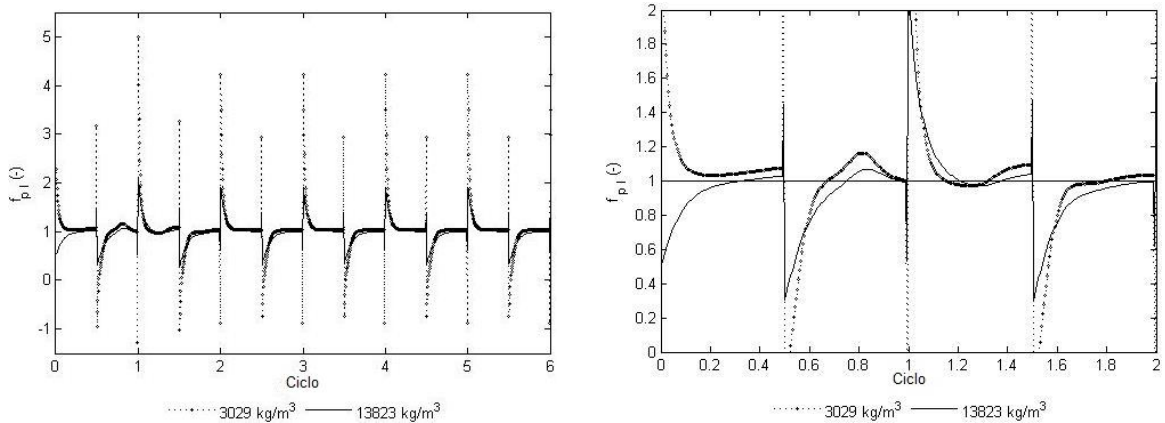
que las partículas pesadas tienen una fuerza $F_{p-l} < 1$, es decir la fuerza de gravedad es mayor y las partículas pesadas comienzan a descender con mayor velocidad de sedimentación depositándose en la parte inferior del lecho obteniéndose después del cuarto ciclo una separación completa de las partículas.

Figura 4-48: Fuerza de Interacción adimensional partícula–fluido para un perfil senoidal.



- **Otros perfiles de pulsación**

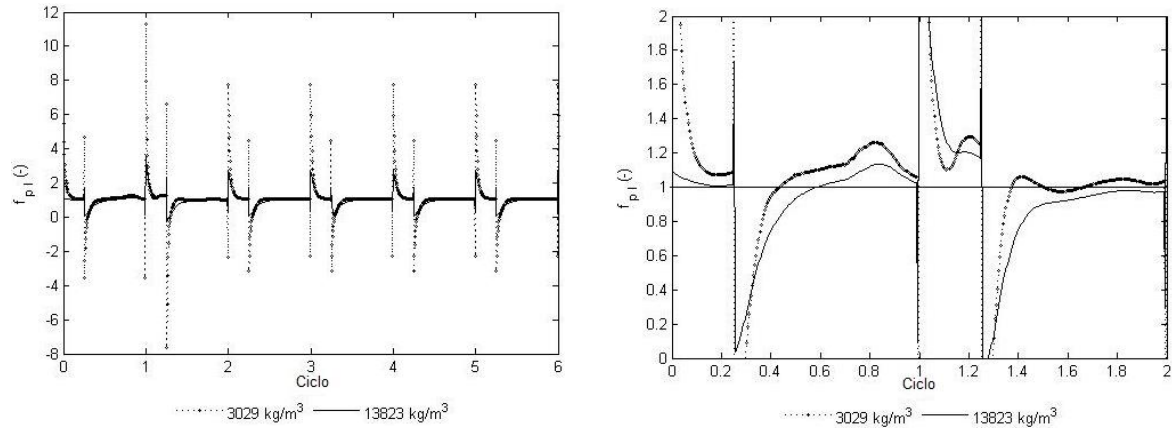
Figura 4-49: Fuerza de interacción adimensional partícula –fluido para un perfil triangular.



El perfil triangular dado en la Figura 4-49 muestra que los valores de F_{p-l} de las partículas pesadas son más altos que el perfil senoidal ya que la velocidad de entrada es más alta generando mayor interacción sólido-líquido. La diferencia entre los valores de f_{p-l} de las partículas pesadas y livianas es muy pequeña para el perfil triangular, indicando que las partículas se desplazan casi de la misma forma en el interior del lecho. Las partículas se estratifican rápidamente durante la etapa de fluidización, incrementando la

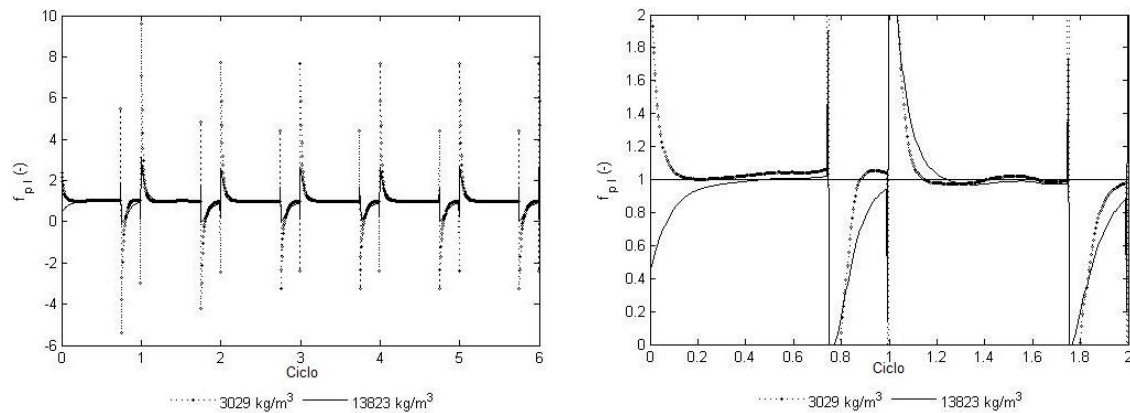
interacción hidrodinámica y ocasionando mayor desplazamiento. Este comportamiento da lugar a un perfil de fuerza en forma de S (horizontalmente a lo largo del pico de fluidización).

Figura 4-50: Fuerza de interacción adimensional partícula-fluido para un perfil diente de sierra atrasado.



Para un perfil diente de sierra atrasado, como se observa en la Figura 4-50, en el periodo de succión durante la sedimentación, las partículas experimentan una fuerza de interacción positiva, empujando hacia arriba a las partículas livianas con más facilidad que las partículas pesadas, ya que las partículas livianas experimentan una fuerza positiva más alta cuando están descendiendo. Esto ocurre a lo largo de cada ciclo dando lugar a un ascenso pronunciado de las partículas originando una estratificación debido a que las partículas pesadas tiene una gran oportunidad de pasar a través de las partículas livianas y sedimentarse.

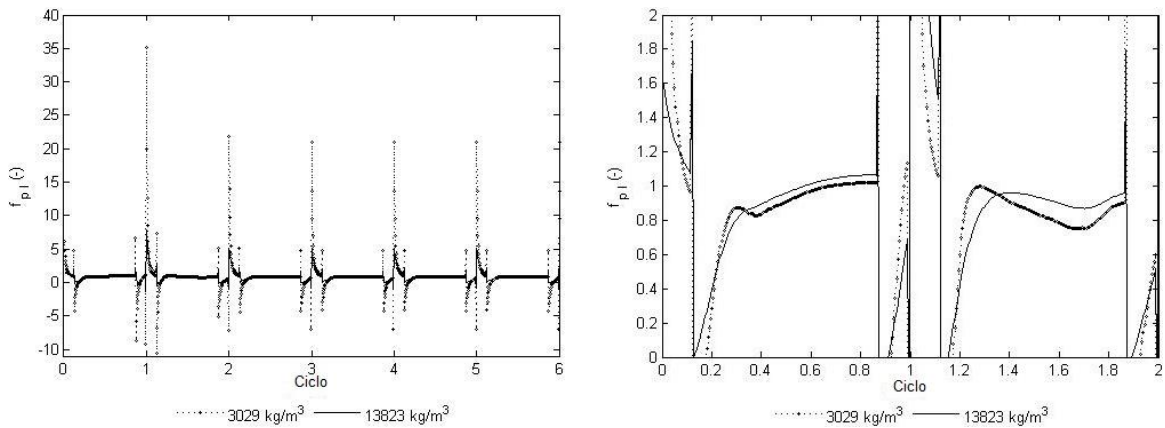
Figura 4-51: Fuerza de interacción adimensional para un perfil diente de sierra adelantado.



Los resultados de los valores de F_{p-l} del perfil diente de sierra hacia adelante mostrados en la Figura 4-51 son típicos de un sistema de concentración gravimétrica. Todos los valores de la interacción partícula-fluido oscilan alrededor de una media. Todas las partículas livianas tienen consistentemente un valor $F_{p-l} > 1$ esto guía a las partículas livianas hacia la corriente de rechazo. Las partículas pesadas están forzadas a moverse hacia abajo ($F_{p-l} < 1$) permitiendo el flujo ascendente de partículas livianas. Es fácil imaginar que el periodo de succión de este ciclo es redundante ya que solamente existe una pequeña fracción de segundo para la caída de las partículas.

Finalmente el perfil de pulsación trapezoidal (ver Figura 4-52), al igual que los demás perfiles estudiados muestra cierta inestabilidad en los valores de F_{p-l} . Cuando las partículas se están segregando y caen libremente sin obstaculizarse una contra otra, alcanzan eventualmente valores picos de $F_{p-l} \sim 1$ esto muestra que las partículas caen o ascienden el tiempo suficiente logrando alcanzar su velocidad terminal, donde su peso es igual a las fuerzas hidrodinámicas (es decir, la aceleración es cero). Las partículas pesadas y livianas tienen diferentes valores de velocidad terminal que proporciona la concentración de las partículas alimentadas al jig. Los resultados muestran la necesidad de entender la interacción hidrodinámica entre las partículas y el fluido para lograr una buena optimización y desempeño del jig como concentrador.

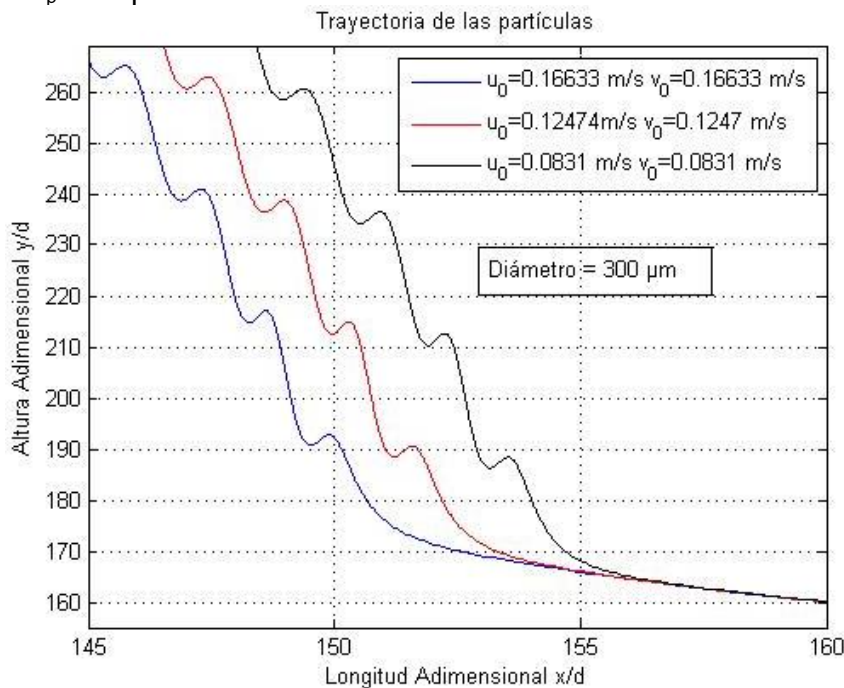
Figura 4-52: Fuerza de interacción adimensional partícula-fluido para un perfil trapezoidal.



