



UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA

**CONTROL COLABORATIVO DE  
DINÁMICAS MÚLTIPLES**  
**COLLABORATIVE CONTROL OF  
MULTI DYNAMICS SYSTEMS**

**GUSTAVO ADOLFO RAMIREZ PIEDRAHITA**  
Ingeniero Electricista, M.Sc.

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA**  
**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y COMPUTACIÓN**  
**MANIZALES COLOMBIA**  
2016

# **CONTROL COLABORATIVO DE DINÁMICAS MÚLTIPLES COLLABORATIVE CONTROL OF MULTI DYNAMICS SYSTEMS**

**GUSTAVO ADOLFO RAMIREZ PIEDRAHITA**  
Ingeniero Electricista, M.Sc.

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:

**Doctor en Ingeniería Automática**

Director (a):

Título (PhD. M.Sc., Ingeniero Electricista) **JESÚS ANTONIO HERNÁNDEZ R.**

**Línea de Investigación:**  
**Inteligencia Computacional**

**Grupo de Investigación:**  
**GIIIC (Facultad de Minas)**

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA**  
**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y COMPUTACIÓN**  
**MANIZALES COLOMBIA**  
**2016**

**Dedicatoria.**

Este trabajo va dedicado a mi familia.

A mi Padre.

# AGRADECIMIENTOS

Son muchas las personas a las que les debo presentar mis agradecimientos.

A mi actual director el profesor, **Jesús Antonio Hernández**, que *insistió bastante* en la culminación de este trabajo después de haber pasado por un largo camino de interrupciones.

A mi esposa **Eliana**, Por creer en *lo imposible, que puede ser posible*.

Al profesor y amigo, **Guillermo Mesa Betancur**: *Una colaboración desinteresada y persistente*.

A la profesora **Rosa Elvira Correa**, *Simplemente Fundamental*

A los profesores y estudiantes del **CINVESTAV**, en Guadalajara-México: que me *apoyaron bastante* durante mi pasantía.

A todas esas personas que fueron testigos de este episodio y aportaron ideas para resolverlo.

## RESUMEN

Este trabajo introduce un método de control de procesos multivariable para ser aplicado a sistemas donde coexisten varias dinámicas acopladas que deben ser controladas basándose en la medición de las entradas y salidas de cada subsistema, así como la estabilidad global del sistema. Se calculan trayectorias individuales para las consignas de modo de que esas trayectorias ayuden a rechazar en buena parte perturbaciones que afectan el comportamiento deseado. Se presenta una técnica de control recursivo no lineal basado en Lyapunov para encontrar una ley de control que ayude a resolver el problema de seguimiento. El desempeño de seguimiento es evaluado por alguna norma.

Esta tesis plantea una solución al problema de las perturbaciones por un método de control que enfoca el esfuerzo en rechazar la perturbación en un solo lazo mientras desintoniza otros lazos. Al proponer movimientos de consigna como estrategia es fundamental garantizar que esas consignas modificadas sean las apropiadas. Su cálculo puede ser muy complejo si el grado de incertidumbre en la perturbación es elevado. Para cumplir con estas garantías se encuentra un conjunto admisible de consignas que rechaza de forma óptima la perturbación y al mismo tiempo no viola las restricciones ni desestabiliza el sistema. Esta tesis se fundamenta en las desigualdades lineales matriciales, LMI, y el trabajo permitió dar respuestas que por otros métodos eran muy difíciles de probar. Las LMI permiten hacer complejos planteamientos multivariable, con algunas modificaciones describen espacios no lineales. Como herramienta de optimización su eficacia es muy buena, ya que trata problemas convexos y no convexos.

Se propone una modificación al esquema de control descentralizado de sistemas multivariable con un procedimiento poco invasivo, que sin retirar los controladores PID mejore su desempeño. Al ser esos procesos muy difíciles de controlar se propone un cambio en el paradigma que actualmente se aplica en la teoría de control. El control tradicional de dinámica múltiple controla la integridad de todas las variables de un proceso. Esta conducta rígida obliga a hacer un enorme esfuerzo, que es innecesario si se considera que la dinámica del proceso tolera variaciones en otras variables menos importantes. Este es un hecho que se evidencia en la práctica: Es suficiente controlar la variable que se relaciona directamente con la calidad del producto que se factura. Otro cambio de paradigma en esta propuesta consiste en evitar que una dinámica entre en conflicto con el resto del proceso, ya que esa situación origina inestabilidad en un sistema. Para atender situaciones conflictivas es acertado resolverlas por colaboración de los agentes involucrados.

Se propone entonces el **control colaborativo de procesos de dinámica múltiple** en sistemas que inicialmente operan con unidades de control del tipo PID y atienden de forma aislada las dinámicas más representativas de un proceso. El método propuesto se inspira en una observación que se da en control de procesos complejos de múltiples dinámicas acopladas, donde los operadores logran mejorar el desempeño de un proceso haciendo pequeños retoques manuales en las consignas de los controladores. En esta propuesta un exosistema, llamado control colaborativo, mueve las consignas de forma óptima sin intervención humana, procurando un buen desempeño y logrando una solución con valor agregado. Con esta propuesta se mejora el desempeño y no es necesario remplazar los controladores PID que han demostrado que trabajan aceptablemente bien.

**Palabras clave:** Colaborativo, Consenso, Sistemas de Dinámica múltiple.

# ABSTRACT

This work introduces a multivariable process control method to be applied to systems where several coupled dynamics coexist that must be controlled based on the measurement of the inputs and outputs of each subsystem as well as the overall stability of the system. Individual trajectories are calculated for the setpoints so that those trajectories will largely reject disturbances that affect the desired behavior. We present a nonlinear recursive control technique based on Lyapunov to find a control law to help solve the tracking problem. Follow-up performance is assessed by some standard.

This thesis proposes a solution to the problem of disturbances by a control method that focuses the effort in rejecting the disturbance in a single loop while it detunes other loops. When proposing slogan movements as a strategy, it is essential to ensure that these modified slogans are appropriate. Its calculation can be very complex if the degree of uncertainty in the disturbance is high. To comply with these guarantees is an admissible set of slogans that optimally rejects the disturbance and at the same time does not violate the restrictions or destabilize the system. This thesis is based on linear matrix inequalities, LMI, and the work allowed to give answers that by other methods were very difficult to prove. The LMI allow complex multivariate approaches, with some modifications describing nonlinear spaces. As an optimization tool, its effectiveness is very good, since it treats convex and non-convex problems.

It is proposed a modification to the decentralized control scheme of multivariate systems with a non-invasive procedure, which without removing the PID controllers improves its performance. Since these processes are very difficult to control, we propose a change in the paradigm that is currently applied in control theory. Traditional multi-dynamics control controls the integrity of all variables in a process. This rigid behavior requires an enormous effort, which is unnecessary if one considers that the dynamics of the process tolerate variations in other less important variables. This is a fact that is evidenced in practice: It is sufficient to control the variable that is directly related to the quality of the product that is invoiced. Another paradigm shift in this proposal is to avoid that a dynamic is in conflict with the rest of the process, since that situation causes instability in a system. In order to deal with conflicting situations, it is wise to resolve them through the collaboration of the agents involved.

We then propose the collaborative control of multiple dynamics processes in systems that initially operate with control units of the PID type and attend in isolation the most representative dynamics of a process. The proposed method is inspired by an observation that occurs in control of complex processes of multiple coupled dynamics, where the operators manage to improve the performance of a process by making small manual adjustments in the controller's instructions. In this proposal an exosystem, called collaborative control, moves the slogans optimally without human intervention, striving for a good performance and achieving a solution with added value. With this proposal performance is improved and it is not necessary to replace the PID controllers that have proven to work acceptably well.

**Keywords:** Collaborative, Consensus, Multiple Dynamics Systems.

# CONTENIDO

RESUMEN .....	v
ABSTRACT .....	vi
CONTENIDO.....	vii
INTRODUCCIÓN .....	1
CAPITULO 1 .....	3
FUNDAMENTOS DEL CONTROL MULTIVARIABLE Y SUS LIMITACIONES .....	3
1.1 INTRODUCCIÓN.....	3
1.2 PROCESOS DE DINÁMICAS MÚLTIPLES .....	3
1.3 CONTROLADORES DESCENTRALIZADOS .....	6
1.3.1 CONTROLABILIDAD INTEGRAL DESCENTRALIZADA .....	6
1.4 PROCESO MIMO Y ALGUNAS DIFICULTADES.....	7
1.4.1 PLANTEAMIENTOS SOBRE LAS DIFICULTADES MÁS RELEVANTES EN EL CONTROL MUTIVARIABLE.....	8
1.5 PAREAMIENTO ENTRE ENTRADAS Y SALIDAS .....	13
1.5.1 MATRIZ RGA .....	13
1.4.3 NÚMERO DE CONDICIÓN ( $\gamma$ ).....	16
1.4.4 RGA NO LINEAL.....	16
1.4.5 RDGA (Relative Disturbance Gain Array) .....	18
1.4.6 ÍNDICE RDG .....	18
1.6 APORTES DE ESTA TESIS .....	18
BIBLIOGRAFÍA.....	21
CAPÍTULO 2 .....	22
MEJORANDO EL DESEMPEÑO DE UN SISTEMA ALTERANDO LA CONSIGNA .....	22
2.1 INTRODUCCIÓN.....	22
2.2 CONTROL INDIRECTO.....	22
2.3 MOVIMIENTOS DE CONSIGNA PARA MEJORAR LA RESPUESTA TRANSITORIA DE UN CONTROLADOR PID.....	24
2.4 GOBERNADORES DE REFERENCIA.....	24
2.5 MOVIMIENTOS DE CONSIGNA PARA RESOLVER PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN	26
2.6 MOVIMIENTOS DE CONSIGNA PARA HACER DESACOPLE EN SISTEMAS 2X2. ....	29
2.7 MOVIMIENTOS DE CONSIGNA PARA ESTABILIZAR SISTEMAS CON INCERTIDUMBRE PARAMÉTRICA. ....	30

CONCLUSIONES:.....	32
BIBLIOGRAFÍA.....	33
CAPÍTULO 3 .....	34
SINTONÍA DE CONTROLADORES PID MULTIVARIABLES .....	34
3.1 EL CONTROLADOR PID.....	34
3.2 MÉTODOS DE SINTONÍA POR MEDIO DE LMIS INTERACTIVAS. ....	35
3.2.1 DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO .....	36
3.2.2 CONTROL PID BIEN PLANTEADO .....	38
3.2.3 ESTABILIZACIÓN DE CONTROLADORES PID POR REALIMENTACIÓN. ....	39
3.2.4 Estabilización por realimentación con controladores PID.....	41
3.2.5 CONTROLADOR SUBÓPTIMO DE NORMA $H_2$ CON CONTROLADORES PID.....	42
3.2.6 CONTROL SUBÓPTIMO DE NORMA $H_\infty$ CON CONTROLADOR PID.....	44
3.2.7 MÁXIMA SALIDA DE CONTROL CON EL CONTROLADOR PID .....	46
3.3 EJEMPLO DE SINTONÍA DE UN CONTROLADOR MIMO-PID PARA UN REACTOR CONTINUO DE TANQUE AGITADO .....	49
3.3.1 REPRESENTACIÓN DE ESTADO.....	49
3.3.2 EVALUACIÓN DE LA MATRIZ DE GANANCIAS POR EL ALGORITMO LMI INTERACTIVO .....	50
CONCLUSIONES .....	55
BIBLIOGRAFÍA.....	56
CAPÍTULO 4 .....	59
FUNDAMENTOS DE OPTIMIZACIÓN Y CONTROL COLABORATIVO.....	59
4.1 INTRODUCCIÓN.....	60
4.2 OPTIMIZACIÓN DE SISTEMAS POR COOPERACIÓN .....	61
4.3 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA COOPERATIVO.....	62
4.4 APLICANDO LA COOPERACIÓN PARA RESOLVER EL PROBLEMA.....	63
LA MATRIZ DE PROPAGACIÓN.....	65
4.5 FORMA GENERAL DEL SISTEMA COOPERATIVO.....	66
4.6 MARCO DE COOPERACIÓN.....	68
4.7 FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	69
4.8 PROPIEDADES DE CONVERGENCIA .....	74
4.8.1 CONDICIONES SUFICIENTES.....	76
4.8.2 CONDICIONES NECESARIAS .....	77
4.9 COOPERACIÓN FUERTE.....	79
4.10 CONSENSO .....	79

4.10.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA .....	81
4.10.2 REALIMENTACIÓN DE ESTADO POR PROTOCOLOS DE CONSENSO.....	81
4.10.3 CONSENSO CONDICIÓN Y CONSENSO VALOR .....	82
4.10.4 REGIÓN DE CONSENSO .....	83
4.10.5 REGIÓN DE CONSENSO $H_{\infty}$ .....	88
4.10.6 CONSENSO $H_2$ SOBRE GRAFOS NO DIRIGIDOS .....	90
CONCLUSIONES .....	91
BIBLIOGRAFÍA.....	92
CAPÍTULO 5 .....	95
CONTROL COLABORATIVO DE PROCESOS DE DINÁMICA MÚLTIPLE.....	95
5.1 INTRODUCCIÓN:.....	95
5.2 REPRESENTACIÓN DE SISTEMAS DE DINÁMICA MÚLTIPLE.....	95
5.3 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD.....	96
Diseño de controladores estables .....	96
Velocidad de decaimiento .....	96
Restricciones sobre la entrada y la salida. ....	97
5.4 RECHAZO DE PERTURBACIONES.....	98
5.4.1 DEFINICIONES BÁSICAS.....	98
5.5 DETERMINACIÓN DE ATRACTORES.....	103
5.6 COMPORTAMIENTO DEL SISTEMA A UNA DESINTONIZACIÓN DE LOS LAZOS. ...	105
5.7 CONTROL COLABORATIVO DE PROCESOS .....	106
5.7.1 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN COLABORATIVA.....	107
5.7.2 SELECCIÓN DE AGENTES COLABORATIVOS.....	108
5.7.3. FUNCIONAL COLABORATIVO.....	110
5.8 RECHAZO DE PERTURBACIONES EN EL LAZO CRITICO POR ACONDICIONAMIENTO DE LA REFERENCIA EN (n-1) LAZOS RESTANTES.....	112
5.8.1 ESQUEMA DE CONTROL.....	112
5.8.2 DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO .....	113
5.8.3 UNIDAD COLABORATIVA.....	114
5.8.4 VERIFICACIÓN DE QUE HAY CONSENSO.....	115
5.9 ALGORITMO DE CONTROL COLABORATIVO .....	116
5.9.1 PASOS PARA IMPLEMENTAR UN CONTROLADOR COLABORATIVO .....	116
5.10 PRUEBA DE LA PROPUESTA SOBRE UN REACTOR TIPO CSTR.....	117
5.10.1 MODELO FENOMENOLÓGICO.....	117
5.10.2 CONDICIONAMIENTO DEL PROBLEMA .....	120

5.10.3 SIMULACIONES en el software VisSim 8.0.....	121
5.10.4 PRUEBAS DE SENSIBILIDAD CUALITATIVA .....	122
5.10.5 CONTROLADORES PID .....	124
5.10.6 CALCULO NUMÉRICO DE LAS CONSIGNAS ADMISIBLES EN LAZO CERRADO .....	125
5.10.7 SINTONÍA DEL CONTROLADOR MIMO-PID .....	128
5.10.8 RESPUESTA CONTROL MIMO-PID A PERTURBACIONES SEVERAS .....	129
5.10.9 RESPUESTA DEL SISTEMA MIMO-PID A AJUSTES SUB-ÓPTIMOS DE ENTRADA $u(t)$ .....	131
5.10.10 RESPUESTA DEL SISTEMA A LA ESTRUCTURA DE CONTROL COLABORATIVA .....	133
BIBLIOGRAFÍA.....	134
CAPÍTULO 6 .....	136
CONCLUSIONES.....	136
6.1. TRABAJOS FUTUROS.....	137
ANEXO 1.....	139
Código MATLAB para calcular por medio de ILMI coeficientes de un controlador MIMO-PID para un reactor CSTR .....	139
ANEXO 2.....	142
IMPLEMENTACIÓN EN HARDWARE.....	142

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 ESQUEMA BÁSICO DE CONTROL.....	4
FIGURA 1.2 CONTROL JERÁRQUICO.....	4
FIGURA.1.3.PROCESO MIMO.....	5
FIGURA.1.4.CONTROL DESCENTRALIZADO.....	6
FIGURA 1.5 SISTEMA DE CONTROL DETALLADO.....	8
FIGURA 1.6 MODELO DE INCERTIDUMBRE.....	11
FIGURA 1.7 ACOPLAMIENTO ENTRE LAZOS CONTROLADOS.....	12
FIGURA 2.1 ESQUEMA DE CONTROL INDIRECTO.....	22
FIGURA 2.2 GOBERNADOR DE REFERENCIA.....	25
FIGURA 2.3 CONJUNTO DE NIVEL QUE SATISFACE LA RESTRICCIÓN.....	26
FIGURA 2.4 CONMUTANDO CONJUNTOS DE NIVEL.....	26
FIGURA 2.5 SOLUCIÓN ÓPTIMA PARA $V=J(RI,RV)$ .....	29
FIGURA 2.6. DIRECCIONES ÓPTIMAS PARA LOS GRADOS DE LIBERTAD. SUPERFICIE ANTERIOR VISTA POR DEBAJO.....	29
FIGURA 3.1 REACTOR CONTINUO DE TANQUE AGITADO CSTR.....	49
FIGURA 3.2. RESPUESTA A UNA PERTURBACIÓN PARA EL CONTROLADOR PID SINTONIZADO POR ZIEGLER-NICHOLS.....	53
FIGURA 3.3 RESPUESTA A UNA PERTURBACIÓN.....	53
FIGURA 3.4. RESPUESTA A UNA PERTURBACIÓN PARA EL CONTROLADOR PID SINTONIZADO POR ZIEGLER- NICHOLS EN EL LAZO DE TEMPERATURA.....	53
FIGURA 3.5 RESPUESTA A UNA PERTURBACIÓN PARA EL CONTROLADOR PID SINTONIZADO POR LMIS EN EL LAZO DE NIVEL.....	54
FIGURA 3.6. RESPUESTA A UNA PERTURBACIÓN PARA EL CONTROLADOR PID SINTONIZADO POR LMIS EN EL LAZO DE CONCENTRACIÓN.....	54
FIGURA 3.7 RESPUESTA A UNA PERTURBACIÓN PARA EL CONTROLADOR PID SINTONIZADO POR LMIS EN EL LAZO DE TEMPERATURA.....	54
FIGURA 4.1. REGIÓN DE CONSENSO ACOTADA.....	84
FIGURA 4.2 REGIÓN DE CONSENSO NO ACOTADA EN X.....	85
FIGURA 4.3. GRAFO DEL SISTEMA.....	86
FIGURA 4.4 (A) REGIÓN DE CONSENSO.....	89
FIGURA 4.4 (B) GRAFO DE COMUNICACIÓN.....	89
FIGURA 5.1 EL CENTRO DEL MANIFOLD Y RESPUESTA A UNA ENTRADA ACOTADA.....	105
FIGURA 5.2. MATRIZ DE PARTICIPACIÓN.....	109
FIGURA 5.3 EFECTO ATRACTOR.....	112
FIGURA 5.4. ESQUEMA DE CONTROL COLABORATIVO PARA RECHAZO ACTIVO DE LA PERTURBACIÓN.....	113
FIGURA 5.5 REACTOR TIPO CSTR.....	117
FIGURA.5.6. RESPUESTA TRANSITORIA NATURAL DEL SISTEMA EN EL PUNTO DE OPERACIÓN NOMINAL EN LAZO ABIERTO.....	121
FIGURA 5.7. RESPUESTA A UN MOVIMIENTO DEL PUNTO DE EQUILIBRIO EN LA DIRECCIÓN DE FJ DE UN 10%.....	122
FIGURA 5.8 RESPUESTA A UN MOVIMIENTO DEL PUNTO DE EQUILIBRIO EN LA DIRECCIÓN DE CV DE UN 10% .....	123
FIGURA 5.9. MAPA DE PUNTOS DE EQUILIBRIO EN LAZO CERRADO CON EL PLANO TRABAJO PARA CA (NOMINAL).....	125
FIGURA 5.10 COMPORTAMIENTO CA/FJ Y COMPORTAMIENTO COLATERAL T/FJ CON NIVEL CONSTANTE EN 1.099M.....	127

FIGURA 5.11. COMPORTAMIENTO CA/CV Y EFECTO COLATERAL SOBRE EL NIVEL. LA TEMPERATURA CONSTANTE EN 369.1oK.....128

FIGURA 5.12 RESPUESTA TRANSITORIA DEL CONTROL MIMO-PID SINTONIZADO POR LMIS. PARA EL REACTOR CSTR AL ENCENDIDO DEL EQUIPO.....129

FIGURA 5.13. RESPUESTA CONTROLADOR MIMO-PID DEL REACTOR CSTR A PERTURBACIONES SEVERAS EN VARIABLES DE NIVEL, CONCENTRACIÓN Y TEMPERATURA.....130

FIGURA 5.14 . RESPUESTA DEL REACTOR CSTR A UN AJUSTE DE REDUCCIÓN DE LA ENTRADA U(T) AL 70% DEL VALOR NOMINAL.....131

FIGURA 5.15. RESPUESTA DEL REACTOR EN LAZO ABIERTO A UNA DISMINUCIÓN DE LA CONSIGNA U(T) DESDE EL LAZO DE TEMPERATURA EN UN 10% DEL VALOR NOMINAL (322.1oK).....132

FIGURA 5.16 RESPUESTA DEL CONTROL COLABORATIVO A UNA CONDICIÓN DE FUERTES PERTURBACIONES EN LOS TRES ESTADOS L, CA, T.....133

FIGURA A-II. 1 MODULO COREBASIC.....143

FIGURA A-II. 2 MODULO ARM TIPO FRDM-K64F (FREESCALE).....144

FIGURA A-II. 3 RASPBERRY PI.....145

FIGURA A-II. 4 CUBRIEBOARD.....146

FIGURA A-II. 5 MONTAJE BÁSICO CONTROL COLABORATIVO EN RED (FRDM-K64F).....147

**LISTA DE TABLAS**

TABLA 5.1 CONDICIONES DE OPERACIÓN Y VALORES NOMINALES DE LOS PARÁMETROS Y CONSTANTES UTILIZADOS EN LA SIMULACIÓN DEL CSTR.....119  
TABLA 5.2 VALORES NOMINALES EN EL REACTOR CSTR.....122  
TABLA 5.3 CAMBIO EN FJ.....124  
TABLA 5.4 CAMBIO EN CV.....124

# INTRODUCCIÓN

Esta tesis trata sobre el **control colaborativo de procesos de dinámica múltiple** que inicialmente operan con unidades del tipo PID y atienden de forma aislada las dinámicas más representativas de un proceso. Se propone una modificación a este esquema de control descentralizado con un procedimiento poco invasivo, que sin retirar los controladores PID se mejore su desempeño. Al ser un proceso muy difícil de controlar, se propone un cambio de paradigma que actualmente se da en la teoría de control. *El control de dinámica múltiple controla la integridad de todas las variables de un proceso.* Esta conducta rígida, lo obliga a hacer un enorme esfuerzo que es innecesario, si se considera que la dinámica del proceso tolera variaciones en otras variables menos importantes. Este es un hecho que se evidencia en la práctica. *Es suficiente controlar la variable que se relaciona directamente con la calidad del producto que se factura.* Otro cambio de paradigma en esta propuesta consiste en evitar que una dinámica entre en conflicto con el resto del proceso, ya que esa situación origina inestabilidad en un sistema. Para atender situaciones conflictivas es acertado resolverlas por colaboración de los agentes involucrados. El método propuesto de ajuste inspira en una observación que se da en control de procesos complejos de múltiples dinámicas acopladas, donde los operadores logran mejorar el desempeño de un proceso haciendo pequeños retoques manuales en las consignas de los controladores. Esta propuesta sin entrar a implantar una entidad inteligente, resuelve el problema con una sencilla estrategia de control. Donde un exosistema llamado control colaborativo, mueve las consignas de forma óptima (inyectando señal en esos puntos de consigna) sin intervención humana, procurando un buen desempeño y logrando una solución con valor agregado. Otro argumento que justifican su aplicación es que en la actualidad los operadores a nivel de planta se muestran renuentes a reemplazar sus controles PID, que han demostrado por más de 50 años que trabajan aceptablemente bien y no desean explorar técnicas nuevas.

Cuando se habla de dinámicas múltiples se refiere a sistemas dinámicos complejos que durante su operación exhiben más de un comportamiento. Para poder analizarlos se les aplican operaciones de simplificación, encaminadas a producir un modelo de buen condicionamiento que sea más fácil de tratar, cuidando de que no se pierda la esencia de sus dinámicas más representativas, por lo tanto, es un reto plasmar en el modelo este subconjunto de dinámicas concentradas. Este proceso de análisis produce lo que se conoce como una representación mínima. Inevitablemente esto le aporta incertidumbre al modelo. La incertidumbre es una de las mayores dificultades que enfrenta la teoría de control. Afortunadamente se han hecho enormes esfuerzos en descubrir procedimientos para tratar eficientemente la incertidumbre en algunos casos. Los observadores de estado han permitido tratar la incertidumbre en casos verdaderamente complejos. El principio del modelo interno nos da una voz de alivio cuando dice que, *si el proceso en lazo cerrado contiene el modelo de la perturbación, él puede eliminar la perturbación perfectamente.* Cuando esos modelos no hacen parte del sistema es inevitable acudir al diseño de observadores.

La dificultad que representa esta dinámica compleja ha estimulado a la teoría de control para que investigue nuevas propuestas que han enriquecido su arsenal de recursos en las últimas décadas. Pero a veces surgen enormes dificultades porque el tratamiento matemático del problema es demasiado complejo y hay que recurrir a simplificaciones que contaminan el modelo. Además, toda propuesta de control seria, debe incorporar en su planteamiento los certificados de estabilidad mínimos que garanticen que la integridad del sistema no se pierda.

El tratamiento no lineal sigue siendo un reto y las soluciones planteadas traen consigo trazas de inexactitud y simplificación que le restan formalismo a la solución.

Las perturbaciones en los sistemas de control han sido uno de los grandes retos, su existencia es la que justifica la instalación de un sistema de control. Pueden ser señales de carácter medible o no medible y si su intensidad es elevada pueden llevar el sistema a la inestabilidad o un pobre desempeño. La teoría del control robusto propone estrategias que pueden mitigar de forma efectiva la perturbación con sus diseños basados en normas  $H_\infty$  o  $H_2$ . Solo en casos especiales se habla de rechazo perfecto a la perturbación. Es por eso que en control el compromiso general es hacer rechazo de la perturbación.

El problema de rechazar la perturbación en sistemas acoplados de múltiples dinámicas es una tarea realmente compleja. Por esa razón es estratégico ver el problema desde un punto de vista más pragmático que óptimo, donde el sistema se pueda mantener controlado en una condición que admite una cantidad mínima de perturbación que no llega a comprometer la calidad del producto. Esta tesis plantea una solución al problema de las perturbaciones por un método de control que enfoca el esfuerzo en rechazar la perturbación en un solo lazo mientras desintoniza otros lazos. Hay varios indicios que confirman esta teoría como son el desplazamiento de polos a otras salidas y el ensanchamiento de las regiones de robustez de un sistema por causa del desplazamiento de los puntos de equilibrio. Para tratar un problema de control por medio de la aplicación de una señal, se debe presentar la solución del problema dentro de las restricciones apropiadas que obligan al diseñador realizar una estructura estable y de buen desempeño. Al proponer movimientos de consigna como estrategia es fundamental garantizar que esas consignas modificadas sean las apropiadas. Su cálculo puede ser muy complejo, si el grado de incertidumbre en la perturbación es elevado. Para cumplir con estas garantías se deben encontrar un conjunto admisible de consignas que rechacen de forma óptima la perturbación y al mismo tiempo no violen restricciones, ni inestabilicen el sistema. Hay herramientas matemáticas muy poderosas para encontrar de forma aproximada estas regiones. Se pueden construir desde la teoría de Lyapunov, pero es muy difícil encontrar funciones candidatas. Hay soluciones intermedias aproximadas donde se puede construir la función o el funcional de Lyapunov por métodos de construcción de regiones basados en superficies elipsoidales descritas por polinomios racionales o politópicas por medio de conjuntos de desigualdades que describen geometrías que tienden a ser formas cuadráticas aproximadas. Facilitando bastante la solución del problema. Las desigualdades lineales matriciales LMI, permiten hacer complejos planteamientos multivariantes con una herramienta muy fácil de emplear. Describen espacios lineales y con algunas modificaciones, pueden describir espacios no lineales. La herramienta de forma fácil logra probar estabilidad en los sistemas que admiten tratamiento poliédrico. Como herramienta de optimización su eficacia es muy buena ya que trata problemas convexos y no convexos, eso la hace muy atractiva. Además, programas como el Matlab la pueden incorporar de forma fácil en su plataforma. Todo este trabajo se fundamenta en esta herramienta y permitió dar respuestas que por otros métodos eran muy difíciles de probar.

# CAPITULO 1

## FUNDAMENTOS DEL CONTROL MULTIVARIABLE Y SUS LIMITACIONES

### 1.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se expone los fundamentos más relevantes que describen un controlador tipo MIMO (Multi-Input-Multi-Output) descentralizados, luego se presentan los desarrollos más importantes que justifican el por qué se va a hacer control del sistema a través de cambios en los puntos de consigna, se sigue con un tratamiento sencillo de los aspectos más significativos que dificultan el control MIMO. El capítulo finaliza exponiendo los aspectos que se consideran aportes al trabajo.

### 1.2 PROCESOS DE DINÁMICAS MÚLTIPLES

Los procesos de dinámicas múltiples son aquellos donde coexisten varias variables que están acopladas y por ese acople se da la aparición de otras dinámicas que son difíciles de controlar porque están relacionadas unas con otras. Otra forma de explicar esto es que si el acople es muy fuerte puede suceder que al intentar controlar unas variables en otra parte del sistema otras variables se vean afectados en forma negativa. Si esto sucede y es indeseado adquiere un carácter conflictivo, si no se toman las medidas correspondientes el control puede ser complicado o incluso imposible de lograr.

Una representación simple de un proceso de dinámica múltiple es por medio de ecuaciones diferenciales que presentan acoplamiento. Estas ecuaciones no se pueden despejar, solo se pueden resolver de forma numérica. Las ecuaciones siguientes pueden ser la representación de un sistema de dinámica múltiple en él se ha separados variables rápidas de variables lentas con el fin de dar un tratamiento adecuado.

$$\begin{aligned}\frac{dx_u(t)}{dt} &= f_1(x_u(t), x_c(t), u(t), z(t), w(t)) \\ \frac{dx_c(t)}{dt} &= f_2(x_u(t), x_c(t), u(t), w(t)) \\ y(t) &= g(x_u(t), x_c(t), u(t))\end{aligned}\tag{1.1}$$

La representación esquemática del control de un proceso se ve en la figura 1.1. Se puede apreciar que es básicamente la interconexión de un sistema que tiene como fin crear un producto. Este sistema dinámico nunca está aislado de su entorno físico, se ve influenciado por otros factores físicos que alteran su dinámica, algunos se pueden medir, otros no y algunos se pueden controlar

y otros no. El control hace uso de esta característica y la explota de tal modo que selecciona las mejores variables que logran impactar los estados deseados y para estas variables se diseña un control que es el equipo externo que las mantiene controladas aplicando alguna ley de control.

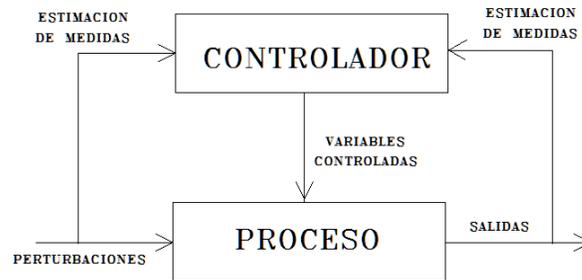


Figura 1.1. Esquema básico de control

Desafortunadamente algunas variables que impactan el proceso no se pueden medir, de hecho, a veces ni siquiera se sabe qué las origina y como logran impactar el proceso de forma negativa, por lo tanto, el control debe estar en condiciones de contrarrestar estos efectos de carácter incierto. Una forma de resolverlos es por medio de realimentación o medir la integridad de la salida del proceso. Si se desvía de las condiciones deseadas se deberán hacer correcciones en la entrada para retornar las variables a sus estados óptimos. Los estados óptimos del proceso se rigen por políticas que no necesariamente son de control, pueden ser económicas y de seguridad; esto hace que la estructura anterior se presente como una estructura que es dirigida por otra de mayor jerarquía, donde las consignas del control se rigen por dichas políticas y si son decisiones que se desprenden de comportamientos complejos, deben ser calculadas por medio de algoritmos de optimización que se ejecutan en tiempo real. Es por eso que el control del proceso hace parte de una estructura más grande que lo gobierna como mostramos en la figura 1.2.

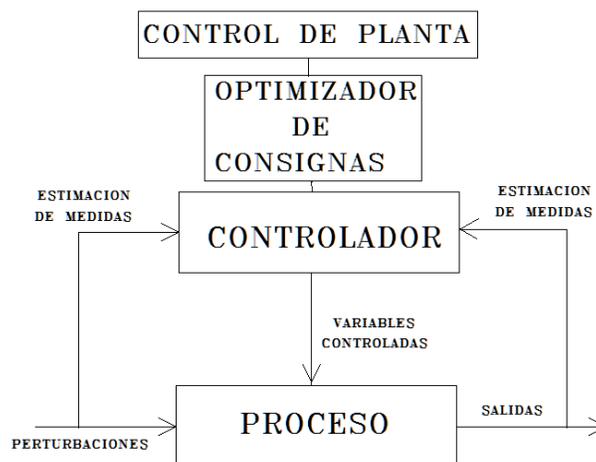


Figura 1.2. Control Jerárquico

Esta aclaración es necesaria ya que cuando se habla de optimización en el capítulo 5. Se mencionan coeficientes de castigo que en su momento pueden estar descontextualizados, pero realmente los pueden asignar sistemas en niveles superiores. Otra aclaración válida es que, aunque en esta propuesta se propone hacer control por consignas no quiere decir que la propuesta carezca de originalidad ya que el propósito es muy diferente. El interés principal es

impactar un solo lazo de forma positiva desintonizando uno o todo el resto de lazos. Respecto al esquema general anterior. El volumen de información que manejan las capas superiores puede ser tan grande que asignarles tareas de capas inferiores hace que el desempeño en tiempo real sea muy difícil de lograr, porque puede suceder que el sistema no tenga tiempo suficiente en reaccionar de forma oportuna. Por lo tanto, nuestro esquema hace pequeñas correcciones con información local.

El objetivo de la puesta a punto de la capa de control (regulador) es controlar las variables más lentas del proceso que influyen principalmente en los parámetros de calidad del mismo, tales como concentraciones en reactores o columnas de destilación. Por lo tanto, se requiere que los algoritmos de control para los puntos de referencia sean de alta calidad de operación. La capa de optimización calcula el punto óptimo de funcionamiento o la trayectoria óptima para todos los controladores de la capa inferior

Un proceso MIMO de dinámicas múltiples se presenta la figura 1.3. Las dinámicas pueden ser variantes o invariantes en el tiempo y además presentar tanto incertidumbre en el modelo como en sus parámetros. En esta propuesta trataremos procesos invariantes sin incertidumbre en el modelo y bien condicionados [2].

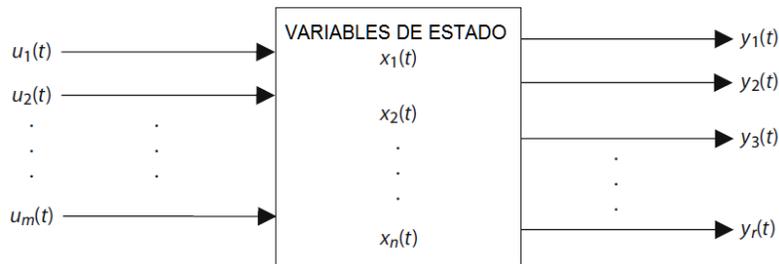


Figura 1.3 proceso MIMO

Otras clasificaciones de procesos según el número de entradas y salidas es el siguiente:

- SISO Single-input, single-output
- TITO Two-input, two-output
- MISO Multi-input, single-output

Otra forma de representar un sistema mimo, en este caso un sistema 3x3 es con una matriz en el dominio de Laplace.

$$G_p(s) = \begin{bmatrix} \frac{-1e^{-s}}{6s+1} & \frac{1.5e^{-s}}{15s+1} & \frac{0.5e^{-s}}{10s+1} \\ \frac{0.5e^{-2s}}{s^2+4s+1} & \frac{0.5e^{-3s}}{s^2+4s+1} & \frac{0.513e^{-s}}{s+1} \\ \frac{0.375e^{-3s}}{10s+1} & \frac{-2.0e^{-2s}}{10s+1} & \frac{-2.0e^{-3s}}{3s+1} \end{bmatrix}$$

Los elementos de la diagonal principal se consideran dinámicas de la trayectoria directa y los elementos por fuera de la diagonal son la representación del acople. Esta representación es concentrada y no siempre reflejan la realidad. Se presenta de esta forma para facilitar la representación del fenómeno por parte de un modelo. Pero la realidad física es distribuida y difícilmente concentrada como lo expresa la matriz anterior.

## 1.3 CONTROLADORES DESCENTRALIZADOS

El control descentralizado implica el diseño de un controlador de diagonal,  $K$ , para una planta MIMO, ver Figura 1.4. Restringe el controlador a una estructura diagonal que limita la clase de los controladores y por lo tanto reduce la clase de funciones de lazo cerrado alcanzables. Instalar este tipo de control, puede dar lugar a limitaciones innecesarias en el rendimiento alcanzable. Sus ventajas son de carácter económico y práctico. En primer lugar, el número de elementos de la función de transferencia de la matriz del controlador que va a ser diseñado se reduce para controladores cuadrados. En segundo lugar, si la iteración es pequeña pueden ser muy buena opción.

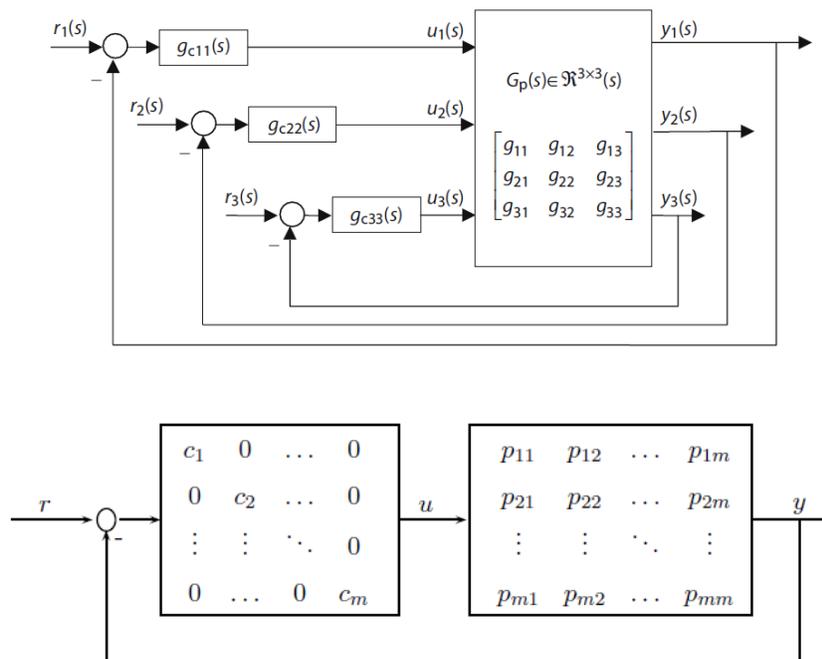


Figura 1.4 Control Descentralizado

### 1.3.1 CONTROLABILIDAD INTEGRAL DESCENTRALIZADA

Una particularidad interesante de los sistemas de control descentralizados es que un lazo determinado del sistema puede ser re-sintonizado o desconectado sin que el sistema a lazo cerrado se haga inestable. Esto es muy importante en la práctica, ya que permite obtener el desempeño deseado en lazo cerrado, sintonizando lazo por lazo individualmente sin riesgo de que el sistema se vuelva inestable. Además, evita que el sistema se haga inestable producto de saturaciones de entrada o fallas en sensores y actuadores. Para esto se define la Controlabilidad Integral Descentralizada [1, 2]

**Definición:** Controlabilidad Integral Descentralizada, (DIC). Una planta  $P(s)$  es DIC si existe un controlador descentralizado con acción integral en cada lazo tal que (a) el sistema realimentado es estable y (b) la ganancias de cada lazo individual pueden ser afectadas por un factor  $0 < \epsilon_i < 1$ , sin afectar la estabilidad del lazo cerrado. Si bien no existen condiciones necesarias y

suficientes para que una planta de  $n \times n$  sea DIC, el RGA (Relative Gain Array; matriz de ganancias relativas) [4], provee una herramienta útil para verificar en qué casos una planta con una determinada estructura de control no es DIC. Esto queda establecido en el siguiente resultado, originalmente demostrado en [1].

