

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Corrientes neutras que cambian sabor, mediadas por escalares, en un modelo con simetría Gauge 3-4-1

Edgardo José Marbello-Santrich

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Física
Medellín, Colombia
2019

Corrientes neutras que cambian sabor, mediadas por escalares, en un modelo con simetría Gauge 3-4-1

Edgardo José Marbello-Santrich

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título
de:

Magister en Ciencias Física

Director (a):

Ph.D. Luis Alberto Sánchez Duque

Línea de Investigación:

Fenomenología de partículas elementales

Grupo de Investigación:

Grupo de Física Teórica

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Física
Medellín, Colombia

2019

A Mario y a Elena

"My mother used to say: Think first, then write."

P. A. M Dirac

"Ahora me toca a mí bailar"

Tito Rodríguez

Agradecimientos

Quiero dar cuenta aquí, de mi profundo agradecimiento hacia el jefe, mi director de tesis, Luis Alberto Sánchez, por su guía y discusión de este trabajo. Pero más importante aún, por conversar con este servidor, charlas enriquecedoras de Física. De igual forma quiero agradecer a mi compañera de vida, Inés María, por su voz de aliento en todos los instantes de esta aventura. En especial las más duras. A mis padres, por su eterna confianza en mí. El profundo desinterés de mi papá no tendrá nunca forma de pago. A mis hermanos, las Focas, mi sangre. A mis amigos que, a pesar de la distancia, siempre manifestaron su fe en este servidor. A mi colega Pablo Ochoa por su apoyo en el diseño de este trabajo y por los pósteres que me llevaron más allá de las puertas de la oficina. A Santiago Rojas por su incomparable ayuda con Mathematica, que arrojó una luz al final del túnel. A mis compañeros del grupo de Física Teórica, en especial al “Dotor” Fabián Zuluaga, por ser un compañero de batallas en la oficina y por las buenas charlas acompañadas de un tinto. A Diego Rangel y Santiago Rojas (Negro) por compartir con este servidor, el amor por la Ciencia. A Diego Londoño por sus inacabables préstamos de material didáctico a este servidor, permitieron llevar mi discurso por el Valle de Aburrá y Colombia. Al profesor Javier Morales por darme esa primera oportunidad laboral que todos valoramos y nunca olvidamos, en el Laboratorio de Física Moderna y en el curso de Física de Radiaciones. A la escuela de Matemáticas, en especial a Doña Edna por darme la oportunidad de tomar la responsabilidad de dictar cursos teóricos que fortalecieron mis capacidades profesionales y obviamente me hicieron mejor persona. No menos importantes, aquellos compañeros de batalla del equipo de voleibol de la UN, que me han pedido un espacio el día que este servidor defienda su trabajo de investigación. Y, por último, mi alma máter, la UN: eres algo para toda mi vida.

Resumen

En el presente trabajo se muestra la fenomenología de las corrientes neutras que cambian sabor mediadas por escalares y por bosones vectoriales en un modelo compacto con simetría Gauge 3-4-1. De igual forma, se construyeron las corrientes físicas del modelo, para predecir de manera coherente, los valores de las cargas eléctricas de las partículas del modelo. Por último, se contrastaron las predicciones de los observables con los datos experimentales de los sistemas de mesones neutros, situación que ameritó la idea de aumentar la escala de energía, si se deseaba dar cuenta de manera exitosa, de los datos experimentales.

Palabras clave: Modelo Estándar, Corrientes Neutras, Mesones, Partículas, Masas de Fermiones.

Abstract

Scalar-mediated flavor changing neutral currents, in a 3-4-1 Gauge symmetry model.

We have been studied the phenomenological implications of the 3-4-1 extension of the Standard Model. Although there was a previous work of one specific extension, we concerned about scalar mediated flavor changing neutral currents as the main issue. We could build other physical currents, such as electromagnetic, and neutral ones as well. With these constructions we were able to compare the predictions of the model with experimental results of neutral mesons systems and elicit conclusions. One thing we found was, it must be necessary arise de value of the scale of symmetry breakdown, to explain experimental results.

Keywords: Standard Model, Neutral currents, Mesons, Elementary Particles, Fermion masses.

Contenido

	Pág.
Lista de Símbolos y abreviaturas.....	XII
Introducción	1
1. El Modelo 3-4-1	3
1.1 Fermiones.....	3
1.2 Sector Escalar	5
1.3 Simetría Z_3 y Lagrangiano del modelo.....	6
2. Masas de Escalares y Fermiones. Auto estados Físicos	9
2.1 Auto estados de masa CP-pares.....	9
2.2 Relación con los auto estados físicos.....	16
2.3 Lagrangino de Yukawa y masa de fermiones.....	18
3. Corrientes.....	21
3.1 Espectro de masa para los bosones de Gauge.....	21
3.2 Términos diagonales	24
3.3 Corriente electromagnética.....	25
3.4 Corriente neutra (Z).....	28
3.5 Corriente neutra (Z').....	32
3.6 Corriente neutra (Z'').....	35
4. Corrientes neutras que cambian sabor, mediadas por escalares.....	37
4.1 Sector Up.....	37
4.2 Sector Down	39
4.3 Lagrangiano.....	41
5. Observables en sistemas de mesones neutros	43
5.1 Lagrangiano (Z')	43
5.2 Lagrangiano mediado por los escalares (H_2, H_3).....	45
5.3 Sistema $K_0 - \bar{K}_0$	46
5.4 Sistema $D_0 - \bar{D}_0$	50
5.5 Sistema $B_0 - \bar{B}_0$	52
6. Conclusiones y recomendaciones	57
6.1 Conclusiones	57
Bibliografía	Error! Bookmark not defined.

Lista de Símbolos y abreviaturas

Símbolos con letras latinas [6]

Símbolo	Término	Unidades Naturales	Valor
c	Velocidad de la luz	1	
\hbar	Constante de Planck	1	
e	Carga del electrón	C	$1,602 \times 10^{-19}$
M_W	Masa del bosón W	GeV	80,482
M_Z	Masa del bosón Z	GeV	
m_u	Masa del quark up	MeV	2,16
m_d	Masa del quark down	MeV	4,67
m_c	Masa del quark charm	MeV	1270
m_s	Masa del quark strange	MeV	93
m_t	Masa del quark top	GeV	172.9
m_b	Masa del quark bottom	MeV	4180
M_K	Masa del Kaón neutro	MeV	497,611
M_B	Masa del mesón neutro B	MeV	5279,64
M_D	Masa del mesón neutro D	MeV	1869,65
$\sqrt{B_B} f_B$	Constante de decaimiento	MeV	208

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidades Naturales	Definición
γ^μ	Matrices Gamma de Dirac	1	$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$
γ	Fotón		

Subíndices

Subíndice	Término
c	Color
L	Left-Handed
X	Hipercarga
μ, ν	0, 1, 2, 3
γ	Yukawa

Subíndice Término

NC Neutral currents (Corrientes neutras)

Superíndices**Superíndice Término**

n Exponente, potencia

μ, ν 0, 1, 2, 3

i 1, ..., 15 (En las matrices de Gell-Mann)

Abreviaturas**Abreviatura Término**

ME Modelo Estándar

3-4-1 $SU(3)_c \otimes SU(4)_L \otimes U(1)_X$

VEV Valor esperado en el vacío

Introducción

Las numerosas medidas de precisión sobre las predicciones del modelo Modelo Estándar (SM) de la física de partículas, basado en el grupo con simetría gauge $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_X$, confirman al modelo como la mejor descripción que se tiene actualmente sobre la naturaleza, en particular, sobre la descripción de las interacciones fuerte y electrodébil. A pesar de esto, este modelo no explica hechos fundamentales como el número de familias fermiónicas N_f , existentes en la naturaleza, la jerarquía de masas de los fermiones no incluye la gravitación, etc. Una solución al problema del número de familias fermiónicas se logra aumentando la simetría del grupo gauge del SM a los grupos con simetría gauge $SU(3)_c \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ (extensión 3-3-1) ó $SU(3)_c \otimes SU(4)_L \otimes U(1)_Y$ (extensión 3-4-1). La solución se da en el sentido de que cuando la cancelación de anomalías se da entre familias (modelos de tres familias) y no familia por familia como en el SM, N_f es divisible por el número de colores N_c de $SU(3)_c$ [1],[2], siendo $N_f = N_c = 3$ la solución más simple. Este novedoso método de cancelación de anomalías requiere que una de las tres familias de quarks transforme diferentemente de las otras dos, llevando así a corrientes neutras que cambian sabor que pueden en principio ser mediadas por los nuevos bosones de gauge neutros existentes en el modelo y/o por nuevos campos escalares requeridos para implementar el mecanismo Higgs.

En el presente trabajo, se estudian las corrientes neutras que cambian sabor mediadas por escalares en un modelo con simetría Gauge 3-4-1 conocido en la literatura como el modelo “compacto” [3]. Este nombre es debido al hecho de que el modelo usa un número mínimo de tres cuadrupletes escalares para implementar el rompimiento espontáneo de la simetría y dar masa a los fermiones, incluyendo neutrinos. Ya que el modelo posee un polo de Landau en el rango de unos pocos Tera electrón-Volts (TeV), da cuenta de

fenomenología que puede ser comprobada o descartada en el LHC. Al estudiarse el contenido de las partículas del modelo, esto es, aquellas asociadas al modelo estándar y las exóticas, se llega a introducir familias de fermiones que transforman de manera diferente, para lograr la cancelación de anomalías. De por sí, esto llevará al surgimiento de corrientes neutras que cambian sabor [1], pues surgen acoples no diagonales entre los campos escalares neutros y los quarks del ME. En cuanto al sector escalar, como ya se afirmó, se tiene la ventaja de trabajar con un número mínimo de Higgses, lo cual conlleva a un potencial invariante gauge y de Lorentz sencillo, en comparación con otros modelos. La hoja de ruta trabajada sigue los lineamientos del Modelo Estándar. Esto es, se propone el rompimiento espontáneo de la simetría, que da lugar al origen de las masas de las partículas. Del estudio del nuevo potencial, se extraen los términos de masa asociados a los escalares. Mientras que del Lagrangiano de Yukawa, se obtienen los similares de los fermiones. Es también de este Lagrangiano, de donde se puede extraer la información pertinente a las corrientes neutras que cambian sabor, mediadas por escalares, lo cual nos llevará a la evaluación de observables en sistemas de mesones neutros.

Como valor agregado, se muestra también las expresiones para las corrientes mediadas por los bosones de Gauge, es decir, la corriente electromagnética, y las corrientes neutras mediadas por los bosones Z , Z' y Z'' . Dichas corrientes, se obtienen del Lagrangiano de interacción.

1 El Modelo 3-4-1

En general, el modelo 3-4-1 es una extensión del grupo Gauge electrodébil del Modelo Estándar (ME), que posee 12 bosones de Gauge adicionales a los 8 gluones que median la interacción fuerte, a los 3 asociados a la débil W^\pm y Z, y al fotón γ del electromagnetismo. Al ser la cromodinámica una simetría exacta, el objetivo de nuestro estudio no se centrará en ella. De aquí en más, se presentará el contenido de los campos presentes en el modelo 3-4-1 al igual que el potencial escalar, y el Lagrangiano de Yukawa. Elementos relevantes para nuestro estudio.

1.1 Fermiones

Antes de asignar el contenido fermiónico del modelo, es menester recordar la forma del operador de carga eléctrica. Este, que es una combinación lineal de los generadores diagonales del $SU(4)_L \otimes U(1)_X$, nos permite asignarle a cada campo su carga en la representación fundamental de $SU(4)_L$.

$$Q = \frac{e}{2} \left(\lambda_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} b \lambda_8 + \frac{1}{\sqrt{6}} c \lambda_{15} \right) + eX \quad (1.1)$$
$$= \frac{e}{2} \text{diag} \left(1 + \frac{b}{3} + \frac{c}{6} + 2X, -1 + \frac{b}{3} + \frac{c}{6} + 2X, \frac{-2b}{3} + \frac{c}{6} + 2X, -\frac{c}{2} + 2X \right) \quad (1.1)$$

De igual forma para la representación adjunta, si cambiamos el signo de los generadores diagonales de $SU(4)_L$. Las constantes b y c, son parámetros por fijar [8], dependiendo de

la distribución de los campos en los cuádrupletes y X , es la correspondiente hipercarga de $U(1)_X$.

Particularmente, el modelo a trabajar tiene los siguientes valores para las constantes, $b = -1$ y $c = -4$. Esto, como implicación inmediata conduce en el cuádruplete de leptones izquierdos, un arreglo donde las dos primeras componentes son las del ME y las dos adicionales son justamente las antipartículas de estos. De igual forma, se llega a que la hipercarga de los leptones es nula. Y, por último, se obtiene la siguiente forma del operador de carga eléctrica

$$Q = e \cdot \text{diag}(X, \quad X - 1, \quad X, \quad X + 1) \quad (1.2)$$

Explícitamente, esto es

$$L_{aL} = \begin{pmatrix} \nu_a \\ e_a \\ \nu_a \\ e_a^c \end{pmatrix}_L \sim (\mathbf{1}, \mathbf{4}, 0), \quad (1.4)$$

Donde $a = e, \mu, \tau$ y el símbolo \sim indica la forma cómo transforma el cuádruplete bajo el grupo de simetría.

Para el caso de los quarks, al tener familias que transforman diferente, discriminamos de la siguiente manera. La primera generación transforma bajo la representación fundamental de $SU(4)_L$ en el caso de los campos izquierdos, mientras que los derechos, lo hacen de manera trivial.

$$Q_{1L} = \begin{pmatrix} u_1 \\ d_1 \\ U_1 \\ J_1 \end{pmatrix}_L \sim \left(\mathbf{3}, \mathbf{4}, \frac{2}{3} \right) \quad (1.5)$$

$$u_{1R} \sim \left(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \frac{2}{3} \right), \quad d_{1R} \sim \left(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\frac{1}{3} \right) \quad (1.6)$$

$$U_{1R} \sim \left(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \frac{2}{3} \right), \quad D_{1R} \sim \left(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \frac{5}{3} \right) \quad (1.7)$$

Con u_1 y d_1 , los quarks up y down respectivamente. Análogamente, U_1 y J_1 , son los quarks exóticos predichos en el modelo, con cargas eléctricas iguales a $2/3$ y $5/3$.