4.9 Análisis de sensibilidad

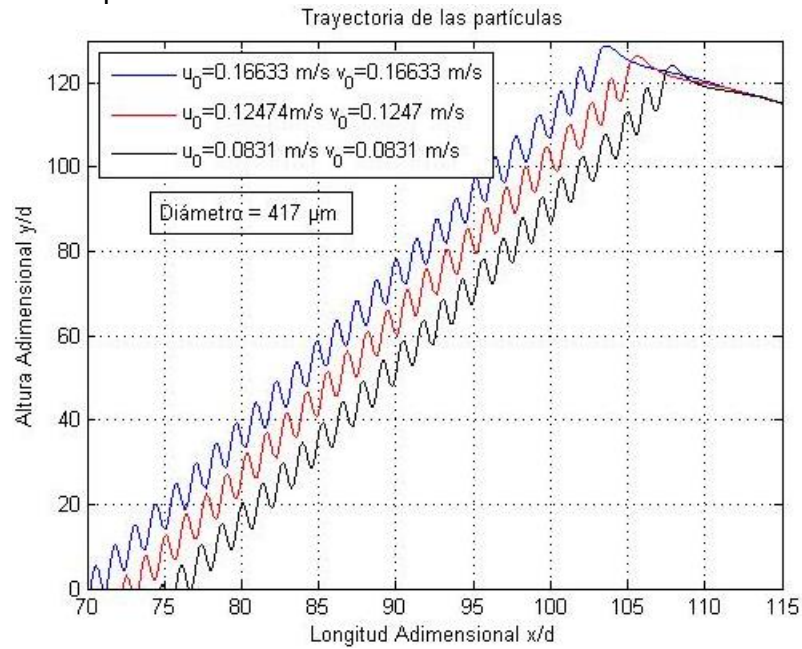
En las secciones 4.5 y 4.8 se encontró que el modelo de trayectoria de partículas es afectado por las diferentes fuerzas involucradas. En esta sección se discutirá cómo las condiciones iniciales del modelo y la densidad de las partículas afectan en gran medida la trayectoria de las partículas. Por ello el análisis subsecuente es la variación de la velocidad inicial de las partículas. Los diámetros de partículas usados son $300\ \mu\text{m}$ y $417\ \mu\text{m}$. Las Figuras 4-53 y 4-54 muestran que ocurre cuando se modifican las velocidades iniciales horizontales y verticales de las partículas. Cuanto mayor sean las velocidades iniciales, las trayectorias son más largas. Esto se debe al hecho que la partícula alcanza una velocidad alta relativa al fluido con una velocidad inicial alta.

Figura 4-53: Efecto de la velocidad inicial sobre la trayectoria de partícula de diámetro $d_p=300\ \mu\text{m}$.



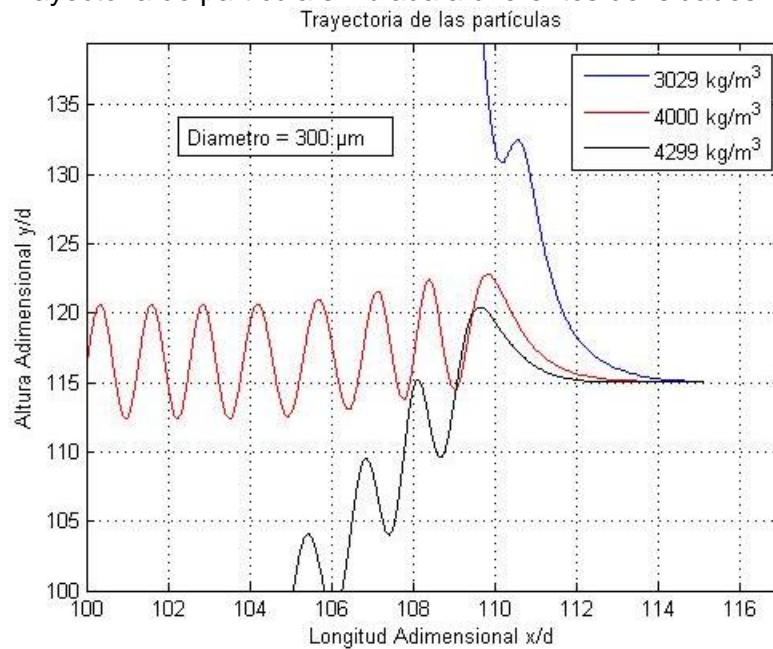
Otro parámetro que es significativo en la concentración de minerales en lechos pulsados es la densidad de las partículas. El modelo se simuló variando la densidad de las partículas en el intervalo de densidades calculadas experimentalmente para el material de interés (3029 , 4000 y $4299\ \text{kg/m}^3$) conservando las mismas condiciones de campo de velocidad del fluido y manteniendo un diámetro constante de $300\ \mu\text{m}$ y velocidades iniciales de partícula en $u_0=v_0 = 0.055\ \text{m/s}$. Las fuerzas que actuaron sobre el modelo fueron el empuje, arrastre, masa virtual y Basset. Las trayectorias se muestran en la Figura 4-55.

Figura 4-54: Efecto de la velocidad inicial sobre la trayectoria de partícula de diámetro $d=417 \mu\text{m}$.



Como se observa en la Figura 4-55, a menor densidad de partícula esta se reportará en la corriente de sobre-flujo (rechazo) y a mayor densidad la partícula saldrá en la corriente de concentrado, generándose así, una densidad de corte, donde las partículas tendrán la misma probabilidad de reportarse en la descarga o en el rebalse.

Figura 4-55: Trayectoria de partícula simulada a diferentes densidades.



4.10 Validación experimental del modelo

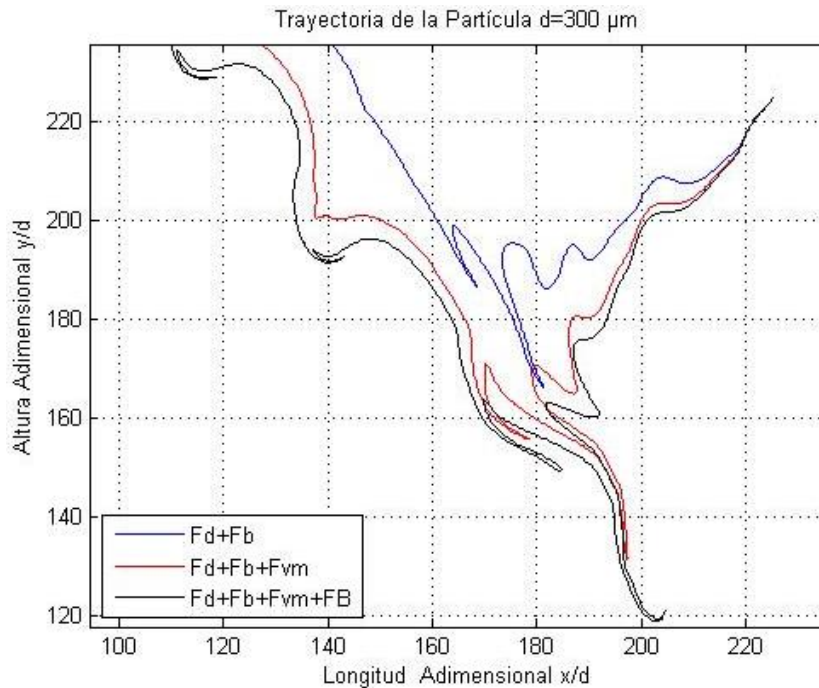
A partir de los resultados anteriores, se simuló el modelo de trayectorias para un diámetro de partícula de $300 \mu\text{m}$, a una densidad de 3029 kg/m^3 y con un perfil de velocidad del fluido senoidal representado por la siguiente ecuación (ver anexo B):

$$v_f = 0.06316 + 0.025\text{sen}(31.41t) \text{ [m/s]} \quad (4.3)$$

La ecuación (4.3) corresponde a una amplitud máxima de la velocidad del fluido de 0.08816 m/s y una frecuencia de 5 Hz . Las condiciones iniciales para la velocidad horizontal y vertical fueron de $u_0=v_0=0.055 \text{ m/s}$. La trayectoria de la partícula se muestra en la Figura 4-56 y se puede ver que las fuerzas de arrastre y empuje por sí solas no describen adecuadamente la trayectoria de las partículas al interior del lecho del jig (línea azul).

Aunque la adición de la fuerza de masa virtual (línea roja) y Basset (línea negra), no afecta la corriente por donde la partícula se depositará, si aumenta el tiempo de residencia de la partícula al interior de la cámara del jig, generando una medida incorrecta del consumo de energía y flujo de agua cuando sólo se tienen en cuenta las fuerzas de empuje y arrastre.

Figura 4-56: Comparación de la Trayectoria de partícula mediante la inclusión de las diferentes fuerzas hidrodinámicas.

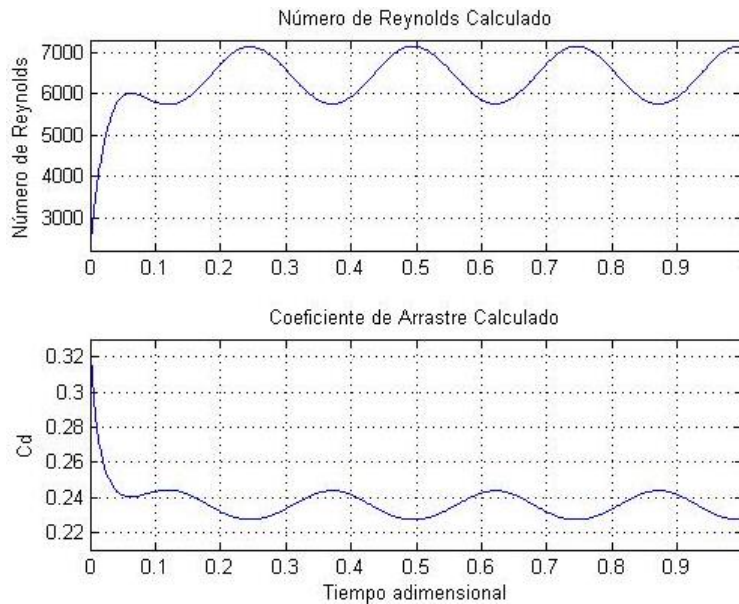


En las Figuras 4-57 a 4-61 se muestran algunas de las velocidades relevantes calculadas por el modelo. La velocidad del fluido en el interior del volumen del jig siempre se encuentra en el intervalo de régimen turbulento a partir del número de Reynolds de la columna del jig obtenido experimentalmente por medio de la ecuación 4.4 ($Re_{exp}=6297.82$).

$$Re = \frac{\rho_l u_l D_h}{\mu_l} \tag{4.4}$$

El coeficiente de arrastre se encuentra en el intervalo de 0.22 a 0.33. Ambas cantidades se muestran en la Figura 4-57, donde el tiempo se normalizó a 4 ciclos de oscilación ya que después de este tiempo tanto el número de Reynolds como el coeficiente de arrastre oscilan armónicamente conservando la frecuencia de pulsación. El valor promedio del número de Reynolds entregado por el modelo es de $Re_{sim}=6426.63$ este valor es cercano al calculado experimentalmente bajo las mismas condiciones de velocidad y frecuencia de pulsación $Re_{exp} = 6297.82$ obteniendo un error de predicción aproximado de 2.045%.

Figura 4-57: Numero de Reynolds y coeficiente de arrastre calculado por el Modelo.