**Teorema 1.1.** Sea una planta cuadrada  $P(s)$  y un controlador diagonal  $C(s)$  con acción integral en todos sus lazos, tal que  $P(s)C(s)$  es estrictamente propia. Entonces, si un elemento diagonal del RGA  $\lambda_{ii}$  es negativo, el sistema a lazo cerrado cumple alguna de las siguientes características:

A- El sistema a lazo cerrado es inestable.

B- El lazo  $i$  es inestable de por sí (con los otros lazos abiertos)

C- El sistema a lazo cerrado es inestable si se abre el lazo  $i$ .

Claramente, ninguna de las tres alternativas que resultan a partir de un  $\lambda_{ii} < 0$  es deseable. El peor caso es el A, aunque el caso C es también crítico ya que implica que el sistema se inestabiliza si el lazo  $i$  se abre por alguna razón, como por ejemplo, a causa de la saturación de la acción de control. Por lo tanto, el Teorema 5.1 da otro motivo para evitar factores  $\lambda_{ii}$  menores que cero.

Según el Teorema anterior: Si se quiere obtener un sistema DIC uno debe necesariamente conectar entradas y salidas correspondientes a ganancias relativas positivas. Para ello, una característica interesante del RGA es que no debe recalcularse para evaluar cada posibilidad de “apareo”, ya que cualquier permutación de columnas o filas en  $P(s)$  da lugar a la misma permutación de columnas o filas en el RGA (por la segunda de las propiedades algebraicas enumeradas). Esta propiedad permite entonces eliminar muchas de las posibles combinaciones con solo observar el RGA.

## 1.4 PROCESO MIMO Y ALGUNAS DIFICULTADES

La gran mayoría de los sistemas del mundo real tiene más de una variable cuyo control resulta de interés, y dispone para ello de más de una variable o acción de control. Estos Sistemas se conocen como sistemas multivariables o de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO, Múltiple-Input Múltiple-Output). Los sistemas con una única entrada y una única salida (SISO, Single-Input Single-Output) constituyen en muchos casos un subsistema de un sistema MIMO. Sistemas multivariables se pueden encontrar en casi todas partes. En el baño de una casa, la temperatura y el caudal de agua en la ducha son variables importantes para un baño placentero.

En los procesos químicos frecuentemente se requiere controlar más de una variable simultáneamente, como por ejemplo la presión y la temperatura. Un invernadero automatizado deberá controlar que la temperatura, la humedad y la iluminación sean las adecuadas para el cultivo que alberga. Un robot necesita seis grados de libertad para tener un rango completo de posicionamiento, y en un avión o un satélite son decenas las variables a controlar. Algunos fenómenos son propios de los sistemas MIMO, y no ocurren en los sistemas SISO. Por ejemplo, la presencia de direcciones asociadas a los vectores de entrada/salida y a las matrices de transferencia es exclusiva de los sistemas MIMO. Debido a ello es que un sistema multivariable puede tener un cero y un polo en la misma posición sin que por ello se cancelen. O que en un sistema MIMO de fase mínima los elementos individuales de la matriz de transferencia puedan tener sus ceros en el semiplano derecho (o viceversa). Sin embargo, la propiedad más importante de un sistema multivariable es el acoplamiento cruzado o las interacciones entre sus variables.

En un sistema MIMO cada variable de entrada puede afectar a todas las salidas o variables controladas del sistema. Esto dificulta enormemente el diseño de los controladores, e impide hacerlo como si se tratase de múltiples lazos monovariantes, ya que los parámetros del controlador en un lazo afectarían a cada uno de los lazos restantes, pudiendo causar incluso la inestabilidad. Por ello es que las interacciones cruzadas suelen considerarse como la principal causa de dificultad en el control de los sistemas multivariantes [1]. Por otro lado, en un lazo de control existen límites físicos, cotas de seguridad o limitaciones asociadas a determinadas características del proceso a controlar que imponen restricciones en el desempeño alcanzable en lazo cerrado. En particular, las limitaciones físicas y/o tecnológicas de los actuadores dan lugar a restricciones a la entrada de la planta, mientras que regiones de operación segura y características de fase no mínima afectan generalmente la excursión de las variables controladas o salidas. En un sistema multivariable, los efectos e imposiciones de estas restricciones se ven agravados por la direccionalidad y las interacciones presentes en este tipo de plantas. La búsqueda de soluciones a este problema ha motivado numerosos trabajos de investigación en los últimos años [3].

### 1.4.1 PLANTEAMIENTOS SOBRE LAS DIFICULTADES MÁS RELEVANTES EN EL CONTROL MULTIVARIABLE.

Rápidamente se van a exponer las dificultades más importantes a que se enfrenta el control MIMO, si el lector está interesado en profundizar en ello se le recomienda consultar las siguientes referencias [1] [2].

Los planteamientos de dificultad para sistemas SISO se pueden extender en algunos casos a sistemas MIMO. Para facilitar la explicación es importante presentar un esquema general detallando de su estructura con diagramas de bloques, según la figura 1.5.

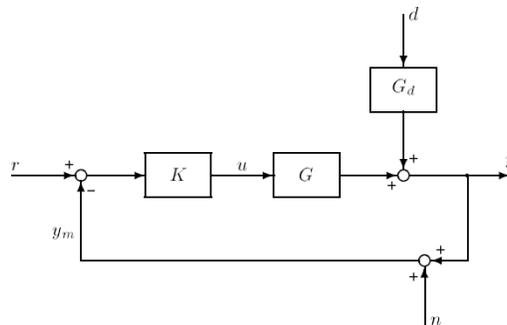


Figura 1,5, Sistema detallado de control.

Con las siguientes definiciones.

La entrada al controlador  $K(s)$  se define como  $r - y_m$ , donde  $y_m = y + n$  es la medición de salida y  $n$  es la medición de ruido. Así la entrada a la planta es.

$$u = K(s)(r - y - n) \quad (1.2)$$

El objetivo del control es manipular  $u$  de tal forma que el error  $e$  sea pequeño en presencia de perturbaciones  $d$ . El error en el control es.

$$e = y - r \quad (1.3)$$

Donde  $r$  representa la referencia (set point). El modelo de planta se expresa así.

$$y = G(s)u + G_d(s)d \quad (1.4)$$

$$y = GK(r - y - n) + G_d d \quad (1.5)$$

O también  $(I + GK)y = GKr + G_d d - GK n \quad (1.6)$

Y por lo tanto la respuesta en lazo cerrado es.

$$y = (I + GK)^{-1} GK r + (I + GK)^{-1} G_d d - (I + GK)^{-1} GK n \quad (1.7)$$

Donde  $T = (I + GK)^{-1} GK r$ ,  $S = (I + GK)^{-1} G_d$  y  $T = (I + GK)^{-1} GK$

El error en el control es.

$$e = y - r = -S r + S G_d d - T n \quad (1.8)$$

Se ha usado el hecho de que  $T - I = -S$ . La correspondiente entrada a la planta es.

$$u = K S r - K S G_d d - K S n \quad (1.9)$$

La siguiente terminología será usada más adelante.

$L = KG$  Función de transferencia del lazo.

$S = (I + GK)^{-1} G_d = (I + L)^{-1}$  Función de sensibilidad.

$T = (I + GK)^{-1} GK = (I + L)^{-1} L$  Función complementaria de sensibilidad.

Se puede ver que  $S$  es función de transferencia en lazo cerrado de las perturbaciones a la salida, mientras que  $T$  es la función de transferencia en lazo cerrado de la señal de referencia a la salida. El término sensibilidad complementaria para  $T$  sigue de la identidad:

$$S + T = I \quad (1.10)$$

### LIMITACIONES IMPUESTAS POR LAS RESTRICCIONES DE ENTRADA

Las restricciones sobre las variables manipuladas pueden limitar la habilidad para rechazar perturbaciones y seguir referencias en el caso del control perfecto como en los sistemas SISO ( $e = 0$ ) y además para un control aceptable ( $\|e\| \leq 1$ ) se demostró resultados para desempeñar perturbaciones y seguimiento de consignas se reemplazó  $G_d$  por  $-R$

### ENTRADAS PARA HACER CONTROL PERFECTO

Se pueden rechazar bien las perturbaciones mientras  $\|u\| \leq 1$  para responder esto hay que cuantificar los conjuntos de posibles perturbaciones y entradas permitidas inicialmente se puede considerar la norma (*norma - 2*).

### NORMA MÁXIMA EN PLANTAS CUADRADAS

La entrada necesaria para un rechazo perfecto a la perturbación es  $u = G^{-1} G_d d$  considere una sola perturbación ( $g_d$ ) Es un vector. Luego el peor caso es cuando  $|d(\omega)| = 1$  si queremos evitar la saturación ( $\|u\|_{max} \leq 1$ ) si todos los elementos de  $G^{-1} g_d$  son menores a uno. Entonces su magnitud es.

$$\|G_d^{-1}\|_{max} \leq 1, \quad \forall \omega.$$

Si se consideran perturbaciones simultáneas ( $G_d$  es una matriz) la condición de la siguiente.

$$\|G^{-1} G_d\|_{i,\infty} \leq 1, \quad \forall \omega.$$

Pero  $\|\cdot\|_{i,\infty}$  es una norma inducida máxima, o la máxima suma de las filas.

## NORMA DOS

En el caso de querer medir ambas perturbaciones y entradas en términos de la norma 2. Se asume que  $G$  tiene rango completo en filas para que las salidas estén perfectamente controladas, entonces la entrada más pequeña para hacer control perfecto es.

$$u = -G^{\dagger}G_d d$$

$G^{\dagger} = G^H(GG^H)^{-1}$  es la pseudo inversa.

Con una sola perturbación  $\|G^{\dagger}g_d\|_2 \leq 1$ . Con una condición de perturbación combinada se requiere que.  $\bar{\sigma}(G^{\dagger}G_d) \leq 1$ . Para cambios combinados en las referencias  $\|\tilde{r}(\omega)\|_2 \leq 1$  la condición correspondiente para hacer control perfecto es.

$\underline{\sigma}(R^{-1}G) \geq 1, \forall \omega \leq \omega_r$ ,  $\omega_r$  es la frecuencia de seguimiento requerida. Usualmente  $R$  es diagonal con todos los términos  $> 1$ . Además, se requiere que.  $\underline{\sigma}(G(j\omega)) \geq 1, \forall \omega < \omega_r$ . y más general deseamos que  $\underline{\sigma}(G(j\omega))$  Tenga valores grandes.

## ENTRADAS PARA CONTROL ACEPTABLE

Si  $e = 0$  y consideramos la respuesta  $e = G_u + G_d$  a una perturbación  $d$  es posible obtener  $\|e\| < 1$  para que cualquier  $\|d\| < 1$  usando entradas con  $\|u\| < 1$  acá usaremos la norma máxima  $\| \cdot \|_{max}$  del vector de entradas. El problema se puede formular de diversas formas.

- Como la máxima perturbación permitida.
- El error mínimo que se logra

Usaremos la última. Para simplificar el problema consideremos una perturbación a la vez, entonces  $d$  es escalar y  $g_d$  es un vector. El peor caso de perturbación es cuando  $|d| = 1$ , y el problema en todas las frecuencias es.

$$U_{min} \triangleq \min_u \|u\|_{max}$$

Tal que  $\|G_u + g_d d\|_{max} \leq 1, |d| = 1$  y para evitar saturación de entrada (para cada perturbación)  $U_{min} < 1, \forall \omega$ .

Si  $G$  y  $g_d$  son reales y en estado estable entonces.

$$U_{min} \triangleq \min_u \|u\|_{max}$$

Se formula como un problema de programación lineal con condiciones según la función de transferencia.

## SVD (DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES)

En cada frecuencia la descomposición SVD de la planta y posiblemente no cuadrada es.

$G = U \Sigma V^H$  Introduce una rotación en el error del control y la entrada.

$\hat{e} = U^H e, \hat{u} = V^H u$  y que la rotación no altere la norma  $\|\hat{e}\|_{max}$  y  $\|e\|_{max}, \|\hat{u}\|_{max} \approx \|u\|_{max}$

Luego cada valor singular de  $G$ ,  $\sigma_i(G)$  debe satisfacer aproximadamente. MIMO

$\sigma_i(G) \geq |U_i^H y_d| - 1$ , a todas las frecuencias, donde  $|U_i^H g_u| > 1$

Donde  $u_i$  es la  $i$ ésima componente del vector de salida singular de  $G$  y  $y_d$  es un vector donde consideramos una sola perturbación. La expresión anterior es la condición necesaria para obtener error aceptable ( $\|e\|_{max} < 1$ ) para una sola perturbación ( $|d| = 1$ ) con  $\|u\|_{max} \leq 1$ .

## LIMITACIONES IMPUESTAS POR LA INCERTIDUMBRE

En sistemas SISO la incertidumbre se resuelve por realimentación, pero en sistemas MIMO la direccionalidad aporta entre incertidumbre adicional.

## INCERTIDUMBRE ENTRADA SALIDA

La incertidumbre a la entrada y a la salida en forma multiplicativa es como muestra la Figura 1.6.

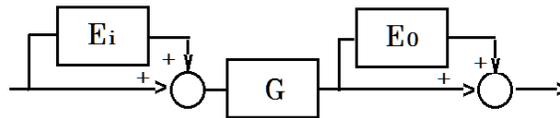


Figura 1.6. Modelo de incertidumbre

En la salida  $G' = (I + E_o)G$  y en la entrada  $G' = G(I + E_i)$  Las expresiones anteriores parecen similares pero sus implicaciones en el control son muy diferentes.

## EFFECTO SOBRE EL CONTROL EN ADELANTO

En estos sistemas a la salida  $e' = E_o r$  y en la entrada  $e' = GE_i G^{-1} r$  es peor en esta última situación. Se puede relacionar para el RGA como.  $[GE_i G^{-1}]_{ii} = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(G) e_j$  Que es la incertidumbre. La controlabilidad entrada salida en sistemas MIMO se hace más difícil de garantizar por efecto de las direcciones.

## LIMITACIONES POR LOS CEROS Y POLOS EN EL SEMIPLANO DERECHO (RHP)

Si estos ceros están cercanos al origen, el desempeño es pobre.

## MOVIENDO EL EFECTO DE LOS CEROS (RHP) DEL SEMIPLANO DERECHO A UNA SALIDA ESPECÍFICA.

El efecto de los ceros del semiplano derecho sobre una salida puede ser trasladados a otra salida, pero se debe pagar un precio que es algo de interacción.

## LIMITACIONES POR LOS POLOS DEL SEMIPLANO DERECHO (RHP)

Su efecto es desestabilizar la planta. Producen desempeño pobre si están ambos cercanos, los polos y los celos del semiplano derecho y aumenta la sensibilidad en el sistema en la medida en que el ángulo entre ellos aumente. Las perturbaciones alineadas con la planta se rechazan mejor. Y si la planta tiene ceros en el semiplano derecho el desempeño será pobre si la perturbación está alineada con este cero.

## ACOPLAMIENTO

El acoplamiento se percibe cuando el efecto de las entradas se distribuye en todas sus salidas. Se puede ilustrar ese efecto en la Figura 1.7. Donde se presenta una situación con dinámicas concentradas. El efecto de un controlador afecta el lazo local como los lazos vecinos. Dificultando el control. Una técnica para diseñar controladores para sistemas acoplados es intentar desacoplarlo con manipulaciones matemáticas y así tratar este sistema como una combinación de sistemas SISO (Single-Input-Single-Output).

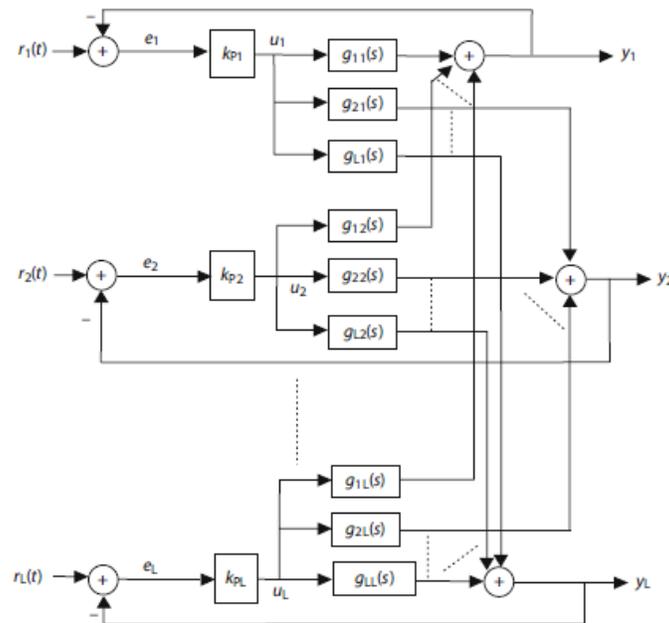


Figura 1.7. Acoplamiento entre lazos controlados

El desacoplamiento dinámico diagonal de un sistema multivariable busca eliminar por completo las interacciones cruzadas, es decir, transformar al sistema MIMO en un conjunto de sistemas SISO. Un ejemplo cotidiano de desacoplamiento dinámico es el que se obtiene con la grifería mono-comando: en ella movimientos en dirección horizontal afectan solamente la temperatura del agua, mientras que las “referencias” en forma vertical afectan el caudal. En cambio, el sistema de grifería convencional (con canillas individuales para agua fría y caliente) está claramente acoplado: la apertura o el cierre de cualquiera de los dos grifos afecta tanto al caudal como a la temperatura. En aplicaciones más críticas, se puede requerir independizar la variación de temperatura entre dos etapas de un proceso químico, o modificar el ángulo de ataque de un avión sin que por ello varíe su altura ni su velocidad. Es decir, el desacoplamiento dinámico es una característica deseable en numerosas aplicaciones prácticas. Por otro lado, un control de tipo descentralizado no siempre conduce a respuestas satisfactorias para requerimientos de performance medianamente exigentes. Una alternativa intermedia considerada en la literatura para los procesos de NMF (fase no mínima) [1,2], consiste en obtener un desacoplamiento parcial del sistema. Para el diseño de controladores que logren esta característica a lazo cerrado,

Se observa que dependiendo de la dirección asociada a los ceros de NMF (Fase No Mínima) y de la naturaleza misma de la planta a controlar, las interacciones remanentes pueden llegar a ser de gran amplitud. Por lo tanto, con vistas a mejorar el grado de desacoplamiento del lazo cerrado, se propone en este último caso aplicar el acondicionamiento de la referencia. Esta metodología permite limitar las interacciones que no fueron eliminadas por el desacoplamiento parcial, y a diferencia de otras propuestas anteriores, no afecta la variable principal (desacoplada) con respuestas inversas

## DIRECCIONALIDAD EN LAS ENTRADAS

Un concepto fácil de explicar de esta situación, se hace por intermedio de diagramas de bloques. Recordando que los bloques no existen son solo representaciones concentradas de las dinámicas y en esta representación que hace la Figura 1.7. Con flechas representa la influencia de una dinámica sobre la otra con el agravante que el controlador si es estático lineal o de características como un PID o algún filtro adelanto atraso o viceversa que no logra detectar la perturbación que no esté alineada con el [1, 2]. Esto resulta en un pobre desempeño, pues el controlador de estas características le es imposible rechazar perturbaciones que no estén alienadas con el lazo de control. Imagínese un caballo con viseras que solo puede ver hacia adelante.

En sistemas MIMO se puede trasladar el efecto indeseable de un cero del semiplano derecho a una salida específica que puede ser menos importante para el control esto es posible, pero hay que pagar el precio de la interacción deteriorante. Los polos y ceros del semiplano derecho muy cercanos entre si producen desempeño pobre del sistema. Perturbaciones no alienadas con la planta empobrecen desempeño. Cuando las perturbaciones están alineadas con ceros del semiplano derecho se degrada el desempeño. La violación de restricciones puede entorpecer la capacidad del sistema de rechazar perturbaciones. Hay que considerar que algunas entradas son más propensas a saturar el sistema que otras

La presencia de ceros multivariantes en el SPD (semiplano derecho) dificulta el desacoplamiento dinámico de un proceso determinado. A su vez, la matriz de transferencia resultante sugiere que un único cero en el SPD que puede influir en diversos canales del lazo cerrado.

## 1.5 PAREAMIENTO ENTRE ENTRADAS Y SALIDAS

Uno de los problemas que surgen cuando consideras un número de variables de entrada y salida por parejas simultáneamente caso del control multivariable descentralizado es que una variable manipulada puede afectar a más de una variable controlada Este problema se conoce como interacción y hace más difícil el control de los lazos esto se produce debido a que cuando se modifica el valor de una variable manipulada con objeto de regular el comportamiento de una variable controlada dicha manipulación afectará a otras variables de salida distinta que uno pretendía modificar la solución en estos casos es o bien elegir algunas parejas en las que no haya interacción o bien desacoplar la interacción entre los núcleos de alguna forma

### 1.5.1 MATRIZ RGA

Matriz de ganancias relativas [4] ha sido ampliamente utilizada como una medida de las interacciones entre las distintas variables del proceso y como una herramienta para la selección de la mejor estructura en sistemas de control descentralizado (multi lazo). La selección de las variables se hace con el objeto de minimizar las interacciones entre los bucles de control. Muchas de las más importantes propiedades de los sistemas en bucle cerrado, tales como la estabilidad o el control habilidad, pueden ser inferidas a partir de la matriz de ganancias relativas (RGA). Además, dado que las plantas son valores altos en los elementos de la matriz RGA son muy sensibles a posibles errores en el modelo, la RGA puede ser usada como una medida de la sensibilidad frente a la incertidumbre del modelo.

En la práctica hay muchos factores que pueden contribuir a la incertidumbre del modelo tales como la falta de precisión en las medidas de las variables de la planta o en el modelo, el ajuste del método de identificación cambios en las condiciones de operación, variación en los parámetros físicos, etc. es por esto que los modelos de procesos nunca son perfectos. Para modelos de plantas con incertidumbre, el análisis RGA puede dar información engañosa sobre el

apropiado emparejamiento de las variables con fines de control. Aunque la literatura sobre el control de procesos está repleta de análisis propiedades y aplicaciones de la RGA, el efecto de la incertidumbre del modelo en el análisis de la RGA ha recibido muy poca atención.

## MATRIZ DE RGA PARA MEDIR INTERACCIÓN

Antes de iniciar un diseño de control descentralizado se debe determinar el acoplamiento del sistema para proyectar el apareamiento de entradas contra salidas el interés del diseñador es seleccionar las parejas entrada salida que menos acople colateral produzcan sobre los lazos vecinos y usarla para hacer control. Los métodos que ayudan a resolver este problema se conocen como medidas de interacciones. Una de las primeras medidas de interacciones, enormemente difundida y utilizada por años en aplicaciones prácticas, es el ya mencionado arreglo de ganancias relativas RGA.

En esta sección, seguiremos el razonamiento hecho por [4] al proponer originalmente el RGA para mostrar porque este índice es utilizado para medir las interacciones entre los lazos de un sistema de control descentralizado. Es importante remarcar que en el desarrollo del RGA, Bristol [4] asumió procesos descritos por matrices de ganancias constantes, por lo que usualmente se utiliza la matriz de ganancias de estado estacionario para el Cálculo del RGA. En efecto, la idea detrás del RGA es cuantificar la influencia que tienen en la ganancia de estado estacionario de un determinado lazo el resto de los lazos del sistema de control. No obstante, trabajos posteriores demostraron la importancia que tiene este índice como función de la frecuencia [1, 2].

Sean  $u_j$  e  $y_i$  una entrada y una salida determinada de una planta multivariable con matriz de ganancias en estado estacionario  $P(0)$ . Se quiere usar  $u_j$  para controlar  $y_i$ . Por tratarse de una estructura descentralizada, pueden darse dos casos extremos:

1. Que los otros lazos estén abiertos. Entonces, todas las demás entradas pueden considerarse constantes. En particular,  $u_k = 0, \forall k \neq j$ .

2. Que los otros lazos estén cerrados. En este caso, suponiendo control perfecto en estos Lazos, todas las demás salidas pueden considerarse constantes. En particular,  $y_k = 0, \forall k \neq i$ .

Notar que si bien el control perfecto ( $y_k = r_k, r_k$  referencia del lazo  $k$ ) solo es posible en estado estacionario, puede considerarse como una buena aproximación para frecuencias dentro del ancho de banda de cada lazo.

Ahora evaluamos el efecto  $\partial y_i / \partial u_j$  de la entrada  $u_j$  sobre la salida  $y_i$  para los casos 1 y 2. Así tenemos:

1. Con los otros lazos abiertos, es inmediato ver a partir de  $y = P(0)u$  que

$$\left( \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right)_{u_k=0; k \neq j} = p_{ij}(0)$$

Es decir, el efecto de  $u_j$  sobre  $y_i$  queda determinado por el elemento  $ij$  de la matriz  $P(0)$ , que aqui denotamos  $p_{ij}(0) = [P(0)]_{ij}$ .

2. Para evaluar este efecto cuando los otros lazos están cerrados, intercambiamos los roles de  $P(0)$  y  $P^{-1}(0)$ , de  $u$  e  $y$ , y de  $i$  y  $j$ . De esta forma, partiendo ahora de  $u = P^{-1}(0)y$

$$\left( \frac{\partial u_j}{\partial y_i} \right)_{y_k=0; k \neq i} = [P^{-1}(0)]_{ji}$$

Resultando finalmente para este caso

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_j}\right)_{y_k=0; k \neq i} = \frac{1}{[P^{-1}(0)]_{ji}} = \hat{p}_{ij}(0).$$

El RGA se define como la matriz cuyos elementos son las ganancias relativas  $\lambda_{ij}$ , siendo:

$$\lambda_{ij} \triangleq \frac{p_{ij}(0)}{\hat{p}_{ij}(0)} = [P(0)]_{ij}[P^{-1}(0)]_{ji}$$

O sea, denotando al RGA  $\Lambda$  como:

$$\Lambda = P(0) \times [P^{-1}(0)]^T \quad (1.11)$$

Donde  $\times$  indica el producto de Schur (multiplicación elemento a elemento).

Claramente, será conveniente que la ganancia relativa  $\lambda_{ij}$  entre la variable a controlar  $y_i$  y la entrada elegida para controlarla  $u_j$  sea cercana a 1, ya que esto implica que la ganancia desde  $u_j$  a  $y_i$  no se ve afectada al cerrar o abrir los otros lazos de control. Por otro lado, una ganancia  $\lambda_{ij} < 0$  indica que la ganancia de estado estacionario entre  $u_j$  e  $y_i$  cambiará de signo cuando los otros lazos se cierren. Por ello, se deberá evitar el “apareo” de variables con ganancia relativa  $\lambda_{ij} < 0$ .

**Comentario** A partir de (1.11), se ha utilizado también a  $\Lambda(s) = P(s) \times [P^{-1}(s)]^T$  como medida de interacción en función de la frecuencia.

El RGA tiene una serie de propiedades algebraicas, de las cuales las más importantes son:

1. La suma de los elementos de cualquiera de sus columnas o sus filas es igual a 1.
2. Permutaciones de columnas (filas) en  $P(s)$  llevan a iguales permutaciones de columnas (filas) en  $\Lambda(s)$ .
3. El RGA es independiente del escalaje de entrada y salida (el escalaje de una matriz corresponde a multiplicar la matriz por 2 matrices diagonales no-singulares  $D$  y  $D'$ , tal que la matriz escalada resulta  $P' = DPD'$ ).
4. Un cambio en un elemento de  $P(s)$  igual a la inversa negativa del elemento correspondiente del RGA lleva a la singularidad.
5. El RGA es igual a la matriz identidad si  $P(s)$  es triangular inferior o superior.

De la última propiedad se concluye que  $\Lambda(s) - I$  proporciona una medida de las interacciones Cruzadas en los dos sentidos (two-way interactions), es decir, aquellos casos en que dos lazos interactúan mutuamente. Esto no sucede en una planta con matriz de transferencia triangular, ya que en ella cada lazo afecta solamente a aquellos lazos que no tienen efecto sobre él (one-way interaction).

## INTERPRETACIÓN DE LA GANANCIA RELATIVA

Los valores de la ganancia relativa tienen una relación muy estrecha con la controlabilidad de las parejas de variables (manipulada-controlada) y con su interacción con otros lazos de control. Los valores numéricos posibles y su significado son los siguientes:

$\lambda_{ij}=1$  no hay interacción con otros lazos

$\lambda_{ij}=0$  la variable manipulada  $i$  no afecta a la controlada  $j$ .

$\lambda_{ij}=0.5$  hay un alto grado de interacción. Los otros lazos de control tienen el mismo efecto de la variable controlada  $j$  que la variable manipulada  $i$ .

$0.5 < \lambda_{ij} < 1$  Hay interacción entre los lazos sin embargo podría ser la pareja preferida que minimiza la interacción

$\lambda_{ij} > 1$  la interacción reduce el efecto de la ganancia en el bucle de control se requieren ganancias mayores en el controlador.

$\lambda_{ij} > 10$  Las parejas de variables con altos valores de RGA son indeseables pueden referirse a un sistema sensible a pequeñas variaciones en la ganancia y posibles problemas en la aplicación de técnicas de control basadas en el modelo.

$\lambda_{ij} < 0$  Se debe tener especial cuidado con los elementos negativos de la RGA los elementos negativos fuera de las diagonales indican que al cerrar el bucle cambiar el signo de la ganancia efectiva si los elementos de la diagonal son negativos eso puede indicar inestabilidad integral es decir el bucle de control es inestable para cualquier controlador.

### 1.4.3 NÚMERO DE CONDICIÓN ( $\gamma$ )

El número de condición de una matriz describe como es de sensible la misma a errores cuando el número es próximo a uno se dice que la matriz está bien condicionada y cuando toma valores mayores se dice que la matriz está mal condicionada.

El número de condición se define como:

$$\gamma(G) = \frac{\bar{\sigma}(G)}{\underline{\sigma}(G)}$$

Siendo  $\bar{\sigma}$  el valor singular máximo y  $\underline{\sigma}$  el valor singular mínimo de la matriz de la función de transferencia.

### 1.4.4 RGA NO LINEAL

Una extensión del RGA para sistemas multivariables no lineales afines en casos dinámicos y Estáticos la presento [5]. El RGD dinámico no lineal se define así.

$$\Lambda_{nl} = C(x) \times C(x)^{-T}$$

Donde  $C(x)$  es la matriz característica de la planta que la vamos a definir en seguida.

$$C(x) = \begin{bmatrix} L_{g1}L_f^{r1-1}h_1(x) & \dots & L_{gm}L_f^{r1-1}h_1(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ L_{g1}L_f^{rm-1}h_m(x) & \dots & L_{gm}L_f^{rm-1}h_m(x) \end{bmatrix}$$

Donde  $r1$  es el  $\min\{r_{ij}\} \quad j = 1,2 \dots m$ . En [6] se mostró que el rango genérico de la matriz  $C(x)$  es completo si y solo si las salidas pueden ser organizadas de forma tal que el grado relativo mínimo de cada fila de  $M$  aparesca en la posición mayor de la diagonal principal. Esto sugiere hacer el pareamiento sobre los elementos de  $M$ , que tengan valores mínimos en cada fila de  $M$ .

En [8] La RGA no lineal se define así:

$$\Lambda_{nl-RGA} = R \times R^{-T}$$

Donde  $R$  vale.

$$R = \begin{bmatrix} L_{g1}L_f^{r1-1}h_1(x) & \cdots & L_{gm}L_f^{r1-1}h_1(x) \\ L_{g1}L_f^{r1-1}h_2(x) & \cdots & L_{gm}L_f^{r1-1}h_2(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ L_{g1}L_f^{r1-1}h_m(x) & \cdots & L_{gm}L_f^{r1-1}h_m(x) \end{bmatrix}$$

E  $r$  indica el máximo grado relativo entre todas las entradas y salidas de la planta.

Se sugiere en [7] que se haga el pareamiento sobre los elementos de la matriz RGA no lineal cercanos a 1.

Ejemplo: Considere el siguiente sistema no lineal.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2^2 + u_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + 2x_1x_2 + u_2 \\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 \end{aligned}$$

La matriz de grado relativo es la siguiente con el pareamiento sugerido.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La correspondiente matriz característica de la planta se identifica, con el pareamiento recomendado.

Sin embargo la matriz  $R$  usa la expresión anterior.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2x_2 \\ 2(x_1 + x_2) & 2x_1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz RGA no lineal sería la siguiente.

$$\Lambda_{nl-RGA} = \frac{1}{x_1 - 2x_2(x_1 + x_2)} \begin{bmatrix} x_1 & -2x_2(x_1 + x_2) \\ -2x_2(x_1 + x_2) & x_1 \end{bmatrix}$$

Que recomienda el pareamiento diagonal para.

$$|x_1| > |2x_2(x_1 + x_2)|$$

Mientras

$$|x_1| < |2x_2(x_1 + x_2)|$$

que

para

El pareamiento apropiado entrada-salida es para elementos fuera de la diagonal. En otras palabras, el pareamiento podrá cambiar con el punto de operación.

### 1.4.5 RDGA (Relative Disturbance Gain Array)

Este factor fue introducido por [8] basado la función de transferencia de la planta y la carga. Se define como la relación de cambio en la variable manipulada bajo control perfecto y control para un solo lazo en estado estable, en presencia de una perturbación escalón  $L$ . En [9] Se introduce el RDGA con énfasis en la habilidad de hacer el rechazo a la perturbación usando un pareamiento específico. El RDGA se define así.

$$\beta = \frac{[vdm(G^{-1}(0)G_l(0))]}{[G^{-1}(0)vdm(G_l(0))]}$$

Donde  $G_l(0)$  es la matriz en estado estable del modelo de perturbación y el operador  $vdm(.)$  transforma el vector  $(.)$  en una matriz con los elementos organizados en la diagonal principal [9]. Las reglas de pareamiento RDGA son similares a las de RGA.

### 1.4.6 ÍNDICE RDG

Para probar si es posible atenuar o amplificar los efectos de una perturbación en alguna selección candidata de pareamiento. Si se tiene un modelo de la perturbación. El índice RDG (Relative Disturbance Array)  $\beta_i$  para una perturbación  $d$  se definió en [8] como la relación que mide el cambio en el esfuerzo de control que se requiere para contrarrestar  $d$  en el loop  $i$  cuando el resto de los lazos se abren y se cierran. Se asume que ya se seleccionó el pareamiento. Para el caso de un proceso TITO y con la siguiente ecuación de salida en estado estable.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_{D1} \\ h_{D2} \end{pmatrix} d$$

Las ganancias RDG son:

$$\beta_1 = \lambda_{11} \left( 1 - \frac{h_{D2}g_{12}}{h_{D1}g_{22}} \right) ; \quad \beta_2 = \lambda_{11} \left( 1 - \frac{h_{D1}g_{21}}{h_{D2}g_{11}} \right)$$

Donde  $\lambda_{11}$  es el elemento (1,1) de la matriz RGA. Valores de  $|\beta| < 1$  indican una iteración benéfica (los lazos cooperan) y valores mayores a 1 indican que cerrando un lazo se exageran los efectos sobre los otros lazos (a bajas frecuencias).

## 1.6 APORTES DE ESTA TESIS

*Primer Aporte de esta investigación:* Consiste en evitar el paradigma del control MIMO donde se intentan controlar y estabilizar todos los estados del sistema sin tener en cuenta en la etapa inicial del diseño sus no linealidades y acoplamientos dinámicos que se puedan desencadenar o emerger, al forzar la dinámica por parte del controlador para que se cumplan exigencias de desempeño y restricciones del proceso. Para conciliar con los posibles conflictos que acarrearán la estructura de control del tipo MIMO descrita, se asume una filosofía de trabajo más pragmática que perfeccionista, donde el interés final es la calidad del producto final que entrega la planta. Nos hemos inspirado en la dificultad de operar un reactor continuo de tanque agitado tipo CSTR [10]. Esta unidad debe producir materia prima para otros procesos, en este caso podría pensarse que el reactor considerado debe producir resina con una concentración específica. Mientras las dinámicas naturales de transferencia de masa y energía lo permitan. Lo que se va a proponer es

viable si se manipulan algunos estados del sistema para que las perturbaciones que afectan todo el reactor no vulneren la concentración. (Para respetar el rigor matemático es importante desarrollar las pruebas necesarias que permiten determinar a priori si un proceso de dinámicas múltiples se puede resolver) de la resina (Variable crítica) y el producto se considere aceptable.

*Segundo Aporte:* Se propone transformar un *control descentralizado MIMO-PID*, en una estructura de control no lineal realizando sobre las mínimas modificaciones con el fin de imponer una acción de control adicional proveniente de un sistema exógeno, que haciendo cambios en sus niveles de consigna o referencia logre hacer rechazo activo de las perturbaciones que logran impactar un lazo de control que se ha declarado previamente como **crítico**. Lo que acá se pretende es mover puntos de equilibrio a un nuevo punto de equilibrio donde la capacidad del control MIMO-PID recobre su efectividad en rechazar la perturbación, de esta forma se explotan los múltiples puntos de equilibrio que posiblemente presenta el proceso. El movimiento de estos puntos de equilibrio se hace de forma indirecta a través de movimientos de consigna que se aplican a los lazos de control que rodean el lazo crítico. Este aporte de consigna ingresa como una cantidad que se suma o se resta a la consigna nominal (bias). Luego pasara a ser consigna de algún lazo de control PID que hace parte del sistema MIMO inicial. Esta señal puede hacerse pasar atreves de un filtro con el fin de atenuar los efectos perturbadores de esta señal transitoria sobre el sistema y que podrían comprometer el desempeño. Además, se debe preservar la estabilidad del sistema mientras se ejecutan estas maniobras de rechazo de perturbación por parte de un sistema exógeno que se va a diseñar. Este enfoque de control es pragmático y con valor agregado que puede rescatar controladores MIMO-PID que gozan de buen prestigio y en la actualidad conforman muchos procesos.

*Tercer aporte:* Incorporar al control de procesos una estrategia de control basada en optimización colaborativa (de esto no hay información para procesos, ni productos industriales o patentes, es una técnica proveniente de aplicaciones en inteligencia artificial) que pueda encontrar un continuo de puntos de equilibrio donde el controlador MIMO-PID mejora su capacidad de hacer rechazo de la perturbación. Al apropiarnos del control colaborativo se propone una metodología para asimilar un problema de control de procesos optimo a un control de procesos *colaborativos* y así heredar para beneficio del control, el poder que tiene un algoritmo de estas características que presenta ventajas como: encontrar el mínimo global si existe, aporta rechazo a perturbaciones, tiene convergencia garantizada, no tiene dificultad en tratar problemas convexos y no convexos. Otra forma de expresar esta última ventaja es decir que trata muy bien los conflictos.

La cantidad de consigna a aplicar tiene como fin rechazar la perturbación en el lazo crítico. Por lo tanto, se debe mover el punto de equilibrio resultante inicial que fue desplazado por causa de la perturbación que impacta el sistema. Esos movimientos del punto de equilibrio (pequeños retoques) deben forzar una acción de control desde la consigna. Según la justificación presentada en capítulos anteriores, se sabe que un control tipo PID se puede transformar a uno no lineal, si se manipula de forma permanente o transitoria el nivel de consigna del mismo, de tal forma que esa cantidad de consigna a incorporar preserve la estabilidad del sistema y al mismo tiempo se cumpla con las restricciones impuestas.

Esta estrategia suele tener éxito en modo manual, cuando los operadores a nivel de planta corrigen la integridad de las variables críticas del proceso, retocando el nivel de consigna de algunos estados controlados manipulando las consignas en procesos descentralizados de tipo MIMO-PID. Este procedimiento tomado de la práctica inspiro la estrategia desarrollada en esta tesis. Como esta propuesta está orientada a resolver un problema MIMO solo actuando sobre consignas, para rechazar perturbaciones en un solo lazo de control declarado como crítico. El controlador debe modificar las consignas de  $(n - 1)$  controladores PI-PID involucrados en planta.