La segunda y tercera familia de quarks izquierdos transforman bajo la representación adjunta de $SU(4)_L$ y de manera similar a la anterior, los quarks derechos son singletes en dicha representación.

$$Q_{iL} = \begin{pmatrix} d_i \\ u_i \\ D_i \\ J_i \end{pmatrix}_L \sim \left(\mathbf{3}, \mathbf{4}^*, -\frac{1}{3} \right) \quad (1.8)$$

$$u_{iR} \sim \left(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \frac{2}{3} \right), \quad d_{iR} \sim \left(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\frac{1}{3} \right) \quad (1.9)$$

$$D_{iR} \sim \left(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\frac{1}{3} \right), \quad J_{iR} \sim \left(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \frac{4}{3} \right) \quad (1.10)$$

Con $i = 2, 3$. D_i y J_i son los quarks exóticos con cargas eléctricas dadas por $-1/3$ y $4/3$. Dicho arreglo de familias que transforman diferente es una exigencia asociada a que el modelo sea libre de anomalías.

1.2 Sector Escalar

En la literatura inicial sobre los modelos 3-4-1, se tiene un número de cuatro cuartetos escalares, cuyo fin es recrear el rompimiento de la simetría hacia la electrodinámica dando masa a todos los quarks y evadiendo la mezcla entre éstos y los exóticos. A su vez, un decuplete se introducía para dar masa a los leptones. Una de las ventajas del presente modelo, es que puede tenerse un número menor de escalares y las propiedades concernientes al rompimiento de la simetría y masa de fermiones no cambian (incluyendo neutrinos). En consecuencia, se muestra el contenido escalar que nos permitirá lograr el objetivo:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1^0 \\ \eta_1^- \\ \eta_2^0 \\ \eta_2^+ \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho_1^+ \\ \rho^0 \\ \rho_2^+ \\ \rho^{++} \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1^- \\ \chi^{--} \\ \chi_2^- \\ \chi^0 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Cuyas propiedades de transformación son, $\eta \sim (\mathbf{1}, \mathbf{4}, 0)$, $\rho \sim (\mathbf{1}, \mathbf{4}, 1)$, $\chi \sim (\mathbf{1}, \mathbf{4}, -1)$. El esquema de rompimiento espontáneo de la simetría es obtenido, si se asume que las siguientes componentes neutras toman valores esperados en el vacío, no nulos. Es decir, $\langle \chi^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} v_\chi$, $\langle \eta_2^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} v_\eta$ y $\langle \rho^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} v_\rho$. El valor esperado en el vacío v_χ da cuenta del primer paso de rompimiento de la simetría 341 a la simetría 331, mientras que v_η rompe la simetría 331 al modelo estándar, 321. Finalmente, el rompimiento final hacia U(1), se da mediante v_ρ . De esto, podemos imponer la siguiente jerarquía de energías $v_\chi > v_\eta > v_\rho = 264 \text{ GeV}$. En la referencia [1], se muestra cómo los valores de v_χ y v_η no son más grandes que unos cuantos TeV, lo cual da una idea de que el modelo puede someterse a pruebas en el gran colisionador de hadrones.

La razón de la escogencia de un valor esperado en el vacío no nulo en la tercera componente del cuadruplete η , es evitar la mezcla entre quarks ordinarios y exóticos en el Lagrangiano de Yukawa, logrando así la mezcla CKM usual en el sector de los quarks. Para lograr tal objetivo, es necesario introducir una simetría discreta al modelo, más precisamente, Z_3 .

Si imponemos la simetría Z_3 podemos evitar la mezcla entre los quarks ordinarios y los exóticos. Para ello, veamos lo siguiente:

Cargas = (e, ω, ω^2) ; con $\omega^3 = e$ (elemento identidad del grupo)

1.3 Simetría Z_3 y Lagrangiano del modelo

Asignamos entonces las cargas Z_3 a los campos del presente modelo

L_L	u_{a_R}	d_{a_R}	J_{1_R}	J_{j_R}	ρ	χ
ω	ω	ω^2	ω^2	ω	ω	ω

Ahora, el Lagrangiano de Yukawa, invariante bajo esta simetría y el gauge, tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & \lambda_{11}^J \overline{Q_{1L}} \chi J_{1R} + \lambda_{ij}^J \overline{Q_{iL}} \chi^* J_{jR} + \lambda_{1a}^d \overline{Q_{1L}} \rho d_{aR} + \lambda_{ia}^u \overline{Q_{iL}} \rho^* u_{aR} + \lambda_{11}^U \overline{Q_{1L}} \eta U_{1R} + \lambda_{ij}^D \overline{Q_{iL}} \eta^* D_{jR} \\ & + h.c. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Donde $\lambda_{11}^J, \lambda_{ij}^J, \lambda_{1a}^d, \lambda_{ia}^u, \lambda_{11}^U, \lambda_{ij}^D$ son las constantes de acople ($a = 1, 2, 3$ e $i, j = 2, 3$).

\mathcal{L}_Y solo genera las masas para algunos de los quarks, lo cual deja a los leptones sin masa. Explícitamente, los quarks exóticos Ja ($a = 1, 2, 3$), adquieren masa mediante su acople a v_χ , mientras que $U1, D2$ y $D3$, lo hacen a través de v_η . La segunda y tercera familia de quarks ordinarios del tipo up, a su vez que la primera familia de quarks tipo down, ganan masa gracias a v_ρ . A parte de lo expuesto, este Lagrangiano es incapaz de dar cuenta de la mezcla de quarks parametrizada por la matriz CKM. No obstante, acudiendo a operadores efectivos, es posible subsanar estas falencias, sin afectar la idea inicial de emplear un número mínimo de escalares.

Siguiendo nuestra ruta, mostramos a continuación el potencial escalar más general, invariante bajo Lorentz, que respeta las simetrías.

$$\begin{aligned} V(\eta, \rho, \chi) = & \mu_1^2 \eta^\dagger \eta + \mu_2^2 \rho^\dagger \rho + \mu_3^2 \chi^\dagger \chi + \lambda_1 (\eta^\dagger \eta)^2 + \lambda_2 (\rho^\dagger \rho)^2 + \lambda_3 (\chi^\dagger \chi)^2 \\ & + \lambda_4 (\eta^\dagger \eta) (\rho^\dagger \rho) + \lambda_5 (\eta^\dagger \eta) (\chi^\dagger \chi) + \lambda_6 (\rho^\dagger \rho) (\chi^\dagger \chi) \\ & + \lambda_7 (\rho^\dagger \eta) (\eta^\dagger \rho) + \lambda_8 (\chi^\dagger \eta) (\eta^\dagger \chi) + \lambda_9 (\rho^\dagger \chi) (\chi^\dagger \rho) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Con las $\mu_{\eta, \rho, \chi}^2$ como parámetros con dimensión de masa y las λ_k ($k = 1, \dots, 9$) los acoples adimensionales.

Se puede notar que la ausencia de un cuarto cuadruplete de escalares, conlleva la no presencia de un término de acople antisimétrico en el potencial, como se puede visualizar en otros modelos. También, para este potencial escalar, una vez se rompe la simetría, se tiene que las entradas neutras de los cuadrupletes, adquieren valores esperados no nulos en el vacío, lo cual genera la cantidad necesaria de bosones de Goldstone que dan masa a los bosones de Gauge, sin contar con el fotón.

2 Masas de Escalares y Fermiones. Auto estados Físicos

Entramos en este capítulo, a la descripción fenomenológica de interés que nos trae este modelo. Para ello, se analiza el contenido de los escalares con simetría CP par cuando adquieren masa, una vez se da el rompimiento espontáneo de la simetría. Después, se enunciará su relación con los escalares físicos para después dar cuenta de las matrices de masa de los quarks (sectores up y down) que se desprenden del Lagrangiano de Yukawa modificado, al agregarse operador efectivo.

2.1 Auto estados de masa CP-pares

Consideremos, una vez se da el rompimiento de la simetría, la redefinición de los escalares neutros, de acuerdo con sus valores esperados en el vacío.

$$\eta_1^0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(R_{\eta_1} + iI_{\eta_1});$$

$$\eta_2^0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\eta + R_{\eta_2} + iI_{\eta_2});$$

$$\rho^0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\rho + R_\rho + iI_\rho);$$

$$\chi^0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\chi + R_\chi + iI_\chi);$$

(2.1)

Deseamos también, establecer las condiciones de mínima energía. Para ello, tomamos las derivadas parciales del potencial escalar, con respecto a cada uno de los campos asociados.

Para el campo Etha

$$\frac{\partial V}{\partial(\eta^\dagger\eta)} = \mu_1^2 + \lambda_1\eta^\dagger\eta + \lambda_4\rho^\dagger\rho + \lambda_5\chi^\dagger\chi \quad (2.2)$$

De igual forma, para el campo Rho

$$\frac{\partial V}{\partial(\rho^\dagger\rho)} = \mu_2^2 + \lambda_2\rho^\dagger\rho + \lambda_4\eta^\dagger\eta + \lambda_6\chi^\dagger\chi \quad (2.3)$$

Y, por último, para el campo Chi

$$\frac{\partial V}{\partial(\chi^\dagger\chi)} = \mu_3^2 + \lambda_3\chi^\dagger\chi + \lambda_5\eta^\dagger\eta + \lambda_6\rho^\dagger\rho \quad (2.4)$$

Si evaluamos estas derivadas en los valores esperados en el vacío, tenemos las siguientes condiciones de mínima energía

$$\begin{aligned} \mu_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_1v_\eta^2 + \frac{1}{2}\lambda_4v_\rho^2 + \frac{1}{2}\lambda_5v_\chi^2 &= 0 \\ \mu_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_2v_\rho^2 + \frac{1}{2}\lambda_4v_\eta^2 + \frac{1}{2}\lambda_6v_\chi^2 &= 0 \\ \mu_3^2 + \frac{1}{2}\lambda_3v_\chi^2 + \frac{1}{2}\lambda_5v_\eta^2 + \frac{1}{2}\lambda_6v_\rho^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Con estas condiciones, es posible obtener la matriz de masa para los escalares CP pares neutros en la base $(R_{\eta_2}, R_\rho, R_\chi)$.

$$M^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\lambda_1v_\eta^2 & \lambda_4v_\eta v_\rho & \lambda_5v_\eta v_\chi \\ \lambda_4v_\eta v_\rho & 2\lambda_2v_\rho^2 & \lambda_6v_\rho v_\chi \\ \lambda_5v_\eta v_\chi & \lambda_6v_\rho v_\chi & 2\lambda_3v_\chi^2 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

La cual debemos diagonalizar por métodos perturbativos [7]. Para lograr esto, es necesario hacer las siguientes aseveraciones:

i) $v_\eta \approx v_\chi$. Entonces

$$M^2 \approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\lambda_1 v_\chi^2 & \lambda_4 v_\rho v_\chi & \lambda_5 v_\chi^2 \\ \lambda_4 v_\rho v_\chi & 2\lambda_2 v_\rho^2 & \lambda_6 v_\rho v_\chi \\ \lambda_5 v_\chi^2 & \lambda_6 v_\rho v_\chi & 2\lambda_3 v_\chi^2 \end{pmatrix}$$

ii) Factorizamos v_χ y definimos $t = \frac{v_\rho}{v_\chi}$.

$$M^2 \approx \frac{v_\chi^2}{2} \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & \lambda_4 t & \lambda_5 \\ \lambda_4 t & 2\lambda_2 t^2 & \lambda_6 t \\ \lambda_5 & \lambda_6 t & 2\lambda_3 \end{pmatrix}$$

iii) Asumimos que $\frac{v_\rho^2}{v_\chi^2} \ll 1$. Y procedemos separar la matriz de la siguiente forma

$$M^2 \approx \frac{v_\chi^2}{2} \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 0 & \lambda_5 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda_5 & 0 & 2\lambda_3 \end{pmatrix} + \frac{v_\chi^2 t}{2} \begin{pmatrix} 0 & \lambda_4 & 0 \\ \lambda_4 & 2\lambda_2 t & \lambda_6 \\ 0 & \lambda_6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2 \approx M_0 + M_p \quad (2.7)$$

Es decir, podemos descomponer nuestra matriz de masa como la suma de una matriz no perturbada más una matriz de perturbación, la cual asumimos pequeña. Identificamos así

$$M_0 = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 0 & \lambda_5 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda_5 & 0 & 2\lambda_3 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Y, además

$$M_p = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_4 & 0 \\ \lambda_4 & 2\lambda_2 v_\rho t & \lambda_6 \\ 0 & \lambda_6 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Si diagonalizamos M_0 obtenemos los términos de orden cero para los auto valores de masa. Así

$$M_{0D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 + \lambda_3 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 + \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Cuyos auto estados asociados son los siguientes

$$\{0, 1, 0\}; \left\{ \frac{\lambda_1 - \lambda_3 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2}}{\lambda_5}, 0, 1 \right\}; \quad (2.11)$$

$$\left\{ \frac{\lambda_1 - \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2}}{\lambda_5}, 0, 1 \right\}$$

Empleando estos vectores (normalizados), podemos construir una matriz ortogonal que nos permitirá rotar la matriz de perturbación M_p .

$$M_{pD} = O M_p O^T \quad (2.12)$$

Que conduce a

$$M_{pD} = \begin{pmatrix} 2\lambda_2 t^2 & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & 0 & 0 \\ M_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Las entradas sobre la diagonal nos dan la corrección a primer orden para los auto valores de masa.

