Condensado magnético y ruptura dinámica de la simetría quiral en la electrodinámica cuántica en (2+1) dimensiones

Tesis de Maestría

Autor
Juan Sebastián Montañez Moyano

Director
Carlos José Quimbay Herrera

Tesis presentada como requisito para optar por el título de:
Maestría en Ciencias-Física
Grupo de Campos y Partículas
Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá D.C.
2017

TABLA DE CONTENIDO

Agradecimientos

En primer lugar, quiero dar las gracias a la Universidad Nacional de Colombia por mostrarme tanto en mi pregrado como en el posgrado algunas de las maravillas que tiene la Física; por instruirme con los conocimientos necesarios para explorar la física en varias de sus principales dimensiones por medio de sus excelentes profesores, sus instalaciones y equipos.

En segundo lugar, le agradezco al profesor Carlos José Quimbay Herrera por toda su ayuda, consejos, llamados de atención, asesorías y por el tiempo que invirtió para que me preparara de la mejor manera para realizar esta tesis de maestría. Sin lugar a duda más que un docente fue alguien que me ayudó a mantenerme enfocado en este logro, tanto en los malos como en los buenos momentos por medio de sus sabias palabras y contundentes ayudas.

A mi madre y hermana que con su paciencia, amor, compañía, consejos y ayudas me ayudaron a sacar este proyecto adelante a pesar de los inconvenientes tanto personales como académicos que tuve a lo largo de la elaboración de la tesis. Ustedes saben que, aunque no se los digo con mucha frecuencia, son mi gran inspiración para seguir adelante y que las amo mucho.

A mis amigos, especialmente a Luis Cabarique que me ayudó a despejar algunas de las dudas conceptuales que surgieron a lo largo del proceso porque gracias a su conocimiento y apoyo me permitieron vislumbrar las soluciones a algunas cuestiones teóricas que no habría visto sin sus pedagógicas demostraciones. A Juan Camilo Hernández y David Leonardo Ricaurte "Rolo" porque sus consejos y permanentes motivaciones me sirvieron para levantarme y reponerme a los obstáculos que he tenido en el camino.

A mi gran amiga Paula Perilla, gracias por tu apoyo, regaños y enseñanzas tanto cuando estuviste acá en Colombia como cuando te fuiste a seguir con tus estudios en Estados Unidos porque tu ánimo, fe y ejemplo fueron mi principal referente para vencer todas las adversidades y conseguir este importante logro para mi vida. Tú sabes Paula que, a pesar de todo, siempre estás en mi corazón como un motor que me motiva a seguir adelante y que te quiero muchísimo.

A una chica que en tan poco tiempo se convirtió en ser especial para mí, Mónica Portes, gracias por motivarme con tus mensajes, detalles y todas las cosas que hiciste por mí durante el corto tiempo que estuviste en mi vida. Me ayudaste a cerrar heridas que creí que jamás se iban sanar, me mostraste que tengo un lado bueno fuera del netamente académico y me ayudaste a ser mejor. Y aunque por circunstancias de la vida no podemos estar juntos, sabes que eres un ser especial para mí y que te quiero mucho.

Finalmente, y no menos importante, le doy las gracias a Dios porque esta tesis de maestría es otro paso que doy, cuando nadie creyó que podría hacerlo por la enfermedad que tuve, y que sin su ayuda nada de esto sería posible. Gracias por escuchar mis oraciones, por colocar a personas tan sabias como el profesor Quimbay como mi director de tesis y guía; por darme a mi familia tan incondicional y maravillosa; por regalarme los amigos tan fantásticos que tengo porque son el complemento perfecto a la familia que tengo; y, por permitirme hacer mis estudios tanto de pregrado como de Maestría en la Universidad Nacional de Colombia, la mejor universidad de país.

Resumen

En el contexto de la Electrodinámica Cuántica y para un sistema constituido por fermiones relativistas de espín 1/2, cargados eléctricamente, restringidos a moverse a un plano y sometidos a la acción de un campo magnético uniforme externo, perpendicular al plano, se estudian los siguientes aspectos: la existencia de condensado magnético, la generación de masa magnética y la ruptura dinámica de la simetría quiral $U(1)_R \times U(1)_L$. Algunos de estos aspectos son estudiados adicionalmente para el caso en el que junto al campo magnético uniforme externo también actúa sobre los fermiones un potencial lineal que modifica el momentum de los mismos. Para realizar lo anterior, primero se soluciona la ecuación de Dirac en (2+1) dimensiones, en presencia de un campo magnético uniforme externo, obteniendo las funciones de onda de probabilidad y el espectro de energías. A continuación se soluciona la ecuación de Dirac en (2+1) dimensiones en presencia de un potencial lineal que modifica el momentum de los fermiones, la cual es llamada ecuación del oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones, obteniendo las funciones de onda de probabilidad y el espectro de energías. Escribiendo la ecuación del oscilador de Dirac en forma covariante, se muestra que ésta describe fermiones de espín 1/2, con carga eléctrica, sometidos a la acción de un campo magnético uniforme interno perpendicular al plano. Posteriormente se considera la ecuación de Dirac en (2+1) dimensiones en presencia tanto del campo magnético uniforme externo como del potencial lineal. Realizado lo anterior, para este sistema se obtiene el condensado magnético a partir del cálculo del valor esperado del producto de los operadores de campo, así como mediante el uso del formalismo de tiempo propio de Schwinger, y se calcula la masa magnética siguiendo un procedimiento basado en el formalismo de tiempo propio de Schwinger. Finalmente, para el caso de fermiones sin masa sometidos únicamente a la acción de un campo magnético uniforme externo se estudia, mediante el mencionado formalismo de Schwinger, el fenómeno de la ruptura dinámica de la simetría quiral local $U(1)_R \times U(1)_L$.

1. INTRODUCCIÓN

La Electrodinámica Cuántica (QED) es una teoría gauge basada en el grupo de simetría $U(1)_Q$, que describe de manera fundamental la interacción electromagnética de partículas elementales (fermiones de espín 1/2) con carga eléctrica, a través del intercambio de fotones (bosones de espín 1 sin masa). La QED se fundamenta en la Teoría Cuántica de Campos, de tal manera que los fermiones de espín 1/2 quedan descritos como las excitaciones de un campo espinorial de Dirac, mientras que los fotones se describen como las excitaciones de un campo bosónico vectorial gauge de espín 1 (campo electromagnético). La densidad lagrangiana de la QED es invariante bajo transformaciones gauge locales $U(1)_Q$ de los campos de materia, antimateria y radiación [1], con lo cual, la carga eléctrica Q resulta ser la carga conservada asociada a la simetría $U(1)_Q$ [1].

Uno de los padres de la QED fue Julian Schwinger, quien desarrolló el llamado formalismo de tiempo propio para funciones de Green de dos puntos, lo cual le permitió estudiar el propagador fermiónico para el caso de fermiones cargados eléctricamente que interactúan vía el campo electromagnético [2][3]. Mediante el formalismo de tiempo propio de Schwinger y a través de funciones de Green de dos puntos, se pueden describir diversas propiedades de los campos fermiónicos interactuantes, de forma consistente con sus ecuaciones de movimiento [2][3]. Usando el mencionado formalismo de Schwinger, se puede calcular consistentemente el propagador fermiónico tanto para el caso de un campo fermiónico interactuando con un campo electromagnético, como para el caso de interacción con campos eléctricos y magnéticos constantes, y también se puede realizar la cuantización del campo fermiónico [4] [2].

De manera paralela e independiente a Schwinger, Richard Feynman desarrolló algunos aspectos del actual formalismo de la QED, mediante la introducción de la técnica de los diagramas de Feynman, lo cual le permitió describir inicialmente la interacción electromagnética entre dos electrones [5]. Posteriormente, usando la técnica de los diagramas de Feynman e incorporando aspectos teóricos básicos, desarrolló el formalismo que permite estudiar positrones interactuando vía el campo electromagnético [6][7][8]. Por otra parte, Tomonaga mostró formalmente que la Teoría Cuántica de Campos es la teoría física que soporta a la QED [9][10][11]. Adicionalmente, Dyson realizó importantes aportes sobre la renormalizabilidad de la QED, mostrando que los trabajos de Schwinger, Feynman y Tomonaga eran completamente equivalentes para describir la interacción electromagnética con la materia [12].

En la QED, la interacción electromagnética se introduce a través del principio gauge y de esta forma la interacción, desde un punto de vista cuántico, está mediada por un campo bosónico gauge. Este principio en el que se basa la QED, fue extendido para describir la interacción fuerte de quarks y gluones en el contexto de la QCD [13] y también para describir la interacción electrodébil de quarks y leptones en el contexto del modelo de Glashow-Weinberg-Salam [14].

Son varios los trabajos enfocados a estudiar diversos aspectos de la QED en (3+1) dimensiones, por ejemplo: catálisis debido a la ruptura dinámica de la simetría quiral y el fenómeno de reducción dimensional que se produce como consecuencia de esta ruptura [15]; propiedades de partículas elementales con carga eléctrica [16];

[1] Se ha mostrado experimentalmente que la QED es la teoría más precisa de la física [1], pues entre otras cantidades físicas permite calcular, con una precisión de al menos 10 cifras significativas, el momento magnético anómalo del electrón.

[2] En el anexo C, se presenta una detallada descripción del formalismo de tiempo propio de Schwinger para la QED, tanto en el caso general de campos electromagnéticos, como en el caso particular de campos constantes, mostrando las principales características del propagador fermiónico (función de Green de dos puntos) obtenido a partir de la densidad lagrangiana interactuante y de su correspondiente funcional acción.

generación de masa topológica [18]; expansiones de acciones efectivas [19][20]; tubos de flujo electromagnético [21]; paramagnetismo, modos cero y singularidad de la masa [22].

Por otra parte, diversos aspectos de la QED en (2+1) dimensiones han sido estudiados en la literatura, por ejemplo: flujo electromagnético a través de tubos [21]; correcciones de orden superior [23]; comportamientos críticos analizando la expansión $1/N$ [24]; tunelamiento quiral [25]; efectos de diferentes tipos de potencial [26][27]; mapeos exactos de la ecuación de Dirac interactuante con potencial lineal en el modelo de Jaynes-Cummings [28]; límite no relativista de la ecuación de Dirac interactuante con potencial lineal en (2+1) dimensiones [58]; completez de las funciones de onda de probabilidad de la ecuación de Dirac interactuante con potencial lineal [30]; efecto Hall cuántico fraccionario [31][32]; comportamiento del campo de Yang-Mills [33].

Mediante el formalismo de tiempo propio de Schwinger, se ha estudiado el condensado magnético que se produce cuando un sistema de fermiones sin masa se coloca en presencia de un campo magnético uniforme exterior, así como la masa magnética que se genera como consecuencia de la interacción de estos fermiones con el campo magnético [35]. No obstante también es posible obtener el condensado magnético a través del cálculo directo del valor esperado con respecto al estado de vacío del producto de los operadores de campo fermiónico [36][37], lo cual da lugar a resultados equivalentes a los obtenidos usando el formalismo de tiempo propio de Schwinger. Para el caso de fermiones no masivos, el sistema presenta simetría quiral, pero debido al efecto de la interacción de los fermiones con el campo magnético, los fermiones adquieren una masa dinámica (llamada masa magnética), que trae como consecuencia que la simetría quiral se rompa dinámicamente [19][34][35]. El condensado magnético, ha sido también estudiado en la catálisis magnética de una ruptura de simetría dinámica [38], en soluciones clásicas de la teoría electrodébil [39] y en condensados de quarks debidos a campos magnéticos [40].

La simetría quiral se ha estudiado de forma general tanto en la QED como en la QCD [41][42]. La consideración de factores que provocan la ruptura de la simetría quiral, tanto para el caso de ruptura espontánea como de ruptura dinámica de esta simetría, también han sido motivo de interés [43][44]. De igual forma, se ha estudiado la relación entre la simetría quiral con la simetría axial y la existencia de sus anomalías [44]. Por lo anterior, en esta tesis se estudian cuáles son los efectos sobre el condensado magnético y la masa magnética si, además del campo magnético uniforme que actúa sobre el fermión sin masa, adicionalmente se introduce un potencial lineal que modifica el momentum del fermión. Este potencial lineal, en esta tesis, es llamado el potencial del oscilador de Dirac. Para el caso de fermiones sin masa sometidos únicamente a la acción de un campo magnético externo, también es motivo de interés en esta tesis estudiar la ruptura dinámica de la simetría quiral.

La primera alusión formal al oscilador de Dirac, en el caso de (3+1) dimensiones, se realizó en la referencia [45], donde se mostró que la ecuación de Dirac con un potencial lineal que modifica al momentum del fermión (llamada la ecuación del oscilador de Dirac), en el límite no relativista, describe un oscilador armónico cuántico con un término de interacción espín-órbita. Debido a este hecho, los autores de esta referencia llamaron al sistema descrito por la ecuación de Dirac con un potencial lineal como el oscilador de Dirac. El espectro de energía y las funciones de onda de probabilidad de este sistema son obtenidas a partir de un procedimiento que presenta cierta semejanza con el seguido para solucionar la ecuación de movimiento del oscilador armónico cuántico no relativista [45]. Sin embargo, los espectros de energía y las funciones de onda de ambos sistemas son diferentes [28][45][46].

El oscilador de Dirac ha sido motivo de interés en la física matemática, puesto que sus funciones de onda de probabilidad forman una base completa y ortonormal [45] [3] y por poseer soluciones exactas [47], a diferencia de lo que sucede en algunos sistemas físicos descritos por la Electrodinámica Cuántica, en donde hay que utilizar aproximaciones [15][49]. Este sistema ha sido estudiado usando un enfoque de teoría gauge [16][50] y su dinámica ha sido estudiada usando diferentes métodos teóricos [51][52][53]. Adicionalmente, se ha mostrado que se puede realizar un procedimiento consistente de cuantización canónica del campo del oscilador de Dirac en (1+1) y en

[3] En el anexo B, se muestra la existencia de una base completa y ortonormal para el caso de las funciones de onda de probabilidad del oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones.

(3+1) dimensiones [17][26]. Otros aspectos del oscilador de Dirac han sido estudiados en la literatura, tales como: transiciones de fase cuánticas [54][55][56]; soluciones de la ecuación del oscilador de Dirac utilizando técnicas de mecánica cuántica supersimétrica [57] u otras técnicas [58][59][60]; potenciales aplicaciones en la física del estado sólido [61][62][63].

Para el caso del oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones, diversos aspectos han sido estudiados en la literatura, por ejemplo: sus funciones de onda y sus espectro de energía [47][48]; su analogía con modelo de James-Cummings de la óptica cuántica [46]; la existencia de una transición de fase cuántica asociada con este sistema [28][46][54][58]; su interpretación física como un sistema constituido por un fermión cargado eléctricamente restringido a moverse en un plano y sometido a la acción de un campo magnético uniforme perpendicular al plano [54][55]. En esta tesis de maestría se muestra que la densidad lagrangiana, que describe al sistema físico que tiene como ecuación de movimiento a la ecuación del oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones, es invariante bajo transformaciones gauge globales $U(1)$ de los campos de materia y antimateria, y que para el caso de un oscilador de Dirac sin masa, debido a que el término de interacción (asociado con el potencial del oscilador de Dirac) mezcla las componentes de quiralidad, entonces el sistema no presenta simetría quiral global $U(1)_L \times U(1)_R$.

El principal objetivo de esta tesis de maestría es considerar un sistema constituido por fermiones relativistas, de espín 1/2, cargados eléctricamente, restringidos a moverse en un plano y sometidos a la acción de un campo magnético uniforme exterior, perpendicular al plano de movimiento, sin y con presencia adicional del potencial del oscilador de Dirac, con el fin de estudiar los siguientes aspectos: la existencia de un condensado magnético, la generación de masa magnética y la ruptura dinámica de la simetría quiral $U(1)_R \times U(1)_L$. Para realizar lo anterior, primero se soluciona la ecuación de Dirac en (2+1) dimensiones en presencia de un campo magnético uniforme externo, obteniendo sus funciones de onda de probabilidad y su respectivo espectro de energías. Se muestra que la densidad lagrangiana que describe a este sistema es invariante bajo transformaciones gauge locales $U(1)$ y que para el caso de fermiones sin masa el sistema posee invariante quiral local $U(1)_L \times U(1)_R$.

Posteriormente, se soluciona la ecuación de Dirac en (2+1) dimensiones en presencia de un potencial lineal, es decir, se soluciona la ecuación del oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones, obteniendo tanto su espectro de energía como sus funciones de onda de probabilidad. Para este sistema se muestra que su respectiva densidad lagrangiana es invariante bajo transformaciones gauge globales $U(1)$ y que para el caso de fermiones sin masa, el sistema no posée simetría quiral global $U(1)_L \times U(1)_R$, dado que el término de interacción mezcla las componentes de quiralidad. Una vez realizado lo anterior y siguiendo un procedimiento que permite escribir el potencial del oscilador de Dirac en forma covariante, tal como el que fue desarrollado en la referencia [59] con el propósito de encontrar una interpretación física del oscilador de Dirac en (3+1) dimensiones, en este trabajo de tesis se muestra formalmente que el oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones describe la dinámica de un fermión relativista con carga eléctrica restringido a moverse en un plano y sometido a la acción de un campo magnético uniforme perpendicular al plano, el cual en esta tesis llamaremos campo magnético uniforme interno (B_I) [54][55].

A continuación, se soluciona la ecuación de Dirac en (2+1) dimensiones en presencia tanto del campo magnético uniforme externo como del potencial lineal, es decir se estudia la dinámica del oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones interactuando con un campo magnético uniforme externo, obteniendo tanto su espectro de energía como sus funciones de onda de probabilidad. Para este sistema se muestra que su respectiva densidad lagrangiana es invariante bajo transformaciones gauge locales $U(1)$ y que para el caso de fermiones sin masa, el sistema no es invariante quiral local $U(1)_L \times U(1)_R$, dado que el término de interacción asociado al potencial del oscilador de Dirac mezcla las componentes de quiralidad.

Finalmente se estudia el condensado magnético y la masa magnética para: un fermión relativista restringido a moverse en un plano interactuándo con un campo magnético uniforme exterior y perpendicular al plano; un oscilador de Dirac libre en (2+1) dimensiones; un oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones interactuándo con un campo magnético uniforme exterior perpendicular al plano. El condensado magnético se obtiene de dos formas: (i) a partir del propagador fermiónico que es derivado mediante el formalismo de tiempo propio de Schwinger; (ii) a partir del cálculo del valor esperado del producto de los operadores de campo. La masa magnética se calcula siguiendo un procedimiento basado en el mencionado formalismo de Schwinger. Por último, para el caso de fermiones sin masa sometidos únicamente a la acción de un campo magnético uniforme externo y usando el formalismo de Schwinger, se estudia la ruptura dinámica de la simetría quiral local $U(1)_L \times U(1)_R$.

Cabe mencionar que la masa magnética (o dinámica) se produce para los casos estudiados debido a la interacción del fermión con el campo magnético [70]. La masa dinámica ha sido calculada en la literatura partiendo de una función de vértice [71], usando la expansión $1/N$ [72], o utilizando el formalismo de tiempo propio de Schwinger [73][4]. En el último caso, es posible realizar una expansión en frecuencias ultravioletas del potencial efectivo que describe la interacción del sistema de fermiones y el campo magnético uniforme exterior [15], con lo cual se muestra que esta masa depende de la intensidad del campo magnético, dado que esta intensidad se asocia con un parámetro de orden que describe, según sea el valor de la intensidad del campo magnético, cómo es el comportamiento de la masa magnética [35]: si su valor es inferior a un valor crítico, se comporta de forma exponencial; si su valor es superior al valor crítico, se comporta de forma cuadrática.

La estructura de esta tesis se describe a continuación. En el capítulo 2, se estudia el sistema constituido por un fermión relativista libre restringido a moverse en un plano, para lo cual inicialmente se desarrolla el procedimiento de cuantización canónica del campo de Dirac libre en (2+1) dimensiones, el cual se realiza una vez se soluciona la ecuación de Dirac libre en (2+1) dimensiones, y finalmente se muestra que este sistema presenta una simetría gauge global $U(1)$ y una simetría quiral global $U(1)_R \times U(1)_L$, esta última para el caso de campo de Dirac sin masa. En el capítulo 3, se estudia el sistema constituido por un fermión relativista restringido a moverse en un plano e interactuando con un campo magnético uniforme exterior y perpendicular al plano, para lo cual primero se soluciona la ecuación de Dirac asociada a este sistema, obteniéndo sus funciones de onda de probabilidad y su espectro de energía, y a continuación se muestra que este sistema presenta una simetría gauge local $U(1)$ y una simetría quiral local $U(1)_R \times U(1)_L$, esta última para el caso de campo fermionico sin masa.

En el capítulo 4, se estudia el oscilador de Dirac libre en (2+1) dimensiones, para lo cual inicialmente se soluciona la ecuación del oscilador de Dirac libre en (2+1) dimensiones, obteniéndo sus funciones de onda de probabilidad y su espectro de energía, a continuación se muestra formalmente que este sistema describe un fermión cargado eléctricamente sometido a la acción de un campo magnético interno uniforme y perpendicular al plano de movimiento del fermión, posteriormente se muestra que se puede desarrollar un procedimiento de cuantización canónica para el campo del oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones y finalmente se muestra que este sistema, a pesar de presentar una simetría gauge global $U(1)$, no presenta simetría quiral global $U(1)_R \times U(1)_L$, esta última para el caso del oscilador de Dirac sin masa, dado que el término de interacción asociado al potencial del oscilador de Dirac mezcla las componentes de quiralidad. En el capítulo 5, se estudia el oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones interactuando con un campo magnético uniforme externo y perpendicular al plano en el que se mueve el fermión, para lo cual primero se soluciona la ecuación de Dirac correspondiente, obteniéndo sus funciones de onda de probabilidad y su espectro de energía, y finalmente se muestra que el sistema físico asociado, a pesar de presentar una simetría gauge local $U(1)$, no presenta simetría quiral local $U(1)_R \times U(1)_L$, esta última para el caso del campo fermionico sin masa, dado que el término de interacción asociado al potencial lineal mezcla las componentes de quiralidad.

En el capítulo 6, se calcula el condensado magnético para los sistemas considerados en los capítulos 3 y 5, tanto usando el formalismo de tiempo propio de Schwinger como mediante el cálculo del valor esperado con respecto al estado de vacío del producto de los operadores de campo. En el capítulo 7, se calcula la masa magnética para los sistemas considerados en los capítulos 3 y 5, usando el formalismo de tiempo propio de Schwinger. En el capítulo 8, mediante el formalismo de Schwinger, se estudia la ruptura dinámica de la simetría quiral local $U(1)_R \times U(1)_L$ para el sistema constituido por un fermión sin masa interactuando con un campo magnético uniforme externo. Finalmente, en el capítulo 9 se presentan las conclusiones del presente trabajo de tesis y a continuación se presentan un conjunto de anexos que contiene algunos detalles de cálculo y aclaraciones de relevancia para la tesis.

2. FERMIÓN LIBRE EN (2+1) DIMENSIONES

En este capítulo se estudia el sistema constituido por un fermión masivo relativista, libre y de espín 1/2, restringido a moverse en un plano. Este sistema se describe a través de la densidad lagrangiana de un campo de Dirac libre en (2+1) dimensiones. Se realiza la cuantización canónica del campo de Dirac libre en (2+1) dimensiones. Se muestra que la densidad lagrangiana que describe a este sistema es invariante bajo transformaciones gauge globales $U(1)$ de los campos de materia y antimateria. También se muestra que esta densidad lagrangiana, para el caso de un campo de Dirac sin masa, es invariante bajo transformaciones quirales $U(1)_R \times U(1)_L$ globales. Por último, se muestra que si el campo de Dirac es masivo, entonces la simetría quiral se rompe explícitamente.

Para desarrollar el procedimiento de cuantización canónica del campo de Dirac libre en (2+1) dimensiones, primero se soluciona la ecuación de Dirac libre en (2+1) dimensiones. Los operadores de campo de Dirac libre $\hat{\psi}$ y $\hat{\psi}^\dagger$ son escritos en términos de los operadores creación de fermión y destrucción de antifermion, mediante una serie de Fourier que emplea la base de ondas planas que solucionan la ecuación de Dirac libre en (2+1) dimensiones. Posteriormente, utilizando los mencionados operadores de campo, se obtiene el operador hamiltoniano del sistema, al cual se le ha sustraido la energía del estado de vacío (o de punto cero) [64], obteniéndo de esta forma que la energía asociada a este sistema es finita. De igual forma, se realiza un procedimiento similar para el caso del operador de carga.

2.1 Solución de la ecuación de Dirac libre en (2+1) dimensiones

La ecuación de Dirac libre en (3+1) dimensiones, que describe la dinámica cuántica de fermiones relativistas de espín 1/2 con masa m, está dada por [65]

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{\hbar c}{i}\sum_{k=1}^{3}\alpha_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k} + \beta mc^2\psi, \tag{2.1}$$

donde α y β son matrices 4×4, las cuales se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \qquad \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \qquad k = 1,2,3, \tag{2.2}$$

siendo $\mathbf{1}$ la matriz identidad de 2×2 dimensiones y σ_k las matrices de Pauli, las cuales están dadas por [66]

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

La ecuación de Dirac debe satisfacer la expresión relativista entre el momentum y la energía, dando lugar a una densidad de probabilidad positiva y siendo invariante de Lorentz. Por tal motivo, las matrices α y β deben anticonmutar mutuamente y ser idempotentes. La ecuación de Dirac permite obtener una ecuación de continuidad, lo cual implica que existe una cuadridensidad corriente de probabilidad asociada $j^\mu = (\rho, \vec{k})$, donde

$$\rho = \psi^\dagger\psi = \sum_{i=1}^{4}\psi_i^*\psi_i, \qquad \vec{j} = c\psi^\dagger\vec{\alpha}\psi. \tag{2.4}$$

Por otro lado, de ahora en adelante se escribe $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ para denotar la derivada de una función con respecto al tiempo y para hacer referencia a la derivada de alguna función con respecto a alguna variable espacial, se expresa la derivada como $\partial_i = \partial/\partial x_i$, donde se ha adoptado la convención de unidades naturales, es decir, $c = \hbar = 1$.

La ecuación de Dirac en (3+1) dimensiones en forma covariante se escribe como

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi\left(\vec{r}, t\right) = 0, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{2.5}$$

en donde γ^{μ} son las matrices de Dirac, tal que $\gamma^0 = \beta$ y $\gamma^i = \alpha^i$, con $i = 1, 2, 3$, las cuales en términos de las matrices de Pauli (2.3) y de la matriz identidad quedan escritas como

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

en donde σ^k son las matrices de Pauli dadas por la expresión (2.3).

La ecuación de Dirac (2.1) está planteada en (3+1) dimensiones. Sin embargo, nuestro interés en este trabajo es estudiar el sistema restringido a un plano, por lo cual la expresión (2.1) en (2+1) dimensiones se escribe como

$$i\partial_t = \left(\alpha_y p_y + \alpha_z p_z + m\beta\right)\psi. \tag{2.7}$$

Las soluciones estacionarias de la ecuación de Dirac en (2+1) se pueden hallar utilizando el siguiente ansatz

$$\psi(y, z, t) = \psi(y, z)\exp\left(-iEt\right). \tag{2.8}$$

La ecuación de Dirac posee cuatro soluciones, dos de energía positiva y dos de energía negativa. Las dos soluciones de energía positiva, así como las dos soluciones de energía negativa, se diferencian entre sí por su helicidad. Resulta conveniente dividir el espinor de cuatro componentes en dos espinores de dos componentes (o biespinores), ϕ y χ, es decir

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Usando los biespinores y escribiendo de forma explícita las matrices α y β, se obtiene la siguiente ecuación matricial [65]

$$E\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} p_j + m_0 \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \qquad j = y, z, \tag{2.10}$$

o como un sistema de ecuaciones de la siguiente forma

$$E\phi = \sigma_j p_j \chi + m\phi, \tag{2.11}$$
$$E\chi = \sigma_j p_j \phi - m\chi. \tag{2.12}$$

Los estados con momento definido $\vec{p}$ son

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix}\exp\left(ip_j x_j\right). \tag{2.13}$$

Resolviendo el anterior sistema de ecuaciones, se obtiene que el espectro de energía es

$$E = \pm\sqrt{m^2 + p_j^2}. \tag{2.14}$$

A partir de (2.14), se llega a que el biespinor χ_0 se escribe como [65]

$$\chi_0 = \frac{(\sigma_j p_j)}{m_0 + E}\phi_0. \tag{2.15}$$

Ahora se escribe el biespinor ϕ_0 como

$$\phi = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Usando (2.16), se puede reescribir la función de onda de probabilidad como

$$\psi(y,z,t) = N \begin{pmatrix} U \\ \frac{(\sigma_j p_j)}{m+\lambda E} U \end{pmatrix} \frac{\exp\left(i p_j x_j - \lambda E t\right)}{2\pi}, \tag{2.17}$$

donde $\lambda = \pm 1$ caracteriza las soluciones de energía positiva y negativa. La constante de normalización se puede determinar usando la condición de ortogonalidad

$$\int \psi^\dagger_{p,\lambda}(y,z,t)\psi_{p',\lambda'} d^2x = \delta_{\lambda\lambda'}\delta^2\left(p_j - p'_j\right), \tag{2.18}$$

por lo cual el valor de la constante de normalización es

$$N = \sqrt{\frac{(m+\lambda E_p)^2}{2\lambda E_p}}. \tag{2.19}$$

El espectro que produce λE corresponde al mismo asociado con la ecuación Klein-Gordon, es decir el de una partícula libre, con valores de energía positivos y negativos. Por otro lado, observamos que la función de onda (2.17) obedece la siguiente ecuación de valores propios para el operador momentum

$$\hat{p}_j \psi(y,z,t) = p_j \psi\left(y,z,t\right). \tag{2.20}$$

Para todo momentum $\vec{p}$ existen dos tipos de soluciones: (i) dos con $\lambda = 1$, es decir, cuando la energía es positiva E; (ii) dos con $\lambda = -1$, o sea, con energía negativa $-E$. A continuación se muestra que otro número cuántico, llamado helicidad, permite diferenciar los estados cuánticos dados por (2.17). Para realizar lo anterior, primero se parte de la definición del siguiente operador

$$\hat{\vec{\Sigma}} \cdot \hat{\vec{p}} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \cdot \hat{\vec{p}}, \tag{2.21}$$

el cual conmuta con el operador hamiltoniano del sistema, dado por $\hat{H} = (\alpha_j \hat{p}_j + \beta m)$. Adicionalmente, el operador

$$\hat{\vec{S}} = \frac{1}{2}\hat{\vec{\Sigma}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \tag{2.22}$$

es una generalización del operador de espín [65] [67]. Lo anterior implica $\vec{\Sigma} \cdot \hat{\vec{p}}$, $\hat{H}$ y $\hat{\vec{p}}$ pueden ser diagonalizados al mismo tiempo [65]. Esto mismo sucede con el operador de helicidad, definido como

$$\hat{\Lambda}_S = \frac{1}{2}\hat{\vec{\Sigma}} \cdot \frac{\hat{\vec{p}}}{|\vec{p}|} = \hat{\vec{S}} \cdot \frac{\hat{\vec{p}}}{|\vec{p}|}. \tag{2.23}$$

Lo anterior permite dar una interpretación intuitiva del operador helicidad: corresponde a la proyección del espín en dirección del momentum. Asimismo, sus valores propios son ± 1, mientras que sus vectores propios son [67]

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

Por otra parte, si el fermión se propaga en el plano yz, o sea, $\vec{p} = (p_y, p_z)$ entonces las funciones de onda que solucionan la ecuación de Dirac tienen la forma

$$\psi^{(1)}_{p_y,p_z,\lambda=1,+1/2}(y,z,t) = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \exp\left[-iEt + iyp_y + izp_z\right], \tag{2.25}$$

$$\psi^{(2)}_{p_y,p_z,\lambda=1,-1/2}(y,z,t) = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-ip_y}{E+m} \\ -\frac{p_z}{E+m} \end{pmatrix} \exp\left[-iEt + iyp_y + izp_z\right], \tag{2.26}$$

$$\psi^{(3)}_{p_y,p_z,\lambda=-1,+1/2}(y,z,t) = N \begin{pmatrix} \frac{-p_z}{E+m} \\ \frac{ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left[iEt - iyp_y - izp_z\right], \tag{2.27}$$

$$\psi^{(4)}_{p_y,p_z,\lambda=-1,-1/2}(y,z,t) = N \begin{pmatrix} \frac{-ip_y}{E+m} \\ \frac{p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left[Et - iyp_y - izp_z\right], \tag{2.28}$$

donde N está dado por la expresión (2.19). Las expresiones (2.25) a (2.28) muestran explícitamente que la ecuación de Dirac posee 4 soluciones: dos de energía positiva y dos de energía negativa, que mutuamente difieren en su helicidad.

2.2 Cuantización canónica del campo de Dirac libre en (2+1) dimensiones

Para realizar la cuantización canónica del campo de Dirac libre en (2+1) dimensiones se sigue un procedimiento similar al presentado en la referencia [68], teniendo en cuenta que el sistema estudiado es un fermión masivo de espín 1/2 restringido a moverse en el plano yz, es decir, es un sistema en (2+1) dimensiones. La cuantización del campo de Dirac se logra reemplazando los espinores ψ y $\psi^\dagger$ por los operadores de campo $\hat{\psi}$ y $\hat{\psi}^\dagger$. En el procedimiento de cuantización canónica, los operadores de campo, para cualquier tipo de campo, deben obedecer relaciones de conmutación o anticonmutación. Para este caso, por ser una campo espinorial que describe fermiones de espín 1/2, cuya dinámica está descrita por la ecuación de Dirac, satisfaciéndo el principio de exclusión de Pauli, entonces los operadores de campo deben obedecer relaciones de anticonmutación [68]. Por lo anterior, se asume que los operadores de campo de Dirac satisfacen las siguientes reglas de anticonmutación para tiempos iguales

$$\left\{\hat{\psi}_\alpha(y,z,t), \hat{\psi}^\dagger_\beta(y',z',t)\right\} = \delta_{\alpha\beta}\ \delta\left(y-y'\right)\delta\left(z-z'\right), \tag{2.29}$$

$$\left\{\hat{\psi}^\dagger_\alpha(y,z,t), \hat{\psi}^\dagger_\beta(y',z',t)\right\} = \left\{\hat{\psi}_\alpha(y,z,t), \hat{\psi}_\beta(y',z',t)\right\} = 0, \tag{2.30}$$

donde los subíndices α y β denotan el espín, que por tratarse de fermiones regidos por la ecuación de Dirac únicamente pueden adoptar los valores $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$. Asimismo la elección de las definiciones (2.29) y (2.30) garantiza que las partículas obedecen la estadística de Fermi-Dirac y el principio de exclusión de Pauli.