Las Figura 4-58 y 4-59 muestra las velocidades de la partícula, el fluido y la velocidad relativa v_r , variando a través de la trayectoria de altura adimensional del movimiento de la partícula para 4 ciclos de pulsación. La gráfica revela que la velocidad de la partícula incrementa continuamente hasta igualar la velocidad del fluido, ocasionando una

disminución de la velocidad relativa. Esto significa que la fuerza de arrastre disminuye sobre ese intervalo de trayectoria. Cuando la velocidad de la partícula es mayor a la del fluido la velocidad relativa comienza a aumentar, incrementando la fuerza de arrastre acelerando la partícula ocasionada por el cambio de velocidad relativa entre la partícula y el fluido en un ciclo de pulsación, haciendo que la partícula se localice en la corriente de sobre flujo.

Figura 4-58: Velocidades calculadas por el modelo en 4 ciclos de pulsación.

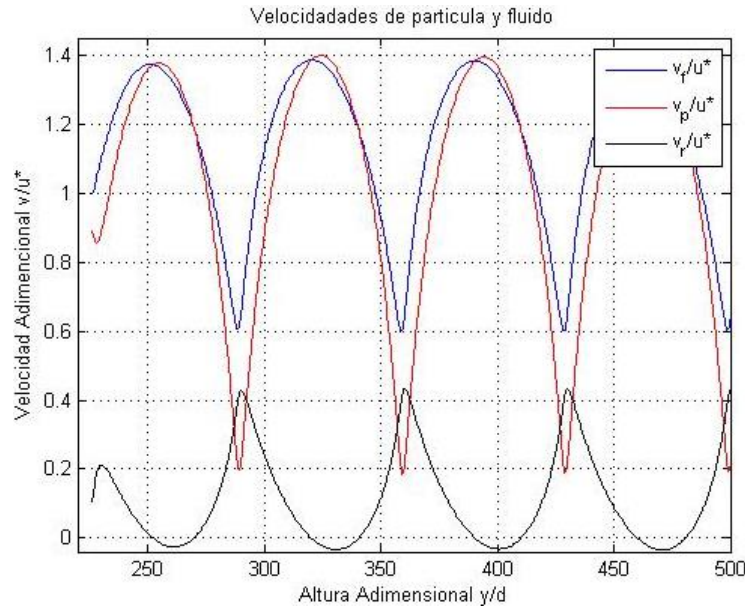
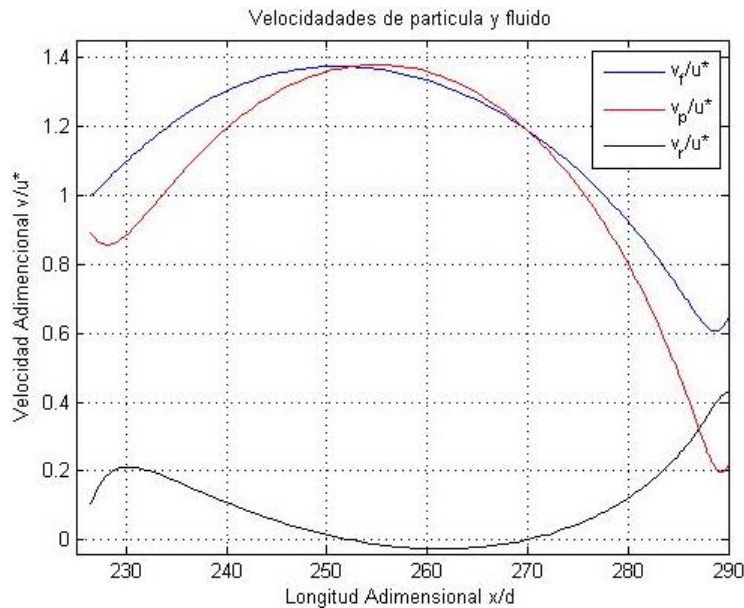


Figura 4-59: Velocidades calculadas por el modelo en un ciclo de pulsación.



Las Figuras 4-60 y 4-61 muestran la fuerza de arrastre para 4 ciclos de pulsación donde el resultado negativo se debe a que en la etapa de succión la diferencia de velocidad del fluido y la partícula es menor que en la etapa de fluidización generando que la partícula viaje en dirección descendente por un corto instante de tiempo para posteriormente aumentar su altura debido al aumento en la fuerza de arrastre, repitiéndose este fenómeno hasta lograr que la partícula salga por el rebalse (Figura 4-56).

Figura 4-60: Fuerza de arrastre sobre la partícula calculada en 4 ciclos de pulsación.

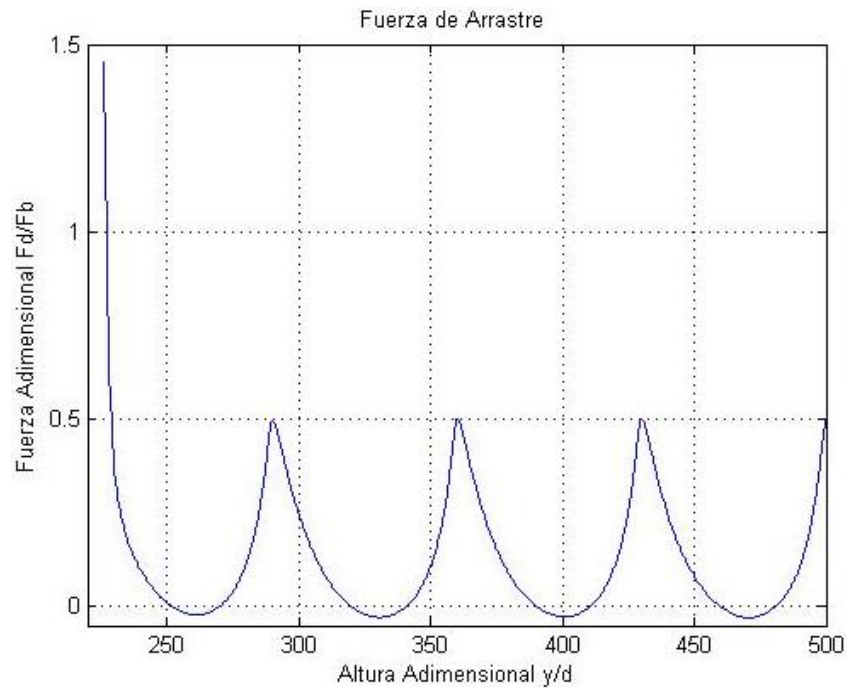
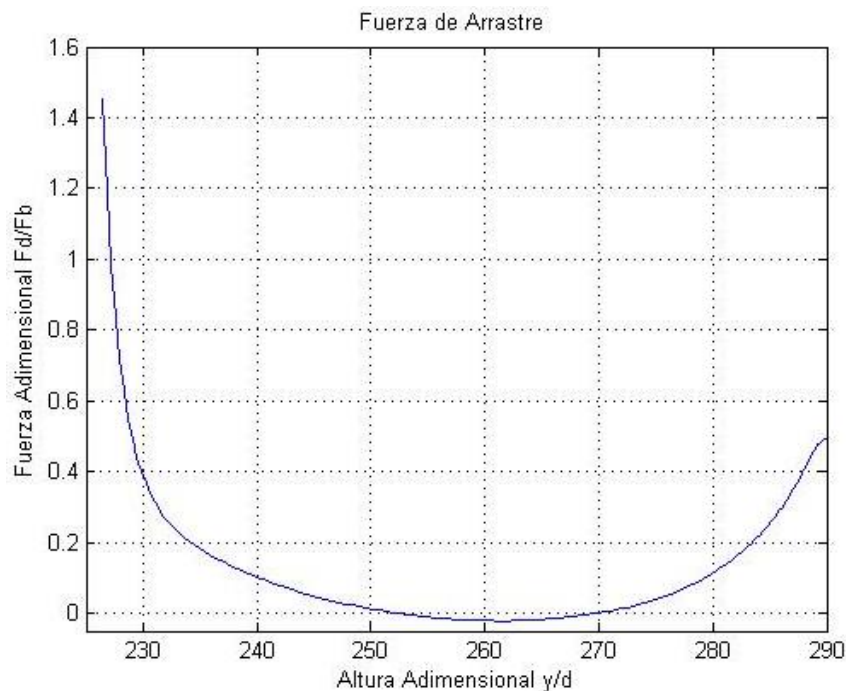
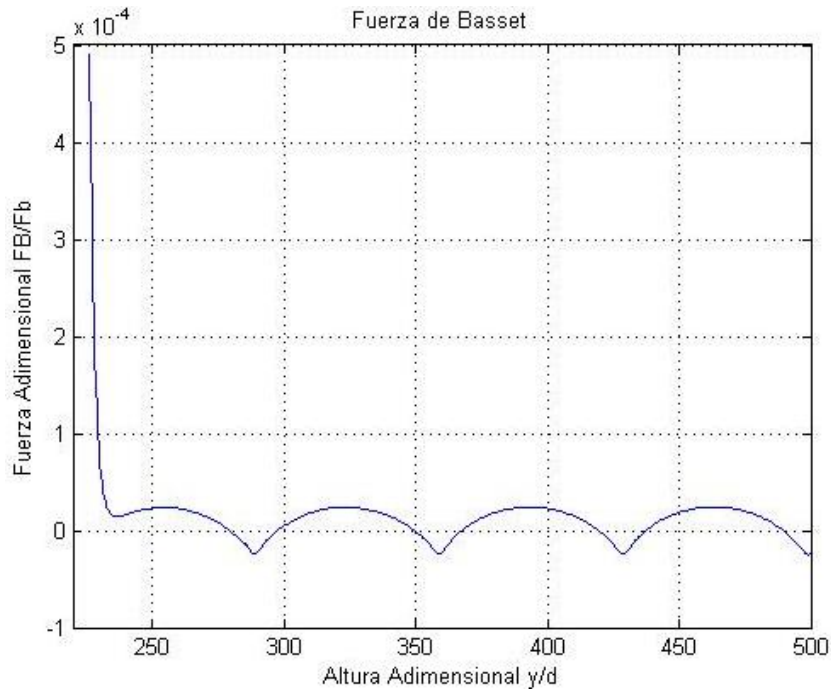


Figura 4-61: Fuerza de Arrastre sobre la partícula calculada en un ciclo de pulsación.



La fuerza de Basset es muy pequeña en comparación a la fuerza de arrastre para la mayor parte de la trayectoria de las partículas al interior del jig tal y como lo muestran las Figuras 4-62 y 4-63. Se observa que en un ciclo de pulsación la fuerza de Basset disminuye a medida que la partícula es transportada por el fluido ya sea al rebalse o al concentrado. Se puede afirmar que la fuerza de Basset permanece pequeña a lo largo del tiempo de simulación en comparación con las otras fuerzas. Sin embargo se puede deducir de las Figuras 4-53, 4-54 y 4-56 que especialmente al inicio del tiempo de oscilación la fuerza de Basset contribuye al movimiento de las partículas en una cantidad significativa

Figura 4-62: Fuerza de Basset sobre la partícula calculada en 4 ciclos de pulsación.



Este modelo incorpora como validación el cálculo de la velocidad de sedimentación de la muestra mineral y el cálculo de la caída de presión a través del lecho del jig. De los experimentos realizados, las velocidades de sedimentación se calcularon a partir de las fracciones de tamaño mostradas en la Tabla 4-8. A cada una de estas fracciones se les calculó la densidad real por medio de un picnómetro. Las pruebas de velocidad se realizaron en probetas de 2000 ml con el fin de minimizar el efecto pared. La velocidad se calculó registrando el tiempo que demoraba la pulpa en sedimentarse por completo en la probeta desde una altura de 90 cm

Figura 4-63: Fuerza de Basset sobre la partícula calculada en un ciclo de pulsación.

