SOLUCION DE PROBLEMAS

* 7. Las sumas

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

$(n=2,3,4,\ldots)$ no son jamás números enteros.

1ª *solución*. En virtud del teorema de CHEBISHEV (vol. II, p. 22) existe un número primo p con la propiedad $n/2<p\leqslant n$. Llamemos u/v la suma de todos los términos de la expresión considerada, menos el término $1/p$; es decir

$$(1)\qquad 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=\frac{u}{v}+\frac{1}{p}=\frac{up+v}{pv}.$$

v es el producto de los números $1,2,\ldots,p-1,p+1,\ldots,n$ y puesto que $2p$ ya es superior a n, v no es divisible por p. Luego $up+v$ tampoco es divisible por p y con más razón no lo es por pv. Queda entonces demostrado que (1) no es un número entero.

2ª *solución*. Se dice que el número entero m tiene el *grado de paridad* a, si 2^a divide a m, pero 2^{a+1} ya no. Los números cuyo grado de paridad es a son: $2^a, 3.2^a, 5.2^a, 7.2^a, \ldots$ Entre dos consecutivos de estos números siempre se encuentra uno con grado de paridad más grande, a saber $2.2^a, 4.2^a, 6.2^a, \ldots$ Se sigue entonces que entre dos números enteros con el mismo grado de paridad se encuentra uno con paridad más grande.

De esta consideración resulta que entre los números $1,2,\ldots,n$ existe exactamente uno cuyo grado de paridad es maximal; sea este el número k $(1<k\leqslant n)$. La suma considerada se puede escribir en la forma

$$(*)\qquad \frac{2.3\ldots n+1.3\ldots n+\ldots+1.2\ldots(n-1)}{1.2\ldots n}.$$

El grado de paridad de aquel término del numerador que no contiene al factor k es inferior al grado de paridad de cualquier otro término en el numerador. Luego hay una cierta potencia de 2, sea 2^b, que divide a todos los términos del numerador con la excepción del término $1 . 2 \ldots (k - 1).(k + 1) \ldots n$. Por consiguiente 2^b no divide al numerador. Puesto que 2^b seguramente divide al denominador, (*) no puede ser un número entero.

Soluciones de: *Fernando José López López, Maximiliano Paz.*

81. Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\frac{x(y+z)}{x+y+z} = b + c,$$

$$\frac{y(z+x)}{x+y+z} = c + a,$$

$$\frac{z(x+y)}{x+y+z} = a + b,$$

en que a, b, c son conocidos.

Solución. Sumando las tres ecuaciones se obtiene:

$$\frac{yz + zx + xy}{x+y+z} = a + b + c. \tag{1}$$

Restando la primera ecuación del sistema dado de (1) resulta

$$\frac{yz + zx + xy}{x+y+z} - \frac{xy + xz}{x+y+z} = a,$$

o sea

$$\frac{yz}{x+y+z} = a. \tag{2}$$

Por simetría obtenemos:

$$\frac{zx}{x+y+z} = b, \tag{3}$$

$$\frac{xy}{x+y+z} = c. \tag{4}$$

Multiplicando de dos en dos las ecuaciones (2), (3), (4) y sumando los tres resultados obtenemos

$$\frac{xyz\,(x+y+z)}{(x+y+z)^2} = bc + ca + ab\,,$$

o sea

$$\frac{xyz}{x+y+z} = bc + ca + ab\,.$$

Tomando en cuenta la ecuación (2) se obtiene:

$$x = \frac{ab+bc+ca}{a}$$

y por simetría

$$y = \frac{bc+ca+ab}{b}\,,$$

$$z = \frac{ca+ab+bc}{c}\,.$$

Guillermo Tello Y.

Otras soluciones de: *Astolfo Arias, Jaime Rocha R., Arturo Sánchez W., Jaime Vanegas Gómez.*

82. Sea una progresión aritmética en la cual el primer término es a, y la suma de los p primeros términos vale cero. Demostrar que la suma de los q términos siguientes vale:

$$-\frac{aq\,(p+q)}{p-1}\,.$$

Solución. Si a es el primer término, d la diferencia, l el último de los p primeros términos y S su suma, tenemos

$$l = a + (p-1)\,d,$$

$$2S = (a+l)\,p = 0\,,$$

de donde

$$l = -a \qquad \text{y} \qquad d = \frac{-2a}{p-1}\,.$$

El primero de los q términos siguientes valdrá $-a+d$, el último $-a+qd$. La suma S' de esos q términos será:

$$S' = \frac{q}{2}\,[-2a + (q+1)\,d] =$$

$$= \frac{q}{2}\left[-2a - \frac{2a\,(q+1)}{p-1}\right] =$$

$$= -aq\left[1 + \frac{q+1}{p-1}\right] =$$

$$= -aq\,\frac{p+q}{p-1}.$$

Guillermo Tello Y.