La ecuación de movimiento de Heisenberg para el operador de campo $\hat{\psi}$ es [64] (ver demostración en el apéndice A)

$$\dot{\hat{\psi}} = -i\left[\hat{\psi}, \hat{H}\right], \tag{2.31}$$

o de forma equivalente[1]

[1] La derivación de la ecuación se muestra en el apéndice A.

$$\dot{\hat{\psi}}_\sigma = \left(-\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} - i\beta m\right)_{\sigma\beta}\hat{\psi}_\beta. \tag{2.32}$$

El operador de campo cuantizado, entonces satisface la ecuación de Dirac (2.73)

$$i\dot{\hat{\psi}}_\sigma = \left(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m\right)\hat{\psi}. \tag{2.33}$$

2.2.1 Expansión en ondas planas del operador de campo de Dirac

El operador de campo $\hat{\psi}$ puede ser expandido en un conjunto completo de funciones de onda plana "clásicas" [2]. Para este propósito, las soluciones de onda plana de la ecuación de Dirac libre son una elección natural, las cuales están dadas por

$$\psi_{\vec{p}}^{(r)}(y,z,t) = (2\pi)^{-1}\sqrt{\frac{m}{E_{\vec{p}}}}\omega_r\left(\vec{p}\right)\exp\left[-i\epsilon_r\left(E_{\vec{p}}t - p_y y - p_z z\right)\right], \tag{2.34}$$

donde el índice r enumera las 4 soluciones independientes de la ecuación de Dirac, de tal forma con $r = 1,2$ se denota las soluciones de energía positiva $E_{\vec{p}} = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$, mientras que con $r = 3,4$, se denotan las soluciones de energia negativa $E_{\vec{p}} = -\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$, siendo $|\vec{p}|^2 = p_y^2 + p_z^2$. Las ondas planas satisfacen la ecuación de Dirac

$$\left[\gamma^0 p_0 + \gamma^2 p_y + \gamma^3 p_z - \epsilon_r m\right]\omega_r\left(\vec{p}\right) = 0. \tag{2.35}$$

Los espinores de Dirac poseen las siguientes propiedades de ortogonalidad y completez [68]

$$\omega_{r'}^\dagger\left(\epsilon_{r'}\vec{p}\right)\omega_r\left(\epsilon_r\vec{p}\right) = \frac{E_{\vec{p}}}{m}\delta_{rr'}, \tag{2.36}$$

$$\bar{\omega}_{r'}\left(\vec{p}\right)\omega_r\left(\vec{p}\right) = \epsilon_r\delta_{rr'}, \tag{2.37}$$

$$\sum_{r=1}^{4}\omega_{r\alpha}\left(\epsilon_r\vec{p}\right)\omega_{r\beta}^\dagger\left(\epsilon_r\vec{p}\right) = \frac{E_{\vec{p}}}{m}\delta_{\alpha\beta}, \tag{2.38}$$

$$\sum_{r=1}^{4}\epsilon_r\omega_{r\alpha}\left(\vec{p}\right)\bar{\omega}_{r\beta}\left(\vec{p}\right) = \delta_{\alpha\beta}. \tag{2.39}$$

Notese que el signo negativo del momentum para las soluciones de energía negativa ($r = 3,4$) son continuas en (2.36) y (2.38). La relación (2.36) garantiza que las ondas planas (2.34) están normalizadas correctamente hacia funciones delta de Dirac, es decir

$$\int dydz\ \psi_{\vec{p}'}^{(r')\dagger}\psi_{\vec{p}}^{(r)} = \delta_{rr'}\delta^2\left(\vec{p} - \vec{p}'\right), \tag{2.40}$$

donde $\epsilon_r^2 = 1$ fue utilizado. La expresión (2.40) es válida para cualquier intervalo de tiempo. Teniendo en cuenta los anteriores resultados, la expansión de la función de onda plana del operador de campo es

$$\hat{\psi}(y,z,t) = \sum_{r=1}^{4}\int\frac{dp_y dp_z}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{E_{\vec{p}}}}\hat{a}\left(\vec{p},r\right)\omega_r\left(\vec{p}\right)\exp\left(-i\epsilon_r\vec{x}\cdot\vec{p}\right), \tag{2.41}$$

mientras que para el campo hermítico conjugado tiene la forma

$$\hat{\psi}^\dagger(y,z,t) = \sum_{r=1}^{4}\int\frac{dp_y dp_z}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{E_{\vec{p}}}}\hat{a}^\dagger\left(\vec{p},r\right)\bar{\omega_r}\left(\vec{p}\right)\gamma^0\exp\left(-i\epsilon_r\vec{x}\cdot\vec{p}\right). \tag{2.42}$$

Los operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ satisfacen las siguientes relaciones de anticonmutación

[2] En el sentido de las funciones de onda que solucionan la ecuación de Dirac libre

$$\left\{\hat{a},\hat{a}^{\dagger}\right\}=\int dydz\ \hat{\psi}^{(r)\dagger}_{\vec{p}\alpha}(y,z,t)\hat{\psi}^{(r')}_{\vec{p}'\alpha}(y,z,t). \tag{2.43}$$

Ya que las ondas planas son ortogonales, como se muestra en (2.40), los operadores creación y destrucción satisfacen las relaciones de anticonmutación

$$\left\{\hat{a}\left(\vec{p},r\right),\hat{a}^{\dagger}\left(\vec{p}',r'\right)\right\}=\delta_{rr'}\delta^{2}\left(\vec{p}-\vec{p}'\right), \tag{2.44}$$

$$\left\{\hat{a}^{\dagger}\left(\vec{p},r\right),\hat{a}^{\dagger}\left(\vec{p}',r'\right)\right\}=\left\{\hat{a}\left(\vec{p},r\right),\hat{a}\left(\vec{p}',r'\right)\right\}=0. \tag{2.45}$$

Las relaciones (2.44) y (2.45) para los operadores creación y destrucción del campo de Dirac libre son similares al del campo escalar de Klein-Gordon, salvo que para este último campo se cumplen relaciones de conmutación, ya que este campo describe bosones de espín cero.

2.2.2 Operador hamiltoniano para el campo de Dirac libre

Partiendo del operador hamiltoniano

$$\hat{H}=\int dydz\ \hat{\psi}^{\dagger}\left(-i\alpha_{y}\partial_{y}-i\alpha_{z}\partial_{z}+\beta m\right)\hat{\psi}. \tag{2.46}$$

Insertando las expansiones (2.41) y (2.42) de los operadores de campo, se tiene entonces que el operador hamiltoniano tiene la forma

$$\hat{H}=\sum_{r,r'=1}^{4}\int dp'_{y}dp'_{z}\int dp_{y}dp_{z}\ \hat{a}^{\dagger}\left(\vec{p}',r'\right)\hat{a}\left(\vec{p},r\right)\int dydz\ \psi^{\dagger(r')}_{\vec{p}'}\left(y',z',t\right)\left(-i\alpha_{y}\partial_{y}-i\alpha_{z}\partial_{z}+\beta m\right)\psi^{(r)}_{\vec{p}}\left(y,z,t\right). \tag{2.47}$$

Ya que las ondas planas obedecen la ecuación de Dirac

$$\left(-i\alpha_{y}\partial_{y}-i\alpha_{z}\partial_{z}+\beta m\right)\psi^{(r)}_{\vec{p}}\left(y,z,t\right)=\epsilon_{r}E_{\vec{p}}\ \psi^{(r)}_{\vec{p}}\left(y,z,t\right), \tag{2.48}$$

entonces

$$\hat{H}=\sum_{r=1}^{4}\int dp_{y}dp_{z}\ \hat{a}^{\dagger}\left(\vec{p}',r'\right)\hat{a}\left(\vec{p},r\right)\epsilon_{r}E_{\vec{p}}. \tag{2.49}$$

Separando las contribuciones de energía positiva y negativa se tiene

$$\hat{H}=\int dp_{y}dp_{z}\left(\sum_{r=1}^{2}\ E_{\vec{p}}\ \hat{a}^{\dagger}\left(\vec{p}',r'\right)\hat{a}\left(\vec{p},r\right)-\sum_{r=3}^{4}E_{\vec{p}}\ \hat{a}^{\dagger}\left(\vec{p}',r'\right)\hat{a}\left(\vec{p},r\right)\right). \tag{2.50}$$

Si se introduce el operador número de partícula asociado al estado $\psi^{(r)}_{\vec{p}}\left(y,z,t\right)$ [68]

$$\hat{n}_{\vec{p},r}=\hat{a}^{\dagger}\left(\vec{p}',r'\right)\hat{a}\left(\vec{p},r\right), \tag{2.51}$$

el operador hamiltoniano (2.50) pareciera ser inútil dado que el número de partículas en el “ bajo continuo” $(r=3,4)$ aumenta el valor esperado del hamiltoniano, es decir, la energía total del sistema puede seguir cayendo a valores cada vez más negativos. Sin embargo, para resolver esta inconsistencia física se puede utilizar el concepto de “mar de Dirac” [68]. Resulta conveniente desarrollar este paso usando la normalización de “caja” para las funciones de onda. La integral sobre el momentum, entonces se convierte en una suma sobre una malla discreta de la variable momentum, es decir $p=p_{\ell}$, donde ℓ es un índice de conteo. Las relaciones de anticonmutación (2.44) y (2.45) ahora tienen la forma

$$\left\{\hat{a}\left(\vec{p}',r'\right),\hat{a}^{\dagger}\left(\vec{p},r\right)\right\}=\delta_{\vec{p}\vec{p}'}\ \delta_{rr'},\qquad\left\{\hat{a}\left(\vec{p}',r'\right),\hat{a}\left(\vec{p},r\right)\right\}=\left\{\hat{a}^{\dagger}\left(\vec{p}',r'\right),\hat{a}^{\dagger}\left(\vec{p},r\right)\right\}=0. \tag{2.52}$$

Se debe tener en cuenta que la energía del vacío no es un observable físico y que esta energía corresponde a la suma de todos los valores propios de energía del "bajo continuo", es decir las energías negativas del sistema. Lo anterior se expresa como [68]

$$E_0 = -\sum_{\vec{p}} \sum_{r=3}^{4} E_{\vec{p}}, \tag{2.53}$$

pero al ser el momentum una variable continua, entonces esta suma sería infinita, lo cual no es cierto. Para resolver este problema, se requiere tener en cuenta que la energía de punto cero del campo se puede escribir a partir de considerar que cada oscilador contrribuye a la energía del vacío con una energía dada por $\frac{1}{2}E_p$. De esta manera, se redefine el operador hamiltoniano como

$$\hat{H}' = \hat{H} - E_0,$$

el cual usando (2.53), queda escrito por

$$\hat{H}' = \sum_{\vec{p}} \left(\sum_{r=1}^{4} E_{\vec{p}}\ \hat{n}_{\vec{p}r} + \sum_{r=3}^{4} E_{\vec{p}}\ \hat{\bar{n}}_{\vec{p}r} \right). \tag{2.54}$$

En el segundo término, el operador número para huecos de $\psi_{\vec{p}}^{(r)}$, con $r = 3, 4$, fue introducido. De acuerdo con (2.52), este operador satisface [68]

$$\hat{\bar{n}}_{\vec{p}r} = 1 - \hat{a}^{\dagger}\left(\vec{p}, r\right) \hat{a}\left(\vec{p}', r'\right). \tag{2.55}$$

Nótese que $\hat{H}'$ es un operador hamiltoniano definido positivamente. Esta construcción matemática está acompañada de un significado físico: los "huecos" son interpretados como antipartículas, por ejemplo, como positrones. El estado de vacío físico $|0>$ es entonces definido como el estado cuántico del campo que no contiene partículas ni antipartículas como excitaciones, es decir

$$\hat{n}_{\vec{p}r}|0>= 0\ , r = 1, 2, \qquad \hat{\bar{n}}_{\vec{p}r} = 0\ , r = 3, 4. \tag{2.56}$$

En términos de los operadores creación y destrucción $\hat{a}^{\dagger}\left(\vec{p}, r\right)$ y $\hat{a}\left(\vec{p}'\right)$, ésto implica que [68]

$$\hat{a}\left(\vec{p}, r\right)|0>= 0,\ r = 1, 2, \qquad \hat{a}^{\dagger}\left(\vec{p}, r\right)|0>= 0,\ r = 3, 4. \tag{2.57}$$

Por lo tanto, podemos afirmar que $\hat{a}\left(\vec{p}', r\right)$ es el operador destrucción para partículas $(r = 1, 2)$ y que $\hat{a}^{\dagger}\left(\vec{p}, r\right)$ es el operador destrucción para antipartículas $(r = 3, 4)$. O de forma equivalente: $\hat{a}^{\dagger}\left(\vec{p}, r\right)$ es el operador de creación de partículas $(r = 1, 2)$, mientras que $\hat{a}\left(\vec{p}', r\right)$ es el operador de creación de antipartículas $(r = 3, 4)$.

El doble rol que tienen los operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^{\dagger}$ puede resultar algo confuso. Por lo tanto es conveniente introducir notaciones separadas para los operadores de partículas y los operadores de "huecos" (antipartículas). Por esta razón se cambia la notación para las funciones de onda. En primer lugar, los espinores de Dirac los denominamos $u(\vec{p}, \vec{s})$ y $v(\vec{p}, \vec{s})$ para los estados continuos de energía positiva y negativa, respectivamente[3]. Ellos están relacionados con los espinores $\omega_r\left(\vec{p}\right)$ de la siguiente manera [68]

$$\begin{aligned} \omega_1\left(\vec{p}\right) &= u\left(\vec{p}, \vec{s}\right), \qquad & \omega_2\left(\vec{p}\right) &= u\left(\vec{p}, -\vec{s}\right), \\ \omega_3\left(\vec{p}\right) &= u\left(\vec{p}, -\vec{s}\right), \qquad & \omega_4\left(\vec{p}\right) &= u\left(\vec{p}, \vec{s}\right), \end{aligned} \tag{2.58}$$

donde se observa el signo contrario del espín para el caso de las soluciones de antipartícula. Ajustando los espinores (2.58), los nuevos operadores son

$$\hat{b}\left(\vec{p}, \vec{s}\right) = \hat{a}\left(\vec{p}, 1\right), \qquad \hat{b}\left(\vec{p}, \vec{s}\right) = \hat{a}\left(\vec{p}, 1\right).$$

[3] La cantidad $\vec{s}$ denota el vector de espín generalizado.

Las soluciones del "continuo superior" son simplemente renombradas $\hat{a} \to \hat{b}$. Para las soluciones de antipartícula, la dirección del espín se invierte como se observa en la definición de los espinores (2.58) y al mismo tiempo se hace la sustitución para el correspondiente operador hermítico conjugado $\hat{a} \to \hat{d}^{\dagger}$ [64]. Es interesante notar que la transformación (2.58) no modifica la forma de las relaciones de anticonmutación (es decir, es una transformación canónica), ya que $\hat{a}$ y $\hat{a}^{\dagger}$. Ahora las relaciones de anticonmutación expresadas en términos de los nuevos operadores son

$$\left\{\hat{b}\left(\vec{p},\vec{s}\right),\hat{b}^{\dagger}\left(\vec{p}',\vec{s}'\right)\right\} = \delta_{ss'}\delta^{2}\left(\vec{p}-\vec{p}'\right), \tag{2.59}$$

$$\left\{\hat{d}\left(\vec{p},\vec{s}\right),\hat{d}^{\dagger}\left(\vec{p}',\vec{s}'\right)\right\} = \delta_{ss'}\delta^{2}\left(\vec{p}-\vec{p}'\right), \tag{2.60}$$

mientras que las demás relaciones de anticonmutación que involucran relaciones entre los operadores $\hat{b}$, $\hat{b}^{\dagger}$, $\hat{d}$ y $\hat{d}^{\dagger}$ son nulas.

En el nuevo lenguaje de los operadores de creación y destrucción, el operador de campo se expande como

$$\hat{\psi}(y,z,t) = \sum_{s}\int \frac{dp_y dp_z}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{E_{\vec{p}}}}\left(\hat{b}\left(\vec{p},\vec{s}\right)u\left(\vec{p},\vec{s}\right)\exp\left(-ip_y y - ip_z z\right) + \hat{d}^{\dagger}v\left(\vec{p},\vec{s}\right)\exp\left(ip_y y + ip_z z\right)\right). \tag{2.61}$$

Por lo anterior, los espinores se expresan de la siguiente forma [68]

$$u\left(\vec{p},\vec{s}\right) = \frac{\not{p}+m}{\sqrt{2m\left(E_{\vec{p}}+m\right)}}u\left(0,\vec{s}\right), \qquad v\left(\vec{p},\vec{s}\right) = \frac{-\not{p}+m}{\sqrt{2m\left(E_{\vec{p}}+m\right)}}v\left(0,\vec{s}\right), \tag{2.62}$$

en donde se ha utilizado la notación slash de Feynman, es decir, $\not{p} = p^{\mu}\gamma_{\mu} = p^{0}\gamma_{0} + p^{y}\gamma_{2} + p^{z}\gamma_{3}$. Por otro lado, $u\left(0,\vec{s}\right)$ y $v\left(0,\vec{s}\right)$ son los espinores en el sistema inercial de la partícula con $\vec{p} = \left(m,\vec{0}\right)$, el cual tiene solamente una componente superior o inferior. La ecuación (2.62) puede ser derivada usando el operador "boost" de Lorentz [68].

En el espacio de cuadrimomento, los espinores satisfacen las siguientes ecuaciones de Dirac

$$\begin{aligned} \left(\not{p}-m\right)u\left(\vec{p},\vec{s}\right) &= 0, & \left(\not{p}+m\right)v\left(\vec{p},\vec{s}\right) &= 0, \\ \hat{u}\left(\vec{p},\vec{s}\right)\left(\not{p}-m\right) &= 0, & \hat{v}\left(\vec{p},\vec{s}\right)\left(\not{p}+m\right) &= 0. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Teniendo en cuenta la notación adoptada para los operadores de creación y destrucción, el operador hamiltoniano se escribe como [68]

$$\hat{H}' = \hat{H} - E_0 = \sum_{s}\int dp_y dp_z E_{\vec{p}}\left(\hat{b}^{\dagger}\left(\vec{p},\vec{s}\right)\hat{b}\left(\vec{p},\vec{s}\right) + \hat{d}^{\dagger}\left(\vec{p},\vec{s}\right)\hat{d}\left(\vec{p},\vec{s}\right)\right). \tag{2.64}$$

Las ecuaciones (2.59), (2.60) y (2.61) implican la siguiente interpretación de los nuevos operadores: $\hat{b}^{\dagger}\left(\vec{p},\vec{s}\right)$ representa el operador creación de partícula; $\hat{b}\left(\vec{p},\vec{s}\right)$ es el operador destrucción de partícula; $\hat{d}^{\dagger}\left(\vec{p},\vec{s}\right)$ representa el operador creación de antipartícula; $\hat{d}\left(\vec{p},\vec{s}\right)$ es el operador destrucción de antipartícula.

Usando estos operadores, el espacio de Fock puede ser construido partiendo del estado de vacío $|0>$ definido por [68]

$$\hat{b}\left(\vec{p},\vec{s}\right)|0>= 0, \qquad \hat{d}\left(\vec{p},\vec{s}\right)|0>= 0. \tag{2.65}$$

La aplicación continua de los operadores $\hat{b}^{\dagger}\left(\vec{p},\vec{s}\right)$ y $\hat{d}^{\dagger}\left(\vec{p},\vec{s}\right)$ sobre el estado de vacío permite la construcción de los estados que contienen un número arbitrario de partículas y antipartículas. Estos estados satisfacen el principio de exclusión de Pauli de forma automática [68].

2.2.3 Operadores de carga, momento lineal y espín

Uno de los operadores mas relevantes para ser estudiado en el caso del campo de Dirac libre es el operador de carga electromagnética. Se define de la siguiente manera

$$\hat{Q} = e \int dydz \; \hat{\psi}^{\dagger(r\prime)}_{\vec{p}'} (y,z,t)\, \hat{\psi}^{(r)}_{\vec{p}} (y,z,t)\,. \tag{2.66}$$

Reemplazando la expansión (2.61), así como la de su hermítico conjugado del operador de campo, se encuentra que

$$\hat{Q} = e \sum_{s,s'} \int dp_y dp_z \frac{m}{E_{\vec{p}}} \left(\hat{b}^{\dagger} (\vec{p},\vec{s})\, \hat{b} (\vec{p},\vec{s})\, \hat{u}^{\dagger} (\vec{p},\vec{s})\, \hat{u} (\vec{p},\vec{s}) + \hat{d} (\vec{p},\vec{s})\, \hat{d}^{\dagger} (\vec{p},\vec{s})\, \hat{v}^{\dagger} (\vec{p},\vec{s})\, \hat{v} (\vec{p},\vec{s}) \right). \tag{2.67}$$

Los espinores $\hat{u} (\vec{p},\vec{s})$ y $\hat{u} (\vec{p},\vec{s})$ satisfacen la siguiente relación de ortogonalidad [68]

$$\hat{u}^{\dagger} (\vec{p},\vec{s})\, \hat{u} (\vec{p},\vec{s}) = \hat{v}^{\dagger} (\vec{p},\vec{s})\, \hat{v} (\vec{p},\vec{s}) = \frac{E_{\vec{p}}}{m} \delta_{ss'}, \qquad \hat{u}^{\dagger} (\vec{p},\vec{s})\, \hat{v} (\vec{p},\vec{s}) = \hat{v}^{\dagger} (\vec{p},\vec{s})\, \hat{u} (\vec{p},\vec{s}) = 0, \tag{2.68}$$

lo cual puede ser utilizado para simplificar al operador de carga de la siguiente manera

$$\hat{Q} = e \sum_{s} \int dp_y dp_z \left(\hat{b}^{\dagger} (\vec{p},\vec{s})\, \hat{b} (\vec{p},\vec{s}) + \hat{d} (\vec{p},\vec{s})\, \hat{d}^{\dagger} (\vec{p},\vec{s}) \right). \tag{2.69}$$

Con el fin de expresar el operador $\hat{Q}$ en términos del operador número $\hat{n} (\vec{p},\vec{s})$, los operadores $\hat{d} (\vec{p},\vec{s})$ y $\hat{d}^{\dagger} (\vec{p},\vec{s})$ tienen que ser intercambiados en el segundo término en (2.69). El anticonmutador (2.60) introduce la carga de las partículas en el mar de Dirac. La carga total de estado de vacío de Dirac es una cantidad constante (aunque divergente) Q_o, la cual no es un observable físico. Así, el operador de carga físico se obtiene sustrayendo esta cantidad de (2.69), es decir

$$\hat{Q}' = e \sum_{s} \int dp_y dp_z \left(\hat{b}^{\dagger} (\vec{p},\vec{s})\, \hat{b} (\vec{p},\vec{s}) - \hat{d}^{\dagger} (\vec{p},\vec{s})\, \hat{d} (\vec{p},\vec{s}) \right). \tag{2.70}$$

Como era de esperar, las partículas y sus respectivas antipartículas poseen cargas eléctricas de signos contrarios, que para este caso son $+e$ y $-e$.

El operador momentum del campo de Dirac libre posee contribuciones tanto de las partículas como de las antipartículas. El operador momentum se puede escribir como

$$\hat{p} = -i \int dydz \hat{\psi}^{\dagger} (y,z,t)\, \vec{\nabla} \hat{\psi} (y,z,t)\,. \tag{2.71}$$

La expansión en ondas planas del operador de campo da

$$\hat{p} = \sum_{s} \int dp_y dp_z \left(\hat{b}^{\dagger} (\vec{p},\vec{s})\, \hat{b} (\vec{p},\vec{s}) + \hat{d}^{\dagger} (\vec{p},\vec{s})\, \hat{d} (\vec{p},\vec{s}) \right), \tag{2.72}$$

donde el signo menos resulta de derivar la onda plana $\exp (\pm i\vec{p}\cdot\vec{x})$.

El cambio en el ordenamiento del operador en la ecuación (2.72) no contribuye ya que la integral $\int d\vec{p}$ se vuelve nula debido a argumentos simétricos. En contraste para el caso de los operadores hamiltoniano y carga electromagnética, la isotropía del espacio garantiza que no puede haber "momentum del vacío", p_0, el cual tendría que ser restado del operador momentum [68].

Finalmente, en analogía con (2.64), (2.70) y (2.72) también el operador momento angular puede ser expandido con respecto al operador número de partícula. Las ondas planas que solucionan la ecuación de Dirac no tienen un momento angular bien definido, lo cual se ve reflejado en la forma no diagonal del operador de momento angular. Sin embargo, un resultado sencillo se obtiene para estados de helicidad donde el eje de cuantización es dirigido sobre el vector momentum. En el caso del vector de momento angular de espín, se tiene que [68]

$$\hat{S}_{\vec{p}} = \frac{1}{2}\left(\hat{b}^{\dagger}\left(\vec{p},\vec{s}\right)\hat{b}\left(\vec{p},\vec{s}\right) - \hat{b}^{\dagger}\left(\vec{p},-\vec{s}\right)\hat{b}\left(\vec{p},\vec{s}\right) + \hat{d}^{\dagger}\left(\vec{p},\vec{s}\right)\hat{d}\left(\vec{p},\vec{s}\right) - \hat{d}^{\dagger}\left(\vec{p},-\vec{s}\right)\hat{d}\left(\vec{p},-\vec{s}\right)\right). \qquad (2.73)$$

Es más cómodo dividir la expresión (2.73) en las contribuciones de partículas y antipartículas cada una llevando su proyección de espín $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$. Este resultado sirve para justificar la redefinición de la dirección del espín en las soluciones de energía negativa, las cuales fueron llevadas a cabo en (2.59). A una partícula en el “bajo continuo” que tiene espín hacia arriba le corresponde una antipartícula con espín hacia abajo y viceversa.

Cuando se derivan los operadores hamiltoniano $\hat{H}$ y carga electromagnética $\hat{Q}$ del campo de Dirac libre, se encuentra el problema de la existencia de divergencias. Debido a que estas cantidades no son observables físicos (al menos en su definición inicial), se redefinen los operadores para que éstos sean cantidades finitas[4].

Desde el punto de vista matemático, este argumento es cuestionable ya que involucra manejar cantidades divergentes. El mismo efecto se tiene de manera formal, si se acude al concepto de ordenamiento normal. Al igual que en el caso de campos escalares (tipo Klein-Gordon), el operador de campo de Dirac libre se puede dividir en do partes que involucran energías positivas y negativas

$$\hat{\psi} = \hat{\psi}^{(+)} + \hat{\psi}^{(-)}. \qquad (2.74)$$

La forma explícita de estas contribuciones, asumiendo una expansión en ondas planas, está dada por (2.61). Una propiedad importante es el efecto que ellos tienen sobre el estado de vacío, teniendo en cuenta (2.65) [68]

$$\hat{\psi}^{(+)}|0>=0, \qquad \hat{\psi}^{(-)\dagger}|0>=0. \qquad (2.75)$$

El ordenamiento normal ahora significa que todas las contribuciones que involucran energías positivas (es decir, operadores destrucción) son desplazadas a la derecha. Debido a que el campo de Dirac libre obedece relaciones de anticonmutación, cada paso de reordenamiento va con cambio de signo. Por ejemplo, el producto normal de $\hat{\bar{\psi}}_{\alpha}$ y $\hat{\psi}_{\beta}$ es [68]

$$:\hat{\bar{\psi}}_{\alpha}\hat{\psi}_{\beta}:= \hat{\bar{\psi}}_{\alpha}^{(+)}\hat{\psi}_{\beta}^{(+)} + \hat{\bar{\psi}}_{\alpha}^{(-)}\hat{\psi}_{\beta}^{(-)} + \hat{\bar{\psi}}_{\alpha}^{(-)}\hat{\psi}_{\beta}^{(+)} - \hat{\psi}_{\beta}^{(-)}\hat{\bar{\psi}}_{\alpha}^{(+)}. \qquad (2.76)$$

Si los productos de los operadores de campo son tomados de acuerdo con la definición de ordenamiento normal, todas las contribuciones del vacío desaparecen debido a la propiedad (2.75). Los operadores “físicos” hamiltoniano y carga electromagnética escritos utilizando el ordenamiento normal son

$$\hat{H}' = \int dydz : \hat{\psi}^{\dagger}\left(-i\alpha_j\partial_j + \beta m\right)\hat{\psi}:, \qquad (2.77)$$

$$\hat{Q}' = e\int dydz : \hat{\psi}^{\dagger}\hat{\psi}:, \qquad (2.78)$$

que coinciden con (2.64) y (2.70).

2.3 Densidad lagrangiana de Dirac libre en (2+1) dimensiones y sus simetrías

En esta sección se presenta la densidad lagrangiana que genera la ecuación de Dirac libre en (2+1) dimensiones, así como las simetrías que posee: simetría gauge global $U(1)$ y simetría quiral global $U(1)_L \times U(1)_R$, esta última para el caso de campo de Dirac sin masa.

[4] La redefinición se hizo sustrayendo de los operadores inicialmente propuestos la energía y la carga del vacío, respectivamente.

2.3.1 Simetría U(1) global

Es fácil de probar que la ecuación de Dirac (2.7), se puede derivar usando la ecuación de Euler-Lagrange para el campo de antimateria $\bar{\psi}(x)$, a partir de la densidad lagrangiana de Dirac libre dada por

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(x)\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi(x), \tag{2.79}$$

la cual es invariante bajo transformaciones del grupo $U(1)$ global de los campos de materia $\psi(x)$ y antimateria $\bar{\psi}(x)$ de la forma

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp\left[-i\theta\right]\psi(x), \qquad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x) = \exp\left[i\theta\right]\bar{\psi}(x), \qquad \theta = \text{constante}, \tag{2.80}$$

donde $x = (y, z, t)$ representa un punto en el espacio-tiempo (2+1) dimensional. Se observa que la densidad lagrangiana de Dirac libre transformada satisface

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_D &= \bar{\psi}'(x)\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi'(x), \\
&= \bar{\psi}(x)\exp[i\theta]\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\exp[-i\theta]\psi(x), \\
&= \bar{\psi}(x)\exp[i\theta]\exp[-i\theta]\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi(x), \\
&= \bar{\psi}(x)\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi(x), \\
\mathcal{L}'_D &= \mathcal{L}_D,
\end{aligned} \tag{2.81}$$

es decir, se tiene una invariacia bajo transformaciones $U(1)$ globales de los campos de materia $\psi(x)$ y antimateria $\bar{\psi}(x)$, lo cual indica que el sistema libre considerado presenta una simetría $U(1)$ global.

2.3.2 Simetría quiral global $U(1)_L \times U(1)_R$ y su ruptura explícita

Los fermiones pueden tener helicidad +1, es decir la proyección del espín en la dirección del momentum es positiva, o −1, la proyección del espín en la dirección del momentum es negativa. Considerando un fermión con helicidad de +1 para algún observador en un sistema de referencia dado. Si un observador se desplaza en la misma dirección y sentido, pero más rápido que el fermión, se tiene que el fermión se mueve relativamente al observador hacia atrás y su helicidad para el observador es ahora de −1. Por lo tanto, la helicidad es una cantidad relativa al observador [41] [44].

2.3.2.1 Componentes quirales del campo de Dirac

Ahora si el fermión relativista no tiene masa, es decir se mueve con la velocidad de la luz, entonces su helicidad será la misma para todos los observadores, lo cual quiere decir que las helicidades positiva y negativa se desacoplan, con lo cual ahora los fermiones tienen una "lateralidad" definida. Ellos son fermiones quirales. Por lo anterior, consideremos la ecuación de Dirac libre en forma covariante para un campo fermionico sin masa

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu\right)\psi\left(x\right) = 0. \tag{2.82}$$

Si se define la matriz γ_5 como [64] [68]

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.83}$$

que satisface $(\gamma^5)^2 = 1$, se observa que γ^5 obedece la siguiente relación de anticonmutación

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0. \tag{2.84}$$

Teniendo en cuenta esta relación de anticonmutación, la ecuación de Dirac para un campo fermionico sin masa se puede escribir indistintamente como

$$i\gamma_5\gamma_\mu\psi(x) = 0, \tag{2.85}$$
$$-i\gamma^\mu\gamma_5\psi(x) = 0, \tag{2.86}$$

lo cual muestra que tanto $\psi(x)$, como $\gamma^5\psi(x)$ son soluciones de la ecuación (2.82) y por lo tanto cualquier combinación lineal de estas dos soluciones es también una solución de la ecuación de Dirac libre. Definiendo las siguientes combinaciones [41] [42] [44]

$$\psi_L(x) = P_L\psi(x) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{1} - \gamma_5\right)\psi(x), \qquad \psi_R(x) = P_R\psi(x) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{1} + \gamma_5\right)\psi(x), \tag{2.87}$$

donde P_L y P_R son denominados los operadores proyectores de quiralidad [5] y $\mathbf{1}$ es la matriz identidad 4×4. Entonces $\psi_L(x)\,(\psi_R(x))$ es la componente de quiralidad izquierda (derecha) del campo de Dirac $\psi(x)$. Los subíndices L y R que hacen referencia a proyecciones de quiralidad izquierda y derecha y se denotan así teniendo en cuenta el sentido de las manecillas del reloj [41]. La proyección de quiralidad derecha describe fermiones en un estado tal que su espín es 1/2 (momento angular intrinseco con sentido de giro como el de las manecillas del reloj), mientras que la proyección de quiralidad derecha describe fermiones en un estado tal que su espín es $-1/2$ (momento angular intrinseco con sentido de giro contrario al de las manecillas del reloj)[6].

En general, la quiralidad se define como la característica estructural de un sistema finito (partícula, átomo o molécula) que hace que sea imposible superponerla sobre imagen en un espejo. Por ejemplo, las manos y pies izquierdos y derechos son ejemplos de imágenes quirales, mientras que círculos o triángulos son ejemplos de objetos no quirales. En otras palabras, cualquier objeto que sea diferente a su imagen se dice que es quiral[7] No sobra aclarar que la quiralidad en la siguiente subsección es equivalente a la helicidad, ya que estos dos conceptos son iguales para el caso de considerar fermiones sin masa [41].

[5] Para partículas sin masa, el operador $P_{L,R}$ proyecta la helicidad de la partícula. Como operadores ellos deben satisfacer las siguientes relaciones:

$$P_RP_L = P_LP_R = 0, \qquad P_R^2 = P_R, P_L^2 = P_L, \qquad P_R + P_L = 1$$

Para partículas con masa, $P_{R,L}$ son operadores de quiralidad, pero ahora no corresponden exactamente a la helicidad.

[6] Los campos espinoriales ϕ y χ, introducidos previamente en la ecuación de Dirac, tienen paridad opuesta, mientras que las combinaciones de ψ_L y ψ_R tienen paridad indefinida, de hecho

$$\begin{aligned} P: \qquad & \psi(y,z,t) \to \gamma_0\psi\left(-y,-z,t\right) \\ & \psi_R\left(y,z,t\right) = P_R\psi(y,z,t) \to P_R\gamma_0\psi(-y,-z,t) = \gamma_0P_L\psi(-y,-z,t) \neq \pm\psi_R(-y,-z,t) \\ & \psi_L(y,z,t) = P_L\psi(y,z,t) \to P_L\gamma_0\psi(-y,-z,t) = \gamma_0P_R\psi(-y,-z,t) \neq \pm\psi_L(-y,-z,t), \end{aligned}$$

por lo tanto ψ_L y ψ_R no transforman de la misma manera bajo transformaciones de paridad. Sin embargo, considerando las siguientes combinaciones

$$\begin{aligned} P: \quad & \psi_R(y,z,t) + \psi_L(y,z,t) \to +\left(\psi_R(-y,-z,t) + \psi_L(-y,-z,t)\right), \\ & \psi_R(y,z,t) - \psi_L(y,z,t) \to -\left(\psi_R(-y,-z,t) - \psi_L(-y,-z,t)\right), \end{aligned}$$

entonces los autoestados del operador de paridad tienen valores propios de ± 1.

[7] La quiralidad fue una propiedad descubierta por el científico Louis Pasteur en 1848, mientras estudiaba sales de potasio. Pasteur descubrió tres variaciones en los cristales: dos de ellas eran imágenes de espejo. Pasteur separó cuidadosamente los dos cristales, los disolvió en agua e hizo pasar luz a través de la solución y se dio cuenta que la luz polarizada rotaba diferente en los dos cristales: Uno rotaba en sentido a las manecillas del reloj (dextrógiro), mientras que el otro lo hacía en sentido contrario (levógiro). Lo anterior implicaba que los dos compuestos de la sal de potasio giraban hacia la derecha o a la izquierda. Ellos era parejas quirales, puesto que uno no podía ser superpuesto con el otro [41].

2.3.2.2 Simetría quiral global $U(1)_L \times U(1)_R$ del sistema sin masa

La densidad lagrangiana de Dirac libre para un campo fermionico sin masa está dada por

$$\mathcal{L}_o = \bar{\psi}(x) i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x), \tag{2.88}$$

Dado que campo de Dirac $\psi(x)$ se puede escribir como la suma de sus componentes quirales $\psi(x) = (P_R + P_L)\psi(x) = \psi_R(x) + \psi_L(x)$, entonces la densidad lagrangiana (2.88) queda escrita como

$$\mathcal{L}_o = \bar{\psi}_R(x) i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R(x) + \bar{\psi}_L(x) i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L(x), \tag{2.89}$$

donde se ha tenido en cuenta que los términos cruzados $\bar{\psi}_R(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L(x)$ y $\bar{\psi}_L(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R(x)$ se anulan, dado que $P_R P_L = P_L P_R = 0$. Se puede probar ahora que la densidad lagrangiana (2.89) presenta simetría quiral $U(1)_R \times U(1)_L$, puesto que es invariante bajo transformaciones de fase globales de las proyecciones de quiralidad de los campos de materia y antimateria de la forma

$$\psi_L(x) \to \psi'_L(x) = \exp\left[-i\theta_L\right]\psi_L(x); \qquad \psi_R(x) \to \psi'_R(x) = \exp\left[-i\theta_R\right]\psi_R(x), \tag{2.90}$$

$$\bar{\psi}_L(x) \to \bar{\psi}'_L(x) = \exp\left[i\theta_L\right]\bar{\psi}_L(x); \qquad \bar{\psi}_R(x) \to \bar{\psi}'_R(x) = \exp\left[i\theta_R\right]\bar{\psi}_R(x), \tag{2.91}$$

donde θ_R y θ_L son parametros reales, que en general son diferentes, asociados respectivamente con los grupos de simetría $U(1)_R$ y $U(1)_L$. Por lo anterior, las proyecciones de quiralidad derecha e izquierda del campo de Dirac y su adjunto, transforman con una fase diferente. Para probar la mencionada simetría, primero se escribe la densidad lagrangiana transformada como

$$\mathcal{L}'_o = i\bar{\psi}(x)'_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi'_R(x) + i\bar{\psi}'_L(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi'_L(x). \tag{2.92}$$

Después de substituir (2.90) y (2.91) en la anterior expresión, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_o &= i\left(\exp\left[i\theta_R\right]\bar{\psi}_R\right)\gamma^\mu\partial_\mu\left(\exp\left[-i\theta_R\right]\psi_R\right) + i\left(\exp\left[i\theta_L\right]\bar{\psi}_L\right)\gamma^\mu\partial_\mu\left(\exp\left[-i\theta_L\right]\psi_L\right), \\
&= i\exp\left[i\theta_R - i\theta_R\right]\bar{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R + i\exp\left[i\theta_L - i\theta_L\right]\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L, \\
&= i\bar{\psi}_R(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R(x) + i\bar{\psi}_L(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L(x), \\
\mathcal{L}'_o &= \mathcal{L}_o,
\end{aligned} \tag{2.93}$$

resultado que indica que para el caso de un campo de Dirac sin masa, el sistema presenta simetría quiral global $U(1)_L \times U(1)_R$.