Esto significa que el controlador PI-PID (\*) que atiende la variable crítica no se le hacen modificaciones de consigna para forzar el estado ( $x^*$ ) crítico. Por lo tanto, la parte del sistema MIMO-PI-PID que fue modificada debe hacer el esfuerzo necesario para que las perturbaciones que impacta este último controlador sean rechazadas de la mejor forma posible. En capítulos posteriores demostramos que esto es posible porque las perturbaciones que no estén alineadas con el controlador PID (\*) no pueden ser corregidas por este y la forma de hacer efectivo su esfuerzo es desviarlas, para que se dirijan a otras salidas donde el nivel de error no afecte la calidad del producto final [1].

*Cuarto aporte.* Desde el inicio de esta investigación, se planteó la hipótesis de que la inestabilidad de un sistema dinámico acoplado se da en parte por intentar forzar un estado a un valor que puede tener significado matemático, pero no físico. En un proceso no siempre es posible pasar de un estado al otro forzando una acción que puede propagarse en múltiples direcciones (buenas y malas). Este concepto es simple en sistemas lineales, pero en sistemas no lineales acoplados puede ser una tarea muy compleja de resolver. El control no lineal actual padece la incertidumbre en el modelo y en el desempeño. No se puede lanzar una acción a la planta sin tener certeza que esa acción no estabilice el sistema y no degrade el desempeño al mismo tiempo. Para resolver el problema en la actualidad se hace control tratando de tener certificados de que esa acción no empeore el desempeño. El recurso que se emplea, es calcular regiones para los estados del sistema que son los puntos de equilibrio y las entradas admisibles medibles y no medibles (incierto) pero acotadas que no provocan inestabilidad en el sistema completo o en lazo cerrado. Esto es el reto actual del control y no es fácil de resolver de hecho es una cuestión abierta [2]. Es pues el conflicto en un sistema dinámico una causa de la inestabilidad. No tiene sentido que si un sistema de forma natural no sea conflictivo se torne conflictivo a causa de incorporarle un lazo de control. Por lo tanto, si se dispone de un modelo adecuado del sistema es fácil determinar si la acción que va a la planta la empeora el desempeño. Una forma de encontrar una acción de control que comprometa al mínimo la dinámica es verificar que esta no cause un conflicto. Esta respuesta se puede encontrar a través de una estrategia colaborativa que está dotada de un proceso de *consenso* donde la acción a lanzar no se recomienda si esta causará conflicto en el sistema. En el caso de que la incertidumbre sea inevitable se propone la construcción de observadores en los estados y la perturbación. Su construcción puede ser compleja sobre todo a la hora de probar su estabilidad.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Segur Skogestad, Ian Postlethwaite. Multivariable feedback control analysis and design. Wiley. feb. 2004.
- [2] P. Albertos and A.Sala. Multivariable Control Systems. Springer 2004.
- [3] S. Tarbouriecha, I. Queinneca & G. Garcia, Stability region enlargement through anti-windup strategy for linear systems with dynamics restricted actuator, international Journal of Systems Science, Volume 37, Issue 2, 2006.
- [4] Bristol E. H. (1966) On a new measure of interactions for multivariable process control, IEEE Transactions on automatic control AC-11: 133-134.
- [5] Glad, S.T.(1999) Extension of the RGA concept to nonlinear systems. Proceedings of the 5th European Control Conference, Karlsruhe. Germany.
- [6] Daoutidis, P. and Kravis, C.(1992) Structural evaluation of Control configuration for multivariable nonlinear processes. Chemical Engineering Science, 47, 1091-1107.
- [7] Moaveni, B. and Khaki Sedigh, A. (2007a) Further theoretical results on relative gain array for norm bounded uncertain systems. Industrial and Engineering Chemistry Research, 46, 8288-8289.
- [8] G. Stanley, M. Marino-Galarraga and T.J. McAvoy. Shortcut operability analysis. 1. the relative disturbance gain. Industr. And Eng. Chemistry Proc. Design and Development, 24:1181-1188,1985.
- [9] Chang, J.W. and Yu, C.C, (1992) Relative disturbance gain array. American Institute of Chemical Engineering Journal. 38(4). 521-534.
- [10] Luyben. Process Modelling-Simulation-and-Control-for-Chemical-Engineers, Ago 21, 2013 McGraw Hill.
- [11] Mietek A. Brdys, Piotr Tatjewski. Interactive Algorithms for Multilayer Optimizing Control. Imperial College Press, London, 2005.
- [12] F. Garelli, R.J. Mantz, H. De Battista. Limiting interactions in decentralized control of MIMO systems. Journal of Process Control 16 (2006) 473–483. Science direct.

## CAPÍTULO 2

# MEJORANDO EL DESEMPEÑO DE UN SISTEMA ALTERANDO LA CONSIGNA

### 2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan estrategias encaminadas a mejorar el desempeño de un sistema haciendo uso de la consigna o de desplazamientos óptimos de la consigna. Para efectos de notación es importante aclarar que la consigna puede ser de entrada o de salida. La notación para consignas de entrada es  $r(t)$  y para la salida como  $u(t)$ . Esta última es la que aplica el controlador a la planta. La primera es la que procesa el controlador a través de la señal de error  $e(t) = r(t) - y(t)$ . Si el desempeño en modo seguimiento es aceptable se consideran iguales. El control inferencial que se reporta en [1] es una propuesta que logra impactar zonas de un sistema controlado MIMO manipulando consignas de otras zonas. Se realizó una investigación de la cual se seleccionaron algunas propuestas en el sentido que aporten ideas para resolver el problema que trata esta tesis.

La consigna se entiende como una señal y un punto de entrada de bajo nivel como lo es para  $r(t)$  y dependiendo del tipo de controlador puede tener rangos (span) iguales a  $u(t)$ . Si el nivel es suficientemente bajo como suele ocurrir en equipos industriales de control (señales 4-20 mA o 0-10V). Fácilmente se puede alterar esta señal para forzar a un controlador o sistema a presentar un comportamiento deseado. Además, intervenir esas señales es fácil y económico ya que los operadores tienen acceso a esos puntos sean estos controladores microprocesados o sistemas basados en PLC (autómatas programables). Mover la consigna aporta a la solución del problema grados de libertad adicional que mejoran el desempeño de un sistema. Las mejores propuestas que fueron consultadas se presentan a continuación.

### 2.2 CONTROL INDIRECTO

Aunque este método no está pensado para cambios de consigna [1] se asemeja a los deseos de esta propuesta. Se desea controlar la salida  $z$  por medio de la salida  $y$ , la viabilidad de este método depende del modelo y la posibilidad de medir las perturbaciones. Se requiere un buen modelo que relacione  $z$  con  $y$ .

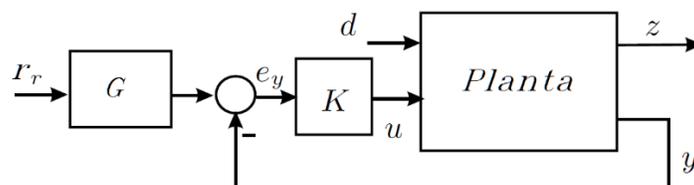


Figura 2.1. Esquema de control Indirecto

Asumiendo un sistema TITO (Dos entradas-Dos salidas) como se muestra en la figura 2.1. Para los bloques que se representan ( $G, K, P$ ), las ecuaciones en lazo abierto son las siguientes.

$$y = G_p u + G_{pd} d \quad (2.1)$$

$$z = G_{zp} u + G_{pzd} d \quad (2.2)$$

Donde:  $G_p$  parte de la función de la planta que amplifica  $u$ ,  $G_{pd}$  parte de la función de planta que amplifica  $d$ ,  $G_{zp}$  componente de la planta que da salida para  $z$  por efecto de  $u$ ,  $G_{pzd}$  componente de la que amplifica la perturbación que sale por  $z$ .

Si se desea un valor en  $z$ , llamémoslo  $z_r$ . La acción ideal de control es la siguiente.

$$u^* = G_{zp}^{-1} (z_r - G_{pzd} d) \quad (2.3)$$

Remplazando este valor en la ecuación anterior para  $y$  tenemos la salida ideal de interés.

$$y^* = G z_r + (G_{pd} - G G_{pzd}) d \quad (2.4)$$

Sin embargo, como  $d$  no se puede medir, el set point puede ser.

$$y_r = G z_r \quad (2.5)$$

Y

$$G_d^* = G_{pd} - G G_{pzd} \quad (2.6)$$

Puede ser suficientemente pequeño ( $G_d^*$ ). Puede suceder que el control no siga perfectamente  $y_r$ , debido a las perturbaciones, errores de modelación y errores estacionarios, ruido, etc. Se podría seleccionar una  $y$  que pueda hacer que el error.

$$e = y_r - y$$

No tenga un efecto importante sobre la salida  $z$ . En particular si la salida que se obtiene  $y$  es.

$$y = y_r - e$$

Según La ecuación (1),  $u$  vale lo siguiente.

$$u = G_p (G z_r - e - G_{pd} d) \quad (2.7)$$

Y remplazando en la ecuación (2), la desviación sobre la salida  $z$  es.

$$z - z_r = (G_{pzd} - G G_{pd}) d - G e = -G (e + G_{pd}^* d) \quad (2.8)$$

Así el control indirecto puede funcionar con el error del controlador en  $y$  pequeño y

$$G_{pz} G_p^{-1} G_{pd}^* = G G_{pd} - G_{pzd} \quad (2.9)$$

Y es lo suficientemente pequeño en rangos de frecuencia de interés.

## 2.3 MOVIMIENTOS DE CONSIGNA PARA MEJORAR LA RESPUESTA TRANSITORIA DE UN CONTROLADOR PID

Cuando se diseñan los parámetros de un controlador PID por medio del método de Ziegler Nichols [3] la respuesta transitoria del sistema a cambios de carga es relativamente aceptable pero la respuesta transitoria a cambios de consigna presenta sobre impulso. Para resolver esta situación se hacen dos cosas. La primera es que se puede desintonizar un poco las ganancias del controlador y la segunda es aplicar un filtro; el filtro aporta retrasos que pueden empeorar la respuesta del sistema si el tiempo muerto ponderado es elevado. La situación se hace conflictiva, es muy difícil mejorar de forma simultánea la respuesta transitoria en la entrada y en la salida.

Con la aplicación de una *consigna ponderada* [2] se logra un efecto muy interesante, y es que estas dos especificaciones se cumplan simultáneamente. El problema es que este método no funciona bien en todos los casos. Pero suele funcionar bien en gran parte de los procesos industriales. La limitación más importante se da en procesos con tiempo muerto normalizado elevado. Para aplicar el método se debe hacer una modificación al algoritmo de control PID de la siguiente forma.

$$u = k_c \left[ \beta (y_r - y) + \frac{1}{T_i} \int (y_r - y) dt - T_d \frac{dy_f}{dt} \right] * \left( \frac{T_d}{N_f} \right) * \frac{dy_f}{dt}$$

Donde  $\beta$  es el factor de ponderación de consigna,  $N_f$  es un factor de filtraje, se escoge entre 3~10. La respuesta a los cambios de carga son independientes del factor de ponderación.

Luego de realizar un procedimiento de sintonía por el método de la ganancia crítica según Ziegler Nichols, se obtienen los parámetros de ganancia crítica  $k_u$  y periodo crítico  $t_u$ . La fórmula del controlador PID presenta la siguiente modificación.

$$k_c = 0.6k_u$$

$$T_i = (-0.22\theta + 0.53)t_u$$

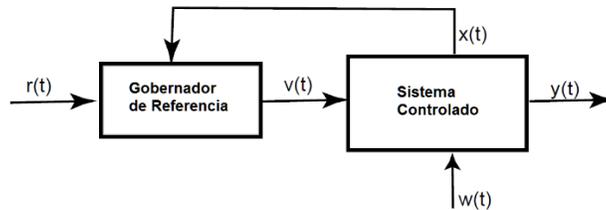
$$T_d = \frac{T_i}{4}$$

Siendo  $\theta$  el tiempo muerto normalizado que se define como la relación del tiempo muerto aparente  $L$ , contra la mayor constante de tiempo o el retraso más largo  $T$ . El método recomienda que durante la respuesta transitoria se conecten de forma paulatina formulas modificadas del PID anterior, con las constantes modificadas que se obtienen por pruebas experimentales. En caso de sistemas con tiempo muerto se proponen estrategias para compensar el retraso del sistema alterando el nivel de consigna y diseñando un pre filtro a la entrada del controlador [4].

## 2.4 GOBERNADORES DE REFERENCIA

Un gobernador de referencia es un exosistema que tiene la misión de impedir que un sistema controlado previamente instalado viole sus restricciones sobre todo en condiciones transitorias. Técnicas como el control predictivo reportan soluciones con éxito [5, 6, 7, 8, 9]. Estos equipos no son controles, solo alteran consignas permanente o transitoriamente para evitar problemas de desempeño por violación de la restricción.

En la figura 2.2. Se muestra la forma como se instala un gobernador de referencia, este debe interconectarse a la entrada de la consigna  $r(t)$ , por lo tanto es el gobernador el encargado de manipular ahora la consigna por encima del operador humano.



**Figura 2.2. Gobernador de Referencia**

Esta técnica por ser de tipo adelanto requiere muy buena información del modelo controlado, información que puede ser difícil de tener ya que muchos procesos presentan incertidumbre, por lo tanto, lo normal es que requieran un observador de estado [10] y las garantías o certificados de estabilidad en sistemas no lineales se basan en la búsqueda de conjuntos invariantes y conjuntos admisibles [11] en el control y la consigna que son complejos de calcular. Se ha empleado con éxito en procesos químicos.

**Definición:** *Un conjunto  $S \subseteq \mathfrak{R}^n$  es invaeiante si  $\forall t_1, x(t_1) \in S \Rightarrow x(t_2) \in S \forall t_2 > t_1$ .*

Es fundamental el uso de la invariancia en los conjuntos con el fin de asegurar el cumplimiento de la restricción en tiempo infinito. Se sabe que un conjunto de nivel extraído de una función de Lyapunov es un conjunto invariante. Un conjunto de nivel se define mediante las funciones de Lyapunov de la siguiente manera: Sea  $V(x): \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  una función candidata de Lyapunov para el sistema dinámico, donde  $V(x_e) = 0$ , y el conjunto de nivel se representa por  $V_\gamma$ . Por lo tanto  $V_\gamma = \{x \in \mathfrak{R}^n | V(x) \leq \gamma\}$ . Dado que los conjuntos de nivel no pueden lograr el cumplimiento de las restricciones, debemos considerar la siguiente situación:

$$V_\gamma \subseteq CX := \{x \in \mathfrak{R}^n | Co(x, w_e) \in Z\}$$

El conjunto de nivel  $V_\gamma$  tiene propiedades de invariancia, por lo tanto puede cumplir con las restricciones en tiempo infinito. En virtud de la inclusión anterior, se desprende de la definición anterior que el conjunto de nivel  $V_\gamma$  incluye el estado inicial  $x_o$  a  $x_e$  y cumple con la restricción  $z_0(t) \in Z \forall t \in \mathbb{Z}^+$ . La figura 2.3. Ilustra la situación a través de un ejemplo planar, donde el conjunto de nivel se denota por  $V_{\gamma_o}^0$ . El gobernador de referencia no necesita alterar el nivel de referencia  $w_e$ , en el primer caso, por lo tanto  $r(t) = w_e \forall t$ , como resultado cualquier violación de la restricción anterior no se da en tiempo infinito. Aparece un problema si el estado inicial no está en el conjunto de nivel  $V_{\gamma_o}^0$  debido a que la región de  $CX$  es pequeña y estrecha. Si ocurre un transitorio y el conjunto de nivel actual no cumple con la restricción, hay que transferir el estado moviendo la consigna en medio de conjuntos de nivel intermedios hasta alcanzar el estado final. Como muestra la figura 2.4.

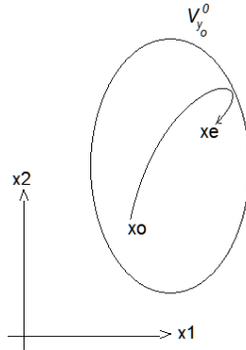


Figura 2.3. Conjunto de nivel que satisface una restricción

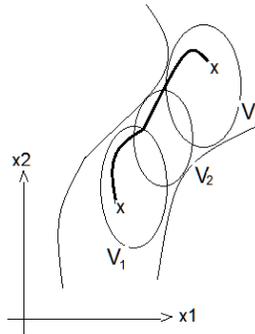


Figura 2.4. Conmutando conjuntos de nivel

Por lo tanto, los conjuntos de nivel construidos deben cumplir con la siguiente propiedad.

$$\bigcup_{i=1} V_{\gamma_i}^i \subseteq CX$$

Bajo la inclusión anterior, el estado se puede mover del estado inicial al estado final, sin salirse de los conjuntos de nivel conectados. La dificultad más grande de estos métodos es la construcción de los conjuntos invariantes, afortunadamente se ha trabajado bastante en eso y existen técnicas para resolver o aproximar estas funciones [12, 13].

## 2.5 MOVIMIENTOS DE CONSIGNA PARA RESOLVER PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Esta estrategia novedosa consiste en transformar un problema de optimización no lineal en un problema de movimientos de consigna [14], sin usar complejos programas en línea. El método exige disponer de grados de libertad adicionales en el proceso, y de una serie de variables candidatas con propiedades prometedoras que deben ser encontradas y se discuten más adelante. Sea  $u$  los grados de libertad o las variables a ser usadas para optimización por realimentación, y  $d$  una perturbación que no se puede controlar, el criterio a ser minimizado es:

$$\min J(u, d)$$

$u$

Por simplicidad se asume que la solución no es restringida y que todas las direcciones de  $u$  son alcanzables y que la función  $J$  es continuamente diferenciable de hasta al menos el segundo orden. Cuando la perturbación ( $d$ ) cambia se desea ajustar las entradas manipuladas ( $u$ ) de forma que el criterio de minimización se cumpla o se mantenga al mínimo. La primera condición necesaria en orden, es escoger el valor de  $u$  que de gradiente cero. De esta forma se dice que se ha encontrado un valor óptimo  $u_o$  para un valor dado de  $d_o$  entonces:

$$\left. \frac{\partial J}{\partial u} \right|_{\substack{u = u_o \\ d = d_o}} = 0$$

Se desarrolla una expansión en series de Taylor para este gradiente alrededor del óptimo  $u_o$  para un valor dado de  $d_o$  (denotado por el punto de operación):

$$\left. \frac{\partial}{\partial u} J(u, d) \right|_0 \approx \left. \frac{\partial J}{\partial u} \right|_0 + \left. \frac{\partial^2 J}{\partial u^2} \right|_0 \Delta u + \left. \frac{\partial^2}{\partial u \partial d} \right|_0 \Delta d$$

El incremento óptimo en  $u$  cuando  $d$  es cambiado, se puede encontrar por el hecho de mantener el gradiente a cero y la ecuación anterior se transforma en la siguiente:

$$\Delta u_{opt} = \left( - \left[ \frac{\partial^2 J}{\partial u^2} \right]^{-1} \frac{\partial^2 J}{\partial u \partial d} \right) \Big|_0 \Delta d$$

$\Delta u_{opt}$  Expresa el cambio requerido en  $u$  de modo que se pueda hacer seguimiento del valor óptimo cuando  $d$  cambia por un valor  $\Delta d$ . Se puede ver claramente la matriz Hesiana dentro de los corchetes cuadrados. Si la solución de  $U_o$  da un mínimo de  $J$ , la matriz hesiana debe ser positiva definida y por lo tanto su inversa puede existir, luego se hace un movimiento asumiendo que se puede medir.

$$y = h(u, d)$$

La idea de la optimización por realimentación es encontrar alguna medida de  $y$  que caracterice el óptimo de forma que cuando la medida de  $y$ , permanezca constante por manipular algún grado de libertad  $u$ , El punto de operación resultante puede seguir el valor óptimo independiente de las perturbaciones  $d$ . Luego expandimos a  $h$  en series de Taylor de primer orden y se tiene que:

$$\Delta y = \frac{\partial h}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial h}{\partial d} \Delta d = G \Delta u + G \Delta d$$

Idealmente deseamos un esquema de realimentación que haga el movimiento  $\Delta y = \Delta u_{opt}$  manteniendo  $\Delta y = 0$ , cuando se hace este movimiento óptimo sobre la ecuación anterior esperando que  $\Delta y = 0$ , entonces la ecuación siguiente expresa la propiedad ideal de  $h(u, d)$  cuando  $y$  es la variable ideal de realimentación:

$$\frac{\partial h}{\partial u} \left( - \left[ \frac{\partial^2 J}{\partial u^2} \right]^{-1} \frac{\partial^2 J}{\partial u \partial d} \right) + \frac{\partial h}{\partial d} = 0$$

Así ahora la búsqueda se reduce a encontrar alguna función de medida de la forma  $h(u, d)$  con las propiedades que se requieren. Ahora si  $y$  es una transformación lineal del gradiente de  $J$ . Entonces la condición en la ecuación anterior se cumple.

$$y = h(u, d) = c_1 \frac{\partial}{\partial u} J(u, d) + c_0$$

La conclusión es que si se mide el gradiente de la función objetivo bajo la influencia de la perturbación  $d$  se puede encontrar una solución óptima ajustando  $u$  en la dirección que mantenga a  $y$  constante, de esta forma el valor ajustado de  $u$  es óptimo. Esto realmente no es sorprendente mantener el gradiente cercano a cero, ya que en esa condición se da en un estado estacionario por definición. Se puede hacer uso de un controlador PID para lograr esto.

El paso siguiente es seleccionar la función candidata o las variables candidatas para lograrlo. Se propone un procedimiento de selección de variables candidatas para realimentación de un conjunto de alternativas y se basan sobre la minimización de las pérdidas del peor caso cuando

$$u \neq u_{opt}$$

$$\text{Pérdidas del peor caso : } \Phi \triangleq \max_{d \in D} |J(u, d) - J(u_{opt}, d)|$$

Donde  $D$  es el conjunto de posibles perturbaciones. Podemos además incluir cambios en el punto de operación e incertidumbres del modelo. Si se computa  $u$  por un controlador de realimentación que emplea la medida  $y$ , se puede expresar en términos de las matrices medidas en estado estable  $G$  y  $Gd$ .

Así para un conjunto de las matrices  $G$  y  $Gd$ , representan las pérdidas de peor caso, podemos escoger una que minimice la función  $\Phi$  anterior. Además, podemos poner la restricción de que tantas pérdidas de peor caso podemos aceptar, si esto no se logra, ninguna de las funciones candidatas cumple y debe ser aplicado otro método de optimización. Podemos dar otra explicación a lo anterior por medio de un ejemplo. Suponga un proceso químico que se debe optimizar, para lograrlo se seleccionaron dos variables, que se acoplan a través de la siguiente función.

$$V = J(R_l, R_v)$$

La superficie que representa las soluciones de la ecuación anterior se muestra en la figura 2.5. Que tiene forma de barco y el valor inferior es el valor mínimo.

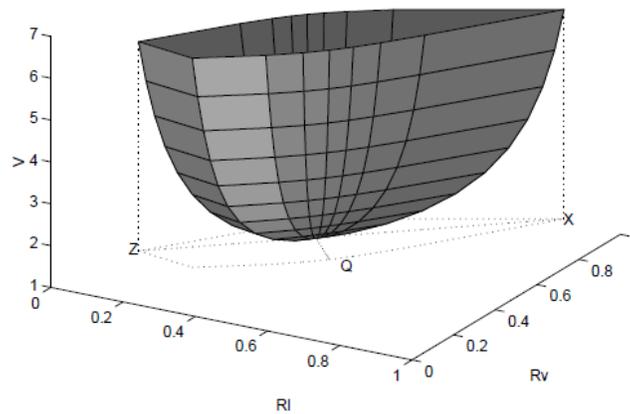


Figura 2.5. Solución óptima para  $V=J(R_I, R_v)$

La figura 2.6. Ilustra la mejor dirección para mantener un valor óptimo, si se mira con atención se ve que una dirección entre los puntos X y Z, es mucho mejor que seleccionar una dirección entre los puntos P y Q. Una perturbación que logre mover el punto de operación en la dirección P-Q, logra un cambio grande en V.

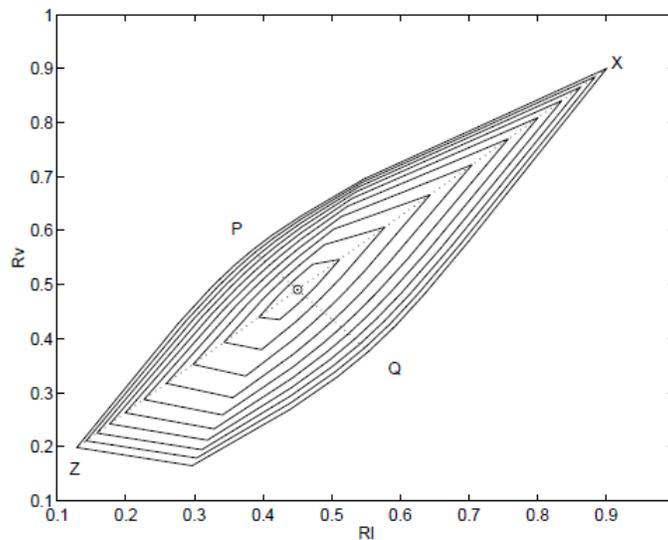


Figura 2.6. Direcciones óptimas para los grados de libertad. Superficie anterior vista por debajo.

## 2.6 MOVIMIENTOS DE CONSIGNA PARA HACER DESACOPLE EN SISTEMAS 2X2.

Es una estrategia que se construye sobre el control deslizante [15]. Su objetivo es evitar que las perturbaciones de un lazo alteren la dinámica de otro lazo. La aplicación de la consigna no es continua solo se hace si se detecta que una señal que se mide supera un umbral. Desde los modos deslizantes se espera que la propuesta sea estable y robusta. El autor admite que una propuesta de orden tres es mucho más difícil de resolver.

El primer problema que trata [15], es la preservación del desacoplamiento dinámico completo o diagonal de un sistema lineal MIMO en presencia de restricciones en la entrada a la planta. Si bien existen en la literatura diversos métodos para obtener controladores MIMO centralizados que desacoplen diagonalmente sistemas lineales sin restricciones, la saturación o activación de alguna restricción en los actuadores provoca entre otros efectos indeseados, la pérdida del desacoplamiento, algo que está estrechamente ligado al cambio de direcciones.

## 2.7 MOVIMIENTOS DE CONSIGNA PARA ESTABILIZAR SISTEMAS CON INCERTIDUMBRE PARAMÉTRICA.

Toda la propuesta está construida sobre el análisis según las LMIs [16] y el cálculo de la consigna se basa en encontrar la sensibilidad de los puntos de equilibrio que por un método de optimización se encuentran las consignas que logran dicho objetivo sin que el sistema pierda su estabilidad. Se asume una clase especial de sistemas que presentan una combinación de una parte lineal con una no lineal que representa la variación paramétrica.

$$\dot{x} = Ax + h(x) + Bu$$

Donde  $h(x)$  es una función incierta pero acotada por una desigualdad cuadrática.

$$h^T h \leq \alpha^2 x^T H^T H x$$

Y  $\alpha > 0$  es un parámetro escalar y  $H$  es una matriz constante. La expresión anterior se puede escribir de forma más compacta.

$$\begin{bmatrix} x \\ h \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\alpha^2 H^T H & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ h \end{bmatrix} \leq 0$$

Se asume una ley de control estática.  $u = Kx$

Ahora en lazo cerrado.  $\dot{x} = \hat{A}x + h(x)$

Donde.  $\hat{A} = A + BK$

La estabilidad del sistema anterior se establece usando La siguiente función de Lyapunov.

$$V(x) = x^T P x$$

La estabilidad se da cuando las derivadas de  $V(x)$  son negativas en la dirección de la solución del sistema en lazo cerrado. Esto se expresa por un par de desigualdades.

$$P > 0 \text{ y } \begin{bmatrix} x \\ h \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{A}^T P + P \hat{A} & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ h \end{bmatrix} \leq 0$$

Definiendo  $Y = \tau P^{-1}$ , donde  $\tau$  es un escalar positivo,  $L = KY$  y  $\gamma = \frac{1}{\alpha^2}$ . El diseño del control se formula como un problema de LMI en  $Y, L$ . Donde se minimiza  $\gamma$  sujeto a  $Y > 0$  y la desigualdad siguiente.

$$\begin{bmatrix} AY + YA^T + BL + L^T B^T & I & YH^T \\ I & -I & 0 \\ HY & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

De la solución de este problema se encuentran las ganancias del controlador que garantizan la estabilidad del sistema.

Un resultado similar se obtiene para sistemas con incertidumbre paramétrica.

$$\dot{x} = Ax + h(x, p) + Bu$$

$$u = r + K(x - x^r)$$

Donde  $r$  y  $x^r$  son las referencias de del usuario y la nominal

Se asume que el equilibrio del sistema  $x^e(p)$  en lazo cerrado no está confinado al origen.

Una representación apropiada para esta estructura matemática requiere que se introduzca un nuevo vector de estado  $y$  que es la desviación del estado  $x$  del punto de equilibrio  $x^e(p)$

$$y \equiv x - x^e(p)$$

El equilibrio debe satisfacer  $Ax^e(p) + hx^e(p), p + B[r - K(x^e(p) - x^r)] = 0$

Con el cambio de variables propuesto se llega a,

$$\dot{y} = (A + BK)y + g(x^e(p), p, y)$$

Con  $g(x^e(p), p, y) \equiv h(g(x^e(p) + y, p) - h(x^e(p), p)$

Se asume que la variación del parámetro  $p$  esta limitado a una bola  $\Omega$  centrada alrededor del punto de equilibrio nominal  $p^*$ .

$$\Omega = \{p \in R^l \mid \|p - p^*\| \leq \rho\}$$

Se asume que  $x^e(p)$  es una función continua de  $p \forall p \in \Omega$ , y  $x^e(p)$  se denota por  $x^*$

Y además que la función  $g(x^e(p), p, y)$  se puede acotar por la siguiente desigualdad.

$$g^T g \leq y^T H^T(x^e(p), p) H(x^e(p), p) y$$

Tomando en cuenta las suposiciones anteriores, se admite la existencia de una constante  $\mu > 0$  de tal forma que.

$$g^T g \leq y^T H^T(x^e(p), p) H(x^e(p), p) y \leq \mu y^T H(x^* p^*)^T H(x^* p^*) y$$

Si la matriz  $H(x^e(p), p)$  es diagonal se puede encontrar un estimativo de la región  $\Omega$

Para encontrar la referencia es necesario que la matriz  $\partial x^e(p)/\partial p$  tenga el acotamiento apropiado. Se debe proponer un estrategia que al seleccionar una referencia  $r$  se mimimice  $\|H(x^* p^*)\|$  mientras se imponen ciertas restricciones sobre el punto de equilibrio. Sabemos que el punto de equilibrio |representa las soluciones de.

$$Ax + h(x, p) + Br + BK(x - x^*) = 0$$

De la expresión anterior es claro que  $x^e(p)$  implícitamente depende de la escogencia de la referencia  $r$ . Ahora diferenciando la expresión anterior con respecto a  $p$  tenemos una expresión para la sensibilidad del punto de equilibrio.

$$\xi(p, K) \equiv \frac{\partial x^e(p)}{\partial p} = - \left[ (A + BK) + \frac{\partial h}{\partial x} \right]^{-1} \frac{\partial h}{\partial p}$$

De forma ideal se puede determinar un valor para  $r$  que minimice  $\xi(p, K)$ . La conclusión de esta investigación es muy interesante, descubre que, si se hace una escogencia óptima de la consigna, La región de robustez de sistema se ensancha bastante. Esta observación es muy importante para el propósito de esta tesis. Aunque analíticamente se acepta que la demostración matemática es compleja, los planteamientos teóricos y los resultados de simulación así lo indican.

### **CONCLUSIONES:**

Luego de hacer un proceso de apropiación de las técnicas de control basadas en consignas que se presentaron en este capítulo, resultado de una extensa revisión donde se descartaron bastantes propuestas sobre todo repetidas o irrelevantes a lo que esta investigación propone se concluye lo siguiente:

- Los movimientos de consigna ensanchan la región de robustez del sistema.
- Los movimientos de consigna facilitan la optimización de un sistema.
- Los movimientos de consigna aportan grados de libertad al control.
- Los movimientos de consigna óptimos permiten que la restricción no se viole.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Albertos P, Sala A (2004) Multivariable control systems: An engineering approach. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg
- [2] Chang-Chieh Hang, Senior Member, ZEEE, and Lisheng Cao. Improvement of Transient Response by Means of Variable Set Point Weighting. IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS, VOL. 43, NO.
- [3] J. G. Ziegler and Nichols, "Optimum settings for automatic controllers," *Trans, ASME*, vol. 64, 759-768, 1942.
- [4] T.H. Lee, K.K. Tan and K.Z. Tang. Deadtime Compensation Via Setpoint Variation. Proceedings of the 7th Asian Control Conference, Hong Kong, China, August 27-29, 2009.
- [5] Kiminao Kogiso, Masaru Noda, and Hirokazu Nishitani. Constrained Control for Chemical Processes Using Reference Governor. 16th European Symposium on Computer Aided Process Engineering. and 9th International Symposium on Process Systems Engineering. Elsevier. 2006.
- [6] J.L. Guzman a, T. Alamo b, M. Berenguel a, S. Dormido c, E.F. Camacho b. A robust constrained reference governor approach using linear matrix inequalities *Journal of Process Control*, 19 (2009) 773–784
- [7] Francesco Borelli, Paolo Falcone, Jaroslav Pekar, Greg Stewart. Reference governor for constrained piecewise affine systems, *Journal of Process Control*. 19 (2009) 1229.1237. Science Direct.
- [8] A. Bemporad. Reference governor for constrained nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(3):415-419, 1998.
- [9] E. G Gilbert and I. Kolmanovsky. Nonlinear tracking control in the presence of state and control constraints: A generalized reference governor. *Automatica*, 38(12):2063-2073, 2002.
- [10] S. Bonnabie and R Roucho. On invariant observers. In T. Meurer, K. Graichen, and E. D. Gilles, editors, *Control and Observer Design for Nonlinear Finite and Infinite Dimensional Systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences. 322, pages 53-65. Springer, 2005.
- [11] Elmer G. Gilbert, and Kok Tin Tan. Linear Systems with State and Control Constraints: The Theory and Application of Maximal Output Admissible Sets. *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, VOL. 36. NO. 9. SEP 1991.
- [12] A. Papachristodoulou and S. Prajna. On the construction of Lyapunov functions using the sum of squares decomposition. In *Proceedings of the 41th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3482-3487, Las Vegas, 2002.
- [13] O. Hashicho. A novel LMI-based optimization algorithm for the guaranteed estimation of the domain of attraction using rational Lyapunov functions. *Journal of the Franklin Institute* 344 (2007) 535 – 552 Science Direct.
- [14] Ivar J. Halvorsen and Sigurd Skogestad. Indirect on-line optimization through setpoint control. *AIChE 1997 annual Meeting. Computers, Process Control and Systems Engineering*. Nov 19, 1997.
- [15] F. Garelli, R. J. Mantz, H. De Battista. Limiting interactions in decentralized control of MIMO systems. *Journal of Process Control*. 16 (2006) 473 – 483. Science Direct.
- [16] A. I. Zecevic and D. D. Siljak. Stabilization of Nonlinear Systems With Moving Equilibria. *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, VOL. 48, NO. 6, JUNE 2003

## CAPÍTULO 3

# SINTONÍA DE CONTROLADORES PID MULTIVARIABLES

El controlador PID hace parte de esta propuesta, la razón de incorporarlo se justifica por los siguientes criterios. Este controlador goza de una gran popularidad en el control de procesos y vigencia que data de casi 70 años. Está presente en más del 80% de los procesos industriales, es simple relativamente fácil de sintonizar. Se han hecho muchos estudios encaminados a mejorar su desempeño y a aportar nuevas formas de sintonizarlo, así como modificaciones que mejoren su característica restringida. Además, el operador puede ser renuente a permitir que una estrategia de control lo remplace por costumbre y desconfianza. Con el fin de facilitar la aceptación de esta propuesta que está encaminada a mejorar el desempeño de un proceso tipo MIMO controlado por una serie de controladores descentralizados y centralizados de tipo PID, que se van incorporando paulatinamente conforme se detectan perturbaciones en planta y se va conformando una estructura de control de procesos que crece de forma desordenada compleja e irracional y difícil de diagnosticar. El método de sintonizar controladores PID de tipo SISO es muy diferente de los controladores MIMO-PID. En este tema son pocos los métodos que permiten lograr diseños con estabilidad y robustez garantizada. Luego de hacer un estudio extenso sobre sintonía de controladores MIMO-PID se descubre que uno de los mejores métodos de sintonía a la fecha se basa en los trabajos de [29] que propone un método robusto basado en norma  $H_\infty, H_2$  con estabilidad garantizada y es capaz de incorporar al diseño restricciones de entrada y de salida, así como imponer desempeño en la respuesta transitoria con tiempos de llegada y sobre impulso definidos.

### 3.1 EL CONTROLADOR PID

En general cuando se habla de controladores PID, cada controlador tiene una componente proporcional, una integral y una derivativa, pero su estructura puede variar. El controlador PID presenta una funcionalidad de tres términos y a ambas respuestas sean estas transitorias como de estado estable. Presenta una estructura muy simple y ha demostrado eficacia en muchos problemas de control del mundo real. Un controlador PID se puede considerar como una forma extrema de un compensador de adelanto-atraso de fase con un polo en el origen y la otra en el infinito. Del mismo modo, sus variantes, los controladores PI y el PD, también pueden considerarse como formas extremas de compensadores de atraso de fase y de adelanto de fase, respectivamente. Un controlador estándar PID también es conocido como el controlador de "tres términos", cuya función de transferencia generalmente está escrita en la "forma paralela", donde figuran tres ganancias; la ganancia proporcional, la ganancia integral, y la ganancia derivativa. En el caso de expresarse de la forma serie figuran ahora, la constante de tiempo integral, y la constante de tiempo derivada. Cada parámetro del controlador aporta una propiedad a la respuesta completa. La ganancia proporcional produce un efecto generalizado, pero al tomar valores elevados hace el sistema inestable. No logra nunca hacer cero el error en estado estable del sistema. La acción integral logra hacer cero el error, pero debe ser aplicada con cuidado pues tiende a inestabilizar el lazo cerrado (en el caso discreto se asimila a una suma en el tiempo). La acción derivativa tiende a compensar los cambios rápidos de la señal de error (en el caso discreto se asimila a una resta en el tiempo).

En las últimas décadas, se ha invertido un enorme esfuerzo en el diseño de estos controladores que comienzan por el conocido invento del control PID en 1910 (en gran parte a ser el dueño del Piloto automático), y más tarde con el método de [23], luego aparecen métodos de sintonización sencillas en [34], la popularidad del control PID ha crecido enormemente. Con los avances en la tecnología digital, la ciencia del control automático ofrece ahora un amplio espectro de opciones para esquemas de control. Sin embargo, más de 90% de los controladores industriales aún se implementan en torno a los algoritmos PID, particularmente en los niveles más bajos [5], como no hay otros controladores que coinciden con la simplicidad, funcionalidad clara, aplicabilidad y facilidad de uso ofrecida por el controlador PID y su método de Ziegler y Nichols para sistemas SISO [23]. Centenares de trabajos de investigación, un número de tesis de PhD y libros han escrito sobre este tema [47]. A pesar de estos avances y mejoras, el diseño de controladores PID, especialmente para sistemas MIMO (Multi Input-Multi Output), sigue siendo un desafío para los ingenieros e investigadores [47].

Muchos métodos fueron desarrollados y mejorado como:

- Método de los polos dominantes [151].
- Mayor módulo de registro (BLT) [13].
- Método por el dominio de frecuencia [125].
- Método de dRI [53].

Y muchos otros métodos muy interesantes utilizando LMI iterativas [25, 31].

## 3.2 MÉTODOS DE SINTONÍA POR MEDIO DE LMIS INTERACTIVAS.

Antes de iniciar la descripción del método que sistemáticamente se probará sobre un control PID MIMO que actúa sobre un reactor continuo de tanque agitado CSTR consideramos que es pertinente hacer una introducción al tema de las desigualdades lineales matriciales. [24][25][26][27]

### Desigualdades Lineales matriciales

#### OPTIMIZACIÓN CONVEXA

La optimización convexa es la búsqueda de la mejor decisión dentro de un conjunto de posibles candidatos que cumplen una condición. El mejor candidato es aquel con el que se consigue el índice de desempeño óptimo. Además, se caracteriza por la existencia y un único óptimo global. Las **LMIs** y son funciones convexas y se resuelven normalmente por métodos conocidos como de puntos interiores.