Otras soluciones de: *Humberto Aparicio, Astolfo Arias, Juan Boada Gómez, Jaime Rocha R., Alvaro Rodríguez, Alvaro Sánchez W., Jaime Vanegas Gómez.*

83. Demostrar que si n es un entero cualquiera, $n^{13}-n$ es divisible por 2730.

Solución.

$$(1) \qquad n^{13} - n = n\,(n^{12}-1) =$$

$$(2) \qquad = n\,(n^6+1)\,(n^6-1) =$$

$$= n\,(n^2+1)\,(n^4-n^2+1)\,(n^3-1)\,(n^3+1) =$$

$$= n\,(n^2+1)\,(n^4-n^2+1)\,(n-1)\,(n^2+n+1)\,(n+1)\,(n^2-n+1) =$$

$$(3) \qquad = n\,(n-1)\,(n+1)\,(n^2+1)\,(n^2+n+1)\,(n^2-n+1)\,(n^4-n^2+1).$$

Por el teorema de Fermat: "Si p es primo, y a no es múltiplo de p, $a^{p-1}-1$ es múltiplo de p", se ve por la forma (1) que n o $n^{12}-1$ son múltiplos de 13; por la forma (2) que n o n^6-1 son múltiplos de 7. En la forma (3) se puede cambiar

$(n-1)(n+1)(n^2+1)$ por n^4-1 y se ve que n o n^4-1 es divisible por 5. Finalmente el producto $(n-1)\,n\,(n+1)$ de tres enteros consecutivos es siempre divisible por 2 y por 3.

Luego $n^{13}-n$ es divisible por $13 \times 7 \times 5 \times 3 \times 2 = 2730$.

Guillermo Tello Y.

Otras soluciones de: *Humberto Aparicio, Astolfo Arias, Temístocles García Parra, Eusebio López Parra, Jaime Rocha R., Alvaro Rodríguez, Alvaro Sánchez W., Jaime Vanegas Gómez, Oscar Villa Moreno.*

84. Encontrar un número de cuatro cifras cuyo cuadrado es de la forma $abc90abc$ (a, b, c, representan cifras).

Solución. Sea N el número buscado. N^2 tiene 8 cifras, de donde N está entre 3162 y 10.000. Se puede escribir

$$N^2 = (100a + 10b + c)\,10^5 + 90.000 + (100a + 10b + c),$$
$$N^2 - 90.000 = 100.001\,(100a + 10b + c),$$
$$(N + 300)\,(N - 300) = 11 \times 9091\,(100a + 10b + c).$$

Ahora bien, 9091 es un número primo; la igualdad requiere que uno de los factores $N + 300$, $N - 300$ sea múltiplo de 9091. Teniendo en cuenta los límites admisibles para N, se ve que las únicas posibilidades son

$$N + 300 = 9091\,, \qquad N = 8791\,,$$

o

$$N - 300 = 9091\,, \qquad N = 9391\,.$$

Al elevarlos al cuadrado, se encuentra que el segundo valor, $N = 9391$ es el que satisface las condiciones, pues su cuadrado es 88190881, de la forma dada en el enunciado.

Guillermo Tello Y.

Otras soluciones de: *Astolfo Arias, Eusebio López Parra, Jaime Rocha R., Alvaro Rodríguez, Alvaro Sánchez W., Jaime Vanegas Gómez, Oscar Villa Moreno.*

85. Demostrar que el cubo de un entero cualquiera es igual a la diferencia de los cuadrados de dos enteros.

Solución. Estudiando los primeros cubos se ve que:

$$1^3 = 1^2 - 0^2,$$
$$2^3 = 3^2 - 1^2,$$
$$3^3 = 6^2 - 3^2,$$
$$4^3 = 10^2 - 6^2.$$

Las bases de los cuadrados que figuran en los segundos miembros son:

$$1 = \frac{1 \times 2}{2}, 3 = \frac{2 \times 3}{2}, 6 = \frac{3 \times 4}{2}, 10 = \frac{4 \times 5}{2}.$$

Esto sugiere el estudio de las diferencias:

$$\left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n-1)\,n}{2}\right)^2.$$

Desarrollándola se encuentra

$$\frac{n^2\,(n+1)^2}{4} - \frac{(n-1)^2\,n^2}{4} = \frac{n^2}{4}4n = n^3,$$

lo que demuestra el teorema.