Ahora, veamos explícitamente los términos M_{ij} de M_{pD} .

$$M_{12} = \frac{-t(\lambda_4\lambda_5 - \lambda_6) \left[\lambda_1 - \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} \right]}{2 \sqrt{\frac{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2}{1 + \left(\frac{-\lambda_1 + \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2}}{\lambda_5} \right)^2}}} \quad (2.14)$$

$$M_{13} = \frac{t(\lambda_4\lambda_5 + \lambda_6) \left[-\lambda_1 + \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} \right]}{2 \sqrt{\frac{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2}{1 + \left(\frac{-\lambda_1 + \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2}}{\lambda_5} \right)^2}}} \quad (2.15)$$

$$M_{21} = \frac{t(\lambda_5\lambda_6 - \lambda_4) \left[-\lambda_1 + \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} \right]}{\sqrt{\frac{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2}{1 + \left(\frac{-\lambda_1 + \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2}}{\lambda_5} \right)^2}}} \lambda_5 \quad (2.16)$$

$$M_{21} = \frac{t(\lambda_5\lambda_6 + \lambda_4) \left[\lambda_1 - \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} \right]}{\sqrt{\frac{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2}{1 + \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2}}{\lambda_5} \right)^2}}} \lambda_5 \quad (2.17)$$

Ahora, al conocer estas entradas, podemos calcular las contribuciones a segundo orden, de acuerdo con la relación

$$M_n^{(2)} = \sum_{n \neq m} \frac{|M_{nm}^2|}{M_n^{(0)} - M_m^{(0)}} \quad (2.18)$$

Así

$$M_1^{(2)} = \frac{\lambda_3 \lambda_4^2 + \lambda_6 (\lambda_1 \lambda_6 - \lambda_4 \lambda_5)}{\lambda_5^2 - 4\lambda_1 \lambda_3} v_\rho^2 \quad (2.19)$$

$$M_2^{(2)} = \frac{\left[\lambda_4 \left(-\lambda_1 + \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} \right) - \lambda_5 \lambda_6 \right]^2}{4c_1 \left[-\lambda_5^2 + (\lambda_1 - \lambda_3) \left(-\lambda_1 + \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} \right) \right]} v_\rho^2 \quad (2.20)$$

$$M_3^{(2)} = \frac{\left[\lambda_4 \left(\lambda_1 - \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} \right) + \lambda_5 \lambda_6 \right]^2}{4c_3 \left[\lambda_5^2 + (\lambda_1 - \lambda_3) \left(\lambda_1 - \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} \right) \right]} v_\rho^2 \quad (2.21)$$

Donde hemos multiplicado cada uno de los términos de la relación de recurrencia, por el factor $v_\chi^2 t$ que acompaña a la matriz de perturbación.

Finalmente, llegamos a los auto valores de masa para los escalares neutros CP-pares

$$M_{H_n}^2 \approx M_{0D_n} + M_{pD_n} + M_n^{(2)} \quad (2.22)$$

Tomando los términos sobre la diagonal.

Explícitamente

$$M_{H_1}^2 \approx 2\lambda_2 v_\rho^2 + \frac{\lambda_3 \lambda_4^2 + \lambda_6 (\lambda_1 \lambda_6 - \lambda_4 \lambda_5)}{\lambda_5^2 - 4\lambda_1 \lambda_3} v_\rho^2 \quad (2.23)$$

$$M_{H_2}^2 \approx c_1 v_\chi^2 + c_2 v_\rho^2 \approx c_1 v_\chi^2 \quad (2.24)$$

$$M_{H_3}^2 \approx c_3 v_\chi^2 + c_4 v_\rho^2 \approx c_3 v_\chi^2 \quad (2.25)$$

Con

$$c_1 = \frac{1}{2} \left(\lambda_1 + \lambda_3 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} \right), \quad (2.26)$$

$$c_2 = \frac{\left[\lambda_4 \left(\lambda_1 - \lambda_3 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} \right) + \lambda_5 \lambda_6 \right]^2}{4c_1 \left[\lambda_5^2 - (\lambda_1 - \lambda_3) \left(-\lambda_1 + \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} \right) \right]}, \quad (2.27)$$

$$c_3 = \frac{1}{2} \left(\lambda_1 + \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} \right) \quad (2.28)$$

Ahora bien, es posible a continuación tener una representación para los auto estados de masa calculados. Estos, se determinan considerando teoría de perturbaciones a primer orden

$$H_1 \approx R_\rho, \quad (2.29)$$

$$H_2 \approx \frac{\lambda_1 - \lambda_3 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2}}{\sqrt{\lambda_5^2 + \left(\lambda_1 - \lambda_3 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} \right)^2}} R_{\eta_2} + \frac{\lambda_5}{\sqrt{\lambda_5^2 + \left(\lambda_1 - \lambda_3 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} \right)^2}} R_\chi \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned}
H_3 \approx & \frac{\lambda_1 - \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2}}{\sqrt{\lambda_5^2 + \left(\lambda_1 - \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2}\right)^2}} R_{\eta_2} \\
& + \frac{\lambda_5}{\sqrt{\lambda_5^2 + \left(\lambda_1 - \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2}\right)^2}} R_\chi
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Identificamos H_1 como el bosón de Higgs del Modelo Estándar, dado que es el único escalar neutro que adquiere masa a la escala electrodébil. Los dos restantes, H_2 y H_3 son mucho más pesados y sus masas son proporcionales a la escala de rompimiento 341.

2.2 Relación con los auto estados físicos

Con los resultados obtenidos en la sección anterior, podemos expresar de una manera conveniente la relación entre los auto estados CP pares y los escalares físicos. Primero, acudimos a las siguientes definiciones

$$\sin \alpha = \frac{\lambda_1 - \lambda_3 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2}}{\sqrt{\lambda_5^2 + \left(\lambda_1 - \lambda_3 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2}\right)^2}} \tag{2.32}$$

$$\cos \alpha = \frac{\lambda_5}{\sqrt{\lambda_5^2 + \left(\lambda_1 - \lambda_3 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2}\right)^2}} \tag{2.33}$$

$$\sin \beta = \frac{\lambda_1 - \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2}}{\sqrt{\lambda_5^2 + \left(\lambda_1 - \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} \right)^2}} \quad (2.34)$$

$$\cos \beta = \frac{\lambda_5}{\sqrt{\lambda_5^2 + \left(\lambda_1 - \lambda_3 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + \lambda_5^2} \right)^2}} \quad (2.35)$$

Lo cual nos permite escribir nuevamente

$$H_1 \approx R_\rho \quad (2.36)$$

$$H_2 \approx \sin \alpha R_{\eta_2} + \cos \alpha R_\chi \quad (2.37)$$

$$H_3 \approx \sin \beta R_{\eta_2} + \cos \beta R_\chi \quad (2.38)$$

O equivalentemente de manera matricial

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_\rho \\ R_{\eta_2} \\ R_\chi \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Si tomamos la matriz inversa, llegamos a un resultado interesante

$$\begin{pmatrix} R_\rho \\ R_{\eta_2} \\ R_\chi \end{pmatrix} \approx \csc(\alpha - \beta) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\cos \alpha \\ 0 & -\sin \beta & \sin \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Que equivale a

$$R_\rho \approx H_1 \quad (2.41)$$

$$R_{\eta_2} \approx \csc(\alpha - \beta) [\cos \beta H_2 - \cos \alpha H_3] \quad (2.42)$$

$$R_\chi \approx \csc(\alpha - \beta) [-\sin \beta H_2 + \sin \alpha H_3] \quad (2.43)$$

y que son las expresiones para los escalares CP pares en función de los escalares físicos. Esto será de suma importancia a la hora de darle forma al Lagrangiano de Yukawa de nuestro modelo.

2.3 Lagrangino de Yukawa y masa de fermiones

Con tal de lograr un espectro completo de masa para las partículas, es necesario agregar al Lagrangiano de Yukawa dos términos, esto es, dos operadores efectivos, uno por cada sector de quarks. Dada la existencia de un polo de Landau en el modelo, en el rango de unos pocos TeV , es posible escoger una escala de energía de corte $\Lambda \simeq 5 TeV$. Los operadores efectivos, son no renormalizables, pero necesarios pues estamos trabajando con un número mínimo de escalares. Veamos

$$\frac{\lambda_{1a}^u}{\Lambda^2} \epsilon_{mnop} (\overline{Q_{1Lm}} \rho_n \eta_o^* \chi_p) u_{aR} + \frac{\lambda_{ia}^d}{\Lambda^2} \epsilon_{mnop} (\overline{Q_{iLm}} \rho_n^* \eta_o^* \chi_p) d_{aR} + h.c \quad (2.44)$$

Una vez más, $i = 1, 2, 3$ y $a = 1, 2, 3$ etiquetan el número de la familia (o generación).

Al considerar lo anterior, y la definición inicial del Lagrangiano, la matriz de masa en la base $(u_1 \ u_2 \ u_3)$ puede escribirse como

$$M_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \lambda_{11}^u \frac{v_\rho v_\eta v_\chi}{2\Lambda^2} & \lambda_{12}^u \frac{v_\rho v_\eta v_\chi}{2\Lambda^2} & \lambda_{13}^u \frac{v_\rho v_\eta v_\chi}{2\Lambda^2} \\ \lambda_{21}^u v_\rho & \lambda_{22}^u v_\rho & \lambda_{23}^u v_\rho \\ \lambda_{31}^u v_\rho & \lambda_{32}^u v_\rho & \lambda_{33}^u v_\rho \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Es de notar que si consideramos la aproximación $v_\eta \approx v_\chi \approx \Lambda$, todas las entradas de la matriz son proporcionales a la escala de rompimiento de la simetría del Modelo Estándar, $v_\rho = 246 GeV$, ajustadas por los acoples adimensionales.

$$M_u \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_{11}^u}{2} & \frac{\lambda_{12}^u}{2} & \frac{\lambda_{13}^u}{2} \\ \lambda_{21}^u & \lambda_{22}^u & \lambda_{23}^u \\ \lambda_{31}^u & \lambda_{31}^u & \lambda_{33}^u \end{pmatrix} v_\rho \quad (2.46)$$

En consecuencia, tomando los valores adecuados para dichos acoples, podemos recobrar los valores del Modelo Estándar relacionados a las masas de los quarks y sus mezclas, sin mucho esfuerzo.

Análogamente, la matriz de masa del sector down en la base $(d_1 \ d_2 \ d_3)$ tiene por expresión

$$M_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \lambda_{11}^d v_\rho & \lambda_{12}^d v_\rho & \lambda_{13}^d v_\rho \\ \lambda_{21}^d \frac{v_\rho v_\eta v_\chi}{2\Lambda^2} & \lambda_{22}^d \frac{v_\rho v_\eta v_\chi}{2\Lambda^2} & \lambda_{23}^d \frac{v_\rho v_\eta v_\chi}{2\Lambda^2} \\ \lambda_{31}^d \frac{v_\rho v_\eta v_\chi}{2\Lambda^2} & \lambda_{32}^d \frac{v_\rho v_\eta v_\chi}{2\Lambda^2} & \lambda_{33}^d \frac{v_\rho v_\eta v_\chi}{2\Lambda^2} \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

Que se reduce a

$$M_u \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \lambda_{11}^d & \lambda_{12}^d & \lambda_{13}^d \\ \frac{\lambda_{21}^d}{2} & \frac{\lambda_{22}^d}{2} & \frac{\lambda_{23}^d}{2} \\ \frac{\lambda_{31}^d}{2} & \frac{\lambda_{32}^d}{2} & \frac{\lambda_{33}^d}{2} \end{pmatrix} v_\rho, \quad (2.48)$$

si tenemos en cuenta las mismas consideraciones hechas para el sector up.

Ahora bien, sabiendo que la relación entre las bases de sabor y física para los quarks es

$$\begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}_{L,R} = V_{L,R}^u \begin{pmatrix} u' \\ c' \\ t' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_{L,R} = V_{L,R}^d \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ t' \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Aquí, $V_{L,R}^u$ y $V_{L,R}^d$ son matrices unitarias 3×3 que diagonalizan las matrices de masa para los quarks up y down. Estas transformaciones serán muy útiles para obtener las interacciones entre los quarks físicos y los bosones mediadores que contribuyen a los términos de diferencias de masa en los sistemas de mesones neutros que veremos al final de este trabajo.

3 Corrientes

Nos compete ahora, construir las corrientes físicas asociadas al modelo, que surgen del Lagrangiano de interacción, mediadas por los bosones de Gauge. Como eje central, nos ocuparemos de la corriente electromagnética, asociada al fotón. De ahí, podremos dar cuenta de las cargas de los fermiones. Seguidamente, visualizaremos las corrientes neutras mediadas por los bosones neutros, esto es, Z , Z' y Z'' . Estos dos últimos darán origen a cambios de sabor, por lo cual serán de un interés especial en el próximo capítulo.