### Desigualdades Lineales Matriciales (LMIs)

Una desigualdad lineal matricial es una restricción convexa de la forma

$$F(x) = F^0 + xF^1 + \dots + xF^n. \quad F^n > 0 \quad (3.1)$$

$$F(x) = F^0 + \sum x_i * F_i > 0 \quad (3.2)$$

Donde  $x = (x_1, \dots, x_n)$  es un vector de escalares desconocidos (vector de variables)

$F_i$  Son matrices simétricas reales conocidas para  $0 \leq i \leq n$ . El *cero* indica que todos los valores propios de  $F(x)$  son mayores que cero. Las LMIs permiten fácilmente ubicar los polos del sistema en alguna región del espacio, permitiendo modificar las características del sistema en lazo cerrado. La consecuencia importante de la convexidad es que a pesar de que la **LMI** no tiene una solución analítica en general, esta puede ser resuelta numéricamente con la garantía de encontrar una solución si existe alguna. Las desigualdades lineales matriciales LMI, son una de las más efectivas y eficientes herramientas en el diseño de controladores [27].

Entre estos métodos, el método interactivo (ILMI) fue propuesto por Cao et al [25] y luego empleado para sintonizar controladores PID [24,27]. En este contexto una nueva variable matricial es introducida de modo que la condición de estabilidad involucrada se hace conservativa (suficiente pero lejos de ser necesaria): El algoritmo interactivo en [27] encuentra una secuencia de variables adicionales de tal forma que la condición suficiente está cerca de una necesaria y suficiente. Ideas similares es usada en el método LMI en [44]. En ambos trabajos, las variables matriciales adicionales son actualizadas en cada paso de la iteración usando las variables de decisión

### 3.2.1 DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

El método se inicia encapsulando la representación de un controlador PID sobre una representación "static Output feedback" (SOF) Esta representación juega un papel muy importante en teoría de control y sus aplicaciones. Recientemente ha atraído bastante atención [32, 33, 40, 41, 42, 43]

#### Transformación del controlador PID a un controlador SOF

Considere el siguiente sistema invariante

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (3.3)$$

Con el siguiente controlador

$$u = F_1 y + F_2 \int_0^t y dt + F_3 \frac{dy}{dt} \quad (3.4)$$

Donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es la variable de estado,  $u(t) \in \mathbb{R}^L$  son las entradas de control,  $y(t) \in \mathbb{R}^m$  son las salidas,  $A, B, C$  son matrices con dimensiones apropiadas, y  $F_1, F_2, F_3 \in \mathbb{R}^{l \times m}$  son matrices que deben ser diseñadas, se asume que el sistema (3,3) tiene una realización mínima en variables de estado de alguna matriz de transferencia  $H(s)$ . El controlador (3,4) es un control

PID ideal. Sea  $z_1 = x, z_2 = \int_0^t y dt$ . Denotando  $z = [z_1^T, z_2^T]^T$ . La variable  $z$  puede ser vista como el vector de estado de un nuevo sistema, cuya dinámica está gobernada por.

$$\dot{z}_1 = \dot{x} = Az_1 + Bu, \quad \dot{z}_2 = y = Cz_1.$$

Entonces.

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

Combinando la ecuación (3.3) y la definición de  $z$  da que.

$$y = Cz_1 = [C \ 0]z, \quad \int_0^t y dt = z_2 = [0 \ 1]z,$$

$$\frac{dy}{dt} = C\dot{x} = CAx + CBu = [CA \ 0]z + CBu$$

Denotando:  $\bar{C}_1 := [C \ 0]$ ,  $\bar{C}_2 := [0 \ 1]$ ,  $\bar{C}_3 := [CA \ 0]$ , y  $\bar{y}_i := \bar{C}_i z$   $i = 1,2,3$ , tenemos que.

$$u = F_1\bar{y}_1 + F_2\bar{y}_2 + F_3\bar{y}_3 + F_3 CBu \quad (3.5)$$

Suponga que la matriz  $I = F_3CB$  es invertible. Entonces

$$y = [\bar{y}_1^T \ \bar{y}_2^T \ \bar{y}_3^T]^T, \quad \bar{C} = [\bar{C}_1^T \ \bar{C}_2^T \ \bar{C}_3^T]^T$$

$$\bar{F} = [\bar{F}_1 \ \bar{F}_2 \ \bar{F}_3]$$

$$= [(I - F_3CB)^{-1}F_1 \ (I - F_3CB)^{-1}F_2 \ (I - F_3CB)^{-1}F_3]$$

Así el problema de diseño del controlador PID se reduce al diseño de un Sistema SOF para el siguiente Sistema.

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u, \quad \bar{y} = \bar{C}z, \quad u = \bar{F}\bar{y} \quad (3.6)$$

Una vez se obtenga la matriz compuesta  $\bar{F} = [\bar{F}_1 \ \bar{F}_2 \ \bar{F}_3]$ , las ganancias del controlador PID se extraen de las siguientes expresiones.

$$F_3 = \bar{F}_3(I + CB\bar{F}_3)^{-1}, \quad F_2 = (I - F_3CB)\bar{F}_2, \quad F_1 = (I - F_3CB)\bar{F}_1, \quad (3.7)$$

La inversión de la matriz  $I + CB\bar{F}_3$  esta garantizada por la siguiente proposición.

**Proposición 3.1.** *La matriz  $I - F_3CB$  es invertible si y solo si la matriz  $I + CB\bar{F}_3$  es invertible, donde  $F_3$  y  $\bar{F}_3$  están relacionadas la una a la otra por.*

$$\bar{F}_3 = (I - F_3CB)^{-1}F_3 \quad F_3 = \bar{F}_3(I + CB\bar{F}_3)^{-1}$$

Prueba: Suponemos que la matriz  $I - F_3CB$  es invertible. Luego tenemos que

$$\Delta := \begin{bmatrix} I & -CB \\ F_3 & I - F_3CB \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & -CB(I - F_3CB)^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I + CB\bar{F}_3 & 0 \\ 0 & I - F_3CB \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} I & 0 \\ (I - F_3 CB)^{-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

De otro lado tenemos que.

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -F_3 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -CB \\ F_3 & I - F_3 CB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -CB \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Que implica que la matriz  $\Delta$  es invertible. De la ecuación (3.8) necesariamente tenemos que la matriz  $I + CB\bar{F}_3$  es además invertible. La parte contraria se prueba de forma similar.

### 3.2.2 CONTROL PID BIEN PLANTEADO

En sistemas dinámicos realimentados a la salida la primera pregunta que uno podría hacerse es cuales interconexiones tienen sentido esto se conoce como el problema bien definido [173]

**Definición 3.1** [45]. Un sistema realimentado se dice que está bien planteado si todas sus matrices de transferencia están bien definidas y son propias. En nuestro caso nosotros tenemos las siguientes condiciones.

**Proposición 3.2** el sistema en lazo cerrado este bien planteado si y solo si la condición 3.3 se cumple.

**Condición 3.1** la matriz  $I - F_3 CB$  tiene inversa.

**Prueba. Suficiencia:** si la condición 3.3 se cumple podemos resolver  $u$  únicamente de (3.5). Así el sistema en lazo cerrado puede representarse por un modelo estándar en espacio de estado (3.6) por lo tanto toda la matriz de transferencia en lazo cerrado para cualquier salida del sistema está bien planteada y es propia.

**Necesaria:** la probamos por contradicción. Suponga que  $I - F_3 CB$  es singular. Entonces hay un vector  $k \in \mathbb{R}^{1 \times l}, k \neq 0$ , de tal forma que  $k(I - F_3 CB) = 0$ . Substituyendo esta ecuación en (3.5) llegamos a.

$$\begin{aligned} 0 &\equiv k(I - F_3 CB)u = k(F_1 \bar{y}_1 + F_2 \bar{y}_2 + F_3 \bar{y}_3) \\ &= (kF_1 \bar{C}_1 + kF_2 \bar{C}_2 + kF_3 \bar{C}_3)z =: \bar{k}z \end{aligned} \quad (3.9)$$

Note que la ecuación (3.9) es válida para todas las matrices de realimentación  $F_1$  y  $F_2$ . Si  $k \neq 0$  en las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} \bar{k} &= k \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \\ \bar{C}_3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \\ CA & 0 \end{bmatrix} \\ &= [kF_1 C + kF_3 CA \quad kF_2], \end{aligned}$$

Podemos ver que existe una  $F_2$  Tal que  $\bar{k} \neq 0$ . Ahora si definimos  $\bar{k}z$  como una salida del sistema en lazo cerrado, las matrices de transferencia de esta salida a la entrada  $u$  no tienen definición. Esto es una contradicción y por lo tanto la prueba esta completada.  $\square$

La ecuación (3.9) muestra que si la condición 3.3 se deja de cumplir el vector de estados  $z$  puede quedar confinado en un subespacio reducido, que contradice la definición de variables de estado. Note que la condición 3.3 se cumple automáticamente si  $CB=0$ .

Hay dos aproximaciones que se dan con la condición 3.3 en el diseño de las matrices de realimentación. La primera aproximación no hace nada pero después de chequear que  $I + CB\bar{F}_3$  y donde  $I - F_3CB$  es invertible. Esto se basa en la observación de que la probabilidad de que se resuelva  $\bar{F}_3$  que hace  $I + CB\bar{F}_3$  singular es cero en cualquier parte del espacio de parámetros que contienen a  $\bar{F}_3$ . La segunda aproximación es agregar otra LMI al algoritmo correspondiente que se explicara más tarde.

### 3.2.3 ESTABILIZACIÓN DE CONTROLADORES PID POR REALIMENTACIÓN.

Como se mostró en los apartados anteriores nuestro método se asimila a un problema SOF por lo tanto algunos de los resultados propuesto para SOF los vamos a revisar para dar una visión preliminar. Como es sabido el problema SOF es uno de los más importantes y de carácter abierto en la comunidad del control tal como se puede apreciar por ejemplo en los trabajos de [40] y se muestra que en términos generales no existe una solución analítica para este problema. Y solo se promete algo si se sigue explotando la estructura del problema en particular Los esfuerzos en esta dirección se reflejan en los trabajos de [35, 36] donde se usa la poderosa técnica de las desigualdades lineales matriciales donde se logran resultados muy relevantes con los algoritmos propuestos.

Podemos resumir los resultados de [35] con una bonita propiedad que dice que la aproximación es independiente de la representación particular en variables de estado que se considere.

El objetivo del problema SOFS es encontrar un controlador estático de realimentación

$$u = Fy \quad (3.10)$$

Donde  $F \in \mathbb{R}^{l \times m}$  es tal que que el Sistema en lazo cerrado  $\dot{x} = (A + BFC)x$  es asintóticamente estable.

**Lema 3.1** [90]. El Sistema (3.3) es estabilizable por realimentación estática si y solo si existen matrices  $P > 0$  y  $F$  que satisfacen la siguiente desigualdad matricial:

$$A^T P + PA - PBB^T P + (B^T P + FC)^T (B^T P + FC) < 0 \quad (3.11)$$

**Nota 3.1** Es fácil mostrar que la desigualdad matricial (3.11) es independiente de la realización particular en variables de estado que sea considerado. Esto es si la desigualdad matricial (3.11) tiene solución para una realización mínimas en espacio de estado  $(A, B, C)$  de alguna planta  $H(s)$ , entonces tiene solución a una de las realizaciones mínimas en espacio de estado  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  de  $H(s)$  con la misma matriz de realimentación  $F$  Es una práctica común que en todos los controladores PID industriales se diseñen basados en modelos de respuesta en frecuencia. Por lo tanto, podemos tomar cualquiera de las representaciones en espacio de estado

para estudiar la posibilidad una estabilización por realimentación de la salida, si se tiene a la mano el modelo del sistema.

El signo negativo del término  $-PBB^T P$  en la desigualdad matricial (3.11) hace la solución muy complicada. Suponga que podemos encontrar una matriz  $\Psi$  que dependa de  $P$  de forma afín y se cumpla que.

$$\Psi \leq PBB^T P \quad (3.12)$$

Entonces es fácil mostrar que el sistema (3.3) se puede estabilizar por  $u = Fy$  si la siguiente desigualdad.

$$A^T P + PA - \Psi + (B^T P + FC)^T (B^T P + FC) < 0 \quad (3.12)$$

Tiene una solución para  $(P, F)$  por el complemento de Schur [24], la desigualdad (3.13) es equivalente a:

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - \Psi & (B^T P + FC)^T \\ B^T P + FC & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.14)$$

Ahora la desigualdad matricial (3.14) depende de forma afín sobre  $(P, F)$  una vez que el otro parámetro en  $\Psi$  Este dado por.

$$\Psi = X^T B B^T P + P^T B B^T X - X^T B B^T X \quad (3.15)$$

Donde  $x > 0$ . En este caso, la desigualdad (3.12) es siempre satisfecha y el signo igual se conserva si y solo si  $X^T B = P^T B$ . Una vez  $X$  Este dado la desigualdad matricial (3.14) se puede resolver muy eficientemente por el toolbox LMI en Matlab [27]. Basados en las consideraciones de arriba, Se propone el siguiente algoritmo interactivo para las desigualdades matriciales que resuelve el problema SOFS [35].

**Algoritmo 3.1** (Algoritmo ILMI para SOFS). Dada la realización en variables de estado  $(A, B, C)$

**Paso 1.** Escoger  $Q_0 > 0$  y resolver  $P$  para la ecuación de Riccati

$$A^T P + PA - PBB^T P + Q_0 = 0, \quad P > 0$$

Hacer  $i = 1$  y  $X_1 = P$ .

**Paso 2.** Resolver el siguiente problema de optimización para  $P_i, F$  y  $\alpha_i$ .

**Opción 1.** Minimice  $\alpha_i$  según las siguientes restricciones para la LMI.

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{ii} & (B^T P_i + FC)^T \\ B^T P_i + FC & -I \end{bmatrix} < 0, \quad P_i > 0 \quad (3.15)$$

Donde  $\Sigma_{ii} = A^T P_i + P_i A - X_i B B^T P_i - P_i B B^T X_i + X_i B B^T X_i - \alpha_i P_i$  denotando  $\alpha_i^*$  el valor mínimo de  $\alpha_i$ .

**Paso 3.** Si  $\alpha_i^* \leq 0$ , el par de matrices  $(P_i, F)$  resuelve el problema SOFS. Y parar de lo contrario ir al paso 4.

**Paso 4.** Resuelva el siguiente problema de optimización para  $P_i$  y  $F$ .

**Opción 2.** Minimice  $\text{tr}(P_i)$ . Sujeta a las restricciones de la LMI (3.15) con  $\alpha_i = \alpha_i^*$  donde  $\text{Tr.}$  es la traza de una matriz cuadrada. Definiendo por  $P_i^*$  la optima de  $P_i$ .

**Paso 5.** Si  $\|X_i B - P_i^* B\| < \varepsilon$ , donde  $\varepsilon$  es una tolerancia prescrita, ir al paso 6 de lo contrario hacer  $i : 0 \rightarrow i + 1$ ,  $X_i = P_i^*$  e ir al paso 2.

**Paso 6.** Si no se logra decidir nada por Este algoritmo cuando el problema SOFS tiene solución. Pare.

Para las propiedades de la solución  $\alpha_i^*$  en el problema de optimización Opción 1. Y  $P_i^*$  en el problema de optimización Opción 2 y las consideraciones sobre la selección Del valor inicial, el lector debe consultar la referencia [35].

### 3.2.4 Estabilización por realimentación con controladores PID.

Considere ahora el Sistema (3.3) de Nuevo pero ahora use el controlador PID (3.4) en lugar del controlador SOF (3.10) el objetivo ahora es diseñar las matrices de realimentación  $F_1, F_2, F_3$  de tal forma que el Sistema (3.3) se estabilice por el controlador. Usando la transformación dada en la sección 3.2, podemos transformar el Sistema (3.3) con el controlador (3.4) en el Sistema (3.6). Es evidente que (3.3) es asintóticamente estable si y solo si (3.6) es asintóticamente estable, probando que la condición 3.3 se conserva. Las matrices de realimentación  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3)$  en (3.6) se pueden encontrar resolviendo  $\bar{F}$  a través de la aplicación del algoritmo 3.1 al Sistema  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ . Como antes se ha mencionado se dan dos aproximaciones para garantizar el buen condicionamiento del sistema controlado por un PID. Ahora se discute la segunda aproximación en detalle para garantizar la no singularidad de la matriz  $(I + CB\bar{F}_3)$  se ha adicionado la siguiente LMI.

$$I + (CB\bar{F}_3)^T + CB\bar{F}_3 > 0 \quad (3.16)$$

Así el algoritmo 3.1. Se le cambian los pasos 2 y 4 en el algoritmo 3.1 a los siguientes:

**Paso 2.** Resolver el problema de optimización para  $P_i, \bar{F}$  y  $\alpha_i$ : Minimice  $\alpha_i$  Sugeto a las restricciones LMIs (3.15) y (3.16) (OP1).

**Paso 4'.** Resolver el problema de optimización para  $P_i$  y  $\bar{F}$ : Minimice la  $\text{tr}(P_i)$  Sujeto a las restricciones LMIs (3.15) y (3.16) con  $\alpha_i = \alpha_i^*$  (Op2).

La desigualdad (3.16) viene de la observación de que si (3.16) se cumple, se tiene.

$$(I + CB\bar{F}_3)^T (I + CB\bar{F}_3) = I + (CB\bar{F}_3)^T + CB\bar{F}_3 + (CB\bar{F}_3)^T (CB\bar{F}_3) > 0$$

Así conforme  $I + CB\bar{F}_3$  es no singular. Note que la LMI (3.16) es una condición muy conservadora. Ahora se sugiere que primero se pruebe la primera aproximación y luego chequee si  $I + CB\bar{F}_3$  se puede invertir sin usar la restricción (3.16). Si falla, use el algoritmo modificado con la restricción (3.16).

### 3.2.5 CONTROLADOR SUBÓPTIMO DE NORMA $H_2$ CON CONTROLADORES PID

A continuación se va a investigar el problema de diseño de un controlador PID bajo la especificación de control con la norma  $H_2$ . Primero se estudia el caso SOF y luego se extiende el resultado al caso PID. Considere el sistema.

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \quad y_s = C_s x \quad y_r = C_r x \quad (3.17)$$

Donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es la variable de estado,  $u(t) \in \mathbb{R}^{l_1}$  son las entradas al sistema que son manipulables por el controlador,  $w(t) \in \mathbb{R}^{l_2}$  son las entradas al sistema que provienen de alguna fuente exógena o una perturbación y no son manipulables por el controlador,  $y_s(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$  es el vector de las salidas sensadas o medidas y  $y_r(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$  es el vector de salidas reguladas o controladas y  $A, B_1, B_2, C_s, C_r$  son matrices de dimensiones apropiadas. El problema de control estático por realimentación con Norma  $H_2$  (SOF  $H_2$ ) consiste en encontrar un control de la forma.

$$u = F y_s \quad (3.18)$$

De tal forma que la función de transferencia en lazo cerrado  $T_{wy_r}$  de  $w$  a  $y_r$  es estable y

$$\|T_{wy_r}\|_2 < \gamma \quad (3.19)$$

Donde  $\gamma$  es un número positivo y  $\|\cdot\|_2$  denota la norma 2 de la matriz de transferencia del sistema. Con la sustitución de (3.18) en (3.17), y es fácil probar según [45] que.

$$\|T_{wy_r}\|_2^2 = \text{tr}(C_r L_c C_r^T)$$

Donde  $L_c$  es el gramiano de controlabilidad del sistema (3.17) que satisface la expresión.

$$(A + B_2 F C_s) + L_c (A + B_2 F C_s)^T + B_1 B_1^T = 0,$$

Suponiendo que  $A + B_2 F C_s$  es Hurwitz. Como es bien conocido que cualquier matriz positiva definida  $P$  se satisface la desigualdad.

$$(A + B_2 F C_s)P + P(A + B_2 F C_s)^T + B_1 B_1^T < 0 \quad (3.20)$$

La relación  $P > L_c$  se cumple. Se nota que la condición de que  $A + B_2 F C_s$  es Hurwitz está implicada por la desigualdad (3.20). Además.

$$\text{tr}(C_r P C_r^T) < \gamma^2 \quad (3.21)$$

El requerimiento (3.19) es satisfecho. Ahora se puede plantear un algoritmo ILMI para resolver las desigualdades (3.20) -(3.21).

**Lema 3.2** para cualquier par de valores fijos  $A, B_1, B_2, C_s$ , y  $F$  donde existe una matriz positiva definida  $P$  que resuelve la desigualdad (3.20) si y solo si la siguiente desigualdad tiene una solución positiva definida.

$$AP + PA^T - P C_s^T C_s P + (B_2 F + P C_s^T)(B_2 F + P C_s^T)^T + B_1 B_1^T < 0 \quad (3.22)$$

**Prueba:** Es similar a la de teorema 1 de [35] donde el término  $B_1 B_1^T$  no aparece. Debido a esta diferencia el parámetro  $\rho$  cuyo significado aparece en la prueba del teorema 1 de [35] debe satisfacer la condición de que  $\rho > 1$ . Los otros pasos se omiten.

Con base en los argumentos de arriba la solución del problema SOFH<sub>2</sub> se puede resumir Como sigue.

**Proposición 3.3.** El índice de desempeño  $H_2$  (3.19) se puede obtener con el controlador SOF (3.19) si las desigualdades matriciales (3.21) y la (3.22) tienen solución para  $(P, F)$  Por el mismo razonamiento Como en la sección 3. Se puede usar el siguiente algoritmo para resolver la matriz de realimentación  $F$  en la proposición 3.5.

**Algoritmo 3.2** (Algoritmo ILMI para SOFH<sub>2</sub>) Datos iniciales. La realización en espacio de estado  $(A, B_1, B_2, C_s, C_r)$  y con índice de desempeño  $\gamma$ .

**Paso 1.** Escoja  $Q_0 > 0$  y resuelva  $P$  de la ecuación de Riccati.

$$AP + PA^T - PC_s^T C_s P + Q_0 = 0, \quad P > 0$$

Hacer  $i = 1$  y  $X_1 = P$ .

**Paso 2.** Resuelva el siguiente problema de optimización para  $P_i, F$  y  $\alpha_i$ .

**Opción 1** Minimizar  $\alpha_i$  sujeta a las siguientes restricciones LMI.

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{2i} & B_2 F + P_i C_s^T \\ (B_2 F + P_i C_s^T)^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.23)$$

$$\text{tr} (C_r P_i C_r^T) < \gamma^2 \quad (3.24)$$

$$P_i > 0 \quad (3.25)$$

Donde  $\Sigma_{2i} = AP_i + P_i A^T + B_1 B_1^T - X_i C_s^T C_s P_i - P_i C_s^T C_s X_i + X_i C_s^T C_s X_i - \alpha_i P_i$

Denotando  $\alpha_i^*$  el valor minimizado de  $\alpha_i$ .

**Paso 3.** Si  $\alpha_i^* \leq 0$  la matriz obtenida  $F$  que resuelve el problema SOFH<sub>2</sub> y parar, de lo contrario ir al paso 4.

**Paso 4.** Resuelva el siguiente problema de optimización para las matrices desconocidas  $P_i$  y  $F$

**Opción 2.** Minimice la  $\text{tr} (P_i)$  sujeto a las restricciones LMI (3.23)-(3.25) con  $\alpha_i^* = \alpha_i$  denotando  $P_i^*$  el valor optimizado de  $P_i$ .

**Paso 5.** Si  $\|X_i B - P_i^* B\| < \varepsilon$ , donde  $\varepsilon$  es la tolerancia preecrita, ir al paso 6 de lo contrario hacer  $i := i + 1$ ,  $X_i = P_i^*$  e ir al paso 2

**Paso 6.** Si no se puede decidir por este algoritmo resolver el problema SOFH<sub>2</sub> se debe parar.

Ahora considere el sistema (3.17) y la especificación de desempeño (3.19) con un controlador PID.

$$u = F_1 y_s + \int_0^t y_s dt + F_3 \frac{dy_s}{dt}, \quad F_1, F_2, F_3 \in \mathbb{R}^{l \times m_2} \quad (3.26)$$

En lugar de un controlador estático de realimentación (3.19) se hacen las siguientes suposiciones.

**Suposición 3.1)** Suponga que cada vector fila en  $C_s$  y cada vector columna en  $B_1$  son ortogonales entre si entonces  $C_s B_1 = 0$ .

La buena definición del problema (3.17) con el controlador de realimentación (3.26) implica que.

**Condición 7.2** La matriz  $I - F_3 C_s B_2$  es invertible. Se definen nuevas matrices como.

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ C_s & 0 \end{bmatrix}, & \bar{B}_1 &= \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, & \bar{B}_2 &= \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bar{C}_{s1} &= [C_s \ 0], & \bar{C}_{s2} &= [0 \ I], & \bar{C}_{s3} &= [C_s A \ 0], \\ \bar{C}_s &:= [\bar{C}_{s1}^T \ \bar{C}_{s2}^T \ \bar{C}_{s3}^T]^T, & \bar{C}_r &:= [C_r \ 0], \\ \bar{F}_i &:= (I - F_3 C_s B_2)^{-1} F_i; \quad i = 1, 2, 3, & \bar{F} &:= [\bar{F}_1 \ \bar{F}_2 \ \bar{F}_3] \end{aligned}$$

Entonces el Sistema (3.17) con controladores PID (3.26) se pueden transformar en un Sistema SOF:

$$\begin{cases} \dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}_1 w + \bar{B}_2 u & z_1 = x, \quad z_2 = \int_0^t y_s dt. \\ \bar{y}_s : \bar{C}_s z, \quad \bar{y}_r : \bar{C}_r z, \\ u = \bar{F} \bar{y}_s \end{cases} \quad (3.27)$$

Es evidente que las relaciones (funciones de transferencia) entre  $w$  y  $y_r$  se preserva bajo la transformación de arriba. Por lo tanto, la especificación de desempeño (3.19) se puede lograr por medio de un controlador PID (3.26) si y solo si se puede obtener por medio del sistema SOF (3.27) probando que la condición 3.2 se conserva. Así La matriz compuesta de realimentación  $\bar{F}$  en la ecuacion (3.27) se puede encontrar aplicando el algoritmo 3.2 al Sistema (3.27).

### 3.2.6 CONTROL SUBÓPTIMO DE NORMA $H_\infty$ CON CONTROLADOR PID

En el apartado que sigue investigaremos el problema de diseño de un controlador PID bajo la norma  $H_\infty$ . Además, iniciaremos con el caso SOF y luego se extenderá el resultado al caso de un controlador PID. Considere el sistema.

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \quad y_s = C_s x, \quad y_r = C_r x + Du, \quad (3.28)$$

Donde  $D$  es una matriz constante y  $x, u, y_s, y_r, w, A, B_1, B_2, C_s, C_r$  son las mismas variables del modelo (3.17). El problema del control de realimentación estática subóptimo con norma  $H_\infty$  (SOF  $H_\infty$ ) consiste en encontrar un controlador de la forma (3.18) de tal forma que la función de transferencia en lazo cerrado  $T_{wy_r}$  de  $w$  a  $y_r$  es estable y

$$\|T_{wy_r}\|_\infty < v, \quad (3.29)$$

Donde  $v > 0$  y  $\|\cdot\|_\infty$  denota la norma  $H_\infty$  de la matriz de transferencia como se ve en. [45]. Del lema real acotado y del complemento de [24] no es difícil mostrar que (3.18) es un controlador sub óptimo de norma  $H_\infty$  si y solo si existe una matriz positiva definida  $P$  tal que se cumple la siguiente desigualdad.

$$\begin{bmatrix} (A + B_2FC_s)^T P + P(A + B_2FC_s) & PB_1 & (C_r + DFC_s)^T \\ B_1^T P & -v^2 I & 0 \\ C_r + DFC_s & 0 & -I \end{bmatrix} < 0,$$

Que es equivalente a:

$$\begin{aligned} & (A + B_2FC_s)^T P + P(A + B_2FC_s) + v^{-2} PB_1 B_1^T P \\ & + (C_r + DFC_s)^T (C_r + DFC_s) < 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

La desigualdad (3.30) está expresada en forma cuadrática con los términos desconocidos  $(P, F)$  tal como se hizo en secciones previas podemos desarrollar un algoritmo ILMI para resolver este problema.

**Algoritmo 3.3** (Algoritmo ILMI para SOF  $H_\infty$ ) Con datos iniciales: Con la realización en espacio de estados  $(A, B_1, B_2, C_s, C_r, D)$  y un índice de desempeño  $v$ .

**Paso 1.** Escoger  $Q_0 > 0$  y resolver  $P$  para la ecuación de Riccati

$$A^T P + PA - PB_2 B_2^T P + Q_0 = 0, P > 0$$

Hacemos  $i = 1$  y  $X_i = P$

**Paso 2.** Resolver el siguiente problema de optimización para  $P_i$ ,  $F$  y  $\alpha_i$

**Opción 1:** Minimice  $\alpha_i$  sujeto a las siguientes restricciones LMI.

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{3i} & P_i B_1 & (C_r + DFC_s)^T & (B_2^T P_i + FC_s)^T \\ B_1^T P_i & -v^2 I & 0 & 0 \\ C_r + DFC_s & 0 & -I & 0 \\ B_2^T P_i + FC_s & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0,$$

$$P_i > 0 \quad (3.31)$$

Donde  $\Sigma_{3i} = A^T P_i + P_i A - X_i B_2 B_2^T P_i - P_i B_2 B_2^T X_i + X_i B_2 B_2^T X_i - \alpha_i P_i$ . Denotando por  $\alpha_i^*$  el valor optimizado de  $\alpha_i$

**Paso 3.** Si  $\alpha_i^* \leq 0$ , la matriz obtenida  $F$  resuelve el problema SOF  $H_\infty$ . Y pare, de lo contrario ir al paso 4.

**Paso 4.** Resolver el problema de minimización para las matrices desconocidas  $P_i$  y  $F$ .

**Opción 2.** Minimice  $tr(P_i)$  sujeto a las restricciones LMI (3.31) con  $\alpha_i^* = \alpha_i$  denotando  $P_i^*$  el valor optimizado de  $P_i$ .

**Paso 5.** Si  $\|X_i B - P_i^*\| < \varepsilon$  donde  $\varepsilon$  es el valor prescrito de la tolerancia, ir al paso 6 de lo contrario hacer:  $i := i + 1$ ,  $X_i = P_i^*$ , e ir al paso 2.

**Paso 6.** Si no se puede decidir por este algoritmo la solución del problema SOF  $H_\infty$  que tiene solución, entonces pare.

Ahora considere un controlador PID (3.26) suponga la suposición 3.1 y la condición 3.2 se cumple. Usando las notaciones para  $\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{C}_s, \bar{C}_r$ , y  $\bar{F}$  tal como se expresó en la sección 4.2 podemos escribir la dinámica del Sistema en lazo cerrado como.

$$\dot{z} = \bar{A}_z z + \bar{B}_1 w + \bar{B}_2 u, \quad \bar{y}_s := \bar{C}_s z, \quad \bar{y}_r := \bar{C}_r z + Du, \quad u = \bar{F} \bar{y}_s \quad (3.32)$$

Así las matrices de realimentación  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3)$  se pueden encontrar aplicando el algoritmo 3.3 al Sistema (3.32).

### 3.2.7 MÁXIMA SALIDA DE CONTROL CON EL CONTROLADOR PID

Vamos a investigar el problema de diseño de un controlador PID bajo el índice de desempeño requerido de tal forma que produzca una salida tan pequeña como se le especifique cuando la entrada es acotada. Considere el Sistema (3.28) con  $x(0)=0$ , note que  $w$  es vista como una señal de comando externa en lugar de la señal exógena o perturbación, como se trató en apartados anteriores. Pueden darse otras notaciones, pero serian similares a las que se presentaron en la sección 3.5. Primero comenzamos tratando el problema SOF. La realimentación estática de salida con máxima salida (SOFMOC) es encontrar un control de la forma (318) tal que la salida regulada máxima, denotada por  $Y_{r,max} := \sup_{t \geq 0} \|y_r(t)\|$  del sistema en lazo cerrado bajo la entrada de comando  $w$  es más pequeña que un número positivo  $\sigma$ .

$$Y_{r,max} \leq \sigma \quad (3.33)$$

Para que tenga sentido para el problema (SOFMOC) se deben hacer las siguientes suposiciones.

**Suposición 3.2.** La señal de entrada de referencia  $w$  es uniformemente acorada sobre  $[0, +\infty)$ , entonces  $\|w(t)\| \leq 1, \forall t \in [0, \infty)$ .

Para que las especificaciones de desempeño (3.33) sean satisfechas, se sigue el procedimiento que se describe en [34] y se puede obtener.

**Proposición 3.4.** Si existen matrices  $P > 0$ ,  $F$  y los números  $\tau_2 \geq 0, \eta > 0$  de tal forma que las desigualdades matriciales.

$$\begin{bmatrix} P & (C_r + DFC_s)^T \\ (C_r + DFC_s) & \frac{\sigma^2}{\eta} I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.34)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_4 & PB_1 \\ B_1^T P & -\tau_2 \eta I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.35)$$

Se conservan. Donde  $\Sigma_4 = (A + B_2 FC_s)^T P + P(A + B_2 FC_s) + \tau_2 P$ , entonces el índice de funcionamiento (3.33) se cumple.

En las desigualdades (3.34) y (3.35), podemos siempre escoger  $\eta = 1$  teóricamente sin pérdida de generalidad. Sin embargo un valor de  $\eta$  muy grande puede producir una velocidad de convergencia rápida. Según experiencias de simulación. El problema más difícil es cómo lidiar con la variable desconocida  $\tau_2$ . A continuación vamos a desarrollar un método para encontrar un valor óptimo para  $\tau_2$ . De acuerdo al completeto de Schur, [24] es equivalente a.

$$(A + B_2FC_s)^T P + P(A + B_2FC_s) + \tau_2 P + \frac{1}{\tau_2 \eta} PB_1 B_1^T P < 0 \quad (3.36)$$

Sea  $\phi = \tau_2 P + PB_1 B_1^T P / \tau_2 \eta$ . Note que solamente  $\phi$  al lado izquierdo de la desigualdad (3.36) depende sobre  $\tau_2$ . Si  $P > 0$  y  $PB_1 B_1^T P \geq 0$  parece que un mínimo  $\phi$  puede existir. La regla para la escogencia de  $\tau_2$  es justo hacer  $\phi$  tan pequeño como sea posible. Aquí el significado de las palabras mínimo y óptimo, es en el sentido de algún tipo de norma matricial. En pro de la facilidad del cómputo numérico. Vamos a usar la norma de Frobenius, denotada como  $\|\cdot\|_F$ . Suponga que  $P = \Gamma_1 \Gamma_1$  y  $PB_1 B_1^T P = \Gamma_2 \Gamma_2$  donde  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son matrices positivas definidas y positivas semidefinidas, respectivamente. Con un procedimiento de algebra simple da.

$$\phi = \left( \sqrt{\tau_2} \Gamma_1 - \sqrt{\frac{1}{\tau_2 \eta}} \Gamma_2 \right) \left( \sqrt{\tau_2} \Gamma_1 - \sqrt{\frac{1}{\tau_2 \eta}} \Gamma_2 \right) + \sqrt{\frac{1}{\eta}} (\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_2 \Gamma_1)$$

Así es claro que la escogencia de  $\tau_2$  depende de que  $\sqrt{\tau_2} \Gamma_1$  y  $\sqrt{1/(\tau_2 \eta)} \Gamma_2$  estén tan cercanos como sea posible y entonces.

$$\left\| \sqrt{\tau_2} \Gamma_1 - \sqrt{\frac{1}{\tau_2 \eta}} \Gamma_2 \right\|_F \rightarrow \min$$

Si:

$$\begin{aligned} \left\| \sqrt{\tau_2} \Gamma_1 - \sqrt{\frac{1}{\tau_2 \eta}} \Gamma_2 \right\|_F^2 &= \text{tr} \left( \sqrt{\tau_2} \Gamma_1 - \sqrt{\frac{1}{\tau_2 \eta}} \Gamma_2 \right) \left( \sqrt{\tau_2} \Gamma_1 - \sqrt{\frac{1}{\tau_2 \eta}} \Gamma_2 \right) \\ &= \text{tr} \left( \tau_2 P + \sqrt{\frac{1}{\tau_2 \eta}} PB_1 B_1^T P \right) - \sqrt{\frac{1}{\eta}} \text{tr} (\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_2 \Gamma_1) \end{aligned}$$

El valor óptimo de  $\tau_2$  esta dado por:

$$\tau_2 = \sqrt{\frac{\text{tr}(PB_1 B_1^T P)}{\eta \text{tr}(P)}} \quad (3.37)$$

Los resultados de arriba se resumen en el siguiente algoritmo.

**Algoritmo 3.4** (Algoritmo ILMI para SOFMOC) con datos iniciales: El Sistema con representación en variables de estado.  $(A, B_1, B_2, C_s, C_r, D)$ , el indice de desempeño  $\sigma$ , y el numero positivo  $\eta$ .

**Paso 1.** Escoger  $Q_0 > 0$  y resolver  $P$  para la ecuación de Riccati

$$A^T P + PA - PB_2 B_2^T P + Q_0 = 0, \quad P > 0$$

Hacer  $i = 1$   $X_1 = P$ , Calcular  $\tau_2$  de acuerdo a.

$$\tau_2 = \sqrt{\text{tr} ( PB_1 B_1^T P / \eta \text{tr}(P) )}$$

**Paso 2.** Resolver el siguiente problema de optimización para  $P_i, F$  y  $\alpha_i$

**Opción 1:** Minimizar  $\alpha_i$  de acuerdo a las siguientes restricciones LMI.

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{4i} & P_i B_i & (B_2^T P_i + F C_s)^T \\ B_1^T P_i & -\tau_2 \eta I & 0 \\ B_2^T P_i + F C_s & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.38)$$

$$\begin{bmatrix} P_i & (C_r + D F C_s)^T \\ (C_r + D F C_s) & \frac{\sigma^2}{\eta} I \end{bmatrix} > 0, \quad (3.39)$$

$$P_i > 0 \quad (3.40)$$

Donde  $\Sigma_{4i} = A^T P_i + P_i A - X_i B_2 B_2^T P_i + P_i B_2 B_2^T X_i + X_i B_2 B_2^T X_i + \tau_2 P_i + \alpha_i P_i$

Denotando  $\alpha_i^*$  el valor miniizado de  $\alpha_i$ .

**Paso 3.** Si  $\alpha_i^* \leq 0$ . La matriz  $F$  resuelve el problema SOFMOC. Parar. De lo contrario ir al paso 4.

**Paso 4.** Resolver el siguiente problema de optimización para las matrices desconocidas  $P_i$  y  $F$ .

**Opción 2:** Minimice  $tr(P_i)$  sujeto a las restricciones LMI (3.38)-(3.40) con  $\alpha_i^* = \alpha_i$  denotando  $P_i^*$  el valor optimizado de  $P_i$ .

**Paso 5.** Si  $\|X_i B - P_i^* B\| < \varepsilon$ , donde  $\varepsilon$  es una tolerancia preescrita, ir al paso 6 de lo contrario hacer  $i := i + 1, X_i = P_i^*, \tau_2 = \sqrt{\text{tr}(P_i^* B_1 B_1^T P_i^*) / \eta \text{tr}(P_i^*)}$  e ir al paso 2.

**Paso 6.** Si no se puede decidir por Este algoritmo, si el problema tiene solución SOFMOC. Parar

Se nota que  $\alpha_i$  puede terminar de decrecer luego de alguna iteración. En ese caso podemos fijar  $\tau_2$  en este valor, justo cuando  $\alpha_i$  a dejar de decrecer entonces use el algoritmo de arriba para encontrar las matrices de realimentación.

Ahora considere el Sistema (3.28) y las especificaciones de desempeño (3.33) con el controlador PID (3.26). Suponga la suposición 3.1 y 3.2 y la condición 3.2 se cumplen. Usando las mismas notaciones  $\bar{A}, \bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{C}_s, \bar{C}_r$  y  $\bar{F}$ , como aquellos de la sección 3.4 podemos escribir la dinámica de lazo cerrado en la forma (3.32). Así las matrices de realimentación  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3)$  se pueden calcular aplicando la proposición 3.4 y el algoritmo 3.4 al Sistema (3.32).