2.3.2.3 Ruptura explícita de la simetría quiral global debido al término de masa

A continuación se prueba que si densidad lagrangiana de Dirac libre incluye un término explícito de masa del campo fermionico, es decir si se considera un campo de Dirac libre masivo, entonces para este caso el sistema ya no presenta simetría quiral $U(1)_R \times U(1)_L$ global, puesto que el término de masa de la densidad lagrangiana rompe explicitamente esta simetría quiral. Previamente se mencionó que la ecuación de Dirac (2.7) se puede obtener partiendo de la densidad lagrangiana de Dirac libre dada por (2.79), la cual se puede escribir en la forma

$$\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_o - m\bar{\psi}(x)\psi(x), \tag{2.94}$$

donde $\mathcal{L}_o$ es la densidad lagrangiana de Dirac libre del campo fermionico sin masa dada por (2.88). Teniendo en cuenta que el campo $\psi(x)$ se puede escribir como $\psi(x) = \psi_L(x) + \psi_R(x)$, entonces la densidad lagrangiana (2.94) adquiere la forma

$$\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_o - m\left(\bar{\psi}_R(x)\psi(x)_L + \bar{\psi}_L(x)\psi(x)_R\right), \tag{2.95}$$

donde $\mathcal{L}_o$ esta dada por (2.88) y en el término de masa se ha tenido en cuenta que $\bar{\psi}_R(x)\psi_R(x) = \bar{\psi}_L(x)\psi_L(x) = 0$, dado que $P_R P_L = P_L P_R = 0$. Si ahora se substituyen los campos quirales transformados, dados por (2.90) y (2.91), en la densidad lagrangiana de Dirac libre transformada

$$\mathcal{L}'_D = \mathcal{L}'_o - m\left(\bar{\psi}'_R(x)\psi'_L(x) + \bar{\psi}'_L(x)\psi'_R(x)\right), \tag{2.96}$$

se encuentra inmediatamente que el primer término del lado derecho de la expresión anterior, es decir la densidad lagrangiana de Dirac libre sin masa, es invariante quiral $U(1)_R \times U(1)_L$ dado que $\mathcal{L}'_o = \mathcal{L}_o$, tal como fue mostrado en la subsección anterior, mientras que el segundo término, correspondiente al término de masa, no lo es, puesto que su efecto en la densidad lagrangiana transformada (2.96) es tal que

$$\mathcal{L}'_D = \mathcal{L}_o - m\left(\exp\left[i\theta_L - i\theta_R\right]\bar{\psi}_R(x)\psi_L(x) + \exp\left[i\theta_R - i\theta_L\right]\bar{\psi}_L(x)\psi_R(x)\right) \neq \mathcal{L}_D, \tag{2.97}$$

debido a que $\theta_L \neq \theta_R$, con lo cual $\theta_L - \theta_R \neq 0$ y $\theta_R - \theta_L \neq 0$. Por lo anterior, se tiene que el término de masa de la densidad lagrangiana de Dirac libre rompe explícitamente la simetría quiral $U(1)_R \times U(1)_L$, lo cual sucede para el caso de considerar un campo de Dirac masivo libre, es decir cuando se tiene un sistema constituido por fermiones libres con masa.

3. FERMIÓN EN (2+1) DIMENSIONES INTERACTUANDO CON UN CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME EXTERNO Y PERPENDICULAR AL PLANO DE MOVIMIENTO

En este capítulo se estudia el sistema constituido por un fermión masivo relativista de espín 1/2, cargado electromagnéticamente y restringido a moverse en el plano (x,y), que interactúa con un campo magnético uniforme perpendicular a este plano. Se soluciona la ecuación de Dirac de este sistema y se determina su espectro energías y sus respectivas funciones de onda de probabilidad. Además, se muestra que la densidad lagrangiana de la QED que describe a este sistema es invariante bajo transformaciones gauge locales $U(1)$ de los campos de materia, antimateria y radiación. También se muestra que este sistema, para el caso del campo de Dirac sin masa, posée simetría quiral local $U(1)_L \times U(1)_R$. Se muestra que si el campo de Dirac es masivo, esta simetría quiral se rompe explícitamente.

3.1 Solución de la ecuación de Dirac interactuante en (2+1) dimensiones

El sistema físico que se considera en este capítulo corresponde a un fermión relativista con carga e y masa m restringido a moverse en el plano xy y sobre el cual actúa un campo magnético uniforme perpendicular al plano. La ecuación de Dirac libre en forma covariante tiene la forma

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\,\psi\,(x,y,t) = 0, \qquad \mu = 0,1,2. \tag{3.1}$$

Cuando un fermión relativista cargado electromagnéticamente interactúa con un campo electromagnético, su energía y momentum se modifican, respectivamente, como $E \to E - e\phi$ y $\vec{p} \to \vec{p} - e\vec{A}$, donde ϕ es el potencial escalar y $\vec{A}$ es el potencial vectorial, lo cual formalmente se describe a través de la denominada sustitución minimal dada por

$$p_{\mu} \to p_{\mu} - eA_{\mu}, \tag{3.2}$$

donde p_{μ} es el cuadrimomento, e es la carga del electrón y A_{μ} es el cuadripotencial (o campo electromagnético). La componente temporal del cuadrimomento del fermión es modificada por el potencial escalar ϕ, mientras que la correspondiente componente espacial es modificada por el potencial vectorial $\vec{A}$. Introduciendo la expresión (3.2) en (3.1), se obtiene que la respectiva ecuación de Dirac es

$$\left[i\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu} + ieA_{\mu}\right) - m\right]\psi\,(x,y,t) = 0, \tag{3.3}$$

la cual, si se tiene en cuenta que $A_{\mu} = (A_0, -\vec{A})$, se puede reescribir como

$$(i\partial_0 - eA_0)\,\psi\,(x,y,t) = \left(-i\gamma^0\gamma^j\partial_j - e\gamma^0\gamma^j A_j + \gamma^0 m\right)\psi\,(x,y,t)\,.$$

donde $j = 1,2$, dado que el fermión se mueve sobre el plano (x,y). Haciendo la expansión de la suma, considerando la convención de índices repetidos de Einstein, se tiene

$$i\partial_0\psi(x,y,t) = \left[-i\gamma^0\gamma^1\partial_1 - i\gamma^0\gamma^2\partial_2 + e\mathbf{1}A_0 - e\gamma^0\gamma^1 A_1 - e\gamma^0\gamma^2 A_2 + \gamma^0 m\right]\psi(x,y,t), \tag{3.4}$$

donde $\mathbf{1}$ representa la matriz identidad 2x2. Para el sistema considerado, existen dos representaciones no equivalentes e irreducibles de las matrices de Dirac, las cuáles están dadas por [36]

$$\gamma^0 = s\sigma^3, \qquad \gamma^1 = is\sigma^1, \qquad \gamma^2 = si\sigma^2, \tag{3.5}$$

donde σ^1, σ^2 y σ^3 son las matrices de Pauli, $s = 1$ corresponde a la representación que se denomina A, mientras que $s = -1$ corresponde a la representación que se denomina B. Físicamente la representación A describe un electrón con espín arriba ($e^{-\uparrow}$) y un positrón con espín abajo ($e^{+\downarrow}$), en tanto que la representación B describe un electrón con espín hacia abajo ($e^{-\downarrow}$) y un positrón con espín hacia arriba ($e^{+\uparrow}$)[60] [63]. Teniendo en cuenta (3.5), entonces (3.4) se puede reescribir de la siguiente manera

$$i\partial_0\psi(x,y,t) = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\partial_1 - \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\partial_2 + e\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}A_0 - e\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}A_1 - e\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}A_2 + sm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] \psi(x,y,t). \tag{3.6}$$

Asumiendo que la solución de la ecuación (3.6) está dada por [36]

$$\psi(x,y,t) = \exp\left(-iEt + ipy\right)\begin{pmatrix} \psi_1^{A,B}(x) \\ \psi_2^{A,B}(x) \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

entonces, reemplazando (3.7) en (3.6), se obtiene

$$E\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\partial_1 - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}p + e\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}A_0 - e\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}A_1 - e\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}A_2 + sm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Puesto que el sistema está constituido por un fermión cargado electromagnéticamente y restringido a moverse sobre el plano (x,y), el cual interactúa con un campo magnético uniforme de manitud B, perpendicular al plano, entonces el campo electromagnético consistente con esta situación física es

$$A_\mu = (A_0, -A_1, -A_2) = (0, By, 0)\,. \tag{3.9}$$

Sustituyendo (3.9) en (3.8), se tiene que

$$E\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\partial_1 - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}p + eBy\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + sm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Teniendo en cuenta la forma del espinor (3.7) y después de realizar algunos pasos algebraicos, se obtiene el sistema de ecuaciones acopladas

$$(E - sm)\,\psi_1(x) = (\partial_1 + p + eBy)\,\psi_2(x), \tag{3.11}$$

$$(E + sm)\,\psi_2(x) = (-\partial_1 + p + eBy)\,\psi_1(x), \tag{3.12}$$

el cual se puede escribir de forma matricial como [36]

$$-\,\partial_1\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -eB & 0 \\ 0 & eB \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & E + sm \\ -E + sm & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Para solucionar el sistema de ecuaciones acopladas (3.11) y (3.12), para el caso de la representación A, es decir para $s = 1$, estas ecuaciones se reescriben de la siguiente manera

$$(-E + m)\,\psi_1(x) = (-\partial_1 - p - eBy)\,\psi_2(x), \tag{3.14}$$

$$(E + m)\,\psi_2(x) = (-\partial_1 + p + eBy)\,\psi_1(x). \tag{3.15}$$

3.1.1 Espectros de energía

Lo primero que se hace es desacoplar el sistema de ecuaciones. Para esto, la ecuación (3.14) se reescribe como

$$(ip_1 - eBy + p)\,\psi_2(x) = (E - m)\,\psi_1(x), \tag{3.16}$$

mientras que la ecuación (3.15) se reescribe como

$$(-ip_1 + eBy + p)\,\psi_1(x) = (E + m)\,\psi_2(x). \tag{3.17}$$

A continuación, se escriben las ecuaciones (3.16) y (3.17) en términos de los operadores creación y destrucción usuales [58] [67]. Para ello, la expresión (3.16) se expresa de la siguiente manera

$$-\sqrt{2eB}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\varsigma} - ip_1\varsigma - p\varsigma\right)\psi_2(x) = (E - m)\,\psi_1(x), \tag{3.18}$$

donde $\varsigma = 1/\sqrt{eB}$. Siguiendo un procedimiento similar para la ecuación (3.17), se obtiene

$$-\sqrt{2eB}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\varsigma} + ip_1\varsigma - p\varsigma\right)\psi_1(x) = (E + m)\,\psi_2(x). \tag{3.19}$$

Se definen los operadores creación y destrucción, respectivamente, como [36]

$$\hat{a}_l = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\varsigma} + i\varsigma p_1 - \varsigma p\right), \tag{3.20}$$

$$\hat{a}_l{}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\varsigma} - i\varsigma p_1 - \varsigma p\right). \tag{3.21}$$

Después de substituir los operadores creación y destrucción (3.20) y (3.21) en las ecuaciones (3.18) y (3.19), se obtienen las ecuaciones

$$-\sqrt{2eB}\hat{a}_l\psi_1(x) = (E + m)\,\psi_2(x), \tag{3.22}$$

$$-\sqrt{2eB}\hat{a}_l{}^\dagger\psi_2(x) = (E - m)\,\psi_1(x). \tag{3.23}$$

A continuación se escribe cada una de las funciones de onda en términos de la otra con el fin de poder desacoplar el sistema de ecuaciones. Por lo tanto, a partir de (3.22) y (3.23) se tiene

$$\psi_2(x) = -\frac{\sqrt{2eB}\hat{a}_l}{E + m}\psi_1(x), \tag{3.24}$$

$$\psi_1(x) = -\frac{\sqrt{2eB}\hat{a}_l{}^\dagger}{E - m}\psi_2(x). \tag{3.25}$$

Sustituyendo (3.25) en (3.22, se obtiene la ecuación desacoplada para $\psi_2(x)$ dada por

$$\left(m^2 + 2eB\hat{a}_l\hat{a}_l{}^\dagger\right)\psi_2(x) = E^2\psi_2(x). \tag{3.26}$$

Dado que los operadores creación y destrucción satisfacen una relación de conmutación, entonces se tiene que [36]

$$\left[\hat{a}_l, \hat{a}_l{}^\dagger\right] = \hat{a}_l\hat{a}_l{}^\dagger - \hat{a}_l{}^\dagger\hat{a}_l = 1 \rightarrow \hat{a}_l\hat{a}_l{}^\dagger = 1 + \hat{a}_l{}^\dagger\hat{a}_l, \tag{3.27}$$

y llamando $\hat{N} = \hat{a}_l{}^\dagger\hat{a}_l$, denominado operador número, entonces a partir de la ecuación (3.26) se obtiene que el espectro de energía asociado con la función de onda $\psi_2(x)$ es

$$E_{n+1} = \pm\sqrt{m^2 + 2eB(n + 1)}. \tag{3.28}$$

Ahora reemplazando (3.24) en (3.23) y siguiendo un procedimiento similar al que se acaba de desarrollar para la función de onda $\psi_2(x)$, se encuentra que el espectro de energía asociado con la función de onda $\psi_1(x)$ es

$$E_n = \pm\sqrt{m^2 + 2eBn}. \tag{3.29}$$

3.1.2 Funciones de onda de probabilidad

Para determinar las funciones de onda de probabilidad, retomamos las ecuaciones (3.14) y (3.15). En la ecuación (3.14) se despeja la función de onda $\psi_1(x)$, mientras que en la ecuación (3.15) se despeja la función de onda $\psi_2(x)$, de la siguiente manera

$$\psi_1(x) = \frac{(-\partial_1 - eBy - p)}{-E + m}\psi_2(x), \tag{3.30}$$

$$\psi_2(x) = \frac{(-\partial_1 + eBy + p)}{E + m}\psi_1(x). \tag{3.31}$$

Ahora se substituye (3.31) en (3.30)

$$(-E + m)\,\psi_1(x) = (-\partial_1 - p - eBy)\left(\frac{(-\partial_1 + eBy + p)}{E + m}\right)\psi_1(x), \tag{3.32}$$

la cual se puede reescribir como

$$(E + m)\,(-E + m)\,\psi_1(x) = (-\partial_1 - p - eBy)\,(-\partial_1 + eBy + p)\,\psi_1(x), \tag{3.33}$$

conduciéndo a la siguiente ecuación diferencial para $\psi_1(x)$

$$\partial_1^2\psi_1(x) - \partial_1\psi_1 + \left(2eByp - p^2 - e^2B^2y^2 - p\right)\psi_1(x) = (-E^2 + m^2)\psi_1(x), \tag{3.34}$$

cuya solución está dada por [36] [82]

$$\psi_1(x) = N_n \exp\left(-iE_nt + ipy\right)\begin{pmatrix} (E_n + m)\, I\,(n, p, x) \\ -\sqrt{2eBn}I\,(n-1, p, x)\end{pmatrix}, \tag{3.35}$$

donde

$$N_n = \frac{1}{\sqrt{2E_n\,(E_n + m)}}, \qquad\qquad E_n = \sqrt{m^2 + 2eBn}, \tag{3.36}$$

$$I(n, p, x) = \left(\frac{eB}{\pi}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n\left[\sqrt{eB}\left(x - \frac{p}{eB}\right)\right]\exp\left[-\frac{eB}{2}\left(x - \frac{p}{eB}\right)^2\right]. \tag{3.37}$$

En la expresión (3.36), N_n corresponde a la constante de normalización de las soluciones de energía positiva, mientras que en (3.36), H_n corresponde a los polinomios de Hermite. Para poder obtener la función de onda de probabilidad $\psi_2(x)$, se sustituye (3.30) en (3.31), con lo cual se obtiene

$$(E + m)\,\psi_2(x) = (-\partial_1 + p + eBy)\left(\frac{(-\partial_1 - eBy - p)}{-E + m}\psi_2(x)\right), \tag{3.38}$$

la cual conduce a la siguiente ecuación diferencial

$$\left(-E^2 + m^2\right)\psi_2(x) = \left(\partial_1^2 - eB - 2epBy - p^2 - e^2B^2y^2\right)\psi_2(x), \tag{3.39}$$

cuya solución es [36] [82]

$$\psi_2(x) = N_n \exp\left(iE_nt - ipy\right)\begin{pmatrix} \sqrt{2eBn}I\,(n, -p, x) \\ (E_n + m)\, I\,(n-1, -p, x)\end{pmatrix}, \tag{3.40}$$

en donde las cantidades N_n e $I(n, x, p)$ están dados por la expresiones (3.36) y (3.40).

Se observa que la función de onda de probabilidad (3.35) describe los estados cuánticos de las partículas de energía positiva, dado que el momentum lineal posee signo positivo. Por otra parte, se observa que la función de onda de probabilidad (3.40) tiene una dependencia con el momentum como $-p$, lo cual indica que las antipartículas se desplazan en sentido contrarioa a las partículas, con lo cual esta función de onda describe los estados cuánticos de las antipartículas.

3.2 Densidad lagrangiana de la QED en (2+1) dimensiones y sus simetrías

En esta sección se presenta la densidad lagrangiana de la QED, que describe el sistema en (2+1) dimensiones considerado en este capítulo, así como las simetrías que posee: simetría gauge $U(1)$ local y simetría quiral local $U(1)_L \times U(1)_R$, esta última presente solamente para el caso de un campo de Dirac sin masa.

3.2.1 Simetría gauge U(1) local

Se puede probar que la ecuación de Dirac interactuante dada por (3.3), para el caso en que $\psi(x)$ representa un campo de Dirac, se puede derivar usando la ecuación de Euler-Lagrange del campo de antimateria $\bar{\psi}(x)$, a partir de la densidad lagrangiana de la QED definida por

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_{YM}, \tag{3.41}$$

donde $\mathcal{L}_D$ es la densidad lagrangiana de Dirac libre dada por (2.94), mientras que $\mathcal{L}_I$ es la densidad lagrangiana de interacción dada por

$$\mathcal{L}_I = -e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu \psi(x), \tag{3.42}$$

la cual surge operativamente al cambiar la triderivada (en (2+1) dimensiones) ∂_μ en (2.94) por la derivada covariante abeliana $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, o en términos físicos después de implementar la substitución minimal e introducir la interacción electromagnética en el sistema. Adicionalmente, $\mathcal{L}_{YM}$ es la densidad lagrangiana de Yang-Mills abeliana, que describe la energía cinética del campo electromagnético y que está dada por

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{3.43}$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor abeliano de campo electromagnético escrito como $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. La densidad lagrangiana de la QED, definida por (3.41), es invariante bajo transformaciones gauge locales del grupo $U(1)$ de los campos de materia $\psi(x)$, antimateria $\bar{\psi}(x)$ y radiación $A_\mu(x)$ de la forma

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp\left[-i\theta(x)\right]\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x) = \exp\left[i\theta(x)\right]\bar{\psi}(x), \tag{3.44}$$

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x), \tag{3.45}$$

donde $x = (y, z, t)$ representa un punto en el espacio-tiempo (2+1) dimensional. Para probar la mencionada invariancia, primero se escribe la densidad lagrangiana de la QED transformada en la forma

$$\mathcal{L}'_{QED} = \mathcal{L}'_D + \mathcal{L}'_I + \mathcal{L}'_{YM}. \tag{3.46}$$

Se observa que la densidad lagrangiana de Dirac libre transformada $\mathcal{L}'_D$, después de substituir los campos de materia y animateria transformados dados por (3.44), se escribe como

$$\mathcal{L}'_D = \mathcal{L}_D - \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\left[\partial_\mu\theta(x)\right]\psi(x), \tag{3.47}$$

mientras que la densidad lagrangiana de interacción transformada $\mathcal{L}'_I$, después de substituir los campos de materia, antimateria y radiación transformados dados por (3.44) y (3.45), conduce a

$$\mathcal{L}'_I = \mathcal{L}_I + \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\left[\partial_\mu\theta(x)\right]\psi(x), \tag{3.48}$$

en tanto que la densidad lagrangiana de Yang-Mills abeliana transformada $\mathcal{L}'_{YM}$, después de substituir el campo de radiación transformado, dado por (3.45), satisface

$$\mathcal{L}'_{YM} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu\prime}F'_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{YM}, \tag{3.49}$$

Substituyendo (3.47),(3.48) y (3.49) en (3.46), se encuentra que

$$\mathcal{L}'_{QED} = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_{YM} = \mathcal{L}_{QED}, \tag{3.50}$$

lo cual indica la invariancia de la densidada legrangiana de la QED bajo transformaciones gauge locales $U(1)$ de sus campos, implicando entonces que el sistema considerado en este capítulo presenta una simetría gauge $U(1)$ local.

3.2.2 Simetría quiral local $U(1)_L \times U(1)_R$ de la QED y su ruptura explícita

En esta sección se muestra inicialmente que la densidad lagrangiana de la QED presenta una simetria gauge local $U(1)$. Posteriormente se muestra que, para el caso un campo de Dirac sin masa, la densidad lagrangiana de la QED presenta una simetría quiral local $U(1)_L \times U(1)_R$ local.

3.2.2.1 Simetría quiral local de la QED para el caso de un campo de Dirac sin masa

La densidad lagrangiana de la QED para el caso de un campo de Dirac sin masa es

$$\mathcal{L}_{QED_o} = \mathcal{L}_o + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_{YM}, \tag{3.51}$$

donde $\mathcal{L}_o$ representa la densidad lagrangia de Dirac libre para campo fermionico sin masa dada por (2.88), mientras que $\mathcal{L}_I$ y $\mathcal{L}_{YM}$ están dadas respectivamente por (3.42) y (3.43). Puesto que el campo de Dirac $\psi(x)$ se puede escribir en términos de sus componenentes quirales como $\psi(x) = \psi_R(x) + \psi_L(x)$, entonces la anterior densidad lagrangiana se puede escribir como

$$\mathcal{L}_{QED_o} = \bar{\psi}_R(x) i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R(x) + \bar{\psi}_L(x) i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L(x) - e\bar{\psi}_R(x)\gamma^\mu A_\mu \psi_R(x) - e\bar{\psi}_L(x)\gamma^\mu A_\mu \psi_L(x) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{3.52}$$

donde se ha tenido en cuenta que los términos cruzados $\bar{\psi}_R(x)\gamma^\mu(i\partial_\mu - A_\mu)\psi_L(x)$ y $\bar{\psi}_L(x)\gamma^\mu(i\partial_\mu - A_\mu)\psi_R(x)$ se anulan, ya que que $P_R P_L = P_L P_R = 0$. Se puede probar ahora que la densidad lagrangiana (3.52) presenta simetría quiral $U(1)_R \times U(1)_L$ local, dado que es invariante bajo transformaciones de las componentes quirales de los campos de materia y de antimateria, y del campo de radiación de la forma

$$\psi_L(x) \to \psi'_L(x) = \exp\left[-i\theta_L(x)\right]\psi_L(x); \qquad \psi_R(x) \to \psi'_R(x) = \exp\left[-i\theta_R(x)\right]\psi_R(x), \tag{3.53}$$

$$\bar{\psi}_L(x) \to \bar{\psi}'_L(x) = \exp\left[i\theta_L(x)\right]\bar{\psi}_L(x); \qquad \bar{\psi}_R(x) \to \bar{\psi}'_R(x) = \exp\left[i\theta_R(x)\right]\bar{\psi}_R(x), \tag{3.54}$$

$$A_\mu(x) \to A^{L\prime}_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta_L(x); \qquad A_\mu(x) \to A^{R\prime}_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta_R(x), \tag{3.55}$$

donde $\theta_R(x)$ y $\theta_L(x)$ son funciones gauge diferentes asociadas respectivamente con los grupos de simetría $U(1)_R$ y $U(1)_L$. Por lo anterior, las componentes de quiralidad derecha e izquierda del campo de Dirac y su adjunto, transforman de forma diferente. Para probar la mencionada invariancia, primero se escribe la densidad lagrangiana transformada de la QED para un campo de Dirac sin masa como

$$\mathcal{L}'_{QED_o} = \mathcal{L}'_o + \mathcal{L}'_I + \mathcal{L}'_{YM}. \tag{3.56}$$

Después de reemplazar los campos transformados dados por (3.53), (3.54) y (3.55) en (3.52), se obtiene que

$$\mathcal{L}'_o = \mathcal{L}_o - \bar{\psi}_R(x)\gamma^\mu[\partial_\mu\theta_R(x)]\psi_R(x) - \bar{\psi}_L(x)\gamma^\mu[\partial_\mu\theta_L(x)]\psi_L(x), \tag{3.57}$$

$$\mathcal{L}'_I = \mathcal{L}_I + \bar{\psi}_R(x)\gamma^\mu[\partial_\mu\theta_R(x)]\psi_R(x) + \bar{\psi}_L(x)\gamma^\mu[\partial_\mu\theta_L(x)]\psi_L(x), \tag{3.58}$$

$$\mathcal{L}'_{YM} = \mathcal{L}_{YM}, \tag{3.59}$$

Reemplazando (3.57), (3.58) y (3.59) en (3.56) se obtiene

$$\mathcal{L}'_{QED_o} = \mathcal{L}_o + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_{YM} = \mathcal{L}_{QED_o}, \tag{3.60}$$

lo cual indica que el sistema sin masa considerado presenta una simetría quiral local $U(1)_L \times U(1)_R$.

3.2.2.2 Ruptura explícita de la simetría quiral local por el término de masa

La densidad lagrangiana de la QED, dada por (3.41), incluye un término explícito de masa para el campo fermionico. En esta subsección se muestra que si se considera en el contexto de la QED el caso de un campo de Dirac masivo, como consecuencia el sistema ya no presenta simetría quiral local $U(1)_L \times U(1)_R$, dado que el término de masa incluido en la densidad lagrangiana rompe explicitamente esta simetría quiral. Previamente se mencionó que la ecuación de Dirac interactuante (3.3) se puede derivar, partiendo de la densidad lagrangiana de la QED dada por (3.41), la cual equivalentemente se escribe como

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{QED_o} - m\bar{\psi}(x)\psi(x), \tag{3.61}$$

donde $\mathcal{L}_{QED_o}$, dado por (3.51), representa la densidad lagrangiana de la QED para un campo fermionico sin masa. Teniendo en cuenta que el campo $\psi(x)$ se puede escribir como $\psi(x) = \psi_L(x) + \psi_R(x)$, entonces la densidad lagrangiana (3.61) adquiere la forma

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{QED_o} - m\left(\bar{\psi}_R(x)\psi(x)_L + \bar{\psi}_L(x)\psi(x)_R\right), \tag{3.62}$$

donde $\mathcal{L}_{QED_o}$ está dada por (3.52) y en el término de masa se ha tenido en cuenta que $\bar{\psi}_R(x)\psi_R(x) = \bar{\psi}_L(x)\psi_L(x) = 0$, debido a que $P_R P_L = P_L P_R = 0$. Si ahora se substituyen las componentes quirales de los campos transformadas, dadas por (3.53) y (3.54), en la densidad lagrangiana de Dirac libre transformada

$$\mathcal{L}'_{QED} = \mathcal{L}'_{QED_o} - m\left(\bar{\psi}'_R(x)\psi'_L(x) + \bar{\psi}'_L(x)\psi'_R(x)\right), \tag{3.63}$$

se encuentra inmediatamente que el primer término del lado derecho de la expresión anterior, es decir la densidad lagrangiana de de la QED para el caso de un campo fermiónico sin masa, es invariante quiral local $U(1)_R \times U(1)_L$, dado que $\mathcal{L}'_{QED_o} = \mathcal{L}_{QED_o}$, tal como se mostró en la subsección anterior, mientras que el segundo término, correspondiente al término de masa, no lo es, puesto que su efecto en la densidad lagrangiana transformada (3.63) es tal que

$$\mathcal{L}'_{QED} = \mathcal{L}'_{QED_o} - m\left(\exp\left[i\theta_L(x) - i\theta_R(x)\right]\bar{\psi}_R(x)\psi_L(x) + \exp\left[i\theta_R(x) - i\theta_L(x)\right]\bar{\psi}_L(x)\psi_R(x)\right) \neq \mathcal{L}_{QED}, \tag{3.64}$$

debido a que $\theta_L(x) \neq \theta_R(x)$, con lo cual $\theta_L(x) - \theta_R(x) \neq 0$ y $\theta_R(x) - \theta_L(x) \neq 0$. Por lo anterior, se tiene que el término de masa de la densidad lagrangiana de la QED rompe explícitamente la simetría quiral local $U(1)_L \times U(1)_R$.

4. OSCILADOR DE DIRAC LIBRE EN (2+1) DIMENSIONES

En este capítulo se estudia el sistema constituido por un fermión masivo de espín 1/2 relativista sometido a un potencial lineal y restringido a moverse en un plano. Este sistema es conocido como el oscilador de Dirac libre en (2+1) dimensiones. Inicialmente se soluciona la ecuación de Dirac para este sistema, llamada la ecuación del oscilador de Dirac libre en (2+1) dimensiones, con lo cual se determina el espectro de energía y las funciones de onda de probabilidad que describen sus estados cuánticos. Posteriormente, a partir de expresar al potencial lineal en forma covariante, se encuentra que el oscilador de Dirac libre en (2+1) dimensiones puede ser visto como un sistema constituido por un fermión relativista masivo, con carga electromagnética, interactuando con un campo magnético uniforme interno perpendicular al plano. A continuación se realiza el procedimiento de cuantización canónica del campo del oscilador de Dirac libre. Finalmente, se presenta la densidad lagrangiana del oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones y se muestra que el sistema presenta una simetría gauge global $U(1)$ y, que para el caso de un oscilador de Dirac sin masa, el sistema no presenta simetría quiral global $U(1)_L \times U(1)_R$ dado que el término de interacción en la densidad lagrangiana mezcla las componentes de quiralidad, lo que da lugar a una ruptura explícita de la simetría quiral global, de forma análoga a como en el capítulo anterior el término de masa rompía explícitamente la simetría quiral local.

4.1 *Solución de la ecuación del oscilador de Dirac libre en (2+1) dimensiones*

En esta sección se soluciona la ecuación del oscilador de Dirac libre en (2+1) dimensiones. Partiendo de la ecuación de Dirac en (2+1) dimensiones escrita en forma covariante (2.5)

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi(x,y,t) = 0, \qquad \mu = 0,1,2,$$

la cual se puede reescribir como

$$E\psi(x,y,t) = \left(\gamma^0\gamma^j p_j + \gamma^0 m\right)\psi(x,y,t), \tag{4.1}$$

donde $j = 1,2$. Ahora se introduce el potencial del oscilador de Dirac a partir de una sustitución minimal que tiene alguna analogía con la que permite introducir la interacción con el campo electromagnético. La substitución para este caso tiene la forma [45]

$$p_j \rightarrow p_j - im\omega\gamma^0 r_j, \tag{4.2}$$

en donde ω es la frecuencia asociada al oscilador, m es la masa del fermión y r_j es la coordenada de posición. Reemplazando (4.2) en (4.1) se tiene

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,y,t) = \left[\gamma^0\gamma^j\left(p_j - im\omega\gamma^0 r_j\right) + \gamma^0 m\right]\psi(x,y,t). \tag{4.3}$$

Como se observa en la anterior ecuación, el potencial del oscilador de Dirac corresponde a un potencial lineal en las coordenadas de posición que modifica al momentum del fermión. Escribiendo explícitamente la suma sobre el índicen repetido, la anterior ecuación se escribe como

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,y,t) = \left[\gamma^0\gamma^1 p_1 + \gamma^0\gamma^2 p_2 - im\omega\gamma^0\gamma^1\gamma^0 x - im\omega\gamma^0\gamma^2\gamma^0 y + \gamma^0 m\right]\psi(x,y,t). \tag{4.4}$$

Puesto que $\psi(x,y,t)$ se puede escribir en términos de dos espinores, resulta conveniente introducir la siguiente representación de las matrices de Dirac, en términos de las matrices de Pauli [65]

$$\sigma_1 = \gamma^0\gamma^1, \quad \sigma_2 = \gamma^0\gamma^2, \quad \sigma_3 = \gamma^0, \tag{4.5}$$

las cuales son matrices 2×2. Ahora, sustituyendo (4.5) en (4.4) se obtiene

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,y,t) = [\sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 - im\omega\sigma_1\sigma_3 x - im\omega\sigma_2\sigma_3 y + \sigma_3 m]\,\psi(x,y,t). \tag{4.6}$$

Teniendo en cuenta que el operador energía se define como $E = i\partial/\partial t$ y escribiendo la función de onda en términos de los dos espinores [28]

$$\psi(x,y,t) = \begin{pmatrix} \phi(x,y,t) \\ \chi(x,y,t) \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

entonces, substituyendo (4.7) en (4.6), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones acopladas

$$(E-m)\,\phi(x,y,t) = (p_1 - ip_2 + im\omega x + m\omega y)\,\chi(x,y,t), \tag{4.8}$$

$$(E+m)\,\chi(x,y,t) = (p_1 + ip_2 - im\omega x + m\omega y)\,\phi(x,y,t). \tag{4.9}$$

A continuación se desacoplan las ecuaciones (4.8) y (4.9) con el fin de solucionar las ecuaciones diferenciales para cada uno de los espinores $\phi(x,y,t)$ y $\chi(x,y,t)$. Para realizar lo anterior, primero se multiplica (4.8) por $(E+m)$

$$(E-m)\,(E+m)\,\phi(x,y,t) = (p_1 - ip_2 + im\omega x + m\omega y)\,(E+m)\,\chi(x,y,t), \tag{4.10}$$

luego de substituir (4.9) en la última ecuación, se obtiene

$$\left(E^2 - m^2\right)\phi(x,y,t) = (p_1 - ip_2 + im\omega x + m\omega y)\,(p_1 + ip_2 - im\omega x + m\omega y)\,\phi(x,y,t). \tag{4.11}$$

Operando sobre el lado derecho de la anterior ecuación y teniendo en cuenta que $L_Z = p_2 x - p_1 y$, se encuentra que la ecuación desacoplada para $\phi(x,y,t)$ es

$$\left(E^2 - m^2\right)\phi(x,y,t) = \left[p_1^2 + p_2^2 - 2m\omega - 2m\omega L_z + m^2\omega^2\left(x^2+y^2\right)\right]\phi(x,y,t), \tag{4.12}$$

Por otra parte, la ecuación (4.9) se multiplica a ambos lados de la igualdad por $(E-m)$

$$(E+m)\,(E-m)\,\chi(x,y,t) = (p_1 + ip_2 - im\omega x + m\omega y)\,(E-m)\,\phi(x,y,t), \tag{4.13}$$

y luego de subtituir (4.8) en la última ecuación, se obtiene

$$(E+m)\,(E-m)\,\chi(x,y,t) = (p_1 + ip_2 - im\omega x + m\omega y)\,(p_1 - ip_2 + im\omega x + m\omega y)\,\chi(x,y,t). \tag{4.14}$$

Operando sobre el lado derecho de la anterior ecuación, se encuentra que la ecuación desacoplada para $\chi(x,y,t)$ es

$$\left(E^2 - m^2\right)\chi(x,y,t) = \left[p_1^2 + p_2^2 + 2m\omega - 2m\omega L_z + m^2\omega^2\left(x^2+y^2\right)\right]\chi(x,y,t). \tag{4.15}$$

A continuación se muestra que en la ecuaciones (4.12) y (4.15) aparece un acoplamiento espín-órbita. Para esto, en cualquiera de las dos ecuaciones se toma el término $2m\omega L_z$, el cuál se multiplica por el cuadrado de la matriz de Pauli σ_z [1], es decir [28]

$$2m\omega L_z = 2m\omega L_z \sigma_z^2.$$

Ahora se multiplica y divide la anterior expresión por 2 y se tiene en cuenta que el operador de espín viene dado como $\hat{S} = \frac{1}{2}\sigma_z$ y de este modo

[1] Ya que las matrices son idempotentes entonces $\sigma_z^2 = \mathbf{1}$, donde $\mathbf{1}$ corresponde a la matriz identidad.

$$2\frac{2}{2}m\omega L_z\sigma_z^2 = 4m\omega L_z\frac{1}{2}\sigma_z\sigma_z = 4m\omega L_z \cdot S\sigma_z. \tag{4.16}$$

En la expresión (4.16) se observa el término $L_z \cdot S$, correspondiente a un acoplamiento espín-órbita.