3.1 Espectro de masa para los bosones de Gauge

Los bosones de Gauge, obtiene sus masas del siguiente Lagrangiano

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}_\mu \chi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \chi) + (\mathcal{D}_\mu \eta)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \eta) + (\mathcal{D}_\mu \rho)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \rho) \quad (3.1)$$

Lo cual se da, después del rompimiento espontáneo de la simetría. En el caso de los bosones cargados

$$W^\pm = \frac{A_\mu^1 \mp A_\mu^2}{\sqrt{2}} \rightarrow M_{W^\pm}^2 = \frac{1}{4} g_L^2 v_\rho^2 \approx (80 \text{ GeV})^2$$

$$K^0, K'^0 = \frac{A_\mu^4 \pm A_\mu^5}{\sqrt{2}} \rightarrow M_{K^0, K'^0}^2 = \frac{1}{4} g_L^2 v_\eta^2 \approx (650 \text{ GeV})^2 \quad (3.2)$$

$$K_1^\pm = \frac{A_\mu^6 \mp A_\mu^7}{\sqrt{2}} \rightarrow M_{K_1^\pm}^2 = \frac{1}{4} g_L^2 (v_\rho^2 + v_\eta^2) \approx (655 \text{ GeV})^2$$

$$X^\pm = \frac{A_\mu^9 \mp A_\mu^{10}}{\sqrt{2}} \rightarrow M_{X^\pm}^2 = \frac{1}{4} g_L^2 v_\chi^2 \approx (650 \text{ GeV})^2$$

$$V^{\pm\pm} = \frac{A_\mu^{11} \mp A_\mu^{12}}{\sqrt{2}} \rightarrow M_{V^{\pm\pm}}^2 = \frac{1}{4} g_L^2 (v_\rho^2 + v_\chi^2) \approx (655 \text{ GeV})^2$$

$$Y^\pm = \frac{A_\mu^{13} \mp A_\mu^{14}}{\sqrt{2}} \rightarrow M_{Y^\pm}^2 = \frac{1}{4} g_L^2 (v_\chi^2 + v_\eta^2) \approx (920 \text{ GeV})^2$$

Esto también conduce a la matriz de masa para los bosones neutros, en la base de los generadores diagonales de $SU(4)_L \otimes U(1)_X$, es decir, (A^3, A^8, A^{15}, A^X) .

$$\frac{g_L^2}{4} \begin{pmatrix} v_\rho^2 & -\frac{1}{\sqrt{3}} v_\rho^2 & -\frac{1}{\sqrt{6}} v_\rho^2 & -2tv_\rho^2 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} v_\rho^2 & \frac{1}{3}(v_\rho^2 + 4v_\eta^2) & \frac{1}{3\sqrt{2}}(v_\rho^2 - 2v_\eta^2) & \frac{2t}{\sqrt{3}} v_\rho^2 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} v_\rho^2 & \frac{1}{3\sqrt{2}}(v_\rho^2 - 2v_\eta^2) & \frac{1}{6}(v_\rho^2 + v_\eta^2 + 9v_\chi^2) & \frac{2t}{\sqrt{6}}(v_\rho^2 + 3v_\chi^2) \\ -2tv_\rho^2 & \frac{2t}{\sqrt{3}} v_\rho^2 & \frac{2t}{\sqrt{6}}(v_\rho^2 + 3v_\chi^2) & 4t^2(v_\rho^2 + v_\chi^2) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

$$\text{Con } t \equiv \frac{g_L}{g_X}$$

Dicha matriz, tiene determinante igual a cero, lo cual es consecuencia de tener un bosón de Gauge no masivo, es decir, el fotón. Al diagonalizarla, siguiendo la línea de jerarquía que hemos venido empleando para los valores esperados en el vacío, se obtiene las siguientes masas

$$M_A^2 = 0$$

$$M_Z^2 = \frac{g_L}{4C_W^2} = \frac{M_{W^\pm}^2}{C_W^2} \approx (91 \text{ GeV})^2 \quad (3.4)$$

$$M_{Z'}^2 \approx \frac{g_L^2 c_W^2 v_\eta^2}{h_W} \approx (790 \text{ GeV})^2$$

$$M_{Z''}^2 \approx \frac{g_L^2 v_\eta^2 [(1 - 4s_W^2)^2 + h_W^2]}{8h_W(1 - 4S_W^2)} \approx (2,2 \text{ TeV})^2$$

y los auto estados asociados

$$\begin{aligned}
 A^\mu &= S_W A_3^\mu + C_W \left[\frac{T_W}{\sqrt{3}} (-A_8^\mu - 2\sqrt{2}A_{15}^\mu) + \sqrt{1 - 3T_W^2} A_X^\mu \right] \\
 Z^\mu &= C_W A_3^\mu + S_W \left[\frac{T_W}{\sqrt{3}} (-A_8^\mu - 2\sqrt{2}A_{15}^\mu) + \sqrt{1 - 3T_W^2} A_X^\mu \right] \\
 Z'^\mu &= \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 - 3T_W^2}}{\sqrt{1 - 4S_W^2}} \left[\sqrt{h_W} A_8^\mu - 2\sqrt{2} \frac{S_W^2}{\sqrt{h_W}} A_{15}^\mu \right] + \frac{S_W \sqrt{1 - 3T_W^2}}{\sqrt{h_W}} A_X^\mu \\
 Z''^\mu &= \frac{\sqrt{3} \sqrt{1 - 4S_W^2}}{\sqrt{h_W}} A_{15}^\mu + \frac{2\sqrt{2} S_W}{\sqrt{h_W}} A_X^\mu
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Hemos empleado aquí, la expresión para el seno del ángulo de mezcla electrodébil

$$S_W = \frac{t}{\sqrt{1 + 4t^2}}, \tag{3.6}$$

y hemos definido también

$$\cos \theta_W \equiv C_W; \tan \theta_W \equiv T_W \text{ y } h_W \equiv 3 - 4S_W^2 \tag{3.7}$$

A partir de los resultados anteriores, vemos claramente que $M_{Z''} > M_{Z'} > M_Z$, recuperando la información de modelos más pequeños (Z' del 331) y del Modelo Estándar (Z). Se tiene un bosón extra, pesado, el cual podría fácilmente buscarse en el LHC.

3.2 Términos diagonales

De las ecuaciones de los auto estados para los bosones de Gauge (3.5), podemos sustraer información importante que nos permitirá construir las corrientes físicas asociadas al modelo. Para ello, simplemente notamos que dichos auto estados pueden expresarse como una combinación lineal de los generadores del grupo de simetría electrodébil, la cual, se expresa mediante una transformación rotación. En consecuencia, con la transformación inversa llegamos a la expresión útil para considerar en el Lagrangiano. Así

$$\begin{aligned}
 F_1 &= (C_W + S_W T_W) Z + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1 - 3T_W^2}{1 - 4S_W^2}} \left(\sqrt{h_W} + \frac{2S_W^2}{\sqrt{h_W}} \right) Z' + \sqrt{\frac{1 - 4S_W^2}{2h_W}} Z'' \\
 F_2 &= -2S_W A + (S_W T_W - C_W) Z + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1 - 3T_W^2}{1 - 4S_W^2}} \left(\sqrt{h_W} + \frac{2S_W^2}{\sqrt{h_W}} \right) Z' \\
 &\quad + \sqrt{\frac{1 - 4S_W^2}{2h_W}} Z'' \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

$$F_3 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1 - 3T_W^2}{1 - 4S_W^2}} \left(\sqrt{h_W} + \frac{2S_W^2}{\sqrt{h_W}} \right) Z' + \sqrt{\frac{1 - 4S_W^2}{2h_W}} Z''$$

$$F_4 = 2S_W A - 2S_W T_W Z - \frac{2S_W^2}{\sqrt{h_W}} \sqrt{\frac{1 - 3T_W^2}{1 - 4S_W^2}} Z' - 3 \sqrt{\frac{1 - 4S_W^2}{2h_W}} Z''$$

Ahora bien, para los términos en el Lagrangiano que poseen la derivada covariante

$$\frac{g_L}{2} \lambda_i A_\mu^i + g_X X A_\mu^X \quad (4 - \text{pletos}) \tag{3.9}$$

Tenemos

$$\frac{g_L}{2} \begin{pmatrix} F_1 & \sqrt{2}W^+ & \sqrt{2}K^0 & \sqrt{2}X^+ \\ \sqrt{2}W^- & F_2 & \sqrt{2}K^+ & \sqrt{2}V^{++} \\ \sqrt{2}\bar{K}^0 & \sqrt{2}K^- & F_3 & \sqrt{2}Y^+ \\ \sqrt{2}X^- & \sqrt{2}V^{--} & \sqrt{2}Y^- & F_4 \end{pmatrix} + g_X X A_\mu^X \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Mientras que

$$\frac{g_L}{2} \lambda_i A_\mu^i - g_X X A_\mu^X \quad (4^* - \text{pletas}) \quad (3.11)$$

Que implica

$$\frac{g_L}{2} \begin{pmatrix} F_1 & \sqrt{2}W^+ & \sqrt{2}K^0 & \sqrt{2}X^+ \\ \sqrt{2}W^- & F_2 & \sqrt{2}K^+ & \sqrt{2}V^{++} \\ \sqrt{2}\bar{K}^0 & \sqrt{2}K^- & F_3 & \sqrt{2}Y^+ \\ \sqrt{2}X^- & \sqrt{2}V^{--} & \sqrt{2}Y^- & F_4 \end{pmatrix} - g_X X A_\mu^X \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

3.3 Corriente electromagnética

Buscamos los términos que sean proporcionales a A^μ , para construir la corriente electromagnética. Por tanto

$$\frac{g_L}{2} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & -2S_W & & \\ & & 0 & \\ & & & 2S_W \end{pmatrix} \pm g_X \begin{pmatrix} C_W \sqrt{1 - 3T_W^2 X} & & & \\ & C_W \sqrt{1 - 3T_W^2 X} & & \\ & & C_W \sqrt{1 - 3T_W^2 X} & \\ & & & C_W \sqrt{1 - 3T_W^2 X} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{g_L}{2} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & -2S_W & & \\ & & 0 & \\ & & & 2S_W \end{pmatrix} \pm g_L S_W \begin{pmatrix} X & & & \\ & X & & \\ & & X & \\ & & & X \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

$$= e \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \pm e \begin{pmatrix} X & & & \\ & X & & \\ & & X & \\ & & & X \end{pmatrix}$$

Aquí hemos definido, como en el Modelo Estándar, $g_L S_W \equiv e$.

$$= e \begin{pmatrix} \pm X & & & \\ & -1 \pm X & & \\ & & \pm X & \\ & & & 1 \pm X \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Procedemos entonces, a darle forma explícita a estas expresiones, considerando las familias de fermiones del modelo

Para 4 – pletes (+)

Quarks Q_{1L} ; $X = 2/3$

$$e \begin{pmatrix} 2/3 & & & \\ & -1/3 & & \\ & & 2/3 & \\ & & & 5/3 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Para 4* – pletes (-)

Quarks Q_{2L}, Q_{3L} ; $X = -1/3$

$$e \begin{pmatrix} 1/3 & & & \\ & -2/3 & & \\ & & 1/3 & \\ & & & 4/3 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Leptones; $X = 0$

$$e \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Con estos resultados, podemos construir la corriente electromagnética

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^{EM} = & -eA_\mu \left\{ (\bar{u}_1 \quad \bar{d}_1 \quad \bar{U}_1 \quad \bar{J}_1)_L \gamma^\mu \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & -1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ d_1 \\ U_1 \\ J_1 \end{pmatrix}_L \right. \\ & + \sum_{i=2,3} (\bar{u}_i \quad \bar{d}_i \quad \bar{U}_i \quad \bar{J}_i)_L \gamma^\mu \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \\ U_i \\ J_i \end{pmatrix}_L \\ & + \bar{u}_{1R} \gamma^\mu \left(\frac{2}{3}\right) u_{1R} + \bar{d}_{1R} \gamma^\mu \left(-\frac{1}{3}\right) d_{1R} + \bar{U}_{1R} \gamma^\mu \left(\frac{2}{3}\right) U_{1R} \\ & + \bar{J}_{1R} \gamma^\mu \left(\frac{5}{3}\right) J_{1R} \\ & \left. + \sum_{a=1,2,3} (\bar{\nu}_a \quad \bar{e}_a \quad \bar{\nu}_a^c \quad \bar{e}_a^c)_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_a \\ e_a \\ \nu_a^c \\ e_a^c \end{pmatrix}_L \right\} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{int}^{EM} = -eA_\mu J_{EM}^\mu \quad (3.18)$$

3.4 Corriente neutra (Z)

Veamos ahora, los términos diagonales proporcionales al bosón Z.

$$\frac{g_L}{2} \begin{pmatrix} C_W + S_W T_W & & & \\ & S_W T_W - C_W & & \\ & & 0 & \\ & & & -2 S_W T_W \end{pmatrix}$$

$$\pm g_X \begin{pmatrix} -S_W \sqrt{1 - 3T_W^2 X} & & & \\ & -S_W \sqrt{1 - 3T_W^2 X} & & \\ & & -S_W \sqrt{1 - 3T_W^2 X} & \\ & & & -S_W \sqrt{1 - 3T_W^2 X} \end{pmatrix}$$

Procediendo entonces a reescribir un poco las expresiones algebraicas de arriba

- $g_X S_W \sqrt{1 - 3T_W^2 X} = g_L \frac{g_X S_W}{g_L C_W} C_W \sqrt{1 - 3T_W^2 X} = g_L \frac{S_W^2}{C_W}$
- $C_W + S_W T_W = C_W + \frac{S_W^2}{C_W} = \frac{1}{C_W} (C_W^2 + S_W^2) = \frac{1}{C_W}$
- $S_W T_W - C_W = \frac{1}{C_W} (S_W^2 - C_W^2) = \frac{1}{C_W} (2S_W^2 - 1)$
- $2S_W T_W = \frac{2S_W^2}{C_W}$

Lo cual conduce a

$$\frac{g_L}{2C_W} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2S_W^2 - 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & -2S_W^2 \end{pmatrix} \pm \frac{g_X S_W^2}{C_W} X \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{g_L}{C_W} \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 & & & \\ & -1/2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + S_W^2 \begin{pmatrix} \mp X & & & \\ & 1 \mp X & & \\ & & \mp X & \\ & & & -1 \mp X \end{pmatrix} \right\} \quad (3.19)$$

Aquí tenemos

(-): 4 -pletas

(+): 4* -pletas

Ahora, discriminamos por los valores de las hipercargas

4 -pletas

Quarks Q_{1L} ; $X = 2/3$

$$\frac{g_L}{C_W} \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 & & & \\ & -1/2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + S_W^2 \begin{pmatrix} -2/3 & & & \\ & 1/3 & & \\ & & -2/3 & \\ & & & -5/3 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.20)$$

$$= \frac{g_L}{C_W} \left\{ \frac{A_3}{2} - S_W^2 Q(Q_{kL}) \right\} \quad (3.21)$$

Dónde $Q(Q_{kL})$ ($k = 1, 2, 3$) es la matriz de carga del respectivo cuadruplete.