### 3.3 EJEMPLO DE SINTONÍA DE UN CONTROLADOR MIMO-PID PARA UN REACTOR CONTINUO DE TANQUE AGITADO

**Ejemplo:** Determinar las constantes de tres controladores PID centralizados para el sistema CSTR siguiente, que muestra la Figura 3.1. Para el mejor índice de desempeño tipo  $H_2$  con variables controladas  $L, C_a, T$ .

*Modelo de un reactor continuo de tanque agitado (CSTR) [52].* Este será El proceso sobre el cual se intentará experimentar con la técnica de sintonía ILMI. A continuación, se exponen tres ecuaciones fundamentales de la dinámica del sistema. Inspeccionándolas se visualiza el gran nivel de acople no lineal entre sus variables.

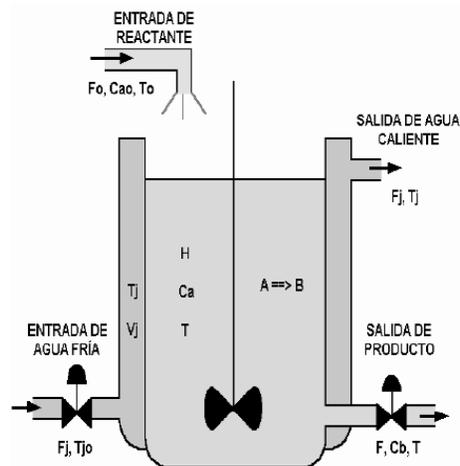


Figura 3.1. Reactor continuo do tanque agitado CSTR

$$\frac{FdL}{dt} = \frac{F0}{Atanque} - \frac{Cv * \sqrt{g * L}}{Atanque}$$

$$\frac{FCa}{dt} = \frac{Fo * Cao}{Atanque * L} - \frac{Cv * \sqrt{g * L}}{Atanque * L} - ko * Ca * e^{-\frac{Ea}{R * T}} - \frac{1}{v} * Ca * \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{FT}{dt} = \frac{Cv * \sqrt{g * L}}{Atanque * \sqrt{L}} + \frac{Ea * Ko * Ca * e^{-\frac{Ea}{R * T}} * \Delta Hr}{Cp * rho} - \frac{Fj}{Atanque * L} * \left[ 1 - e^{-\frac{Ua * Aj}{Fj * Cp * rho}} \right]$$

#### 3.3.1 REPRESENTACIÓN DE ESTADO

Para incorporar al diseño el efecto de las perturbaciones se propone la siguiente representación para el sistema CSTR. Según [47]. Se seleccionan tres dinámicas principales: nivel, concentración y temperatura. Con las siguientes ecuaciones de estado.

$$\dot{x} = A * x + B1 * w + B2 * u$$

$$\dot{x} = C^* x + D^* u$$

$$y_s = C_s^* x$$

$$y_r = C_r^* x$$

Los siguientes vectores que se pueden proponer según el parámetro seleccionado.

$$x = [L \quad C_a \quad T]^T ; \quad \text{Estados del sistema}$$

$$u = [F_i \quad F \quad F_j]^T ; \quad \text{Variables manipuladas}$$

$$w = [C_{a0} \quad T_0 \quad T_{0j}]^T ; \quad \text{Perturbaciones}$$

$$y = [L \quad C_a \quad T]^T ; \quad \text{Las salidas del sistema}$$

Para este caso, se tiene el siguiente grupo de matrices: A, B1, B2, Cs, Cr, D, del modelo linealizado en el punto de equilibrio. Para facilitar la representación que sigue, se emplearon las variables temporales: L1, L2, L3, C1, C2, C3, C4, C5, C6, T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7. (Ver anexo 1) Son los coeficientes de las ecuaciones linealizadas y se numeran en el mismo orden que aparecen (Por ejemplo, la dinámica de nivel presenta tres posibles términos). Las matrices de estado resultantes del modelo son las siguientes.

$$A = \begin{bmatrix} L1 & 0 & 0 \\ C1 & C2 & C3 \\ T1 & T2 & T3 \end{bmatrix}, \quad B1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C6 & 0 & 0 \\ 0 & T7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B2 = \begin{bmatrix} L2 & L3 & 0 \\ C4 & C5 & 0 \\ T5 & T6 & T4 \end{bmatrix}, \quad C_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y_s, y_r = 0$$

### 3.3.2 EVALUACIÓN DE LA MATRIZ DE GANANCIAS POR EL ALGORITMO LMI INTERACTIVO

Inicialmente se hacen los arreglos matriciales según el algoritmo ILMI, Con la representación dada en el numeral 2.0

$$A = \begin{bmatrix} A^{3 \times 3} & 0^{3 \times 3} \\ C^{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0,1042 & 0,1042 & 0 \\ -0,0051 & -1,6577 & 0 \\ -2,9167 & 6,5951 & 0 \\ 0 & 0 & -54,5455 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,8333 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8333 & 0 \\ 0 & 0 & 12,987 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,4080 & -1,6577 & 0,0085 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 34,1667 & 6,5950 & -20,0000 & 4,1667 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = [F_{1(3 \times 3)} \quad F_{2(3 \times 3)} \quad F_{3(3 \times 3)}] = [F_{(3 \times 9)}]$$

**Solución:** El algoritmo para este sistema se resuelve programando las operaciones respectivas empleando código de Matlab (ver anexo 1) y usando la caja de herramientas de control robusto en la parte de LMI. De ese programa se obtienen los siguientes resultados:

Se cumple la condición de  $\alpha_{\min}$   
 La traza del producto Triple para un  $\gamma$  mínimo  
 $\text{Tr}^2 = 217.20$

Y los valores propios de la matriz  $P$  óptima:

**EIG\_POPT =**  
 0.000820686626731  
 0.465496986040944  
 1.153653836123241  
 1.268143027952907  
 1.315954548821043  
 1.605799414989452

Que Indica la existencia de una matriz  $P$  óptima y positiva. Después el programa entrega el siguiente conjunto de datos que resultan ser válidos por cumplirse las condiciones (26, 27, 28,

## Control Colaborativo de Dinámicas Múltiples

29). Se cumple la existencia de una matriz  $P$  óptima y positiva. Después el programa entrega el siguiente conjunto de datos.

Acciones proporcionales  $P_1$

-0.0139177 -0.2299963 -0.0126047  
-0.0091470 -0.7551243 -0.0083409  
-273564.27 -7560223.3 -248023.74

Acciones Integrales  $P_2$

0.01037747 -0.1237871 -0.0279338  
0.0068133 -0.4064245 -0.0183777  
204176.21 -4069046.7 -549976.65

Acciones Derivativas  $P_3$

0.0000423 0.0045248 -0.1380402  
0.0000278 0.0148170 -0.0907112  
831.96588 148539.82 -2713241.3

Este resultado es apropiado para una estructura de control multi-lazo que puede tener hasta un máximo de nueve controladores PID en configuración distribuida, la implementación resultante se puede intentar simplificar implementando solo controladores centralizados PID cuyas constantes se extraen de la diagonal principal de cada matriz  $P_i$  (descentralizado).

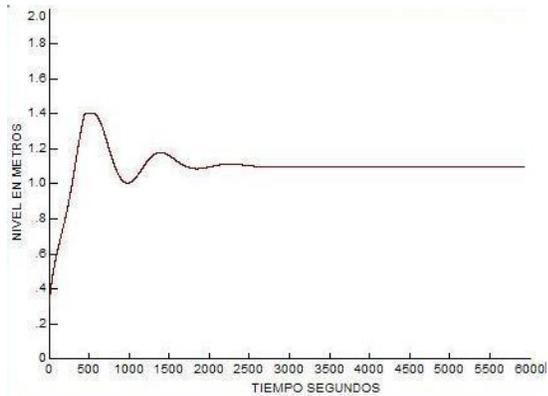
Con los valores **PID** anteriores  $i = j$ , se corre una simulación sobre un modelo no lineal Para el **CSTR**. Utilizando el software de simulación VisSim. Los valores nominales de control son:

**Nivel: 1.1 metros.**

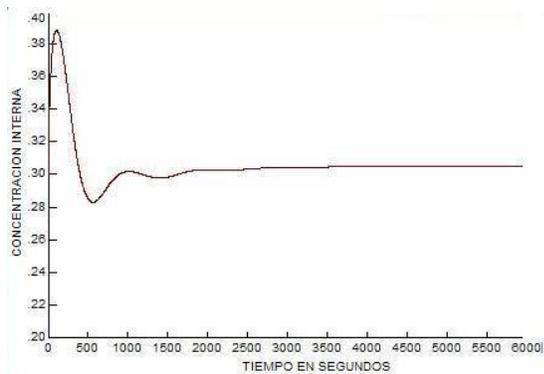
- Concentración: 0.3 unidades
- Temperatura: 350 Grados Kelvin

En las Figuras 3.2, 3.3, 3.4. Se muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado con un controlador descentralizado **PID** sintonizado por la técnica de Ziegler Nichols [39]. Cuando las tres entradas exógenas seleccionadas para ser perturbaciones. Se aplicaron señales con una amplitud máxima del 20% del valor Nominal.

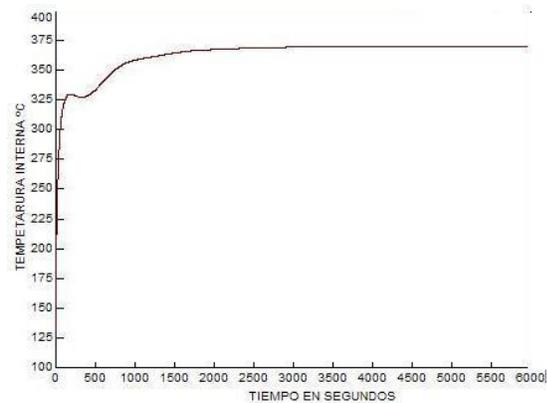
## Control Colaborativo de Dinámicas Múltiples



**Figura 3.2.** Respuesta a una perturbación para El controlador PID sintonizado por Ziegler-Nichols [39] en el Lazo de Nivel.

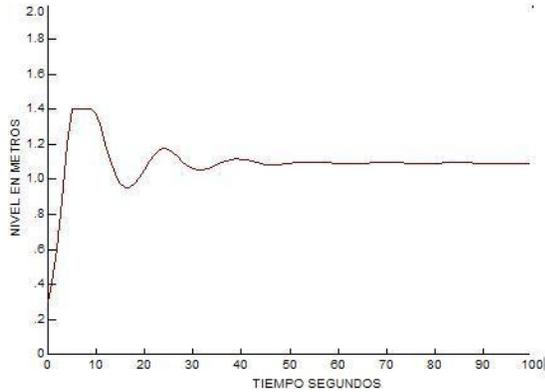


**Figura 3.3.** Respuesta a una perturbación para el controlador PID sintonizado por Ziegler- Nichols [39] en el Lazo de Concentración

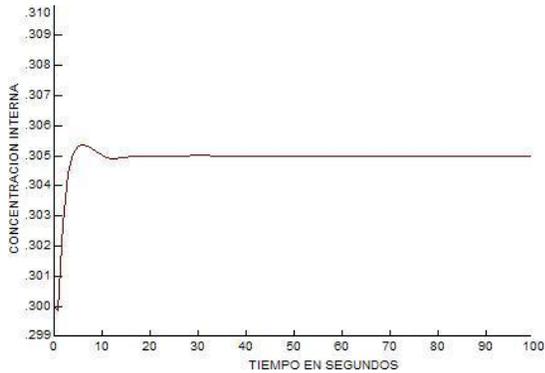


**Figura 3.4.** Respuesta a una perturbación para el controlador PID sintonizado por Ziegler- Nichols en el Lazo de Temperatura.

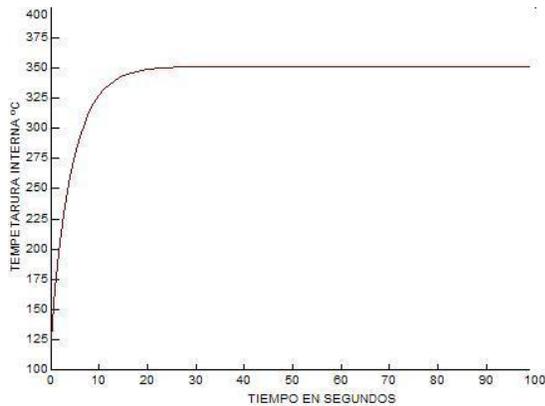
## Control Colaborativo de Dinámicas Múltiples



**Figura 3.5. Respuesta a una perturbación para El controlador PID sintonizado por LMIs en el Lazo de Nivel.**



**Figura 3.6. Respuesta a una perturbación para El controlador PID sintonizado por LMIs en el Lazo de Concentración.**



**Figura 3.7. Respuesta a una perturbación para El controlador PID sintonizado por LMIs en el Lazo de Temperatura.**

En estas tres últimas graficas (fig. 3.5, 3.6, 3.7) se observa que, para poder visualizar mejor el fenómeno transitorio, fue necesario reducir el tiempo de simulación. Indicando una respuesta en el tiempo con un desempeño muchísimo mejor.

## CONCLUSIONES

Se ha presentado un método interactivo y limpio que permite sintonizar de una manera elegante un conjunto de controladores para ley estática de realimentación, cumpliendo con características de desempeño tipo  $H_2$ . La solución se puede adaptar a varias especificaciones que se puedan clasificar en regiones LMI. El método no requiere realizar desacoples ya que incorpora en el diseño la información completa de la planta. De forma directa el resultado indica con el signo que posee el término de ganancia sobre las matrices  $P_i$ ; si los lazos de realimentación a implementar requieren realimentación o regeneración, esto se indica sin necesidad de realizar un pareamiento o analizar la dinámica individual de cada lazo. Esta característica es posible, ya que en el diseño se incorporó información de gramianos que son útiles para estimar el grado de acoplamiento de las dinámicas que coexisten en un sistema. Las Figuras (3.5-3.7). Muestran la respuesta del controlador PID. Descentralizado usando los parámetros obtenidos por LMIs.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] AYADI, B. (2004). Synthèse de la commande PID par utilisation des fonctions orthogonales. Master's thesis. Ecole Supérieure des Sciences Techniques de Tunis.
- [2] BELL, M. M. (1968). Special functions for scientists and engineers. Van Nostrand. Princeton, NJ.
- [3] BENHADJ BRAIEK, E. (1990). Application des fonctions de Walsh et des fonctions modulatrices à la modélisation des systèmes continus non linéaires. PhD thesis. Université des Sciences et Techniques de Lille, Flandres Artois.
- [4] BREWER, J. W. (1978). Kronecker products and matrix calculus in systems theory. Trans. IEEE Circ. and Syst.
- [5] CHEN, C. and H. HSIAO (1975). Time-domain synthesis via walsh functions. In: IEEE. Vol. 122. pp. 565-570.
- [6] GRADSHTEYN, I. S. and I. M. RYZHIK (1979). Tables of Integrals, Series and Products. Academic Press. New York.
- [7] HERREROS, A., E. BAEYENS and J.R. PERAN (2002). Design of PID-type controllers using multiobjective genetic algorithm. ISA pp. 457-472.
- [8] HWANG, C. and T. Y. GUO (1984). Transfer function matrix identification in MIMO systems via shifted Legendre polynomials. In: Int. J. Control. Vol. 39. pp. 807-814.
- [9] HWANG, C. and Y. P. SHIH (1982). Parameter identification of a class of time-varying systems via orthogonal shifted Legendre polynomials. In: Int. J. Systems Sci.. Vol. 13. p. 209.
- [10] KING, R. E. and P. N. PARASKEVOPOULOS (1979). Parametric identification of discrete-time SISO systems. Int. J. of Contr. 30, 1023-1029.
- [11] LEE, C.H. and C.C. TENG (2003). Calculation of PID controller parameters by using a fuzzy neural network. ISA pp. 391-400.
- [12] LIN, C., Q. WANG and T.H. LEE (2004). An improvement on multivariable PID controller via iterative LMI approach. Automatica 40, 519-525.
- [13] Luyben, W.L. (1986). Simple method for tuning SISO controllers in multivariable systems. Ind. Eng. Chem. Proc. Des. Dev. 25, 654-660.
- [14] NEIDERLINSKI, A. (1971). A heuristic approach to the design of linear multivariable interacting control systems. Automatica 7, 691-701.
- [15] PARASKEVOPOULOS, P. N. (1983). Chebychev series approach to system identification, analysis and optimal control. J. Frankin. Inst. 316, 135-157.
- [16] PARASKEVOPOULOS, P. N. (1985). Legendre series approach to identification and analysis of linear systems. Trans. IEEE. Automat. Contr. AC-30(6), 585-589.
- [17] PARASKEVOPOULOS, P. N. and G. TH. KEKKERIS (1983). Hermite series approach to system identification, analysis and optimal control. In: Pro. Meas. Contr. Conf.. Vol. 2. Athens Greece. pp. 146-149.
- [18] SERAJI, H. and M. TAROKH (1977). Design of PID controllers for multivariable systems. nt. J. of Contr. 26(1), 75-83.
- [19] SHIH, L.S., C.K. YEUNG and B.G. MCINIS (1978). Solution of state-space equations via block-pulse functions. Int. J. Contr. 28, 383-392.
- [20] UNAR, M.A., D.J. MURRAY-SMITH and S. F. A. SHAH (1996). Design and tuning of fixed structure PID controllers. A Survey, University of Glasgow Faculty of Engineering Center for Systems and Control.
- [21] ZHUANG, M. (1992). Computer aided PID controller design. D. Phil. Thesis. University of Sussex.
- [22] ZHUANG, M. and D. P. ATHERTON (1994). PID controller design for a TITO system. In: IEE Proceedings - Control theory and applications. Vol. 141. pp. 111-120.

- [23] ZIEGLER, J.G and N.B. NICHOLS (1942). Optimum setting of automatic controllers. Trans. ASME 64, 759-768.
- [24] Boyd S., ElGhaoui L., Feron E., Balakrishna V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM Studies in Applied Mathematics. 1995.
- [25] Colmenares M Williams, Tadeo M, Fernando Apuntes sobre control robusto y multiobjetivos de sistemas, Editorial Equinocio, 2000.
- [26] Laurent El Ghaoui, Silviu-Lulian Niculescu, Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control. SIAM, 2000.
- [27] Gahinet Pascal, Nemirovski Arcadi, Laub Alan J, Chilali Mahmoud. LMI CONTROL TOOLBOX for use with MATLAB, user guide, The Mathworks, 1995.
- [28] Qing-Guo Wang, Zhen Ye, Wen-Jian Cai, Chan-Chieh Hang, PID Control for Multivariable processes, Spriger. 2008.
- [29] Cao, J. Lam, y Y.-X. Sun, "Static Output Feedback Stabilization: An ILMI Approach", Automatica, Vol. 34, pp. 1641-1645, 1998.
- [30] Zheng, F., Wang, Q.-G., Lee, T.H.: On the design of multivariable PID controllers via LMI approach. Automatica 38, 517-526 (2002)
- [31] Lin, C., Wang, Q.-G., Lee, T.H.: An improvement on multivariable PID controller design via iterative LMI approach. Automatica 40, 519-525 (2004)
- [32] Trofino-Neto, A., Kucera, V.: Stabilization via static output feedback. Automatic Control, IEEE Transactions on 38(5), 764-765 (1993)
- [33] Kucera, V., de Souza, C.E.: A necessary and sufficient condition for output feedback stabilizability. Automatica 31(9), 1357-1359 (1995)
- [34] Boyd, S.P., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishna, V.: Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Siam Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA (1994)
- [35] Cao, Y.-Y., Lam, J., Sun, Y.-X.: Static output feedback stabilization: An ILMI approach. Automatica 34(12), 1641-1645 (1998)
- [36] Crusius, C.A.R., Trofino, A.: Sufficient LMI conditions for output feedback control problems. Automatic Control, IEEE Transactions 44(5), 1053-1057 (1999) inequalities approach. Automatica 33, 669-673 (1997)
- [37] Lin, C., Lam, J., Wang, J.-L., Yang, G.H.: Analysis on robust stability for interval descriptor systems. Systems and Control Letters 42, 267-278 (2001)
- [38] Lin, C., Wang, J.-L., Soh, C.B.: Maximum bounds for robust stability of linear uncertain descriptor systems with structured perturbations. International Journal of Systems Science 34(7), 463-467 (2003), 1923 (1997)
- [39] Ziegler, J.G., Nichols, N.B.: Optimum settings for automatic controllers. Trans. ASME 64, 759 (1942)
- [40] Syrmos, V.L., Abdallah, C.T., Dorato, P., Grigoriadis, K.: Static output feedback, a survey. Automatica 33, 125-137 (1997)
- [41] Fu, M., Luo, Z.Q.: Computational complexity of a problem arising in fixed order output feedback design. Systems & Control Letters 30, 209-215 (1997)
- [42] Gao, H., Lam, J., Wang, C., Wang, Y.: Delay-dependent output-feedback stabilisation of discrete-time systems with time-varying state delay. IEE Proc-Control Theory Appl. 151, 691-698 (2004)
- [43] Yu, J.T.: A convergent algorithm for computing stabilizing static output feedback gains. IEEE Trans. Automat. Contr. 49, 2271-2275 (2004)
- [44] Fujimori, A.: Optimization of static output feedback using substitutive LMI formulation. IEEE Trans. Automat. Contr. 49(16), 995-999 (2004)
- [45] Zhou, K., Doyle, J.C., Glover, K.: Robust and Optimal Control. Prentice-Hall, New Jersey (1996)
- [46] He, Y., Wang, Q.G.: An improved ILMI method for static output feedback control with application to multivariable PID control. IEEE Trans. On Automatic Control 51(10), 1678-1683 (2006).

- [47] Ramirez P. Gustavo. Aplicación de las LMIs en la sintonía de controladores, PID MIMO para procesos Fuertemente acoplados. Congreso internacional de la asociación Chilena de automatica, Chile, 2010.
- [48] J. Bernussou, J.C. Geromel y P.L.D. Peres, "A Linear Programming Oriented Procedure for Quadratic Stabilization of Uncertain Systems", *Systems and Control Letters*, Vol. 13, pp. 65-72, 1989.
- [49] E. Granado, W. Colmenares, J. Bernussou y G. Garcia, "A Robust multivariable PID controller with constraints via LMI approach", *Proceedings of 4th IFAC Symposium on Robust Control Design*. Milan, Italy, 2003.
- [50] I.R. Petersen, "A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems", *Systems and Control Letters*, Vol. 8, pp. 351-357, 1987.
- [51] C. Scherer, P. Gahinet y M. Chilali, "Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42, pp. 896-911, 1997.
- [52] [Luyben] Luyben William L. *PROCESS MODELING, SIMULATION, AND CONTROL FOR CHEMICAL ENGINEERS*. McGraw-Hill, Publishing Company. 1999.
- [53] Grasse, K.A., Bar-on, J.R.: Regularity properties of the phase for multivariable systems. *SIAM J. Control Optim.* 35(4), 1366–1386 (1997)

## CAPÍTULO 4

# FUNDAMENTOS DE OPTIMIZACIÓN Y CONTROL COLABORATIVO

Antes de iniciar con la presentación de este capítulo se aclara el concepto de colaboración que se ha adoptado en esta propuesta y está orientado a resolver un problema de rechazo de perturbaciones en un proceso, donde se hace control de un conjunto de dinámicas complejas que están acopladas de forma física, este tipo de **comportamiento** se considera en la actualidad como un reto en teoría de control [66]. Estos problemas son comunes en procesos químicos y servomecanismos complejos. Un aporte es haber empleado técnicas colaborativas para control de procesos MIMO descentralizados y acoplados. En la actualidad hay muy poco o casi nada de material de consulta en este tema. Las técnicas que proponen agentes colaborativos fueron asimiladas en esta propuesta a dinámicas que son controladas por medio de algún controlador de tipo PI o PID.

La primera parte de este capítulo presenta un sistema de cooperación para la minimización de una función general de energía, esa función se puede asimilar luego a otros planteamientos similares. El sistema consta de un número de agentes que trabajan juntos en forma cooperativa para lograr un objetivo determinado. Se presenta un **esquema de cooperación** que tiene dos parámetros para controlar la cooperación de los agentes desde dos perspectivas diferentes; el primero se utiliza para controlar el nivel de influencia de los agentes en la toma de decisiones, y el segundo se utiliza para controlar la velocidad de intercambio de información entre los agentes. Diferentes ajustes de esos parámetros conducen a comportamientos completamente diferentes del sistema. Cuando el nivel de influencia está en equilibrio respecto a la velocidad de intercambio de información, el sistema siempre alcanza el equilibrio único y sin importar sus condiciones iniciales. Esto último se tiene en cuenta en esta propuesta ya que se demuestra que resolver un problema de optimización por técnicas colaborativas aporta efectos mucho más efectivos que los que suelen aportar otras técnicas, esto es, búsqueda efectiva de un mínimo global y costo computacional reducido, dejando así una poderosa y efectiva herramienta para tratar asuntos de control de carácter no lineal.

Otra característica interesante es que se puede tratar el problema de la no convexidad mucho mejor que cualquier otra técnica de optimización. El equilibrio en esta técnica es un indicador de la existencia de un estado óptimo global del sistema. Si este se alcanza se dice que hay **consenso** entre los agentes. Cuando el nivel de influencia es el más fuerte, entonces el sistema siempre puede alcanzar el equilibrio de Nash [1,2]. Éste es un equilibrio estratégico que se estudia en teoría de juegos, y trata formalmente el conflicto y la cooperación en un sistema de agentes [18, 20]. En la segunda parte de este capítulo, se trata el problema del consenso y se muestra que tiene una característica que explota esta propuesta y es su capacidad al rechazo de las perturbaciones, que sumado a un diseño orientado al cumplimiento de una norma  $H_\infty$  o  $H_2$ , fortalece aún más el rechazo. Recalcando que ese poder está comprometido con un buen diseño de la **región de consenso** y una adecuada configuración de su esquema de comunicación expresado en una matriz.

## 4.1 INTRODUCCIÓN

Los métodos generales para la optimización combinatoria son: 1) búsqueda local, [9, 10], 2) recocido simulado [6], 3) algoritmos genéticos [3], 4) búsqueda tabú [10], 5) Branch and Bound [7, 5, 10], y 6) programación dinámica [5, 10]. Los primeros cuatro métodos se clasifican como optimización local. Muchos problemas de optimización para visión por computador, procesamiento de imágenes, y otros campos, tienen que lidiar con problemas que son de naturaleza no lineal y de gran escala. Muchas veces, tienen óptimos locales en un número exponencialmente creciente con el tamaño del problema. Esto desafiaría la eficacia en la práctica de los primeros cuatro métodos debido al problema del óptimo local. Por otra parte, estos problemas tienen que lidiar con miles (o millones) de variables, que están más allá de la capacidad de los dos últimos métodos, en términos de tiempo y la complejidad de espacio.

En este capítulo se presenta un sistema cooperativo para resolver un problema práctico a gran escala de tipo combinatorio. El sistema consta de múltiples agentes dinámicos. Estos agentes pueden ser personas, neuronas, computadoras, empresas, aviones, o cualquier combinación de éstos. Al principio, un problema se descompone en una serie de sub-problemas con complejidades manejables y cada uno se le asigna a un agente. Entonces, los agentes trabajan juntos de forma cooperativa, en lugar de forma independiente, para resolver los sub-problemas. Se presenta una definición formal de un sistema cooperativo para la optimización. Los fundamentos teóricos del sistema también se presentan. La capacidad computacional del sistema está determinada por su esquema de cooperación entre los agentes del sistema. Un esquema de cooperación novedoso que determina los comportamientos computacionales del sistema, con dos parámetros para controlar la cooperación de los agentes desde dos perspectivas diferentes. El primero se utiliza para controlar el nivel de influencia entre agentes en la toma de decisiones. El segundo se utiliza para controlar la velocidad de los intercambios de información entre los agentes.

Diferentes ajustes de los parámetros podrían dar lugar a comportamientos completamente diferentes. Algunos de éstos están directamente relacionados con la búsqueda de óptimos globales y muchos de ellos no están incluidos por los métodos de optimización convencionales. Esto se presenta en la sección de fundamentos teóricos. El problema de optimización basado en restricciones binarias se presenta en este capítulo como un ejemplo para mostrar el principio de la descomposición de un problema complejo de optimización en un conjunto de sub-problemas de complejidad manejable. Muchos problemas como el de visión por computador y procesamiento de imágenes se pueden adaptar a este esquema. Además, el famoso problema del agente viajero se formaliza como un caso especial del problema en la sección 2. Para demostrar el poder de los sistemas cooperativos de optimización por consenso, se muestran aplicaciones exitosas de cooperación de sistemas en la solución de problemas de optimización a gran escala. Se demostrará que los sistemas de optimización por cooperación funcionan mucho mejor que otros métodos de optimización.

## 4.2 OPTIMIZACIÓN DE SISTEMAS POR COOPERACIÓN

Un sistema cooperativo para optimización consiste en un número de agentes que trabajan juntos en forma cooperativa para lograr cierto objetivo. Estos agentes pueden ser, entre otros, personas, neuronas, computadoras, las empresas, los aviones, o cualquier combinación de estos.

**Definición 1:** Un sistema cooperativo para la optimización consiste en un conjunto de agentes,  $A$ :

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\};$$

Y para cada agente  $i$

$$\text{Un conjunto de opciones: } D_i = \{o_1, o_2, \dots, o_{m(i)}\}$$

$$\text{Una función objetivo: } E_i: D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n \rightarrow \mathfrak{R}_1$$

$$\text{Un esquema de cooperación para hacer la escogencia: } S_i: D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n \rightarrow D_i$$

La función objetivo del sistema es  $\sum_i E_i(x)$ , denotando como  $E(x)$ , donde

$$x \in D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$$

La elección del agente  $i$  se denota como  $\tilde{x}_i \in D_i$ , todos ellos forman juntos la elección del sistema, que se expresa como  $\tilde{x}$ .

$$\tilde{x} = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n\}$$

Sea  $D$  el producto Cartesiano de los  $D_i$

$$D = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$$

Obviamente  $\tilde{x} \in D$ . A veces, la función objetivo de un sistema es también llamada la función objetivo global del sistema y las funciones objetivo de los agentes se llaman los sub-objetivos del sistema [14]. Una solución óptima del sistema se denota como  $(x_1^*, \dots, x_n^*)$  o simplemente  $x^*$ , donde  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ . Además se llama el óptimo global de  $E(x)$ . El valor mínimo de la función objetivo se denomina  $E^*$ . Obviamente  $E^* = E(x^*)$ .

Debido a la interdependencia entre los sub-objetivos, esto no es un algoritmo eficiente que pueda garantizar la búsqueda de un óptimo global, durante un tiempo polinomial. Esquemas diferentes de cooperación pueden conducir a comportamientos computacionales sustancialmente diferentes en la optimización. Por ejemplo, podemos tener un esquema de cooperación simple y dejar que cada agente haga una elección de una manera que se minimice su propia función objetivo. Sin embargo, un sistema con este esquema de cooperación difícilmente puede encontrar la solución óptima por sí misma.

El esquema de cooperación propuesto en este trabajo es dejar que los agentes se comprometan entre sí en la toma de sus decisiones. Se hace una analogía con un equipo de juego, donde los miembros del equipo trabajan juntos para lograr lo mejor para el equipo, pero no necesariamente lo mejor para cada miembro. Cuando un agente intenta optimizar su propia función objetivo se comunica con los otros agentes para considerar sus opciones. Su propia elección se realiza como

consecuencia de comprometer entre el, la elección de sí mismo y la de otros agentes en un intento de resolver los conflictos según el abanico de opciones.

La investigación teórica que sigue muestra que todos los agentes que operan juntos de esta manera encuentran una mejor opción para el sistema, que el esquema simple. Este es un proceso iterativo, en el que la operación más importante es descartar opciones. El descarte de opciones es un proceso en el que cada agente elimina ciertas opciones de su conjunto de opciones, que tienen pocas probabilidades de ser elegidas en una solución para el sistema. A medida que avanzan las iteraciones se pueden esperar más y más opciones que se descartan de las capacidades establecidas para cada agente. Después algunos pasos de iteración, si sólo hay una opción para cada agente, entonces se encuentra una solución para el sistema. La razón para hacer eso se basa en las propiedades computacionales de un sistema del tipo que se muestran en las siguientes secciones. En concreto, hay condiciones necesarias para que el sistema pueda decidir si una opción puede ser la solución óptima.

### 4.3 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA COOPERATIVO

El sistema cooperativo se puede aplicar para reducir al mínimo las funciones de energía del sistema en estudio. Tiene la siguiente forma general:

$$E(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_i C_i(x_i) + \sum_{i,j,i \neq j} C_{ij}(x_i, x_j) \quad (4.1)$$

La minimización de una función de energía de esta forma se denomina optimización restringida binaria.  $C_i$  Se llama una restricción unaria sobre la variable  $x_i$  y  $C_{ij}$  es llamada una restricción binaria sobre las variables  $x_i$  y  $x_j$ . La optimización de (1) es NP-hard.

El famoso problema del agente viajero (TSP) también se puede formalizar como la minimización de funciones de energía de la forma anterior. En una instancia del TSP se nos da un número entero  $n > 0$  y la distancia entre cada par de  $n$  ciudades en forma de cualquier matriz  $n \times n$ ,  $(d_{ij})_{n \times n}$ , donde  $d_{ij} \in \mathbb{R}^+$ . Un recorrido es un camino cerrado que visita cada ciudad exactamente una vez. El problema es encontrar un recorrido con longitud total mínima.

Sea  $x_i$  la  $i$ ésima ciudad en un recorrido o visita,  $y$ .

$D_i = \{\text{ciudad}_1, \text{ciudad}_2, \dots, \text{ciudad}_n\}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Obviamente,  $x_i \in D_i$

Dejando que  $x_{a(i)}$  sea la ciudad adyacente a la ciudad  $x_i$  en un tour, entonces.

$$a(i) \in \{(i + n - 1)\%n, (i + n + 1)\%n\}$$

Donde % es el operador modulo.

Dejando que  $C_i(x_i) = 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

Y

$$C_{ij}(x_i, x_j) = \begin{cases} \infty & \text{si } x_i = x_j \\ \frac{d_{x_i x_j}}{2} & \text{si } j = a(i) \text{ y } x_i \neq x_j \\ 0 & \text{si } j \neq a(i) \text{ y } x_i \neq x_j \end{cases}$$

Con esas escogencias, la solución óptima  $x^*$  en (1) es el recorrido más corto con una longitud de  $E^*$ .

## 4.4 APLICANDO LA COOPERACIÓN PARA RESOLVER EL PROBLEMA

Para utilizar el sistema cooperativo en el problema que se planteó en la *Definición 1*, la función objetivo (1) se puede descomponer como la suma de las siguientes  $n$  funciones sub-objetivo, ver ecuación 4.2.

$$C_i(x_i) + \sum_{j,j \neq i} C_{ij}(x_i, x_j) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1)$$

Y establecer la  $i$ ésima función como la función objetivo para el agente  $i$ ,

$$E_i(x) = C_i(x_i) + \sum_{j,j \neq i} C_{ij}(x_i, x_j)$$

El esquema de cooperación  $S_i$  para el agente  $i$  se define como hacer una elección, de tal manera que se minimice la siguiente función en la ecuación 4.2.

$$(1 - \lambda_k)E_i(x) + \lambda_k \sum w_{ij} c_j^{(k-1)}(x_j), \quad (4.2)$$

Que se llama la función objetivo modificada para el agente  $i$ , expresada como  $\tilde{E}_i^{(k)}(x)$ , donde  $k$  es la iteración.  $E_i(x)$  es la función objetivo del agente  $i$ .  $w_{ij}$  son valores reales no negativos, y  $(w_{ij})_{n \times n}$  debe ser una matriz de propagación definida como sigue:

**Definición 2:** Una matriz de propagación  $(w_{ij})_{n \times n}$  es una matriz cuadrada irreducible, no negativa que satisface la siguiente condición.

$$\sum_{i=1}^n w_{ij} = 1 \quad \text{para } 1 \leq j \leq n$$

Su  $i$ ésima fila se denota como  $w_i$ , y toda la matriz se expresa como  $W$ . Una matriz  $W$  se llama reducible si existe una matriz de permutación  $P$  de tal manera que  $PWP^T$  tiene la forma de bloque.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$$

$c_j^{(k-1)}(x_j)$ , en (4.2), es una restricción unaria introducida por el sistema en la variable  $x_j$ , llamada la asignación restringida. La solución intermedia se almacena en la minimización de la función objetivo modificada  $\tilde{E}_i^{(k)}$  y se puede reescribir así.

$$\min \tilde{E}_i^{(k)}$$

Como

$$\min_{x_i} \min_{x_j \in X \setminus x_i} \tilde{E}_i^{(k)}(x)$$

Donde  $X \setminus x_i$  expresa el conjunto  $X_i$  menos  $\{x_i\}$  el resultado de la optimización interna es definida como  $c_i^{(k)}(x_i)$ ,

$$c_i^{(k)}(x_i) = \min_{x_j \in X \setminus x_i} \tilde{E}_i^{(k)}(x) \quad (4.3)$$

Equivalentemente se puede reescribir como una ecuación diferente de  $c_i^{(k)}(x_i)$  por sustitución de  $\tilde{E}_i^{(k)}(x)$  usando (4.2).

$$c_i^{(k)}(x_i) = \min_{x_j \in X \setminus x_i} \left( (1 - \lambda_k) E_i(x) + \lambda_k \sum_j w_{ij} c_j^{(k-1)}(x_j) \right) \quad (4.4)$$

La escogencia del agente  $x_i$  debe ser tal que  $c_i^{(k)}(x_i)$  es el valor mínimo de  $\tilde{E}_i^{(k)}$  bajo la escogencia. Para minimizar  $\tilde{E}_i^{(k)}$ , aquellos valores de  $x_i$  que tienen los valores más pequeños de la función  $c_i(x_i)$  son preferidos por encima de los valores más grandes. Por lo tanto,  $c_i^{(k)}(x_i)$  define las preferencias de las opciones para el agente  $i$ .

Adicionando  $c_i^{(k)}(x_i)$  junto con  $E_i(x)$  en  $\tilde{E}_i^{(k)}(x)$  (ver ecuación 4.2) le permite al agente  $i$  comprometer su escogencia con las de los otros agentes. El parámetro  $\lambda_k$  en (4.2) controla el nivel de cooperación en la iteración  $k$ . Es llamado el esfuerzo de cooperación que debe satisfacer el rango de valores  $0 \leq \lambda_k < 1$ . Un valor mayor para  $\lambda_k$  en (4.4) le permite al agente  $i$  sopesar las escogencias de los otros agentes por encima de él mismo. Como consecuencia, se logra una cooperación fuerte en este caso.

A partir de este argumento se encontró que una fuerte cooperación incrementa la oportunidad de encontrar una solución óptima para el sistema [14].

Cuando el agente  $i$  hace una escogencia para minimizar su función objetivo modificada  $\tilde{E}_i^{(k)}(x)$ , además hace sugerencias sobre las escogencias de los otros agentes. Haciendo  $\tilde{x}_j(\tilde{E}_i)$  sea la  $j$ -ésima componente en la solución para  $\tilde{E}_i^{(k)}(x)$ , ese valor es la sugerencia del agente  $i$  para la escogencia del agente  $j$ . Aunque podemos aumentar la fuerza de cooperación  $\lambda_k$  en (4.2), para que el agente  $i$  se comprometa más con otros agentes, esto aún no garantiza que el valor es el mismo que dio la elección de agente  $j$ ,  $\tilde{x}_j(\tilde{E}_j)$ .

Si la elección sugerida para el agente  $j$  desde el agente  $\tilde{x}_j(\tilde{E}_i)$ , es la misma que la elección del agente  $j$ ,  $\tilde{x}_j(\tilde{E}_j)$ , para todo  $i$ , se dice que el sistema cooperativo ha llegado a un consenso para el agente  $j$ . Si se alcanza el consenso para todos los agentes, se dice que el sistema cooperativo ha encontrado una solución de consenso. Se prueba luego que si el sistema converge a una solución de consenso, debe también ser la solución óptima de la función  $E(x)$ .

**Definición 3:** Se dice que el sistema alcanza una solución de consenso, si para cualquier  $j$ ,  $\tilde{x}_j(\tilde{E}_i) = \tilde{x}_j(\tilde{E}_j)$ , para cualquier  $\tilde{E}_i(x)$  que contiene la variable  $\tilde{x}_j$ . En cada iteración, cada agente mejora su asignación restringida  $c^{(k)}(x_i)$  usando (4.4). Si ninguno de los agentes puede refinar su asignación restringida más allá de cierta iteración, entonces el sistema ha alcanzado un equilibrio.