Por otra parte, las ecuaciones (4.12) y (4.15) se pueden expresar en términos de los operadores creación y destrucción de quiralidad definidos como [28] [54] [58]

$$\hat{a}_{n'} := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}_x - i\hat{a}_y\right); \quad \hat{a}^\dagger_{n'} := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}^\dagger_x + i\hat{a}^\dagger_y\right), \tag{4.17}$$

$$\hat{a}_{n} := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}_x + i\hat{a}_y\right); \quad \hat{a}^\dagger_{n} := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}^\dagger_x - i\hat{a}^\dagger_y\right), \tag{4.18}$$

donde $\hat{a}_x$, $\hat{a}^\dagger_x$, $\hat{a}_y$ y $\hat{a}^\dagger_y$ se identifican con los usuales operadores creación-destrucción que aparecen en el tratamiento de un oscilador armónico cuántico no relativista, los cuáles están definidos como [28]

$$\hat{a}^\dagger_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\Delta}r^j - i\Delta p^j\right); \quad \Delta = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}; \quad j = x, y. \tag{4.19}$$

Expresando las ecuaciones (4.12) y (4.15) en términos de los operadores de quiralidad (4.17) y (4.18), se puede determinar el espectro de energía del sistema estudiado. De esta manera, la ecuación (4.12) se escribe como

$$\left(E - m\right)\phi(x, y, t) = i\sqrt{4m\omega}\,\hat{a}^\dagger_n\chi(x, y, t), \tag{4.20}$$

mientras que para la ecuación (4.15) queda escrita como [17]

$$\left(E + m\right)\chi(x, y, t) = -i\sqrt{4m\omega}\,\hat{a}_n\phi(x, y, t). \tag{4.21}$$

Sustituyendo (4.21) en (4.20), se encuentra que el espectro de energía asociado al espinor $\phi(x, y, t)$ es

$$E_n = +\sqrt{m^2 + 4m\omega n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{4.22}$$

mientras que, después de substituir (4.20) en (4.21), se encuentra que el espectro de energía asociado al espinor $\chi(x, y, t)$ es

$$E_{n+1} = -\sqrt{m^2 + 4m\omega\left(n + 1\right)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{4.23}$$

Las expresiones (4.22) y (4.23), que representan los espectros de energía de los fermiones y los antifermiones respectivamente, pueden ser escritos de forma simultánea en una sola expresión, de la siguiente manera [17] [28] [51] [58]

$$E_{|n|} = \pm\sqrt{m^2 + 4m\omega|n|}, \quad \text{con n} \in \mathbb{Z}, \tag{4.24}$$

en donde se cumple que: (i) El signo más (+), se toma para $n > 0$; (ii) el signo menos (-), se toma para $n \leq 0$, de tal forma que estos números cuánticos corresponden a estados cuánticos de energía negativa.

Por otra parte, se observa en la expresión (4.24) que la energía positiva mínima tiene un valor de $E_1 = \sqrt{m^2 + 4m\omega}$ que corresponde al estado con número cuántico $n = 1$, mientras que la energía negativa máxima tiene un valor $E_0 = -\sqrt{m^2 + 4m\omega}$ que corresponde al número cuántico $n = 0$. Se tiene, para el caso $\omega \ll m$, que la diferencia de energías $\Delta E = E_1 - E_0$ entre los estados $|\phi_1>$ y $|\chi_0>$ es

$$\Delta E = 2m^2 + 4m\omega. \tag{4.25}$$

Se observa que el resultado obtenido es coherente con el caso en el que no exista potencial lineal, es decir para cuando $\omega = 0$, correspondiente a la ecuación de Dirac libre, en donde se cumple que la diferencia de energía entre estos estados es

$$\Delta E = 2m^2. \tag{4.26}$$

Usando resultados anteriores, los estados del sistema pueden ser escritos como

$$\psi_n(x,y,t) = \begin{pmatrix} \phi_n(x,y) \\ \chi_n(x,y) \end{pmatrix} \exp(-iE_n t), \tag{4.27}$$

en donde el número cuántico n es un número entero que puede describir estados de energía positiva y negativa, ya que $n \in \mathbb{Z}$, como se mostró en la expresión (4.24). Utilizando la expresión (4.21), se puede reescribir la función de onda (4.27) como

$$\psi_n(x,y,t) = \begin{pmatrix} \phi_n(x,y) \\ -i\frac{\sqrt{4m\omega}}{E_n+m}\hat{a}_n\phi_n(x,y) \end{pmatrix} \exp(-iEt). \tag{4.28}$$

Si se aplica el operador número de ocupación $\hat{N} = \hat{a}_n\hat{a}_n^\dagger$ sobre el estado $|\psi_n(x,y,t)>$, se obtiene

$$\hat{N}|\psi_n(x,y,t)> = \begin{pmatrix} |n||\phi(x,y)> \\ |n-1||\chi(x,y)> \end{pmatrix} \exp\left(-iE_n t\right), \tag{4.29}$$

donde se ha asumido que el estado $|\phi(x,y)>$ tiene un número de ocupación dado por $|n|$ y donde usamos la relación (4.21) y las propiedades de los operadores creación y destrucción. Según la última expresión, se observa que el espinor $|\chi(x,y)>$ tiene asociado el número de ocupación $|n-1|$. Luego los estados $|\phi(x,y)>$ y $|\chi(x,y)>$ pueden ser escritos como [28][47]

$$|\phi_n(x,y)> = |n> \xi_n^1, \quad |\chi(x,y)> = |n-1> \xi_n^2, \tag{4.30}$$

donde $\xi_n^{1,2}$ representan espinores. Como consecuencia, los estados del sistema son reescritos como

$$|\psi_n> = \begin{pmatrix} |n> \xi_n^1 \\ |n-1> \xi_n^2 \end{pmatrix}. \tag{4.31}$$

Teniendo en cuenta que los operadores creación y destrucción satisfacen [67]

$$\hat{a}^\dagger|n> = \sqrt{n+1}|n+1>, \quad \hat{a}|n> = \sqrt{n}|n-1>, \tag{4.32}$$

entonces, al actuar estos operadores sobre el estado $|\psi_n>$ da lugar a

$$\hat{a}^\dagger|\psi_n> = \begin{pmatrix} \sqrt{|n|+1}|n+1> \xi_{n+1}^1 \\ \sqrt{|n|}|n> \xi_{n+1}^2 \end{pmatrix}, \quad \text{para } n \neq -1, \tag{4.33}$$

$$\hat{a}|\psi_n> = \begin{pmatrix} \sqrt{|n|}|n-1> \xi_{n-1}^1 \\ \sqrt{|n|-1}|n-2> \xi_{n-1}^2 \end{pmatrix}, \quad \text{para } n \neq 0. \tag{4.34}$$

Ahora, se encuentra una relación entre los espinores ξ_n^1 y ξ_n^2. Para ello, se parte, por ejemplo, de la ecuación (4.21) y utilizando las relaciones (4.30), junto con las propiedades de los operadores creación y destrucción (4.32), se tiene que

$$\xi_n^1 = i\sqrt{\frac{E_n+m}{E_n-m}}\xi_n^2, \tag{4.35}$$

donde $\varsigma = \frac{m}{\omega}$. Por otra parte, realizando un procedimiento similar se puede determinar ξ_n^2 en términos de ξ_n^1, como

$$\xi_n^2 = -i\sqrt{\frac{E_n-m}{E_n+m}}\xi_n^1. \tag{4.36}$$

Ahora el objetivo es expresar los espinores de forma independiente, con lo cual se normaliza la función de onda

$$< \psi_n|\psi_n >= \left(< n|\xi_n^{1*} < n-1|\xi_n^{2*}\right) \begin{pmatrix} |n > \xi_n^1 \\ |n-1 > \xi_n^2 \end{pmatrix}. \tag{4.37}$$

Teniendo en cuenta que los productos interiores $< n|n-1 >$ y $< n-1|n >$ son nulos, entonces [67]

$$< \psi_n|\psi_n >=< n|n > \xi_n^{1*}\xi_n^1 + < n-1|n-1 > \xi_n^{2*}\xi_n^2. \tag{4.38}$$

Recordando que $< \psi_n|\psi_n >= 1$, es decir, que las funciones de onda están normalizadas y usando (4.36), así como su respectivo complejo conjugado, se tiene que

$$1 = \xi_n^{1*}\xi_n^1 + \left(i\sqrt{\frac{E_n - m}{E_n + m}}\xi_n^{1*}\right)\left(-i\sqrt{\frac{E_n - m}{E_n + m}}\xi_n^1\right), \tag{4.39}$$

donde se ha utilizado que $< n|n >=< n-1|n-1 >= 1$. Operando se llega a que ξ_n^1

$$\xi_n^1 = \sqrt{\frac{E_n + m}{2E_n}}. \tag{4.40}$$

De forma análoga, se determina el valor del espinor ξ_n^2

$$\left(\xi_n^2\right) = -i\sqrt{\frac{E_n - m}{2E_n}}. \tag{4.41}$$

Los espinores ξ_n^1 y ξ_n^2 se pueden escribir como

$$\xi_n^1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E_n+m}{2E_n}} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.42}$$

$$\xi_n^1 = \begin{pmatrix} -i\sqrt{\frac{E_n-m}{2E_n}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De las expresiones (4.42) y (4.43), se observa que el espinor ξ_n^2 es aniquilado para el caso de $n = 0$, lo cual implica que $|\chi_0 >\equiv 0$. De esta manera, la solución general para el oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones está dada por

$$\psi_n(x, y, t) = \sqrt{m\omega}\begin{pmatrix} \xi_n^1 \\ \xi_n^2 \end{pmatrix} \exp\left(-iE_nt - ipy\right). \tag{4.43}$$

En el anexo B, se muestra que las soluciones del oscilador de Dirac son ortogonales.

4.2 *Interpretación física para el oscilador de Dirac libre en (2+1) dimensiones*

En esta sección, siguiendo un procedimiento en el que el potencial lineal se escribe de forma covariante, se muestra que el oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones puede ser visto como un sistema físico constituido por un fermión masivo relativista, cargado electromagnéticamente, restringido a moverse sobre un plano y sobre el cual actúa un campo magnético uniforme interno B_I perpendicular al plano. Esta interpretación física para el oscilador de Dirac bidimensional ya había sido propuesta en [54][55], donde también se muestra que la cantidad $m\omega$ que aparece en el potencial lineal, se puede igualar con eB_I, es decir $m\omega = eB_I$, sin embargo en esta sección se muestra de una manera mas rigurosa que efectivamente el oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones describe al sistema físico mencionado.

Se sabe que una partícula de masa m, que se mueve en una órbita circular de radio R con velocidad tangencial constante v, tiene asociada una aceleración centrípeta cuya magnitud es $\frac{mv^2}{R}$ [57], de tal forma que su dirección va siempre dirigida hacia el centro de la órbita. Por otra parte, también se sabe que la fuerza que ejerce un campo magnético interno sobre una partícula cargada es siempre perpendicular a la dirección de movimiento de la partícula. Teniendo en cuenta lo anterior, ahora se considera que la partícula posee una carga e y que se mueve sobre un plano, de tal forma que la dirección de un campo magnético interno B_I que actúa sobre la partícula es perpendicular al plano. La fuerza magnética sobre la partícula tiene una magnitud $f_B = q\ v\ B_I$ en dirección al centro de la órbita, por lo cual se cumple que [57]

$$evB_I = \frac{mv^2}{R}, \tag{4.44}$$

de donde se puede establecer que la magnitud del campo magnético interno está relacionada con el radio de la orbita circular como

$$eB_I = \frac{mv}{R}. \tag{4.45}$$

Teniendo en cuenta que la frecuencia angular de una partícula con movimiento circular uniforme se puede escribir como $\omega = v/R$, entonces la expresión (4.45) da lugar a

$$eB_I = m\omega. \tag{4.46}$$

Adicionalmente, se puede verificar que el campo magnético interno B_I que actúa sobre la partícula debe ser uniforme si todas las cantidades involucradas en (4.46) son constantes.

Asumiendo que el campo magnético interno es perpendicular al plano definido por la orbita circular que describe la partícula con carga e, es decir [53] [57] [59]

$$\vec{B} = -B_I\hat{z}, \tag{4.47}$$

mientras que el campo eléctrico en todo el espacio es nulo, o sea

$$\vec{E} = 0. \tag{4.48}$$

Considerando que el plano sobre el que se mueve la partícula es lo suficientemente grande como para despreciar los efectos de borde. Si la partícula que interactúa con el campo magnético interno es un fermión relativista, descrito por la ecuación de Dirac, se puede mostrar que la densidad lagrangiana que describe a este sistema es equivalente a la del oscilador de Dirac libre en (2+1) dimensiones. Lo anterior se puede mostrar, como se describe a continuación, si el potencial lineal que define al oscilador de Dirac se escribe en forma covariante.

Se considera el movimiento del fermión desde el punto de vista de un marco de referencia propio del plano, que se denomina sistema de referencia de laboratorio. Los campos eléctrico y magnético del sistema se pueden obtener a partir de cierto campo electromagnético A^μ. Una expresión para A^μ que puede describir la situación física mencionada es [52] [59]

$$A^\mu = (A_0, A_1, A_2) = \rho\,(0, y, -x)\,. \tag{4.49}$$

Ahora se verifica que el campo electromagnético dado por (4.49), conduce consistentemente a los campos eléctrico y magnético definidos en el sistema. Partiendo de (4.49)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}A_0 + \partial_t\vec{A} = -\vec{\nabla}\,(0) + \rho\partial_t\,(y, -x) \Longrightarrow \vec{E} = 0, \tag{4.50}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \Longrightarrow \vec{B} = \rho\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} \Longrightarrow \vec{B} = -B_I\hat{z}. \tag{4.51}$$

donde se ha fijado que $\rho = \frac{B_I}{2}$, con lo cual las expresiones (4.50) y (4.51) son idénticas a (4.47) y (4.48), por lo tanto el campo electromagnético (4.49) reproduce las condiciones de la situación física estudiada. A continuación, se busca que la expresión (4.49) tenga una forma covariante de Lorentz, para lo cual se utiliza la invarianza gauge del campo electromagnético $A_\mu(t,x,y) \to A'_\mu(t,xy) = A_\mu(t,x,y) - \partial_\mu\Lambda(t,x,y)$, por lo tanto se reescribe el campo electromagnético a partir de una función gauge $\Lambda(t,x,y)$ dada por [59]

$$\Lambda(t,x,y) = -\frac{\rho}{4}tx^2 - \frac{\rho}{4}ty^2 - \frac{\rho}{12}t^3. \tag{4.52}$$

de la siguiente manera [59] [65]

$$A^{\mu\prime}_{\text{lab}} = A^{\mu}_{\text{lab}} - \partial_\mu\Lambda.$$

En primer lugar, reemplazando (4.49) y (4.52) en la anterior expresión para el caso $\mu = 0$, se obtiene la componente temporal

$$\begin{aligned} A^{0\prime}_{\text{lab}} &= A^{0}_{\text{lab}} - \partial_0\Lambda, \\ &= 0 - \partial_t\left[-\frac{\rho}{4}tx^2 - \frac{\rho}{4}ty^2 - \frac{1}{12}\rho t^3\right], \end{aligned}$$

$$A^{0\prime}_{\text{lab}} = \frac{\rho}{4}\left(x^2 + y^2 + t^2\right), \tag{4.53}$$

mientras que las componentes espaciales están dadas por

$$\begin{aligned} A^{1\prime}_{\text{lab}} &= A^{0}_{\text{lab}} - \partial_1\Lambda, \\ &= \rho y - \partial_x\left(-\frac{\rho}{4}tx^2 - \frac{\rho}{4}ty^2 - \frac{1}{12}\rho t^3\right), \end{aligned}$$

$$A^{1\prime}_{\text{lab}} = \rho y + \frac{1}{2}\rho tx. \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned} A^{2\prime}_{\text{lab}} &= A^{2}_{\text{lab}} - \partial_2\Lambda, \\ &= -\rho x - \partial_y\left(-\frac{\rho}{4}tx^2 - \frac{\rho}{4}ty^2 - \frac{1}{12}\rho t^3\right), \end{aligned}$$

$$A^{2\prime}_{\text{lab}} = -\rho x + \frac{1}{2}\rho ty. \tag{4.55}$$

Teniendo en cuenta las expresiones (4.53), (4.54) y (4.55), entonces el nuevo campo electromagnético es

$$A^{\mu\prime}_{\text{lab}} = \rho\left[-\frac{1}{4}\left(x^2 + y^2 + t^2\right), y + \frac{1}{2}tx, -x + \frac{1}{2}ty\right]. \tag{4.56}$$

A continuación, se verifica que (4.56) conduce consistentemente a las condiciones físicas iniciales del sistema. Por lo anterior, los campos eléctrico y magnético generados por (4.56) son

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= -\vec{\nabla}\phi' - \partial_t\vec{A}', \\ &= \frac{\rho}{4}\vec{\nabla}\left(x^2 + y^2 + t^2\right) - \rho\partial_t\left(y + \frac{1}{2}tx, -x + \frac{1}{2}ty\right), \\ &= \frac{\rho}{4}(2x, 2y) - \rho\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right), \end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\vec{E}' = 0. \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= \vec{\nabla}\times\vec{A}', \\ &= \rho\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y+\frac{1}{2}tx & -x+\frac{1}{2}ty & 0 \end{vmatrix}, \\ &= \rho\left(-1-1\right)\hat{z}, \\ &= -2\rho\hat{z}, \end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\vec{B}' = -B_I\hat{z}. \tag{4.60}$$

Se observa que las expresiones (4.58) y (4.60) son iguales a las expresiones (4.47) y (4.48), por lo cual se puede afirmar que el campo electromagnético transformado (4.56) reproduce la situación física inicial. A continuación, se realiza una transformación de coordenadas para pasar del sistema de referencia de laboratorio al sistema de referencia del fermión, introduciendo la 3-velocidad, $u^\mu = \left(1,\vec{0}\right)$, para reescribir el campo electromagnético como [59]

$$A^{\mu\prime} = \frac{\rho}{4}\left[2\left(u\cdot x\right)x^\mu - x^2u^\mu\right],$$

con lo cual el campo electromagnético transformado es

$$A^{\mu\prime} = \frac{\rho}{4}\left[2tx^\mu - \left(t^2-x^2-y^2\right)u^\mu\right], \tag{4.61}$$

lo que implica que las componentes temporal y espaciales son

$$A^{0\prime} = \frac{\rho}{4}\left(x^2+y^2+t^2\right), \qquad A^{1\prime} = \frac{1}{2}\rho xt, \qquad A^{2\prime} = \frac{1}{2}\rho ty, \tag{4.62}$$

las cuales concuerda con las expresiones (4.53), (4.54) y (4.55). Por ser ahora el campo electromagnético explícitamente covariante de Lorentz, entonces el tensor campo electromagnético asociado es

$$F_{\mu\nu} = \rho\left(u^\mu x^\nu - u^\nu x^\mu\right),$$

siendo las componentes no nulas de este tensor:

$$F_{01} = \rho x, \qquad F_{10} = -\rho x, \qquad F_{02} = \rho y, \qquad F_{20} = -\rho y. \tag{4.63}$$

En la referencia [59] se muestra que el término de interacción de la densidad lagrangiana del oscilador de Dirac libre en (3+1) dimensiones, que proviene de un correspondiente potencial líneal, se puede escribir en forma covariante como $\frac{1}{2}m\omega\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\psi(x)$, lo cuál también resulta válido para el caso (2+1) dimensional. Siguiendo un procedimiento similar al señalado en [59], se puede mostrar que el término de interacción covariante de la densidad lagrangiana que describe al sistema constituido por un fermión masivo, con carga e, restringido a moverse en el plano xy y que interactúa con un campo magnético interno perpendicular al plano, se puede escribir como $e\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\psi(x)$, donde $F_{\mu\nu}$ está dado por (4.63), siendo $\rho = B_I/2$
Por lo anterior, la densidad Lagrangiana del oscilador de Dirac libre en (2+1) dimensiones está dada por

$$\mathcal{L}_{OD} = \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi + e\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi F_{\mu\nu}, \tag{4.64}$$

la cual se puede reescribir en la forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{OD} &= \bar{\psi}\left(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^1\partial_1 + i\gamma^2\partial_2 - m\right)\psi + \frac{eB_I}{2}\bar{\psi}\beta\left(2i\gamma^0\gamma^1 x + 2i\gamma^0\gamma^2 y\right)\psi, \\
&= \psi^\dagger\gamma^0\left(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^1\partial_1 + i\gamma^2\partial_2 - m\right)\psi + \frac{eB_I}{2}\bar{\psi}\beta\left(2i\gamma^0\gamma^1 x + 2i\gamma^0\gamma^2 y\right)\psi, \\
&= i\psi^\dagger\dot{\psi} + i\psi^\dagger\alpha_j\partial_j\psi - m\psi^\dagger\beta\psi + eB_I\psi^\dagger\beta\alpha_j r_j\psi, \qquad j = 1, 2.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

A partir de la densidad lagrangiana (4.65), usando las ecuación de Euler-Lagrange para el campo adjunto $\psi^\dagger$, se obtiene la ecuación del oscilador de Dirac libre (2+1) dimensional

$$i\dot{\psi} = \left[\alpha_j\left(p_j - ieB_I\beta x_j\right) + \beta m\right]\psi, \tag{4.66}$$

que es igual a la obtenida en (4.3), si se realiza la identificación $eB_I = m\omega$.

4.3 Cuantización canónica del campo del oscilador de Dirac libre en (2+1) dimensiones

A continuación se lleva a cabo procedimiento de cuantización canónica para el campo del oscilador de Dirac libre en (2+1) dimensiones similar a desarrollado en [17]. Primero se calculan los momentos canónicamente conjugados, los cuáles están dados por

$$p_{\hat{\psi}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\hat{\psi}}} \longrightarrow p_{\hat{\psi}} = i\hat{\psi}^\dagger, \tag{4.67}$$

$$p_{\hat{\psi}^\dagger} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\hat{\psi}}^\dagger} \longrightarrow p_{\hat{\psi}^\dagger} = 0. \tag{4.68}$$

Ahora, se puede obtener la densidad hamiltoniana mediante una transformada de Legendre sobre la densidad lagrangiana, es decir

$$\hat{\mathcal{H}} = \dot{\hat{\psi}}^\dagger\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\hat{\psi}}^\dagger} + \dot{\hat{\psi}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\hat{\psi}}} - \mathcal{L}. \tag{4.69}$$

Substituyendo (4.65), (4.68) y (4.69) en (4.69), se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \dot{\hat{\psi}}i\hat{\psi}^\dagger - \left[i\hat{\psi}^\dagger\dot{\hat{\psi}} + i\hat{\psi}^\dagger\alpha_j\partial_j\hat{\psi} - m\hat{\psi}^\dagger\beta\hat{\psi} + eB\hat{\psi}^\dagger\beta\alpha_j x_j\hat{\psi}\right], \\
&= -i\hat{\psi}^\dagger\alpha_j\partial_j\hat{\psi} + m\hat{\psi}^\dagger\beta\hat{\psi} - im\omega\hat{\psi}^\dagger\beta\alpha_j x_j\hat{\psi}, \\
&= \hat{\psi}^\dagger\left[-i\alpha_j\left(\partial_j + m\omega\beta x_j\right) + m\beta\right]\hat{\psi}.
\end{aligned} \tag{4.70}$$

La expresión (4.70) corresponde a la densidad Hamiltoniana para el oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones. Ahora para realizar la cuantización del campo de este sistema físico, se requieren las relaciones de anticonmutación de Jordan-Wigner para los campos fermiónicos

$$\{\hat{\psi}_\alpha(x,y,t), \hat{\psi}^\dagger_\beta(x',y',t)\} = \delta_{\alpha\beta}\delta\left(x - x'\right)\delta\left(y - y'\right), \tag{4.71}$$

$$\{\hat{\psi}_\alpha(x,y,t), \hat{\psi}_\beta(x',y',t)\} = \{\hat{\psi}_\alpha(x,y,t), \hat{\psi}^\dagger_\beta(x',y',t)\} = \{\hat{\psi}^\dagger_\alpha(x,y,t), \hat{\psi}^\dagger_\beta(x',y',t)\} = 0. \tag{4.72}$$

Utilizando las relaciones de anticonmutación (4.72) y (4.73), el operador Hamiltoniano se puede escribir de la siguiente manera

$$\hat{H} = \int d^2x\ \psi^\dagger \left[-i\alpha_j \left(\partial_j + im\omega\beta x_j\right) + m\beta\right]\psi. \tag{4.73}$$

Para continuar con el proceso de cuantización canónica del campo del oscilador de Dirac libre, se escriben las funciones de onda del oscilador de Dirac libre en (2+1) dimensiones [17][47]

$$\psi_1(x) = \begin{cases} N_1 \exp\left(-\frac{x}{2}\right) x^{k/2} L_n^{k-1/2}(x) & ,\text{para } k > 0 \\ 2iN_2 \frac{(m\bar{\omega})^{1/2}}{E+m} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) x^{(k+1)/2} L_n^{1/2-k}(x) & ,\text{para } k < 0 \end{cases} \tag{4.74}$$

$$\psi_2(x) = \begin{cases} 2iN_1 \frac{(m\bar{\omega})^{1/2}}{E+m} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) x^{(k+1)/2} L_{n-1}^{k+1/2}(x) & ,\text{para } k > 0 \\ N_2 \exp\left(-\frac{x}{2}\right) x^{-k/2} L_n^{-k-1/2}(x) & ,\text{para } k < 0, \end{cases} \tag{4.75}$$

$$x = m\bar{\omega}r^2, \qquad k = N + \frac{1}{2}, \qquad \bar{\omega} = \omega + \frac{eB}{2m}, \tag{4.76}$$

donde N_1 y N_2 son las constantes de normalización de las funciones de onda. Las funciones de onda (4.74) y (4.75) se pueden reescribir de la siguiente manera

$$\psi^{(A)}(x) = N_1 \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \begin{pmatrix} x^{k/2} L_n^{k-1/2}(x) \\ 2i\frac{(m\bar{\omega})^{1/2}}{E+m} x^{(k+1)/2} L_{n-1}^{k+1/2}(x) \end{pmatrix},\ \text{para } k > 0, \tag{4.77}$$

$$\psi^{(B)}(x) = N_2 \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \begin{pmatrix} 2i\frac{(m\bar{\omega})^{1/2}}{E+m} x^{(1-k)/2} L_n^{1/2-k}(x) \\ x^{-k/2} L_n^{-k-1/2}(x) \end{pmatrix},\ \text{para } k < 0. \tag{4.78}$$

A continuación, se pretende expresar los operadores de campo del oscilador de Dirac como una expansión en series de Fourier. Para este caso, se observa que las soluciones están escritas en términos de los polinomios de Laguerre que forman un conjunto de funciones completas y ortogonales [47][82]. De esta manera, la expansión en series de Fourier de las soluciones de la ecuación del oscilador de Dirac está dada por

$$\hat{\psi}(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k-1/2}^{-k+1/2} \hat{b}_{n,k}\psi_{n,k}(x) \exp\left(-iE_{n,k}t\right), \tag{4.79}$$

o de manera equivalente

$$\hat{\psi}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\mu} \hat{b}_{n,\mu}\psi_{n,\mu}(x) \exp\left(-iE_n t\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\mu} \hat{b}_{-n,\mu}\psi_{-n,\mu}(x) \exp\left(iE_n t\right), \tag{4.80}$$

donde $\mu = \pm(k - 1/2)$. Usando las relaciones de anticonmutación (4.72) y (4.73) se puede reescribir el operador Hamiltoniano como

$$\hat{H} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{n,\mu}\hat{b}^\dagger_{n,\mu}\hat{b}_{n,\mu}. \tag{4.81}$$

El operador Hamiltoniano (4.81) puede ser reescrito dividiendo las contribuciones positivas y negativas de la energía y teniendo en cuenta que el número cuántico μ genera dos tipos diferentes de espectro de energía dependiendo del signo de éste. De esta manera se obtiene que

$$\hat{H} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\mu} E_{n,\mu}\hat{b}^\dagger_{n,\mu}\hat{b}_{n,\mu} - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\mu} E_n\hat{b}^\dagger_{-n,\mu}\hat{b}_{-n,\mu}. \tag{4.82}$$

Observamos que los valores propios del operador Hamiltoniano pueden tomar valores naegativos sin ninguna restricción debido a que es posible la creación de partículas de energía negativa [47]. Usando la imagen del mar de Dirac, podemos definir el estado de vacío ($|0>$) para el campo del oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones de la siguiente forma

$$|0>=\prod_{n=-\infty}^{\infty}\prod_{\mu}\hat{b}^{\dagger}_{-n,\mu}|0_D> . \tag{4.83}$$

Si aplicamos el operador creación de una partícula de energía negativa sobre el estado de vacío se obtiene que

$$\hat{b}^{\dagger}_{-m,\mu}|0>=\prod_{n=-\infty}^{\infty}\prod_{\mu}\hat{b}_{-m,\mu}\hat{b}_{-n,\mu}|0_D>=0, \tag{4.84}$$

lo cual implica que no es posible crear nuevos fermiones de energía negativa porque todos los estados de energía negativa están llenos. Teniendo en cuenta lo anterior se puede reescribir el operador Hamiltoniano usando (4.84)

$$\hat{H}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\mu}E_{n,\mu}\hat{b}^{\dagger}_{n,\mu}\hat{b}_{n,\mu}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\mu}E_{n,\mu}\left(\hat{b}_{-n,\mu}\hat{b}^{\dagger}_{-n,\mu}-1\right). \tag{4.85}$$

Se puede observar en la expresión (4.85) que esta cantidad es divergente. Sin embargo, ningún operador físico puede ser divergente; para "removerla" redefinimos el operador Hamiltoniano sustrayendo de (4.85) la energía del estado de vacío, es decir

$$\hat{H}'=\hat{H}-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\mu}E_{n,\mu}. \tag{4.86}$$

De esta manera el Hamiltoniano se escribe como

$$\hat{H}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\mu}E_{n,\mu}\hat{b}^{\dagger}_{n,\mu}\hat{b}_{n,\mu}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\mu}E_{-n,\mu}\hat{b}_{-n,\mu}\hat{b}^{\dagger}_{-n,\mu}. \tag{4.87}$$

En la expresión (4.87) se cambió $\hat{H}'$ por $\hat{H}$ por conveniencia. Por otra parte, se puede notar que el Hamiltoniano dado por la anterior expresión ya no presenta el inconveniente de la divergencia ya que ha sido definido positivamente [65]. Ahora, presentramos las siguientes transformaciones canónicas que permitan distinguir de forma clara los operadores entre partículas y antipartículas [17] [65]

$$\hat{b}^{\dagger}_{n}=\hat{c}^{\dagger}_{n},\quad \hat{b}_{n}=\hat{c}_{n},\quad \hat{b}_{-n}=\hat{d}^{\dagger}_{n},\quad \hat{b}^{\dagger}_{-n}=\hat{d}_{n}. \tag{4.88}$$

De la expresión anterior se identifica $\hat{d}_n$ y $\hat{d}^{\dagger}_n$ como los operadores destrucción y creación de antipartículas, respectivamente. Además, estos operadores obedecen la siguiente relación de anticonmutación

$$\{\hat{d}_n,\hat{d}^{\dagger}_m\}=\delta_{nm}. \tag{4.89}$$

Usando la notación para los operadores creación y destrucción de partículas y antipartículas se puede reescribir la expansión de Fourier (4.80) para el operador de campo como

$$\hat{\psi}(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\mu}\hat{c}_{n,\mu}u_{n,\mu}(x)\exp\left(-iE_{n,\mu}t\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\hat{d}^{\dagger}_{n,\mu}v_{n,\mu}(x)\exp\left(iE_{n,\mu}t\right). \tag{4.90}$$

Mientras que el operador Hamiltoneano para el campo de Dirac del oscilador de Dirac se puede escribir como

$$\hat{H}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\mu}E_{n,\mu}\hat{c}^{\dagger}_{n,\mu}\hat{c}_{n,\mu}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\mu}E_{n,\mu}\hat{d}^{\dagger}_{n}\hat{d}_{n}, \tag{4.91}$$

o de forma equivalente como

$$\hat{H}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\mu}E_{n,\mu}\hat{n}^{(c)}_{n,\mu}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\mu}E_{n,\mu}\hat{n}^{(d)}_{n,\mu}, \tag{4.92}$$

donde $\hat{n}^{(c)}_{n,\mu}$ y $\hat{n}^{(d)}_{n,\mu}$ son los operadores número para partícula y antipartícula, respectivamente. Cada uno de ellos está definido como [17]

$$\hat{n}^{(c)}_{n,\mu} = \hat{c}^{\dagger}_{n,\mu}\hat{c}_{n,\mu}, \qquad \hat{n}^{(d)}_{n,\mu} = \hat{d}^{\dagger}_{n}\hat{d}_{n}. \tag{4.93}$$

Usando, de nuevo, una expansión en series de Fourier se pueden obtener otras cantidades físicas importantes. Por ejemplo, el operador carga definido como [65]

$$\hat{Q} = e\int d^2x\ \psi^{\dagger}(x,y,t)\psi(x,y,t). \tag{4.94}$$

De manera análoga al operador Hamiltoneano, se obtiene que el operador carga se puede escribir como

$$\hat{Q} = e\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\mu}\left(\hat{b}^{\dagger}_{n,\mu}\hat{b}_{n,\mu} - \hat{c}^{\dagger}_{n,\mu}\hat{c}_{n,\mu}\right). \tag{4.95}$$

De esta manera se finalizado el proceso de cuantización del campo del oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones debido a que además de cuantizar las soluciones de este sistema físico, también se ha caracterizado su Hamiltoneano de tal manera que podamos describir el proceso de creación y destrucción de partículas y antipartículas teniendo en cuenta la manera en que actúan éstos sobre el campo y su complejo conjugado.

4.4 *Simetría del oscilador de Dirac libre en (2+1) dimensiones*

En esta sección se muestra que la densidad lagrangiana del oscilador de Dirac libre en (2+1) dimensiones presenta simetría gauge global $U(1)$. Para este sistema, no existe simetría quiral global $U(1)_L \times U(1)_R$ dado que el término de interacción mezcla las componentes de quiralidad, lo cual da lugar a que se rompa explícitamente esta simetría quiral global.

4.4.1 Simetría U(1) global

La densidad lagrangiana del oscilador de Dirac libre en (2+1) dimensiones dada por (4.65), se puede reescribir de la siguiente manera

$$\mathcal{L}_{OD} = \bar{\psi}(x)\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi(x) + eB_I\bar{\psi}(x)\gamma^0\gamma^j r_j\psi(x), \quad j = 1,2, \tag{4.96}$$

la cual es invariante bajo transformaciones del grupo $U(1)$ global de los campos de materia $\psi(x)$ y antimateria $\bar{\psi}(x)$ de la forma

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp\left[-i\theta\right]\psi(x), \qquad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x) = \exp\left[i\theta\right]\bar{\psi}(x), \qquad \theta = \text{constante}, \tag{4.97}$$

donde $x = (y, z, t)$ representa un punto en el espacio-tiempo (2+1) dimensional. Se observa que la densidad lagrangiana del oscilador de Dirac libre transformada satisface

$$\mathcal{L}'_{OD} \;=\; \bar{\psi}'(x)\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi'(x) + eB_I\bar{\psi}'(x)\gamma^0\gamma^j r_j\psi'(x) = \mathcal{L}_{OD}, \tag{4.98}$$

es decir, se tiene una invariacia bajo transformaciones $U(1)$ globales de los campos de materia $\psi(x)$ y antimateria $\bar{\psi}(x)$, lo cual indica que el oscilador de Dirac libre presenta una simetría $U(1)$ global.

4.4.2 Ruptura explícita de la simetría quiral global $U(1)_L \times U(1)_R$ para el oscilador de Dirac libre sin masa

La densidad lagrangiana del oscilador de Dirac libre sin masa está dada por

$$\mathcal{L}_{ODo} = \bar{\psi}(x) i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) + eB_I\bar{\psi}(x)\gamma^0\gamma^j r_j \psi(x), \quad j = 1, 2, \tag{4.99}$$

Escribiendo el campo de Dirac $\psi(x)$ como $\psi(x) = \psi_R(x) + \psi_L(x)$, entonces la densidad lagrangiana (4.99) queda escrita como

$$\mathcal{L}_{ODo} = \bar{\psi}_R(x) i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_R(x) + \bar{\psi}_L(x) i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_L(x) + eB_I\bar{\psi}_R(x)\gamma^0\gamma^j r_j \psi_L(x) + eB_I\bar{\psi}_L(x)\gamma^0\gamma^j r_j \psi_R(x), \tag{4.100}$$

donde se ha tenido en cuenta que los términos $\bar{\psi}_R(x)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_L(x)$, $\bar{\psi}_L(x)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_R(x)$, $\bar{\psi}_R(x)\gamma^0\gamma^j\psi_R(x)$ y $\bar{\psi}_L(x)\gamma^0\gamma^j\psi_L(x)$ se anulan, dado que $P_R P_L = P_L P_R = 0$. Se prueba a continuación que la densidad lagrangiana (4.100) no presenta simetría quiral global $U(1)_L \times U(1)_R$, puesto que el término de interacción no es invariante bajo transformaciones de fase globales de las proyecciones de quiralidad de los campos de materia y antimateria de la forma

$$\psi_L(x) \to \psi'_L(x) = \exp\left[-i\theta_L\right]\psi_L(x); \qquad \psi_R(x) \to \psi'_R(x) = \exp\left[-i\theta_R\right]\psi_R(x), \tag{4.101}$$

$$\bar{\psi}_L(x) \to \bar{\psi}'_L(x) = \exp\left[i\theta_L\right]\bar{\psi}_L(x); \qquad \bar{\psi}_R(x) \to \bar{\psi}'_R(x) = \exp\left[i\theta_R\right]\bar{\psi}_R(x), \tag{4.102}$$

donde θ_R y θ_L son parametros reales diferentes, asociados respectivamente con los grupos de simetría $U(1)_R$ y $U(1)_L$. Para probar la no existencia de la mencionada simetría, primero se escribe la densidad lagrangiana transformada como

$$\mathcal{L}_{ODo} = \bar{\psi}'_R(x) i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi'_R(x) + \bar{\psi}'_L(x) i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi'_L(x) + eB_I\bar{\psi}'_R(x)\gamma^0\gamma^j r_j \psi'_L(x) + eB_I\bar{\psi}'_L(x)\gamma^0\gamma^j r_j \psi'_R(x), \tag{4.103}$$

Substituyendo (4.101) y (4.102) en la anterior expresión, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{ODo} &= \bar{\psi}_R(x) i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_R(x) + \bar{\psi}_L(x) i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_L(x) + eB_I\left(\exp\left[i\theta_R - i\theta_L\right]\bar{\psi}_R(x)\gamma^0\gamma^j r_j\psi_L(x)\right) \\ &+ eB_I\left(\exp\left[i\theta_L - i\theta_R\right]\bar{\psi}_L(x)\gamma^0\gamma^j r_j\psi_R(x)\right) \neq \mathcal{L}_{ODo}, \end{aligned} \tag{4.104}$$

debido a que $\theta_R \neq \theta_L$, con lo cual $\theta_R - \theta_L \neq 0$ y $\theta_L - \theta_R \neq 0$. Por lo anterior, se obtiene que un oscilador de Dirac sin masa no presenta una simetría quiral global $U(1)_R \times U(1)_L$, dado que el término de interacción rompe explícitamente esta simetría quiral global.