Guillermo Tello Y.

Otras soluciones de: *Humberto Aparicio, Eusebio López Parra, Jaime Rocha R., Alvaro Rodríguez, Alvaro Sánchez W., Jaime Vanegas Gómez, Oscar Villa Moreno.*

86. Demostrar la identidad:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n}.$$

Solución. Esta identidad equivale a la que se obtiene sumando en ambos miembros

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Esa transformación conduce a

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots-\frac{1}{2n}+$$

$$+\ 1\qquad+\frac{1}{2}\qquad+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

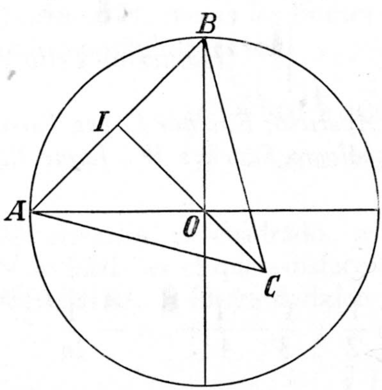
Guillermo Tello Y.

Otras soluciones de: *Humberto Aparicio, Jaime Rocha R., Alvaro Rodríguez, Alvaro Sánchez W., Jaime Vanegas Gómez.*

87. Se trazan una circunferencia de centro O, y un lado AB del cuadrado inscrito en ella. Se traza luégo el triángulo equilátero ABC situado dentro de la circunferencia. Demostrar que CO es el lado del dodecágono inscrito.

(Manuel María Quevedo Sánchez)

Solución. Si r es el radio de la circunferencia, el lado del dodecágono inscrito es:



$$l=r\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

En la figura tenemos $AB=r\sqrt{2}$,

$$OC=IC-IO=$$

$$=r\sqrt{2}.\sqrt{3}/2-r\sqrt{2}/2=$$

$$=r\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)/2,$$

$$OC=r(\sqrt{6}-\sqrt{2})/2.$$

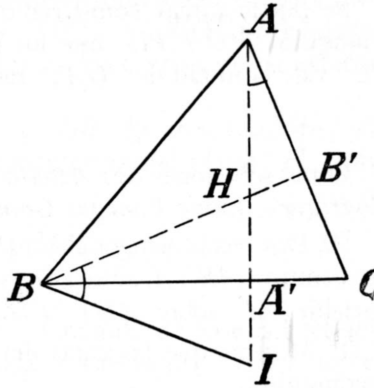
Para ver que $OC=l$, basta elevar al cuadrado los números (positivos) OC y l.

Guillermo Tello Y.

Otras soluciones de: *Humberto Aparicio, Temístocles García Parra, Alvaro Rodríguez, Alvaro Sánchez W., Jaime Vanegas Gómez.*

88. Demostrar que el punto simétrico del ortocentro de un triángulo con respecto a cualquiera de los lados está sobre la circunferencia circunscrita al triángulo.

Solución. Sea ABC el triángulo; trazamos las alturas AA' y BB' que se cortan en el ortocentro H, y el punto I simétrico de H con respecto al lado BC.



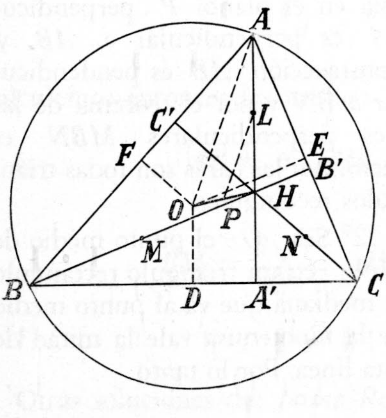
Los ángulos CAA' y CBB' son iguales por tener lados respectivamente perpendiculares; el ángulo CBB' es igual al ángulo CBI por la simetría de H e I con respecto a BC. Entonces el cuadrilátero $ABIC$ es inscriptible por ser iguales los ángulos CAI y CBI; con otras palabras la circunferencia que pasa por ABC también pasa por I.