**Definición 4:** Se dice que el sistema ha alcanzado una condición de equilibrio, si para cualquier agente  $i$ , no puede mejorar su asignación restringida,

$$c^{(k)}(x_i) = c^{(k-1)}(x_i) \quad (4.5)$$

La optimización cooperativa también ofrece las condiciones necesarias en cada iteración para descartar valores de las variables. Es decir, para cualquier opción  $x_i$ , si se encuentra en una solución óptima, entonces debería satisfacer la siguiente desigualdad.

$$c_i^{(k)}(x_i) \leq c_i^{(k)}(\tilde{x}_i) + t_i^{(k)} \quad (4.6)$$

Cualquier opción que no satisface la desigualdad anterior se puede descartar. Por la forma exacta de  $t_i^{(k)}$ , véase (Ec.4.39) más adelante.

## LA MATRIZ DE PROPAGACIÓN

La matriz de propagación  $W$  define las relaciones de vecindad entre los agentes, donde el agente  $i$  es el vecino del agente  $j$  sólo si  $w_{ij}$  no es cero. En el proceso de optimización (4.4), los agentes sólo se comunican con sus vecinos.

Otra manera de entender el papel de  $w_{ij}$  en el proceso de optimización (4.4) es tratarlo como un proceso de propagación para  $c_i^{(0)}(x_i)$ . Para que quede claro, se puede simplificar el proceso, disminuyendo el operador de minimización y establecer  $\lambda_k = 1$ ,

$$\begin{bmatrix} c_1^{(k)}(x_1) \\ c_2^{(k)}(x_2) \\ \vdots \\ c_n^{(k)}(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \cdots & w_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^{(k-1)}(x_1) \\ c_2^{(k-1)}(x_2) \\ \vdots \\ c_n^{(k-1)}(x_n) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

O equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} c_1^{(k)}(x_1) \\ c_2^{(k)}(x_2) \\ \vdots \\ c_n^{(k)}(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \cdots & w_{nn} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} c_1^{(0)}(x_1) \\ c_2^{(0)}(x_2) \\ \vdots \\ c_n^{(0)}(x_n) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

El proceso (4.8) puede propagar de manera uniforme las asignaciones restringidas  $c_i^{(0)}(x_i)$  para cualquier elección de  $w_{ij}$ , siempre y cuando  $\sum_i w_{ij} = 1$ . Esto es

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} c_1^{(k)}(x_1) \\ c_2^{(k)}(x_2) \\ \vdots \\ c_n^{(k)}(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_1 & \cdots & \mu_1 \\ \mu_2 & \mu_2 & \cdots & \mu_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_n & \cdots & \mu_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^{(0)}(x_1) \\ c_2^{(0)}(x_2) \\ \vdots \\ c_n^{(0)}(x_n) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Dónde

$$\mu_i = \frac{1}{n} \sum_j w_{ij} \quad (4.10)$$

En otras palabras, el proceso (4.8) alcanza la uniformidad en la propagación de cada asignación restringida  $c_i^{(k)}(x_i)$ ,

$$c_i^{(k)}(x_i) = \frac{\mu_i}{n} \sum_i c_i^{(0)}(x_i), \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty$$

Si la matriz de propagación también es simétrica, es decir, para cualquier  $i$  y  $j$ ,

$$w_{ij} = w_{ji},$$

Entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} c_1^{(k)}(x_1) \\ c_2^{(k)}(x_2) \\ \vdots \\ c_n^{(k)}(x_n) \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^{(0)}(x_1) \\ c_2^{(0)}(x_2) \\ \vdots \\ c_n^{(0)}(x_n) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

En este caso, el proceso (4.8) también logra la uniformidad en la propagación a todas las asignaciones restringidas,

$$c_1^{(k)}(x_1) = c_2^{(k)}(x_2) = \dots = c_n^{(k)}(x_n) = \frac{1}{n} \sum_j c_j^{(0)}(x_j) \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty \quad (4.12)$$

A partir de estas investigaciones, se sabe que los resultados del proceso de propagación harán que la asignación restringida  $c_i^{(k)}(x_i)$  contenga no sólo el resultado de la optimización del *iesimo* agente, es decir,  $c_i^{(0)}(x_i)$ , sino también la de los demás, es decir,  $c_j^{(0)}(x_i)$  para cualquier  $j \neq i$ . A medida que avanza la iteración, la asignación restringida  $c_i^{(k)}(x_i)$  tiende a tener los resultados de la optimización de todos los agentes de una manera uniforme, (véase la ecuación (4.10) y la ecuación (4.12), independiente de la elección de  $w_{ij}$ . Esta es otra manera de entender la razón por la que el proceso de optimización (4.4) puede encontrar el óptimo global a través de la optimización por cooperación de los agentes en un sistema. En este capítulo llamamos la matriz  $(w_{ij})_{n \times n}$  la matriz de propagación.

## 4.5 FORMA GENERAL DEL SISTEMA COOPERATIVO

La sección anterior ha demostrado que el sistema cooperativo se puede utilizar para resolver la minimización de una función objetivo en una forma general (4.1). La función objetivo del famoso TSP también se ha planteado con el uso de esta forma. De hecho, el método de optimización del sistema definido es más general de lo que se ha explicado. Esto no impone ninguna restricción de aridad en las restricciones de la función objetivo (4.1). Puede contener limitaciones de aridad, como unarias y binarias. No hay restricciones sobre la función objetivo para los agentes; siempre y cuando  $\sum_i E_i(x) = E(x)$ . Por lo tanto, el sistema se puede utilizar para minimizar una función objetivo, siempre y cuando la función pueda descomponerse en la suma de un conjunto de funciones sub-objetivo. No hay ninguna suposición sobre la independencia de la subfunción objetivo. Lo contrario, el problema de minimización original se convierte en trivial cuando se va a

resolver. Debido a la interdependencia de las funciones sub-objetivo, como en el caso de la optimización basada en restricciones binarias, una optimización se convierte en un problema NP-duro la mayor parte del tiempo.

**Definición 5:**  $\{E_i(X_i)\}$  se llama una buena descomposición de una función objetivo  $E(x)$  siempre que se cumplan las tres condiciones siguientes:

- $E_i(x)$  contiene  $x_i$
- $\sum_i E_i(x) = E(x)$ ,
- Decrementos en  $E_i(x)$  conducen a la disminución de  $E(x)$ , para cualquier  $x_i \in D_i$ .

Si se satisfacen sólo los dos primeros, se llama una descomposición de  $E(x)$ .

**Fórmula (2)** proporciona una sencilla descomposición de una función objetivo en la forma general (4.1). Una buena descomposición general, se presenta a continuación:

$$\frac{C_i(x_i)}{2} + \sum_j (C_{ij}(x_i, x_j) + w_{ij}C_j(x_j)/2), \quad (4.13)$$

Donde  $w_{ij}$  puede ser cualquier valor real tan grande como  $\sum_i w_{ij} = 1$ .

En su forma más general, el sistema sólo necesita una composición de  $E(x)$ . La función objetivo para el agente  $i$  es  $E_i(x)$ . El esquema de cooperación de  $S_i$  para el agente  $i$  todavía es elegido por la escogencia de  $x_i \in D_i$  para minimizar la función objetivo modificada (4.3), que puede contener limitaciones de aridad de más de dos. La función de actualización para las asignaciones restringidas  $c^{(k)}(x_i)$  sigue siendo la misma que en la ecuación (4.5). De manera equivalente, la elección del agente  $i$  en la iteración  $k$ ,  $\tilde{x}_i^{(k)}$ , es la  $x_i$  que minimiza  $c_i^{(k)}(x_i)$ :

$$c_i^{(k)}(\tilde{x}_i^{(k)}) = \min_{x_i \in D_i} c_i^{(k)}(x_i)$$

Esto es

$$S_i = \left\{ \tilde{x}_i^{(k)} \mid c_i^{(k)}(\tilde{x}_i^{(k)}) = \min_{x_i \in D_i} c_i^{(k)}(x_i) \right\} \quad (4.14)$$

Dejando que:  $c^{(k)} = (c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, \dots, c_n^{(k)})$ , entonces la ecuación de diferencias (4.4) para la optimización cooperativa se puede simplificar a

$$c_i^{(k)}(x_i) = \min_{x_j \in X \setminus x_i} ((1 - \lambda_k)E_i + \lambda_k(w_i, c^{(k-1)})) \quad (4.15)$$

Donde  $(w_i, c^{(k-1)})$  representa el producto escalar de  $w_i$  y  $c^{(k-1)}$ .  $w_i$  Es la  $i$ -ésima fila de la matriz de propagación definida en la Definición 2. La ecuación de diferencia anterior es la versión paralela para actualizar  $c_i^{(k)}(x_i)$ . Es decir, todos los agentes actualizan sus asignaciones restringidas de forma sincrónica. También se cuenta con una versión secuencial donde los agentes actualizan sus asignaciones restringidas de forma asincrónica. Es decir, en el momento  $k$ , sólo hay una agente  $i$  calculando (4.15), mientras que para otros agentes  $j, j \neq i$ ,

$$c_j^{(k)}(x_j) = c_j^{(k-1)}(x_j)$$

Tal esquema de cooperación garantiza que la función objetivo del sistema es  $\sum_i E_i(x)$ . Cualquier otro esquema de cooperación conducirá a un comportamiento computacional diferente del sistema. Por ejemplo, cualquier cambio en la forma de la función objetivo modificada (4.2), tal como  $\sum_i w_{ij} \neq 1$  o  $\sum_j w_{ij} = 1$  (sumatoria sobre  $j$  en lugar de  $i$ ), dará lugar a una función objetivo diferente para el sistema y luego será difícil investigar sobre sus propiedades computacionales.

## 4.6 MARCO DE COOPERACIÓN

El esquema de cooperación (4.14) del sistema cooperativo depende de la asignación restringida  $c_i^{(k)}(x_i)$ , que se actualiza de forma iterativa, basada en la ecuación (4.4). Esta función de actualización para la asignación restringida  $c_i^{(k)}(x_i)$  tiene el parámetro  $\lambda_k$  para controlar el nivel de cooperación entre los agentes. Puede ser generalizado aún más por el acto de dividir la función de actualización (4.4) en dos pasos. En primer lugar, para cada opción  $x_i$ , la búsqueda de la solución, representada como  $\tilde{x}(\tilde{E}_i(x_i))$ , para la función objetivo modificada en el lado derecho de la función es

$$\min_{x_j \in X \setminus x_i} \left( (1 - \lambda_k)E_i(x) + \lambda_k \sum_j w_{ij} c_j^{(k-1)}(x_j) \right) \quad (4.16)$$

Luego actualizando la asignación restringida usando la solución.

$$c_i^{(k)}(x_i) = (1 - \mu_k)E_i(\tilde{x}(\tilde{E}_i(x_i))) + \mu_k \left( \sum_{j, j \neq i} w_{ij} c_j^{(k-1)} \tilde{x}_j(\tilde{E}_i) + w_{ii} c_i^{(k-1)}(x_i) \right), \quad (4.17)$$

Donde  $\lambda_k$  en (4.4) se sustituye por  $\mu_k$ . Si  $\mu_k = \lambda_k$ , entonces la función de actualización retrocede a la forma original. El esquema de cooperación definida por (4.16) y (4.17) es la versión paralela. Es decir, todos los agentes hacen el hallazgo de la solución después de la asignación restringida en la actualización sincrónica. También se cuenta con una versión secuencial donde los agentes hacen estas tareas de forma asíncrona. Es decir, en el instante  $k$ , sólo hay una agente  $i$  que calcula (4.16) y (4.17), mientras que para otros agentes  $j, j \neq i$ ,

$$c_j^{(k)}(x_j) = c_j^{(k-1)}(x_j)$$

Donde  $\lambda_k$  y  $\mu_k$  son dos parámetros usados por el esquema generalizado de cooperación.  $\lambda_k$  Decide el peso de la información global  $c_j^{(k-1)}(x_j)$  contra la información local  $E_i$  en la minimización de la función objetivo modificada, si  $\lambda_k \rightarrow 1$ , entonces cada agente toma decisiones que son de lo mejor sólo para los demás y sacrifica por completo el interés propio. Por lo tanto,  $\lambda_k$  se denomina el *nivel de influencia del sistema*.

El parámetro  $\mu_k$  decide el peso de la información global  $c_j^{(k-1)}(x_j)$  contra la información local  $E_i$  en la actualización de la restricción de asignación para el agente  $i$ . Un valor grande de  $\mu_k$  conduce a un flujo de información más rápido entre los agentes.  $\mu_k \rightarrow 1$ , entonces la asignación restringida para cada agente es abrumada por la información global  $c_j^{(k-1)}(x_j)$ . Por lo tanto, controla la

velocidad de intercambio de información entre los agentes en el sistema, y se denomina la *tasa de intercambio de información del sistema*.

Esos dos parámetros juntos controlan la cooperación entre los agentes en dos perspectivas diferentes. El sistema cuenta con nuevas propiedades emergentes de tipo computacional, para el comportamiento colectivo de los agentes que trabajan juntos bajo este esquema de cooperación generalizada. Diferentes instancias del esquema se pueden definir mediante el uso de diferentes configuraciones de los dos parámetros. Como consecuencia, el sistema establece diferentes algoritmos de optimización con diferentes propiedades computacionales. Por lo tanto, el esquema cooperativo generalizado ofrece un marco para definir diferentes algoritmos de optimización. Mostraremos en la siguiente sección que la optimización definida por el sistema se degrada a la optimización local convencional, cuando el nivel de influencia está en su punto más fuerte. En este caso, se puede lograr una solución de consenso entre todos los agentes, pero las decisiones difícilmente pueden ser las mejores para el sistema en su conjunto, debido al problema del óptimo local que heredaron en el paradigma de la optimización local. Cuando el nivel de cooperación es completamente equilibrado, es decir  $\lambda_k = \mu_k$ , entonces cualquier solución de consenso para el sistema converge y ésta también será la solución óptima del sistema. En este caso, tiene el comportamiento deseable de una optimización cooperativa. Por lo tanto, la optimización local y la optimización cooperativa se unifican en este marco como casos especiales, utilizando diferentes configuraciones del programa de cooperación generalizada.

También vamos a demostrar que el proceso de convergencia es lento cuando hay una mayor velocidad de intercambio de información, pero el sistema es más tolerante al ruido y tiene una alta oportunidad de llegar a un consenso entre los agentes. Por otro lado, una menor velocidad de intercambio, lleva a un proceso de convergencia más rápido, pero el sistema es menos tolerante al ruido y tiene una menor probabilidad de llegar a un consenso entre los agentes.

## 4.7 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

En esta sección se mostrarán varias propiedades importantes del sistema cooperativo. Se mostrará que el sistema con una cooperación equilibrada tiene un único equilibrio. El sistema siempre converge a un equilibrio con una tasa exponencial, con cualquier condición inicial es insensible a la perturbación y a sus soluciones intermedias. Hay condiciones suficientes para que el sistema identifique el óptimo global y se dan las condiciones necesarias para que el sistema descarte opciones para así reducir espacios de búsqueda.

Sin pérdida de generalidad, asumimos que todas las funciones de energía son no negativas a lo largo de este capítulo. En primer lugar, vamos a mostrar las propiedades computacionales del sistema cuando se opera en paralelo; la influencia el nivel y el tipo de cambio están en equilibrio, es decir,  $\lambda_k = \mu_k$  para cualquier  $k$ .

### Propiedades generales

El siguiente teorema muestra que  $c_i^{(k)}(x_i)$  para  $x_i \in D_i$  tiene una relación directa a la cota más baja en el costo óptimo  $E^*$ .

**Teorema 1:** *Dada cualquier matriz de propagación  $W$  y la condición inicial en general  $c^0 = 0$  o  $\lambda_1 = 0$ , entonces  $\sum_i c_i^k(x_i)$  es una cota inferior de  $E(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , es decir*

$$\sum_i c_i^k(x_i) \leq E(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{para cualquier } k > 1 \quad (4.18)$$

En particular, considerando  $E_{-}^{(k)} = \sum c_i^{(k)}(\tilde{x}_i)$  entonces  $E_{-}^{(k)}$  es una cota inferior del coste óptimo  $E^*$ , que es

$$E_{-}^{(k)} \leq E^*$$

Aquí, el subíndice "-" en  $E_{-}^{(k)}$  indica que se trata de una cota inferior en  $E^*$ . Este teorema nos dice que  $E_{-}^{(k)} = \sum c_i^{(k)}(\tilde{x}_i)$  proporciona una cota inferior del función de energía  $E^*$ . Se mostrará en el siguiente Teorema 2, que este límite se mejora a medida que avanza cada iteración.

**Demostración:** Para probar el Teorema 1, usamos el principio de inducción matemática

$k = 1$

Caso 1: Escoja  $c^{(0)} = 0$  de (4.15)

$$\begin{aligned} \sum_i c_i^{(1)}(x_i) &= \sum_i \min_{x_j, j \neq i} ((1 - \lambda_1)E_i) \\ &\leq (1 - \lambda_1) \sum_i E_i = (1 - \lambda_1)E(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\leq E(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Caso 2: Escoja  $\lambda_2 = 0$  de (4.15),

$$\sum_i c_i^{(1)}(x_i) = \sum_i \min_{x_j, j \neq i} E_i \leq \sum_i E_i = E(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Por lo tanto, la desigualdad (4.18) se hace correcta cuando  $k = 1$

Asuma que, para  $k \geq 1$ ,

$$\sum_i c_i^{(k)}(x_i) \leq E(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.19)$$

De 4.15

$$\begin{aligned} \sum_i c_i^{(k+1)}(x_i) &= \sum_i \min_{x_j, j \neq i} (\lambda_{k+1}(w_i, c^{(k)}) + (1 - \lambda_{k+1})E_i) \\ &\leq \sum_i (\lambda_{k+1}(w_i, c^{(k)}) + (1 - \lambda_{k+1})E_i) \\ &= \lambda_{k+1} \sum_i \sum_j w_{ij} c_j^{(k)}(x_j) + (1 - \lambda_{k+1})E(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \lambda_{k+1} \sum_i c_i^{(k+1)}(x_i) + (1 - \lambda_{k+1})E(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Donde  $\sum_i w_{ij} = 1$

Combinando el resultado anterior con la suposición (4.19), obtenemos

$$\sum_i c_i^{(k+1)}(x_i) \leq E(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.20)$$

Esto demuestra la desigualdad (18) para cualquier  $k \geq 1$ . Ahora demostramos la desigualdad (19)

Para cualquier  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} E_-^{(k)} &= \sum_i \min_{x_i} c^{(k)}(x_i) \\ &\leq \sum_i c^{(k)}(x_i^*) \leq E(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = E^*. \end{aligned}$$

**Teorema 2:** Dada cualquier matriz de propagación  $W$ , y un esfuerzo de cooperación constante  $\lambda$ , y el estado general  $c^{(0)} = 0$ , entonces  $\{E_-^{(k)} | k > 0\}$  es una secuencia no decreciente con cota superior  $E^*$ . Si una solución de consenso se encuentra en algún paso o pasos, entonces podemos encontrar la cercanía entre la solución de consenso y del óptimo global en el costo. Si el algoritmo converge a una solución de consenso, entonces debe ser el óptimo global también. El siguiente teorema hace esos puntos más claros.

**Demostración:** La demostración del teorema 2 necesita del siguiente lema

**Lema 1:** Escoja la matriz de propagación  $W$ , una constante  $\lambda$  y la condición inicial general  $c^{(0)} = 0$ , entonces  $\{c_i^{(k)}(x_i) | k \geq 0\}$  es una secuencia no-decreciente para cualquier  $x_i \in D_i$  y  $1 \leq i \leq n$ .

$$k = 0$$

De (4.15), tenemos

$$c_i^{(1)}(x_i) = \min_{x_j, j \neq i} (\lambda(w_{ij} c^{(0)} + (1 - \lambda)E_i))$$

Teniendo en cuenta la condición  $c^{(0)} = 0$  y  $E_i \geq 0$  por asumir restricciones no negativas.

$$c_i^{(1)}(x_i) = (1 - \lambda)\tilde{E}_i^{(0)} \geq c_i^{(0)}(x_i)$$

Asuma que, para algún  $k - 1 \geq 0$ ,

$$c_i^{(k)}(x_i) \geq c_i^{(k-1)}(x_i), \text{ para cualquier } x_i \in D_i \text{ y } 1 \leq i \leq n,$$

Entonces

$$(w_{ij}, c^{(k)}) \geq (w_{ij}, c^{(k-1)}),$$

Siendo  $w_{ij} \geq 0$ . Por lo tanto,

$$(\lambda(w_{ij}, c^k) + (1 - \lambda)E_i) \geq (\lambda(w_{ij}, c^{(k-1)}) + (1 - \lambda)E_i)$$

Esto implica

$$\min_{x_j, j \neq i} (\lambda(w_{ij}, c^{(k)}) + (1 - \lambda)E_i) \geq \min_{x_j, j \neq i} (\lambda(w_{ij}, c^{(k-1)}) + (1 - \lambda)E_i)$$

Esto es,

$c_i^{(k+1)}(x_i) \geq c_i^{(k)}(x_i)$ , Para cualquier  $x_i \in D_i$  y  $1 \leq i \leq n$ , de la definición de  $c_i^{(k+1)}(x_i)$  en (4.15).

Por lo tanto,  $c_i^{(k+1)}(x_i) \geq (x_i)$ , para cualquier  $k \geq 0$ , cualquier  $x_i \in D_i$  y  $1 \leq i \leq n$ . Esto es,  $\{C_i^{(k)}(x_i) | k \geq 0\}$  es una secuencia no-decreciente para cualquier demostración. Del lema 1, para cualquier  $k \geq n$

**Demostración:** Del lema 1, para cualquier  $k \geq 0$ ,

$$\sum_i c_i^{(k+1)}(\tilde{x}_i^{(k+1)}) \sum_i c_i^{(k)}(\tilde{x}_i^{(k+1)}) \geq \sum_i c_i^{(k)}(\tilde{x}_i^{(k)})$$

Lo que implica

$$E_-^{(k+1)} \geq E_-^{(k)}, \text{ para } k \geq 0$$

Por lo tanto,  $\{E_-^{(k)} | k \geq 0\}$  es una secuencia no-decreciente.

De acuerdo al Teorema 1,

$$E_-^{(k)} \leq E^*.$$

Por lo tanto,  $\{E_-^{(k)} | k \geq 0\}$  está acotada por  $E^*$

**Teorema 3:** Dada cualquier matriz de propagación  $W$ , y la condición inicial en general  $c^{(0)} = 0$  o  $\lambda_1 = 0$ , si una solución de consenso  $\tilde{x}$  se encuentra en la iteración paso  $k_1$  sigue siendo la misma desde el paso  $k_1$  al paso  $k_2$ , entonces la cercanía entre el costo de  $\tilde{x}$ ,  $E(\tilde{x})$ , y el coste óptimo,  $E^*$ , satisface la siguiente la desigualdad,

$$0 \leq E(\tilde{x}) - E^* \leq \left( \prod_{k=k_1}^{k_2} \lambda_k \right) (E(\tilde{x}) - E_-^{(k_1-1)}), \quad (4.21)$$

Y

$$0 \leq E(\tilde{x}) - E^* \leq \frac{\prod_{k=k_1}^{k_2} \lambda_k}{1 - \prod_{k=k_1}^{k_2} \lambda_k} (E^* - E_-^{(k_1-1)}), \quad (4.22)$$

Donde  $E^* - E_-^{(k_1-1)}$  es la diferencia entre el coste óptimo  $E^*$  y la cota inferior del coste óptimo,  $E_-^{(k_1-1)}$  obtenido en el paso  $k_1 - 1$ . Cuando  $k_2 - k_1 \rightarrow \infty$  Y  $1 - \lambda_k \geq \epsilon > 0$  para  $k_1 \leq k \leq k_2$ ,

$$E(\tilde{x}) \rightarrow E^*$$

**Demostración:** Suponga que  $\tilde{x}$  es una solución del consenso en el paso  $k$ . De (4.15), se tiene

$$\sum_i C^{(k)}(\tilde{x}_i) = \sum_i \min_{x_{i,j} \neq i} (\lambda_k (w_{i,j} c^{(k-1)} + (1 - \lambda_k) E_i))$$

$$\begin{aligned}
 &= \lambda_k \sum_i \sum_j w_{ij} c_j^{(k-1)}(\tilde{x}_j) + (1 - \lambda_k) \sum_i \tilde{E}_i \\
 &= \lambda_k \sum_i c_i^{(k-1)}(\tilde{x}_i) + (1 - \lambda_k) E(\tilde{x})
 \end{aligned}$$

Si  $\sum_i w_{ij} = 1$ . Con base en la condición que  $\tilde{x}$  es una solución de consenso encontrada en el paso  $k_1$  al paso  $k_2$ , la anterior ecuación es válida para  $k_1 \leq k \leq k_2$ .

Combinando estos resultados se obtiene la siguiente ecuación

$$\sum_i c_i^{(K_2)}(\tilde{x}_i) = A \sum_i c_i^{(K_1-1)}(\tilde{x}_i) + (1 - A)E(\tilde{x}), \quad (4.23)$$

Donde.  $A = \prod_{k=k_1}^{k_2} \lambda_k$

De (T3.1) y el teorema del límite inferior, se tiene que:

$$A \sum_i c_i^{(K_1-1)}(\tilde{x}_i) + (1 - A)E(\tilde{x}) = \sum_i c_i^{(K_2)}(\tilde{x}_i) = E_-^{(k_2)} \leq E^* \quad (4.24)$$

Re-escribiendo (4.24), se tiene.

$$E(\tilde{x}) - E^* \leq A(E(\tilde{x}) - \sum_i c_i^{(K_1-1)}(\tilde{x}_i)) \leq A(E(\tilde{x}) - E_-^{(k_1-1)}). \quad (4.25)$$

Que confirma la primera desigualdad

Usando la ecuación en diferencias (4.15), se tiene.

$$\begin{aligned}
 \sum_i c_i^{(k)}(\tilde{x}_i) &\leq \lambda_k \sum_i \sum_j w_{ij} c_j^{(k-1)}(x_j^*) + (1 - \lambda_k) \sum_i E_i^* \\
 &= \lambda_k \sum_i c_i^{(k-1)}(x_i^*) + (1 - \lambda_k)E^*
 \end{aligned}$$

Ya que las desigualdades anteriores se mantienen para  $k_1 \leq k \leq k_2$ , se tiene.

$$\sum_i c_i^{(k_2)}(\tilde{x}_i) \leq A \sum_i c_i^{(k_1-1)}(x_i^*) + (1 - A)E^* \quad (4.26)$$

Combinando (T3.1) y (T3.4),

$$A \sum_i c_i^{(k_1-1)}(\tilde{x}_i) + (1 - A)E(\tilde{x}) \leq A \sum_i c_i^{(k_1-1)}(x_i^*) + (1 - A)E^* \quad (4.27)$$

Esto implica.

$$E(\tilde{x}) \leq E^* + \frac{\prod_{k=k_1}^{k_2} \lambda_k}{1 - \prod_{k=k_1}^{k_2} \lambda_k} \left( \sum_i c_i^{(k_1-1)}(x_i^*) - \sum_i c_i^{(k_1-1)}(\tilde{x}_i) \right). \quad (4.28)$$

De acuerdo con el Teorema 1, con la condición inicial general  $c^{(0)} = 0$  o  $\lambda_1 = 0$ ,

$$\sum_i c_i^{(k_1-1)}(x_i^*) \leq E^*$$

Y por definición

$$E_-^{(k_1-1)} = \sum_i c_i^{(k_1-1)}(\tilde{x}_i^{(k_1-1)}) \leq \sum_i c_i^{(k_1-1)}(x_i^*)$$

Por lo tanto,

$$E(\tilde{x}) \leq E^* + \frac{\prod_{k=k_1}^{k_2} \lambda_k}{1 - \prod_{k=k_1}^{k_2} \lambda_k} (E^* - E_-^{(k_1-1)}). \quad (4.29)$$

De la condición  $1 - \lambda_k \geq \epsilon > 0$  para  $k_1 \leq k \leq k_2$ ,

$$\prod_{k=k_1}^{k_2} \lambda_k \leq (1 - \epsilon)^{(k_2 - k_1)}$$

De (T3.7),

$$E(\tilde{x}) \leq E^* + \frac{B}{1 - B} (E^* - E_-^{(k_1-1)})$$

Donde  $B = (1 - \epsilon)^{(k_2 - k_1)}$

Cuando  $k_2 - k_1 \rightarrow \infty, B \rightarrow 1$ .

Por lo tanto  $E(\tilde{x}) \rightarrow E^*$ , cuando  $k_2 - k_1 \rightarrow \infty$ , desde que  $E(\tilde{x}) \geq E^*$

## 4.8 PROPIEDADES DE CONVERGENCIA

El comportamiento del sistema cooperativo depende del comportamiento dinámico de las ecuaciones en diferencias (4.4). Sus propiedades de convergencia se revelan en los siguientes dos teoremas. El primero muestra que dada la matriz de propagación y un esfuerzo de cooperación constante  $\lambda$ , entonces existe una solución para satisfacer la ecuación en diferencias (4.4). El segundo muestra que el sistema cooperativo converge linealmente a una solución.

**Teorema 4:** *Dada cualquier matriz de propagación simétrica  $W$  y un esfuerzo de cooperación constante  $\lambda$ , la ecuación en diferencias (4.4) tiene una y sólo una solución, expresada como  $(c_i^{(\infty)}(x_i))$ , o, simplemente  $c^{(\infty)}$ .*

**Demostración:** vamos a probar que las ecuaciones en diferencias tienen al menos una solución. La propiedad de unicidad puede probarse después de probar el teorema 5. De acuerdo con el Lema 1, cuando se escoge  $c^{(0)} = 0, \{c_i^{(k)}(x_i) | k \geq 0\}$  es una secuencia no-decreciente para cualquier  $x_i \in D_i$  y  $1 \leq i \leq n$ . De acuerdo con el teorema 1, se sabe que  $\sum_i c_i^{(k)}(x_i)$  está acotada superiormente. Debido a esto y la propiedad no-negativa de  $c_i^{(k)}(x_i), (x_i), c_i^{(k)}(x_i)$  para cualquier  $k \geq 0$  debe tener un límite superior. Por lo tanto, la secuencia  $\{c_i^{(k)}(x_i) | k \geq 0\}$  debe estar acotada

superiormente. Por lo tanto, tiene al menos un límite superior, expresado como  $c_i^{(\infty)}(x_i)$  y converge a esta cota. ( $c_i^{(\infty)}(x_i)$ ) Debe ser la solución a la ecuación en diferencias.

**Teorema 5:** *Dada cualquier matriz de propagación simétrica  $W$  y un esfuerzo de cooperación constante  $\lambda$ , el sistema cooperativo, con cualquier opción de condición inicial  $c^{(0)}$  converge a  $c^{(\infty)}$  de forma lineal ("exponencial" en otros contextos) con la velocidad de convergencia  $\lambda$ . Entonces.*

$$\|c^{(k)} - c^{(\infty)}\|_{\infty} \leq \lambda^k \|c^{(0)} - c^{(\infty)}\|_{\infty} \quad (4.30)$$

Este teorema se llama el teorema de la convergencia. Muestra que el sistema cooperativo es estable y tiene un atractor único,  $c^{(\infty)}$  por lo tanto, la evolución del sistema cooperativo es robusta, insensible a las perturbaciones, y su solución final es independiente de las condiciones iniciales. En contraste, con algoritmos convencionales basados en la mejora de puntos locales que pueden presentar muchos mínimos locales. En la evolución de estos algoritmos se verifica que son sensibles a las perturbaciones, y sus soluciones finales dependen de las condiciones iniciales.

**Demostración:** de la ecuación (4.15),

$$c_i^{(k+1)}(x_i) = \min_{x_{j,j \neq i}} (\lambda(w_i, c^{(k)} + (1 - \lambda)E_i)$$

$$\min_{x_{j,j \neq i}} \left( (\lambda(w_i, c^{(\infty)} + (1 - \lambda)E_i) + \lambda(w_i, c^{(k)} - c^{(\infty)})) \right) =$$

$$c_i^{(k+1)}(x_i) \leq \min_{x_{j,j \neq i}} (\lambda(w_i, c^{(\infty)} + (1 - \lambda)E_i) + (w_i, (\|c^{(k)} - c^{(\infty)}\|_{\infty})_{n \times 1}),$$

Y

$$c_i^{(k+1)}(x_i) \geq \min_{x_{j,j \neq i}} (\lambda(w_i, c^{(\infty)} + (1 - \lambda)E_i) + (w_i, (\|c^{(k)} - c^{(\infty)}\|_{\infty})_{n \times 1}),$$

De acuerdo al Teorema 4.

$$c_i^{(\infty)}(x_i) = \min_{x_{j,j \neq i}} (\lambda(w_i, c^{(\infty)} + (1 - \lambda)E_i), \text{ para cualquier } x_i \in D_i \text{ y } 1 \leq i \leq n.$$

Desde  $w_{ij} = w_{ji}$  y  $\sum_i w_{ij} = 1$ ,

$$(w_i, (\|c^{(k)} - c^{(\infty)}\|_{\infty})_{n \times 1}) = \|c^{(k)} - c^{(\infty)}\|_{\infty}$$

Entonces,

$$c_i^{(k+1)}(x_i) \leq c_i^{(\infty)}(x_i) + \lambda \|c^{(k)} - c^{(\infty)}\|_{\infty},$$

Y

$$c_i^{(k+1)}(x_i) \geq c_i^{(\infty)}(x_i) + \lambda \|c^{(k)} - c^{(\infty)}\|_{\infty}.$$

Esto es

$$|c_i^{(k+1)}(x_i) - c_i^{(\infty)}(x_i)| \leq \lambda \|c^{(k)} - c^{(\infty)}\|_{\infty}.$$

Desde la desigualdad anterior para cualquier  $x_i \in D_i$ , se tiene.

$$\|c_i^{(k+1)} - c_i^{(\infty)}\|_{\infty} \leq \lambda \|c^{(k)} - c^{(\infty)}\|_{\infty}.$$

Esto implica

$$\|c_i^{(k+1)} - c_i^{(\infty)}\|_{\infty} \leq \lambda^k \|c^{(k)} - c^{(\infty)}\|_{\infty}.$$

Ahora se completa la prueba del Teorema 4. Para concluir que la ecuación en diferencias (4.15), tiene una única solución  $c^{(\infty)}$ . Se ha probado que las ecuaciones en diferencias tienen una solución  $c^{(\infty)}$ . Supongamos, por contradicción, que hay otra solución, expresada como  $\hat{c}^{(\infty)}$ , lo que satisface las ecuaciones en diferencias.

De acuerdo al Teorema 5, con la elección de  $c^{(0)} = \hat{c}^{(\infty)}$ , se tiene.

$$\|\hat{c}^{(\infty)} - c^{(\infty)}\|_{\infty} \leq \lambda^k \|\hat{c}^{(\infty)} - c^{(\infty)}\|_{\infty} \quad (4.31)$$

Desde  $0 \leq \lambda \leq 1$ , entonces de (T5.1), se tiene.

$$\|\hat{c}^{(\infty)} - c^{(\infty)}\|_{\infty} = 0$$

Esto implica

$$\hat{c}^{(\infty)} = c^{(\infty)}$$

Esto contradice la suposición de que  $\hat{c}^{(\infty)}$  y  $c^{(\infty)}$  son diferentes. Por lo tanto, la ecuación diferencial tiene solo una solución.

### 4.8.1 CONDICIONES SUFICIENTES

En este apartado, vamos a enunciar tres condiciones suficientes para el reconocimiento de un óptimo global y dos condiciones necesarias para reducir el espacio de búsqueda y la ambigüedad en la toma de decisiones.

**Teorema 6:** *(Condición Suficiente 1) Si un consenso,  $\tilde{x}$ , se encuentra en algún paso con la elección de  $\lambda = 0$ , entonces el consenso también es un óptimo global. Esta condición es suficiente, por lo tanto, una condición suficiente débil desde la posibilidad de encontrar un consenso sin la cooperación ( $\lambda = 0$ ) es bastante baja en el tratamiento de problemas complejos.*

**Teorema 7:** *(Condición Suficiente 2) Dada una matriz de propagación  $W$  y el estado general inicial  $c^{(0)} = 0$  o  $\lambda_1 = 0$ . Si  $E_{-}^{(k+1)} \leq E_{-}^{(k)}$  en algún paso  $k$ , entonces una solución de consenso encontrada en ese paso también es un óptimo global. El teorema anterior nos proporciona la segunda condición suficiente para el reconocimiento de un óptimo global. Esta condición suficiente no restringe la elección de la fuerza de cooperación  $\lambda$ . Toda la gama de la fuerza de cooperación puede ser explotada para aumentar las posibilidades de encontrar una solución de consenso.*

La segunda condición suficiente es más fuerte que la primera. Dado cualquier problema, si se puede encontrar un óptimo global bajo la primera condición suficiente, también se puede encontrar bajo la segunda condición suficiente. En el mismo tiempo, existen algunos problemas cuyos óptimos globales se pueden encontrar bajo la segunda condición suficiente solamente. Intuitivamente, la posibilidad de encontrar la solución de consenso es mucho mayor para el sistema cooperativo con la cooperación ( $\lambda > 0$ ) que sin la cooperación ( $\lambda = 0$ ).

**Teorema 8:** (Condición Suficiente 3) Dada la matriz de propagación  $W = (1/n)_{n \times n}$ , y la condición inicial general  $c^{(0)} = 0$  o  $\lambda_1 = 0$ . Si un consenso  $\tilde{x}$  se encuentra en cada iteración del paso  $k_1$  al paso  $k_2$  con un valor fijo de  $\lambda$ , y el segundo valor mínimo de la asignación de variables restricción que es  $c^{(k_2)}(\tilde{x}_i)$  satisface la siguiente desigualdad:

$$c^{(k_2)}(\tilde{x}_i) > \lambda^{(k_2-k_1)}(E(\tilde{x}) - E_-^{(k_1)}) + \frac{\lambda E(\tilde{x})}{n} + (1 - \lambda)E_i(\tilde{x}) \quad (4.32)$$

Para todo  $i$ , entonces  $\tilde{x}$  es un óptimo global.

Esta condición suficiente no restringe la elección de la fuerza de cooperación  $\lambda$ . Toda la gama de la fuerza de cooperación puede ser explotada para aumentar la probabilidad de encontrar un consenso.

## 4.8.2 CONDICIONES NECESARIAS

El siguiente teorema nos proporciona la primera condición necesaria para que una opción este dentro de un óptimo global.

**Teorema 9:** (condición necesaria 1) Dada una matriz de propagación  $W$ , y la condición inicial general  $c^{(0)} = 0$  o  $\lambda_1 = 0$ . Si la opción  $x_i^*(x_i^* \in D_i)$  está en el óptimo global, entonces  $c_i^{(k)}(x_i^*)$ , para cualquier  $k \geq 1$ , debe satisfacer la siguiente desigualdad,

$$c_i^{(k)}(x_i^*) \leq (E(x) - E_-^{(k)}) + c_i^{(k)}(\tilde{x}_i^{(k)}) \quad (4.33)$$

Donde  $E_-^{(k)}$  es, como se había definido antes, un límite inferior en  $E^*$  obtenido por el sistema cooperativo en el paso  $k$ .

**Teorema 10:** (condición necesaria 2) Dada una Matriz de propagación simétrica  $W$  y la condición inicial general  $c^{(0)} = 0$  o  $\lambda_1 = 0$ . Si la opción  $x_i^*(x_i^* \in D_i)$  está en el óptimo global, entonces  $c_i^{(k)}(x_i^*)$  debe satisfacer la siguiente La desigualdad,

$$c_i^{(k)}(x_i^*) \leq \frac{E^*}{n} + \sqrt{\frac{n-1}{n}} |\alpha_2^{(k)}| E^* \quad (4.34)$$

$\alpha_2^{(k)}$  se calcula mediante la siguiente función recursiva:

$$\begin{cases} a_2^{(1)} = \lambda_1 a_2 + (1 - \lambda_1) \\ a_2^{(k)} = \lambda_k a_2 a_2^{(k-1)} + (1 - \lambda_k) \end{cases}$$

Donde  $a_2$  es el segundo mayor valor propio de la matriz de propagación  $W$ .

Para la elección particular de  $W = \frac{1}{n} (1)_{n \times n}$ ,

$$a_2^{(k)} = (1 - \lambda_k)$$

Y

$$c_i^{(k)}(x_i^*) \leq \frac{E^*}{n} + \sqrt{\frac{n-1}{n}}(1-\lambda_k)E^* \quad (4.35)$$

La desigualdad (4.33) y la desigualdad (4.34) proporcionan dos criterios para comprobar si una opción puede ser algún óptimo global. Si cualquiera de ellas no se cumple, la opción puede ser descartada del conjunto de opciones para reducir el espacio de búsqueda.