5. OSCILADOR DE DIRAC EN (2+1) DIMENSIONES INTERACTUANDO CON UN CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME EXTERNO Y PERPENDICULAR AL PLANO DE MOVIMIENTO

En este capítulo se estudia un sistema constituido por un fermión masivo de espín 1/2 relativista, con carga e, restringido a moverse en un plano y que interactúa con un campo magnético uniforme externo perpendicular al plano, además de estar sometido a la acción de un potencial lineal. En otras palabras, este sistema físico corresponde a un oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones interactuándo con un campo magnético uniforme externo perpendicular al plano. Se calcula tanto su espectro de energía como sus funciones de onda de probabilidad. Asimismo se estudia la densidad lagrangiana que genera la ecuación de Dirac asociada a este sistema físico. Finalmente, se muestra que aunque este sistema posée simetría gauge local $U(1)$, no presenta simetría quiral local $U(1)_R \times U(1)_L$, esto último para el caso del oscilador de Dirac sin masa, dado que el término de interacción asociado al potencial líneal rompe explícitamente esta simetría quiral local.

5.0.1 Solución de la ecuación del oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones interactuando con un campo magnético uniforme externo

La ecuación del oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones interactuándo con un campo magnético uniforme externo tiene la forma

$$\left[i\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}+ieA_{\mu}(x,y)\right)-m+im\omega\gamma^{j}r_{j}\right]\psi(x,y,t)=0, \qquad \mu=0,1,2, \qquad j=1,2. \tag{5.1}$$

donde $r_1 = x$, $r_2 = y$, m es la masa del fermión, ω es la frecuencia del oscilador de Dirac y γ^{μ} son las matrices de Dirac. La cantidad $m\omega$ se puede escribir como $m\omega = eB_I$, siendo B_I es el campo magnético interno [54] [55]. La razón de lo anterior, es que el oscilador de Dirac libre en (2+1) dimensiones describe un sistema constituido por un fermión relativista masivo, con carga e, restringido a moverse en un plano e interactuando con un campo magnético interno B_I perpendicular al plano, tal como fue mostrado en el capítulo anterior.

Para el problema en (2+1) dimensiones considerado, existen dos representaciones de las matrices de Dirac que se pueden elegir como [36]

$$\gamma^0=\sigma^3, \qquad \gamma^1=i\sigma^1, \qquad \gamma^2=i\sigma^2, \tag{5.2}$$

donde las σ_i son las matrices de Pauli [65]. Utilizando las matrices (5.2) se puede reescribir de forma explícita la expresión (5.1) en (2+1) dimensiones

$$i\partial_0\psi(x,y,t)=\left[\alpha_1p_1+\alpha_2p_2+e\mathbf{1}A_0-e\alpha_2A_1-e\alpha_2A_2+\beta m-im\omega\alpha_1\beta x-im\omega\alpha_2\beta y\right]\psi(x,y,t), \tag{5.3}$$

en donde se ha utilizado la idempotencia de las matrices gamma, es decir, $\left(\gamma^0\right)^2=\mathbf{1}$ y la definición del operador momento lineal, $p_j=-i\frac{\partial}{\partial x_j}$. La ecuación (5.3) se puede escribir de forma más compacta como

$$i\partial_0\psi(x,y,t)=\left[\alpha_jp_j+e\mathbf{1}A_0-e\alpha_jA_j+\beta m-im\omega\alpha_j\beta x_j\right]\psi(x,y,t). \tag{5.4}$$

La función de onda $\psi(x,y,t)$ se puede escribir en forma espinorial como

$$\psi(x,y,t)=\exp\left(-iEt+ipy\right)\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Sustituyendo (5.5) en (5.3) entonces

$$i\partial_0\left[\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\end{pmatrix}\right]=\left[\alpha_1 p_1+\alpha_1 p+e\mathbf{1}A_0-e\alpha_1 A_1-e\alpha_2 A_2+\beta m-im\omega\alpha_1\beta x-im\omega\alpha_2\beta y\right]\left[\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\end{pmatrix}\right]. \tag{5.6}$$

Para un campo magnético perpendicular al plano xy, $\vec{B}=B\hat{z}$, elegimos un potencial electromagnético de la forma

$$A_\mu=\left(0,\frac{B_I y}{2},Bx+\frac{B_I x}{2}\right). \tag{5.7}$$

Introduciendo el campo electromagnético (5.7) en (5.6) se tiene que

$$i\partial_0\left[\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\end{pmatrix}\right]=\left[\alpha_1 p_1+\alpha_2 p-e\alpha_1\frac{B_I y}{2}-e\alpha_3\left(Bx+\frac{B_I x}{2}\right)+\beta m-im\omega\alpha_1\beta x-im\omega\alpha_2\beta y\right]\left[\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\end{pmatrix}\right]. \tag{5.8}$$

La anterior expresión se puede reescribir de forma matricial teniendo en cuenta que $p_1=-i\frac{d}{dx}$ como

$$-\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}-e\left(B+B_I\right) & 0\\ 0 & e\left(B+B_I\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-p & E+m\\ -E+m & p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

5.1 Espectro de energía y funciones de onda de probabilidad

Pare determinar el espectro de energía del oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones interactuando con un campo magnético uniforme externo, se retoma el sistema de ecuaciones (5.9). Sin embargo, los valores tanto del espectro de energía como de las funciones de onda dependen del valor del campo magnético total, ya que el término $e\left(B+B_I\right)>0$ o $e\left(B+B_I\right)<0$. También depende del tipo de representación que se elija para las matrices gamma. En el caso de que $e\left(B+B_I\right)>0$, en la representación A, el espectro de energía está dado por [36]

$$E_n^{(1)}=\pm\sqrt{m^2+2|eB+eB_I|n},\qquad E_n^{(2)}=\pm\sqrt{m^2+2|eB+eB_I|(n+1)}, \tag{5.10}$$

mientras que las funciones de onda para este caso son

$$\psi_+^A\left(x,y,t\right)=N_n^+\exp\left(-i|E_n^+|t+ipy\right)\begin{pmatrix}\left(|E_n^+|+m\right)I^+(n,p,x)\\ -\sqrt{2|eB+eB_I|n}I^+(n-1,p,x)\end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

$$\psi_-^A\left(x,y,t\right)=N_n^+\exp\left(-i|E_n^+|t-ipy\right)\begin{pmatrix}\sqrt{2|eB+eB_I|n}I^+(n,-p,x)\\ \left(|E_n^+|+m\right)I^+(n-1,-p,x)\end{pmatrix}, \tag{5.12}$$

en donde [36]

$$N_n^\pm=\frac{1}{\sqrt{2|E_n^\pm|\left(|E_n^\pm+m\right)}},\qquad E_n^\pm=\sqrt{m^2+2|eB+eB_I|n}, \tag{5.13}$$

$$I^\pm(n,x,p)=\left(\frac{|eB\pm eB_I|}{\pi}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n\left[\sqrt{|eB\pm eB_I}\left(x-\frac{p}{|eB\pm eB_I}\right)\right]\exp\left[\left(-\frac{|eB\pm eB_I}{2}\right)\left(x-\frac{p}{eB\pm eB_I}\right)^2\right],$$

e $I\left(n=-1,p,y\right)=0$. Ahora, para el caso de $\left(eB+eB_I\right)<0$, el espectro de energía y las funciones están dadas por

$$E_n^{(1)}=\pm\sqrt{m^2+2|eB+eB_I|(n+1)},\qquad E_n^{(2)}=\pm\sqrt{m^2+2|eB+eB_I|n}, \tag{5.14}$$

$$\psi_+^A(x,y,t) = N_n^+ \exp\left(-i|E_n^+|t + ipy\right)\begin{pmatrix} -\sqrt{2|eB+eB_I|n}I^+(n,p,x) \\ \left(|E_n^+|+m\right)I^+\left(n-1,p,x\right)\end{pmatrix}, \tag{5.15}$$

$$\psi_-^A(x,y,t) = N_n^+ \exp\left(i|E_n^+|t - ipy\right)\begin{pmatrix} \left(|E_n^+|+m\right)I^+(n,-p,x) \\ \sqrt{2|eB+eB_I|n}I^+(n-1,-p,x)\end{pmatrix}. \tag{5.16}$$

A continuación se obtiene el espectro de energía, para el caso de la representación irreducible B ($s=-1$). En este caso el potencial electromagnético tiene la forma

$$A_\mu = \left(0, -\frac{B_I y}{2}, Bx - \frac{B_I x}{2}\right). \tag{5.17}$$

Con esta representación, se tiene la siguiente ecuación escrita de forma matricial

$$-\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}\psi_1^B(x)\\ \psi_2^B(x)\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}-e\left(B-B_I\right) & 0 \\ 0 & e\left(B-B_I\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1^B(x)\\ \psi_2^B(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-p & E-m \\ -E-m & p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1^B(x)\\ \psi_2^B(x)\end{pmatrix} \tag{5.18}$$

.

De nuevo, es necesario considerar casos separados. En primer lugar para $e(B-B_I)>0$, se obtiene el espectro de energía y funciones de onda dadas por

$$E_n^{(1)} = \pm\sqrt{m^2 + 2|eB - eB_I|n}, \qquad E_n^{(2)} = \pm\sqrt{m^2+2|eB+eB_I|(n+1)}, \tag{5.19}$$

$$\psi_+^B(x,y,t) = N_n^- \exp\left(-i|E_n^-|t + ipy\right)\begin{pmatrix} -\sqrt{2|eB-eB_I|n}I^-(n,p,x) \\ \left(|E_n^-|+m\right)I^-(n,p,x)\end{pmatrix}, \tag{5.20}$$

$$\psi_N^B(x,y,t) = N_n^- \exp\left(i|E_n^-|t - ipy\right)\begin{pmatrix} \left(|E_n^-|+m\right)I^-(n,-p,x) \\ \sqrt{2|eB-eB_I|n}I^-(n-1,-p,x)\end{pmatrix}. \tag{5.21}$$

Por otra parte, para el caso de $e(B-B_I)<0$, el espectro de energía y las funciones de onda son [36]

$$E_n^{(1)} = \pm\sqrt{m^2+2|eB-eB_I|(n+1)}, \qquad E_n^{(2)} = \pm\sqrt{m^2+2|eB-eB_I|n}, \tag{5.22}$$

$$\psi_+^B(x,y,t) = N_n^- \exp\left(-i|E_n|t + ipy\right)\begin{pmatrix} \left(|E_n^-|+m\right)I^-(n,p,x) \\ -\sqrt{2|eB-eB_I|n}I^-(n-1,p,x)\end{pmatrix}, \tag{5.23}$$

$$\psi_-^{(B)}(x,y,t) = N_n^- \exp\left(i|E_n|t - ipy\right)\begin{pmatrix} \sqrt{2|eB-eB_I|n}I^-(n,-p,x) \\ \left(|E_n^-|+m\right)I^-(n-1,-p,x)\end{pmatrix}. \tag{5.24}$$

5.2 Densidad lagrangiana de la QED+OD en (2+1) dimensiones y su simetría

En esta sección se presenta la densidad lagrangiana del oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones interactuándo con un campo magnético uniforme externo y se muestra que el sistema descrito por esta densidad lagrangiana posee simetría gauge local $U(1)$, pero no presenta simetría quiral local $U(1)_R \times U(1)_L$, esta última para el caso de un oscilador de Dirac sin masa, dado que el término de interacción asociado con el potencial lineal rompe explícitamente esta simetría quiral local debido a que este término mezcla las componentes de quiralidad.

5.2.1 Simetría gauge local U(1)

Se puede probar que la ecuación de Dirac interactuante dada por (5.1), para el caso en que $\psi(x)$ representa un campo de Dirac, se puede derivar usando la ecuación de Euler-Lagrange del campo de antimateria $\bar{\psi}(x)$, a partir de la densidad lagrangiana de la QED+OD definida por

$$\mathcal{L}_{QED+OD} = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_{YM} + eB_I\bar{\psi}(x)\gamma^0\gamma^j r_j\psi(x), \quad j = 1, 2, \tag{5.25}$$

donde $\mathcal{L}_D$ es la densidad lagrangiana de Dirac libre dada por (2.94), mientras que $\mathcal{L}_I$ es la densidad lagrangiana de interacción dada por 3.42 y $\mathcal{L}_{YM}$ es la densidad lagrangiana de Yang-Mills abeliana dada por (3.43). La densidad lagrangiana de la QED+OD, definida por (5.25), es invariante bajo transformaciones gauge locales del grupo $U(1)$ de los campos de materia $\psi(x)$, antimateria $\bar{\psi}(x)$ y radiación $A_\mu(x)$ de la forma

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp\left[-i\theta(x)\right]\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x) = \exp\left[i\theta(x)\right]\bar{\psi}(x), \tag{5.26}$$

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x), \tag{5.27}$$

donde $x = (y, z, t)$ representa un punto en el espacio-tiempo (2+1) dimensional. Para probar la mencionada invariancia, primero se escribe la densidad lagrangiana de la QED+OD transformada en la forma

$$\mathcal{L}'_{QED+OD} = \mathcal{L}'_D + \mathcal{L}'_I + \mathcal{L}'_{YM} + eB_I\bar{\psi}'(x)\gamma^0\gamma^j r_j\psi'(x), \quad j = 1, 2, . \tag{5.28}$$

Después de substituir los campos de materia, antimateria y radiación transformados dados por (5.26) y (5.27) en (5.28), se obtiene

$$\mathcal{L}'_{QED+OD} = \mathcal{L}_{QED} + eB_I\bar{\psi}(x)\gamma^0\gamma^j r_j\psi(x), \quad j = 1, 2, \tag{5.29}$$

lo cual indica la invariancia de la densidad lagrangiana de la QED+OD bajo transformaciones gauge locales $U(1)$ de sus campos, implicando entonces que el sistema considerado en este capítulo presenta una simetría gauge local $U(1)$.

5.2.2 Ruptura explícita de la simetría quiral local $U(1)_R \times U(1)_L$ de la QED+OD sin término de masa

En esta subsección se muestra que la densidad lagrangiana de la QED+OD, para el caso un campo de Dirac sin masa, no presenta una simetría quiral local $U(1)_R \times U(1)_L$ puesto que el término de interacción asociado al potencial lineal rompe explícitamente la simetría quiral local, dado que este término mezcla las componentes de quiralidad.

La densidad lagrangiana de la QED+OD para el caso de un campo de Dirac sin masa es

$$\mathcal{L}_{QED+OD_o} = \mathcal{L}_o + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_{YM} + eB_I\bar{\psi}(x)\gamma^0\gamma^j r_j\psi(x), \quad j = 1, 2, \tag{5.30}$$

donde $\mathcal{L}_o$ representa la densidad lagrangiana de Dirac libre para campo fermiónico sin masa dada por (2.88), mientras que $\mathcal{L}_I$ y $\mathcal{L}_{YM}$ están dadas respectivamente por (3.42) y (3.43). Escribiendo $\psi(x) = \psi_R(x) + \psi_L(x)$, entonces la anterior densidad lagrangiana se puede escribir como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QED+OD_o} = {} & \bar{\psi}_R(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R(x) + \bar{\psi}_L(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L(x) - e\bar{\psi}_R(x)\gamma^\mu A_\mu\psi_R(x) - e\bar{\psi}_L(x)\gamma^\mu A_\mu\psi_L(x) \\ & + eB_I\bar{\psi}_R(x)\gamma^0\gamma^j r_j\psi_L(x) + eB_I\bar{\psi}_L(x)\gamma^0\gamma^j r_j\psi_R(x),\end{aligned} \tag{5.31}$$

donde se ha tenido en cuenta que los términos $\bar{\psi}_R(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L(x)$, $\bar{\psi}_L(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R(x)$, $\bar{\psi}_R(x)\gamma^0\gamma^j\psi_R(x)$ y $\bar{\psi}_L(x)\gamma^0\gamma^j\psi_L(x)$ se anulan, dado que $P_RP_L = P_LP_R = 0$. Se prueba a continuación que la densidad lagrangiana (5.31) no presenta simetría quiral local $U(1)_R \times U(1)_L$, puesto que no es invariante bajo transformaciones de fase locales de las proyecciones de quiralidad de los campos de materia, antimateria y radiación de la forma

$$\psi_L(x) \to \psi'_L(x) = \exp\left[-i\theta_L(x)\right]\psi_L(x); \qquad \psi_R(x) \to \psi'_R(x) = \exp\left[-i\theta_R(x)\right]\psi_R(x), \tag{5.32}$$

$$\bar{\psi}_L(x) \to \bar{\psi}'_L(x) = \exp\left[i\theta_L(x)\right]\bar{\psi}_L(x); \qquad \bar{\psi}_R(x) \to \bar{\psi}'_R(x) = \exp\left[i\theta_R(x)\right]\bar{\psi}_R(x), \tag{5.33}$$

$$A_\mu(x) \to A^{L\prime}_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta_L(x); \qquad A_\mu(x) \to A^{R\prime}_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta_R(x), \tag{5.34}$$

donde $\theta_R(x)$ y $\theta_L(x)$ son funciones gauge diferentes asociadas respectivamente con los grupos de simetría $U(1)_R$ y $U(1)_L$. Para probar que no se tiene en este caso invariancia, primero se escribe la densidad lagrangiana transformada de la QED+OD para un oscilador de Dirac sin masa como

$$\mathcal{L}'_{QED+OD_o} = \mathcal{L}'_o + \mathcal{L}'_I + \mathcal{L}'_{YM} + eB_I\bar{\psi}'_R(x)\gamma^0\gamma^j r_j\psi'_L(x) + eB_I\bar{\psi}'_L(x)\gamma^0\gamma^j r_j\psi'_R(x). \tag{5.35}$$

Después de reemplazar los campos transformados dados por (5.32), (5.33) y (5.34) en (5.35), se obtiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{QED+OD_o} &= \mathcal{L}_o + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_{YM} + eB_I\left(\exp\left[i\theta_R(x) - i\theta_L(x)\right]\bar{\psi}_R(x)\gamma^0\gamma^j r_j\psi_L(x)\right) \\
&+ eB_I\left(\exp\left[i\theta_L(x) - i\theta_R(x)\right]\bar{\psi}_L(x)\gamma^0\gamma^j r_j\psi_R(x)\right) \neq \mathcal{L}_{QED+OD_o},
\end{aligned} \tag{5.36}$$

debido a que $\theta_R(x) \neq \theta_L(x)$, con lo cual $\theta_R(x) - \theta_L(x) \neq 0$ y $\theta_L(x) - \theta_R(x) \neq 0$. Por lo anterior, se muestra que un oscilador de Dirac sin masa interactuándo con un campo magnético uniforme externo no presenta simetría quiral local $U(1)_R \times U(1)_L$, dado que el término de interacción asociado al potencial lineal rompe explícitamente esta simetría quiral local.

6. CÁLCULO DEL CONDENSADO MAGNÉTICO

En la primera parte de este capítulo, se calcula el valor del condensado magnético para el sistema constituido por un fermión interactuándo con un campo magnético uniforme externo, utilizando el formalismo de tiempo propio de Schwinger [4] y a partir del cálculo del valor esperado del producto de los operadores de campo $\hat{\bar{\psi}}\hat{\psi}$ con respecto al estado de vacío de la teoría $|0>$ [36], mostrando que se obtiene el mismo resultado usando los dos procedimientos. Posteriormente, a partir del cálculo del valor esperado de los operadores de campo se obtiene el valor del condensado magnético para el caso de un oscilador de Dirac interactuándo con un campo magnético uniforme externo.

6.1 ***Para un fermión interactuando con un campo magnético uniforme externo usando el formalismo de tiempo propio de Schwinger***

La densidad lagrangiana que describe el sistema constituido por un fermión relativista interactuando con un campo magnético uniforme externo B, toma la siguiente forma covariante en (2+1) dimensiones [15]

$$\mathcal{L} = \hat{\bar{\psi}} \left(i\gamma^{\mu} D_{\mu} - m \right) \hat{\psi}, \qquad \mu = 0, 1, 2. \tag{6.1}$$

donde la derivada covariante es

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - ieA_{\mu}^{\text{ext}}, \qquad A_{\mu}^{\text{ext}} = -By\delta_{\mu 1}. \tag{6.2}$$

En la expresión (6.2), el término A_{μ}^{ext} en general corresponde al 4-potencial electromagnético externo al que está sometido el fermión. Para este caso, la partícula únicamente está sometida a un campo magnético perpendicular al plano en que se mueve la partícula. Por otro lado, en (2+1) dimensiones existen dos representaciones no equivalentes de las matrices de Dirac [36]

$$\gamma^0 = \sigma_3, \qquad \gamma^1 = i\sigma_1, \qquad \gamma^2 = i\sigma_2, \qquad \textbf{Representación 1,} \tag{6.3}$$
$$\gamma^0 = -\sigma_3, \qquad \gamma^1 = -i\sigma_1, \qquad \gamma^2 = -i\sigma_2, \qquad \textbf{Representación 2,} \tag{6.4}$$

donde σ_i son las matrices de Pauli. Tomemos la representación 1 dada por (6.3) para hallar los valores propios de la energía del sistema descrito por (6.1), este espectro depende del signo del término de campo magnético, es decir, de eB. En primer lugar, asumamos que $eB > 0$, así la densidad lagrangiana se escribe como [1]

$$\mathcal{L} = \psi^{\dagger} \left(iD_0 + i\alpha_1 D_1 + i\alpha_2 D_2 - \beta m \right) \psi. \tag{6.5}$$

Sin embargo, la expresión (6.5) se puede escribir de forma explícita como

$$\mathcal{L} = i\psi^{\dagger}\dot{\psi} + i\psi^{\dagger}\alpha_1\partial_x\psi - eBy\psi^{\dagger}\alpha_1\psi + i\psi^{\dagger}\alpha_2\partial_y\psi - m\psi^{\dagger}\beta\psi. \tag{6.6}$$

A partir de la densidad lagrangiana (6.6) y utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos ψ y $\psi^{\dagger}$, se obtiene que las ecuaciones de movimiento para ambos campos son respectivamente

$$i\dot{\psi}^{\dagger} = -eBy\psi^{\dagger}\alpha_1 - m\psi^{\dagger}\beta - i\psi^{\dagger}\alpha_1 - i\psi^{\dagger}\alpha_2, \tag{6.7}$$
$$i\dot{\psi} = -i\alpha_1\partial_1\psi + eBy\alpha_1\psi - i\alpha_2\partial_y\psi + m\beta\psi. \tag{6.8}$$

[1] En este caso tomamos $m > 0$.

Ahora la idea es determinar los valores propios de la energía de este sistema. Para realizar lo anterior, se reescriben las ecuaciones de movimiento (6.7) y (6.8) a partir de reemplazar los operadores energía ($\hat{E}$) y momento lineal ($\hat{p}$), es decir

$$\hat{p}_j = -i\partial_j; \qquad \hat{E} = i\partial_t. \tag{6.9}$$

De esta manera las ecuaciones de movimiento quedan expresadas como

$$E\dot{\psi}^\dagger = -\psi^\dagger \left(eBy\alpha_1 - m\beta - i\alpha_1 - i\alpha_2\right), \tag{6.10}$$

$$E\dot{\psi} = \left(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + eBy\alpha_1 + m\beta\right)\psi. \tag{6.11}$$

De manera análoga a los procedimientos desarrollados en los capítulos 4 y 5, reemplazamos (6.10) en (6.11) y operando correctamente sobre cada uno de los términos, se obtiene que el espectro de energía del sistema está dado por

$$E_n = \pm\sqrt{m^2 + 2|eB|n}. \tag{6.12}$$

La expresión (6.12) corresponde a los niveles de Landau [15] para el sistema estudiado aquí.

Más adelante se muestra que cuando la masa es nula ($m = 0$) y con un campo magnético no nulo ($B \neq 0$) actuando sobre el sistema, se produce una ruptura dinámica de la simetría quiral. Para probar lo anterior, mostramos que en el límite $m \to 0$, el condensado magnético ($< 0|\bar{\psi}\psi|0 >$) no es nulo: $< 0|\bar{\psi}\psi|0 >= -|eB|/2\pi$ [87].

El condensado magnético $< 0|\bar{\psi}\psi|0 >$ se puede expresar a través del propagador fermiónico $S(x,y) =< 0|T\left(\hat{\psi}(x)\bar{\hat{\psi}}(y)\right)|0 >$, donde T indica que ambos operadores están ordenados temporalmente. Así el condensado magnético está dado por [87] [2]

$$< 0|\bar{\psi}\psi|0 >= -\lim_{x\to y} tr\left(S(x,y)\right), \tag{6.13}$$

donde tr corresponde a la traza del propagador fermiónico. Por otra parte el propagador $S(x,y)$ está dado por [3] [4] [87] [88]

$$S(x,y) = exp\left(i\int_y^\infty A_\lambda^{ext} dz^\lambda\right)\tilde{S}(x-y), \tag{6.14}$$

donde [15][49]

$$\begin{aligned}\tilde{S}(x) = \int_0^\infty \frac{ds}{8\left(\pi s\right)^{3/2}} \exp\left[-i\left(\frac{\pi}{4} + sm^2\right)\right] \exp\left[\frac{-i}{4s}\left(x_\nu C^{\nu\mu} x_\mu\right)\right]\left(m + \frac{1}{2s}\gamma^\mu C_{\mu\nu} x^\nu - \frac{e}{2}\gamma^\mu F_{\mu\nu}^{ext} x^\nu\right)\\ \times\left(eBs\cot\left(eBs\right) - \frac{es}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}^{ext}\right),\end{aligned} \tag{6.15}$$

además [4]

$$C^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \left(\left(F^{ext}\right)^2\right)^{\mu\nu} \frac{\left(1 - eBs\cot\left(eBs\right)\right)}{B^2}, \qquad F_{\mu\nu}^{ext} = \partial_\mu A_\nu^{ext} - \partial_\nu A_\mu^{ext}. \tag{6.16}$$

[2] En el apéndice E se muestra el procedimiento desarrollado para calcular el condensado magnético usando el método de las funciones de Green.

[3] En el apéndice D se muestra el cálculo del propagador fermiónico.

[4] En el anexo C, en la sección de campos constantes, se hace el cálculo general del propagador fermiónico cuando se tiene un campo magnético constante.

La integral es calculada a lo largo de una línea recta. La transformada de Fourier $\tilde{S}(k) = \int d^3x \exp(ikx)\, \tilde{S}(x)$ es [5]

$$\tilde{S}(k) = \int_0^\infty ds \exp\left(-im^2 s + isk_0^2 - is|\vec{k}|^2 \frac{\tan(eBs)}{eBs}\right) \left[k + m + \left(k^2\gamma^1 - k^1\gamma^2\right)\tan(eBs)\right] \times \left[1 + \gamma^1\gamma^2 + \tan(eBs)\right]. \tag{6.17}$$

Transformando la anterior expresión en el espacio euclideano ($k^0 \to ik_3, s \to -is$) [6], se encuentra que

$$\tilde{S}_E(k) = -i\int_0^\infty ds \exp\left[-s\left(m^2 + k_3^2 + |\vec{k}|^2 \frac{\tanh(eBs)}{eBs}\right)\right]\left(-k_\mu\gamma^\mu + m + \frac{1}{i}(k_2\gamma_1 - k_1\gamma_2)\tanh(eBs)\right) \times \left(1 + \frac{1}{i}\gamma_1\gamma_2 \tanh(eBs)\right), \tag{6.18}$$

donde $\gamma_3 = -i\gamma^0$, $\gamma_1 \equiv \gamma^1$, $\gamma_2 \equiv \gamma^2$ son matrices antihermíticas. Usando las expresiones (6.13), (6.14) y (6.18), se encuentra la siguiente expresión para el condensado magnético

$$< 0|\bar{\psi}\psi|0 >= -\frac{eB}{2\pi}. \tag{6.19}$$

El resultado (6.19), que corresponde al condensado magnético en el vacío, ha sido obtenido a partir de realizar una expansión en series de Fourier de los operadores de campo. Este resultado coincide con el obtenido en referencias tales como [15] [49].

6.2 *Para un fermión interactuando con un campo magnético uniforme externo a partir del valor esperado del producto de los operadores de campo*

Se puede calcular el condensado magnético en el vacío en (2+1) dimensiones expandiendo el campo fermiónico en series de Fourier a partir de usar una base completa, es decir [65]

$$\hat{\Psi}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi}}\left[\hat{a}(n,p)\,\hat{\psi}^{(+)} + \hat{b}^\dagger(n,p)\hat{\psi}^{(-)}\right], \tag{6.20}$$

mientras que $\hat{\Psi}^\dagger(x,t)$ toma la forma

$$\hat{\Psi}^\dagger(x,t) = \sum_{n'=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'}{\sqrt{2\pi}}\left[\hat{a}^\dagger(n',p')\hat{\psi}^{(+)\dagger} + \hat{b}(n,p)\hat{\psi}^{(-)\dagger}\right], \tag{6.21}$$

donde $\hat{a}(n,p)$ es el operador destrucción de partícula (fermión), $\hat{a}^\dagger(n',p')$ es el operador creación de partícula, $\hat{b}(n',p')$ corresponde al operador aniquilación de antipartícula (antifermión) y $\hat{b}^\dagger(n',p')$ es el operador creación de antipartícula.

Ambos tipos de operadores obedecen las siguientes relaciones de anticonmutación

$$\{\hat{a}(n,p), \hat{a}^\dagger(n',p')\} = \{\hat{b}(n',p'), \hat{b}^\dagger(n,p)\} = \delta_{nn'}\delta\left(p - p'\right), \tag{6.22}$$
$$\{\hat{a}(n,p), \hat{a}(n',p')\} = \{\hat{a}^\dagger(n,p), \hat{a}^\dagger(n',p')\} = \{\hat{b}(n,p), \hat{b}(n',p')\} = \{\hat{b}^\dagger(n,p), \hat{b}^\dagger(n',p')\} = 0.$$

Teniendo en cuenta las expresiones (6.20) y (6.21), se calcula el condensado magnético [37]

[5] Ver anexo C, sección campos constantes.

[6] El procedimiento de transformación al espacio euclideano se realiza en anexo C, en la sección de campos constantes, entre las expresiones C.68 y C.82.

$$\left\langle 0 \left| \bar{\hat{\psi}}\hat{\psi} \right| 0 \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} dp \psi^{(-)} \gamma^0 \psi^{(-)}. \tag{6.23}$$

En el procedimiento desarrollado para obtener el anterior resultado, se utilizaron las propiedades de los operadores creación y destrucción de partículas y antipartículas. Para obtener las funciones de onda de probabilidad, se sigue un procedimiento similar al realizado en los capítulos 2, 4 y 5. De este modo, para $eB > 0$, las funciones de onda de probabilidad que describen los estados de energía positiva y negativa, en la representación A[7] tienen la forma [36]

$$\psi_+^A(x,y,t) = N_n^{(-)} \exp\left(-i\left|E_n\right|t + ipy\right) \begin{pmatrix} \left(|E_n^{(-)}| + m\right) I(n,p,x) \\ -\sqrt{2\left|eB\right|n} I^+(n-1,p,x) \end{pmatrix}, \tag{6.24}$$

$$\psi_-^A(x,y,t) = N_n^{(-)} \exp\left(i\left|E_n\right|t - ipy\right) \begin{pmatrix} \sqrt{2\left|eB\right|n} I(n,-p,x) \\ \left(|E_n^{(-)}| + m\right) I^+(n-1,-p,x) \end{pmatrix}, \tag{6.25}$$

donde se tiene que

$$N^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2|E_n^{(-)}|\left(|E_n^{(-)}| + m\right)}}, \qquad E_n^{(-)} = \sqrt{m^2 + 2eBn}. \tag{6.26}$$

Introduciendo (6.24) en (6.23), se encuentra

$$\left\langle 0 \left| \bar{\hat{\psi}}\hat{\psi} \right| 0 \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} dp N_n^2 \left[2|eB| I^2(n,-p,x) - \left(|E_n^{(-)} + m\right)^2 I^2(n-1,-p,x) \right]. \tag{6.27}$$

Teniendo en cuenta que [82]

$$\int dp I^2(n-1,p,x) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ eB, & n > 0, \end{cases} \tag{6.28}$$

se obtiene

$$\left\langle 0 \left| \bar{\hat{\psi}}\hat{\psi} \right| 0 \right\rangle = \frac{eB}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} N_n^2 \left[2|eB|n - \left(|E_n^{(-)}| + m\right)^2 \right]. \tag{6.29}$$

Usando (6.26) en (6.29), se puede reescribir el condensado magnético como

$$\left\langle 0 \left| \bar{\hat{\psi}}\hat{\psi} \right| 0 \right\rangle = -\frac{meB}{2\pi} \sum_{n=1} \frac{1}{|E_n^{(-)}|}.$$

Por otra parte, se debe calcular la contribución para el caso $eB < 0$. Por tal motivo, para este caso, se escriben las funciones de onda asociadas a los estados de energía positiva y negativa como

$$\psi_+^{(A)}(x,y,t) = N_n^{(-)} \exp\left(-i|E_n^{(-)}|t + ipy\right) \begin{pmatrix} -\sqrt{2|eB|n} I(n,p,x) \\ \left(|E_n^{(-)}| + m\right) I(n-1,p,x) \end{pmatrix}, \tag{6.30}$$

$$\psi_-^{(A)}(x,y,t) = N_n^{(-)} \exp\left(i|E_n^{(-)}|t - ipy\right) \begin{pmatrix} \left(|E_n^{(-)}| + m\right) I(n,-p,x) \\ \sqrt{2|eB|n} I(n-1,-p,x) \end{pmatrix}, \tag{6.31}$$

[7] Recordando que la representación A describe un electrón con espín arriba ($e^{-\uparrow}$) y un positrón con espín abajo ($e^{+\downarrow}$)

donde $N_n^{(-)}$ e $I(n,-p,y)$ están dados por (6.26). A continuación, siguiendo un procedimiento similar al que se desarrolló para el caso $eB>0$, se reemplaza (6.30) en (6.23)

$$\left\langle 0\left|\bar{\hat{\psi}}\hat{\psi}\right|0\right\rangle = -\frac{|eB|}{2\pi}\frac{m}{|m|}-\frac{|eB|}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|E_n^{(-)}|}. \tag{6.32}$$

Con los anteriores resultados, se tiene que el condensado magnético total es la suma de la contribución obtenida para los casos $eB<0$ y $eB>0$, es decir, el condensado magnético es igual a la suma de (6.30) y (6.32)

$$\left\langle 0\left|\bar{\hat{\psi}}\hat{\psi}\right|0\right\rangle = -\frac{|eB|}{2\pi}\frac{m}{|m|}\theta\left(-eB\right)-\frac{m|eB|}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|E_n|}. \tag{6.33}$$

La expresión (6.33), corresponde al condensado magnético de un fermión relativista interactuando con un campo magnético uniforme exterior, para el caso en el que se ha elegido la representación A, es decir para la situación física en la cual un electrón posee un espín hacia arriba ($e^-\uparrow$) y un positrón posée un espín hacia abajo ($e^+\downarrow$). Sin embargo, no existe ninguna restricción física para que suceda el caso contrario, es decir, que el electrón tenga espín hacia abajo ($e^-\downarrow$), mientras que el positrón tenga espín hacia arriba ($e^+\uparrow$), lo cual, como se mencionó previamente, corresponde a la representación B. Por lo anterior, las funciones de onda de probabilidad, para el caso $eB>0$ y en la representación B, tienen la forma

$$\psi_+^B(x,y,t)=N_n^-\exp\left(-i|E_n^{(-)}|t+ipy\right)\begin{pmatrix}-\sqrt{2|eB|n}I^{(-)}(n,p,x)\\(|E_n^{(-)}|+m)I^-(n-1,p,x)\end{pmatrix}, \tag{6.34}$$

$$\psi_-^B(x,y,t)=N_n^-\exp\left(i|E_n^{(-)}|t-ipy\right)\begin{pmatrix}(|E_n^{(-)}|+m)I^{(-)}(n,-p,x)\\\sqrt{2|eB|n}I^-(n-1,-p,x)\end{pmatrix}, \tag{6.35}$$

mientras que las funciones de onda de probabilidad, también para la representación B, pero en el caso $eB<0$, están dadas por

$$\psi_-^B(x,y,t)=N_n^-\exp\left(-i|E_n^{(-)}|t+ipy\right)\begin{pmatrix}(|E_n^{(-)}|+m)I^{(-)}(n,p,x)\\-\sqrt{2|eB|n}I^-(n-1,p,x)\end{pmatrix}, \tag{6.36}$$

$$\psi_-^B(x,y,t)=N_n^-\exp\left(i|E_n^{(-)}|t-ipy\right)\begin{pmatrix}\sqrt{2|eB|n}I^{(-)}(n,-p,x)\\(|E_n^{(-)}|+m)I^-(n-1,-p,x)\end{pmatrix}. \tag{6.37}$$

Siguiendo un procedimiento similar al desarrollado para el caso de la representación A, se encuentra que el condensado magnético, tanto para $eB<0$ como para $eB>0$, está dado por [36]

$$\left\langle 0|\bar{\hat{\psi}}^B\hat{\psi}^B|0\right\rangle = -\frac{eB}{2\pi}\frac{m}{|m|}\theta(eB)-\frac{meB}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|E_n^{(-)}|}. \tag{6.38}$$

Se observa que la expresión (6.38) es idéntica a (6.33), como se debía esperar. Este resultado implica que la expresión y comportamiento del condensado magnético es independiente de la representación física del problema estudiado. Por otro lado, las expresiones (6.33) y (6.38) poseen el término $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|E_n|}$, que en general es divergente [82], sin embargo éstos términos pueden ser considerados a través de realizar una apropiada continuación analítica [86]. En el límite $m\to 0^+$, es decir para fermiones sin masa, el condensado magnético vale

$$\left\langle 0|\bar{\hat{\psi}}^A\hat{\psi}^A|0\right\rangle = \begin{cases} -\frac{e|B|}{2\pi}, & eB<0,\\ 0, & eB>0\end{cases} \tag{6.39}$$

y

$$\left\langle 0|\bar{\hat{\psi}}^B\hat{\psi}^B|0\right\rangle = \begin{cases} \frac{e|B|}{2\pi}, & eB<0, \\ 0, & eB>0. \end{cases} \quad (6.40)$$

Por lo tanto, existe una ruptura de la simetría quiral y los valores de los condensados magnéticos dependen de los siguientes aspectos: (i) La combinación del espín del fermión y antifermión en el condensado depende básicamente de la representación elegida (A o B); (ii) la orientación (signo) y magnitud del campo magnético externo B.