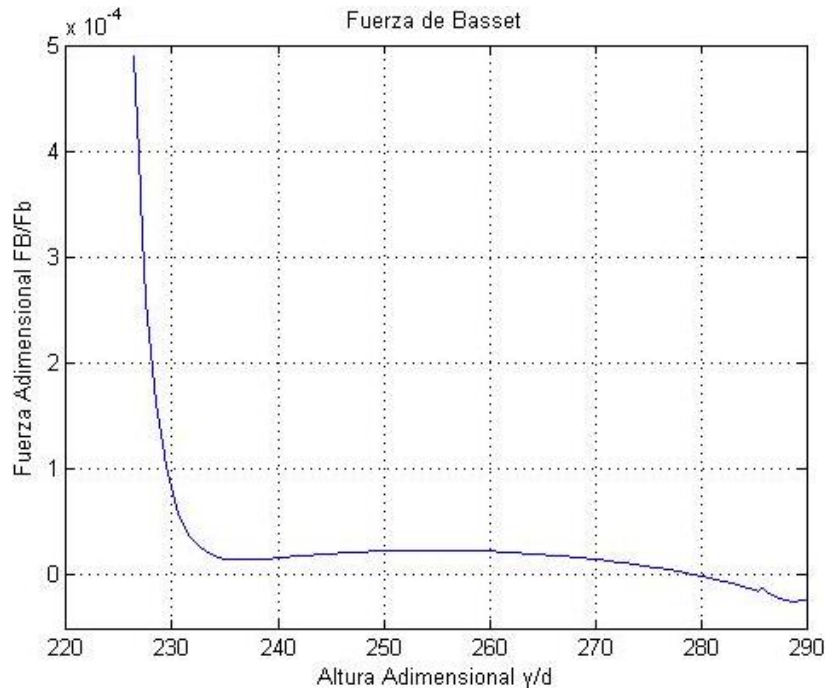


Tabla 4-8: Fracciones de tamaño y densidad utilizados para el cálculo de la velocidad

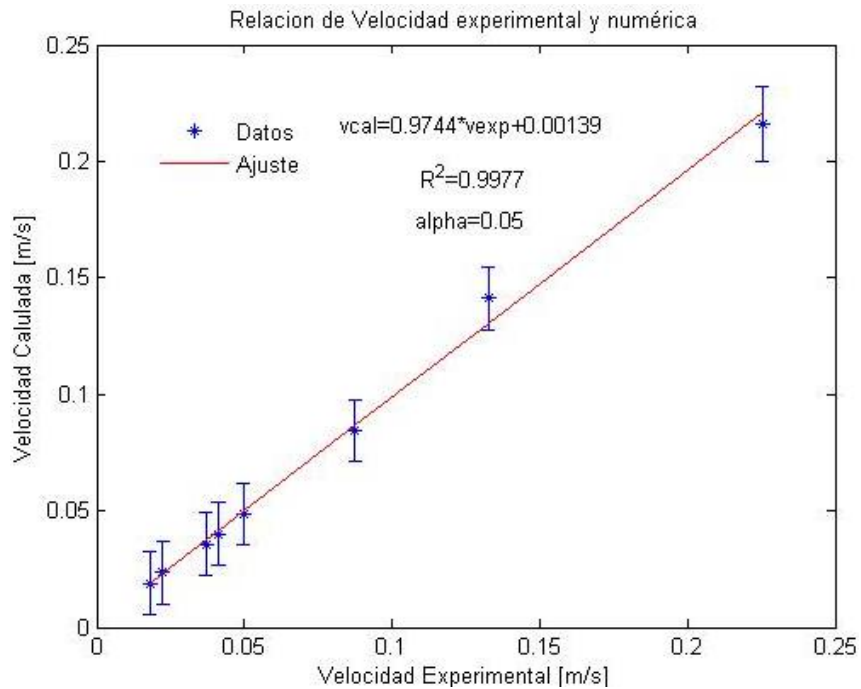
Tamaño promedio [μm]	Densidad real [kg/m ³]	% de solido en volumen (FVS)	Peso [g]	Volumen de agua [ml]
125	4299.8681	2.91	250	1942
147	4089.0521	3.06	250	1939
212	3562.555	3.51	250	1930
250	3226.4212	3.87	250	1923
300	3029.608	4.13	250	1917
417	3188.7992	3.92	250	1922
600	3308.7115	3.78	250	1924
850	3402.2839	3.68	250	1926

En la Tabla 4-9 se muestran los resultados de las velocidades calculadas experimentalmente y por el modelo. Se aprecia que el modelo representa de forma adecuada los resultados de velocidad, generándose un porcentaje de error del 2% al 7% entre los datos experimentales y los obtenidos numéricamente. La Figura 4-64 muestra el ajuste entre las velocidades experimentales y las calculadas por el modelo de trayectoria de partículas. Los resultados obtenidos por el modelo ajustan el cálculo de velocidades en el jig con un coeficiente de correlación $R^2 = 0.9977$ y un intervalo de confianza del 95%. El error máximo obtenido entre los datos de velocidad experimental y la velocidad calcula por el modelo es del 7%.

Tabla 4-9: Comparación de las velocidades experimentales y calculadas por el modelo.

Velocidad Experimental [m/s]	Velocidad calculada [m/s]	Error %
0.0179	0.018905	5.6141
0.0223	0.023483	5.3041
0.0369	0.035774	3.0526
0.0412	0.040151	2.5459
0.0497	0.048424	2.5667
0.0875	0.084536	3.3866
0.1325	0.141376	6.6992
0.2253	0.216163	4.0553

Figura 4-64: Ajuste de la velocidad experimental y numérica.



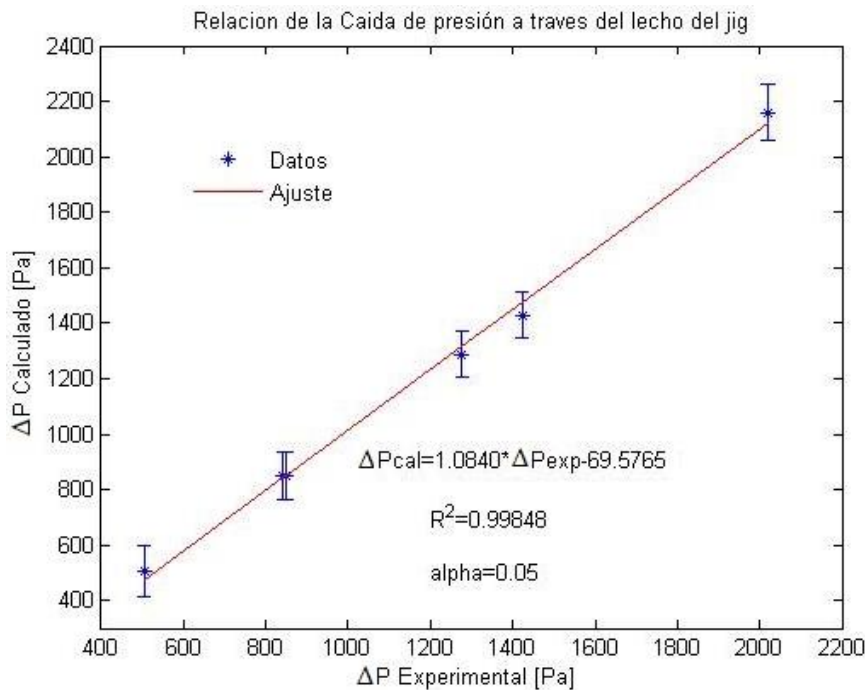
Para la medida de la caída de presión a través del lecho del jig se utilizaron dos manómetros uno situado antes de la criba que sostiene el lecho poroso artificial (LPA) y el otro justo después donde termina el LPA. Las medidas se realizaron variando el caudal volumétrico de entrada del agua de “hutch”. Los datos de estas medidas se reportan en la Tabla 4-10. La caída de presión obtenida por el modelo de trayectoria se obtuvo a partir de un promedio del cálculo de la presión en los planos justo antes y después de donde se encuentra el LPA. Este procedimiento se repitió para cada uno de los caudales que se utilizaron en las pruebas experimentales. Las velocidades de entrada para el

modelo correspondientes al caudal y los valores de la caída de presión también están reportados en la Tabla 4-10.

Tabla 4-10: Comparación de la caída de presión experimental y calculada por el modelo.

Caudal [GPM]	Área de la columna [m ²]	Velocidad [m/s]	ΔP experimental [Pa]	ΔP calculado [Pa]	Error [%]
0.5	0.0015	0,0210556	503.6	504.41	0.1588
1	0.0015	0.0421111	842.5	850.98	1.0065
1.5	0.0015	0.0631666	850	847.93	0.2435
2	0.0015	0.0842222	1276.4	1286.78	0.8141
2.5	0.0015	0.1052777	1423.4	1429.19	0.4075
3	0.0015	0.1263333	2019.4	2159.76	6.9484

Figura 4-65: Ajuste de la caída de presión experimental y numérica.



De la Figura 4-65 y de la Tabla 4-10 se aprecia que el modelo representa de forma adecuada los resultados de la caída de presión a través del lecho del jig, generándose un porcentaje de error del 0.16% al 7% entre los datos experimentales y los obtenidos numéricamente. La Figura 4-65 muestra el ajuste entre la caída de presión experimental y la calculada por el modelo de trayectoria de partículas. Los resultados obtenidos por el

modelo ajustan el cálculo de caída de presión en el lecho del jig con un coeficiente de correlación $R^2 = 0.99848$ y un intervalo de confianza del 95 %.

5. Conclusiones y recomendaciones

5.1 Conclusiones

La velocidad de sedimentación obstaculizada es una función del tamaño, la densidad y las propiedades de la suspensión para partículas minerales pesadas. Aunque se pudo mostrar que la fuerza de arrastre y la fuerza de empuje son las fuerzas dominantes, se determinó en este estudio que el efecto de la fuerza de Basset, masa virtual y gradiente de presión sobre la trayectoria de las partículas en el interior del lecho del jig sometidas a un flujo pulsante no uniforme, afectan significativamente la trayectoria de las partículas, representando la estratificación de las partículas al interior del lecho del jig de una manera más exacta (ver figuras 4-45, 4-46 y 4-56).

Se investigó la estratificación de partículas en un equipo de concentración tipo jig bajo cinco perfiles de pulsación mediante la aproximación Euleriana-Lagrangiana. Con la amplitud y la frecuencia de pulsación en un valor constante, todos los cinco perfiles de pulsación logran estratificar partículas minerales que poseen una distribución amplia de tamaño y densidad, pero sujetos a diferentes velocidades y tiempos de separación y al porcentaje final de recuperación. El modelo simula el movimiento bidimensional tiempo-dependiente de partículas minerales esféricas en agua con distribuciones de tamaño y densidad amplia. El modelo incorpora las fuerzas hidrodinámicas relevantes que actúan sobre una partícula en un líquido. La hidrodinámica de la fase líquida se desarrolló usando las ecuaciones de Navier Stokes promediadas (URANS).

El estudio del movimiento transiente de partículas desarrollado proporcionó un mejor entendimiento de la estratificación de las partículas en equipos de concentración gravimétrica que utilizan corrientes pulsadas. Como se mencionó anteriormente, los mecanismos de transporte entregados al modelo mediante las fuerzas inerciales son de gran importancia en la descripción de la trayectoria de las partículas cuya inercia se puede comparar a la inercia del fluido. En sistemas particulados en los que la inercia del

fluido es considerablemente menor a la inercia de las partículas (como ocurre típicamente en suspensiones gas-sólido), las fuerzas inerciales pueden despreciarse sin consecuencias relevantes en la predicción correcta de las dinámicas de estos sistemas. Sin embargo, la derivación de un modelo para flujos de líquido pulsante donde se consideran tales efectos (arrastre, empuje y fuerzas inerciales son del mismo orden de magnitud), es todavía un problema de investigación abierto que necesita de futura investigación tanto numérica como experimental que ayude a mejorar el desempeño del equipo como concentrador gravitacional.

La velocidad a la entrada de la cámara del jig afecta el movimiento de las partículas. Si en el inicio de la pulsación existe una velocidad a la entrada muy alta, las partículas que se alimentan al jig se mueven como un conjunto y muestran un comportamiento de transporte completo hacia la corriente de rechazo. Cuando la velocidad a la entrada se desarrolla lentamente, como en el perfil senoidal, las partículas no se levantarán como un conjunto y dominará el levantamiento individual de las partículas más livianas al inicio del ciclo permitiendo que las partículas pesadas pasen a través de las partículas livianas y se sedimenten. Además, si se adopta una velocidad de entrada lenta y constante ocurrirá la fluidización, como por ejemplo en el perfil diente de sierra hacia adelante (ver Figura 4-43).