Guillermo Tello Y.

Otras soluciones: *Astolfo Arias, Humberto Aparicio, Alvaro Rodríguez, Alvaro Sánchez W.*

89. Demostrar que el centro de la circunferencia de los nueve puntos (o de Euler) es el punto medio del segmento que une el ortocentro con el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo, y que su radio es la mitad del de esa circunferencia.

Solución. Sea el triángulo ABC; trazamos la circunferencia circunscrita de centro O, las perpendiculares OD, OE, OF a los lados y las alturas AA' BB' y CC' que se cortan en el ortocentro H. Llamamos L, M, N los puntos medios respectivos de HA, HB y HC.



Se sabe que el círculo K de los nueve puntos debe su nombre al hecho de pasar por los puntos medios D, E, F de los lados, los pies A', B', C' de las alturas y los puntos L, M, N (véase vol. III, p. 52). Los segmentos DA', EB', FC' son cuerdas de K;

el centro de K está en las perpendiculares medias de esas cuerdas, que son las bases medias de los trapecios $DA'HO, EB'HO, FC'HO$ y pasan todas por P, punto medio de OH. Luego P es el centro de K.

Se puede tomar como radio de K el segmento PL; en el triángulo HOA, PL une los puntos medios de dos lados; luego PL vale la mitad de OA, radio de la circunferencia circunscrita.

Francisco García Moreno

Otras soluciones de: *Astolfo Arias, Humberto Aparicio, Alvaro Rodríguez, Jaime Vanegas Gómez.*

90. Dos rectas ortogonales, (D) y (D')), tienen como perpendicular común AB (A sobre (D) y B sobre (D')). Se toma un punto variable M sobre (D) y un punto variable N sobre (D').

1º Mostrar que las caras del tetraedro $ABMN$ son triángulos rectángulos.

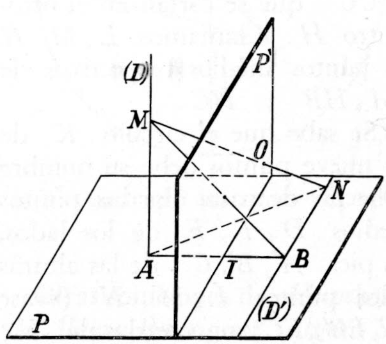
2º Determinar el centro de la esfera circunscrita a $ABMN$. Deducir de ello el lugar geométrico del punto medio de MN cuando M recorre (D) y N recorre (D').

3º Cuando la longitud MN es constante, ¿cuál es el lugar geométrico del punto medio de MN?

4º Se dan $AB = d$, $AM = BN = n$. Expresar el volumen del tetraedro en función de d y de n. ¿Para qué valor de n será el tetraedro equivalente a un cubo de arista $d/2$? ¿Cuánto miden entonces las aristas del tetraedro?

(Bachillerato, 1ª parte, Besançon, Francia, 1951).

Solución. 1º La recta (D') está en el plano P perpendicular a (D) por A. Luego MA es perpendicular a AB y MA es perpedicular a AN. Por construcción AB es pendendicular a BN y por el teorema de las tres perpendiculares MBN es recto. Así las caras son todas triángulos rectángulos.



2º Sea O el punto medio de MN; en un triángulo rectángulo la mediana que va al punto medio de la hipotenusa vale la mitad de esta línea. Por lo tanto

$$OM = ON = OB = OA$$

y O es el centro de la esfera circunscrita al tetraedro $ABMN$. Al variar M y N, su centro O permanece en el plano P' perpendicular a AB por su punto medio I, que es paralelo a (D) y a (D'). Inversamente todo punto O de P' es el punto medio de una recta MN; M es determinado por el cruce con (D) del plano definido por O y (D'), y MO prolongado fija la posición de N. P' es el lugar de los centros de las esferas circunscritas.