6.3 *Para el oscilador de Dirac interactuando con un campo magnético uniforme externo usando operadores de campo*

Con el fin de calcular el condensado magnético para el oscilador de Dirac interactuando con un campo magnético uniforme externo, se realiza un procedimiento análogo al desarrollado para este mismo sistema sin considerar el potencial del oscilador de Dirac. Por esta razón, en primer lugar, lo que se hace es expandir en serie de Fourier el campo fermiónico de la siguiente manera [65] [8]

$$\hat{\Psi}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{2\pi}}\left[\hat{a}\left(n,p\right)\hat{\psi}^{(+)} + \hat{b}^{\dagger}(n,p)\hat{\psi}^{(-)}\right], \quad (6.41)$$

mientras que $\hat{\Psi}^{\dagger}(x,t)$ tiene la forma

$$\hat{\Psi}^{\dagger}(x,t) = \sum_{n'=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp'}{\sqrt{2\pi}}\left[\hat{a}^{\dagger}(n',p')\psi^{(+)\dagger} + \hat{b}(n,p)\hat{\psi}^{(-)\dagger}\right], \quad (6.42)$$

donde $\hat{a}(n,p)$ es el operador destrucción de partícula (fermión), $\hat{a}^{\dagger}(n',p')$ corresponde al operador creación de partícula, $\hat{b}(n',p')$ es el operador aniquilación de antipartícula (antifermión) y $\hat{b}^{\dagger}(n',p')$ corresponde al operador creación de antipartícula.

Los dos tipos de operadores obedecen las siguientes relaciones de anticonmutación

$$\{\hat{a}(n,p),\hat{a}^{\dagger}(n',p')\} = \{\hat{b}(n',p'),\hat{b}^{\dagger}(n,p)\} = \delta_{nn'}\delta\left(p-p'\right). \quad (6.43)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (6.41) y (6.42), se calcula el condensado magnético la representación A [37]

$$\left\langle 0\left|\bar{\hat{\psi}}\hat{\psi}\right|0\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}dp\hat{\psi}^{(-)}\gamma^0\hat{\psi}^{(-)}. \quad (6.44)$$

Para obtener el anterior resultado, se utilizaron las propiedades de los operadores creación y destrucción de partículas y antipartículas. Por otro lado, para el caso $eB>0$, se obtiene que las funciones de onda de probabilidad decribiendo los estados cuánticos de energía positiva y negativa tienen la forma

$$\psi_{+}^{(A)}(x,y,t) = N_n^{(-)}\exp\left(-i\left|E_n\right|t + ipy\right)\begin{pmatrix} \left(\left|E_n\right|+m\right)I(n,p,x) \\ -\sqrt{2\left|eB+eB_I\right|n}I(n-1,p,x)\end{pmatrix}, \quad (6.45)$$

$$\psi_{-}^{(A)}(x,y,t) = N_n^{(-)}\exp\left(i\left|E_n\right|t - ipy\right)\begin{pmatrix} \sqrt{2\left|eB+eB_I\right|n}I(n,-p,x) \\ \left(\left|E_n\right|+m\right)I(n-1,-p,x)\end{pmatrix}, \quad (6.46)$$

donde

$$N^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2|E_n^{(-)}|\left(|E_n^{(-)}|+m\right)}}, \qquad E_n^{(-)} = \sqrt{m^2+2|eB+eB_I|n}. \quad (6.47)$$

Introduciendo (6.46) en (6.44), se obtiene

[8] Acá x denota una coordenada en dos dimensiones, en este caso las coordenadas x e y.

$$\left\langle 0 \left| \bar{\hat{\psi}} \hat{\psi} \right| 0 \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} dp N_n^2 \left[2|eB + eB_I| I^2(n, -p, x) - \left(|E_n^{(-)} + m \right)^2 I^2(n-1, -p, x) \right].$$

Considerando la expresión [82]

$$\int dp I^2(n-1, p, x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & n = 0 \\ |eB + eB_I|, & n > 0, \end{array} \right. \quad (6.48)$$

se encuentra

$$\left\langle 0 \left| \bar{\hat{\psi}} \hat{\psi} \right| 0 \right\rangle = \frac{|eB + eB_I|}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} N_n^2 \left[2|eB + eB_I| n - \left(|E_n^{(-)}| + m \right)^2 \right]. \tag{6.49}$$

Usando (6.47) en (6.49), se puede reescribir el condensado magnético como

$$\left\langle 0 \left| \bar{\hat{\psi}} \hat{\psi} \right| 0 \right\rangle = -\frac{m|eB + eB_I|}{2\pi} \sum_{n=1} \frac{1}{|E_n^{(-)}|}.$$

Por otra parte, se debe calcular la contribución para el caso $|eB + eB_I| < 0$. Por tal motivo, para este caso se escriben las funciones de onda de probabilidad describiendo los estados de energía positiva y negativa como

$$\psi_+^{(A)}(x, y, t) = N_n^{(-)} \exp\left(-i|E_n^{(-)} t + ipy \right) \begin{pmatrix} -\sqrt{2|eB + eB_I| n} I(n, p, x) \\ \left(|E_n^{(-)} + m \right) I(n, p, x) \end{pmatrix}, \tag{6.50}$$

$$\psi_-^{(A)}(x, y, t) = N_n^{(-)} \exp\left(i|E_n^{(-)} t - ipy \right) \begin{pmatrix} \left(|E_n^{(-)} + m \right) I(n, -p, x) \\ \sqrt{2|eB + eB_I| n} I(n-1, -p, x) \end{pmatrix}, \tag{6.51}$$

donde $N_n^{(-)}$ e $I(n, -p, x)$ están dados por (6.26). A continuación, se sigue un procedimiento similar al desarrollado para el caso $|eB + eB_I| > 0$, se reemplaza (6.30) en (6.23)

$$\left\langle 0 \left| \bar{\hat{\psi}} \hat{\psi} \right| 0 \right\rangle = -\frac{|eB + eB_I|}{2\pi} \frac{m}{|m|} - \frac{|eB + eB_I|}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|E_n^{(-)}|}. \tag{6.52}$$

Por lo tanto, el condensado magnético total corresponde a la suma de la contribución dada para los casos $|eB + eB_I| < 0$ y $|eB + eB_I| > 0$, es decir el condensado magnético es igual a la suma de (6.50) y (6.52), con lo cual

$$\left\langle 0 \left| \bar{\hat{\psi}} \hat{\psi} \right| 0 \right\rangle = -\frac{|eB + eB_I|}{2\pi} \frac{m}{|m|} \theta\left(-|eB + eB_I| \right) - \frac{m|eB + eB_I|}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|E_n|}. \tag{6.53}$$

Para calcular el condensado magnético en el caso de la representación B, se sigue un procedimiento análogo al que se acaba de desarrollar para la representación A. Por lo anterior, se parte de las funciones de onda de probabilidad que describen los estados de energía positiva y negativa, para el caso $|eB - eB_I| > 0$, con lo cual

$$\psi_+^B(x, y, t) = N_n^- \exp\left(-i|E_n| t + ipy \right) \begin{pmatrix} -\sqrt{2|eB - eB_I| n} I^{(-)}(n, p, x) \\ (|E_n^{(-)}| + m) I^-(n-1, p, x) \end{pmatrix}, \tag{6.54}$$

$$\psi_-^B(x, y, t) = N_n^- \exp\left(i|E_n| t - ipy \right) \begin{pmatrix} (|E_n^{(-)}| + m) I^{(-)}(n, -p, x) \\ \sqrt{2|eB - eB_I| n} I^-(n-1, -p, x) \end{pmatrix}, \tag{6.55}$$

mientras que las funciones de onda de probabilidad, para el caso $|eB - eB_I| < 0$, tienen la forma

$$\psi_+^B(y,z,t) = N_n^- \exp\left(-i|E_n|t + ipy\right) \begin{pmatrix} (|E_n^{(-)}| + m)I^{(-)}(n,p,x) \\ -\sqrt{2|eB - eB_I|n}I^-(n-1,p,x) \end{pmatrix}, \tag{6.56}$$

$$\psi_-^B(x,y,t) = N_n^- \exp\left(i|E_n|t - ipy\right) \begin{pmatrix} \sqrt{2|eB - eB_I|n}I^{(-)}(n,-p,x) \\ (|E_n^{(-)}| + m)I^-(n-1,-p,x) \end{pmatrix}. \tag{6.57}$$

Por lo anterior, en el caso de la representación B, se tiene que el condensado magnético incluyendo los casos $|eB - eB_I| < 0$ y $|eB - eB_I| > 0$, se determina a partir de la suma de los resultados obtenidos para los dos casos mencionados, por lo tanto

$$\left\langle 0|\bar{\hat{\psi}}^B \hat{\psi}^B|0\right\rangle = -\frac{|eB - eB_I|}{2\pi}\frac{m}{|m|}\theta(|eB - eB_I|) - \frac{m|eB - eB_I|}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|E_n^{(-)}|}. \tag{6.58}$$

Las expresiones (6.53) y (6.58) también poseen el término $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|E_n|}$, que como ya se mencionó es en general divergente [82]. En el límite $m \to 0^+$, es decir para fermiones sin masa, el condensado magnético se escribe como

$$\left\langle 0|\bar{\hat{\psi}}^A \hat{\psi}^A|0\right\rangle = \begin{cases} -\frac{|eB_I + eB|}{2\pi}, & eB_I + eB < 0, \\ 0, & eB_I + eB > 0, \end{cases} \tag{6.59}$$

y

$$\left\langle 0|\bar{\hat{\psi}}^B \hat{\psi}^B|0\right\rangle = \begin{cases} \frac{-|eB_I - eB|}{2\pi}, & eB_I - eB < 0, \\ 0, & eB_I - eB > 0. \end{cases} \tag{6.60}$$

Se observa que existe una ruptura de la simetría quiral y los valores de los condensados magnéticos en el vacío dependen de los siguientes aspectos: (i) Las combinaciones de espín del fermión y antifermión del condensado de acuerdo con la representación usada (A o B); (ii) la intensidad del término de acoplamiento lineal del oscilador de Dirac, dado por el término eB_I; (iii) la orientación del campo magnético uniforme externo (o sea, el signo de eB) y la intensidad de este campo B.

Es de notar que para ciertos valores del campo magnético uniforme externo, los condensados magnéticos en el vacío (6.59) y (6.60) pueden tomar valores nulos. Una consecuencia física de los anteriores resultados, para el caso de fermiones libres sin masa ($B_I = 0$), para la representación A (B) y para el caso de $eB > 0$ ($eB < 0$), es que el nivel más bajo de Landau tiene solo un estado de energía positiva que no contribuye al condensado. Sin embargo, para el caso $eB < 0$ ($eB > 0$) el único estado es de energía negativa, de tal manera que sí aporta al condensado.

Por otro lado, el condensado magnético para la representación reducible (4×4) está dado por

$$\left\langle 0|\bar{\hat{\psi}}\hat{\psi}|0\right\rangle = \left\langle 0|\bar{\psi}^A \psi^A|0\right\rangle + \left\langle 0|\bar{\psi}^B \psi^B|0\right\rangle, \tag{6.61}$$

$$\left\langle 0|\bar{\hat{\psi}}\hat{\psi}|0\right\rangle = -\frac{|eB + eB_I}{2\pi}\frac{m}{|m|}\theta\left(-eB - eB_I\right) - \frac{|eB - eB_I|}{2\pi}\frac{m}{|m|}\theta\left(-eB_I + eB\right) \tag{6.62}$$

$$-\frac{m|eB + eB_I|}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|E_n^{(+)}|} - \frac{m|eB - eB_I|}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|E_n^{(-)}|}. \tag{6.63}$$

Para el caso de fermiones sin masa ($B_I = 0$ y $m \to 0^+$), se recupera el caso del condensado magnético en el vacío en la representación irreducible [37]

$$\left\langle 0|\bar{\hat{\psi}}\hat{\psi}|0\right\rangle = -\frac{|eB + eB_I|}{2\pi}. \tag{6.64}$$

Teniendo en cuenta que la representación irreducible A describe un fermión con espín hacia arriba ($\psi^{\uparrow}$) y un antifermión con espín hacia abajo ($\bar{\psi}^{\downarrow}$), para este caso los fermiones y antifermiones pertenecen a esta representación. De la misma manera, teniendo en cuenta la representación irreducible que describe un fermión con espín hacia abajo ($\psi^{\downarrow}$) y antifermión con espín hacia arriba ($\bar{\psi}^{\uparrow}$) entonces quiere decir que se ha usado la representación B.

Aunque el valor del condensado (6.64) es no nulo, cuando no se tiene un campo magnético externo, un cuidadoso análisis de (6.39) y (6.40) muestra que al contrario a lo que se piensa, en este caso no se produce masa magnética fermiónica para ambas representaciones simultáneamente. El valor del condensado magnético en el vacío depende de la orientación del campo magnético externo. Por lo anterior, la masa magnética fermiónica es generada solo para un tipo de representación, mientras que para la otra es nula.

Para el oscilador de Dirac libre, es decir para el caso en que $B = 0$, se tiene que el condensado magnético en el vacío, en el límite $m \to 0^+$, conduce a (6.63)

$$\left\langle 0|\bar{\hat{\psi}}\hat{\psi}|0\right\rangle = -\frac{eB_I}{\pi}\theta\left(-eB_I\right), \tag{6.65}$$

con lo cual, se observa que en las dos representaciones (A y B) se tiene una masa magnética fermiónica. La tabla (6.3) muestra cuatro regiones y los valores del condensado magnético para el límite $m \to 0^+$. Note que para $B_I \neq 0$, $eB_+ = e\left(B_I + B\right) < 0$ y $eB_- = e\left(B_I - B\right)$, el valor del condensado no es igual para ambas representaciones, y por lo tanto los dos condensados magnéticos tienen masas magnéticas diferentes [36]

Situación	$\left\langle \bar{\hat{\psi}}^A\hat{\psi}^A\right\rangle$	$\left\langle \bar{\hat{\psi}}^B\hat{\psi}^B\right\rangle$
eB$_+ < 0, eB_- < 0$	$-\frac{(eB_I+eB)}{2\pi}$	$-\frac{(eB_I+eB)}{2\pi}$
eB$_+ > 0, eB_- > 0$	$-\frac{(eB_I+eB)}{2\pi}$	$-\frac{(eB_I+eB)}{2\pi}$

Tab. 6.1: Se tienen cuatro posibilidades para el condesado magnético. Hay transiciones de fase cuánticas para la representación A, cuando $B_I = 0$, y otra transición de fase quiral para la representación B, cuando se tiene un campo magnético externo.

Note que para $B_I \neq 0$, $eB_+ = e\left(B_I + B\right) < 0$ y $eB_- = e\left(B_I - B\right) > 0$, el valor del condensado no es igual para ambas representaciones, y por lo tanto las dos condensados magnéticos tienen masas dinámicas diferentes. Además, se observa que para las regiones $eB_+ > 0$ y $eB_- > 0$, el condensado magnético es nulo para ambos casos. Es posible entender que el campo magnético exterior actúa como un catalizador para la ruptura de la simetría quiral, por lo tanto eB_+ y eB_- actúan como catalizadores de la ruptura de la simetría quiral para las representaciones A y B, respectivamente [36].

7. GENERACIÓN DE UNA MASA DINÁMICA

En este capítulo se estudia la generación de una masa dinámica para los tres sistemas estudiados en los anteriores capítulos, en las siguientes condiciones: Un fermión sin masa interactuándo con un campo magnético uniforme externo, un oscilador de Dirac sin masa libre y un oscilador de Dirac sin masa interactuando con un campo magnético uniforme externo. El fenómeno de generación dinámica de masa dinámica es relevante, puesto que dependiendo tanto de la magnitud como de la orientación del campo magnético uniforme exterior y del potencial del oscilador de Dirac, se tiene que su valor puede cambiar significativamente. El anterior hecho se debe a que la magnitud y la orientación del campo magnético uniforme exterior (o del campo magnético uniforme interior, asociado con el potencial del oscilador de Dirac $eB_I/2 = m\omega$) se relaciona con un parámetro de orden g_c, cuyo valor determina si el sistema se cataloga como subcrítico ($g \ll g_c$) o supercrítico ($g > g_c$) [15].

7.1 Para un fermión sin masa interactuando con un campo magnético uniforme externo

Para calcular la masa dinámica en esta situación física, lo que se hace es partir de la densidad lagrangiana del modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL), para el caso de fermión sin masa, cuya forma es [15] [90]

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu}\right)\psi + \frac{G}{2}\left[\left(\bar{\psi}\psi\right)^2 + \left(\bar{\psi}i\gamma^5\psi\right)^2\right], \tag{7.1}$$

donde D_μ está dada por (6.2) y el campo fermiónico lleva un índice adicional $\alpha = 1, 2, ..., N$, denominado índice de color [15]. Se puede demostrar que la densidad lagrangiana (7.1) se puede escribir como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\bar{\psi}, \left(i\gamma^{\mu}D_{\mu}\right)\psi\right] - \bar{\psi}\left(\sigma + i\gamma^5\pi\right)\psi - \frac{1}{2G}\left(\sigma^2 + \pi^2\right), \tag{7.2}$$

donde $\sigma = G\bar{\psi}\psi$ y $\pi = -G\bar{\psi}i\gamma^5\psi$ [1].

La acción efectiva para el campo compuesto por σ y π está dada por la integral de camino sobre los fermiones

$$\Gamma(\sigma,\pi) = -\frac{1}{2G}\int d^3x\left(\sigma^2 + \pi^2\right) + \tilde{\Lambda}\left(\sigma,\pi\right). \tag{7.3}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \exp\left(i\tilde{\Gamma}\right) &= \int d\psi d\bar{\psi}\exp\left[\frac{i}{2}\int d^4x\left[\bar{\psi}, \{i\gamma^{\mu}D_{\mu} - \left(\sigma + i\gamma^5\pi\right)\}\psi\right]\right], \\ &= \exp\{tr\ln\left[i\gamma^{\mu}D_{\mu} - \left(\sigma + i\gamma^5\pi\right)\right]\}, \end{aligned} \tag{7.4}$$

es decir

$$\tilde{\Gamma}(\sigma,\pi) = -i\ \mathrm{Tr}\ln\left[i\gamma^{\mu}D_{\mu} - \left(\sigma + i\gamma^5\pi\right)\right]. \tag{7.5}$$

Como $N \to \infty$, la integral sobre los campos compuestos está dominada por los puntos estacionarios de su acción: $\delta\Gamma/\delta\sigma = \delta\Gamma/\delta\pi = 0$. Se analiza la dinámica en este límite, usando la expansión de la acción Γ en potencias de las derivadas de sus campos constituyentes.

El potencial efectivo V tiene la forma [2]

[1] En el apéndice F se muestra que la expresión (7.2) es equivalente a (7.1).
[2] El potencial efectivo V es calculado en la sección G.

$$V(\rho) = \frac{\rho^2}{2G} + \frac{N}{8\pi^2}\left[\frac{\Lambda^4}{2} + \frac{1}{3\ell^4}\ln\left(\Lambda^2\ell^2\right) + \frac{1-\gamma-\ln 2}{3\ell^4} - (\rho\Lambda)^2 + \frac{\rho^4}{2}\ln(\Lambda^2\ell^2) + \frac{\rho^4}{2}(1-\gamma-\ln 2)\right.$$
$$\left. + \frac{\rho^2}{\ell^2}\ln\left(\frac{\rho^2\ell^2}{2}\right) - \frac{4}{\ell^4}\zeta'\left(-1, \frac{\rho^2\ell^2}{2}+1\right) + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right), \right. \tag{7.6}$$

donde ℓ es la magnitud magnética, la cual se define como $l \equiv (|eB|)^{-1/2}$. Se tiene que $\zeta'(-1,x) = d\zeta(\nu,x)/d\nu|_{\nu=-1}$ es la función zeta de Riemann generalizada [82] y $\gamma \approx 0,577$ es la constante de Euler[3]. La ecuación de gap $dV/d\rho = 0$ es

$$\Lambda^2\left(\frac{1}{g}-1\right) = \rho^2\ln\frac{(\Lambda^2l^2)}{2} + \gamma\rho^2 + l^{-2}\ln\frac{(\rho l)^2}{4\pi} + 2l^{-2}\ln\Gamma\left(\frac{\rho^2l^2}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{7.7}$$

donde g es una constante adimensional que, para este caso, corresponde al parámetro de orden involucrado en la generación de la masa dinámica. Para obtener la expresión (7.7), se usan las siguientes relaciones [15]

$$\frac{d\zeta(\nu,x)}{dx} = -\gamma\zeta\left(\nu+1,x\right), \tag{7.8}$$

$$\frac{d\zeta(\nu,x)}{d\nu}|_{\nu=0} = \ln\Gamma(x) - \frac{1}{2}\ln 2\pi, \qquad \zeta(0,x) = \frac{1}{2} - x. \tag{7.9}$$

Cuando $B \to 0$ ($l \to \infty$, se recupera la ecuación del gap en el modelo NJL)

$$\Lambda^2\left(\frac{1}{g}-1\right) = -\rho^2\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\rho^2}\right). \tag{7.10}$$

La anterior ecuación admite soluciones no triviales solo si g es supercrítico ($g > g_c$), ya que la densidad lagrangiana (7.2) implica una solución para (7.10), entonces $\rho = \bar{\sigma}$, lo cual coincide con el valor de la masa dinámica fermiónica. Ahora, se muestra que el campo magnético B cambia la situación dramáticamente: para $B \neq 0$ existe una solución no trivial, para todo $g > 0$ [80].

Primero se considera el caso subcrítico g, es decir $g < g_c = 1$, el cual puede ser dividido en dos casos: (a) $g \ll g_c$ y (b) $g \to g_c = 0$ (g casi crítico). Para el caso $g < g_c = 1$, el lado izquierdo de la expresión (7.7) es positivo y el primer término del lado derecho de esta expresión es negativo. Lo anterior permite concluir, que una solución no trivial de esta ecuación puede solamente existir cuando $\rho^2\ln\left(\Lambda^2l^2\right) \ll l^{-2}\ln\left(\rho l\right)^{-2}$. Entonces, para el caso $g \ll$ se encuentra que la masa dinámica m_d es [15] [90]

$$m_d^2 \equiv \bar{\sigma}^2 = \frac{eB}{\pi}\exp\left(-\frac{4\pi^2(1-g)}{eBNG}\right). \tag{7.11}$$

Se puede verificar que la masa dinámica se genera, en su mayoría, en la región infrarroja con $k \leq l^{-1} = \sqrt{|eB|}$, donde la contribución del nivel más bajo de Landau es el más dominante. Ahora, considerando el valor casi crítico g con $\Lambda^2(1-g)/g\rho^2 \ll \Lambda^2l^2$ y buscando una solución para el caso $\rho^2l^2 \ll 1$, se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{1}{\rho^2l^2}\ln\frac{1}{\pi\rho^2l^2} \simeq \ln\Lambda^2l^2, \tag{7.12}$$

es decir

[3] Por simplicidad, se considera la condición $\bar{\rho}$, $\sqrt{|eB|} \ll \Lambda$, donde $\bar{\rho}$ es un mínimo de V. Sin embargo, es de notar que en algunos casos, tal como puede suceder en la descripción de la dinámica hadrónica, aplicando el modelo de NJL, $\bar{\rho}$ y Λ son comparables en magnitud.

$$m_d^2 = \bar{\sigma} \simeq |eB| \frac{\ln\left[\left(\ln \Lambda^2 l^2\right)/\pi\right]}{\ln \Lambda^2 l^2}. \tag{7.13}$$

Para el caso $g > g_c$, se puede obtener una expresión para la masa dinámica m_d, cuando se considera un campo magnético débil que cumpla la condición $|eB|^{1/2}/m_d^(0) \ll 1$, donde $m_d^{(0)}$ es la solución de la ecuación (7.10) con $B = 0$. De esta manera, a partir de usar la expresión (7.7), se encuentra que

$$m_d^2 \simeq \left(m_d^{(0)}\right)^2 \left(1 + \frac{|eB|^2}{3\left(m_d^{(0)}\right)^4 \ln\left(\Lambda/m_d^{(0)}\right)^2}\right), \tag{7.14}$$

lo cual quiere decir que la m_d aumenta con el cuadrado del campo magnético.

7.2 ***Para un oscilador de Dirac libre sin masa***

Teniendo en cuenta los resultados de la sección anterior y recordando que $eB_I/2 = m\omega$, entonces la masa dinámica, para el régimen cercano al crítico definido por $g < g_c$, toma el valor

$$m_d^2 \equiv \bar{\sigma}^2 = \frac{eB_I}{2\pi} \exp\left(-\frac{8\pi^2}{eB_I NG}\right). \tag{7.15}$$

Ahora se considera el valor casi crítico g con $\Lambda^2(1-g)/g\rho^2 \ll \Lambda^2 l^2$. Después de buscar una solución, para $\rho^2 l^2 \ll 1$, se llega que la masa dinámica se escribe como

$$m_d^2 = \bar{\sigma} \simeq \frac{|eB_I|}{2} \frac{\ln\left[\left(\ln \Lambda^2 l^2\right)/\pi\right]}{\ln \Lambda^2 l^2}. \tag{7.16}$$

Finalmente, para el caso $g > g_c$, se obtiene una expresión para la masa dinámica m_d, con un campo magnético débil que satisface la condición $|eB|^{1/2}/m_d^(0) \ll 1$, donde $m_d^{(0)}$ es la solución de la ecuación (7.10), cuando $B = 0$. De esta manera, usando la expresión (7.7), se encuentra que [15] [90]

$$m_d^2 \simeq \left(m_d^{(0)}\right)^2 \left(1 + \frac{|eB_I|^2}{6\left(m_d^{(0)}\right)^4 \ln\left(\Lambda/m_d^{(0)}\right)^2}\right). \tag{7.17}$$

7.3 ***Para un oscilador de Dirac sin masa interactuando con un campo magnético uniforme externo***

Para el caso en el que se tiene un oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones interactuando con un campo magnético uniforme externo perpendicular al plano de movimiento del oscilador, se tiene que el término de interacción se puede escribir como $2eB + eB_I/2$, por lo cual, la masa dinámica, en el régimen cercano al crítico definido por $g < g_c$, está dada por

$$m_d^2 \equiv \bar{\sigma}^2 = \frac{2eB + eB_I}{2\pi} \exp\left(-\frac{8\pi^2}{(2eB + eB_I)NG}\right). \tag{7.18}$$

En el régimen casi crítico g, con $\Lambda^2(1-g)/g\rho^2 \ll \Lambda^2 l^2$, después de buscar una solución para $\rho^2 l^2 \ll 1$, se obtiene que la masa dinámica toma la forma

$$m_d^2 = \bar{\sigma} \simeq \frac{|2eB + eB_I|}{2} \frac{\ln\left[\left(\ln \Lambda^2 l^2\right)/\pi\right]}{\ln \Lambda^2 l^2}. \tag{7.19}$$

Para el caso $g > g_c$, con un campo magnético débil que satisface la condición $|eB|^{1/2}/m_d^(0) \ll 1$, donde $m_d^{(0)}$ es la solución de la ecuación (7.10) cuando $B = 0$, se obtiene, usando la expresión (7.7), que la masa dinámica m_d es [15] [90]

$$m_d^2 \simeq \left(m_d^{(0)}\right)^2 \left(1 + \frac{|2eB + eB_I|^2}{6\left(m_d^{(0)}\right)^4 \ln\left(\Lambda/m_d^{(0)}\right)^2}\right). \tag{7.20}$$

8. RUPTURA DINÁMICA DE LA SIMETRÍA QUIRAL LOCAL $U(1)_L \times U(1)_R$

En este capítulo se estudia la ruptura dinámica de la simetría quiral para el sistema constituido por un fermión sin masa restringido a moverse en un plano y que interactúa con un campo magnético uniforme externo y perpendicular al plano de movimiento del fermión. Dado que el fermión no tiene masa y el sistema físico corresponde, como un caso partícular, al que fue descrito de forma general en la última parte del capítulo 3, por tal motivo este sistema presenta una simetría quiral local $U(1)_L \times U(1)_R$. Sin embargo, dado que el fermión adquiere una masa dinámica, por efecto de su interacción con el campo magnético uniforme externo, entonces este hecho origina que se presente una ruptura dinámica de la simetría quiral local $U(1)_L \times U(1)_R$.

Para estudiar lo anterior, se parte de la acción efectiva Λ dada por la ecuación (7.3), a partir de la cual se deriva el término cinético en el modelo NJL. Este término tiene la forma

$$\mathcal{L}_l = \frac{F_1^{\mu\nu}}{2}\left(\partial_\mu \rho_j \partial_\nu \rho_j\right) + \frac{F_2^{\mu\nu}}{\rho^2}\left(\rho_j \partial_\mu \rho_j\right)\left(\rho_i \partial_\nu \rho_i\right), \tag{8.1}$$

donde el término $\rho = (\sigma, \pi)$, $F_1^{\mu\nu}$ y $F_2^{\mu\nu}$ son funciones de ρ^2. La definición de la acción $\Gamma = \int dt d^3x \mathcal{L}$, y por lo tanto la expresión (8.1), está determinada por las siguientes ecuaciones [15]

$$\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta\sigma(x)\delta\sigma(0)} \mid_{\sigma=\text{constante}\pi=0} = -\left(F_1^{\mu\nu} + 2F_2^{\mu\nu}\right) \mid_{\sigma=\text{constante}\pi=0} \cdot \partial_\mu \partial_\nu \delta^4(x), \tag{8.2}$$

$$\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta\pi(x)\delta\pi(0)} \mid_{\sigma=\text{constante},\pi=0} = -F_1^{\mu\nu} \mid_{\sigma=\text{constante},\pi=0} \cdot \partial_\mu \partial_\nu \delta^4(x), \tag{8.3}$$

$$\tag{8.4}$$

donde Γ_k es la parte de la acción efectiva que contiene términos con las dos derivadas. La expresión (7.5) implica que $\Gamma_k = \tilde{\Gamma}_k$. Por lo anterior, se encuentra que (8.3) se puede escribir como

$$F_1^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\int d^4x x^\mu x^\nu \frac{\delta^2 \tilde{\Gamma}_k}{\delta\pi(x)\delta pi(0)} = -\frac{1}{2}\int d^4x x^\mu x^\nu \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta\pi(x)\delta pi(0)}. \tag{8.5}$$

Teniendo en cuenta la definición del propagador fermiónico

$$iS^{-1} = i\hat{D} - \sigma, \tag{8.6}$$

después de utilizar la expresión (7.5), se encuentra [15]

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 \tilde{\Gamma}}{\delta\pi(x)\delta\pi(0)} &= -itr\left(S(x,0)i\gamma^5 S(x,0)i\gamma^5\right), \\
&= -itr\left(\tilde{S}(x)i\gamma^5 \tilde{S}(-x)i\gamma^5\right), \\
&= -i\int \frac{d^4k d^4q}{(2\pi)^8} \exp(iqx)\, tr\left(\tilde{S}(k)i\gamma^5 \tilde{S}(k+q)i\gamma^5\right),
\end{aligned} \tag{8.7}$$

por lo tanto

$$F_1^{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} tr\left(\tilde{S}(k)i\gamma^5 \frac{\partial^2 \tilde{S}(k)}{\partial k_\mu \partial_\nu} i\gamma^5\right). \tag{8.8}$$

Del mismo modo, se puede encontrar

$$F_1^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} tr\left(\tilde{S}(k)\frac{\partial^2\tilde{S}(k)}{\partial k_\mu \partial_\nu} - \tilde{S}(k)i\gamma^5\frac{\partial^2\tilde{S}(k)}{\partial k_\mu \partial_\nu}i\gamma^5\right). \tag{8.9}$$

Teniendo en cuenta la expresión para $\tilde{S}(k)$, dada por (6.15), si se toma $m=\sigma$, se obtiene [15]

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\tilde{S}(k)}{\partial k_0\partial_0} = 2iN_c\ell^4\int_0^\infty dt t\exp(R(t))[\left(2it(\ell k^0)^2\left[k^0\gamma^0 - k^3\gamma^3+\sigma\right] + 3k^0\gamma^0 - k^3\gamma^3+\sigma\right)\left(1+\eta\gamma^1\gamma^2T\right)\\ -k_\perp^j\gamma_\perp\left(1+2i(\ell k^0)^2t\right)(1+T^2)],\end{aligned} \tag{8.10}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\tilde{S}(k)}{\partial k_3\partial_3} = -2iN_c\ell^4\int_0^\infty dt\ t\exp\left(R(t)\right)[\left(2it(\ell k^0)^2\left[k^0\gamma^0 - k^3\gamma^3+\sigma\right] + k^0\gamma^0 - 3k^3\gamma^3+\sigma\right)\left(1+\eta\gamma^1\gamma^2T\right)\\ -k_\perp^j\gamma_\perp\left(1-2i(\ell k^3)^2t\right)(1+T^2)],\end{aligned} \tag{8.11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\tilde{S}(k)}{\partial k_j\partial_j} = -2iN_c\ell^4\int_0^\infty dt\ T\exp\left(R(t)\right)[\left(2iT(\ell k^j)^2\left[k^0\gamma^0 - k^3\gamma^3+\sigma\right] + k^0\gamma^0 - k^3\gamma^3+\sigma\right)\left(1+\eta\gamma^1\gamma^2T\right)\\ -k_\perp^j\gamma_\perp\left(1-2i(\ell k^j)^2T\right)(1+T^2) - 2k^j\gamma^j(1+T^2)],\end{aligned} \tag{8.12}$$

donde $\eta=(eB)$, $T=\tan t$, $R(t) = i\ell^2t\left(\left(k^0\right)^2 - \left(k^3\right)^2 - \sigma^2\right) - i\ell^2k_{\perp j}^2T$ y $j=1,2$. Las expresiones (6.17), (8.8) y (8.9) implican que los términos no diagonales de $F_1^{\mu\nu}$ y $F_2^{\mu\nu}$ son nulos.