La trayectoria de las partículas y los desplazamientos verticales mostraron que todos los perfiles de pulsación logran estratificar las partículas (ver Figuras 4-33 a 4-42). Las partículas permanecen en una posición fija durante un intervalo de tiempo del periodo de succión en todos los perfiles de pulsación, demostrando las oportunidades de mejorar el proceso de concentración utilizando un perfil de pulsación optimizado donde el periodo de succión del perfil pueda reducirse.

Los valores de la fuerza de interacción partícula-fluido adimensional confirman el comportamiento de las trayectorias de las partículas. Se demostró que los valores de las fuerzas hidrodinámicas para las partículas pesadas y livianas cambian con la concentración debido a la evolución de la porosidad, a medida que ocurren cambios en la porosidad local, hay más partículas pesadas presentes en el fondo de la cámara del jig ocasionando una compactación de partículas donde la fuerza de interacción hidrodinámica sobre las partículas pesadas aumenta como consecuencia de tener que levantarlas en el siguiente ciclo de pulsación. Los resultados indican que es necesaria

una investigación de la interacción entre las partículas y el fluido para una comprensión más profunda del funcionamiento del equipo concentrador.

Los resultados son válidos para las suposiciones propuestas (forma esférica de las partículas, densidad relativa entre 3 y 14 y tamaño de partícula entre 125 μm y 2000 μm) y los errores de los valores experimentales simulados podrán verse desde esta perspectiva.

5.2 Recomendaciones

Mostrar el efecto del flujo de líquido sobre el movimiento de las partículas en un flujo oscilante en un jig no es una tarea sencilla y se es consciente de las deficiencias de esta investigación, lo cual genera la necesidad de más investigación al respecto. Sin embargo este trabajo podría contribuir a entender mejor el comportamiento de partículas en el jig.

El estudio realizado bajo un ajuste de amplitud y frecuencia de pulsación no puede evaluar completamente el desempeño relativo de los diferentes perfiles de pulsación. Sin embargo, la investigación demuestra la utilidad del modelo Euleriano-Lagrangiano, como un modelo numérico efectivo para estudiar el proceso de concentración. Se requiere un trabajo adicional que considere diferentes amplitudes y periodos de pulsación para los cinco perfiles, además de una validación con pruebas experimentales que ayude a entender y optimizar el desempeño del equipo mediante los principios físicos de conservación que lo rigen.

Como trabajo futuro se plantea la posibilidad de seguir investigando en la implementación de modelos de turbulencia validados y ajustados experimentalmente, los cuales puedan representar los fenómenos hidrodinámicos en el jig de forma más adecuada.

Por otro lado se deja la posibilidad de estudiar e implementar modelos de contacto de partículas los cuales podrían mejorar el ajuste de los datos experimentales con los encontrados a partir de la solución numérica de la ecuación de trayectoria de partícula.

A. Anexo: Matriz de Diseño Experimental

Tabla A-5-1: Orden de desarrollo de las pruebas en el jig y resultado de cada uno de los índices metalúrgicos.

OrdenEst	Ordenprueba	F	A	T	H	LPA	Re	R (%)	Rc	V
183	1	50	7	1	2	3,75	170,12	68,69	247,66	0,4
175	2	70	5	3	2,5	3,75	213,5	6,8	21573,4	0,03
188	3	50	7	2	2,5	2,5	63,82	13,7	465,7	0,21
117	4	90	7	2	2	3,75	467	31,1	264,4	1,4
72	5	70	5	3	1,5	2,5	3,64	93,5	2,04	46,45
99	6	50	5	2	2	3,75	94,36	14,64	644,65	0,16
197	7	50	7	3	1,5	3,75	3,93	50,08	7,43	21,6
141	8	90	5	3	2	3,75	9,3	0,01	96188,7	0,01
108	9	50	5	3	1,5	2,5	3,57	68,56	5,2	19,22
120	10	90	7	2	1,5	2,5	1,96	10,74	18,28	5,47
78	11	50	7	1	1,5	2,5	6,47	96,7	6,69	14,94
90	12	50	7	3	1,5	2,5	1,8	14,13	12,73	7,85
10	13	90	7	2	2	2,5	41,95	57,56	72,87	1,37
18	14	90	7	3	1,5	2,5	2114,9	18,01	11774	0,01
167	15	70	5	1	1,5	3,75	139,65	84,46	165,34	0,6
1	16	90	7	1	2,5	3,75	712,63	50,43	1426,19	0,07077
146	17	70	7	1	2,5	2,5	923,73	10	9237,6	0,01

187	18	50	7	2	2,5	3,75	15,3	95,9	54,9	9,1
211	19	50	5	3	2,5	3,75	16,43	5,43	543,79	2,43
89	20	50	7	3	1,5	3,75	1,24	42,71	2,89	34,56
129	21	90	5	1	2	3,75	291,61	13,41	2174,86	0,05
157	22	70	7	3	2,5	3,75	3,5	0,07	1899,97	0,01956
132	23	90	5	1	1,5	2,5	46,1	92,6	95,8	0,6
182	24	50	7	1	2,5	2,5	339,7	87	390,7	0,26
55	25	70	5	1	2,5	3,75	264,78	65,7	423,4	1,9
174	26	70	5	2	1,5	2,5	16,74	90,21	18,56	5,39
71	27	70	5	3	1,5	3,75	1,93	10,85	17,76	5,63
136	28	90	5	2	2	2,5	22,22	82,71	26,87	3,72
176	29	70	5	3	2,5	2,5	72,3	4,32	10426,5	0,03
16	30	90	7	3	2	2,5	6,45	14,5	45,92	2,18
124	31	90	7	3	2	2,5	12,3	18,63	42,34	1,93
205	32	50	5	2	2,5	3,75	44,7	6,2	10543,6	0,02
28	33	90	5	2	2	2,5	31,54	79,69	30,4	2,93
184	34	50	7	1	2	2,5	32,44	93,5	65,3	1,9
51	35	70	7	3	2	3,75	1,61	2,06	78,07	1,26
102	36	50	5	2	1,5	2,5	3,65	96,26	3,8	96,26
198	37	50	7	3	1,5	2,5	2,53	36,84	6,87	14,55
126	38	90	7	3	1,5	2,5	4,27	21,95	19,44	5,14
134	39	90	5	2	2,5	2,5	7,07	2,62	296,71	0,37
170	40	70	5	2	2,5	2,5	65,3	7,4	1243,5	0,01
149	41	70	7	1	1,5	3,75	7,7	93,2	8,26	12,1
177	42	70	5	3	2	3,75	32,56	2,92	1114,11	0,09

179	43	70	5	3	1,5	3,75	2,18	10,93	19,9	5,02
116	44	90	7	2	2,5	2,5	2,4	39,64	6,06	16,51
178	45	70	5	3	2	2,5	271,7	2,44	11115,6	0,01
208	46	50	5	2	2	2,5	75,02	78,16	95,99	1,04
142	47	90	5	3	2	2,5	225,82	18,31	1233,06	0,08
158	48	70	7	3	2,5	2,5	15,53	0,55	2842	0,04
204	49	50	5	1	1,5	2,5	43,8	97,2	22,5	3,54
3	50	90	7	1	2	3,75	284,3	90,91	312,7	0,32
69	51	70	5	3	2	3,75	5,03	0,59	848,53	0,12
110	52	90	7	1	2,5	2,5	1004,5	74,53	1347	0,07
191	53	50	7	2	1,5	3,75	5,76	82,4	4,78	13,9
160	54	70	7	3	2	2,5	31,89	17,58	181,36	0,55
83	55	50	7	2	1,5	3,75	3,97	74,15	5,36	18,67
212	56	50	5	3	2,5	2,5	27,8	10,4	1165,7	0,2
62	57	70	5	2	2,5	2,5	56,01	3,34	1674,9	0,06
19	58	90	5	1	2,5	3,75	39,2	80,8	60,3	0,4
186	59	50	7	1	1,5	2,5	10,81	98,52	10,98	9,11
21	60	90	5	1	2	3,75	299,82	18,61	1611,3	0,06
14	61	90	7	3	2,5	2,5	6,74	0,04	18402	0,01
133	62	90	5	2	2,5	3,75	113,5	37,5	43,6	2,6
201	63	50	5	1	2	3,75	47,86	92,33	51,83	1,93
140	64	90	5	3	2,5	2,5	18,52	0,25	7301,7	0,01
68	65	70	5	3	2,5	2,5	91,04	0,63	14443,6	0,01
86	66	50	7	3	2,5	2,5	12,73	1,02	1244,5	0,08
59	67	70	5	1	1,5	3,75	833.39	80,66	1033,24	0,1

84	68	50	7	2	1,5	2,5	2,6	37,81	6,89	14,52
9	69	90	7	2	2	3,75	745,7	25,9	536,4	3,5
92	70	50	5	1	2,5	2,5	277,3	19,78	1402,3	0,07
206	71	50	5	2	2,5	2,5	1175	70,83	1660,98	0,06024
173	72	70	5	2	1,5	3,75	2,4	39,64	6,06	16,51
75	73	50	7	1	2	3,75	75,73	67,02	112,99	0,89
169	74	70	5	2	2,5	3,75	465,3	12,5	4,962	0,05
23	75	90	5	1	1,5	3,75	176,18	97,64	180,44	0,55
104	76	50	5	3	2,5	2,5	14,66	1,79	819,6	0,12
214	77	50	5	3	2	2,5	51,45	75,47	68,17	1,47
148	78	70	7	1	2	2,5	108,81	91,74	118,61	0,8
80	79	50	7	2	2,5	2,5	4,1	5	81,98	1,22
46	80	70	7	2	2	2,5	11,36	45,8	24,78	4,03
60	81	70	5	1	1,5	2,5	2,23	98,71	2,26	44,3402
25	82	90	5	2	2,5	3,75	98,4	28,9	84,3	3,5
101	83	50	5	2	1,5	3,75	6,4	51,6	11,7	9,76
48	84	70	7	2	1,5	2,5	14,28	77,96	18,33	5,46022
6	85	90	7	1	1,5	2,5	15,08	96,54	15,62	6,40391
95	86	50	5	1	1,5	3,75	28,39	48,34	58,74	1,7
121	87	90	7	3	2,5	3,75	490,81	10,26	4784,83	0,02
215	88	50	5	3	1,5	3,75	2,62	7,44	35,25	2,83
193	89	50	7	3	2,5	3,75	7,5	26,1	2,5	2,02
30	90	90	5	2	1,5	2,5	1,77	99,48	1,78	56,259
34	91	90	5	3	2	2,5	211,43	10,92	1623,23	2,1
61	92	70	5	2	2,5	3,75	306,24	5,33	5744	0,02