4* -pletas

Quarks Q_{2L}, Q_{3L} ; $X = -1/3$

$$\frac{g_L}{C_W} \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 & & & \\ & -1/2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + S_W^2 \begin{pmatrix} -1/3 & & & \\ & 2/3 & & \\ & & -1/3 & \\ & & & -4/3 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.22)$$

$$= \frac{g_L}{C_W} \left\{ \frac{A_3}{2} - S_W^2 Q(Q_{kL}) \right\} \quad (3.23)$$

Leptones; $X = 0$

$$\frac{g_L}{C_W} \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 & & & \\ & -1/2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + S_W^2 \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.24)$$

$$= \frac{g_L}{C_W} \left\{ \frac{A_3}{2} - S_W^2 Q(L_{aL}) \right\}; \quad a = 1, 2, 3 \quad (3.25)$$

Singletes

Para fermiones derechos, los valores de las hipercargas coinciden con sus valores de carga eléctrica. También

$$g_X A_\mu^X = -g_X S_W \sqrt{1 - 3T_W^2} Z_\mu = -g_L \frac{S_W^2}{C_W} Z_\mu \quad (3.26)$$

Finalmente

$$\mathcal{L}_{int}^{NC} = -g_L \frac{S_W^2}{C_W} Z_\mu j^\mu(Z) \quad (3.27)$$

Aquí

$$j^\mu(Z) = j_L^\mu - S_W^2 J_{EM}^\mu \quad (3.28)$$

Y

$$\begin{aligned}
j_L^\mu &= \frac{1}{2} \left\{ \bar{Q}_{1L} \gamma^\mu A_3 Q_{1L} + \sum_{1=2,3} \bar{Q}_{iL} \gamma^\mu A_3 Q_{iL} + \sum_{a=1,2,3} \bar{L}_{aL} \gamma^\mu A_3 L_{aL} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \bar{u}_{1L} \gamma^\mu u_{1L} - \bar{d}_{1L} \gamma^\mu d_{1L} + \sum_{1=2,3} (\bar{d}_{iL} \gamma^\mu d_{iL} - \bar{u}_{iL} \gamma^\mu u_{iL}) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{a=1,2,3} (\bar{\nu}_{aL} \gamma^\mu \nu_{aL} - \bar{e}_{aL} \gamma^\mu e_{aL}) \right\}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Lo que podemos escribir de manera compacta así

$$j_L^\mu = \sum_f T_{4f} \bar{f}_L \gamma^\mu f_L \tag{3.30}$$

Con

$$T_{4f} = \text{diag} (1/2, -1/2, 0, 0)$$

Y

f_L : Los fermiones del modelo

3.5 Corriente neutra (Z')

Siguiendo la misma metodología, procedemos a considerar los términos proporcionales al bosón Z'. Veamos

$$\frac{g_L}{2} \sqrt{\frac{1-3T_W^2}{1-4S_W^2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \left(\sqrt{h_w} + \frac{2S_W^2}{\sqrt{h_w}} \right) \\ \frac{1}{3} \left(\sqrt{h_w} + \frac{2S_W^2}{\sqrt{h_w}} \right) \\ \frac{1}{3} \left(\sqrt{h_w} + \frac{2S_W^2}{\sqrt{h_w}} \right) \\ -\frac{2S_W^2}{\sqrt{h_w}} \end{pmatrix}$$

$$\pm g_X \begin{pmatrix} \frac{S_w}{\sqrt{h_w}} \sqrt{1-3T_W^2 X} \\ \frac{S_w}{\sqrt{h_w}} \sqrt{1-3T_W^2 X} \\ \frac{S_w}{\sqrt{h_w}} \sqrt{1-3T_W^2 X} \\ \frac{S_w}{\sqrt{h_w}} \sqrt{1-3T_W^2 X} \end{pmatrix}$$

Podemos simplificar para obtener

$$\frac{g_L}{2} \frac{1}{C_w \sqrt{h_w}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} (3-2S_w^2) \\ \frac{1}{3} (3-2S_w^2) \\ \frac{1}{3} (3-2S_w^2) \\ -2S_w^2 \end{pmatrix}$$

$$\pm g_L \frac{S_w^2}{C_w \sqrt{h_w}} \begin{pmatrix} X \\ X \\ X \\ X \end{pmatrix}$$

$$= \frac{g_L}{2} \frac{1}{C_w \sqrt{h_w}} \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & 1/2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} - S_w^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \mp X & & & \\ & \frac{1}{3} \mp X & & \\ & & \frac{1}{3} \mp X & \\ & & & 1 \mp X \end{pmatrix} \right\} \quad (3.31)$$

Una vez más

(-) : 4 -pletas

(+) : 4* -pletas

Por tanto

4 -pletas

Quarks Q_{1L} ; $X = 2/3$

$$\frac{g_L}{2} \frac{1}{C_w \sqrt{h_w}} \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & 1/2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} - S_w^2 \begin{pmatrix} -1/3 & & & \\ & -1/3 & & \\ & & -1/3 & \\ & & & -1/3 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.32)$$

4* -pletas

Quarks Q_{2L}, Q_{3L} ; $X = -1/3$

$$\frac{g_L}{2} \frac{1}{C_w \sqrt{h_w}} \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & 1/2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} - S_w^2 \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 2/3 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.33)$$

Leptones; $X = 0$

$$\frac{g_L}{2} \frac{1}{C_w \sqrt{h_w}} \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & 1/2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} - S_w^2 \begin{pmatrix} 1/3 & & & \\ & 1/3 & & \\ & & 1/3 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.34)$$

En consecuencia, podemos escribir

$$\mathcal{L}_{int}^{NC} = \frac{g_L}{2} \frac{1}{C_w \sqrt{h_w}} Z'_\mu j^\mu(Z') \quad (3.35)$$

Y

$$\begin{aligned} j^\mu(Z') = & \bar{u}_{1L} \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} S_w^2 \right) u_{1L} + \bar{d}_{1L} \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} S_w^2 \right) d_{1L} + \bar{U}_{1L} \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} S_w^2 \right) U_{1L} \\ & - \bar{J}_{1L} \gamma^\mu \frac{1}{3} S_w^2 J_{1L} + \sum_{i=2,3} \left[\bar{d}_{iL} \frac{\gamma^\mu}{2} d_{iL} + \bar{u}_{iL} \frac{\gamma^\mu}{2} u_{iL} + \bar{D}_{iL} \frac{\gamma^\mu}{2} D_{iL} - \frac{2}{3} \bar{J}_{iL} \gamma^\mu S_w^2 J_{iL} \right] \\ & + \sum_{a=1,2,3} \left[\bar{\nu}_{aL} \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} S_w^2 \right) \nu_{aL} + \bar{e}_{aL} \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} S_w^2 \right) e_{aL} \right. \\ & \left. + \bar{\nu}_{aL}^c \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} S_w^2 \right) \nu_{aL}^c - \bar{e}_{aL}^c \gamma^\mu S_w^2 e_{aL}^c \right] \end{aligned}$$

3.6 Corriente neutra (Z'')

En última instancia, consideremos los términos lineales en Z''

$$\begin{aligned} & \frac{g_L}{2} \sqrt{\frac{1-4S_W^2}{2h_W}} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix} \pm g_X \frac{2\sqrt{2}S_W}{\sqrt{h_W}} \begin{pmatrix} X & & & \\ & X & & \\ & & X & \\ & & & X \end{pmatrix} \\ & = \frac{g_L}{2\sqrt{2}} \frac{C_W \sqrt{1-3T_W^2}}{\sqrt{h_W}} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix} \pm g_X \frac{2\sqrt{2}S_W}{\sqrt{h_W}} \begin{pmatrix} X & & & \\ & X & & \\ & & X & \\ & & & X \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A diferencia de los desarrollos anteriores, expresamos todo como un factor de la constante g_X .

$$\begin{aligned} & = \frac{g_X}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{h_W}} \left(\frac{C_W}{T_W} - 3S_W \right) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix} \pm g_X \frac{2\sqrt{2}S_W}{\sqrt{h_W}} \begin{pmatrix} X & & & \\ & X & & \\ & & X & \\ & & & X \end{pmatrix} \\ & = \frac{g_X}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{h_W}} \left\{ \frac{C_W}{T_W} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix} - S_W \begin{pmatrix} 3 \mp 8X & & & \\ & 3 \mp 8X & & \\ & & 3 \mp 8X & \\ & & & 9 \mp 8X \end{pmatrix} \right\} \quad (3.36) \end{aligned}$$

De nuevo, discriminamos por los valores de las hipercargas

4 - pletes

Quarks Q_{1L} ; $X = 2/3$

$$\frac{g_X}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{h_W}} \left\{ \frac{C_W}{T_W} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix} + \frac{S_W}{3} \begin{pmatrix} 7 & & & \\ & 7 & & \\ & & 7 & \\ & & & -43 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.37)$$

4 * $-plet$ es

Quarks Q_{2L}, Q_{3L} ; $X = -1/3$

$$\frac{g_X}{2\sqrt{2}\sqrt{h_W}} \left\{ \frac{C_W}{T_W} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix} - \frac{S_W}{3} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -35 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.38)$$

Leptones; $X = 0$

$$\frac{g_X}{2\sqrt{2}\sqrt{h_W}} \left\{ \frac{C_W}{T_W} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix} - 3S_W \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.39)$$

Llegamos a

$$\mathcal{L}_{int}^{NC} = \frac{g_X}{2\sqrt{2}h_W} Z''_{\mu} j^{\mu}(Z'') \quad (3.40)$$

Y

$$\begin{aligned} j^{\mu}(Z'') = & \bar{u}_{1L} \gamma^{\mu} \left(\frac{C_W}{T_W} + \frac{7}{3} S_W \right) u_{1L} + \bar{d}_{1L} \gamma^{\mu} \left(\frac{C_W}{T_W} + \frac{7}{3} S_W \right) d_{1L} + \bar{U}_{1L} \gamma^{\mu} \left(\frac{C_W}{T_W} + \frac{7}{3} S_W \right) U_{1L} \\ & - \bar{J}_{1L} \gamma^{\mu} \left(\frac{3C_W}{T_W} + \frac{43}{3} S_W \right) J_{1L} \\ & + \sum_{i=2,3} \left[\bar{d}_{iL} \gamma^{\mu} \left(\frac{C_W}{T_W} - \frac{1}{3} S_W \right) d_{iL} + \bar{u}_{iL} \gamma^{\mu} \left(\frac{C_W}{T_W} - \frac{1}{3} S_W \right) u_{iL} \right. \\ & \left. + \bar{D}_{iL} \gamma^{\mu} \left(\frac{C_W}{T_W} - \frac{1}{3} S_W \right) D_{iL} - \bar{J}_{iL} \gamma^{\mu} \left(\frac{3C_W}{T_W} + \frac{35}{3} S_W \right) J_{iL} \right] \\ & + \sum_{a=1,2,3} \left[\bar{\nu}_{aL} \gamma^{\mu} \left(\frac{C_W}{T_W} - 3S_W \right) \nu_{aL} + \bar{e}_{aL} \gamma^{\mu} \left(\frac{C_W}{T_W} - 3S_W \right) e_{aL} \right. \\ & \left. + \bar{\nu}_{aL}^c \gamma^{\mu} \left(\frac{C_W}{T_W} - 3S_W \right) \nu_{aL}^c - \bar{e}_{aL}^c \gamma^{\mu} \left(\frac{3C_W}{T_W} - 9S_W \right) e_{aL}^c \right] \end{aligned}$$

4 Corrientes neutras que cambian sabor, mediadas por escalares.

Llegamos a una parte relevante de este trabajo. Y es la muestra de la aparición de corrientes neutras que cambian sabor. Del capítulo anterior, los bosones Z' y Z'' son fuentes que dan cuenta de estos procesos; sin embargo, no serán de interés particular en este capítulo. El enfoque será en aquellos, mediados por escalares. Nos daremos cuenta, que sólo los escalares adicionales al Higgs del Modelo Estándar participan de esta situación.

4.1 Sector Up

Consideremos una vez más el término del sector up para el Lagrangiano de Yukawa

$$\lambda_{ia}^u \overline{Q}_{iL} \rho^* u_{aR} + \frac{\lambda_{1a}^u}{\Lambda^2} \epsilon_{mnop} (\overline{Q}_{1Lm} \rho_n \eta_o^* \chi_p) u_{aR}$$

Que explícitamente nos conduce a

$$\lambda_{ia}^u \overline{Q}_{iL} \rho^* u_{aR} + \frac{\lambda_{1a}^u}{\Lambda^2} (\overline{Q}_{1L(1)} \rho_{(2)} \eta_{(3)}^* \chi_{(4)}) u_{aR}$$

Si se tienen en cuenta una vez se rompe la simetría, la redefinición de los campos (2.1) y las relaciones entre los escalares CP-Even con los escalares físicos en este Lagrangiano (2.41 – 2.43) llegamos a

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_{1a}^u}{2\sqrt{2}\Lambda^2} \bar{u}_{1L} [(v_\rho + H_1)(v_\eta + \csc(\alpha - \beta) [\cos \beta H_2 - \cos \alpha H_3]) (v_\chi \\ & + \csc(\alpha - \beta) [-\sin \beta + \sin \alpha])] u_{aR} + \frac{\lambda_{ia}^u}{\sqrt{2}} \bar{u}_{iL} (v_\rho + H_1) u_{aR} \end{aligned}$$

Considerando únicamente los términos lineales en los escalares físicos, encontramos resultados notables

Acoples de H_1

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\lambda_{1a}^u}{2\sqrt{2}\Lambda^2} \bar{u}_{1L} u_{aR} v_\eta v_\chi + \frac{\lambda_{ia}^u}{\sqrt{2}} \bar{u}_{iL} u_{aR} \right] H_1 \\ & \approx \frac{M^u}{v_\rho} H_1 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Resultado similar al predicho en el Modelo Estándar. El acople al Higgs es proporcional a la matriz de masa. En consecuencia, no dará cuenta de procesos que cambien sabor.