Ambos umbrales en (4.33) y (4.34) se mejoran más y más, conforme se dan las iteraciones. Por lo tanto, más y más opciones pueden ser descartadas y el espacio de búsqueda se puede reducir. Con la elección de la condición inicial general  $c^{(0)} = 0$ , el lado derecho de (4.24) disminuye a medida que la iteración procede debido a la propiedad de  $E_-^{(k)}$  revelada por el Teorema 3. Con la selección del esfuerzo de cooperación constante  $\lambda$  y suponiendo que  $W \neq \frac{1}{n}(1)_{n \times n}$ , entonces  $a_2 > 0$  y  $\{a_2^{(k)} | k \geq 1\}$  es una secuencia decreciente monótona que satisface la desigualdad siguiente.

$$\frac{1-\lambda}{1-\lambda a_2} < a_2^{(k)} \leq (1-\lambda) + \lambda a_2 \quad (4.36)$$

Esto implica que el lado derecho de (4.34) disminuye monótonamente a medida que la iteración procede.

Con base en el teorema 9 y el teorema 10, una regla de reducción de la ambigüedad se presenta a continuación:

**Regla de Reducción de Ambigüedad:** Sea  $E^+$  sea una cota superior de  $E^*$ ,  $E^+ \geq E^*$  para cualquier  $x_i \in D_i (1 \leq i \leq n)$ , si  $c_i^{(k)}(x_i)$ , en algún paso  $k \geq 1$ , satisface

$$c_i^{(k)}(x_i) > (E^+ - E_-^{(k)}) + c_i^{(k)}(\tilde{x}_i^{(k)}), \quad (4.37)$$

O

$$c_i^{(k)}(x_i) > \frac{E^+}{n} + \sqrt{\frac{n-1}{n}} |a_2^{(k)}| E^+ \quad (4.38)$$

Entonces la opción  $x_i$  puede ser descartada del dominio  $D_i$  para reducir la búsqueda el espacio y la ambigüedad en la toma de decisiones para el agente  $i$ .

En la regla anterior, usamos un  $E^+$  como cota superior en el coste óptimo  $E^*$  en lugar de sí mismo como en (4.33) y (4.34), porque un límite superior puede obtenerse más fácilmente que el costo óptimo  $E^*$  en la mayoría de los casos. El  $E(\tilde{x}_i^{(k)})$  proporcionado por el algoritmo, por ejemplo, se puede utilizar aquí como  $E^+$ .

La aplicación de la regla de reducción la ambigüedad anterior, garantiza la retención de opciones en cualquier óptimo global. Si todas las opciones, pero una para cada agente es descartada, entonces la ambigüedad para cada agente en la toma de decisiones se elimina, y el óptimo global se encuentra. La Regla (4.37) y la Regla (4.38) proporcionan la base teórica para poder elegir el umbral  $t_i^{(k)}$  en el proceso de descartar opciones (4.6):

$$t_i^{(k)} = \min \left( E(\tilde{x}_i^{(k)}) - E_-^{(k)} \right) + c_i^{(k)}(\tilde{x}_i^{(k)}),$$

$$\frac{E(\tilde{x}_i^{(k)})}{n} + \sqrt{\frac{n-1}{n}} |a_2^{(k)}| E(\tilde{x}_i^{(k)}) \quad (4.39)$$

## 4.9 COOPERACIÓN FUERTE

Cuando el sistema cooperativo opera secuencialmente y el nivel de influencia es el más fuerte, entonces la optimización definida por el sistema cae de nuevo a la búsqueda local convencional.

**Teorema 11:** *Dada una buena descomposición  $\{E_i\}$ ,  $\lambda_k = 1 - \epsilon$  ( $\epsilon$  es un valor infinitesimal positiva),  $\mu = 0$ , si el sistema cooperativo opera secuencialmente, entonces la optimización definida es equivalente a la optimización que hace una búsqueda local. Dado  $0 < \mu < 1$ , entonces, la optimización definida es equivalente a la búsqueda convencional local con un estilo perezoso.*

Si se asimila el sistema a un juego en el que la función objetivo  $E_i$ , para el agente  $i$  es tratada como la función de utilidad, entonces no es difícil probar que el equilibrio del sistema en este caso también es una pura estrategia de equilibrio de Nash [1,2], que es un equilibrio estratégico en la teoría de juegos [18] y estudia formalmente el conflicto y la cooperación en un sistema de agentes. En este caso, la lista de opciones, una para cada agente, tiene la propiedad de que ningún agente puede modificar unilateralmente su elección y obtener una mejor recompensa. En nuestra definición, sin pérdida de generalidad, dejamos que cada agente minimice su función de utilidad (la función objetivo) en lugar de maximizarla.

## 4.10 CONSENSO

En el área de control cooperativo de los sistemas multiagente, el consenso es un problema importante y fundamental, que está estrechamente relacionado con el control de formaciones y la estimación distribuida. Consenso significa que un equipo de agentes llegue a un acuerdo sobre un valor común mediante la interacción entre sí a través de una red de detección o de comunicaciones. Los problemas de consenso tienen una larga historia en la informática y forman la fundamentación de la computación distribuida. Trabajos pioneros sobre problemas de consenso para la toma de decisiones y la computación distribuida paralela se tratan en [14, 15, 16, 57]. El creciente interés en el control de consenso en la última década se estimula principalmente por [32] y [46]. En particular, se proporcionó una explicación teórica en [32] para el comportamiento de alineación observado en el modelo Vicsek [59] y un marco general del problema de consenso para las redes de integradores se propone en [46]. Desde entonces, un gran número de publicaciones tratan el problema de consenso [21, 23, 26, 45, 51]. En [50], se derivó una condición suficiente para lograr consenso en sistemas integradores de primer orden, para sistemas multi-agente con gráficos de comunicación conectados conjuntamente. El consenso de redes de integradores de segundo orden y de orden superior se estudió en [34, 43, 48, 49, 52, 64]. El problema de consenso de los sistemas multi-agente con dinámicas lineales se trata en [36, 37, 41, 53, 58, 60, 62]. En [39, 55, 61], se demostraron condiciones para lograr el consenso en sistemas multi-agente no lineal del tipo Lipschitz. Los algoritmos de consenso fueron diseñados en [28, 35] para sistemas multi-agente con enlaces de comunicación cuantificados. El efecto de varios retrasos en la comunicación y los retrasos de entrada en el consenso se consideró en [22, 43, 44, 47, 56]. Protocolos de control de datos muestreados fueron propuestos para lograr un consenso para redes fijas de agentes y de conmutación [24]. Protocolos de consenso con comunicaciones activadas por eventos se diseñaron en [29, 54]. El consenso  $H^\infty$  para control de sistemas distribuidos fue investigado en [15] así como para el estudio de redes de agentes sujetos a perturbaciones externas.

Los algoritmos de consenso existentes se pueden clasificar a grandes rasgos en dos clases, a saber, el consenso sin líder, y el consenso con un líder. Este último también se llama consenso líder-seguidor o consenso de rastreo distribuido. Los autores en [30, 31] diseñaron un estimador para rastrear un líder activo. Algoritmos de seguimiento distribuidos fueron propuestos en [48] para una red de agentes con dinámicas de primer orden. En [27] se estudiaron controladores discretos en ausencia de mediciones de velocidad o de aceleración. Los autores en [44] abordaron el problema de seguimiento coordinado distribuido para sistemas del tipo Euler-LaGrange con un líder dinámico. El seguimiento distribuido de los sistemas lineales multi-agente con un líder para entradas de control distintas de cero se abordó en [40, 42]. El problema del seguimiento distribuido trata con un solo líder. Sin embargo, en algunas aplicaciones prácticas, no podría existir más de un líder en redes de agentes. En presencia de varios líderes, el problema de control de seguimiento surge donde los seguidores han de ser conducidos en un espacio geométrico dado, abarcado por los líderes [33]. El estudio del control de guía ha sido motivado por muchas aplicaciones potenciales. Por ejemplo, un grupo de vehículos autónomos (designados como líderes) equipados con los sensores necesarios para detectar los obstáculos peligrosos, se pueden utilizar para maniobrar con seguridad otro grupo de vehículos (designados como seguidores) a partir de un objetivo a otro, asegurando que los seguidores se encuentran dentro del área de seguridad del movimiento formado por los líderes [25, 33]. Una ley de control de seguimiento híbrido fue propuesta en [33] para dirigir seguidores en el casco convexo abarcado por los líderes. Las técnicas de control cooperativo y consenso han tenido una fuerte influencia en el estudio de estabilidad de mercados en economía [19].

En este apartado, consideramos el problema de consenso para sistemas multi-agente donde cada nodo de una estructura de grafo es un sistema lineal de tiempo continuo. La importancia de estudiar consenso para sistemas multi-agente lineales radica en por lo menos dos aspectos. En primer lugar, los agentes lineales son más representativos, como los que presentan dinámicas de primer orden, de segundo orden, y los integradores de alto orden como casos especiales. Segundo, el consenso de los sistemas multi-agente lineales pueden considerarse como locales, el consenso de los sistemas multi-agente no lineales abren un camino para estudiar sistemas multi-agente más complejos, por ejemplo, los que tienen dinámicas nominales lineales pero sujetos a diferentes tipos de incertidumbres.

En este apartado se presenta un enfoque de región consenso para tratar sistemáticamente el diseño de protocolos de consenso distribuidos para sistemas multi-agente con agentes lineales de tiempo continuo. Luego se propone un protocolo basado en estados relativos de los agentes vecinos, donde la condición para llegar a un consenso depende de tres factores correlacionados: la dinámica del agente, los parámetros de diseño del protocolo de consenso, y los valores propios distintos de cero de la matriz laplaciana del grafo de comunicación.

Para facilitar el diseño de protocolos de consenso, la noción de región consenso se presenta y analiza. A la luz de la metodología de región consenso, el diseño del protocolo de consenso se puede desacoplar en dos pasos: 1) Determinar la matriz de ganancia de retroalimentación con el fin de producir una región consenso deseable; 2) ajustar la ganancia de acoplamiento para tratar con el efecto de la gráfica de comunicación en el consenso. También se demostrará que la región de consenso debe ser lo suficientemente grande con el fin de ser robusta con respecto a las variaciones del grafo de comunicación. Se demuestran condiciones necesarias y suficientes para garantizar unos algoritmos apropiados para la región consenso sin acotamiento y de varios pasos, se presentan para diseñar el protocolo estático de consenso. Se estudia además un problema de consenso con una tasa de convergencia prescrita. Se demuestra que para una tasa de convergencia arbitrariamente grande para llegar a un consenso, un protocolo de consenso puede ser diseñado si cada agente es controlable.

### 4.10.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Considere una red de  $N$  agentes idénticos, con dinámica lineal de tiempo continuo, que también puede ser considerada como la resultante de un modelo linealizado de algún sistema no lineal. La dinámica del agente de  $i$ -ésimo se describe por.

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= Ax_i + Bu_i \\ y_i &= Cx_i, \quad i = 1, \dots, N\end{aligned}\tag{4.40}$$

Donde  $x_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_i \in \mathbb{R}^p$ , y  $y_i \in \mathbb{R}^q$  son, respectivamente, el estado, la señal de control a la entrada, y la salida del agente  $i$ -ésimo, y  $A, B, C$  son matrices constantes con dimensiones apropiadas. La topología de comunicación entre agentes está representada por un grafo dirigido  $\mathcal{G}$  (de la teoría básica de grafos). Un lazo  $(i, j)$  en  $\mathcal{G}$  significa que el agente  $j$ -ésimo puede obtener información del agente  $i$ -ésimo, pero no al contrario. El intercambio de información entre agentes vecinos se puede hacer a través de redes de sensores o de comunicación. Tenga en cuenta que cada agente puede tener acceso a una información local, es decir, información del estado o la salida de sí mismo y de sus vecinos. El objetivo de este apartado es resolver el problema de consenso para el  $N$  agentes descritos por (4.40), es decir, diseñar leyes de control distribuidas utilizando sólo la información local para garantizar que los  $N$  agentes descritos por (4.40) logren alcanzar consenso en el sentido de  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \forall i, j = 1, \dots, N$ . Las leyes de control distribuido generalmente se llaman protocolos de consenso. Nos referimos a un protocolo de consenso dinámico si depende del estado interno del protocolo, de lo contrario lo llamamos estático. Intuitivamente, si el grafo de comunicación  $\mathcal{G}$  se puede descomponer en algunos componentes desconectados, es imposible alcanzar el consenso. Por lo tanto,  $\mathcal{G}$  debe ser conectado en cierto sentido, con el fin de lograr un consenso.

**Lema 2:** [50,65] Suponiendo que  $z = [z_1, \dots, z_N]^T$  con  $z_i \in \mathbb{R}$ , sea  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  y  $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , respectivamente la matriz de adyacencia y la matriz laplaciana asociada al grafo dirigido  $\mathcal{G}$ . Entonces el consenso es alcanzado en el sentido de  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z_i - z_j\| = 0 \forall i, j = 1, \dots, N$  para el sistema en lazo cerrado  $\dot{z} = -\mathcal{L}z$  o equivalentemente  $\dot{z}_i = -\sum_{j=1}^N a_{ij}(x_i - x_j)$ , donde todos los  $a_{ij}$  denotan la  $(i, j)$ -ésima entrada de  $\mathcal{A}$ , si y solo si  $\mathcal{G}$  tiene un árbol dirigido expandido. Por lo tanto el valor final del consenso está dado por  $r^T z(0)$ , donde  $r$  es vector propio izquierdo normalizado de  $\mathcal{L}$ , asociado con el valor propio cero.

Una condición necesaria y suficiente para que una red de integradores individuales logre el consenso es que  $\mathcal{G}$  debe contener un árbol de expansión dirigido. A lo largo de este capítulo, se necesitan la siguiente hipótesis.

**Suposición 1.** El grafo de comunicación  $\mathcal{G}$  contiene un grafo dirigido.

En las secciones siguientes, vamos a diseñar varios protocolos de consenso estático y dinámico para resolver el problema de consenso para los agentes en (4.40).

### 4.10.2 REALIMENTACIÓN DE ESTADO POR PROTOCOLOS DE CONSENSO.

En esta sección consideramos el caso en que cada agente puede tener acceso a su propio estado y los estados de sus vecinos. El protocolo propuesto de consenso estático distribuido tiene la siguiente representación.

$$u_i = cK \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_i - y_j), \quad i = 1, \dots, N \quad (4.41)$$

Donde  $c \in \mathbb{R}$  es la constante o ganancia de los pesos de acoplamiento,  $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$  es la matriz de ganancias de realimentación, y  $a_{ij}$  es la (i-j) esima entrada de la matriz de adyacencia asociada con el grafo  $\mathcal{G}$ . Por medio de las dos ecuaciones anteriores la dinámica de la red en lazo cerrado se puede representar de la siguiente forma.

$$\dot{x} = (I_N \otimes A + c\mathcal{L} \otimes BK)x, \quad (4.42)$$

Donde  $\mathcal{L}$  es la matriz laplaciana del grafo  $\mathcal{G}$

$\otimes$  Delta de Kronecker

Si  $r = [r_1, \dots, r_N]^T \in \mathbb{R}^N$  es el vector propio izquierdo de la matriz laplaciana del grafo y asociada con los valores propios 0 y satisfacen que  $r^T \mathbf{1} = 1$  Introducimos una nueva variable  $\delta \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$  como sigue.

$$\delta = [(I_N - 1r^T) \otimes I_n]x \quad (4.43)$$

Por la definición de  $r$  es fácil verificar que  $\delta$  satisface la siguiente expresión.

$$(r^T \otimes I_n)\delta = 0 \quad (4.44)$$

De (4.34) se puede verificar que  $\delta = 0$  si y solo si  $x_i = \dots = x_N$ , el problema del consenso es resuelto si y solo si  $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = 0$ , se puede considerar  $\delta$  como el error en el consenso. Por considerar el hecho de que  $\mathcal{L}\mathbf{1} = 0$  y  $r^T \mathcal{L} = 0$  y de (4.43) y (4.44) la variable  $\delta$  evoluciona según la siguiente expresión.

$$\dot{\delta} = (I_N \otimes A + c\mathcal{L} \otimes BK)\delta \quad (4.45)$$

### 4.10.3 CONSENSO CONDICIÓN Y CONSENSO VALOR

A continuación, se presenta una condición necesaria y suficiente para lograr el consenso.

**Teorema 12** considerando la suposición 1, el protocolo de consenso distribuido (4.32) resuelve el problema de consenso para los agentes en (4.40) si y solo si todas las matrices  $A + c\lambda_i BK$ ,  $i = 2, \dots, N$  son Hurwitz, donde  $\lambda_i$ ,  $i = 2, \dots, N$ , son los valores propios diferentes de cero de la matriz laplaciana  $L$ .

**Demostración:** (4.36) puede representarse en términos de  $\bar{\delta}$  como.

$$\dot{\bar{\delta}} = (I_N \otimes A + c\lambda_i BK)\bar{\delta}_i, \quad i = 2, \dots, N, \quad (4.46)$$

Y de (4.45) y (4.46) es fácil ver que

$$\tilde{\delta}_i = (r^T \otimes I_N)\delta \equiv 0. \quad (4.47)$$

Se ve que los elementos de la matriz de estado de (4.47) están en bloque diagonal, o bloque triangular superior. Entonces  $\bar{\delta}_i$ ,  $i = 2, \dots, N$ , convergen asintóticamente a cero si y solo si los  $N - 1$  subsistemas que se encuentran sobre la diagonal.

$$\dot{\bar{\delta}} = (A + c\lambda_i BK)\bar{\delta} \quad i = 2, \dots, N. \quad (4.48)$$

Son asintóticamente estables. Por lo tanto la estabilidad de las matrices  $A + c\lambda_i BK$ ,  $i = 2, \dots, N$ , es equivalente a que el estado  $\delta$  de (4.47) converge asintóticamente a cero y esto resuelve el problema del consenso.

**Nota.** La importancia de este teorema radica en que convierte el problema de consenso de una red multi-agente a gran escala en el marco del protocolo (4.32) en un problema de estabilización simultánea de un conjunto de matrices con la misma dimensión como único agente, lo que reduce significativamente el costo computacional. Los efectos de la topología de comunicación en el consenso se caracterizan por los valores propios no nulos de la correspondiente matriz Laplaciana, que pueden ser complejos, lo que hace las matrices en el teorema 12, sean de valores complejos.

El siguiente teorema presenta la forma explícita para evaluar el valor final del consenso.

**Teorema 13** La suposición 1 se cumple si el protocolo de consenso (4.32) satisface el teorema 12. A continuación,

$$x_i(t) \rightarrow \bar{\omega}(t) \triangleq (r^T \otimes c^{At}) \begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_N(0) \end{bmatrix}, \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \quad (4.49)$$

De (4.40) vemos que el valor final del consenso depende de la matriz de estado  $A$ . De la matriz de comunicación  $\mathcal{L}$  y los estados iniciales de los agentes. Acá discutimos como la dinámica de los agentes afectan  $\bar{\omega}(t)$ . Si  $A$  es Hurwitz entonces  $\bar{\omega}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y en esta situación el problema del consenso es trivial. Pero si  $A$  tiene valores propios a lo largo del eje imaginario, pero no con valores propios reales con parte positiva en este caso el valor final tiende a infinito de forma exponencial. Lo importante de esto es que dice que aun con una situación inestable y caótica el valor final estará acotado

#### 4.10.4 REGIÓN DE CONSENSO

Del teorema 12, se nota que el consenso de los agentes (4.31) bajo el protocolo (4.32) depende de la matriz de realimentación  $K$ , la ganancia de acople  $c$  y los valores propios diferentes de cero de la matriz laplaciana asociados al grafo de comunicación  $\mathcal{G}$ , esos tres factores están acoplados unos con otros y es pertinente ahora examinar los efectos conjuntos de  $c, K, L$  sobre el consenso, por esta razón se introduce ahora el concepto de región de consenso.

**Definición 6:** La región  $S$  del parámetro  $\sigma$  que hace que la matriz  $A + \sigma BK$  sea Hurwitz, es la región de consenso continua en el tiempo de la red (4.33).

**Corolario 1:** Los agentes descritos por (31) alcanzan el consenso por el protocolo (4.32) si y solo si  $c\lambda_i \in S, i = 2, \dots, N$ , donde  $\lambda_i, i = 2, \dots, N$ , son los valores propios diferentes de cero de  $\mathcal{L}^1$

El diseño del protocolo de consenso (4.32) se divide en dos pasos:

1. Determine la matriz de ganancia de realimentación  $K$  para producir una región de consenso deseable
2. Ajuste la ganancia de acople  $c$  de tal forma que,  $c\lambda_i, i = 2, \dots, N$ , pertenezca a la región de consenso.

El diseño del protocolo de consenso basado en la región de consenso de arriba tiene una característica de desacople importante. Específicamente, en el paso 1) el diseño de la matriz de ganancia de realimentación  $K$  del protocolo de consenso se basa en la dinámica del agente, independiente de la topología de comunicación, mientras que el efecto de la topología de

comunicación en el consenso se maneja en el paso 2) mediante la manipulación de la ganancia de acoplamiento  $c$ . Vale la pena señalar que la región consenso  $S$  puede ser vista como la región de estabilidad de la matriz  $A + \sigma BK$  con respecto al parámetro complejo  $\sigma$ . Por lo tanto, las herramientas de la estabilidad para las matrices de la forma anterior pueden ser utilizadas para analizar la región consenso. Antes de continuar, es necesario el Lema 3.

**Lema 3.** [53] dado el polinomio con coeficientes complejos.

$$p(s) = s^2 + (a + ib)s + c + id$$

Donde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , y  $i = \sqrt{-1}$ , representa la parte imaginaria unitaria,  $p(s)$  es estable si y solo si  $a > 0$  y  $abd + a^2c - d^2 > 0$ .

En el lema de arriba solo se consideran polinomios de segundo orden. Resultados similares para polinomios de orden superior se presentan en [53]. Sin embargo, en este caso, el análisis puede ser más complicado. A continuación, se presentan dos ejemplos de cálculo de regiones de consenso.

**Ejemplo 1.** Para región de consenso acotada, sea la dinámica de los agentes y el protocolo de consenso que se presentó en (4.31) y (4.32) como:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, K = [1 \quad -1], \quad \sigma = x + iy.$$

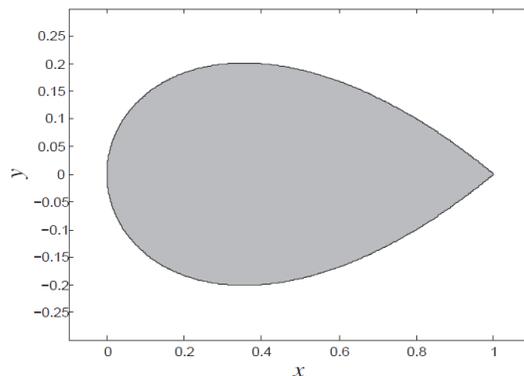
El polinomio característico de  $A + \sigma BK$  es.

$$\det(sI - (A + \sigma BK)) = s^2 + (1 - x - iy)s + 3(x + iy).$$

Por el Lema 2, si  $(A + \sigma BK)$  es Hurwitz si y solo si

$$1 - x > 0, -3y^2(1 - x) + 3x(1 - x)^2 - 9y^2 > 0.$$

La región de consenso se muestra en la Figura 4.1.



**Figura 4.1.** Región de consenso acotada.

Ejemplo de región de consenso con la parte real acotada pero no acotada en el eje imaginario, es

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma = x + iy.$$

El polinomio característico de  $A + \sigma BK$  es.

$$\det(sI - (A + \sigma BK)) = s^2 + s - 2 + (x + 1)(x + 2) - y^2 + i(2y + 3)y.$$

Por el Lema 2, si  $(A + \sigma BK)$  es Hurwitz si y solo si

$$x(x + 3) - y^2 - (2x + 3)^2 y^2 > 0.$$

En la Figura 4.2 siguiente se ve la región de consenso.

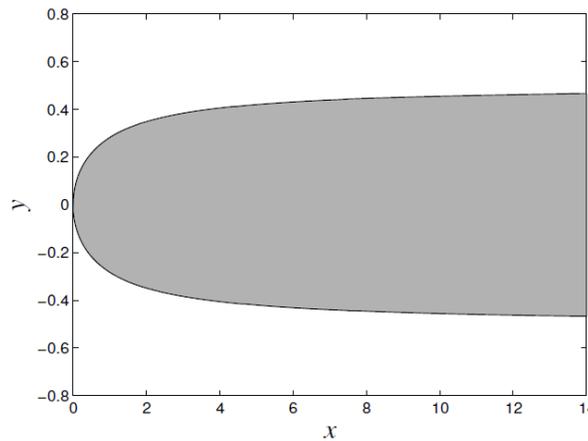


Figura 4.2. Región de consenso no acotada en x.

La dinámica del agente y el protocolo de consenso dado por (4.31) y (4.32) respectivamente son:

$$A = \begin{bmatrix} -1.4305 & 12.5142 & 3.3759 \\ 1 & -1 & 1 \\ -0.3911 & -5.5845 & -2.3369 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.3 \\ 9.6 & -5 \\ 2.6 & -1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} -0.8 & 0 & 0.3 \\ 9.6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Para realizar el ejemplo consideremos que tratamos con un grafo no dirigido y en este caso  $\sigma \in \mathbb{R}^+$ , según el criterio de Hurwitz se puede obtener la región  $\mathcal{S} = (0, 1.4298) \cup (2.2139, 7.386)$ , claramente son dos regiones separadas. En la referencia [41] se probó que cuando se tratan problemas con grafos no dirigidos de  $n$  nodos aparecen  $n$  regiones separadas.

**Ejemplo 2.** Sea la dinámica y modelo de protocolo anterior, con la siguiente información

$$A = \begin{bmatrix} -2.4188 & 1 & 0.0078 \\ -0.3129 & -1 & 1.1325 \\ -0.0576 & 1 & -0.9778 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3.7867 & -0.0644 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} -0.85 & 0 & 0.35 \\ -9.6 & 0 & 6.01 \end{bmatrix}$$

Consideremos el caso de un grafo  $G$  no dirigido. El polinomio característico de  $A + \sigma BK$  se puede obtener como.

$$\det(sI - (A + \sigma BK)) = s^3 + (0.15\sigma + 4.3966)s^2 + (0.06\sigma - 1.8928\sigma + 4.9426)s + 4.33751\sigma^2 + 4.4978\sigma - 0.0001.$$

Por el criterio de Hurwitz ( $A + \sigma BK$ ) es Hurwitz si y solo si.

$$\begin{aligned} \sigma > 0, 0.06\sigma^2 - 1.8928\sigma + 4.9426 > 0, 4.33751\sigma^2 + 4.4978\sigma - 0.0001 > 0, \\ (0.15\sigma + 4.3966)(0.06\sigma^2 - 1.8928\sigma + 4.9426) > 4.3375\sigma^2 + 4.4978\sigma - 0.0001. \end{aligned}$$

De las desigualdades de arriba se obtiene la región de consenso  $S = (1.037, 3.989)$ , que es claramente acotada. Asumiendo que el grafo de comunicación es  $\mathcal{G}$  está dado por la Figura (4.3).

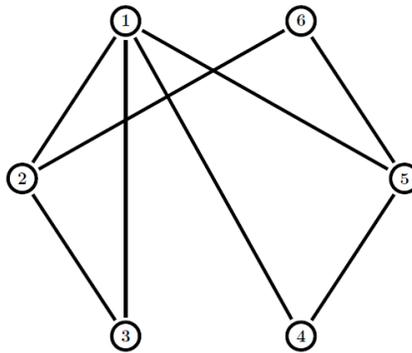


Figura 4.3. Grafo del sistema

Y el siguiente laplaciano:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cuyos valores diferentes de cero son 1.382, 1.6972, 3.618, 4, 5.3028. Aplicando el corolario 1, el consenso se obtiene si y solo si la ganancia de acople  $c$  satisface que  $0.7504 < c < 0.7522$ .

Es importante resaltar que en muchos casos se pueden dar casos donde se den obstáculos a la restricción de la comunicación. Los grafos pueden cambiar durante el proceso así el protocolo de consenso puede mantener cierto grado de robustez con respecto a las variaciones del grafo de comunicación

En el numeral anterior se consideró el problema del consenso para sistemas multiagente con dinámica lineal en los nodos, en muchas circunstancias la dinámica del agente puede estar sometida a perturbaciones externas que para el caso de los protocolos de consenso puede mantener cierto grado de atenuación  $H_\infty$  o  $H_2$

El problema del consenso para un grafo de comunicación no dirigido se representa de la siguiente forma.

Considere una red de  $N$  agentes idénticos que son afectados por perturbaciones externas la dinámica del  $n$ ésimo agente se describe por

$$\dot{x}_i = Ax_i + Bu_i + Dw_i, \dots, N, \quad (4.50)$$

Donde  $x_i \in \mathbb{R}^n$  es el estado del  $i$ -ésimo agente,  $u_i \in \mathbb{R}^p$  es la entrada de control,  $w_i \in \mathcal{L}_2^{m1}[0, \infty)$  es la perturbación externa,  $\mathcal{L}_2^{m1}[0, \infty)$  describe un espacio vectorial de dimensión- $m1$  cuadrado e integrable, con  $A, B, D$ . Matrices constantes con dimensiones compatibles. El grafo no dirigido de comunicación  $\mathcal{G}$  entre  $N$  agentes se asume que en cada instante de tiempo cada agente conoce sus estados relativos de sus vecinos con respecto a si mismo y basando sobre los estados relativos sobre sus agentes vecinos el protocolo de consenso distribuido es el siguiente.

$$u_i = cK \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_i - x_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.51)$$

Donde  $c > 0$  es la ganancia de acople,  $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$  es la matriz de ganancia de realimentación, y  $a_{ij}$  representa la  $(i, j)$  i-esima entrada de la matriz de adyacencia asociada con el grafo  $\mathcal{G}$ .

El objetivo es encontrar un protocolo apropiado (4.40) para que el agente (4.39) alcance el consenso y mientras tanto mantenga el desempeño deseado con respecto a la perturbación externa  $w_i$ . Para este fin se define una variable de desempeño  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , como el promedio de los estados relativos medidos entre los agentes, descrito por

$$z_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N C(x_i - x_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.52)$$

Donde  $z_i \in \mathbb{R}^{m2}$  y  $C \in \mathbb{R}^{m2 \times n}$  es una matriz constante. Siendo  $x, w, y$  vectores, entonces la red del agente resultante es, según (39), (40), (41)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (I_N \times A + c\mathcal{L} \otimes BK)x + (I_N \otimes D)w. \\ z &= (M \otimes C)x, \end{aligned} \quad (4.53)$$

Donde  $\mathcal{L}$  es la matriz laplaciana asociada al grafo  $\mathcal{G}$  y  $M \triangleq I_N - \frac{1}{N} \mathbf{1}\mathbf{1}^T$ . Representada por  $T_{wz}$  la matriz de transferencia de la función de  $w$  a  $z$  de la red (4.41). Ahora se define el problema del consenso  $H_\infty$ .

**Definición 7.** *Dados los agentes en (4.39) y un margen aceptable  $\gamma > 0$ , el protocolo (4.40) resuelve el problema de consenso distribuido sub óptimo  $H_\infty$  si:*

- i) *La red (4.41) con  $w_i = 0$  puede alcanzar el consenso en el sentido del  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i - x_j\| = 0, \forall i, j = 1, \dots, N$ ;*
- ii)  *$\|T_{wz}\|_\infty < \gamma$ , donde  $\|T_{wz}\|_\infty$  es la norma  $H_\infty$  de  $T_{wz}$  definida por  $\|T_{wz}(s)\|_\infty = \sup_{w \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(T_{wz}(jw))$*

*El límite de desempeño del consenso de la red (4.41) es el mínimo  $\|T_{wz}\|_\infty$  de la red (4.41) obtenido por el uso del protocolo (4.41).*

El siguiente teorema presenta una condición necesaria y suficiente para resolver el problema del consenso según la norma  $H_\infty$ .

**Teorema 14.** *Asumiendo que el grafo de comunicación  $\mathcal{G}$  esta conectado para un valor dado  $\gamma$ , existe un protocolo de consenso (4.40) que resuelve el problema sub óptimo de consenso con norma  $H_\infty$  si y solo si los siguientes  $N - 1$  sistemas son asintóticamente estables de forma simultánea y las normas  $H_\infty$  de sus matrices de transferencia son todas menores a  $\gamma$ :*

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_i &= (A + c\lambda_i BK)\hat{x}_i + D\hat{w}_i, \\ \hat{z}_i &= C\hat{x}_i, \quad i = 1, \dots, N,\end{aligned}\tag{4.54}$$

Donde  $\lambda_i, i = 1, \dots, N$ , son valores propios diferentes de cero de  $\mathcal{L}$ .

**NOTA:** la utilidad de este teorema radica en que convierte el problema de consenso distribuido con norma  $H_\infty$  de la red multidimensional multiagente (4.41), en un problema de control con norma  $H_\infty$  de un conjunto de sistemas independientes que tienen la misma dimensión de un solo agente (4.39), por lo tanto hay una significativa disminución de costo computacional. La única característica del protocolo (4.40) es que por introducir una constante escalar  $c > 0$  llamada ganancia de acople, las nociones de regiones de consenso  $H_2, H_\infty$  se tratan más adelante y se detallan en las siguientes subsecciones.

#### 4.10.5 REGIÓN DE CONSENSO $H_\infty$

Dado un protocolo de la forma (4.40), el problema del consenso distribuido con norma  $H_\infty$  de la red (4.41), se puede analizar con la ayuda del siguiente sistema.

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= (A + \sigma BK)\zeta + Dw_i, \\ z_i &= C\zeta,\end{aligned}\tag{4.55}$$

Donde  $\zeta \in \mathbb{R}^n$  y  $\sigma \in \mathbb{R}$ , con  $\sigma$  dependiendo de  $c$  la función de transferencia del sistema (4.42), depende del parámetro escalar  $\sigma$ .

**Definición 8:** la región  $\mathcal{S}$ , del parámetro  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  de tal forma que el sistema (4.42) es asintóticamente estable y  $\|\hat{T}_{wizi}\|_\infty < \gamma$ , es llamada la región de consenso  $H_\infty$  con índice de desempeño  $\gamma$  de la red (4.41).

Acorde al teorema 14, se tiene

**Corolario 2.** Para un valor dado de  $\gamma > 0$ , el protocolo (4.41) resuelve el problema de consenso subóptimo  $H_\infty$  para los agentes (4.39), si y solo si  $c\lambda_i \in \mathcal{S}_\lambda$  para  $i = 2, \dots, N$ .

Para el protocolo de la forma (4.40), su región  $H_\infty$  de consenso con índice  $\gamma$ , si existe un intervalo o una unión de intervalos sobre el eje real, entonces los intervalos por si mismos pueden ser acotados o no. La región  $H_\infty$  de consenso puede servir como una medida de la robustez del protocolo de consenso (4.40), con respecto a las variaciones de la topología de comunicación como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.** (Región de consenso acotada) La dinámica de los agentes y el protocolo de consenso están dados por (4.39) y (4.40), respectivamente con:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0.8], K = [1 \quad 0.2]$$

El desempeño  $H_\infty$  de 4.15 con respecto al parámetro  $\sigma$  esta ilustrado en la Figura 3.4 (a) y se puede observar que  $\mathcal{S}_{\gamma > 1.083}$  y entonces la región de consenso  $H_\infty$  con índice  $\gamma$  mayor que el valor mínimo 1.683 es un intervalo acotado de  $\sigma$  en  $\mathbb{R}$ , por ejemplo,  $\mathcal{S}_{\gamma=1.782}$  es [0.0526, 0.203]. A modo de ilustración sea el grafo de comunicación mostrado en la Figura 4.4 (b) con la matriz laplaciana.

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Con valores propios diferentes de cero 1.382, 1.6972, 3.618, 4, 5.3028. Así el protocolo (4.40), presentado arriba, resuelve el problema de consenso  $H_\infty$  con  $\gamma = 1.782$ , para el grafo de la Figura 4.4 (b) si y solo si la ganancia de acople  $c$  está dentro del conjunto  $[0.0381, 0.0383]$ .

Las modificaciones del grafo de comunicación afectan el problema del consenso  $H_\infty$  por lo tanto si la región de consenso  $H_\infty$  del protocolo (4.40), no está bien diseñada puede ser muy frágil a variaciones del grafo de comunicación de la red en otras palabras es conveniente para resolver el problema del consenso que la región con norma  $H_\infty$  sea lo suficientemente grande para que el protocolo mantenga un margen de robustez deseada con respecto al grafo de comunicación.

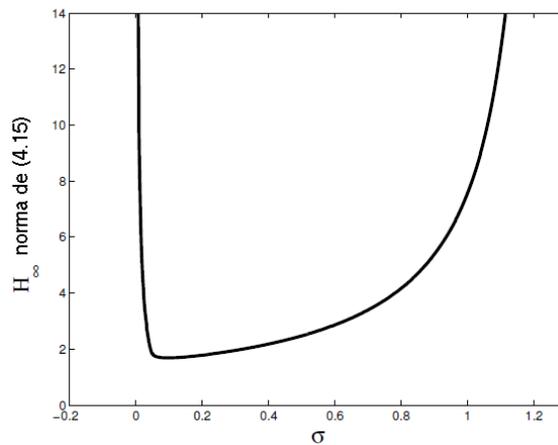


Figura 4.4. (a) Región de consenso

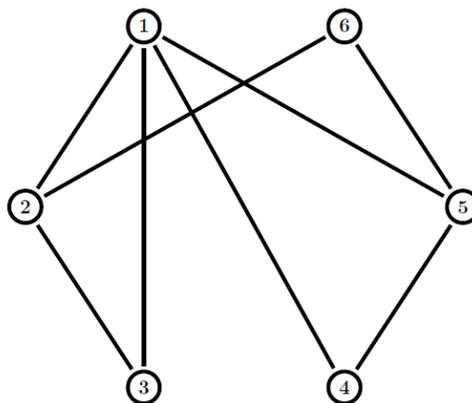


Figura 4.4 (b) grafo de comunicación

Para establecer la existencia de un protocolo (4.40), que tiene una región no acotada de consenso  $H_\infty$  se presenta una condición necesaria y suficiente.

**Teorema 15.** Para un valor dado de  $\gamma > 0$  existe un protocolo (4.40), que tiene una región de consenso no acotada  $H_\infty \mathcal{S}_\gamma \triangleq [\tau, \infty)$  si y solo si existe una matriz  $P > 0$  y un escalar  $\tau > 0$  que satisfacen la siguiente desigualdad lineal matricial (LMI):

$$\begin{bmatrix} AP + PA^T - \tau BB^T & D & PC^T \\ D^T & -\gamma^2 I & 0 \\ CP & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.56)$$

Ahora presentemos un algoritmo para construir el protocolo (4.40).

- 1) *minimice  $\gamma$  conforme a la LMI (4.44) con  $P > 0, \tau > 0, \gamma > 0$ .*
- 2) *Resuelva la LMI (4.44) para  $P > 0, \tau > 0$  usando el valor minimizado  $\gamma$  en el paso anterior. Escoja la matriz de ganancia de realimentación  $K = -\frac{1}{2} B^T P^{-1}$*
- 3) *Seleccione la ganancia de acoplamiento  $c$  no menor que el valor umbral  $c_{th} = \frac{\tau}{\min_{i=2, \dots, N} \lambda_i}$ , donde  $\lambda_i, i = 2, \dots, N$ , son valores propios diferentes de cero de  $\mathcal{L}$ .*

#### 4.10.6 CONSENSO $H_2$ SOBRE GRAFOS NO DIRIGIDOS

Para una función de transferencia estable  $F(s)$ , su norma  $H_2$  está definida como  $\|F\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}(F^*(j\omega)F(j\omega)) d\omega}$

**Definición 9:** Dados los agentes de (4.39) y una tolerancia  $\gamma > 0$ , el protocolo de consenso (4.40), se resuelve el problema de consenso distribuido subóptimo  $H_2$ , si:

- i. *La red (41) con  $w_i = 0$  puede alcanzar el consenso en el sentido que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i - x_j\| = 0, \forall i, j = 1, \dots, N$ ;*
- ii.  *$\|T_{wz}\|_2 < \gamma$ .*

*El límite de desempeño del consenso con norma  $H_2$  para una red del tipo (4.41), es el valor mínimo de  $\|T_{wz}(s)\|_2$  que se obtiene al emplear el protocolo de consenso (4.40).*

**Teorema 16.** Para un valor dado  $\tilde{\gamma} > 0$ , existe un protocolo (4.40), que resuelve el protocolo de consenso subóptimo con norma  $H_2$  para el agente en (4.39), si y solo si los  $N-1$  sistemas en (4.42), son simultáneamente asintóticamente estables y  $\sqrt{\sum_{i=1}^N \|\tilde{T}_{\hat{w}_i \hat{z}_i}\|_2^2} < \tilde{\gamma}$ , donde  $\tilde{T}_{\hat{w}_i \hat{z}_i}, i = 2, \dots, N$ , matrices de las funciones de transferencia de los sistemas en (4.42).