114	93	90	7	1	1,5	2,5	31,63	96,45	32,79	3,05
163	94	70	5	1	2,5	3,75	184,2	73,55	201,6	2,4
49	95	70	7	3	2,5	3,75	1,82	1,63	111,6	0,9
27	96	90	5	2	2	3,75	3,6	4,7	230,1	0,3
125	97	90	7	3	1,5	3,75	32,09	17,57	182,6	0,55
33	98	90	5	3	2	3,75	0,34	0,28	121,22	0,82
139	99	90	5	3	2,5	3,75	285,9	15,7	322,5	0,03
210	100	50	5	2	1,5	2,5	5,81	95,2	14,8	0,2
151	101	70	7	2	2,5	3,75	301,13	4,78	7656,92	0,01589
8	102	90	7	2	2,5	2,5	10,91	1,26	864,66	0,12
91	103	50	5	1	2,5	3,75	9576,1	55	2153,8	0,02
118	104	90	7	2	2	2,5	38,5	61,2	70,4	1,2
180	105	70	5	3	1,5	2,5	2,54	91,39	2,78	35,96
88	106	50	7	3	2	2,5	7,05	2,63	268,01	0,37
150	107	70	7	1	1,5	2,5	18,09	58,88	30,72	3,25
37	108	70	7	1	2,5	3,75	796,74	91,24	873,2	0,11
76	109	50	7	1	2	2,5	15,7	91	32	2,1
77	110	50	7	1	1,5	3,75	97,43	88,4	376,4	0,01
123	111	90	7	3	2	3,75	956,4	83,36	1147,22	0,09
96	112	50	5	1	1,5	2,5	17,77	99,45	17,87	5,59543
98	113	50	5	2	2,5	2,5	3,25	0,22	1497,6	0,07
190	114	50	7	2	2	2,5	50,3	75,7	28,34	1,98
203	115	50	5	1	1,5	3,75	58,57	90,21	64,93	1,54
58	116	70	5	1	2	2,5	14,7	94,5	17,57	4,9
107	117	50	5	3	1,5	3,75	0,73	2,73	26,93	2,73

79	118	50	7	2	2,5	3,75	25,57	7,42	344,38	0,29
97	119	50	5	2	2,5	3,75	28,51	0,22	12825	0,01
36	120	90	5	3	1,5	2,5	2,69	96,39	2,79	35,88815
119	121	90	7	2	1,5	3,75	44,02	73,7	59,42	1,67408
17	122	90	7	3	1,5	3,75	34,36	34,76	98,85	1,01
207	123	50	5	2	2	3,75	4,23	6,02	70,21	1,42
109	124	90	7	1	2,5	3,75	386,2	60,61	637,25	0,16
74	125	50	7	1	2,5	2,5	628,4	82,66	760,2	0,13
11	126	90	7	2	1,5	3,75	35,6	35,2	42,4	1,2
156	127	70	7	2	1,5	2,5	34,21	68,85	49,81	2,01231
57	128	70	5	1	2	3,75	1215	63,96	1900	0,05
152	129	70	7	2	2,5	2,5	283,18	3,09	3167	0,01
194	130	50	7	3	2,5	2,5	6,33	0,42	1518,6	0,07
44	131	70	7	2	2,5	2,5	2,41	0,23	1051,1	0,1
53	132	70	7	3	1,5	3,75	5,89	9,85	59,8	1,67
159	133	70	7	3	2	3,75	0,86	0,41	212,31	0,47
81	134	50	7	2	2	3,75	3,97	8,6	35,7	3,2
105	135	50	5	3	2	3,75	20,4	8,43	423,3	2,54
185	136	50	7	1	1,5	3,75	126,4	91	534	0,02
12	137	90	7	2	1,5	2,5	14,89	36,01	41,35	2,42
31	138	90	5	3	2,5	3,75	392,6	10,6	539,4	0,08
42	139	70	7	1	1,5	2,5	30,25	94,22	32,12	3,11
155	140	70	7	2	1,5	3,75	1,82	20,39	8,92	11,2
122	141	90	7	3	2,5	2,5	67,23	1,56	4315,6	0,02
100	142	50	5	2	2	2,5	70,54	85,8	112,96	0,95

200	143	50	5	1	2,5	2,5	608,8	50,91	1195,8	0,08
82	144	50	7	2	2	2,5	33,07	78,36	42,2	2,37
64	145	70	5	2	2	2,5	20,71	92,35	22,27	4,45
54	146	70	7	3	1,5	2,5	18	32	56,54	1,777
4	147	90	7	1	2	2,5	105,9	91,11	116,3	0,4
35	148	90	5	3	1,5	3,75	1,45	8,9	16,28	6,14
172	149	70	5	2	2	2,5	10,43	93,1	43,31	2,2
209	150	50	5	2	1,5	3,75	2,65	43,35	6,11	16,38
161	151	70	7	3	1,5	3,75	9,43	15,85	65,4	1,39
162	152	70	7	3	1,5	2,5	4,9	13,78	35,56	2,81
130	153	90	5	1	2	2,5	22,41	96	23,34	4,28
144	154	90	5	3	1,5	2,5	2,54	94,3	1,97	32
143	155	90	5	3	1,5	3,75	2,75	46,86	5,86	17,06
94	156	50	5	1	2	2,5	41,95	57,56	72,87	1,37
164	157	70	5	1	2,5	2,5	494,4	88,94	556	0,18
216	158	50	5	3	1,5	2,5	3,57	72,8	4,1	15,75
50	159	70	7	3	2,5	2,5	7,93	0,12	6658	0,02
85	160	50	7	3	2,5	3,75	3,83	22,128	0,45	1,73
181	161	50	7	1	2,5	3,75	1325,9	42,6	4389,4	0,01
13	162	90	7	3	2,5	3,75	25,51	0,42	6103,33	0,02
111	163	90	7	1	2	3,75	188,5	58,9	320	0,31
127	164	90	5	1	2,5	3,75	70,3	85,1	94,8	0,9
7	165	90	7	2	2,5	3,75	385,82	7,89	4938,42	0,02044
128	166	90	5	1	2,5	2,5	428,9	90,39	474,47	0,21
131	167	90	5	1	1,5	3,75	59,16	75,85	78	1,28

47	168	70	7	2	1,5	3,75	4,92	71,26	6,9	14,48
73	169	50	7	1	2,5	3,75	1606,9	30,24	5314,3	0,02
199	170	50	5	1	2,5	3,75	1448,32	50,59	2863,06	0,03
63	171	70	5	2	2	3,75	30,34	11,4	356,7	0,19
192	172	50	7	2	1,5	2,5	2,11	29,06	7,26	13,78
135	173	90	5	2	2	3,75	2,09	1,3	160,46	0,62
67	174	70	5	3	2,5	3,75	138,65	0,75	18476,84	0,01
38	175	70	7	1	2,5	2,5	1093,1	36,22	3020,7	0,03
22	176	90	5	1	2	2,5	15,3	95,21	73,58	2,34
93	177	50	5	1	2	3,75	100,08	23,97	417,47	0,24
168	178	70	5	1	1,5	2,5	4,8	96,5	12,6	35,7
202	179	50	5	1	2	2,5	38,54	52,78	69,13	1,26
103	180	50	5	3	2,5	3,75	513,46	3,76	13662,67	0,01
138	181	90	5	2	1,5	2,5	2,43	97,1	17,4	35,87
5	182	90	7	1	1,5	3,75	2,5	5,43	6,54	4,9
87	183	50	7	3	2	3,75	33,7	16,9	87,3	0,8
166	184	70	5	1	2	2,5	13,2	93	19,2	5,7
32	185	90	5	3	2,5	2,5	243,7	27	236,8	4,3
43	186	70	7	2	2,5	3,75	25,49	1,5	1694,2	0,06
56	187	70	5	1	2,5	2,5	65,3	91,43	134,4	0,4
113	188	90	7	1	1,5	3,75	0,48	2,6	1,34	5,45
153	189	70	7	2	2	3,75	2,54	3,4	134,5	0,9
115	190	90	7	2	2,5	3,75	10,96	0,2	5374,6	0,02
106	191	50	5	3	2	2,5	70,2	63,6	53,91	1,02
40	192	70	7	1	2	2,5	160,3	92,8	130,46	0,7

195	193	50	7	3	2	3,75	1133,6	24,66	32	2,1
65	194	70	5	2	1,5	3,75	2,35	37,19	6,32	15,83
39	195	70	7	1	2	3,75	82,5	96,3	129,6	0,9
26	196	90	5	2	2,5	2,5	26,44	5,83	453,3	0,22
41	197	70	7	1	1,5	3,75	6,58	97	6,78	14,74
20	198	90	5	1	2,5	2,5	75,3	83,6	24,3	0,01
52	199	70	7	3	2	2,5	25,67	23,56	340,45	1,02
137	200	90	5	2	1,5	3,75	34,42	27,69	124,28	0,8
70	201	70	5	3	2	2,5	187,42	6,7	8535,2	0,12
2	202	90	7	1	2,5	2,5	554,87	72,03	770,3	0,13
112	203	90	7	1	2	2,5	120,3	92,3	150,5	0,3
147	204	70	7	1	2	3,75	89,5	94,15	95,1	1,05
66	205	70	5	2	1,5	2,5	645,5	35,78	466,8	5,2
15	206	90	7	3	2	3,75	2,84	4,51	62,96	1,59
213	207	50	5	3	2	3,75	13,68	3,05	448,62	3,05
24	208	90	5	1	1,5	2,5	23,9	89,5	116	0,2
145	209	70	7	1	2,5	3,75	284,6	60,95	466,9	0,21
189	210	50	7	2	2	3,75	276,8	39,5	92,45	0,07
154	211	70	7	2	2	2,5	20,5	48,32	26,3	3,8
165	212	70	5	1	2	3,75	1605,52	81,49	1970,25	0,05
29	213	90	5	2	1,5	3,75	5,06	24,74	20,45	4,89
196	214	50	7	3	2	2,5	9,76	5,19	301,23	0,41
171	215	70	5	2	2	3,75	26	6,42	404,83	0,25
45	216	70	7	2	2	3,75	0,46	0,6	76,49	1,31

B. Anexo: Código para definir los perfiles de velocidad en la condición de frontera a la entrada de la columna del jig

Los códigos para Fluent e interpretados como una Función Definida por el Usuario (UDF) para la trayectoria de las partículas son los siguientes:

B1. Perfil de pulsación senoidal

```
/******  
/* User-Defined Function for Unsteady Flow in a JIG */  
/* */  
/* Fluent 6.3 */  
/* */  
/* Author: MANUEL OSPINA */  
/* Date: August 2013 */  
/* */  
/* This function prescribes an oscillating VELOCITY */  
/* at the JIG INLET. */  
/* */  
/******
```

```
#include "udf.h"
```

```
/*Profile for x-velocity*/
```

```
DEFINE_PROFILE(unsteady_u, thread, position)
```

```
{  
float t, u;  
face_t f;  
t = RP_Get_Real("flow-time");
```

```
u=0;
```

```
begin_f_loop(f, thread)
```

```
{  
F_PROFILE(f, thread, position) = u;
```

```

}
end_f_loop(f, thread)
}

/*Profile for y-velocity*/

DEFINE_PROFILE(unsteady_v, thread, position)
{
float t, v;
face_t f;
t = RP_Get_Real("flow-time");

v=0.063166667+0.025*sin(31.41*t);

begin_f_loop(f, thread)
{
F_PROFILE(f, thread, position) = v;
}
end_f_loop(f, thread)
}

```

B2. Perfil de pulsación triangular

```

/*****/
/*                                     */
/* User-Defined Function for Unsteady Flow in a JIG */
/*                                     */
/* Fluent 6.3                               */
/*                                     */
/* Author: MANUEL OSPINA                   */
/* Date: October 25 2013                   */
/*                                     */
/* This function prescribes an oscillating VELOCITY */
/* at the JIG INLET.                       */
/*                                     */
/*****/

#include "udf.h"

/*Profile for x-velocity*/

DEFINE_PROFILE(unsteady_u, thread, position)
{
float t, u;
face_t f;
t = RP_Get_Real("flow-time");

u=0;

begin_f_loop(f, thread)

```



```
{
F_PROFILE(f, thread, position) = u;
}
end_f_loop(f, thread)

}
```

/*Profile for y-velocity*/

```
DEFINE_PROFILE(unsteady_v, thread, position)
{
face_t f;
#include <math.h>
float t, v, period, phase, ratio, amp, w, y;
period=0.2;
phase=0;
ratio=0.5;
amp=0.005;

t = RP_Get_Real("flow-time");

w=(t+phase*period/(2*3.141592653589793)+period)-
floor((t+phase*period/(2*3.141592653589793)+period)/period)*period;

if(w<=(period*ratio))
{
y=w*amp/(period*ratio);
}
else if (w>period*ratio)
{
y=(period-w)*amp/(period*(1-ratio));
}

if(w<=(period*ratio))
{
v=0.113166667000045;
}
else if (w>period*ratio)
{
v=0.013166666999903;
}

begin_f_loop(f, thread)
{
F_PROFILE(f, thread, position) = v;
}
end_f_loop(f, thread)
}
```