3º Si MN es constante, OA y OB lo son también; el lugar geométrico de O es una circunferencia del plano P' con centro I y radio

$$IO = \sqrt{AO^2 - AI^2} = \sqrt{\frac{MN^2}{4} - AI^2}.$$

4º Si $AB = d$, $AM = BN = n$, tomando de base del tetraedro el triángulo ABN, de área $dn/2$, y de altura AM, se ve que el volumen es:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} dn \, . \, n = \frac{1}{6} dn^2.$$

Para la equivalencia del tetraedro con el cubo de arista $d/2$, se necesita que

$$\frac{1}{6} dn^2 = \frac{d^3}{8},$$

de donde

$$n = \frac{d\sqrt{3}}{2}.$$

Calculemos entonces las aristas:

$$AB = d\,; \; AM = BN = \frac{d\sqrt{3}}{2}\,;$$

$$BM = \frac{d\sqrt{7}}{2}; \;\; AN = \frac{d\sqrt{7}}{2} \text{ y } MN \frac{d\sqrt{10}}{2}.$$

Guillermo Tello Y.

Otras soluciones de: *Jaime Rocha R., Alvaro Rodríguez, Jaime Vanegas Gómez.*

91. Demostrar que, si n es entero positivo $(n+2)^3 - n^3$ es la suma de tres cuadrados y que la solución es única.

Solución. Se tiene

$$(n+2)^3 - n^3 = 6n^2 + 12n + 8 =$$
$$= (4n^2 + 8n + 4) + (n^2 + 4n + 4) + n^2 =$$
$$= (2n+2)^2 + (n+2)^2 + n^2.$$

La segunda parte de la proposición es incorrecta, ya que por ejemplo para $n = 3$ se tiene

$$(n+2)^3 - n^3 = 5^3 - 3^3 = 98 =$$
$$= 1^2 + 4^2 + 9^2 = 3^2 + 5^2 + 8^2.$$

Alvaro Rodríguez

92. Demostrar que, si p es un número primo diferente de 2, la suma de todos los enteros positivos menores que p es siempre divisible por p.

Solución. Se tiene

$$1 + 2 + \ldots + (p-1) = (p-1)\, p/2\,.$$

Si p es un número primo diferente de 2, p es impar y $(p-1)/2$ es entero.

Juan Gómez Velasco.

Otras soluciones de: *Humberto Aparicio, Astolfo Arias, Jaime Rocha R., Alvaro Rodríguez, Alvaro Sánchez Weiss, Jaime Vanegas Gómez, Oscar Villa Moreno.*

93. Seis hombres, entre los cuales el Sr. Rodríguez y el Sr. González, deben llevar la palabra en una asamblea. ¿De cuántas maneras se puede preparar el programa de los discursos

a) si el Sr. Rodríguez no quiere hablar antes que el Sr. González;

b) si el Sr. Rodríguez debe hablar inmediatamente después del Sr. González;

c) si debe haber en el programa, entre los discursos del Sr. Rodríguez y del Sr. González, por lo menos el de otro orador?

Solución. a) Sin restricción alguna habría $6! = 720$ maneras de hacer el programa. De ellas hay un número igual en las que el Sr. Rodríguez lleva la palabra antes del Sr. González, que de las otras. Luego hay 360 programas del tipo pedido.

b) Considerando como un solo elemento el grupo formado por los Sres. González y Rodríguez (en este orden), se ve que hay $5! = 120$ programas posibles.

c) De las 720 permutaciones posibles hay que excluír aquellas donde el Sr. Rodríguez habla inmediatamente después del Sr. González, que son 120 según b), y aquellas, en número igual, donde el Sr. González lleva la palabra inmediatamente después del Sr. Rodríguez. De donde el número pedido es $720 - 2 \times 120 = 480$.

Jaime Rocha R.

Otras soluciones de: *Astolfo Arias, Alvaro Rodríguez, Alvaro Sánchez Weiss, Jaime Vanegas Gómez, Oscar Villa Moreno.*

94. Demostrar que el producto de los n primeros factores de

$$(1 + 2) \,.\, (3 + 4 + 5) \,.\, (6 + 7 + 8 + 9) \ldots$$

es:

$$p_n = \frac{[(n+2)!]^3}{2^{n+1}(n+1)(n+2)^2}$$

Solución. Los $(n - 1)$ primeros paréntesis contendrán los enteros sucesivos hasta

$$2 + 3 + \ldots + n = (n - 1)(n + 2)/2 .$$

El n—ésimo paréntesis principia con

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2} + 1 = \frac{n(n+1)}{2} ,$$

y acaba con

$$\frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n+3)}{2} ;$$

entonces su valor es

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)+2}{2} + \ldots + \frac{n(n+3)}{2} =$$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+3)}{2} \right) \frac{n+1}{2} =$$

$$= \frac{n}{2} (2n+4) \frac{n+1}{2} =$$

$$= \frac{n}{2} (n+1)(n+2).$$

Luego

$$p_n = \frac{1.2.3}{2} \cdot \frac{2.3.4}{2} \ldots \frac{n(n+1)(n+2)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2^n} n!\,(n+1)!\,\frac{(n+2)!}{2} =$$

$$= \frac{[(n+2)!]^3}{2^{n+1}(n+1)(n+2)^2}.$$

Guillermo Tello Y.

