SOLUCION DE PROBLEMAS

23. Resolver el sistema siguiente de ecuaciones:

(1) $$x + y = 4,$$

(2) $$xz + yu = 7,$$

(3) $$xz^2 + yu^2 = 12,$$

(4) $$xz^3 + yu^3 = 21.$$

Solución. Igualo el valor de x, deducido entre (1) y (2), al valor de x, deducido entre (2) y (3); así obtengo:

(5) $$4uz - 7(u + z) + 12 = 0.$$

Igualo el valor de x, deducido entre (2) y (3), al valor de x, deducido entre (3) y (4); así obtengo:

(6) $$7uz - 12(u + z) + 21 = 0$$

y eliminando uz entre (5) y (6):

(7) $$u = - z.$$

De (3) y (7):

(8) $$z^2 (x + y) = 12.$$

De (1) y (8):

$$z = \pm \sqrt{3}, \quad u = \mp \sqrt{3}.$$

Reemplazando en (2):

(9) $$\pm \sqrt{3} (x - y) = 7, \quad x - y = \pm 7\sqrt{3}/3.$$

(1) y (9) dan

$$x = \frac{12 \pm 7\sqrt{3}}{6}, \qquad y = \frac{12 \mp 7\sqrt{3}}{6}.$$

Son las raíces:

$$x = \frac{12 \pm 7\sqrt{3}}{6}, \quad y = \frac{12 \mp 7\sqrt{3}}{6}, \; z = \pm \sqrt{3}, \; u = \mp \sqrt{3}.$$

Armando Chaves Agudelo

Otras soluciones de: *"Antiguo alumno de la Facultad", Juan Gómez Mora, Alvaro Rodríguez, Guillermo Tello Y.*

28. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x^3 + y^3 = 1,$$

$$x^2z + y^2z = 0,$$

$$xz^2 + yz^2 = -2,$$

$$z^3 + y^3 = 22.$$

Solución. Haciendo las substituciones $x^3 = X$, $y^3 = Y$, $z/x = Z$, $u/y = U$, obtenemos el sistema

(1) $$X + Y = 1,$$

(2) $$XZ + YU = 0,$$

(3) $$XZ^2 + YU^2 = -2,$$

(4) $$XZ^3 + YU^3 = 22.$$

Este sistema es similar al del problema 23. Eliminando X entre (1) y (2), (2) y (3), (3) y (4), obtenemos

(5) $$YZ - YU = Z,$$

(6) $$YZU - YU^2 = 2,$$

$$(7) \qquad YZU^2 - YU^3 = -2Z - 22.$$

Dividiendo (6) por (5) y (7) por (6), obtenemos

$$U = 2/Z = (-2Z - 22)/2,$$

es decir

$$Z^2 + 11Z + 2 = 0,$$

de donde

$$X = \frac{1}{2} \mp \frac{11}{2\sqrt{113}}, \quad Y = \frac{1}{2} \pm \frac{11}{2\sqrt{113}}, \quad Z = \frac{-11 \pm \sqrt{113}}{2}$$

$$U = \frac{-11 \mp \sqrt{113}}{2}$$

Alvaro Rodríguez.

26. Se dan en el espacio dos triángulos ABC y $A'BC$ teniendo el lado BC común, siendo AA' perpendicular al plano $A'BC$.

(a) Sea $A'K$ la altura del triángulo $A'BC$; ¿qué se puede afirmar de los planos $AA'K$ y ABC? Demostrarlo.

(b) Sean BL y BM las perpendiculares trazadas de B a $A'C$ y AC; mostrar que el plano LBM es perpendicular al plano del triángulo ABC. Si H' es el ortocentro del triángulo ABC y H el del triángulo $A'BC$, mostrar que H' es la proyección de H sobre el plano ABC.

(c) A se mueve sobre la semirrecta $A'x$ perpendicular al plano del triángulo fijo $A'BC$. Determinar el lugar del punto H'.

(d) Dado $A'B = c$, $A'C = b$, $AA' = m$ y el ángulo $BA'C = \alpha$, determinar el volumen del tetraedro $AA'BC$.

(Bachillerato, 1ª parte, Aix-Marseille, Francia, 1948).

Solución. (a) Los planos $AA'K$ y ABC son perpendiculares. En efecto $A'K$ es perpendicular a BC. Como $A'K$ es la proyección de AK sobre el plano $A'BC$, AK también debe ser perpendicular a BC. Luego el plano $AA'K$ es perpendicular a BC y entonces también al plano ABC que contiene BC.

(b) $A'C$ es la proyección de AC sobre el plano $A'BC$. Pero $A'C$ es perpendicular a BL, luego la dirección de BL es perpendicular a AC. Por otro lado BM es perpendicular a AC, luego el plano LBM es perpendicular a AC y también al plano ABC que contiene

AC. - AK es una altura del triángulo ABC, luego H' es el punto de intersección de AK y BM. H es el punto de intersección de $A'K$ y BL, entonces HH' está contenido en los planos $AA'K$ y LBM. Como ambos son perpendiculares al plano ABC, HH' lo es también y H' es la proyección de H sobre el plano ABC.