B3. Perfil de pulsación diente de sierra adelantado

```

/*****/
/*                                     */
/* User-Defined Function for Unsteady Flow in a JIG */
/*                                     */
/* Fluent 6.3                               */
/*                                     */
/* Author: MANUEL OSPINA                   */
/* Date: October 30 2013                   */
/*                                     */
/* This function prescribes an oscillating VELOCITY */
/* at the JIG INLET.                       */
/*                                     */
/***** **/

```

```
#include "udf.h"
```

```
/*Profile for x-velocity*/
```

```
DEFINE_PROFILE(unsteady_u, thread, position)
```

```
{
float t, u;
face_t f;
t = RP_Get_Real("flow-time");
```

```
u=0;
```

```
begin_f_loop(f, thread)
{
F_PROFILE(f, thread, position) = u;
}
end_f_loop(f, thread)
}
```

```
/*Profile for y-velocity*/
```

```
DEFINE_PROFILE(unsteady_v, thread, position)
```

```
{
face_t f;
#include <math.h>
float t, v, period, phase, ratio, amp, w, y;
period=0.2;
phase=0;
ratio=0.75;
amp=0.005;
```

```
t = RP_Get_Real("flow-time");
```

```
w=(t+phase*period/(2*3.141592653589793)+period)-
floor((t+phase*period/(2*3.141592653589793)+period)/period)*period;

if(w<=(period*ratio))
{
    y=w*amp/(period*ratio);
}
else if (w>period*ratio)
{
    y=(period-w)*amp/(period*(1-ratio));
}

if(w<=(period*ratio))
{
    v=0.107611111444485;
}
else if (w>period*ratio)
{
    v=-0.070166666333592;
}

begin_f_loop(f, thread)
{
    F_PROFILE(f, thread, position) = v;
}
end_f_loop(f, thread)
}
```

B4. Perfil de pulsación diente de sierra atrasado

```
/******
/*
/* User-Defined Function for Unsteady Flow in a JIG */
/*
/* Fluent 6.3 */
/*
/* Author: MANUEL OSPINA */
/* Date: September 5 2013 */
/*
/* This function prescribes an oscillating VELOCITY */
/* at the JIG INLET. */
/*
/******

#include "udf.h"

/*Profile for x-velocity*/
```

```
DEFINE_PROFILE(unsteady_u, thread, position)
```

```
{
```

```
float t, u;
```

```
face_t f;
```

```
t = RP_Get_Real("flow-time");
```

```
u=0;
```

```
begin_f_loop(f, thread)
```

```
{
```

```
F_PROFILE(f, thread, position) = u;
```

```
}
```

```
end_f_loop(f, thread)
```

```
}
```

```
/*Profile for y-velocity*/
```

```
DEFINE_PROFILE(unsteady_v, thread, position)
```

```
{
```

```
face_t f;
```

```
#include <math.h>
```

```
float t, v, period, phase, ratio, amp, w, y;
```

```
period=0.2;
```

```
phase=0;
```

```
ratio=0.25;
```

```
amp=0.005;
```

```
t = RP_Get_Real("flow-time");
```

```
w=(t+phase*period/(2*3.141592653589793)+period)-
```

```
floor((t+phase*period/(2*3.141592653589793)+period)/period)*period;
```

```
if(w<=(period*ratio))
```

```
{
```

```
    y=w*amp/(period*ratio);
```

```
}
```

```
else if (w>period*ratio)
```

```
{
```

```
    y=(period-w)*amp/(period*(1-ratio));
```

```
}
```

```
if(w<=(period*ratio))
```

```
{
```

```
    v=0.196500000333452;
```

```
}
```

```
else if (w>period*ratio)
```

```
{
```

```
    v=0.018722222555469;
```

```
}
```

```
begin_f_loop(f, thread)
```

```
{
F_PROFILE(f, thread, position) = v;
}
end_f_loop(f, thread)
}
```

B5. Perfil de pulsación trapezoidal

```
/*
User-Defined Function for Unsteady Flow in a JIG
Fluent 6.3
Author: MANUEL OSPINA
Date: September 10 2013
This function prescribes an oscillating VELOCITY
at the JIG INLET.
*/
```

```
#include "udf.h"
```

```
/*Profile for x-velocity*/
```

```
DEFINE_PROFILE(unsteady_u, thread, position)
{
float t, u;
face_t f;
t = RP_Get_Real("flow-time");

u=0;

begin_f_loop(f, thread)
{
F_PROFILE(f, thread, position) = u;
}
end_f_loop(f, thread)
}
```

```
/*Profile for y-velocity*/
```

```
DEFINE_PROFILE(unsteady_w, thread, position)
{
face_t f;
#include <math.h>
float t, v, period, phase, ratio, amp, w, y, rat;
```

```
period=0.2;
phase=0;
ratio=0.125;
rat=0.875;
amp=0.005;

t = RP_Get_Real("flow-time");

w=(t+phase*period/(2*3.141592653589793)+period)-
floor((t+phase*period/(2*3.141592653589793)+period)/period)*period;

if(w<=(period*ratio))
{
    y=w*amp/(period*ratio);
}
else if(w>period*ratio & w<period*rat)
{
    y=amp;
}
else if (w>=period*rat)
{
    y=(period-w)*amp/(period*(1-rat));
}

if(w<=(period*ratio))
{
    v=0.263166667;
}
else if(w>period*ratio & w<period*rat)
{
    v=0.063166667;
}
else if (w>period*ratio)
{
    v=-0.136833333;
}

begin_f_loop(f, thread)
{
    F_PROFILE(f, thread, position) = v;
}
end_f_loop(f, thread)
}
```

C. Anexo: Evaluación de la fuerza de Basset

La expresión de la integral de la fuerza de Basset se define como:

$$\mathbf{F}_{Bi} = \frac{3}{2} d_{pi}^2 \sqrt{\pi \mu_l \rho_l} \int_0^t \frac{Du_l}{Dt} \frac{du_{pi}}{dt} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (C.1)$$

Definamos a_1 , a_2 , a_3 , etc. como la aceleración relativa de la partícula respecto al fluido sobre dos intervalos de tiempo, con a_1 representando la aceleración inicial. Para el primer intervalo de tiempo, Δt , la integral de la fuerza de Basset puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta t} \frac{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)}{\sqrt{\Delta t-\tau}} d\tau &= -\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right) 2\sqrt{\Delta t-\tau} \Big|_0^{\Delta t} \\ &= -(a_1 + a_2)(\sqrt{\Delta t-\Delta t} - \sqrt{\Delta t-0}) \\ &= (a_1 + a_2)\sqrt{\Delta t} \end{aligned} \quad (C.2)$$

Para el siguiente intervalo de tiempo, la integral de la fuerza de Basset es:

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta t} \frac{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)}{\sqrt{2\Delta t-\tau}} d\tau + \int_{\Delta t}^{2\Delta t} \frac{\left(\frac{a_2+a_3}{2}\right)}{\sqrt{2\Delta t-\tau}} d\tau &= -\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right) 2\sqrt{2\Delta t-\tau} \Big|_0^{\Delta t} - \left(\frac{a_2+a_3}{2}\right) 2\sqrt{2\Delta t-\tau} \Big|_{\Delta t}^{2\Delta t} \\ &= [(a_1 + a_2)(\sqrt{2} - 1) + (a_2 + a_3)]\Delta t \end{aligned} \quad (C.3)$$

Por lo tanto, en notación de sumatoria el término de la integral de la fuerza de Basset se puede expresar como:

$$\int_0^t \frac{Du_l}{Dt} \frac{du_{pi}}{dt} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j+a_{j+1}}{2} (2\Delta t) (\sqrt{n+1-j} + \sqrt{n-j}) + \frac{a_n+a_{n+1}}{2} (2\Delta t) \quad (C.4)$$

Bibliografía

- Alonso, A. A., & Ydstie, B. E. (1996). Process systems, passivity and the second law of thermodynamic. *Computers and Chemical Engineering*, 20.
- Alvarez, H., Lamanna, R., Vega, P., & Revollar, S. (2009). Metodología para la Obtención de Modelos Semifísicos de Base Fenomenológica Aplicada a una Sulfitadora de Jugo de Caña de Azúcar. *Revista Iberoamericana de Automática E Informática Industrial RIAI*, 6(3), 10–20. doi:10.1016/S1697-7912(09)70260-2
- Asakura, K., Harada, S., Funayama, T., & Nakajima, I. (1997). Simulation of descending particles in water by the distinct element method. *Powder Technology*, 94, 195–200.
- Asakura, K., Mizuno, M., Nagao, M., & Harada, S. (2007). Numerical Simulation of Particle Motion in a Jig Separator. In *5th Joint ASME JSME Fluids Engineering Conference* (pp. 385–391). San Diego, California.
- Asakura, K., Nagao, M., & Mizuno, M. (2007). Simulation of Particle Motion in a Jig Separator. *Journal of JSEM*, 7(Special Issue).
- Basset, A. B. (1888). *A Treatise on Hydrodynamics Volumen II* (pp. 260–302). London: George Bell and Sons.
- Beniuk, V. G., & Vadeikis, C. A. (1994). Centrifugal jigging of gravity concentrate and tailing at Renison limited. *Minerals Engineering*, 7, 577–589.
- Biegler, I., Grossman, E., & Westerberg, A. (1997). *Systematic methods of chemical process design*. Prentice Hall.
- Burt, R. (1984). *Gravity Concentration Technology*. Elsevier B.V.
- Burt, R. (1999). The role of gravity concentration in modern processing plants. *Minerals Engineering*, 12(11), 1291–1300. doi:10.1016/S0892-6875(99)00117-X
- Bustamante, M. O., Gaviria, A. C., & Restrepo, O. J. (2008). *Notas de clase de la asignatura: Concentración de minerales* (p. 32). Medellín: Universidad nacional de Colombia-sede Medellín.
- Coimbra, C. F. M., & Rangel, R. H. (1998). General solution of the particle momentum equation in unsteady Stokes flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 370, 53.

- Concha, F. (2001). *Manual de Filtración y Separación*. (Diario el Sur, Ed.) (Primera., p. 473). Concepción. Chile.
- Concha, F., & Barrientos, A. (1993). *Mecánica racional moderna. Volumen II. Termomecánica del medio continuo* (pp. 168–171). Concepción. Chile: Universidad de Concepción.
- Crowe, C., Sommerfeld, M., & Tsuji, Y. (1998). *Multiphase flows with droplets and particles* (1st ed.). CRC, Inc.
- Di Felice, R. (1994). The voidage function for fluid-particle interaction systems. *Int. J. Multiphase Flow*, 20(1), 153–159.
- Di Felice, R. (1995). Hydrodynamics of liquid Fluidisation. *Chemical Engineering Science*, 50(8), 1213–1245.
- Dong, K. J., Kuang, S. B., Vince, a., Hughes, T., & Yu, a. B. (2010). Numerical simulation of the in-line pressure jig unit in coal preparation. *Minerals Engineering*, 23(4), 301–312. doi:10.1016/j.mineng.2009.10.009
- Dong, L., Zhao, Y., Duan, C., Luo, Z., Zhang, B., & Yang, X. (2014). Characteristics of bubble and fine coal separation using active pulsing air dense medium fluidized bed. *Powder Technology*, 257, 40–46. doi:10.1016/j.powtec.2014.02.049
- Ergun, S. (1952). Fluid flow through packed columns. *Chem. Engng Prog*, 48, 89–94.
- Fan, L. S., & Zhu, C. (2005). *Principles of Gas-solid Flows*. Cambridge Series in Chemical Engineering. Cambridge University Press. doi:10.2277/0521021162
- Ferreira Feil, N., Hoffmann Sampaio, C., & Wotruba, H. (2012). Influence of jig frequency on the separation of coal from the Bonito seam — Santa. *Fuel Processing Technology*, 96, 22–26. doi:10.1016/j.fuproc.2011.12.010
- Ferziger, J. H., & Peric, M. (2002). *Computational Methods for Fluid Dynamics* (3rd ed.). Springer.
- Fradkov, A., Miroshnik, I., & Nikiforov, V. (1999). *Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems*. Kluwer Academic Publishers.
- Fuerstenau, M. C., & Kenneth, N. (2003). *Principles of Minerals Processing*. New York: SEM.
- Galvin, K. P., Pratten, S. J., Lambert, N., Callen, a. M., & Lui, J. (2002). Influence of a jiggling action on the gravity separation achieved in a teetered bed separator. *Minerals Engineering*, 15(12), 1199–1202. doi:10.1016/S0892-6875(02)00211-X
- Gaudin, A. M. (1939). *Principles of Mineral Dressing*. New York: McGraw-Hill.
- Geldart, D. (1973). Types of Gas Fluidization. *Powder Technology*, 7, 285–292.