Otras soluciones de: *Humberto Aparicio, Astolfo Arias, Juan Gómez Velasco, Alvaro Rodríguez, Alvaro Sánchez Weiss, Jaime Vanegas Gómez.*

95. Demostrar la desigualdad

$$(a+b)^2 + b(a^2+1) + a(b^2+1) > 8ab,$$

en donde a y b son dos números positivos diferentes de 1.

Solución.

$$(a+b)^2 + b(a^2+1) + a(b^2+1) - 8ab =$$

$$= (a-b)^2 + b(a^2 - 2a + 1) + a(b^2 - 2b + 1) =$$

$$= (a-b)^2 + b(a-1)^2 + a(b-1)^2.$$

El primer término es positivo o nulo; los otros son estrictamente positivos, de modo que la suma de los tres es estrictamente positiva.

Guillermo Tello Y.

Otras soluciones de: *Humberto Aparicio, Astolfo Arias, Juan Gómez Velasco, Jaime Rocha R., Alvaro Rodríguez, Alvaro Sánchez Weiss, Jaime Vanegas Gómez, Oscar Villa Moreno.*

96. Hallar las condiciones para que la ecuación de cuarto grado

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

tenga sus raíces de dos en dos inversas y de signos contrarios.

Solución. Si una ecuación cuadrática tiene sus dos raíces inversas y de signos contrarios, es de la forma

$$px^2 + qx - p = 0\,.$$

Multiplicando dos ecuaciones cuadráticas de esta forma entre sí, se ve que si una ecuación de cuarto grado tiene sus raíces de dos en dos inversas y de signos contrarios, debe ser de la forma

$$(*) \qquad ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0\,,$$

es decir debe satisfacer a las condiciones $d = -b\,, e = a\,.$

Inversamente si x es una solución de la ecuación (*), de la relación

$$\begin{aligned} ax^{-4} + bx^{-3} + cx^{-2} - + bx^{-1} + a &= \\ = x^{-4}\,(a - bx + cx^2 + bx^3 + ax^4) \end{aligned}$$

se ve que $-1/x$ también es una solución de (*).

Alvaro Sánchez Weiss

Otras soluciones de: *Astolfo Arias, Alvaro Rodríguez, Jaime Vanegas Gómez, Oscar Villa Moreno.*

97. Tres números enteros están en progresión geométrica; si al segundo se suma 4, la progresión se convierte en aritmética; si a continuación se suma al tercero 32, vuelve a ser geométrica. Hallar los tres números.

Solución. Sea $a\,,\ aq\,,\ aq^2$ la progresión geométrica inicial. Entonces $a\,, aq + 4\,, aq^2$ es progresión aritmética y $a\,, aq + 4\,,$ $aq^2 + 32$ es progresión geométrica. Se tiene

$$aq + 4 - a = aq^2 - aq - 4$$

o sea

$$aq^2 - 2aq + a - 8 = 0$$

y

(2) $$\frac{aq+4}{a} = \frac{aq^2+32}{aq+4}.$$

La relación (2) da

$$q = 2(2a-1)/a$$

y reemplazando este en (1) obtenemos la ecuación

$$9a^2 - 20a + 4 = 0$$

cuyas raíces son $a = 2$ y $a = 2/9$. Teniendo en cuenta que a debe ser entero, los números buscados son: 2, 6, 18.

Guillermo Tello Y.

Otras soluciones de: *Humberto Aparicio, Astolfo Arias, Jaime Rocha R., Alvaro Rodríguez, Alvaro Sánchez Weiss.*

98. Hallar la condición para que la ecuación

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

se convierta en una bicuadrada por una transformación de la forma $x = y + h$.