(c) HH' es perpendicular al plano ABC, luego en particular al segmento $H'K$. El ángulo $HH'K$ es entonces recto, luego por el teorema inverso de THALES H' se mueve sobre una semicircunferencia con diámetro HK y perpendicular al plano $A'BC$.

(d) El volumen de un tetraedro es igual al producto de la tercera parte de una arista por el área de la proyección del tetraedro sobre un plano perpendicular a la arista. Como AA' es perpendicular a $A'BC$, el volumen es igual a $(1/6)\ mbc \operatorname{sen} \alpha$.

Solución de *Armando Chaves Agudelo.*

43. Demostrar que cualquiera que sea el número entero positivo N, se pueden encontrar N enteros positivos consecutivos entre los cuales no hay ningún número primo.

Solución. Los N enteros consecutivos $(N+1)!+2$, $(N+1)!+3, \ldots, (N+1)!+(N+1)$ son todos compuestos.

Observación. Este teorema, debido a EUCLIDES, se expresa con el simbolismo del cálculo como $\lim\sup\ (p_n - p_{n-1}) = \infty$, siendo p_n el n-ésimo número primo (cf. Vol. II., p. 64). Si es cierto que existen infinitos primos gemelos (cf. Vol. II., p. 133), entonces $\lim\inf\ (p_n - p_{n-1}) = 2$. Hoy día no sabemos ni siquiera si $\lim\inf\ (p_n - p_{n-1}) < \infty$. El lector interesado en este problema encontrará amplia información en los trabajos siguientes:

GIOVANNI RICCI. La differenza di numeri primi consecutivi. Rendiconti del Seminario Matematico di Torino. **11** (1951/52) pp. 149-200.

PAUL ERDÖS. Problems and results on the differences of consecutive primes. Publicationes Mathematicae. **1** (1949/50) pp. 33-37.

44. Encontrar todos los números primos p tales que p^2+2 sea también un número primo.

T. Szele

Solución. Se puede escribir:

$$p^2 + 2 = (p+1)\,(p+2) - 3p. \tag{1}$$

De los tres números consecutivos p, $p+1$, $p+2$, uno debe ser múltiplo de 3. Si es $p + 1$, el segundo miembro de (1) es múltiplo de 3, y $p^2 + 2$ no es primo. Si es $p + 2$, llegamos a la misma conclusión. Luego para que p y $p^2 + 2$ sean ambos números primos, es necesario que p sea múltiplo de 3; la única posibilidad es $p = 3$.

$p = 3$ (que da $p^2 + 2 = 11$) es el único número primo tal que $p^2 + 2$ sea también primo.

Guillermo Tello Y.

Otra solución de: *Armando Chaves Agudelo.*

Observación de Armando Chaves Agudelo: El teorema de FERMAT dice: si q es primo y a un entero no divisible por q, entonces $a^{q-1} - 1$ es divisible por q. Aplicando este a $q = 3$ obtenemos que si a no es divisible por 3, $a^2 - 1$ y también $a^2 - 1 + 3 = a^2 + 2$ es divisible por 3. Luego para que $a^2 + 2$ sea primo, es necesario o bien que $a = 1$ o bien que a sea divisible por 3. Entonces la única posibilidad para que a y $a^2 + 2$ sean primos es $a = 3$, $a^2 + 2 = 11$.

45. Siendo ξ un número real, denotemos por $[\xi]$ el número entero inmediatamente inferior o igual a ξ (véase Vol. II., p. 24). Demostrar que si n es un número entero positivo y ξ es un número real positivo, entonces

$$\left[\frac{[\xi]}{n}\right] = \left[\frac{\xi}{n}\right] .$$

Solución. En efecto se tiene por definición

$$\xi = [\xi] + \delta,$$

siendo $0 \leqslant \delta < 1$. Luego

$$\frac{\xi}{n} = \frac{[\xi]}{n} + \frac{\delta}{n} .$$

Pero según el teorema de la división con residuo

$$(1) \qquad \frac{[\xi]}{n} = a + \frac{r}{n} ,$$

donde $0 \leqslant r \leqslant n - 1$. Entonces

$$\frac{\xi}{n} = a + \frac{r + \delta}{n} .$$

Ahora $0 \leqslant r + \delta < n$, luego $(r + \delta)/n < 1$ y

$$\left[\frac{\xi}{n}\right] = a. \tag{2}$$

Además $r/n < 1$, luégo de (1) sigue

$$\left[\frac{[\xi]}{n}\right] = a.$$

Q. E. D.

Armando Chaves Agudelo

Otras soluciones de: *Juan Gómez Mora, Alvaro Rodríguez.*

46. (Continuación). Si ξ es positivo

$$[2\xi] = [\xi] + [\xi + 1/2].$$

Solución. Tenemos $\xi = [\xi] + \delta$, $0 \leqslant \delta < 1$. Supongamos primero que $\delta \geqslant 1/2$. En este caso