Después de sustituir (6.17) y (8.10) en (8.8), se encuentra que F_1^{00} toma la forma [15]

$$F_1^{00} = \frac{N_c\ell^2}{4\pi^4}\int d^4k\int_0^\infty\int_0^\infty d\tau\ dt\exp\left(T(t)+R(\tau)\right)tA[2i\left(k^0\right)^2t - \left((k^0)^2-(k^3)^2-\sigma^2\right) \tag{8.13}$$

$$+3(k^0)^2-(k^3)^2-\sigma^2 - Mk_{\perp j}^2\left(1+2i(\ell k^0)^2t\right)], \tag{8.14}$$

donde $A=1-T\varepsilon$, $M=(1+T^2)(1+\varepsilon^2)$, $\varepsilon=\tan\tau$. Una vez se ha realizado la integración sobre todo k, se obtiene que

$$F_1^{00} = \frac{N_c}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{d\tau\ dt}{(t+\tau)^2}\tau t\exp\left[-i\ell^2\sigma^2(t+\tau)\right]\left[\frac{A}{T+\varepsilon}\left(\frac{2}{\tau+t}+i\ell^2\sigma^2\right)+\frac{M}{(T+\varepsilon)^2}\right]. \tag{8.15}$$

Haciendo el siguiente cambio de variables [15]

$$t=\frac{s}{2}(1+u), \qquad \tau = \frac{s}{2}(1-u), \tag{8.16}$$

y utilizando el formalismo de tiempo propio de Schwinger, $s\to -is$, es posible obtener

$$\begin{aligned}F_1^{00} &= \frac{N_c}{24\pi^2}\int_0^\infty\frac{ds}{s}\exp\left(-\ell^2\sigma^2s\right)\left[(2s\coth s-2)+\left(\frac{s^2}{\sinh^2 s}-1\right)+\ell^2\sigma^2s^2\coth s\right]+\frac{1}{8\pi^2}\int_{1/\Lambda^2}^\infty\frac{ds}{s}\exp\left(-\ell^2\sigma^2s\right),\\ &= \frac{N_c}{8\pi^2}\left[\ln\left(\frac{\Lambda^2\ell^2}{2}\right)-\psi\left(\frac{\sigma^2\ell^2}{2}+1\right)+\frac{1}{\sigma^2\ell^2}-\gamma+\frac{1}{3}\right],\end{aligned} \tag{8.17}$$

donde se ha usado la expresión (G.9), de tal forma que se ha definido de forma generalizada la función zeta de Riemann [15] [82], además de las relaciones

$$\int_0^\infty \exp(-\beta x)\left(\frac{1}{x}-\coth x\right)dx=\psi\left(1+\frac{\beta}{2}\right)-\ln\left(\frac{\beta}{2}\right)-\frac{1}{\beta};\qquad Re\ \beta>0, \tag{8.18}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\exp(-\beta\tau)}{\sinh^2\tau}=2^{1-\mu}\Gamma(\mu)\left[2\zeta\left(\mu-1,\frac{\beta}{2}\right)-\beta\zeta\left(\mu,\frac{\beta}{2}\right)\right],\qquad \mu>2. \tag{8.19}$$

Las demás funciones $F_1^{\mu\mu}$ y $F_2^{\mu\mu}$ se pueden determinar haciendo un procedimiento similar. A partir de los resultados obtenidos y teniendo en cuenta que estas funciones se pueden calcular siguiendo el método propuesto por [15] [74], entonces se encuentra que $F_1^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}F_1^{\mu\mu}$ y $F_2^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}F_2^{\mu\mu}$, con

$$F_1^{00}=F_1^{33}=\frac{N}{8\pi^2}\left[\ln\left(\frac{\Lambda^2 l^2}{2}\right)\psi\left(\frac{\rho^2 l^2}{2}+1\right)+\frac{1}{\rho^2 l^2}-\gamma+\frac{1}{2}\right], \tag{8.20}$$

$$F_1^{11}=F_1^{22}=\frac{N}{8\pi^2}\left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\rho^2}\right)-\gamma+\frac{1}{3}\right], \tag{8.21}$$

$$F_2^{00}=F_2^{33}=-\frac{N}{24\pi^2}\left[\frac{\rho^2 l^2}{2}\zeta\left(2,\frac{\rho^2 l^2}{2}+1\right)+\frac{1}{\rho^2 l^2}\right] \tag{8.22}$$

$$F_2^{11}=F_2^{22}=\frac{N}{8\pi^2}\left[\rho^4 l^4\psi\left(\frac{\rho^2 l^2}{2}+1\right)-2\rho^2 l^2\ln\Gamma\left(\frac{\rho^2 l^2}{2}\right)-\rho^2 l^2\ln\left(\frac{\rho^2 l^2}{4\pi}\right)-\rho^4 l^4-\rho^2 l^2+1\right], \tag{8.23}$$

donde $\psi(x)=d\ln\Gamma(x)/dx$ [15]. Ya que la expansión es válida para E,$F_\pi\gtrsim k$, donde la constante de decaimiento $F_\pi\sim m_d$, la expansión es buena para describir estados con bajas masas, tales como los bosones de Nambu-Golstone. Los estados de energía del sistema, para cuando el sistema se encuentra en la región subcrítica $g<g_c$, con $g\ll g_c=1$, se encuentra que están dados por

$$E_\pi\simeq\left(\frac{(m_d l)^2(\Lambda l)^2}{g}k_\perp^2\right)^{1/2}, \tag{8.24}$$

donde la masa dinámica corresponde a la hallada en las sección (7.1). Por lo tanto, π es un modo de un bosón Nambu-Goldstone sin gap, como se debería esperar [15]. Teniendo en cuenta que la forma de las masa dinámica encontrada, se tiene que la velocidad transversal de π es menor que 1. En la región casi crítica, se cumple que el espectro de energía está dado por

$$E_\pi\simeq\left[\left(1-\frac{1}{\ln\left(\ln\Lambda^2 l^2\right)}\right)k_\perp^2\right]^{1/2}. \tag{8.25}$$

Es de notar, que las expansiones hechas sobre las expresiones (8.24) y (8.25) son válidas únicamente para E_π, $k_\perp$ y $F_\pi\sim m_d$. Por otro lado, las expresiones (8.24) y (8.25) no pueden ser usadas cuando cuando $|eB|\to 0$. De hecho, en este caso, $F_\pi\sim m_d$ tiende a cero, de modo que las relaciones mencionadas dejan de ser válidas en la región infrarroja.

Para la región supercrítica definida por $g>g_c=1$ y para campo magnético débil, se tiene que el valor del espectro de energía es

$$E_\pi\simeq\left[\left(1-\frac{(eB)^2}{3m_d^4\ln\left(\Lambda/m_d\right)^2}\right)k_\perp^2\right]^{1/2}. \tag{8.26}$$

Se puede observar que para este caso, el campo magnético reduce la velocidad transversal $v_\perp$ de π. Para la región casi crítica, cumpliéndose que $g-g_c\ll 1$, se encuentra que el espectro de energía está dado por

$$E_\pi \simeq \left[\left(1 - \frac{1}{\ln \Lambda^2 l^2} \frac{(eB)^2}{2m_d^4} \right) k_\perp^2 \right]^{1/2}. \tag{8.27}$$

El presente modelo ilustra el fenómeno general que se presenta en (2+1) dimensiones: En la región infrarroja, un campo magnético reduce la dinámica de los fermiones generando masa dinámica, como evidencia de la ruptura dinámica de la simetría quiral [15].

9. CONCLUSIONES

En esta tesis de maestría se ha considerado un sistema constituido por fermiones relativistas, de espín 1/2, cargados eléctricamente, restringidos a moverse en un plano y sometidos a la acción de un campo magnético uniforme exterior, perpendicular al plano de movimiento, sin y con presencia adicional del potencial del oscilador de Dirac. Lo anterior ha permitido que se haya estudiado la existencia de un condensado magnético, la generación de una masa magnética y la ruptura dinámica de la simetría quiral $U(1)_R \times U(1)_L$. Lo anterior se ha realizado, solucionando inicialmente la ecuación de Dirac libre en (2+1) dimensiones, obteniendo sus funciones de onda de probabilidad. Se ha implementado un procedimiento de cuantización canónica para el campo de Dirac libre en (2+1) dimensiones. Adicionalmente, se ha mostrado que la densidad lagrangiana que describe a este sistema es invariante bajo transformaciones gauge globales $U(1)$ y que para el caso de fermiones sin masa el sistema es invariante quiral global $U(1)_L \times U(1)_R$.

Así mismo, se ha solucionando la ecuación de Dirac en (2+1) dimensiones en presencia de un campo magnético uniforme externo, obteniendo sus funciones de onda de probabilidad y sus respectivos espectros de energía. A continuación, se ha mostrado que la densidad lagrangiana que describe a este último sistema es invariante bajo transformaciones gauge locales $U(1)$ y que, para el caso de fermiones sin masa, el sistema es invariante quiral local $U(1)_L \times U(1)_R$.

A continuación, se ha solucionado la ecuación de Dirac en (2+1) dimensiones en presencia de un potencial lineal, es decir, se ha solucionado la ecuación del oscilador de Dirac libre en (2+1) dimensiones, obteniendo tanto su espectro de energía como sus funciones de onda de probabilidad. Para este sistema, se ha mostrado que su respectiva densidad lagrangiana es invariante bajo transformaciones gauge globales $U(1)$ y que para el caso de fermiones sin masa, el sistema no posée simetría quiral global $U(1)_L \times U(1)_R$, dado que el término de interacción mezcla las componentes de quiralidad. A partir de escribir el potencial del oscilador de Dirac en forma covariante, se ha mostrado formalmente que el oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones describe la dinámica de un fermión relativista con carga eléctrica restringido a moverse en un plano y sometido a la acción de un campo magnético uniforme perpendicular al plano, el cual en esta tesis hemos llamado campo magnético uniforme interno (B_I).

También se ha solucionado la ecuación de Dirac en (2+1) dimensiones en presencia tanto del campo magnético uniforme externo como del potencial lineal, es decir se ha estudiado la dinámica del oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones interactuando con un campo magnético uniforme externo, obteniendo tanto su espectro de energía como sus funciones de onda de probabilidad. Para este sistema se ha mostrado que su respectiva densidad lagrangiana es invariante bajo transformaciones gauge locales $U(1)$ y que para el caso de fermiones sin masa, el sistema no es invariante quiral local $U(1)_L \times U(1)_R$, dado que el término de interacción asociado al potencial del oscilador de Dirac mezcla las componentes de quiralidad, lo cual implica que este término produce una ruptura explícita de la mencionada simetría quiral local.

En esta tesis de maestría se ha estudiado el condensado magnético y la masa magnética para: un fermión relativista restringido a moverse en un plano interactuándo con un campo magnético uniforme exterior y perpendicular al plano; un oscilador de Dirac libre en (2+1) dimensiones; un oscilador de Dirac en (2+1) dimensiones interactuándo con un campo magnético uniforme exterior perpendicular al plano. El condensado magnético ha sido obtenido para el primer sistema, de dos formas: (i) a partir del cálculo del propagador fermiónico que es derivado mediante el formalismo de tiempo propio de Schwinger; (ii) a partir del cálculo del valor esperado del producto de los operadores de campo. Se ha mostrado que los dos procedimientos de cálculo conducen al mismo resultado. Para los otros dos sistemas, se ha usado el segundo procedimiento mencionado para calcular el condensado magnético. Por otra parte, el cálculo de la masa magnética para los tres sistemas fue realizado mediante un procedimiento basado en el formalísmo de tiempo propio de Schwinger.

Por último, para el caso de fermiones sin masa sometidos únicamente a la acción de un campo magnético uniforme externo y usando el formalismo de Schwinger, se ha estudiado la ruptura dinámica de la simetría quiral local $U(1)_L \times U(1)_R$. Cabe mencionar que la masa magnética (o dinámica) se ha producido para el caso estudiado debido a la interacción del fermión con el campo magnético uniforme exterior, mientras que la ruptura dinámica de la simnetría quiral se ha producido debido a que la masa generada dinámicamemnte rompe la simetria quiral local del sistema considerado.

ANEXOS

A. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DE HEISENBERG PARA EL OPERADOR $\hat{\psi}$

Partiendo de la ecuación (2.31)

$$\dot{\hat{\psi}} = -i\left[\hat{\psi}, \hat{H}\right],$$

ésta relación se expande utilizando la expresión (2.76), con lo cual

$$\dot{\hat{\psi}} = -i\left[\hat{\psi}, \int d^2x \ \left(-i\hat{\psi}^\dagger \alpha_j \partial_j \psi + \hat{\psi}^\dagger \beta m \psi\right)\right],$$

$$\dot{\hat{\psi}} = -\left[\hat{\psi}, \int d^2x \ \left(\hat{\psi}^\dagger \alpha_j \partial_j \psi + i\hat{\psi}^\dagger \beta m \psi\right)\right]. \tag{A.1}$$

Los conmutadores que se operan en la expresión (A.1), pueden ser reescritos usando la siguiente identidad [67]

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right] = \left\{\hat{A}, \hat{B}\right\}\hat{C} - \hat{B}\left\{\hat{A}, \hat{C}\right\}, \tag{A.2}$$

de tal forma que las reglas de anticonmutación (2.29) pueden ser usadas. Para evitar confusiones, se omite la variable temporal, la cual estará implícita de ahora en adelante

$$\dot{\hat{\psi}}_\sigma = -\left[\hat{\psi}_\sigma, \int d^2x \ \hat{\psi}^\dagger_\alpha \alpha_j \partial_j \psi_\beta\right] - \left[\hat{\psi}_\sigma, \int d^2x \ i\hat{\psi}^\dagger_\alpha \beta m \psi_\beta\right],$$

$$\dot{\hat{\psi}}_\sigma = -\int d^2x \ \left[\hat{\psi}_\sigma, \hat{\psi}^\dagger_\alpha \alpha_j \partial_j \psi_\beta\right] - \int d^2x \ \left[\hat{\psi}_\sigma, i\hat{\psi}^\dagger_\alpha \beta m \psi_\beta\right],$$

$$\dot{\hat{\psi}}_\sigma = -\int d^2x \ \left(\left\{\hat{\psi}_\sigma, \hat{\psi}^\dagger_\alpha\right\}\alpha_j \partial_j \psi_\beta - \hat{\psi}^\dagger_\alpha\left\{\hat{\psi}_\sigma, \alpha_j \partial_j \psi_\beta\right\} + im\left\{\hat{\psi}_\sigma, \hat{\psi}^\dagger_\alpha\right\}\beta\psi_\beta - im\psi^\dagger_\alpha\left\{\hat{\psi}_\sigma, \beta\psi_\beta\right\}\right),$$

$$\dot{\hat{\psi}}_\sigma = -\int d^2x \ \left(\delta_{\sigma\alpha}\delta(x-x')\delta(y-y')\alpha^j_{\alpha\beta}\partial^{j\prime}\hat{\psi}_\beta + im\delta_{\sigma\alpha}\delta(x-x')\delta(y-y')\beta_{\alpha\beta}\hat{\psi}_\beta\right),$$

$$\dot{\hat{\psi}}_\sigma = -\left(\alpha_j\partial_j + im\beta\right)_{\sigma\beta}\hat{\psi}_\beta,$$

$$\dot{\hat{\psi}}_\sigma = \left(-\alpha_j\partial_j - im\beta\right)\hat{\psi}.$$

La expresión (A.3) es idéntica a la ecuación (2.32).

B. ORTOGONALIDAD DE LAS FUNCIONES DE ONDA DE PROBABILIDAD DEL OSCILADOR DE DIRAC LIBRE EN (2+1) DIMENSIONES

Para verificar la ortogonalidad de las funciones de onda de probabilidad que describen los estados cuánticos del oscilador de Dirac libre en (2+1) dimensiones, se toma como guía el procedimiento realizado por [30]. Se supone que si se tiene una función de onda de la forma

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} f_n(x) \\ g_n(x) \end{pmatrix}, \tag{B.1}$$

por lo cual, la condición de ortogonalidad, para este tipo de funciones de onda, está dada por [30]

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f_n(x)f_m(x) + g_n(x)g_m(x)] = \delta_{nm}. \tag{B.2}$$

Retomando las funciones de onda del oscilador de Dirac

$$\psi_P^A(x,y,t) = N_n^+ \exp\left(-iE_n^+ t + ipy\right) \begin{pmatrix} \left(|E_n^+| + m\right) I^+(x,p,n) \\ -\sqrt{2eB_I n} I^+(x,p,n-1) \end{pmatrix}, \tag{B.3}$$

$$\psi_N^A(x,y,t) = N_n^- \exp\left(iE_n^+ t - ipy\right) \begin{pmatrix} \sqrt{2eB_I n} I^+(x,p,n) \\ \left(|E_n^+| + m\right) I^+(x,p,n-1) \end{pmatrix}, \tag{B.4}$$

donde

$$N_n^+ = \frac{1}{\sqrt{2|E_n^+|\left(|E_n^+| + m\right)}}, \qquad E_n^+ = \sqrt{m^2 + 2|eB_I|n}, \tag{B.5}$$

$$I^+(x,p,n) = \left(\frac{|eB_I|}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left[\sqrt{eB_I}\left(x - \frac{p}{|eB_I|}\right)\right] \exp\left[-\frac{|eB_I|}{2}\left(x - \frac{p}{|eB_I|}\right)^2\right], \tag{B.6}$$

de tal manera que $H_n\left[\sqrt{eB_I}\left(x - \frac{p}{|eB_I|}\right)\right]$ representa los polinomios de Hermite. Teniendo en cuenta la forma de las funciones de onda de probabilidad del oscilador de Dirac libre en (2+1) dimensiones, entonces se introduce, como ejemplo, las componentes de la función de onda (B.3)[1].

[1] El mismo procedimiento se puede realizar con la función de onda de probabilidad que describe los estados de energía negativa, obteniendo resultados similares.

C. FORMALISMO DE TIEMPO PROPIO DE SCHWINGER

En este anexo presentaremos algunos de los aspectos más importantes del formalismo de tiempo propio de Schwinger, que corresponde a una formulación de la QED equivalente a las integrales de camino de Feynman. Comenzaremos por estudiar las generalidades de este método, como es el estudio de las funciones de Green del campo de Dirac incluyendo campos electromagnéticos generales e incluyendo algunas de sus propiedades más importantes, como lo son la ecuación diferencial que satisfacen y los operadores físicos involucrados dentro de esta.

Posteriormente, se estudia la densidad de corriente electromagnética $j_\mu(\vec{x})$, la cual tiene como su origen la variación del 4-potencial electromagnético. Esta corriente es una cantidad que se torna muy importante de calcular en el vacío del campo de Dirac. No obstante, la variación del 4-potencial electromagnético no se puede realizar sin utilizar una función acción. Ésta función nos conduce a la formulación de una densidad lagrangiana para el sistema y por lo tanto a unas ecuaciones de movimiento.

Además, se obtiene el operador evolución temporal para este sistema físico, teniendo en cuenta las condiciones tanto iniciales como de frontera del mismo. Luego, se calculan los 4-momentos del sistema y la constante de normalización.

Finalmente, estudiamos lo mencionado anteriormente, teniendo en cuenta que los campos electromagnéticos son constantes, para lo cual calculamos tanto su densidad lagrangiana como la función de Green asociada a este tipo de campos físicos.

C.1 ***Generalidades***

El cálculo del propagador fermiónico se basa en [4], donde fue desarrollado el procedimiento para un campo electromagnético general. Las ecuaciones para los campos ψ y $\bar{\psi}$, sus relaciones de anticonmutación[1] y el vector de corriente electromagnética están dados por

$$\gamma_\mu \left(-i\partial_\mu - eA_\mu\right) \psi(x,t) + m\psi(x,t) = 0, \tag{C.1}$$

$$\left(i\partial_\mu - eA_\mu\right) \bar{\psi}(x',t)\gamma_\mu + m\bar{\psi}(x',t) = 0, \tag{C.2}$$

$$\left\{\psi(x,t), \bar{\psi}(x',t)\right\} = \gamma_0 \delta\left(x - x'\right), \tag{C.3}$$

$$j_\mu(x) = \frac{1}{2} e\left[\bar{\psi}(x,t), \gamma_\mu \psi(x',t)\right], \tag{C.4}$$

donde $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, A_μ es 4-potencial electromagnético y $\gamma_0 = -i\gamma_4$. El vector de corriente electromagnética resulta de una simetrización explícita usando ordenamiento temporal [4]. Entonces, con esta notación, el ordenamiento temporal se escribe como [4] [65]

$$\left(A(t_0), B(t_0')\right) = \begin{cases} A(t_0)B(t_0'), & t_0 > t_0', \\ B(t_0')A(t_0), & t_0' < t_0 \end{cases}, \tag{C.5}$$

[1] A diferencia de [4], en este caso se tomaron relaciones de anticonmutación, debido a que se están estudiando campos fermiónicos que obedecen este tipo de relaciones entre operadores.

y

$$\epsilon\left(\vec{x}-\vec{x}'\right)=\begin{cases}1, & t_0>t_0',\\ -1, & t_0'<t_0\end{cases}. \tag{C.6}$$

Usando (C.5) y (C.6), se puede definir

$$\left(\psi_\alpha(\vec{x}),\psi_\beta\left(\vec{x}'\right)\right)\epsilon\left(x-x'\right)=\begin{cases}\psi_\alpha(\vec{x})\bar{\psi}_\beta\left(\vec{x}'\right), & t_0>t_0'\\ -\bar{\psi}_\beta\left(\vec{x}'\right)\psi_\alpha(\vec{x}), & t_0'>t_0\end{cases}, \tag{C.7}$$

por lo tanto

$$\frac{1}{2}\left[\psi_\alpha(\vec{x}),\bar{\psi}_\beta\left(\vec{x}'\right)\right]=\left(\psi_\alpha(\vec{x}),\psi_\beta\left(\vec{x}'\right)\right)\epsilon\left(\vec{x}-\vec{x}'\right). \tag{C.8}$$

La cantidad que nos interesa conocer, en este caso, es el valor esperado de $j_\mu(\vec{x})$ en el vacío del campo de Dirac, o sea

$$\langle j_\mu(\vec{x})\rangle=ie\;tr\left(\gamma_\mu G\left(\vec{x},\vec{x}'\right)\right), \tag{C.9}$$

donde

$$G\left(\vec{x},\vec{x}'\right)=i\left\langle\left(\psi(\vec{x})\,\bar{\psi}\left(\vec{x}'\right)\right\rangle\epsilon\left(\vec{x}-\vec{x}'\right). \tag{C.10}$$

La función de Green satisface la siguiente ecuación diferencial no homogénea

$$\left[\gamma^\mu\left(-i\partial_\mu-eA_\mu\right)+m\right]G\left(\vec{x},\vec{x}'\right)=\left\langle\gamma_0\left\{\psi\left(\vec{x}\right),\bar{\psi}\left(\vec{x}'\right)\right\}\right\rangle\delta\left(t_0-t_0'\right). \tag{C.11}$$

El lado derecho de (C.11) expresa que existe una discontinuidad de la carga eléctrica en la función de Green que es modificada en t_0. Usando (C.3) se tiene que

$$\left[\gamma^\mu\left(-i\partial_\mu-eA_\mu\right)+m\right]G\left(\vec{x},\vec{x}'\right)=\left\langle\gamma_0\gamma_0\delta\left(\vec{x}-\vec{x}'\right)\right\rangle\delta\left(t_0-t_0'\right),$$

$$\left[\gamma^\mu\left(-i\partial_\mu-eA_\mu\right)+m\right]G\left(\vec{x},\vec{x}'\right)=\delta\left(\vec{x}-\vec{x}'\right). \tag{C.12}$$

La función $G\left(\vec{x},\vec{x}'\right)$ se denomina la función de Green para el campo de Dirac. De otro lado, es útil considerar $G\left(\vec{x},\vec{x}'\right)$ como el elemento de una matriz de un operador $\hat{G}$ en el cual los estados se escriben como coordenadas en el espacio-tiempo. De esta manera, omitiendo los índices espinoriales, se puede obtener

$$G\left(\vec{x},\vec{x}'\right)=\left\langle x|G|x'\right\rangle. \tag{C.13}$$

La ecuación diferencial, que define la función de Green entonces considera los elementos de la matriz del operador $\hat{G}$, es

$$\left(\gamma^\mu\Pi_\mu+m\right)\hat{G}=\mathbf{1};\qquad \Pi_\mu=p_\mu-eA_\mu. \tag{C.14}$$

La anterior expresión tiene las siguientes propiedades

$$\left[x_\mu,\Pi_\nu\right]=i\delta_{\mu\nu},\qquad \left[\Pi_\mu,\Pi_\nu\right]=ieF_{\mu\nu},F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu. \tag{C.15}$$

Además $F_{\mu\nu}$ es el tensor de campo electromagnético, el cual es antisimétrico [4]. Teniendo en cuenta las anteriores definiciones, se teien que

$$\langle j_\mu\left(\vec{x}\right)\rangle=ie\;tr\left(\gamma_\mu G\left(\vec{x},\vec{x}'\right)\right). \tag{C.16}$$

La expresión (C.16) es obtenida por la variación de $A_\mu(x)$. Lo anterior se consigue a partir de la variación de la acción [2] [3] [4]

$$\delta W^{(1)} = \int d^3x \delta A_\mu\left(\vec{x}\right)\left\langle j_\mu\left(\vec{x}\right)\right\rangle = i\ tr\left(\gamma^\mu \delta A_\mu G\left(\vec{x},\vec{x}'\right)\right), \tag{C.17}$$

de tal forma que la anterior variación se realiza como un diferencial total, además que $\delta A_\mu(\vec{x})$ tiende a infinito. Para resolver lo anterior, en [2] [3] se tomó una segunda versión de $\delta W^{(1)}$, en la cual $\delta A_\mu(\vec{x})$ se convierte en un operador que se puede representar como

$$\left\langle x|\delta A_\mu(\vec{x})|x'\right\rangle = \delta\left(\vec{x}-\vec{x}'\right)\delta_\mu\left(\vec{x}\right). \tag{C.18}$$

Usando (C.18) en (C.14), se obtiene

$$-e\gamma^\mu \delta A_\mu = \delta\left(\gamma^\mu \Pi_\mu + m\right), \tag{C.19}$$

y de esta manera, se puede reescribir la función de Green como

$$\hat{G} = \frac{1}{\left(\gamma^\mu \Pi_\mu + m\right)} = i\int_0^\infty \exp\left[-i\left(\gamma^\mu \Pi_\mu + m\right)s\right], \tag{C.20}$$

de modo que

$$ie\ tr\left(\gamma^\mu \delta A_\mu G\left(\vec{x},\vec{x}'\right)\right) = \delta\left(i\int_0^\infty s^{-1}\exp\left[-i\left(\gamma^\mu \Pi_\mu + m\right)s\right]\right). \tag{C.21}$$

Usando una propiedad de la traza [4]

$$tr\left(AB\right) = tr\left(BA\right), \tag{C.22}$$

entonces, se puede escribir

$$\begin{aligned} W^{(1)} &= i\int_0^\infty ds s^{-1}\exp\left(-ims\right)\ tr\left(\exp\left[-i\gamma^\mu \Pi_\mu s\right]\right), \\ W^{(1)} &= \int d^4x \mathcal{L}^{(1)}\left(\vec{x}\right). \end{aligned} \tag{C.23}$$

De la expresión (C.23), se puede concluir que $W^{(1)}$ puede ser interpretada físicamente como una acción. Esta acción fue obtenida a través de un formalismo llamado de tiempo propio, que fue representado a través de la variable s. Teniendo en cuenta la anterior expresión, la densidad lagrangiana está dada por

$$\mathcal{L}^{(1)}\left(\vec{x}\right) = i\int_0^\infty ds\ s^{-1}\exp\left(-ims\right)\ tr\left(\left\langle x\right|\exp\left(-i\gamma^\mu \Pi_\mu s\right)\left|x\right\rangle\right). \tag{C.24}$$

Se puede reescribir la anterior expresión, en una representación alternativa, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \hat{G} &= \left(-\gamma^\mu \Pi_\mu + m\right)\left[m^2 - \left(\gamma^\mu \Pi_\mu\right)^2\right]^{-1}, \\ &= \left[m^2 - \left(\gamma^\mu \Pi_\mu\right)^2\right]^{-1}\left(-\gamma^\mu \Pi_\mu + m\right), \\ &= \frac{\left(-\gamma^\mu \Pi_\mu + m\right)}{m^2 - \left(\gamma^\mu \Pi_\mu\right)^2}, \\ &= \frac{\left(-\gamma^\mu \Pi_\mu + m\right)}{\left(m - \gamma^\mu \Pi_\gamma\right)\left(m + \gamma^\mu \Pi_\gamma\right)}, \\ &= \left(-\gamma^\mu \Pi_\mu + m\right) i\int_0^\infty ds\ \exp\left[-i\left(m^2 - \left(\gamma^\mu \Pi_\mu\right)^2\right)s\right], \\ \hat{G} &= i\int_0^\infty ds\ \exp\left[-i\left(m^2 - \left(\gamma^\mu \Pi_\mu\right)^2\right)s\right]\left(-\gamma^\mu \Pi_\mu + m\right). \end{aligned} \tag{C.25}$$

Utilizando el hecho de que la traza de la matriz gamma se anula cuando ésta es impar, entonces

$$\begin{aligned} ie\ tr\left(\gamma^\mu \delta A_\mu G\left(\vec{x},\vec{x}'\right)\right) &= tr\left(\gamma^\mu \Pi_\mu\right)\gamma^\mu \Pi_\mu \int_0^\infty ds\ \exp\left[-i\left(m^2-\left(\gamma^\mu\Pi_\mu\right)^2\right)s\right], \\ &= \delta\left[\frac{1}{2}i\int_0^\infty ds\ s^{-1}\exp\left[-i\left(m^2-\left(\gamma^\mu\Pi_\mu\right)^2 s\right)\right]\right]. \end{aligned} \tag{C.26}$$

Usando de nuevo (C.22), se obtiene

$$\mathcal{L}^{(1)}(\vec{x}) = \frac{i}{2}\int_0^\infty ds\ s^{-1}\exp\left(-ims^2\right)\ tr\left(\langle x|U(s)|x\rangle\right), \tag{C.27}$$

$$U(s) = \exp\left(-i\mathcal{H}s\right). \tag{C.28}$$

La expresión (C.28) corresponde al operador evolución temporal para campos. Además [4]

$$\mathcal{H} = \left(\gamma^\mu\Pi_\mu\right)^2 = \Pi_\mu^2 - \frac{1}{2}e\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{C.29}$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma_\mu,\gamma_\nu\right]. \tag{C.30}$$

Ahora, teniendo en cuenta que para construir $G(\vec{x},\vec{x}')$ y $\mathcal{L}^{(1)}\left(\vec{x}\right)$ se requiere calcular

$$\left\langle x'|U(s)|x''\right\rangle = \left\langle x'(s)|x''(0)\right\rangle, \tag{C.31}$$

lo anterior conduce a un problema dinámico en el cual las coordenadas del espacio-tiempo de una "partícula" dependen del tiempo propio. Este hecho conduce a las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\frac{dx_\mu}{ds} = -i\left[x_\mu,\mathcal{H}\right] = 2\Pi_\mu, \tag{C.32}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_\mu}{ds} = -i\left[\Pi_\mu,\mathcal{H}\right] &= e\left(F_{\mu\nu}\Pi_\nu + \Pi_\nu F_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}e\sigma^{\lambda\nu}\left(\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{dx_\mu}\right), \\ &= 2eF_{\mu\nu}\Pi_\nu - ie\left(\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\right) + \frac{1}{2}e\sigma^{\mu\nu}\left(\frac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu}\right). \end{aligned} \tag{C.33}$$

Por otro lado, la función de transformación está caracterizado por las siguientes ecuaciones diferenciales [4]

$$i\partial_s\left\langle x'(s)|x''(0)\right\rangle = \left\langle x'(s)|\mathcal{H}|x''(0)\right\rangle, \tag{C.34}$$

$$\left(-i\partial'_\mu - eA_\mu\left(x'\right)\right)\left\langle x'(s)|x''(0)\right\rangle = \left\langle x'(s)|\Pi_\mu(s)|x''(0)\right\rangle, \tag{C.35}$$

$$\left(-i\partial''_\mu - eA_\mu\left(x''\right)\right)\left\langle x'(s)|x''(0)\right\rangle = \left\langle x'(s)|\Pi_\mu(0)|x''(0)\right\rangle, \tag{C.36}$$

la cual tiene asociada la siguiente condición de frontera

$$\left\langle x'(s)|x''(s)\right\rangle_{s\to 0} = \delta\left(x'-x''\right). \tag{C.37}$$

Si se considera la situación elemental, es decir $F_{\mu\nu}=0$, entonces las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{d\Pi_\mu}{ds} = 0; \qquad \frac{dx_\mu}{ds} = 2\Pi_\mu, \tag{C.38}$$

de donde se tiene que

$$\Pi_\mu(s) = \Pi_\mu(0); \qquad \frac{x_\mu - x_0}{s} = 2\Pi_\mu(0). \tag{C.39}$$

A partir de (C.39), se observa una condición de frontera periódica en el 4-momento de los campos estudiados. Además [4] [65]

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = \Pi_\mu^2 &= \frac{1}{4}s^{-2}\left[x(s) - x(0)\right]^2, &\text{(C.40)}\\
&= \frac{1}{4}s^{-2}\left[x^2(s) - 2x(s)x(0) + x^2(0)\right] + \frac{1}{4}s^{-2}\left[x(s), x(0)\right],\\
&= \frac{1}{4}s^{-2}\left[x^2(s) - 2x(s)x(0) + x^2(0)\right] - 2is^{-1}, &\text{(C.41)}
\end{aligned}$$

ya que

$$[x_\mu(s), x_\nu(0)] = [x_\mu(0) + 2s\pi_0, x_\nu(0)] = -2is\delta_{\mu\nu}. \tag{C.42}$$

Con estos resultados, es posible reescribir (C.35) como

$$i\partial_s \left\langle x'(s)|x''(0)\right\rangle = \left[\frac{1}{4}s^{-2}\left(x' -'' -2is^{-1}\right]\left\langle x'(s)|x''(0)\right\rangle . \text{(C.43)}$$

La solución de la anterior ecuación diferencial es

$$\left\langle x'(s)|x''(0)\right\rangle = C\left(x', x''\right)s^{-2}\exp\left[\frac{i}{4}\frac{\left(x' - x''\right)^2}{s}\right]. \tag{C.44}$$

Para determinar la función $C\left(x', x''\right)$, se observa que se cumple la siguiente condición de frontera periódica para el operador Π_μ

$$\begin{aligned}
\left\langle x'(s)|\Pi_\mu(s)|x''(0)\right\rangle &= \left\langle x'(s)|\Pi_\mu(0)|x''(0)\right\rangle,\\
&= \frac{\left(x'_\mu - x''_\mu\right)}{2s}\left\langle x'(s)|x''(0)\right\rangle. &\text{(C.45)}
\end{aligned}$$

Usando las relaciones (C.36) y (C.37), implica que la ecuación diferencial (C.43) se convierte en

$$\begin{aligned}
\left(-i\partial'_\mu - eA_\mu(x')\right)C(x', x'') = \left(i\partial''_\mu - eA_\mu(x'')\right)C(x', x'') = 0, &\qquad\text{(C.46)}\\
C(x', x'') = C\phi\left(x', x''\right),&\\
\phi\left(x', x''\right) = \exp\left[ie\int_{x'}^{x''} dx^\mu A_\mu(x)\right]. &\qquad\text{(C.47)}
\end{aligned}$$

La integral (C.47) es independiente del camino de integración debido a que no hay un tensor de campo electromagnético, es decir $F_{\mu\nu} = 0$. Finalmente, la constante C se determina con base en la condición de frontera (C.37). Se puede observar que la expresión (C.44) se comporta como una función delta de Dirac cuando $s \to 0$ [4] [82]

$$Cs^{-2}\int dx \exp\left(\frac{i}{4}\frac{x^2}{2}\right) = 1, \tag{C.48}$$

lo cual implica que

$$C = -i\,(4\pi)^{-2}\,. \tag{C.49}$$

Por lo anterior

$$\left\langle x'(s)|x''(0)\right\rangle = -i\,(4\pi)^{-2}\,\phi\left(x',x''\right)\; s^{-2}\exp\left[\frac{i}{4}\frac{\left(x'-x''\right)^2}{s}\right], \tag{C.50}$$

mientras que la función de Green toma la forma

$$\begin{aligned} G\left(x',x''\right) &= i\int_0^\infty ds\;\exp\left(-im^2 s\right)\left\langle x'(s)\right|\left(-\gamma^\mu\Pi_\mu+m\right)\left|x''(0)\right\rangle, \\ &= (4\pi)^{-2}\,\phi\left(x',x''\right)\int_0^\infty s^{-2}\exp\left(-im^2 s\right)\left(-\gamma^\mu\frac{\left(x'_\mu-x''_\mu\right)}{2s}+m\right)\exp\left(-i\frac{\left(x'-x''\right)^2}{4s}\right). \end{aligned} \tag{C.51}$$