Acoples de H_2

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\lambda_{1a}^u}{2\sqrt{2}\Lambda^2} \bar{u}_{1L} u_{aR} v_\rho v_\eta \csc(\alpha - \beta) \sin \beta + \frac{\lambda_{1a}^u}{\sqrt{2}} \bar{u}_{1L} u_{aR} v_\rho v_\chi \csc(\alpha - \beta) \cos \beta \right] H_2 \\ & \approx \csc(\alpha - \beta) \left[-\frac{\sin \beta}{v_\chi} \begin{pmatrix} m_{11}^u & m_{12}^u & m_{13}^u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\cos \beta}{v_\eta} \begin{pmatrix} m_{11}^u & m_{12}^u & m_{13}^u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] H_2 \\ & = \csc(\alpha - \beta) \begin{pmatrix} m_{11}^u & m_{12}^u & m_{13}^u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\frac{\cos \beta}{v_\eta} - \frac{\sin \beta}{v_\chi} \right] H_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Acoples de H_3

$$\left[\frac{\lambda_{1a}^u}{\sqrt{2}} \bar{u}_{1L} u_{aR} v_\rho v_\eta \csc(\alpha - \beta) \sin \alpha - \frac{\lambda_{1a}^u}{2\sqrt{2}\Lambda^2} \bar{u}_{1L} u_{aR} v_\rho v_\chi \csc(\alpha - \beta) \cos \alpha \right] H_3$$

$$\begin{aligned}
&\approx csc(\alpha - \beta) \left[\frac{\sin \alpha}{v_\chi} \begin{pmatrix} m_{11}^u & m_{12}^u & m_{13}^u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\cos \alpha}{v_\eta} \begin{pmatrix} m_{11}^u & m_{12}^u & m_{13}^u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] H_3 \\
&= csc(\alpha - \beta) \begin{pmatrix} m_{11}^u & m_{12}^u & m_{13}^u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\frac{\sin \alpha}{v_\chi} - \frac{\cos \alpha}{v_\eta} \right] H_3 \tag{4.3}
\end{aligned}$$

4.2 Sector Down

Procediendo de manera análoga como arriba, consideremos ahora, el sector down en el Lagrangiano de Yukawa

$$\lambda_{1a}^d \bar{Q}_{1L} \rho d_{aR} + \frac{\lambda_{ia}^d}{\Lambda^2} \epsilon_{mnop} (\bar{Q}_{iLm} \rho_n^* \eta_o^* \chi_p) d_{aR}$$

Esto es

$$\lambda_{1a}^d \bar{Q}_{1L} \rho d_{aR} + \frac{\lambda_{ia}^d}{\Lambda^2} (\bar{Q}_{iL(1)} \rho_{(2)}^* \eta_{(3)}^* \chi_{(4)}) d_{aR}$$

Al igual que la redefinición de los campos junto con la relación con los escalares físicos llegamos a

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda_{ia}^d}{2\sqrt{2}\Lambda^2} \bar{d}_{iL} [(v_\rho + H_1)(v_\eta + csc(\alpha - \beta) [\cos \beta H_2 - \cos \alpha H_3]) (v_\chi \\
&\quad + csc(\alpha - \beta) [-\sin \beta + \sin \alpha])] d_{aR} + \frac{\lambda_{1a}^d}{\sqrt{2}} \bar{d}_{1L} (v_\rho + H_1) d_{aR}
\end{aligned}$$

Discriminando por los acoples a los escalares físicos, obtenemos

Acoples de H_1 :

$$\left[\frac{\lambda_{1a}^d}{\sqrt{2}} \bar{d}_{1L} d_{aR} + \frac{\lambda_{ia}^d}{2\sqrt{2}\Lambda^2} \bar{d}_{iL} d_{aR} \right] H_1$$

$$\approx \frac{M^d}{v_\rho} H_1 \quad (4.4)$$

Como en el sector Up, reproducimos el resultado del Modelo Estándar.

Acoples de H_2 :

$$\left[-\frac{\lambda_{ia}^d}{2\sqrt{2}\Lambda^2} \bar{u}_{1L} u_{aR} v_\rho v_\eta \csc(\alpha - \beta) \sin \beta + \frac{\lambda_{ia}^d}{\sqrt{2}} \bar{u}_{1L} u_{aR} v_\rho v_\chi \csc(\alpha - \beta) \cos \beta \right] H_2$$

$$\approx \csc(\alpha - \beta) \left[-\frac{\sin \beta}{v_\chi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_{21}^d & m_{22}^d & m_{23}^d \\ m_{31}^d & m_{32}^d & m_{33}^d \end{pmatrix} + \frac{\cos \beta}{v_\eta} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_{21}^d & m_{22}^d & m_{23}^d \\ m_{31}^d & m_{32}^d & m_{33}^d \end{pmatrix} \right] H_2$$

$$= \csc(\alpha - \beta) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_{21}^d & m_{22}^d & m_{23}^d \\ m_{31}^d & m_{32}^d & m_{33}^d \end{pmatrix} \left[\frac{\cos \beta}{v_\eta} - \frac{\sin \beta}{v_\chi} \right] H_2 \quad (4.5)$$

Acoples en H_3 :

$$\left[\frac{\lambda_{ia}^d}{\sqrt{2}} \bar{u}_{1L} u_{aR} v_\rho v_\eta \csc(\alpha - \beta) \sin \alpha - \frac{\lambda_{ia}^d}{2\sqrt{2}\Lambda^2} \bar{u}_{1L} u_{aR} v_\rho v_\chi \csc(\alpha - \beta) \cos \alpha \right] H_3$$

$$\approx \csc(\alpha - \beta) \left[\frac{\sin \alpha}{v_\chi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_{21}^d & m_{22}^d & m_{23}^d \\ m_{31}^d & m_{32}^d & m_{33}^d \end{pmatrix} - \frac{\cos \alpha}{v_\eta} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_{21}^d & m_{22}^d & m_{23}^d \\ m_{31}^d & m_{32}^d & m_{33}^d \end{pmatrix} \right] H_3$$

$$= \csc(\alpha - \beta) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_{21}^d & m_{22}^d & m_{23}^d \\ m_{31}^d & m_{32}^d & m_{33}^d \end{pmatrix} \left[\frac{\sin \alpha}{v_\chi} - \frac{\cos \alpha}{v_\eta} \right] H_3 \quad (4.6)$$

4.3 Lagrangiano

Nos compete ahora, construir el Lagrangiano asociado a corrientes neutras que cambian sabor, mediadas por escalares (H_2, H_3). Veamos

$$\mathcal{L} = \bar{U}'_L \Gamma_2^u U'_R H_2 + \bar{U}'_L \Gamma_3^u U'_R H_3 + \bar{D}'_L \Gamma_2^d D'_R H_2 + \bar{D}'_L \Gamma_3^d D'_R H_3 + H.C. \quad (4.7)$$

Dónde identificamos

$$\Gamma_2^u = \text{csc}(\alpha - \beta) \left[\frac{\sin \alpha}{v_\chi} - \frac{\cos \alpha}{v_\eta} \right] \begin{pmatrix} m_{11}^u & m_{12}^u & m_{13}^u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

$$\Gamma_2^d = \text{csc}(\alpha - \beta) \left[\frac{\cos \beta}{v_\eta} - \frac{\sin \beta}{v_\chi} \right] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_{21}^d & m_{22}^d & m_{23}^d \\ m_{31}^d & m_{32}^d & m_{33}^d \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Y análogamente

$$\Gamma_3^u = \text{csc}(\alpha - \beta) \left[\frac{\sin \alpha}{v_\chi} - \frac{\cos \alpha}{v_\eta} \right] \begin{pmatrix} m_{11}^u & m_{12}^u & m_{13}^u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

$$\Gamma_3^d = \text{csc}(\alpha - \beta) \left[\frac{\sin \alpha}{v_\chi} - \frac{\cos \alpha}{v_\eta} \right] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_{21}^d & m_{22}^d & m_{23}^d \\ m_{31}^d & m_{32}^d & m_{33}^d \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Ahora, es importante resaltar lo siguiente:

- Después de aplicar la transformación que relaciona los autoestados físicos con lo de sabor, las matrices $\Gamma^{u,d}$ inducirán interacciones no diagonales, mediadas por escalares.
- El origen de estas matrices está relacionado con el hecho de que las familias de quarks izquierdos no transforman de la misma manera, y es precisamente por esta particularidad, que los escalares adicionales del

modelo, pueden mediar procesos que involucran corrientes neutras que cambian sabor. Cabe mencionar también, que dichos términos son altamente suprimidos una vez tomamos la aproximación $v_\eta, v_\chi \gg v_\rho$.

Si discriminamos por los acoples a los escalares tenemos los términos que inducen **Corrientes Neutras que Cambian Sabor, mediadas por Escalares.**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{H_2}^{FCNC} &= \bar{U}'_L \Gamma_2^u U'_R H_2 + \bar{D}'_L \Gamma_2^d D'_R H_2 + H.C. \\ &= \csc(\alpha - \beta) \left[\frac{\cos \beta}{v_\eta} - \frac{\sin \beta}{v_\chi} \right] [\bar{U}_L \chi^u U_R H_2 + \bar{D}_L \chi^d D_R H_2] + H.C.\end{aligned}\quad (4.12)$$

También

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{H_3}^{FCNC} &= \bar{U}'_L \Gamma_3^u U'_R H_3 + \bar{D}'_L \Gamma_3^d D'_R H_3 + H.C. \\ &= \csc(\alpha - \beta) \left[\frac{\sin \alpha}{v_\chi} - \frac{\cos \alpha}{v_\eta} \right] [\bar{U}_L \chi^u U_R H_3 + \bar{D}_L \chi^d D_R H_3] + H.C.\end{aligned}\quad (4.13)$$

Con

$$\chi^u = V_L^u \begin{pmatrix} m_{11}^u & m_{12}^u & m_{13}^u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (V_R^u)^\dagger \quad (4.14)$$

$$\chi^d = V_L^d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_{21}^d & m_{22}^d & m_{23}^d \\ m_{31}^d & m_{32}^d & m_{33}^d \end{pmatrix} (V_R^d)^\dagger \quad (4.15)$$

5 Observables en sistemas de mesones neutros

Llegamos así, al capítulo más importante de este trabajo. Esto es, a partir de la construcción realizada en los capítulos anteriores, y las consideraciones hechas a partir de estos, calculamos entonces las diferencias de masa para sistemas de mesones neutros ($\bar{K}^0 - K^0, \bar{B}^0 - B^0, \bar{D}^0 - D^0$), los cuales pueden ser contrastados con los resultados experimentales y las predicciones del Modelo Estándar.

5.1 Lagrangiano (Z')

Las interacciones mediadas por el bosón Z' vienen dadas por el siguiente Lagrangiano (3.35)

$$\mathcal{L}_{Z'} = \frac{g_L}{C_W} \sum_q [\bar{q}_L \gamma^\mu K_L^q q_L + \bar{q}_R \gamma^\mu K_R^q q_R] Z'_\mu$$

Con

$$\begin{aligned} K_L^q &= V_L^q Y_L^q (V_L^q)^\dagger \\ K_R^q &= V_R^q Y_R^q (V_R^q)^\dagger \end{aligned} \quad (5.1)$$

Y q corre sobre el sector de quarks en el que se esté trabajando ($q = u, d$). Las matrices V_L^q y V_R^q son las utilizadas en la ref. [2].

$$\begin{aligned} Y_L^u &= Y_L^d = \frac{1}{\sqrt{h_W}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{S_W^2}{3} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.39583 & & \\ & 0.68903 & \\ & & 0.68903 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Donde la primera entrada de esta matriz, da cuenta de fenómenos de cambio de sabor.

En consecuencia, podemos calcular explícitamente la forma de las matrices K_L^q . Esto es

$$K_L^u = \begin{pmatrix} 0.39591 & 0.00478 & 0.00018 \\ 0.00477 & 0.68815 & 0 \\ 0.00018 & 0 & 0.68903 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Análogamente

$$K_L^d = \begin{pmatrix} 0.40884 & -0.06039 & -0.00072 \\ -0.06039 & 0.67508 & -0.00019 \\ -0.00072 & -0.00019 & 0.68903 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Cabe anotar aquí, que las contribuciones de los campos derechos no generan cambios de sabor, pues las matrices asociadas, son todas proporcionales a la identidad.

5.2 Lagrangiano (Z'')

Las interacciones mediadas por el bosón Z'' vienen dadas por el siguiente Lagrangiano (3.40)

$$\mathcal{L}_{Z''} = g_X \sum_q [\bar{q}_L \gamma^\mu K_L'^q q_L + \bar{q}_R \gamma^\mu K_R'^q q_R] Z''_\mu$$

Con

$$\begin{aligned} K_L'^q &= V_L^q Y_L'^q (V_L^q)^\dagger \\ K_R'^q &= V_R^q Y_R'^q (V_R^q)^\dagger \end{aligned} \quad (5.5)$$

Y q corre sobre el sector de quarks en el que se esté trabajando ($q = u, d$). Las matrices V_L^q y V_R^q son las utilizadas en la ref. [2].

$$\begin{aligned} Y_L'^u = Y_L'^d &= \frac{1}{2\sqrt{2}h_W} \begin{pmatrix} \frac{C_W}{T_W} + \frac{7}{3} & & \\ & \frac{C_W}{T_W} - \frac{S_W}{3} & \\ & & \frac{C_W}{T_W} - \frac{S_W}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.96865 & & \\ & 0.36184 & \\ & & 0.36184 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.6)$$

De nuevo aquí, la primera entrada de esta matriz, da cuenta de fenómenos de cambio de sabor.

En consecuencia, podemos calcular explícitamente la forma de las matrices K_L^q . Esto es

$$K_L^{ru} = \begin{pmatrix} 0.96849 & -0.00989 & -0.00037 \\ -0.00989 & 0.36200 & 0.00001 \\ -0.00037 & 0.00001 & 0.36184 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Y además

$$K_L^{rd} = \begin{pmatrix} 0.94154 & 0.12535 & 0.00149 \\ 0.12535 & 0.38894 & 0.00032 \\ 0.00149 & 0.00032 & 0.36185 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

De manera similar a la sección anterior, las contribuciones de los campos derechos no generan cambios de sabor.