$$\xi = [\xi] + 1/2 + \epsilon, \tag{1}$$

siendo $0 \leqslant \epsilon < 1/2$. Entonces

$$2\xi = 2[\xi] + 1 + 2\epsilon,$$

siendo $2\epsilon < 1$, luego

$$[2\xi] = 2[\xi] + 1 = [\xi] + [\xi + 1], \tag{2}$$

puesto que $[\xi] + 1 = [\xi + 1]$. Ahora de (1)

$$\xi + 1/2 = [\xi] + 1/2 + \epsilon + 1/2 =$$
$$= [\xi] + 1 + \epsilon = [\xi + 1] + \epsilon,$$

de donde

$$[\xi + 1/2] = [\xi + 1]. \tag{3}$$

De (2) y (3) resulta la fórmula que hay que demostrar.

Sea ahora $\delta < 1/2$. Entonces

$$\xi = [\xi] + \delta, \tag{4}$$

$$2\xi = 2[\xi] + 2\delta,$$

donde $0 \leqslant 2\delta < 1$ y por lo tanto

$$[2\xi] = 2[\xi]. \tag{5}$$

De (4)

$$\xi + 1/2 = [\xi] + 1/2 + \delta,$$

pero como $\delta + 1/2 < 1$,

$$[\xi + 1/2] = [\xi]. \tag{6}$$

De (5) y (6)

$$[2\xi] = [\xi] + [\xi] = [\xi] + [\xi + 1/2].$$

Q. E. D.

Armando Chaves Agudelo

Otras soluciones de: *Juan Gómez Mora, Alvaro Rodríguez.*

47. Simplificar la siguiente suma:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3.1!} + \frac{1}{4.2!} + \ldots + \frac{1}{(n+1).(n-1)!}$$

Solución. Se tiene

$$\frac{n!}{1} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1).(n-1)!}.$$

Entonces

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!},$$

$$\frac{1}{3.1!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!},$$

$$\frac{1}{4.2!} = \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(n+1)\,.\,(n-1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Sumando

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3.1!} + \frac{1}{4.2!} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\,(n-1)!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Guillermo Tello Y.

Otra solución de: *Armando Chaves Agudelo.*

48. Demostrar que si dos aristas de un tetraedro que no se cortan son iguales, entonces las secciones planas paralelas a estas dos aristas tienen todas el mismo perímetro.

Gy. Sz. - Nagy

Solución. Sean $AC = BD = a$ las aristas iguales y sea $MNPQ$ una sección que cumple la condición del enunciado, con los vértices respectivos sobre las aristas AD, AB, BC, DC . MN es paralelo a PQ, puesto que ambos son paralelos a BD . MQ y NP también son paralelos, puesto que ambos son paralelos a AC. Luego $MNPQ$ es un paralelogramo. Sea $MQ = NP = b$ y $MN = PQ = h$. Del triángulo ACD

$$b : a = MQ : AC = DQ : DC.$$

Del triángulo BCD

$$h : a = PQ : BD = CQ : DC.$$

Luego

$$(b + h) : a = (DQ + CQ) : DC : DC = 1,$$

entonces el perímetro es igual a $2b + 2h = 2a$, que es una cantidad constante.

Armando Chaves Agudelo

Otras soluciones de: *Juan Gómez Mora, Alvaro Rodríguez, Guillermo Tello Y.*

49. Demostrar que la longitud del radio del círculo inscrito en un triángulo está comprendida entre el tercio de la altura más grande y el tercio de la altura más pequeña.

Gy. Sz. - Nagy

Solución. Sean las alturas $h_3 \geqslant h_2 \geqslant h_1$ que caen sobre los lados c, b, a respectivamente, S la superficie del triángulo y r el radio [del círculo inscrito]. $S = (1/2)\, h_1 a$, luego

$$\frac{1}{h_1} = \frac{a}{2S} .$$

Análogamente

$$\frac{1}{h_2} = \frac{b}{2S} , \qquad \frac{1}{h_3} = \frac{c}{2S} .$$

Sumando

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{p}{S} ,$$

donde p es el semiperímetro. Pero $rp = S$, entonces

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r} .$$

Pero $1/h_1 \geqslant 1/h_2 \geqslant 1/h_3$, luego

$$\frac{3}{h_1} \geqslant \frac{1}{r} \geqslant \frac{3}{h_3}$$

y

$$\frac{h_1}{3} \leqslant r \leqslant \frac{h_3}{3} .$$

Armando Chaves Agudelo

Otras soluciones de: *Alvaro Rodríguez, Guillermo Tello Y.*