Solución. La transformación dada conduce a

$$(y+h)^4 + a\,(y+h)^3 + b\,(y+h)^2 + c\,(y+h) + d = 0.$$

o sea

$$y^4 + (4h+a)\,y^3 + (6h^2 + 3ah + b)\,y^2 +$$

$$+ (4h^3 + 3ah^2 + 2bh + c)\,y + (h^4 + ah^3 + bh^2 + ch + d) = 0.$$

Para que la ecuación en y sea bicuadrada, se requiere que

(1) $$4h + a = 0$$

y

(2) $$4h^3 + 3ah^2 + 2bh + c = 0\,.$$

De (1) $h = -\,a/4$ y este valor, sustituído en (2) da

$$8c = 4ab - a^3.$$

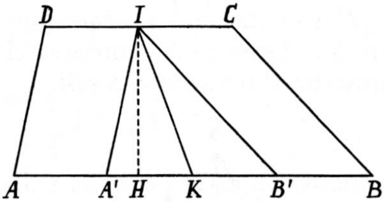
Inversamente se ve que si se cumple esta última condición, la transformación $x = y - a/4$ convierte la ecuación dada en una bicuadrada.

Guillermo Tello Y.

Otras soluciones de: *Jaime Rocha R., Alvaro Sánchez Weiss, Jaime Vanegas Gómez.*

99. Expresar, en función de los cuatro lados de un trapecio, la longitud de la recta que une los puntos medios de los dos lados paralelos.

Solución. Sean $a = AB\,, c = CD$ las bases, $b = BC\,, d = DA$ los otros dos lados. $I\,, K$ son los centros de CD y AB respectivamente. Por I se trazan IA' paralela a DA e IB' paralela a CB. Se tiene



$$KA' = KB' = \frac{1}{2}\,(a - c).$$

La longitud buscada, IK, es la mediana del triángulo $IA'B'$, de lados conocidos

$$IA' = d\,, IB' = b\,, A'B' = a - c\,.$$

Se procede entonces como en el cálculo de una mediana; si IH es perpendicular a AB:

$$IB'^2 = b^2 = IK^2 + KB'^2 + 2KB'.\,KH\,,$$

$$IA'^2 = d^2 = IK^2 + KA'^2 - 2KA'.\,KH\,.$$

Sumando las dos igualdades y teniendo en cuenta que $KB' = KA'$,

$$b^2 + d^2 = 2IK^2 + 2KA'^2$$

o sea

$$2IK^2 = b^2 + d^2 - 2 \cdot \frac{1}{4} (a - c)^2$$

de donde

$$IK^2 = \frac{2(b^2 + d^2 + ac) - (a^2 + c^2)}{4}.$$

Guillermo Tello Y.

Otras soluciones de: *Alvaro Rodríguez, Jaime Vanegas Gómez, Oscar Villa Moreno.*

100. Sea, en un plano (P), un triángulo isósceles ABC tal que $AB = AC = a$ y que $< BAC = 120°$.

1° Sobre la perpendicular xy al plano (P) en A, se concon-considera un punto S. Se pone $x = AS$. Hallar el lugar geométrico de la proyección de A sobre el plano SBC cuando S recorre el eje xy.

2° Determinar x para que el triángulo SBC sea rectángulo en S. Determinar entonces el centro y el radio de la esfera circunscrita al tetraedro $SABC$.

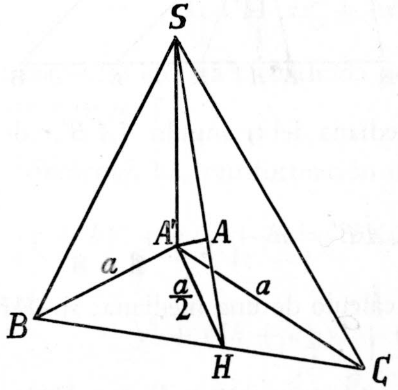


Figura 1

3° En lo que sigue, se supone que $x = a\sqrt{3}/2$. Sea H el punto medio de BC. Se traza por A un plano paralelo a BC que corta SH en H', SB en B', SC en C'.

a) Cuando H' está en la mitad de SH, calcular $tg\ H'AB'$ y $cos\ B'AC'$.

b) si H' se mueve sobre SH, determinar el valor de $z = SH'$ para que $< BAC = 90°$.

N. B. La tercera parte es independiente de las dos primeras.

(Bachillerato francés, 1ª parte, el Líbano, 1951).