5.3 Lagrangiano mediado por los escalares (H_2, H_3)

Para las interacciones mediadas por los escalares, podemos reescribir el Lagrangiano (4.12 – 4.13)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{q_1 q_2 h} &= \sum_i \left[(I_E^i)_{q_1 q_2} \bar{q}_{1L} q_{2R} h_i^0 + (I_E^i *)_{q_2 q_1} \bar{q}_{2L} q_{1R} h_i^0 \right] + H.C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_i \left[(I_E^{i+})_{q_1 q_2} \bar{q}_1 q_2 + (I_E^{i-})_{q_1 q_2} (\bar{q}_1 \gamma_5 q_2) \right] h_i^0 \end{aligned}$$

Definimos

$$(I_E^{i\pm})_{ds} = (I_E^i)_{q_1 q_2} \pm (I_E^i *)_{q_2 q_1} \quad (5.9)$$

También

$$(I_E^i)_{q_1 q_2} = (\kappa^q)_{q_1 q_2} \quad (5.10)$$

Con las κ^q halladas en el capítulo anterior. Además, E indica simplemente el sistema de mesones a considerar ($E = K, D, B$)

Ahora, sí tenemos en cuenta la ref. [2] podemos identificar los términos matriciales m_{ij}^d (MeV) de la matriz de masa de los quarks. Para el caso del sector down

$$m_{21}^d = m_{31}^d = m_{32}^d = 0$$

$$m_{22}^d = 92.9391; m_{23}^d = 172.911; m_{33}^d = 4196.42$$

De manera semejante, en el sector up tenemos

$$m_{11}^u = 2.2503; m_{12}^u = -20.37; m_{13}^u = -105.96$$

Luego, logramos así la siguientes formas explícitas de las matrices κ^q .

$$\kappa^d = \begin{pmatrix} 0.22336 & -19.62342 & -10.52494 \\ -1.03287 & 90.75638 & -1.47538 \\ -0.01236 & -0.03608 & 4200.01062 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

$$\kappa^u = \begin{pmatrix} 2.24940 & -20.36791 & -105.94613 \\ -0.03667 & 0.33204 & 1.72715 \\ -0.00137 & -0.01243 & 0.06464 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Del Lagrangiano, podemos obtener el Hamiltoniano efectivo, el cual se mostrará más adelante.

5.4 Sistema $\bar{K}^0 - K^0$

Procedemos ahora, a calcular las contribuciones del modelo al respectivo sistema de mesones neutros. Pero primero, consideramos la predicción del Modelo Estándar y después las de las partículas adicionales.

- **Modelo Estándar**

El Modelo Estándar arroja la siguiente predicción para el sistema $\bar{K}^0 - K^0$

$$\Delta m_K = \zeta_{s\bar{d}}^{SM} \langle \bar{K}^0 | (\bar{s}d)_{V-A}^2 | K^0 \rangle \quad (5.13)$$

Sí empleamos sólo las contribuciones del quark c, tenemos

$$\zeta_{sd}^{SM} = \frac{G_F^2}{16\pi^2} [(V_{CKM})_{cd}^* (V_{CKM})_{cs}]^2 \approx 10^{-14} GeV^{-2} \quad (5.14)$$

Ahora, omitiendo correcciones dadas por la cromodinámica cuántica y la aproximación de inserción en el vacío

$$\langle \bar{K}^0 | (\bar{s}d)_{V-A}^2 | K^0 \rangle = \frac{1}{3} M_K f_K^2 \quad (5.15)$$

Donde f_K es la constante de decaimiento del mesón.

- **Bosón Z'**

El Hamiltoniano efectivo que da cuenta de la interacción y a cambios de sabor viene dado por

$$\mathcal{H}_{eff}^{\Delta S=2}]_{Z'} = \frac{g_L^2}{C_W^2 M_{Z'}^2} [\bar{s}_L (K_L^d)_{sd} \gamma^\mu d_L]^2 \quad (5.16)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Delta m_K]_{Z'} &= 2Re \langle \bar{K}^0 | \mathcal{H}_{eff}^{\Delta S=2}]_{Z'} | K^0 \rangle \\ &= Re \zeta_{sd}^{Z'} \langle \bar{K}^0 | (\bar{s}d)_{V-A}^2 | K^0 \rangle \end{aligned} \quad (5.17)$$

Con

$$Re \zeta_{sd}^{Z'} = \frac{G_F^2}{2\sqrt{2}C_W^2} \frac{M_W^2}{M_{Z'}^2} [(K_L^d)_{sd}]^2 \quad (5.18)$$

Los que nos da

$$Re \zeta_{sd}^{Z'} = 2,00586 \times 10^{-10} GeV^{-2} \quad (5.19)$$

Lo cual no es un resultado alentador, pues deberíamos tener la situación $Re \zeta_{sd}^{Z'} < \zeta_{sd}^{SM}$ para que el modelo aportara información adicional a la fenomenología.

- **Bosón Z''**

El Hamiltoniano efectivo que da cuenta de la interacción y a cambios de sabor viene dado por

$$\mathcal{H}_{eff}^{\Delta S=2}]_{Z''} = \frac{g_X^2}{M_{Z''}^2} [\bar{s}_L (K_L^{\prime d})_{sd} \gamma^\mu d_L]^2 \quad (5.20)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Delta m_K]_{Z''} &= 2Re \langle \bar{K}^0 | \mathcal{H}_{eff}^{\Delta S=2}]_{Z''} | K^0 \rangle \\ &= Re \zeta_{sd}^{Z''} \langle \bar{K}^0 | (\bar{s}d)^2_{V-A} | K^0 \rangle \end{aligned} \quad (5.21)$$

Con

$$\Delta m_K]_{Z''} = \frac{2.10224 G_F^2 M_W^2}{2\sqrt{2} M_{Z''}^2} [(K_L^{\prime d})_{sd}]^2 \quad (5.22)$$

Los que nos da

$$Re \zeta_{sd}^{Z''} = 1,81866 \times 10^{-10} GeV^{-2} \quad (5.23)$$

Lo cual no es un resultado alentador, pues deberíamos tener la situación $Re \zeta_{sd}^{Z''} < \zeta_{sd}^{SM}$ para que el modelo aportara información adicional a la fenomenología.

- **Escalares**

De manera análoga, el Hamiltoniano efectivo inducido por el Lagrangiano de interacción mediado por escalares (4.13) es

$$\mathcal{H}_{eff}^{\Delta S=2}]_h = \sum_i \frac{1}{8m_i^2} [(I_K^+)^2_{as} (\bar{s}d)^2 + (I_K^-)^2_{sd} (\bar{s}\gamma_5 d)^2] \quad (5.24)$$

Definiendo

$$\Delta m_K]_h = 2Re \langle \bar{K}^0 | \mathcal{H}_{eff}^{\Delta S=2}]_h | K^0 \rangle \quad (5.25)$$

$$= \text{Re } \zeta_{sd}^h \langle \bar{K}^0 | (\bar{s}d)^2_{V-A} | K^0 \rangle$$

Tenemos acá

$$\langle \bar{K}^0 | (\bar{s}d)(\bar{s}d) | K^0 \rangle = -\frac{1}{4} \left[1 - \frac{M_K^2}{(m_s + m_d)^2} \right] \langle \bar{K}^0 | (\bar{s}d)^2_{V-A} | K^0 \rangle \quad (5.26)$$

$$\langle \bar{K}^0 | (\bar{s}\gamma_5 d)(\bar{s}\gamma_5 d) | K^0 \rangle = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{11M_K^2}{(m_s + m_d)^2} \right] \langle \bar{K}^0 | (\bar{s}d)^2_{V-A} | K^0 \rangle$$

Con lo que encontramos

$$\begin{aligned} \text{Re } \zeta_{sd}^h = & \frac{(\text{csc}(\alpha - \beta))^2}{32v_\eta^2} \sum_i \frac{C_i^2}{m_i^2} \left(-(I_K^{i+})^2_{ds} \left[1 - \frac{M_K^2}{(m_s + m_d)^2} \right] \right. \\ & \left. + (I_K^{i-})^2_{ds} \left[1 - \frac{11M_K^2}{(m_s + m_d)^2} \right] \right) \text{GeV}^{-2} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Con

$$C_1 = \cos \beta - \sin \beta$$

$$C_2 = \sin \alpha - \cos \alpha$$

Para finalmente lograr un valor referente a las contribuciones de los escalares, consideramos la parametrización de los acoplos λ_j ($j = 1, \dots, 9$) que nos permite no sólo calcular las masas de los escalares CP-pares del modelo, sino determinar valores para las combinaciones lineales de estos, frente a los escalares físicos. Veamos

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 0.25; \lambda_2 = 0.28; \lambda_3 = 0.18; \lambda_4 = 0.1; \lambda_5 = 0.15; \lambda_6 \\ = 0.1; \lambda_7 = 0.7; \lambda_8 = 0.28; \lambda_9 = 0.23 \end{aligned} \quad (5.28)$$

Entonces

$$\text{Re } \zeta_{sd}^h = -3,02325 \times 10^{-14} \text{GeV}^{-2} \quad (5.29)$$

Lo cual, sí es un resultado similar al predicho por el Modelo Estándar.

5.5 Sistema $\bar{D}^0 - D^0$

Procediendo análogamente a la sección anterior, llegamos a lo siguiente

- **Modelo Estándar**

$$\Delta m_D = \zeta_{cu}^{SM} \langle \bar{D}^0 | (\bar{c}u)^2_{V-A} | D^0 \rangle \quad (5.30)$$

Con

$$\zeta_{cu}^{SM} = \frac{G_F^2}{16\pi^2} [(V_{CKM})_{cd}^* (V_{CKM})_{cs}]^2 \approx 10^{-15} \text{ GeV}^{-2} \quad (5.31)$$

Y

$$\langle \bar{D}^0 | (\bar{c}u)^2_{V-A} | D^0 \rangle = \frac{1}{3} M_D f_D^2 \quad (5.32)$$

- **Bosón Z'**

$$\mathcal{H}_{eff}^{\Delta C=2}]_{Z'} = \frac{g_L^2}{C_W^2 M_{Z'}^2} [\bar{c}_L (K_L^u)_{cu} \gamma^\mu u_L]^2 \quad (5.33)$$

Así

$$\begin{aligned} \Delta m_D]_{Z'} &= 2 \text{Re} \langle \bar{D}^0 | \mathcal{H}_{eff}^{\Delta C=2}]_{Z'} | D^0 \rangle \\ &= \text{Re} \zeta_{cu}^{Z'} \langle \bar{D}^0 | (\bar{c}u)^2_{V-A} | D^0 \rangle \end{aligned} \quad (5.34)$$

Y

$$\begin{aligned} \text{Re} \zeta_{cu}^{Z'} &= \frac{G_F^2}{2\sqrt{2}} \frac{M_W^2}{C_W^2 M_{Z'}^2} [(K_L^u)_{cu}]^2 \\ &= 1,25626 \times 10^{-12} \text{ GeV}^{-2} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Tenemos tres órdenes de magnitud más grande, respecto al Modelo Estándar. Algo inadmisibile.

- **Bosón Z''**

$$\mathcal{H}_{eff}^{\Delta C=2}]_{Z''} = \frac{g_X^2}{M_{Z''}^2} [\bar{c}_L (K'^u)_L)_{cu} \gamma^\mu u_L]^2 \quad (5.33)$$

Así

$$\begin{aligned} \Delta m_D]_{Z''} &= 2Re \langle \bar{D}^0 | \mathcal{H}_{eff}^{\Delta C=2}]_{Z''} | D^0 \rangle \\ &= Re \zeta_{cu}^{Z'} \langle \bar{D}^0 | (\bar{c}u)^2_{V-A} | D^0 \rangle \end{aligned} \quad (5.34)$$

Y

$$\begin{aligned} Re \zeta_{cu}^{Z''} &= \frac{2.10224 G_F^2 M_W^2}{2\sqrt{2} C_W^2 M_{Z''}^2} [(K'^u)_L)_{cu}]^2 \\ &= 1,13211 \times 10^{-12} GeV^{-2} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Una vez más, tres órdenes de magnitud más grande, respecto al Modelo Estándar.

- **Escalares**

$$\begin{aligned} \Delta m_D]_h &= 2Re \langle \bar{D}^0 | \mathcal{H}_{eff}^{\Delta C=2}]_h | D^0 \rangle \\ &= Re \zeta_{cu}^h \langle \bar{D}^0 | (\bar{c}u)^2_{V-A} | D^0 \rangle \end{aligned} \quad (5.36)$$

Además

$$\langle \bar{D}^0 | (\bar{c}u)(\bar{c}u) | D^0 \rangle = -\frac{1}{4} \left[1 - \frac{M_D^2}{(m_u + m_c)^2} \right] \langle \bar{D}^0 | (\bar{c}u)^2_{V-A} | D^0 \rangle \quad (5.37)$$

$$\langle \bar{D}^0 | (\bar{c}\gamma_5 u)(\bar{c}\gamma_5 u) | D^0 \rangle = -\frac{1}{4} \left[1 - \frac{11M_D^2}{(m_u + m_c)^2} \right] \langle \bar{D}^0 | (\bar{c}u)^2_{V-A} | D^0 \rangle$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
Re \zeta_{cu}^h &= \frac{(\csc(\alpha - \beta))^2}{32v_\eta^2} \sum_i \frac{G_i^2}{m_i^2} \left(-(I_D^{i+})^2_{cu} \left[1 - \frac{M_D^2}{(m_u + m_c)^2} \right] \right. \\
&\quad \left. + (I_D^{i-})^2_{cu} \left[1 - \frac{11M_D^2}{(m_u + m_c)^2} \right] \right) GeV^{-2} \\
&= -3,07704 \times 10^{-15} GeV^{-2}
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Vemos aquí, que los escalares siguen dando información útil al experimento, pues dichas predicciones son del orden de la del Modelo Estándar.

5.6 Sistema $\bar{B}^0 - B^0$

Tenemos para este sistema

- **Modelo Estándar**

$$\Delta m_B = \zeta_{bd}^{SM} \langle \bar{B}^0 | (\bar{c}u)^2_{V-A} | B^0 \rangle \tag{5.40}$$

Dónde

$$\begin{aligned}
\zeta_{bd}^{SM} &= \frac{G_F^2 M_W^2}{16\pi^2} S_o(x_t) [(V_{CKM})_{td}^* (V_{CKM})_{tb}]^2 \\
&\approx 1,0329 \times 10^{-12} GeV^{-2}
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Además

$$x_t = \frac{m_t^2}{M_W^2} \qquad S_o(x_t) = 0,784x_t^{0,76}$$

$$\langle \bar{B}^0 | (\bar{b}d)^2_{V-A} | B \rangle = \frac{1}{3} M_B f_B^2 \tag{5.42}$$

- **Bosón Z'**

$$\mathcal{H}_{eff}^{\Delta B=2}]_{Z'} = \frac{g_L^2}{C_W^2 M_{Z'}^2} [\bar{b}_L (K_L^d)_{bd} \gamma^\mu d_L]^2 \tag{5.43}$$

$$\Delta m_B]_{Z'} = 2Re \langle B^0 | \mathcal{H}_{eff}^{\Delta B=2}]_{Z'} | B^0 \rangle \tag{5.44}$$

$$= \text{Re } \zeta_{bd}^{Z'} \langle \bar{B}^0 | (\bar{b}d)_{V-A}^2 | B^0 \rangle$$

Pero

$$\begin{aligned} \text{Re } \zeta_{bd}^{Z'} &= \frac{G_F^2}{2\sqrt{2}C_W^2} \frac{M_W^2}{M_{Z'}^2} \left[(K_L^d)_{bd} \right]^2 \\ &= 2,85031 \times 10^{-14} \text{GeV}^{-2} \end{aligned} \quad (5.45)$$

A diferencia de los sistemas anteriores, la contribución dada es menor a la del Modelo Estándar.