- Gupta, C. K. (2003). *Chemical Metallurgy Principles and Practice* (pp. 3–527). Germany: Wiley-Vch.
- Hangos, K., & Cameron, I. (2001). *Process Modelling and Model Analysis* (1st ed., p. 561). San Diego, California.
- Jinnouchi, Y., & Kawashima, S. (1979). How to predict and optimise the pulsation in the air-pulsated jigs. In *8th Int. Coal Prep. Congres. (Donetz Doue)* (p. Paper B5).
- Jinnouchi, Y., Kita, S., Tanaka, M., & Sawada, Y. (1984). New Trends in Theory and Technology of the Air Pulsated Jigs in Japan. *Mineral & Metallurgical Processing*, 1, 76.
- Johnson, P. C., & Jackson, R. (1987). Frictional-collisional constitutive relations for granular materials, with applications to plane shearing. *Journal of Fluid Mechanics*, 176, 67–93. doi:10.1017/S0022112087000570
- Kallio, S., Hermanson, A., Fagerudd, K., & Engblom, M. (2003). *Experimental study of bubble interaction in a 2D bubbling fluidized bed cold model*.
- Kalman, R. E. (1960). *On the General Theory of Control System*. Moscow.
- Karantzavelos, G. E., & Frangicos, A. Z. (1984). *Contribution to the modeling of jigging process. Control' 84 Mineral and Metallurgical Processing* (p. 97, Chapter 12). New York: AIME.
- Kleinstreuer, C. (2003). *Two-Phase Flow: Theory and Applications*. Taylor & Francis.
- Krecic, M. (1995). *Evaluation and Development of Particle Saltation Models*. University of Florida.
- Kuang, S. B., Chu, K. W., Yu, A. B., Zou, Z. S., & Feng, Y. Q. (2008). Computational investigation of horizontal slug flow in pneumatic conveying. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 47, 470–480.
- Kunii, D., & Levenspiel, O. (1991). *Fluidization Engineering* (2nd ed.).
- Lamb, H. (1945). *Hydrodynamics*. New York: Dover.
- Li, Y., Zhao, W., Xu, S., & Xia, W. (2013). Changes of size, ash and density of coal particles on the column axis of a liquid–solid fluidized bed. *Powder Technology*, 245, 251–254. doi:10.1016/j.powtec.2013.04.039
- Lopamudra, P., Sahoo, A. K., Tripathy, A., Biswal, S. K., & Sahu, A. K. (2012). Application of artificial neural network to study the performance of jig for beneficiation of non-coking coal. *Fuel*, 97, 151–156. doi:10.1016/j.fuel.2012.02.018
- Lukerchenco, N., Dolansky, J., & Vlasak, P. (2012). Basset force in numerical model of saltation. *J. Hydrol. Hydromech*, 60(4), 277–287. doi:10.2478/v10098-012-0024-1

- Lyman, G. J. (1992). Review of Jigging Principles and Control. *Coal Preparation*, 11, 145–165.
- Mayer, F. W. (1964). Fundamentals of a potential theory of jigging process. In *Proc. 7th Int. Miner. Proc. Cong.* (pp. 75–86). New York.
- Milne Thompson, L. M. (1974). *Theoretical Hydrodynamics* (5th ed.). London: Macmillan.
- Mishra, B. K., & Mehrotra, S. P. (2001). A jig model based on the discrete element method and its experimental validation. *International Journal of Mineral Processing*, 63(4), 177–189. doi:10.1016/S0301-7516(01)00053-9
- Mukherjee, A. K., Bhattacharjee, D., & Mishra, B. K. (2006). Role of water velocity for efficient jigging of iron ore. *Minerals Engineering*, 19, 952–959. doi:10.1016/j.mineng.2005.10.023
- Mukherjee, A. K., & Mishra, B. K. (2007). Experimental and simulation studies on the role of fluid velocity during particle separation in a liquid–solid fluidized bed. *International Journal of Mineral Processing*, 82(4), 211–221. doi:10.1016/j.minpro.2006.11.006
- Niemi, T. (2012). *Particle Size Distribution in CFD Simulation in Gas-Particle Flows*. Aalto University.
- Niño, Y., & Garcia, M. (1994). Gravel saltation: 2. Modeling. *Water Resources Research*, 30(6), 1915–1924. doi:10.1029/94WR00534
- Oshitani, J., Kajimoto, S., Yoshida, M., Franks, G. V., Kubo, Y., & Nakatsukasa, S. (2013). Continuous float–sink density separation of lump iron ore using a dry sand fluidized bed dense medium. *Advanced Powder Technology*, 24(2), 468–472. doi:10.1016/j.apt.2012.10.010
- Pickett, D. E., & Riley, G. W. (1985). Hindered settling concentration and jigging. *SME Handbook*, 1(4), 27–32.
- Puigjaner, L., Ollero, P., de Prada, C., & Jimenez, L. (2006). *Estrategias de Modelado, Simulación y Optimización de Procesos Químicos*. Editorial Síntesis.
- Richardson, J. F., & Zaki, W. N. (1954). Sedimentation and fluidisation: Part I. *Trans. Instn Chem. Engrs*, 32, 35–53. doi:10.1016/S0263-8762(97)80006-8
- Rong, R. X., & Lyman, G. J. (1991a). Modelling jig bed stratification in a pilot scale baum jig. *Minerals Engineering*, 4, 611.
- Rong, R. X., & Lyman, G. J. (1991b). The mechanical behavior of water and gas phases in a pilot scale baum jig. *Coal Preparation*, 9, 85.
- Rong, R. X., & Lyman, G. J. (1993a). A new energy dissipation theory of jig bed stratification. Part 1 " energy dissipation analysis in a pilot scale baum jig. *Int. J. Miner. Process*, 37, 165–188.

- Rong, R. X., & Lyman, G. J. (1993b). A new energy dissipation theory of jig bed stratification . Part 2 " a key energy parameter determining bed estratification. *Int. J. Miner. Process*, 37, 189–207.
- Rudinger, G. Fundamentals of Gas-Particle Flow, Handbook of powder Technology (1980). Amsterdam: Elsevier B.V.
- Schillitt, W. J., & Kenyen, V. . (1992). *Minerals Procesing* (pp. 2184–2228). Handbook. 2.
- Schiller, L., & Naumann, A. (1933). Uber die grundlegenden berchnungen bei der schwerkraftaufbereitung. *Ver. Deut. Ing.*, 77, 318.
- Seider, W., Seader, J., & Lewin, D. (2003). *Product and process design principles: synthesis, analysis and evaluation*. John Wiley and Sons.
- Sobral, Y. D., Oliveira, T. F., & Cunha, F. R. (2007). On the unsteady forces during the motion of a sedimenting particle. *Powder Technology*, 178(2), 129–141. doi:10.1016/j.powtec.2007.04.012
- Srinivasan, R., Mishra, B. K., & Mehrotra, S. P. (1999). Simulation of Particle Stratification in Jigs. *Coal Preparation*, 20(June 2013), 55–70.
- Steiner, H. J. (1996). A contribution to the theory of jiggling, part I: Similarity criteria of the motion of jig layers. *Minerals Engineering*, 9(6), 675–686.
- Tavares, L. M., & King, R. P. (1995). A Useful Model for the Calculation of the Performance of Batch and Continuous Jigs. *Coal Preparation*, 15, 99–128.
- Versteeg, H. K., & Malalasekera, W. (2007). *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. (2nd ed.). Prentice Hall.
- Vetter, D. A., Brouckaert, C. J., & Wright, D. W. (1987). A dispersion model of particle separation, with specific applications to the batch jiggling of particle. In *APCOM 87, Proc. Twentieth Symp. on Application of Computers and Mathematics in the Mineral Industries* (p. 127).
- Viduka, S. M., Feng, Y. Q., Hapgood, K., & Schwarz, M. P. (2012). CFD-DEM linvestigation of particle separations using a trapezoidal jiggling profile. In *Ninth International Conference on CFD in the Minerals and Process Industries, CSIRO* (pp. 1–8). Melbourne.
- Viduka, S. M., Feng, Y. Q., Hapgood, K., & Schwarz, M. P. (2013a). CFD-DEM investigation of particle separations using a sinusoidal jiggling profile. *Advanced Powder Technology*, 24(2), 473–481. doi:10.1016/j.appt.2012.11.012
- Viduka, S. M., Feng, Y. Q., Hapgood, K., & Schwarz, M. P. (2013b). Discrete particle simulation of solid separation in a jiggling device. *International Journal of Mineral Processing*, 123, 108–119. doi:10.1016/j.minpro.2013.05.001

- Vince, A., Purdon, P., Gibson, L., & Hughes, T. (2007). ACARP Project C16042 Evaluation of in-Line pressure jig. December.
- Vinogradov, N. N., Rafales-Ramarka, E. E., Kollody, K. K., Egorov, N. S., Melik-Stepanova, A. G., & Gurvich, G. M. (1968). New trends in theory and technology of jiggling the minerals. In *8th International Mineral Processing Congress C2*. Leningrad.
- Wills, B. A. (1997). *Minerals Processing Technology*. London: Butterworth-Heinemann.
- Xia, Y. K., & Peng, F. F. (2007). Numerical simulation of behavior of fine coal in oscillating flows, *20*, 113–123. doi:10.1016/j.mineng.2006.06.004
- Xia, Y. K., Peng, F. F., & Wolfe, E. (2007). CFD simulation of fine coal segregation and stratification in jigs. *International Journal of Mineral Processing*, *82*(3), 164–176. doi:10.1016/j.minpro.2006.10.004
- Yeoh, G. H., & Tu, J. (2009). *Computational techniques for multiphase flows*. Butterworth-Heinemann.
- Yu, Y., Zhou, L., Wang, B., & Cai, F. (2005). A USM- Θ two-phase turbulence model for simulating dense gas-particle flows. *Acta Mechanica*, *21*, 228–234. doi:10.1007/s10409-005-0037-7
- Zeng, Z., & Zhou, L. (2006). A two-scale second-order moment particle turbulence model and simulation of dense gas-particle flows in a riser. *Powder Technology*, *162*(1), 27–32. doi:10.1016/j.powtec.2005.10.011
- Zhou, L. (2011). Second-order moment modeling of dispersed two-phase turbulence - Part 2 - USM - Θ two-phase turbulence model and USM-SGS two-phase stress model. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, *54*, 1296–1303. doi:10.1007/s11433-011-4322-0
- Zimmels, Y. (1983). Hindered motion of particulate system in newtonian fluids. Acceleration and steady regimes. *Powder Technology*, *34*, 191–202. Retrieved from <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/003259108387051X>