Solución. 1º Sea H el punto medio de BC. Puesto que AH es perpendicular a BC, el plano AHS es perpendicular al plano BCS. Siendo A' la proyección de A sobre el plano BCS, el segmento AA' será una altura del triángulo AHS. Luego el lugar geométrico de A' es el círculo que tiene a AH por diámetro.

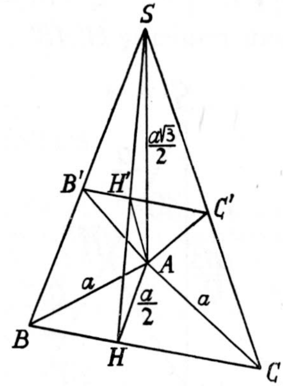


Figura 2

2º Siendo $BS^2 = CS^2 = a^2 + x^2$, por el teorema de Pitágoras tendremos, si BCS es rectángulo en S, $2a^2 + 2x^2 = BC^2 = 3a^2$, de donde $x = a\sqrt{2}/2$.

El centro I de la esfera circunscrita a $SABC$ está situado sobre la recta que pasa por el punto medio J de AS y está situada en el plano AHS. Pongamos $IJ = t$; entonces $IA^2 = IS^2 = a^2/8 + t^2$. Sea I' la proyección de I sobre AH. Entonces $I'B^2 = I'C^2 = (AH - t)^2 + BH^2 = a^2 - at + t^2$ e $IB^2 = IC^2 = I'B^2 + II'^2 = a^2 - at + t^2 + a^2/8$. Luego para tener $IA = IB = IC = IS$ se necesita

$$\frac{a^2}{8} + t^2 = a^2 - at + t^2 + \frac{a^2}{8}$$

es decir $t = a$. El radio de la esfera circunscrita mide entonces $a\,3\sqrt{2}/2$.

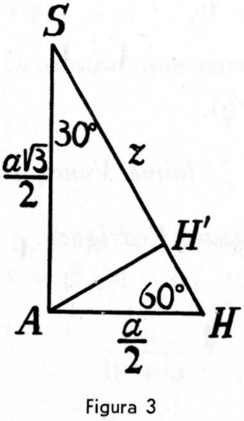


Figura 3

3º a) Puesto que $B'C' : BC = SH' : SH$, se tiene $B'C' = \frac{1}{2}BC = a\sqrt{3}/2$. Por otra parte (ver Fig. 3)

$$SH^2 = x^2 + AH^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = a^2,$$

$SH' = a/2$. El ángulo SHA

mide 60°, ya que su tangente es $SA \ / \ AH = \sqrt{3}$. El triángulo AHH' es entonces equilateral, y en particular $AH' = a/2$. De donde resulta $tg \ H'AB' = H'B'/AH' = (a\sqrt{3}/4)/(a/2) = \sqrt{3}/2$.

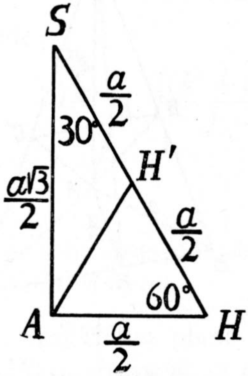


Figura 4

Tenemos entonces $sen \ H'AB' = \sqrt{3}/\sqrt{7}$ y $cos \ H'AB' = 2/\sqrt{7}$. Luego $cos \ B'AC' = cos^2 \ H'AB' - sen^2 \ H'AB' = 4/7 - 3/7 = 1/7$.

b) Puesto que $B'C' : BC = SH' : SH = z : a$, se tiene $B'C' = z\sqrt{3}$. Por otra parte (ver Fig. 4)

$$AH'^2 = \frac{3\ a^2}{4} + z^2 - 2\,\frac{a\sqrt{3}}{2}\ z\ cos\ 30° = \frac{3\ a^2}{4} - \frac{3\,az}{2} + z^2 .$$

Para tener $H'AB' = 45°$ se necesita $tg^2 \ H'AB = H'B'^2/AH'^2 = 1$, es decir

$$\frac{3z^2}{4} = \frac{3a^2}{4} - \frac{3az}{2} + z^2,$$

o sea

$$z^2 - 6az + 3a^2 = 0\,,$$

de donde

$$z = a\ (3 - \sqrt{6}).$$

Jaime Vanegas Gómez

Otras soluciones de: *Astolfo Arias, Alvaro Rodríguez.*