- **Bosón Z''**

$$\mathcal{H}_{eff}^{\Delta B=2}]_{Z''} = \frac{g_X^2}{M_{Z''}^2} \left[\bar{b}_L (K_L^d)_{bd} \gamma^\mu d_L \right]^2 \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} \Delta m_B]_{Z''} &= 2\text{Re} \langle B^0 | \mathcal{H}_{eff}^{\Delta B=2}]_{Z''} | B^0 \rangle \\ &= \text{Re } \zeta_{bd}^{Z''} \langle \bar{B}^0 | (\bar{b}d)_{V-A}^2 | B^0 \rangle \end{aligned} \quad (5.47)$$

Pero

$$\begin{aligned} \text{Re } \zeta_{bd}^{Z''} &= \frac{2,10224 G_F^2}{2\sqrt{2}} \frac{M_W^2}{M_{Z''}^2} \left[(K_L^d)_{bd} \right]^2 \\ &= 2,56963 \times 10^{-14} \text{GeV}^{-2} \end{aligned} \quad (5.48)$$

Es también, una contribución menor a la del Modelo Estándar.

- **Escalares**

Veamos entonces

$$\begin{aligned} \Delta m_B]_h &= 2\text{Re} \langle \bar{B}^0 | \mathcal{H}_{eff}^{\Delta C=2}]_h | B^0 \rangle \\ &= \text{Re } \zeta_{cu}^h \langle \bar{B}^0 | (\bar{c}u)_{V-A}^2 | B^0 \rangle \end{aligned} \quad (5.49)$$

También

$$\langle \bar{B}^0 | (\bar{b}d)(\bar{b}d) | B^0 \rangle = -\frac{1}{4} \left[1 - \frac{M_D^2}{(m_b + m_d)^2} \right] \langle \bar{B}^0 | (\bar{c}u)^2_{V-A} | B^0 \rangle \quad (5.50)$$

$$\langle \bar{B}^0 | (\bar{b}\gamma_5 d)(\bar{b}\gamma_5 d) | B^0 \rangle = -\frac{1}{4} \left[1 - \frac{11M_D^2}{(m_b + m_d)^2} \right] \langle \bar{B}^0 | (\bar{c}u)^2_{V-A} | B^0 \rangle$$

Lo anterior conduce a

$$\begin{aligned} \text{Re } \zeta_{bd}^h &= \frac{(\text{csc}(\alpha - \beta))^2}{32v_\eta^2} \sum_i \frac{C_i^2}{m_i^2} \left(-(I_B^{i+})^2_{bd} \left[1 - \frac{M_B^2}{(m_b + m_d)^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + (I_B^{i-})^2_{bd} \left[1 - \frac{11M_B^2}{(m_b + m_d)^2} \right] \right) \text{GeV}^{-2} \\ &= -6,06411 \times 10^{-16} \text{GeV}^{-2} \end{aligned} \quad (5.51)$$

Una vez más, la contribución puede ser considerada, pues es menor a las predicciones del ME.

- **¿A qué escala de energía, el modelo es válido?**

En lo siguiente, queremos dirigir la discusión hacia los ajustes que deben hacerse sobre el modelo, si se quiere tener una descripción coherente de los datos experimentales a los cuales nos hemos remitido, es decir, los sistemas de oscilación de mesones neutros.

La contribución del modelo 3-4-1 al sistema $(\Delta m B) = (\Delta m B)_{341}$, viene dada por

$$(\Delta m B) = (\Delta m B)_{SM} + (\Delta m B)_{Z'} + (\Delta m B)_{Z''} + (\Delta m B)_{H_{2,3}} \quad (5.52)$$

Que, si se ve como una función de la escala de rompimiento de la simetría, nos arroja la siguiente gráfica

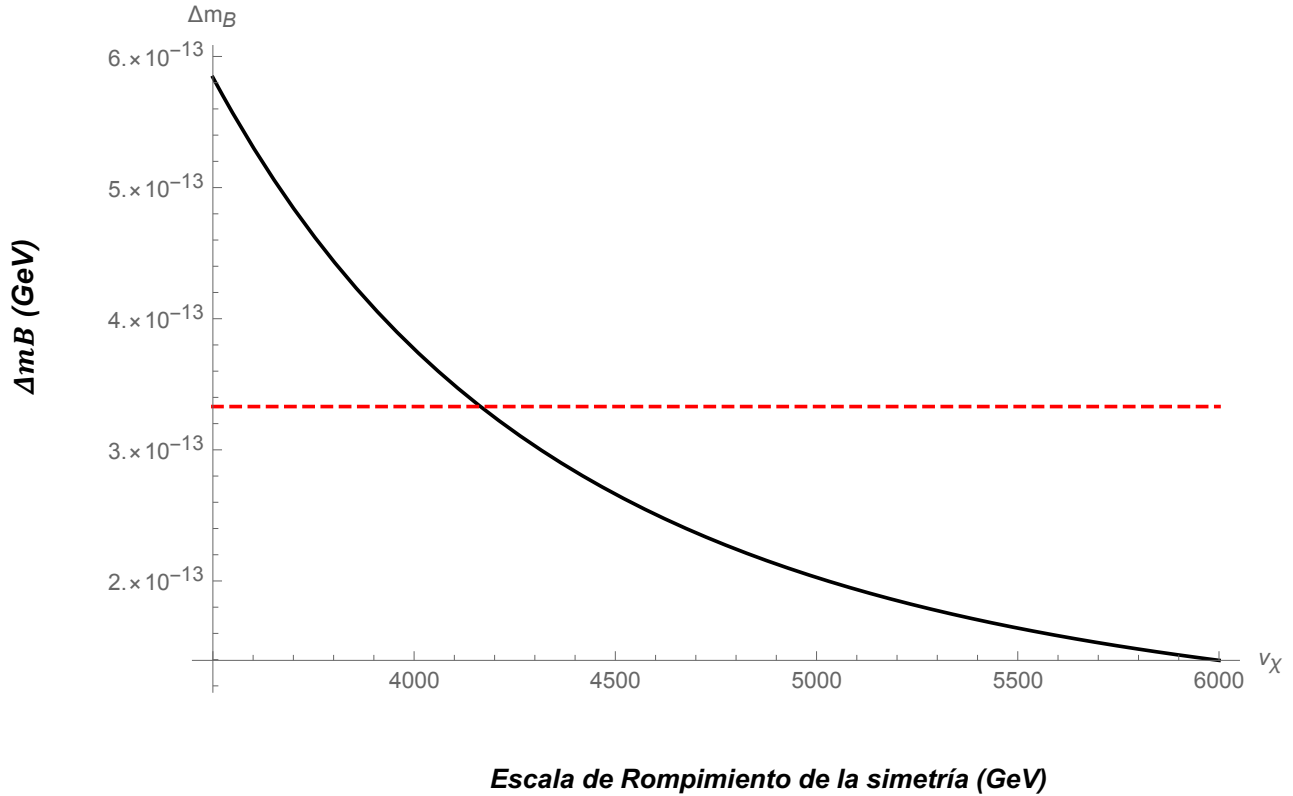


Fig 1. Dependencia del valor del Δm_B , con la escala de rompimiento de la simetría

Con la línea roja horizontal, indicando el actual límite experimental ($3.33 \times 10^{-13} \text{ GeV}$). Al exigir que dicho límite no sea superado, llegamos al valor mínimo de rompimiento requerido para que el modelo aquí estudiado, de cuenta de información física faltante. Es decir, llegamos a

$$v_\chi \gtrsim 4.162 \text{ GeV} \quad (5.52)$$

Lo cual conduce también a cotas mínimas para las partículas del modelo. Así, en el caso de las que median procesos de cambios de sabor, esto es, los bosones de Gauge y los Higgses pesados.

$$\begin{aligned} M_{H_2} &\gtrsim 1513.48 \text{ GeV} \\ M_{H_3} &\gtrsim 2271.11 \text{ GeV} \\ M_{Z'} &\gtrsim 2620 \text{ GeV} \\ M_{Z''} &\gtrsim 4361 \text{ GeV} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Claramente, esto entra en contradicción con lo establecido al inicio de este trabajo, basado en las referencias establecidas [3], pues se empieza a perder el carácter perturbativo del modelo. Sin embargo, es de suma importancia considerar estas variaciones en la masa de las partículas, dado que, si bien aumentan su valor, brindan una nueva cota en la energía hacia la cual se puede apuntar y esperar a que se validen o no en el LHC.

Otro factor importante que afecta notablemente la variación de la masa de los sistemas de mesones neutros, son las entradas matriciales de las ecuaciones (5.3), (5.4), (5.7), (5.8), (5.11) y (5.11), que surgen de la relación entre los auto estados físicos y de sabor. Así, estas pueden variar si se emplea una parametrización diferente de vinculación entre autoestados.

6 Conclusiones y recomendaciones

6.1 Conclusiones

Una vez hecho el estudio detallado de su estructura, al igual que consecuencias físicas de la fenomenología que trae este modelo, podemos aproximarnos a las siguientes conclusiones:

- El modelo compacto empleado, trae consigo la ventaja de reducir el sector escalar, responsable de dar masas a las partículas, a costa de introducir operadores efectivos no renormalizables, pero que simplifican muchos los cálculos una vez se rompe la simetría.
- La introducción de simetrías discretas ayuda enormemente a la simplificación del potencial de interacción.
- Es necesario que las familias de quarks transformen diferente, no solamente para que haya cancelación de anomalías, sino también para lograr que las masas de los bosones de Gauge neutros no sean tan pesados.
- Al introducir esta forma de transformación diferente, se justifica el hecho de que se tengan tres familias de fermiones en la naturaleza, además de tener interacciones que dan cuenta de cambios de sabor.
- La fenomenología de sistemas de mesones neutros no solamente brinda información valiosa para contrastar el modelo, sino que además nos dan cotas experimentales que restringen la viabilidad de este.
- El Modelo Estándar arroja predicciones a estos sistemas, pero no coinciden del todo. Dicho gap de energía es una puerta abierta a nueva física que en principio da

espacio a nuevas propuestas. El modelo en cuestión es una de ellas. Pero debe ampliarse su rango de energía si se desea ofrecer respuestas coherentes.

- Al construir las corrientes neutras mediadas por los bosones de Gauge Z' y Z'' , los cambios de sabor se hacen evidentes. Sin embargo, con las masas predichas, sus aportaciones a la fenomenología de sistemas de mesones neutros no entran a ser válidas, pues sobrepasan la cota experimental, exigiendo hacer lo que se enuncia en la premisa anterior.
- No es el caso de los fenómenos de cambios de sabor, mediados por los escalares pesados del modelo.
- El Higgs del Modelo Estándar, no media eventos con cambios de sabor, cosa que nos permite prácticamente no considerarlo en la nueva fenomenología ni imponerle restricciones. Pero, los nuevos escalares pesados, sí lo hacen, ya que las matrices de masa asociadas a estos no son diagonalizadas por las matrices empleadas en la parametrización.
- El objetivo principal de la propuesta planteada se cumplió. Es decir, se estudiaron los fenómenos asociados a cambios de sabor mediados por los Higgses adicionales del modelo. Al contrastar sus contribuciones a los sistemas de mesones neutros, fueron las únicas partículas que lograban aportar información importante o no descartable inicialmente. Ahora bien, sí se hacen las modificaciones planteadas al modelo, en busca de una descripción que involucren las demás partículas, es muy probable que el aporte brindado, sea casi que despreciable.
- Las contribuciones del modelo 3-4-1 a los sistemas de mesones neutros varían con la escala de rompimiento de la simetría. Sí se define un valor mínimo, se imponen cotas para las masas de las partículas.
- Otro factor que afecta dichas contribuciones, son las entradas matriciales que surgen de las relaciones entra las bases físicas y de sabor. Estas, pueden variar, al considerar otras parametrizaciones.

-
- La extensión al Modelo Estándar considerada debe modificarse, aumentando su escala de energía, si se quiere dar cuenta de datos experimentales. Pero, el precio que se puede pagar puede ser alto, ya que al aumentar la energía el carácter perturbativo de dicha extensión empezaría a perderse.
 - No obstante, las modificaciones pueden ser válidas, ya que la mínima escala de energía es alcanzable en el LHC y además, es menor a la del polo de Landau del modelo.

Referencias

- [1] Sher, M. (1998). Scalar-Mediated Flavor-Changing Neutral Currents. *arXiv: hep-ph/9809590v1*.
- [2] Cogollo D, Q. F. (2014). Flavor Changing Neutral Currents Processes in a Reduced Minimal Scalar Sector. *arXiv: 1312.0304v4*.
- [3] Dias A. G., P. P. (2014). A compact 341 model at TeV. *arXiv:1309.6644v2*.
- [4] Machado A. C. B, M. J. (2013). Flavor-changing neutral currents in the minimal 3-3-1 model revisited. *arXiv:1305.1921v3*.
- [5] Stanislaw Tatur, J. B. (2008). Mass matrices for quarks and leptons in triangular form. *arxiv:0801.0095*.
- [6] Group), M. T. (2018). Bottom Mesons. *Phys. Rev. D*, 98
- [7] Schiff, L. I. (1968). *Quantum Mechanics*. York, PA: McGraw-Hill.
- [8] Sánchez, W. P. (2007). SYSTEMATIC STUDY OF THE $SU(3)_c \otimes SU(4)_L \otimes U(1)_X$ GAUGE SYMMETRY. *Modern Physics Letters*, 435 - 447.