Un procedimiento equivalente se tiene si se utiliza la representación de los valores propios del operador Π_μ, con lo cual

$$\begin{aligned} \left\langle\Pi'(s)|\Pi''(0)\right\rangle &= \left\langle\Pi'(s)|U(s)|\Pi''(0)\right\rangle, \\ &= \delta\left(\Pi'-\Pi''\right)\exp\left(-i\Pi'^2 s\right), \end{aligned} \tag{C.52}$$

mientras que $\langle x'(s)|\Pi'(s)\rangle$ es

$$\left(-\partial'_\mu - eA_\mu(x')\right)\left\langle x'(s)|\Pi'(s)\right\rangle = \Pi'_\mu\left\langle x'(s)|\Pi'(s)\right\rangle, \tag{C.53}$$

y la condición de normalización que debe cumplir es

$$\int\left\langle\Pi'(s)|x'(s)\right\rangle dx'\left\langle x'(s)|\Pi'(s)\right\rangle = \delta\left(\Pi'-\Pi''\right). \tag{C.54}$$

Por lo anterior

$$\left\langle x'(s)|\Pi'(s)\right\rangle = (2\pi)^{-2}\exp\left(ie\int_0^{x'}dx^\mu A_\mu\right)\exp\left(ix'\Pi'\right), \tag{C.55}$$

mientras que

$$\begin{aligned} \left\langle x'(s)|x''(0)\right\rangle &= \int\left\langle x'(s)|\Pi'(s)\right\rangle d\Pi' d\Pi''\left\langle\Pi''(0)|x''(0)\right\rangle, \\ &= (2\pi)^{-4}\,\phi\left(x',x''\right)\int d\Pi'\exp\left[-i\left(x'-x''\right)\Pi'-i\Pi' s\right]. \end{aligned} \tag{C.56}$$

Finalmente, la función de Green se puede escribir como

$$G\left(x',x''\right) = i\,(2\pi)^{-4}\,\phi\left(x',x''\right)\int_0^\infty ds\int d\Pi'\exp\left[i\left(x'-x''\right)\Pi'\right]\left(-\gamma^\mu\Pi_\mu+m\right)\exp\left[-i\left(\Pi'^2+m^2\right)s\right]. \tag{C.57}$$

C.2 Campos constantes

Las ecuaciones de movimiento (C.32) y (C.33) para campos constantes toman la forma

$$\frac{dx_\mu}{ds} = 2\Pi_\mu, \qquad \frac{d\Pi_\mu}{ds} = 2eF_{\mu\nu}\Pi^\nu, \tag{C.58}$$

o de forma equivalente

$$\frac{dx_\mu}{ds} = 2\Pi_\mu, \qquad \frac{d\Pi^\mu}{ds} = 2eF_{\mu\nu}\Pi\ \nu. \tag{C.59}$$

Sin embargo, por conveniencia se utiliza la forma (C.58) para describir los campos constantes. Las soluciones, tanto de las ecuaciones (C.58) como de (C.59), están dadas por

$$\Pi_\mu(s) = \exp\left[2eF_{\mu\nu}\right]\Pi_\nu(0), \tag{C.60}$$

$$x_\delta(s) - x_\delta(0) = \left[\frac{\exp\left(2eF^{\mu\nu}s\right) - 1}{eF_{\mu\nu}}\right]\Pi_\delta(0), \tag{C.61}$$

de donde

$$\begin{aligned} \Pi_\delta(0) &= eF_{\mu\nu}\left(\exp\left[-2eF^{\mu\nu}s\right] - 1\right)^{-1}\left(x_\delta(s) - x_\delta(0)\right), &\text{(C.62)}\\ &= \frac{1}{2}eF_{\mu\nu}\exp\left[-eF^{\mu\nu}s\right]\sinh^{-1}\left(eF^{\mu\nu}s\right)\left(x_\delta(s) - x_\delta(0)\right), &\text{(C.63)} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Pi_\delta &= \frac{1}{2}eF_{\mu\nu}\exp\left(eF^{\mu\nu}s\right)\sinh^{-1}\left(eF^{\gamma\delta}\right)\left(x_\gamma(s) - x_\gamma(0)\right), &\text{(C.64)}\\ &= \left(x_\beta(s) - x_\beta(0)\right)\frac{1}{2}eF_{\beta\gamma}\exp\left[-eF_{\gamma\omega}s\right]\sinh\left(eF_{\omega\delta}s\right). &\text{(C.65)} \end{aligned}$$

Lo anterior implica que el tensor electromagnético es antisimétrico, es decir

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}. \tag{C.66}$$

Ahora se considera

$$\mathcal{H} + \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \Pi^2(s) = \left[x_\gamma(s) - x_\gamma(0)\right]k^{\gamma\delta}\left[x_\delta(s) - x_\delta(0)\right], \tag{C.67}$$

$$k^{\gamma\delta} = \frac{1}{4}e^2\left(F^{\mu\nu}\right)^2\sinh^{-2}\left(eF^{\gamma\delta}s\right), \tag{C.68}$$

de tal forma que para reescribir los anteriores operadores se requiere conocer los siguientes conmutadores

$$\begin{aligned} \left[x(s), x(0)\right] &= \left[x(0) + \left(eF^{\mu\nu}\right)^{-1}\left[\exp\left(eF_{\mu\nu}s\right) - 1\right]\Pi(0), x(0)\right],\\ &= i\left(eF^{\mu\nu}\right)^{-1}\left[\exp\left(2eF_{\mu\nu}s\right) - 1\right]. &\text{(C.69)} \end{aligned}$$

Usando la anterior relación de conmutación, se puede reescribir la expresión (C.67) de la siguiente manera

$$\mathcal{H} + \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \Pi^2(s) = x_\delta(s)k^{\delta\gamma}x_\gamma(s) - 2x_\delta k^{\delta\gamma}x_\gamma(0) + x_\delta(0)k^{\delta\gamma}x_\gamma(0) - \frac{1}{2}i\mathrm{Tr}\left[eF^{\mu\nu}\cosh\left(eF_{\mu\nu}s\right)\right], \tag{C.70}$$

en donde se ha utilizado el hecho que

$$\mathrm{Tr}\left(F^{\mu\nu}\right) = 0, \tag{C.71}$$

además, hay que tener en cuenta que el resultado (C.70) se obtuvo usando el resultado (C.66). Por lo anterior, la ecuación diferencial que describe el sistema es

$$i\partial_s \left\langle x'(s)|x''(0)\right\rangle = \left[-\frac{1}{2}e\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \left(x'_\delta - x''_\delta\right)k^{\delta\gamma}\left(x'_\gamma - x''_\gamma\right) - \frac{1}{2}i\mathrm{Tr}\left(eF^{\mu\nu}\coth\left(eF_{\mu\nu}s\right)\right)\right]\left\langle x'(s)|x''(0)\right\rangle, \tag{C.72}$$

la cual tiene como solución

$$\left\langle x'(s)|x''(0)\right\rangle = C\left(x', x''\right)\exp\left(L(s)\right)s^{-1}\exp\left[\frac{i}{4}\left(x' - x''\right)eF^{\delta\gamma}\coth\left(eF_{\delta\gamma}s\right)\left(x' - x''\right)\right]\exp\left[\frac{i}{2}e\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}s\right], \tag{C.73}$$

$$L(s) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\ln\left(eF^{\mu\nu}s\right)^{-1}\sinh\left(eF_{\mu\nu}s\right)\right]. \tag{C.74}$$

Para determinar $C\left(x', x''\right)$, se usa [4]

$$\left\langle x'(s)|\Pi(s)|x''(0)\right\rangle = \frac{1}{2}\left[eF^{\mu\nu}\coth\left(eF_{\mu\nu}\right) - eF_{\mu\nu}\right]\left(x' - x''\right)\left(x'(s) - x''(0)\right)\left(x' - x''\right)\left\langle x'(s)|x''(0)\right\rangle, \tag{C.75}$$

y

$$\left\langle x'(s)|\Pi(0)|x''(0)\right\rangle = \frac{1}{2}\left[eF^{\mu\nu}\coth\left(eF_{\mu\nu}\right) + eF_{\mu\nu}\right]\left(x' - x''\right)\left\langle x'(s)|x''(0)\right\rangle. \tag{C.76}$$

Las ecuaciones diferenciales asociadas a (C.75) y (C.76) son

$$\left[-i\partial'_\mu - eA_\mu(x') - \frac{1}{2}eF_{\mu\nu}\left(x' - x''\right)_\nu\right]C\left(x', x''\right) = 0, \tag{C.77}$$

$$\left[i\partial''_\mu - eA_\mu(x'') - \frac{1}{2}eF_{\mu\nu}\left(x' - x''\right)_\nu\right]C\left(x', x''\right) = 0. \tag{C.78}$$

La solución de ecuación (C.77) tiene la forma

$$C\left(x', x''\right) = C\left(x'\right)\exp\left[ie\int_{x''}^{x'} dx^\mu\left(A_\mu(x) + F_{\mu\nu}\left(x^\nu - x''^\nu\right)\right)\right]. \tag{C.79}$$

La integral (C.79) es independiente del camino de integración ya que el rotacional del término $A_\mu(x) + F_{\mu\nu}\left(x^\nu - x''^\nu\right)$ es cero. Además el restringir el camino de integración a una línea recta que conecta x' con x'', se describe mediante la expresión (C.66)

$$C\left(x', x''\right) = C\phi\left(x', x''\right), \tag{C.80}$$

$$\phi\left(x', x''\right) = \exp\left[ie\int_{x''}^{x'} dx^\mu A_\mu(x)\right]. \tag{C.81}$$

De esta manera, $C = -i\,(4\pi)^{-2}$, ya que $\langle x\prime(s)|x''(0)\rangle$ cuando $s \to 0$ es independiente del campo externo. Finalmente, el propagador se puede escribir como

$$\big\langle x'(s)|x''(0)\big\rangle = -i\,(4\pi)^{-2}\,\phi\left(x',x''\right)\exp\left[-L(s)\right]s^{-2}\exp\left(\frac{i}{4}\left(x'-x''\right)eF^{\mu\nu}\coth\left(eF_{\mu\nu}s\right)\left(x'-x''\right)\right)\exp\left(\frac{i}{2}e\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}s\right), \tag{C.82}$$

mientras que la función de Green es [4]

$$\begin{aligned} G\left(x',x''\right) &= i\int_0^\infty ds\exp\left(-im^2s\right)\left[-\gamma_\mu\left\langle x'(s)|\Pi_\mu(s)|x''(0)\right\rangle + m\left\langle x'(s)|x''(0)\right\rangle\right], \\ &= i\int_0^\infty ds\exp\left(-im^2s\right)\left[-\left\langle x'(s)|\Pi_\mu(0)|x''(0)\right\rangle\gamma_\mu + m\left\langle x'(s)|x''(0)\right\rangle\right]. \end{aligned} \tag{C.83}$$

La densidad lagrangiana ahora se escribe como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)} &= \frac{i}{2}\int_0^\infty ds\frac{1}{s}\exp\left(-im^2s\right)\mathrm{Tr}\left(\big\langle x'(s)|x''(0)\big\rangle\right)_{x',x''\to x}, \\ &= \frac{1}{32\pi^2}\int_0^\infty ds\frac{1}{s^3}\exp\left(-im^2s\right)\exp\left(-L(s)\right)\mathrm{Tr}\left[\exp\left(\frac{i}{2}e\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}s\right)\right]. \end{aligned} \tag{C.84}$$

Es posible escribir el anterior resultado como una cantidad real, deformando el camino de integración al hacer $s \to -is$, de tal forma que se llega a que la densidad lagrangiana (C.10) toma la forma

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\frac{1}{32\pi^2}\int_0^\infty \frac{1}{s^3}\exp\left(-m^2s\right)\mathrm{Tr}\left(\frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}s\right). \tag{C.85}$$

D. CÁLCULO DEL PROPAGADOR FERMIÓNICO

Para realizar el cálculo del propagador fermiónico, se sigue el procedimiento desarrollado en las referencias [4] y [49]. En el espacio de coordenadas, el propagador fermiónico se puede escribir como

$$S(x,y) = \left(i\hat{D} + m\right)_x \langle x| - \frac{i}{m^2 + \hat{D}^2}|y\rangle, \tag{D.1}$$

o, de forma equivalente, se puede expresar de la siguiente forma

$$S(x,y) = \left(i\hat{D} + m\right)_x \int_0^\infty ds\langle x| \exp\left[-is\left(m^2 + \hat{D}^2\right)\right]|y\rangle, \tag{D.2}$$

donde $\hat{D} \equiv \gamma^\mu D_\mu$ y $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu^{ext}$. El elemento de matriz $\langle x| \exp\left[-is\left(m^2 + \hat{D}^2\right)\right]\rangle$ puede ser calculado utilizando el formalismo de tiempo propio de Schwinger, es decir

$$\langle x| \exp\left[-is\left(m^2 + \hat{D}^2\right)\right]\rangle = \frac{\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)}{8\left(\pi s\right)^{3/2}} \exp\left[i\left(S_{cl} - sm^2\right)\right] eBs\cot(eBs) + \gamma^1\gamma^2 eB\right], \tag{D.3}$$

donde

$$S_{cl} = e\int_y^x A_\lambda^{ext} dz^\lambda - \frac{1}{4s}\left(x-y\right)_\nu \left[g^{\mu\nu} + \frac{\left(\left(F^{ext}\right)^2\right)^{\mu\nu}}{B^2}\left(1 - eBs\cot(eBs)\right)\right]\left(x-y\right)_\mu. \tag{D.4}$$

La integral se calculó en línea recta.

E. CÁLCULO DEL CONDENSADO MAGNÉTICO USANDO FUNCIONES DE GREEN (PROPAGADORES)

El condensado magnético se puede calcular a partir de la definición (6.13), o sea [87]

$$< 0|\bar{\psi}\psi|0 >= -\lim_{x\to y} tr\left(S(x,y)\right),$$

donde tr corresponde a la traza del propagador fermiónico. Ahora reemplazando (6.14) se tiene que

$$\begin{aligned}
< 0|\bar{\psi}\psi|0 > &= -\lim_{x\to y} trS(x,y), \\
&= -\lim_{x\to y} tr\left[\exp\left(ie\int_x^y A_\lambda^{ext} dz^\lambda\right)\tilde{S}(x-y)\right], \\
&= -\lim_{x\to y} tr\left[\exp\left(-ie\int_x^y Bx_2\delta_{\lambda 1} dz^\lambda\right)\right]\tilde{S}(x-y), \\
&= -\lim_{x\to y} tr\left(-ie\int Bydx\right)\tilde{S}(x-y), \\
&= -\lim_{x\to y} tr\left(-ieBxy\right)\tilde{S}(x-y).
\end{aligned} \tag{E.1}$$

Por otro lado, se tiene que para el propagador fermiónico se cumple que

$$\begin{aligned}
< 0|\bar{\psi}\psi|0 > &= -\lim_{x\to y} trS(x,y), \\
&= -\frac{i}{(2\pi)^3} tr\left(\int d^3k\tilde{S}_E(k)\right), \\
&= -\lim_{\Lambda\to\infty}\lim_{m\to 0}\frac{4m}{(2\pi)^3}\int_{1/\Lambda^2}^{\infty} ds\exp\left[-s\left(m^2+k_3^2+|\vec{k}|^2\frac{\tanh\left(eBs\right)}{eBs}\right)\right], \\
&= -\lim_{\Lambda\to\infty}\lim_{m\to 0}\frac{m}{2\pi^{3/2}}\int_{1/\Lambda^2}^{\infty} ds\exp(-sm^2)s^{-1/2}eB\coth\left(eBs\right), \\
&= -\lim_{\Lambda\to\infty}\lim_{m\to 0}\frac{m}{2\pi^{3/2}}\left(\pi^{1/2}eB\frac{1}{m}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right)\right), \\
&= -\lim_{\Lambda\to\infty}\lim_{m\to 0}\frac{eB}{2\pi}-\lim_{\Lambda\to\infty}\lim_{m\to 0}\mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right),
\end{aligned} \tag{E.2}$$

Finalmente, se obtiene que el condensado magnético está dado por la expresión

$$< 0|\bar{\psi}\psi|0 >= -\frac{eB}{2\pi}, \tag{E.3}$$

que corresponde a la ecuación dada por (6.19).

F. EQUIVALENCIA ENTRE LAS EXPRESIONES (7.1) Y (7.2)

Para probar la equivalencia entre las expresiones (7.1) y (7.2), se considera el siguiente término

$$\frac{G}{2}\left[\left(\bar{\psi}\psi\right)^2+\left(\bar{\psi}i\gamma^5\psi\right)^2\right]. \tag{F.1}$$

Teniendo en cuenta que debe ser equivalente a

$$\bar{\psi}\left(\sigma+i\gamma^5\pi\right)\psi-\frac{1}{2G}\left(\sigma^2+\pi^2\right), \tag{F.2}$$

y recordando que [15] [90]

$$\sigma=G\bar{\psi}\psi, \qquad \pi=-G\bar{\psi}i\gamma^5\psi, \tag{F.3}$$

entonces reemplazando (F.3) en el primer término de (F.2), se tiene que

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\left(\sigma+i\gamma^5\pi\right)\psi &= \bar{\psi}\left[G\bar{\psi}\psi+i\gamma^5\left(-G\bar{\psi}i\gamma^5\psi\right)\right]\psi,\\
&= \bar{\psi}\left[G\bar{\psi}\psi+\bar{\psi}i^2\gamma^5\gamma^5\psi\right]\psi,\\
&= G\left(\bar{\psi}\psi\right)^2+\left(\bar{\psi}i\gamma^5\psi\right)^2,
\end{aligned} \tag{F.4}$$

mientras que el término $\frac{1}{2G}\left(\sigma^2+\pi^2\right)$ es

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2G}\left(\sigma^2+\pi^2\right) &= \frac{1}{2G}\left[\left(G\bar{\psi}\psi\right)^2+\left(-G\bar{\psi}i\gamma^5\psi\right)^2\right],\\
&= \frac{1}{2G}\left[\left(G^2\bar{\psi}\psi\right)^2+\left(G\bar{\psi}i\gamma^5\psi\right)^2\right].
\end{aligned} \tag{F.5}$$

Restando (F.5) a (F.4), se obtiene

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\left(\sigma+i\gamma^5\pi\right)\psi-\frac{1}{2G}\left(\sigma^2+\pi^2\right) &= G\left(\bar{\psi}\psi\right)^2+G\left(\bar{\psi}i\gamma^5\psi\right)^2-\frac{1}{2G}\left[G^2\left(\right)^2+G^2\left(\right)^2\right],\\
&= \frac{G}{2}\left[\left(\bar{\psi}\psi\right)^2+\left(\bar{\psi}i\gamma^5\psi\right)^2\right].
\end{aligned} \tag{F.6}$$

La expresión (F.6) es igual a la expresión (7.2), por lo cual se ha obtenido una igualdad con respecto a la ecuación (7.3).

G. CÁLCULO DEL POTENCIAL EFECTIVO $V(\rho)$

El cálculo de la acción efectiva Γ se inicia calculando el potencial efectivo $V(\rho)$. Ya que V es un invariante quiral $U(1)_L \times U(1)_R$, entonces es suficiente con considerar $\pi = 0$ y σ dependiente de x en la expresión (7.4), es decir [15]

$$\tilde{\Gamma} = -itr\left[\ln\left(i\hat{D} - \sigma\right)\right] = -i\ln\left[det\left(i\hat{D} - \sigma\right)\right], \tag{G.1}$$

donde $\hat{D} \equiv \gamma^\mu D_\mu$. De esta manera

$$det\left(i\hat{D} - \sigma\right) = det\left[\gamma^5\left(i\hat{D} - \sigma\right)\gamma^5\right] = det\left(-i\hat{D} - \sigma\right). \tag{G.2}$$

Reemplazando (G.2) en (G.1), se encuentra que

$$\tilde{\Gamma}(\sigma) = -\frac{i}{2}tr\left[\ln\left(i\hat{D} - \sigma\right) + \ln\left(-i\hat{D} - \sigma\right)\right] = -\frac{i}{2}tr\left[\ln\left(\hat{D}^2 + \sigma^2\right)\right]. \tag{G.3}$$

Por lo tanto, $\tilde{\Gamma}(\sigma)$ se puede expresar de forma integral usando el formalismo de tiempo propio (C) [68]

$$\tilde{\Gamma}(\sigma) = -\frac{i}{2}tr\left[\ln\left(\hat{D}^2 + \sigma^2\right)\right] = \frac{i}{2}\int d^4x \int_0^\infty \frac{ds}{s} tr\left\langle x\right| \exp\left[-is\left(\hat{D}^2 + \sigma^2\right)\right]\Big\rangle, \tag{G.4}$$

donde

$$\hat{D}^2 = D_\mu D^\mu - \frac{ie}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu F^{ext}_{\mu\nu} = D_\mu D^\mu + ie\gamma^1\gamma^2 B. \tag{G.5}$$

El elemento de la matriz $\langle x| \exp\left[-is\left(\hat{D}^2 + \sigma^2\right)\right]|y\rangle$ fue calculado en el anexo D, es decir [68]

$$\begin{aligned}\langle x| \exp\left[-is\left(m^2 + \hat{D}^2\right)\right]\rangle &= \exp\left(-is\sigma^2\right)\langle x|\exp\left[-isD_\mu D^\mu\right]|y\rangle\left[\cos(eBs) + \gamma^1\gamma^2\sin(eBs)\right], \\ &= -\frac{i}{(4\pi s)^2}\exp\left[-i\left(s\sigma^2 - S_{cl}\right)\right]\left[eBscot(eBs) + \gamma^1\gamma^2 eBs\right],\end{aligned} \tag{G.6}$$

donde S_{cl} está dado por la expresión (D.4). Además la integral $\int_x^y A_\lambda dz^\lambda$ se toma en línea recta. Sustituyendo (G.6) en (G.4), se encuentra que

$$\tilde{\Gamma}(\sigma) = \frac{N}{8\pi^2}\int d^4x \int_0^\infty \frac{ds}{s}\exp\left(-is\sigma^2\right) eB\cot(eBs), \tag{G.7}$$

por lo cual, el potencial efectivo toma la forma

$$V(\rho) = \frac{\rho^2}{2G} + \tilde{V}(\rho) = \frac{\rho^2}{2G} + \frac{N}{8\pi^2}\int_{1/\Lambda}^\infty \frac{ds}{s}\exp\left(-sp^2\right) eB\coth(eBs), \tag{G.8}$$

donde el corte ultravioleta ha sido introducido de forma explícita. Usando la representación integral de la función zeta de Riemann generalizada [15] [82]

$$\int_0^\infty ds s^{\mu-1}\exp(-\beta s)\coth s = \Gamma(\mu)\left[2^{1-\mu}\zeta\left(\mu, \frac{\beta}{2}\right) - \beta^{-\mu}\right], \tag{G.9}$$

la cual es válida para $\mu > 1$. Usando el anterior resultado, se puede reescribir (G.8) como

$$V(\rho) = \frac{\rho^2}{2G} + \frac{N}{8\pi^2}\left[\frac{\Lambda^4}{2} + \frac{1}{3\ell^4}\ln\left(\Lambda^2\ell^2\right) + \frac{1-\gamma-\ln 2}{3\ell^4} - (\rho\Lambda)^2 + \frac{\rho^4}{2}\ln(\Lambda^2\ell^2) + \frac{\rho^4}{2}(1-\gamma-\ln 2)\right. \qquad \text{(G.10)}$$
$$\left. + \frac{\rho^2}{\ell^2}\ln\left(\frac{\rho^2\ell^2}{2}\right) - \frac{4}{\ell^4}\zeta'\left(-1, \frac{\rho^2\ell^2}{2}+1\right) + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right)\right.$$

BIBLIOGRAPHY

[1] W. Greiner, J. Reinhardt, “Quantum electrodynamics”, Springer Science & Business Media, Berlin Heildelberg, 2008.

[2] J. Schwinger. “On the Green’s functions of quantized fields. I”, Proceedings of the National Academy of Sciences 37 (1951) 452.

[3] J. Schwinger, “On the Green’s functions of quantized fields. II", Proceedings of the National Academy of Sciences 37 (1951) 455.

[4] J. Schwinger, “On gauge invariance and vacuum polarization”, Physical Review 82 (1951) 664.

[5] R.P. Feynman, “Space-time approach to quantum electrodynamics”, Physical Review 76 (1949) 769.

[6] R.P. Feynman, “The theory of positrons”, Physical Review 76 (1949) 749.

[7] J.A. Wheeler, R. P. Feynman, “Interaction with the absorber as the mechanism of radiation”, Reviews of Modern Physics 17 (1945) 157.

[8] R.P. Feynman, “Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction”, Physical Review 80 (1950) 440.

[9] S. Tomonaga, “On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields”, Progress of Theoretical Physics 1 (1946) 27.

[10] S. Tomonaga, J. R. Oppenheimer, “On infinite field reactions in quantum field theory”, Physical Review 74 (1948) 224.

[11] S. Tomonaga, G. Araki, “Effect of the nuclear Coulomb field on the capture of slow mesons”, Physical Review 58 (1940) 90.

[12] F. J. Dyson, “The radiation theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman”, Physical Review 75(1949) 486.

[13] W. Greiner, S. Schramm, E. Stein, “Quantum chromodynamics”, Springer Science & Business Media, 2007.

[14] I. A. R. Aitchison, A. I. G. Hey, “Gauge theories in particle physics: QCD and the electroweak theory”, Volume II, third edition, Institute of Physics, Graduate Student Series in Physics, IOP Publishing Ltd, London, 2004.

[15] V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy. “Dimensional reduction and catalysis of dynamical symmetry breaking by a magnetic field”, Nuclear Physics B 462 (1996) 249.

[16] Ta-Pei Cheng, Ling-Fong Li, “Gauge Theory of Elementary Particle Physics”, Oxford, 1984.

[17] C.J. Quimbay, Y.F. Pérez, R.A. Hernandez, “Canonical quantization of the Dirac oscillator field in (1+ 1) and (3+ 1) dimensions”, Electronic Journal of Theoretical Physics 11 (2014) 19.

[18] T.J. Allen, M. J. Bowick, A. Lahiri, “Topological mass generation in 3+ 1 dimensions”, Modern Physics Letters A 6 (1991) 559.

[19] V.P. Gusynin, I. A. Shovkovy, "Derivative expansion of the effective action for quantum electrodynamics in 2+ 1 and 3+ 1 dimensions", Journal of Mathematical Physics 40 (1999) 5406.

[20] G. Dunne, Gerald, T. M. Hall, "An exact QED 3+ 1 effective action", Physics Letters B 419 (1998) 322.

[21] N. Graham, et al, "Quantum QED flux tubes in 2+ 1 and 3+ 1 dimensions", Nuclear Physics B 707 (2005) 233.

[22] M. P. Fry, "Paramagnetism, zero modes, and mass singularities in QED in 1+ 1, 2+ 1, and 3+ 1 dimensions", Physical Review D 55 (1997) 968.

[23] D. Nash, "Higher-order corrections in (2+ 1)-dimensional QED", Physical Review Letters 62 (1989) 3024.

[24] T. Appelquist, D. Nash, and L. C. R. Wijewardhana, "Critical behavior in (2+ 1)-dimensional QED", Physical Review Letters 60 (1988) 2575.

[25] M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov, and A. K. Geim, "Chiral tunnelling and the Klein paradox in graphene", Nature physics 2(2006) 620.

[26] H. Panahi, L. Jahangiri, "The (2+ 1) curved Dirac equation in polar coordinates in the presence of electromagnetic field", Annals of Physics 354 (2015) 306.

[27] V. R. Khalilov, C-L. Ho, "Dirac electron in a Coulomb field in (2+ 1) dimensions", Modern Physics Letters A 13 (1998) 615.

[28] A. Bermúdez, M.A. Martin-Delgado, E. Solano, "Exact mapping of the 2+1 Dirac oscillator onto the Jaynes-Cummings model: Ion-trap experimental proposal", Physical Review A 76(2007) 041801.

[29] A. Bermúdez, M. A. Martin-Delgado, A. Luis, "Nonrelativistic limit in the 2+ 1 Dirac oscillator: A Ramsey-interferometry effect", Physical review A 77 (2008) 033832.

[30] R. Szmytkowski, M. Gruchowski, "Completeness of the Dirac oscillator eigenfunctions", Journal of Physics-London-a Mathematical and general 34 (2001) 4991.

[31] J. K. Jain, "Composite-fermion approach for the fractional quantum Hall effect", Physical review letters 63 (1989) 199.

[32] C. Toke, et al, "Fractional quantum Hall effect in graphene", Physical Review B 74 (2006) 235417.

[33] R.P. Feynman, "The qualitative behavior of Yang-Mills theory in 2+ 1 dimensions", Nuclear Physics B 188 (1981) 479.

[34] V.P. Gusynin, V.A. Miransky, I.A. Shovkovy, "Dynamical chiral symmetry breaking in QED in a magnetic field: Toward exact results", Physical review letters 83 (1999) 1291.

[35] P.I. Fomin, V.P. Gusynin, V.A. Miransky, Y.A. Sitenko, "Dynamical symmetry breaking and particle mass generation in gauge field theories", La Rivista Del Nuovo Cimento Series 3 6 (1983) 1.

[36] J.A. Sánchez-Monroy, C.J. Quimbay, "Magnetic condensate for the planar Dirac oscillator".

[37] J. A. Sánchez Monroy, C. J. Quimbay, "Dirac equation in low dimensions: The factorization method", Annals of Physics 350(2014) 69.

[38] D.K. Hong, Y. Kim, S-J Sin, "RG analysis of magnetic catalysis in dynamical symmetry breaking", Physical Review D 54 (1996) 7879.

[39] J. Ambjørn, P. Olesen, "A magnetic condensate solution of the classical electroweak theory", Physics Letters B 218 (1989) 67.

[40] I.A. Shushpanov, A. V. Smilga, "Quark condensate in a magnetic field", Physics Letters B 402 (1997) 351.

[41] P. Finelli, “Chiral symmetry”, Nuclear Physics Course, (2011).

[42] V. Koch, “Introduction to chiral symmetry”, Lawrence Berkeley Lab. 1996.

[43] V. A. Miransky, I. A. Shovkovy, “Quantum field theory in a magnetic field: From quantum chromodynamics to graphene and Dirac semimetals”, Physics Reports 76 (2015) 1.

[44] V.A. Miransky, “Dynamical symmetry breaking in quantum field theories”, World Scientific 1993.

[45] M. Moshinsky, A. Szczepaniak, “The Dirac oscillator”, Journal of Physics A: Mathematical and General 22 (1989) L817.

[46] A. Bermudez„ M. A. Martin-Delgado, A. Luis, “Chirality quantum phase transition in the Dirac oscillator”, Physical Review A 77 (2008) 063815.

[47] V.M. Villalba, “Exact solution of the two-dimensional Dirac oscillator”, Physical Review A 49 (1994) 586.

[48] F. M. Andrade, E. O. Silva, “Remarks on the Dirac oscillator in (2+ 1) dimensions”, EPL (Europhysics Letters) 108 (2014) 30003.

[49] V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy. ”Dynamical flavor symmetry breaking by a magnetic field in 2+ 1 dimensions”. Physical Review D 52 (1995) 4718.

[50] C. N. Leung, S.Y. Wang, Leung, “Gauge independence and chiral symmetry breaking in a strong magnetic field” Annals of Physics 322 (2007) 701.

[51] B.P. Mandal, S. Verma, “Dirac oscillator in an external magnetic field”, Physics Letters A 374 (2010) 1021.

[52] V. I. Kukulin, G. Loyola, M. Moshinsky, “A Dirac equation with an oscillator potential and spin-orbit coupling”, Physics Letters A 158 (1991) 19.

[53] B. Mielnik, “Factorization method and new potentials with the oscillator spectrum”, Journal of mathematical physics 25 (1984) 3387.

[54] C. Quimbay, P. Strange, “Quantum phase transition in the chirality of the (2+ 1)-dimensional Dirac oscillator”, arXiv preprint arXiv:1312.5251 (2013).

[55] C. Quimbay, P. Strange, “Graphene physics via the Dirac oscillator in (2+ 1) dimensions”, arXiv preprint arXiv:1311.2021.

[56] S.H. Dong, “Factorization method in quantum mechanics”, Springer Science & Business Media, Ciudad de México, 2007.

[57] J. Benítez, R.P. Martínez y Romero, H.N. Núñez-Yépez, A.L. Salas-Brito, “Solution and hidden supersymmetry of a Dirac oscillator”, Physical review letters 64 (1990) 1643.

[58] A. Bermudez, M. A. Martin-Delgado, A. Luis, “Nonrelativistic limit in the 2+ 1 Dirac oscillator: A Ramsey-interferometry effect”, Physical review A 77 (2008) 033832.

[59] R.P. Martínez y Romero, H.N. Núñez-Yépez, A.L. Salas-Brito, “Relativistic quantum mechanics of a Dirac oscillator”, European Journal of Physics 16 (1995) 135.

[60] S. Hernández-Ortíz, , G. Murguía, A. Raya. “Hard and soft supersymmetry breaking for ‘graphinos’ in uniform magnetic fields”, Journal of Physics: Condensed Matter 24 (2011) 015304.

[61] F. Wilczek, “Mass Without Mass I: Most of Matter”, Physics Today 52 (1999) 11.

[62] S.Y. Wang, “Dynamical electron mass in a strong magnetic field”, Physical Review D 77 (2008) 025031.

[63] M. de Jesús Anguiano, A. Bashir, “Fermions in odd space-time dimensions: back to basics”, Few-Body Systems 37 (2005) 71.

[64] W. Greiner, J. Reinhardt. “Field quantization”, Springer Science & Business Media, Berlín, 2013.

[65] W. Greiner, “Relativistic quantum mechanics”, Springer, Berlín, 1990.

[66] C.J. Quimbay, “Notas de clase: Mecánica cuántica II”, Bogotá D.C, 2013.

[67] C. Cohen-Tannoudji, C.Diu, F. Laloë, “Quantum Mechanics”, John Wiley Interscience, New York, 1977.

[68] L.H. Ryder, “Quantum field theory”, Cambridge university press, Londres, 1996.

[69] O. Panella, P. Roy, “Quantum phase transitions in the noncommutative Dirac oscillator”, Physical Review A 90 (2014) 042111.

[70] E. Rojas, et al, “Dynamical mass generation in QED with magnetic fields: Arbitrary field strength and coupling constant”, Physical Review D 77 (2008) 093004.

[71] J.H. Cornwall, “Dynamical mass generation in continuum quantum chromodynamics”, Physical Review D 26 (1982) 1453.

[72] D. Atkinson, P. W. Johnson, P. Maris. "Dynamical mass generation in three-dimensional QED: Improved vertex function", Physical Review D 42 (1990) 602.

[73] D.C. Curtis, M. R. Pennington, D. Walsh, “Dynamical mass generation in QED3 and the 1/N expansion”, Physics Letters B 295 (1992) 313.

[74] V. P. Gusynin, I. A. Shovkovy, “Chiral symmetry breaking in QED in a magnetic field at finite temperature”, Physical Review D 56 (1997) 5251.

[75] R. Dillenscneider, J. Richert, “Chiral symmetry restoration in (2+ 1)-dimensional QED with a Maxwell-Chern-Simons term at finite temperature”, Physical Review B 74 (2006) 144404.

[76] E. V. Gorbar, et al, “Chiral asymmetry in QED matter in a magnetic field”, Physical Review D 88 (2013) 025043.

[77] F. Cooper, V. M. Savage, “Dynamics of the chiral phase transition in the (2+ 1)-dimensional Gross–Neveu model” Physics Letters B 545 (2002) 307.

[78] G. Murguía, A. Raya, A. Sánchez, E. Reyes, “The electron propagator in external electromagnetic fields in low dimensions”, American Journal of Physics 78 (2010) 700.

[79] V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy, “Physical gauge in the problem of dynamical chiral symmetry breaking in QED in a magnetic field”, Foundations of Physics 30 (2000) 349.

[80] P. Maris, D. Lee, “Chiral symmetry breaking in (2+ 1) dimensional QED”, Nuclear Physics B-Proceedings Supplements 119 (2003) 784.

[81] P. Cea, L. Cosmai, P. Giudice, A. Papa, “Chiral symmetry breaking in planar QED in external magnetic fields”, Physical Review D 85 (2012) 094505.

[82] M. Abramowitz, I. A. Stegun, “Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables”, Courier Corporation, 1964.

[83] J. D. Jackson, “Classical electrodynamics”, Wiley, New York, 1999.

[84] D.J. Griffiths, “Introduction to electrodynamics”, Upper Saddle River, NJ: prentice Hall, 1999.

[85] J.D. Bjorken, S.D. Drell, “Relativistic quantum mechanics”, Mcgraw-Hill College, New York, 1964.

[86] R.V. Churchill, “Introduction to complex variables and applications”,(1948).

[87] A. I. Akhiezer, V. B. Berestetskii. “Quantum electrodynamics”, vol XI of interscience monographs and texts in physics and astronomy (1965).

[88] A. Zee, “Quantum field theory in a nutshell”. Princeton university press, 2010.

[89] B. Simon, “The bound state of weakly coupled Schrödinger operators in one and two dimensions”, Annals of Physics 97 (1976) 279.

[90] Y. Nambu, G. Jona-Lasinio, “Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity I”, Physical Review 122 (1961) 345.