**Definición 10:** la región  $\tilde{\mathcal{S}}_{\tilde{\gamma}}$  del parámetro  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  tal que el sistema (4.15) es asintóticamente estable con  $\|\tilde{T}_{\hat{w}_i \hat{z}_i}\|_2 < \frac{\tilde{\gamma}}{\sqrt{N}}$ , es llamado la región de consenso  $H_2$  con índice de desempeño  $\tilde{\gamma}$  de la red (4.41).

Según el teorema 16, se tiene que.

**Corolario 3:** el protocolo de consenso (4.40), resuelve el problema de consenso subóptimo  $H_2$  para los agentes en (4.39), si  $c\lambda_i \in \tilde{\mathcal{S}}_{\tilde{\gamma}}$ , para  $i=2, \dots, N$ .

**Nota:** contrario al caso  $H_\infty$  la región de consenso  $H_2$  está relacionada al número de agentes en la red y usando la región de consenso  $H_2$  para caracterizar el desempeño  $H_2$  de la red (4.41), involucra cierto conservatismo. Esto se debe en gran medida a la diferencia propia entre las normas  $H_2$  y  $H_\infty$  y también debido al hecho de que en el caso  $H_2$  el índice de desempeño  $\tilde{\gamma}$  abarca los  $N - 1$  sistemas en (4.42), que son más difíciles de analizar.

**Lema 4** [64] sea  $\tilde{\gamma} > 0$  y  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$  entonces las siguientes dos expresiones son equivalentes.

- 1)  $A$  es estable y  $\|G(s)\|_2 < \tilde{\gamma}$ .
- 2) Existe un  $X > 0$  tal que.

$$AX + XA^T + BB^T < 0, \quad \text{tr}(CQC^T) < \tilde{\gamma}^2.$$

**Teorema 17.** Para un valor dado de  $\tilde{\gamma} > 0$  existe un protocolo distribuido (4.40), que presenta una región de consenso no acotada  $H_2 \tilde{\delta}_{\tilde{\gamma}} \triangleq [\tilde{\tau}, \infty)$  si y solo si existe una matriz  $Q > 0$  y un escalar  $\tilde{\tau}$ , tal que se cumpla

$$AQ + QA^T - \tilde{\tau}BB^T + DD^T < 0, \quad \text{tr}(CQC^T) < \frac{\tilde{\gamma}^2}{N}. \quad (4.57)$$

**Corolario 4.** El límite de desempeño  $H_2, \tilde{\gamma}_{min}$  de la red (4.41), bajo el protocolo de consenso (4.40), se encuentra resolviendo el siguiente problema de optimización.

Minimizar  $\tilde{\gamma}$  según la desigualdad LMI (4.21),

$$\begin{aligned} &\text{Con} \\ &Q > 0, \tilde{\gamma} > 0, \tilde{\tau} > 0. \end{aligned} \quad (4.58)$$

**Nota:** el límite de desempeño  $H_2$  para el consenso de la red (4.41), bajo el protocolo (4.40), está relacionado con dos factores: la norma mínima  $H_2$  de un solo agente (4.39), por el uso de una ley estática de control  $u_i = Fx_i$  y el número de agentes en la red. Contrario al caso  $H_\infty$ , el límite de desempeño  $H_2$  de la red (4.41), es proporcional al tamaño de la red.

**Algoritmo 2.** Para cualquier  $\tilde{\gamma} \geq \tilde{\gamma}_{min}$ , donde  $\tilde{\gamma}_{min}$  está dado por (4.46), el protocolo (4.40), resuelve el problema de consenso distribuido  $H_2$  y puede construirse como se indica.

- 1) Resolver la LMI (4.21) para obtener  $Q > 0$  y  $\tilde{\tau} > 0$  luego escoger la matriz de ganancia de realimentación  $K = -\frac{1}{2}B^T Q^{-1}$
- 2) Seleccionar la matriz de acople  $c > \tilde{c}_{th}$ , con  $\tilde{c}_{th} = \frac{\tilde{\tau}}{\min_{i=2,\dots,N} \lambda_i}$  donde  $\lambda_i, i = 2, \dots, N$ , son los valores propios de  $\mathcal{L}$ .

## CONCLUSIONES

Este capítulo presentó los fundamentos de la optimización colaborativa. De los teoremas es claro e interesante, que los algoritmos colaborativos para optimización buscan mínimos globales, además tienen convergencia garantizada si la solución existe. Tratan el problema de la no convexidad, son robustos. Se presentó en concepto del consenso desde dos puntos de vista el primero desde las técnicas de optimización es un estado donde el sistema en cada interacción no logra mejorar el resultado y el segundo es un tratamiento desde los sistemas dinámicos que asimila el consenso a la región de robustez del sistema y propone metodologías para encontrarlo.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Atkinson, K. (1989). *Computers and Intractability*. Kluwer Academic Publishers, San Francisco, U.S.A.
- [2] Boykov, Y., Veksler, O., and Zabih, R. (2001). Fast approximate energy minimization via graph cut. *IEEE TPAMI*, 23(11):1222-1239.
- [3] Hinton, G., Sejnowski, T., and Ackley, D. (1992). Genetic algorithms. *Cognitive Science*, pages 66-72.
- [4] Huang, X. (2004). A general global optimization algorithm for energy minimization from stereo matching. In *ACCV, Korea*.
- [5] Jr., E. G. C., editor (1976). *Computer and Job-Shop Scheduling*. Wiley-Interscience, New York.
- [6] Kirkpatrick, Gelatt, C., and Vecchi, M. (1983). Optimization by simulated annealing. *Science*, 220:671-680.
- [7] Lawler, E. L. and Wood, D. E. (1966). Branch-and-bound methods: A survey. *OR*, 14:699-719.
- [8] Marr, D. and Poggio, T. (1976). Cooperative computation of stereo disparity. *Science*, 194:209-236.
- [9] Michalewicz, Z. and Fogel, D. (2002). *How to Solve It: Modern Heuristics*. Springer-Verlag, New York.
- [10] Papadimitriou, C. H. and Steiglitz, K., editors (1998). *Combinatorial Optimization*. Dover Publications, Inc.
- [11] Scharstein, D. and Szeliski, R. (2002). A taxonomy and evaluation of dense two-frame stereo correspondence algorithms. *IJCV*, 47:7-42.
- [12] Varga, R., editor (1962). *Matrix iterative Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- [13] Zitnick, C. L. and Kanade, T. (2000). A cooperative algorithm for stereo matching and occlusion detection. *IEEE TPAMI*, 2(7).
- [14] Grundel Don, Murpey Robert, Pardalos M Panos. *Theory and algorithms for Cooperative Systems*. Word Scientific. 2004.
- [15] Zhongkui Li, Zhisheng Duan. *Cooperative Control of Multi-Agent Systems*, CRC Press. 2015.
- [16] Shamma Jeff S. *Cooperative Control of Distributed Multi-Agent Systems*. John Wiley & Sons Ltd. 2007. ISBN 978-0-470-06031-5.
- [17] He Bai, Murat Arcak, John Wen, *Cooperative Control Design. A Systematic, Passivity-Based Approach*. Springer, 2010. ISBN 978-1-4614-0014-1.
- [18] Bezalel Peleg Peter Sudhölter. *Introduction to the Theory of Cooperative Games*. ISBN 978-3-540-72944-0 Springer. 2007.
- [19] David W.K. Yeung \_ Leon A. Petrosyan. *Subgame Consistent Economic Optimization An dvanced Cooperative Dynamic Game Analysis*. Springer. 2012. ISBN 978-0-8176-8261-3.
- [20] Chi-Keong Goh and Kay Chen Tan. A Competitive-Cooperative Coevolutionary Paradigm for Dynamic Multiobjective Optimization. *IEEE TRANSACTIONS ON EVOLUTIONARY COMPUTATION*, VOL. 13, NO. 1, FEBRUARY 2009 103.
- [21] G. Antonelli. Interconnected dynamic systems: An overview on distributed control. *IEEE Control Systems Magazine*, 33(1):76–88, 2013.
- [22] V.S. Bokharaie, O. Mason, and M. Verwoerd. D-stability and delayindependent stability of homogeneous cooperative systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(12):2882–2885, 2010.
- [23] V. Borkar and P. Varaiya. Asymptotic agreement in distributed estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(3):650–655, 1982.
- [24] Y.C. Cao and W. Ren. Sampled-data discrete-time coordination algorithms for double-integrator dynamics under dynamic directed interaction. *International Journal of Control*, 83(3):506–515, 2010.

- [25] Y.C. Cao, D. Stuart, W. Ren, and Z.Y. Meng. Distributed containment control for multiple autonomous vehicles with double-integrator dynamics: Algorithms and experiments. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 19(4):929–938, 2011.
- [26] Y.C. Cao, W.W. Yu, W. Ren, and G.R. Chen. An overview of recent progress in the study of distributed multi-agent coordination. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 9(1):427–438, 2013.
- [27] Y.C. Cao and W. Ren. Distributed coordinated tracking with reduced interaction via a variable structure approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(1):33–48, 2012.
- [28] R. Carli, F. Bullo, and S. Zampieri. Quantized average consensus via dynamic coding/decoding schemes. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 20(2):156–175, 2009.
- [29] D.V. Dimarogonas, E. Frazzoli, and K.H. Johansson. Distributed eventtriggered control for multi-agent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(5):1291–1297, 2012.
- [30] Y.G. Hong, J.P. Hu, and L. Gao. Tracking control for multi-agent consensus with an active leader and variable topology. *Automatica*, 42(7):1177–1182, 2006.
- [31] Y.G. Hong, G.R. Chen, and L. Bushnell. Distributed observers design for leader-following control of multi-agent networks. *Automatica*, 44(3):846–850, 2008.
- [32] A. Jadbabaie, J. Lin, and A.S. Morse. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(6):988–1001, 2003.
- [33] M. Ji, G. Ferrari-Trecate, M. Egerstedt, and A. Buffa. Containment control in mobile networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(8):1972–1975, 2008.
- [34] F.C. Jiang and L. Wang. Consensus seeking of high-order dynamic multi-agent systems with fixed and switching topologies. *International Journal of Control*, 85(2):404–420, 2010.
- [35] T. Li, M.Y. Fu, L.H. Xie, and J.F. Zhang. Distributed consensus with limited communication data rate. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(2):279–292, 2011.
- [36] Z.K. Li, Z.S. Duan, and G.R. Chen. Dynamic consensus of linear multiagent systems. *IET Control Theory and Applications*, 5(1):19–28, 2011.
- [37] Z.K. Li, Z.S. Duan, G.R. Chen, and L. Huang. Consensus of multiagent systems and synchronization of complex networks: A unified viewpoint. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 57(1):213–224, 2010.
- [38] Z.K. Li, Z.S. Duan, and L. Huang.  $H^\infty$  control of networked multi-agent systems. *Journal of Systems Science and Complexity*, 22(1):35–48, 2009.
- [39] Z.K. Li, X.D. Liu, M.Y. Fu, and L.H. Xie. Global  $H^\infty$  consensus of multi-agent systems with Lipschitz non-linear dynamics. *IET Control Theory and Applications*, 6(13):2041–2048, 2012.
- [40] Z.K. Li, X.D. Liu, W. Ren, and L.H. Xie. Distributed tracking control for linear multi-agent systems with a leader of bounded unknown input. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(2):518–523, 2013.
- [41] Z.K. Li, W. Ren, X.D. Liu, and M.Y. Fu. Consensus of multi-agent systems with general linear and Lipschitz nonlinear dynamics using distributed adaptive protocols. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(7):1786–1791, 2013.
- [42] Z.K. Li, W. Ren, X.D. Liu, and L.H. Xie. Distributed consensus of linear multi-agent systems with adaptive dynamic protocols. *Automatica*, 49(7):1986–1995, 2013.
- [43] P. Lin and Y.M. Jia. Consensus of second-order discrete-time multiagent systems with nonuniform time-delays and dynamically changing topologies. *Automatica*, 45(9):2154–2158, 2009.
- [44] U. Munz, A. Papachristodoulou, and F. Allgower. Robust consensus controller design for nonlinear relative degree two multi-agent systems with communication constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(1):145–151, 2011.
- [45] R. Olfati-Saber, J.A. Fax, and R.M. Murray. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proceedings of the IEEE*, 95(1):215–233, 2007.

- [46] R. Olfati-Saber and R.M. Murray. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(9):1520–1533, 2004.
- [47] A. Papachristodoulou, A. Jadbabaie, and U. Munz. Effects of delay in multi-agent consensus and oscillator synchronization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(6):1471–1477, 2010.
- [48] W. Ren. On consensus algorithms for double-integrator dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(6):1503–1509, 2008.
- [49] W. Ren and E.M. Atkins. Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 17(10-11):1002–1033, 2007.
- [50] W. Ren and R.W. Beard. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(5):655661, 2005.
- [51] W. Ren, R.W. Beard, and E.M. Atkins. Information consensus in multivehicle cooperative control. *IEEE Control Systems Magazine*, 27(2):7182, 2007.
- [52] W. Ren, K.L. Moore, and Y. Chen. High-order and model reference consensus algorithms in cooperative control of multivehicle systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 129(5):678–688, 2007.
- [53] J.H. Seo, H. Shim, and J. Back. Consensus of high-order linear systems using dynamic output feedback compensator: Low gain approach. *Automatica*, 45(11):2659–2664, 2009.
- [54] G.S. Seyboth, D.V. Dimarogonas, and K.H. Johansson. Event-based broadcasting for multi-agent average consensus. *Automatica*, 49(1):245252, 2013.
- [55] Q. Song, J.D. Cao, and W.W. Yu. Second-order leader-following consensus of nonlinear multi-agent systems via pinning control. *Systems and Control Letters*, 59(9):553-562, 2010.
- [56] Y.P. Tian and C.L. Liu. Robust consensus of multi-agent systems with diverse input delays and asymmetric interconnection perturbations. *Automatica*, 45(5):1347–1353, 2009.
- [57] J.N. Tsitsiklis, D.P. Bertsekas, M. Athans, Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(9):803–812, 1986.
- [58] S.E. Tuna. Conditions for synchronizability in arrays of coupled linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(10):2416–2420, 2009.
- [59] T. Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob, I. Cohen, and O. Shochet. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. *Physical Review Letters*, 75(6):1226–1229, 1995.
- [60] K.Y. You and L.H. Xie. Network topology and communication data rate for consensusability of discrete-time multi-agent systems. *IEEE transactions on automatic control*, 56(10):2262–2275, 2011.
- [61] W.W. Yu, G.R. Chen, M. Cao, and J. Kurths. Second-order consensus for multiagent systems with directed topologies and nonlinear dynamics. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 40(3):881–891, 2010.
- [62] H.W. Zhang, F.L. Lewis, and A. Das. Optimal design for synchronization of cooperative systems: State feedback, observer, and output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(8):1948–1952, 2011.
- [63] K.M. Zhou and J.C. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1998.
- [64] W. Zhu and D.Z. Cheng. Leader-following consensus of second-order agents with multiple time-varying delays. *Automatica*, 46(12):1994–1999, 2010.
- [65] W. Ren and R.W. Beard. *Distributed Consensus in Multi-Vehicle Cooperative Control*. Springer-Verlag, London, 2008.
- [66] Luyben William L. *PROCESS MODELING, SIMULATION, AND CONTROL FOR CHEMICAL ENGINEERS*.

# CAPÍTULO 5

## CONTROL COLABORATIVO DE PROCESOS DE DINÁMICA MÚLTIPLE.

### 5.1 INTRODUCCIÓN:

En este capítulo se presenta el esquema de control colaborativo para *procesos de dinámica múltiple*. Inicialmente se exponen temas básicos de estabilidad y rechazo a perturbaciones. Basándonos en pruebas por simulación al modelo, se verifica la hipótesis inicial de esta investigación (rechazo de perturbación en un lazo por medio de acciones en los otros lazos). Este comportamiento lo explicamos por medio de un razonamiento sobre los planteamientos según LMI [1, 27,29], para criterios de rechazo a la perturbación. Luego se describe de forma resumida la estructura del esquema de control colaborativo que esta propuesta propone. Seguido a esto se describen parte por parte los elementos del control colaborativo y se justifica la estructura que se presenta en esta propuesta. Se presentan elementos de la propuesta que logran que el sistema tenga un buen desempeño. Finalmente se prueba la propuesta sobre un caso típico que se considera un problema abierto en control de procesos y es el del control de un reactor continuo de tanque agitado CSTR [2]. Con este modelo se realizaron simulaciones en la plataforma VisSim [3]. Presentamos la respuesta en equilibrio nominal y se verifican sus valores nominales, luego se somete el sistema a perturbaciones en lazo abierto y se hace un estudio de sensibilidad. Se procede a sintonizarlo por el método MIMO-PID que emplea programación semidefinida con LMI interactivas [4,5] y como se explicó en el capítulo 3, este método garantiza estabilidad en un entorno reducido. Se somete el proceso sintonizado de esta forma a perturbaciones severas en lazo cerrado y se evidencia que un esquema MIMO-PID convencional aun sintonizado por LMI, es incapaz de lograr un desempeño aceptable a esta situación simulada. Se hace una prueba en lazo abierto desintonizando lazos, de forma manual y se percibe una relativa mejoría. A continuación, se conforma el control colaborativo descrito y se aplica al sistema perturbado, verificando que la estructura de control logra rechazo dinámico de las perturbaciones con un buen desempeño.

### 5.2 REPRESENTACIÓN DE SISTEMAS DE DINÁMICA MÚLTIPLE

Sea un sistema de dinámica múltiple no perturbado.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) &= C_i x(t),\end{aligned}\tag{5.1}$$

Se asume que el modelo es linealizable al menos en tramos. Sin pérdida de generalidad podemos considerar que nuestro sistema completo se puede representar como un conjunto de subsistemas donde el modelo no lineal cambia con el punto de operación, con  $n = \text{número de subsistemas}$ .

Sea

$x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,

$u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entradas,

$y(t) \in \mathbb{R}^q$  es el vector de salidas,

$A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , y  $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ .

Además, existe una ley de control estática.

$$u(t) = F_i(x) \quad i = 1, 2 \dots n \quad (5.2)$$

## 5.3 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

La estabilidad que se trata en esta tesis se analiza por medio de desigualdades lineales matriciales [24], La razón es que el método LMI es poderoso, sencillo y matemáticamente legible. Además, permite incorporar especificaciones especiales como: Tipo de control (Regulador o seguimiento), Tiempos de decaimiento, Rechazo acotado a la perturbación, Acotamiento de entradas y salidas.

**Teorema 1.** El equilibrio de un sistema con  $u(t) = 0$  tiene estabilidad asintótica global si existe una matriz común y positiva definida  $P$  tal que la siguiente desigualdad se verifica.

$$A_i^T P + P A_i = 0, \quad i = 1, 2 \dots n$$

Decimos que  $P$  es común para los  $n$  subsistemas (esta condición se impone en la optimización).

**Teorema 2.** El equilibrio de un sistema de control descrito por las Ecuaciones (5.1) y (5.2) es global y asintóticamente estable, si existe una matriz común y positiva definida  $P$  tal que la siguiente desigualdad se cumple.

$$G_i^T P + P G_i < 0 \quad (5.3)$$

Donde  $G$  es:  $G = A_i - B_i F_i$

### Diseño de controladores estables

Para resolver esta parte se puede consultar el Capítulo 3 sobre sintonía de controladores PID interactivos según LMI, en donde se desarrolló un ejemplo.

### Velocidad de decaimiento

La velocidad de respuesta está relacionada con la velocidad de decaimiento, esto se relaciona con el mayor exponente de Lyapunov. Hay una condición que dice lo siguiente según [1, 26]

$$\dot{V}(x(t)) < -2\alpha V(x(t)) \quad (5.4)$$

Con  $V$  una función de Lyapunov y  $\alpha$  una tolerancia

Note que esta expresión acota la función de Lyapunov a una distancia  $\alpha$  a la izquierda del eje imaginario [5,19]. Para todas las trayectorias es equivalente la siguiente representación.

$$G_i^T P + P G_i + 2\alpha P < 0 \quad (5.5)$$

La cota inferior más grande para velocidad de decaimiento que se puede obtener usando la función cuadrática de Lyapunov, se hace resolviendo un problema de optimización generalizada de valores propios, en  $X$  y  $\alpha$ .

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \alpha \\ & x, M_1 \dots M_n \end{aligned}$$

Según (5.6)

$$\begin{aligned} & x > 0 \\ & -XA_i^T - A_i X + M_i^T B_i^T + B_i M_i - 2\alpha P > 0 \\ & -XA_i^T - A_i X - XA_i^T - A_i X + M_i^T B_i^T + B_i M_i + M_i^T B_i^T + B_i M_i - 4\alpha X \geq 0 \end{aligned}$$

Donde:  $X = P^{-1}$ ,  $M_i = F_j X$ ,

## Restricciones sobre la entrada y la salida.

### Sobre la entrada.

**Teorema:** Asumiendo que las condiciones iniciales son conocidas  $x(0)$ . La restricción  $\|u(t)\|_2 \leq \mu$  es aplicada todo el tiempo  $t \geq 0$ . Si las desigualdades lineales matriciales siguientes se cumplen

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.7)$$

$$\begin{bmatrix} X & M_i^T \\ M_i & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0$$

Donde  $X = P^{-1}$ ,  $M_i = F_j X$ .

### Sobre la salida.

**Teorema:** Asumiendo que las condiciones iniciales  $x(0)$  son conocidas. La restricción  $\|y(t)\|_2 \leq \lambda$  se aplica todo el tiempo  $t \geq 0$ , si las siguientes LMIs se cumplen, [1].

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0$$

Donde  $X = P^{-1}$  (5.8)

$$\begin{bmatrix} X & X C_i^T \\ C_i X & \lambda^2 I \end{bmatrix} \geq 0$$

## 5.4 RECHAZO DE PERTURBACIONES

En general, un problema de rechazo a las perturbaciones persistentes y desconocidas se puede lograr por medio de la determinación de un conjunto *cero-alcanzable* [13], que para un sistema lineal es globalmente estable y es el conjunto invariante más pequeño. El diseño del rechazo a la perturbación se ha hecho por medio de programación dinámica y la aplicación de invariantes elipsoidales.

### 5.4.1 DEFINICIONES BÁSICAS

$int\{\xi\}$  Es el interior del conjunto  $\xi$  y  $\partial\xi$  es su superficie.

Si  $\xi$  es un politopo, entonces  $vert\{\xi\}$  son los vértices.

Podemos llamar  $\mathbb{C}$  a un conjunto convexo y compacto, que incluye el origen en su interior.

Consideremos sistemas dinámicos invariantes posiblemente inciertos de la forma:

$$\begin{aligned}\Delta x(t) &= f(x(t), u(t), w(t)) \\ y(t) &= g(x(t)),\end{aligned}\tag{5.9}$$

Donde

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ , son los estados del sistema,

$u(t) \in \mathbb{R}^m$  son las entradas de control,

$y(t) \in \mathbb{R}^p$  son las salidas,

$w(t) \in \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^q$  son entradas externas o perturbaciones, y  $\mathcal{W}$  es un conjunto compacto.

Se asume que:

$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  son funciones Lipschitz y que  $u(t)$  y  $w(t) \in \mathcal{W}$  son continuas.

Bajo esta suposición el sistema admite una solución  $x(t)$  que es única y definida sobre  $\mathbb{R}^+$  para todo  $x(0) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u$  y  $w$ .

**Definición 1:** el conjunto  $\xi \subset \mathbb{R}^n$  se dice que es invariante positivo para todos los sistemas de la forma:

$$\Delta x(t) = f(x(t))\tag{5.10}$$

Si para todos los  $x(0) \in \xi$  la solución  $x(t) \in \xi$  para  $t > 0$ .

Si  $x(0) \in \xi$  implica que  $x(t) \in \xi$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto decimos que  $\xi$  es invariante.

**Definición 2:** el conjunto  $\xi \subset \mathbb{R}^n$  se dice que es positivo invariante robusto para los sistemas de la forma:

$$\Delta x(t) = f(x(t))\tag{5.11}$$

Si para todos los  $x(0) \in \xi$  y para todos los  $w(t) \in \mathcal{W}$  la solución es tal que  $x(t) \in \xi$  para  $t > 0$ .

**Definición 3:** el conjunto  $\xi \subset \mathbb{R}^n$  se dice que es un conjunto invariante positivo de control (robusto) para todos los sistemas de la forma:

$$\begin{aligned}\Delta x(t) &= f(x(t)) \\ (\Delta x(t) &= f(x(t), u(t), w(t)), w(t) \in \mathcal{W}), \\ y(t) &= g(x(t))\end{aligned}\tag{5.12}$$

Si existe una ley de control por realimentación

$$u(t) = \Phi(y(t)) \quad (5.13)$$

Que asegura la existencia y unicidad de las soluciones sobre  $\mathbb{R}^+$ .

Si esto se cumple entonces  $\xi$  es un invariante positivo para el sistema en lazo cerrado. Básicamente los conjuntos invariantes se presentan de dos formas como conjuntos elipsoides o poliedros, aunque es posible admitir otros tipos. Los elipsoides son muy populares [24] como conjuntos invariantes candidatos y se pueden representar como:

$$\xi = \{x \in \mathbb{R}^n: x^T P x \leq 1\} \quad (5.14)$$

Donde P es una matriz definida positiva. La función Minkowski [25] de  $\xi$  es la norma cuadrática.

$$\Psi_\xi(x) = \|x\|_p \doteq (x^T P x)^{1/2} \quad (5.15)$$

Es importante notar que el gradiente de la función  $\Psi_\xi(x)$  y  $\Psi_\xi(x)^2 = (x^T P x)^{1/2}$  tienen la misma dirección. Esto hace que no haya diferencia en tomar una u otra como función de Lyapunov ya que sus derivadas tienen el mismo signo. La mitad del espacio tangente a  $\xi$  en  $x \in \partial\xi$  es  $\mathcal{F}_\xi(x) = \{y: 2x^T P y \leq 0\}$  en el caso de un sistema lineal  $\dot{x} = Ax$ . La condición de subtangencialidad está dada por  $2x^T P y \leq 0$ , siempre que  $x^T P x = 1$ . Esta condición puede escribirse como:  $x^T (A^T P + P A)x \leq 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Así la condición de invariancia de Nagumo [15] nos lleva a la desigualdad anterior. Si  $\xi$  es contractivo entonces existe un  $\beta > 0$  tal que  $x^T (A^T P + P A)x \leq -2\beta x^T P x < 0$  para todos los  $x \in \mathbb{R}^n$ , esto puede ser expresado por medio de la conocida ecuación de Lyapunov:  $A^T P + P A = -Q$ , Con  $Q > 0$ .

Ahora podemos considerar el caso de un sistema incierto. Si A es una matriz politópica

$$A(w) = \sum_{i=1}^r A_i w_i \quad \text{donde } \sum_{i=1}^r w_i = 1, \quad w_i \geq 0, \quad (5.16)$$

Entonces la condición de invariancia robusta para  $\xi$  se puede expresar por medio de un conjunto de desigualdades de Lyapunov:

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (5.17)$$

Este conjunto de condiciones es atractivo porque es convexa en P. Esto significa que si  $P_1$  y  $P_2$  satisfacen las desigualdades, entonces la combinación convexa  $\alpha P_1 + (1-\alpha)P_2$  también lo hace. Esta propiedad ayuda en la búsqueda de un elipsoide invariante  $\xi$  para el politopo de matrices  $A(w)$ .

### Construcción de Conjuntos invariantes y diseño de controladores

Esencialmente la construcción de conjuntos invariantes elipsoidales se basa en la ecuación de Lyapunov sobre la ecuación de Riccati o sobre técnicas de LMI. Se ilustra esto con un caso simple. Considere que se desea encontrar una ganancia estabilizadora K para un par (A, B) junto con una función cuadrática de Lyapunov  $x^T P x$ . Entonces se debe considerar la ecuación

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) < 0, \quad P > 0. \quad (5.18)$$

Esta ecuación es bilineal en  $P$  y  $K$ , y no es fácil de manipular como está escrita. Sin embargo, se pueden multiplicar ambos lados de la primera desigualdad por  $Q \doteq P^{-1}$  y parametrizar  $K$  como  $K = YP$  para obtener la siguiente desigualdad matricial que es más fácil de manipular

$$QA^T + AQ + Y^T B^T + BY < 0, \quad Q > 0 \quad (5.19)$$

Consideremos ahora un sistema con perturbación

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) + E_i v(t), \\ y(t) &= C_i x(t), \end{aligned} \quad (5.20)$$

Donde  $v(t)$  es la perturbación.

El problema del rechazo de las perturbaciones se puede resolver por la minimización del índice  $\gamma$ , sujeto a las siguientes restricciones:

$$\sup_{\|v(t)\|_2 \neq 0} \frac{\|y(t)\|_2}{\|v(t)\|_2} \leq \gamma \quad (5.21)$$

Se sabe que la siguiente expresión se cumple.

$$M_i = F_i X \quad M_i \text{ Es la acción de control.}$$

Ahora supongamos que existe una función cuadrática  $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ , con  $P > 0$ , y  $\gamma \geq 0$  y que para todo  $t$

$$\dot{V}(x(t)) + y^T(t)y(t) - \gamma^2 v^T(t)v(t) \leq 0 \quad (5.22)$$

De la ecuación 5.20 e integrando la ecuación 5.22, de 0 a  $t$  tenemos:

$$\int_0^t (\dot{V}(x(t)) + y^T(t)y(t) - \gamma^2 v^T(t)v(t)) dt \leq 0 \quad (5.23)$$

Asumiendo que la condición inicial  $x(0) = 0$ , tenemos que.

$$V(x(t)) + \int_0^t (y^T(t)y(t) - \gamma^2 v^T(t)v(t)) dt \leq 0 \quad (5.24)$$

Ahora si  $V(x(t)) \geq 0$ , eso implica que

$$\frac{\|y(t)\|_2}{\|v(t)\|_2} \leq \gamma \quad (5.25)$$

Por lo tanto la ganancia con norma  $L_2$  del modelo es menor a  $\gamma$ , si la ecuación (5.22) se cumple. Enseguida vamos a plantear una LMI según la condición de la ecuación (5.22).

$$\dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) + x^T C_i^T C_i x(t) - \gamma^2 v(t)^T v(t) \leq 0 \quad (5.26)$$

La ecuación anterior es el funcional del algoritmo que resolveremos por LMI. Los dos primeros términos corresponden a la identidad de Lyapunov y los dos últimos a la resta de dos formas cuadráticas cuya diferencia debe ser muy pequeña.

Además se aplica que  $y(t) = C_i x(t)$  y la siguiente propiedad:  $y^T(t) = [C_i x(t)]^T = x^T(t) C_i^T$

$$x^T(t)(A_i - B_i F_i)^T P x(t) + x^T(t) P (A_i - B_i F_i) x(t) + x^T C_i^T C_i x(t) - \gamma^2 v(t)^T v(t) + v^T(t) E_i^T P x(t) + x^T(t) P E_i v(t) \quad (5.27)$$

Se puede agrupar todo este resultado como una matriz de la forma.

$$\begin{bmatrix} x^T(t) & v^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5.28)$$

Donde la matriz  $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$  se obtiene dos grupos de términos, así. En la diagonal principal agrupamos términos que pre multipliquen por  $x^T(t)$  y post multipliquen por  $x(t)$  en el primer elemento y en el segundo elemento, los que pre multipliquen por  $v^T(t)$  y post multipliquen por  $v(t)$ , el resto se agrupa de modo que los productos sean consistentes. De la forma  $x^T(t), v(t)$  y los de la forma  $v^T(t), x(t)$ .

Elemento [1,1]

$$x^T(t)(A_i - B_i F_i)^T P x(t) + x^T(t) P (A_i - B_i F_i) x(t) + x^T C_i^T C_i x(t)$$

Elemento [2,2]  $-\gamma^2 . I$

Elemento [2,1]  $E_i^T P$

Elemento [1,2]  $P E_i$

La forma resultante es la siguiente.

$$\begin{bmatrix} x^T(t) & v^T(t) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (A_i - B_i F_i)^T P + P(A_i - B_i F_i) & P E_i \\ + C_i^T C_i & -\gamma^2 . I \\ E_i^T P & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5.29)$$

O también de esta forma

$$\begin{bmatrix} x^T(t) & v^T(t) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -(A_i - B_i F_i)^T P - P(A_i - B_i F_i) & -P E_i \\ -C_i^T C_i & \gamma^2 . I \\ -E_i^T P & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.30)$$

El lado izquierdo de la ecuación (5.30) se puede descomponer en.

$$\begin{bmatrix} -(A_i - B_i F_i)^T P - P(A_i - B_i F_i) & -P E_i \\ -E_i^T P & \gamma^2 . I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_i^T C_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Que es igual a

$$\begin{bmatrix} -(A_i - B_i F_i)^T P - P(A_i - B_i F_i) & -P E_i \\ -E_i^T P & \gamma^2 . I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_i^T \\ 0 \end{bmatrix} [C_i \quad 0] \geq 0 \quad (5.31)$$

Ahora se puede llevar a esta forma

$$\begin{bmatrix} -(A_i - B_i F_i)^T P - P(A_i - B_i F_i) & -P E_i & C_i^T \\ -E_i^T P & \gamma^2 . I & 0 \\ C_i & 0 & I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.32)$$

Luego multiplicamos a ambos lados de la desigualdad por el bloque diagonal  $[X \ I \ I]$ , donde  $X = P^{-1}$

Además,  $M_i = F_i X$

$$\begin{bmatrix} -(X A_i^T - M_i^T B_i^T + A_i X - B_i M_i) & -P E_i & C_i^T \\ -E_i^T P & \gamma^2 . I & 0 \\ C_i & 0 & I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.33)$$

Con esta matriz ahora podemos plantear una minimización por LMI de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \gamma^2 \\ & x, M_1, \dots, n \end{aligned} \quad (5.34)$$

Con  $x > 0$  donde  $M_i = F_i X$

O para la ganancia del lazo

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \gamma^2 \\ & x, F_1, \dots, n \end{aligned} \quad (5.35)$$

Resolviendo el problema anterior con algún programa de optimización (Matlab) podemos encontrar las  $F_i$  ganancias que permiten que el lazo no pierda la estabilidad mientras hace rechazo de la perturbación  $v(t)$  acotada. O lo que es equivalente a calcular las acciones de control que rechazan al máximo la perturbación del sistema y no comprometen la estabilidad. Note que  $\gamma^2$  penaliza todos los lazos.

Como nuestro objetivo es rechazar la perturbación en un solo lazo (crítico) modificando las consignas de  $(n - 1)$  lazos, debemos encontrar una región de consignas admisibles que no comprometan la estabilidad del sistema. Ahora podemos considerar que podemos desintonizar un controlador alterando su consigna nominal.

Sea la siguiente situación. Tenemos un controlador con una ley de control estática y según la matriz anterior (5.33)  $M_i$  es la acción de control admisible para rechazar la perturbación (o el índice  $\gamma$ ), que se le debe enviar a la planta que tiene el modelo de las ecuaciones (5.20).

El resultado admite que esos valores podrían ser subóptimos y aun así el sistema no pierde la estabilidad, mientras las desigualdades (5.32, 5.33) se conserven. Se puede de forma indirecta imponer al controlador una acción subóptima. En lugar de rediseñar los parámetros de los controladores (salvo que la no linealidad sea muy alta), se opta por mover puntos de consigna. Esto con el fin de modular la acción  $M$  de la desigualdad (5.33).

En nuestro caso se puede calcular la región de consignas admisibles de forma numérica con un proceso fuera de línea (off line), corriendo la simulación anterior para trazar el contorno de esa región, con las siguientes condiciones. La acción de control del lazo crítico se mantiene constante  $M^*$  y se procede a encontrar las acciones admisibles  $M$  del resto de lazos para un nuevo punto de equilibrio donde el sistema conserva la estabilidad, y así logre rechazar la perturbación. De esta operación se pueden encontrar valores de consigna que no desestabilicen el sistema, pero no se puede determinar aun su valor óptimo en el sentido del control que se propone.

Un problema en teoría de control multivariable lineal es el de controlar una planta de modo que esta siga unas referencias prescritas y a su vez rechace perturbaciones tanto internas como externas. Inclusive perturbaciones generadas por exosistemas. Según [6], se muestra que en caso de error por realimentación cualquier regulador resuelve el problema en cuestión si incorpora un modelo del sistema dinámico que genere las referencias y las señales de perturbación tanto si se desea que sean seguidas o rechazadas. Esto último se conoce como el principio del modelo interno.

## 5.5 DETERMINACIÓN DE ATRACTORES

En general para un sistema multivariable no lineal este puede ser modelado por las siguientes ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, w, u) \\ e &= h(z, w) \\ y &= k(x, w)\end{aligned}$$

La primera ecuación describe la planta con el estado  $x$ , definido sobre una vecindad  $X$  alrededor del origen en  $\mathbb{R}^n$ , con la entrada de control  $u \in \mathbb{R}^n$ , que esta sometido a un conjunto de señales de entrada exógenas  $w \in \mathbb{R}^s$  que incluye perturbaciones a ser rechazadas y referencias a ser seguidas. La segunda ecuación define el error  $e \in \mathbb{R}^p$ . La tercera ecuación define un conjunto de variables medidas  $y \in \mathbb{R}^q$ , que además son función de los estados de planta  $x$  y las entradas exógenas  $w$ .

### *Estabilidad Neutral*

Si el exosistema tiene un punto de equilibrio estable según Lyapunov en  $w = 0$  y en alguna vecindad  $W$  de  $w = 0$ , el conjunto de todos los estados iniciales  $w(0) \in W$  que son estables según poisson y densos en  $W$ .

### *Respuesta en estado estable*

En el caso de sistemas lineales, el problema de regulación de salida se reduce a diseñar un lazo de control asintóticamente estable donde cada entrada coincide con cada señal de referencia.

### *Proposición*

Suponga que existe un  $C^k$  ( $k \geq 2$ ) donde un mapeo satisface

$$\frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) = f(\pi(w), q(w))$$

Si  $u^o(\cdot)$  es la entrada de referencia producida por el sistema que se inicia en  $w(0) = w^o$ , entonces para cada condición inicial suficientemente pequeña  $x(0) = x^o$ , la respuesta del sistema a  $u^o(\cdot)$  satisface:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x^o, u^o(\cdot)) - x(t, \pi(w^o), u^o(\cdot))\| = 0$$

En otras palabras,  $x(t, \pi(w^o), u^o(\cdot))$  es la respuesta en estado estable a la entrada  $u^o(\cdot)$ .

*Prueba.* La matriz jacobiana del sistema compuesto

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, q(w)) \\ \dot{w} &= s(w)\end{aligned}$$

En el punto de equilibrio  $(x, w) = (0, 0)$ , tiene la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} A & * \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

Donde  $A$  tiene todos sus valores propios con parte real negativa, y  $S$  tiene todos sus valores propios en el eje imaginario. Por lo tanto, el sistema en cuestión tiene un *center Manifold* [16], que es el grafico de un mapeo  $x = \pi(w)$ . Este manifold invariante es un atractor y exponencial, y por lo tanto todas las trayectorias del sistema satisfacen

$$\|x(t) - \pi(w(t))\| \leq Ke^{-\alpha t} \|x^o - \pi(w^o)\|$$

Para todo  $t \geq 0$  y todo  $(x^o, w^o)$  en una vecindad de  $(0, 0)$ , y una  $K > 0$  apropiada y  $\alpha > 0$ . Con estos argumentos la conclusión es inmediata: el invariante es atractor.

**Ejemplo.** Considere un sistema de respuesta forzada periódica.

$$\dot{x} = -x + 10 \cos t \sin^2 t$$

Que es equivalente a:

$$\dot{x} = -x + 10\omega_1\omega_2^2$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= -\omega_1\end{aligned}$$

El centro del Manifold para el sistema anterior se muestra en la parte superior de la Figura 5.1 y en la parte inferior de la figura 5.1. Se muestra la respuesta (Matlab y por VisSim) a una condición inicial genérica.

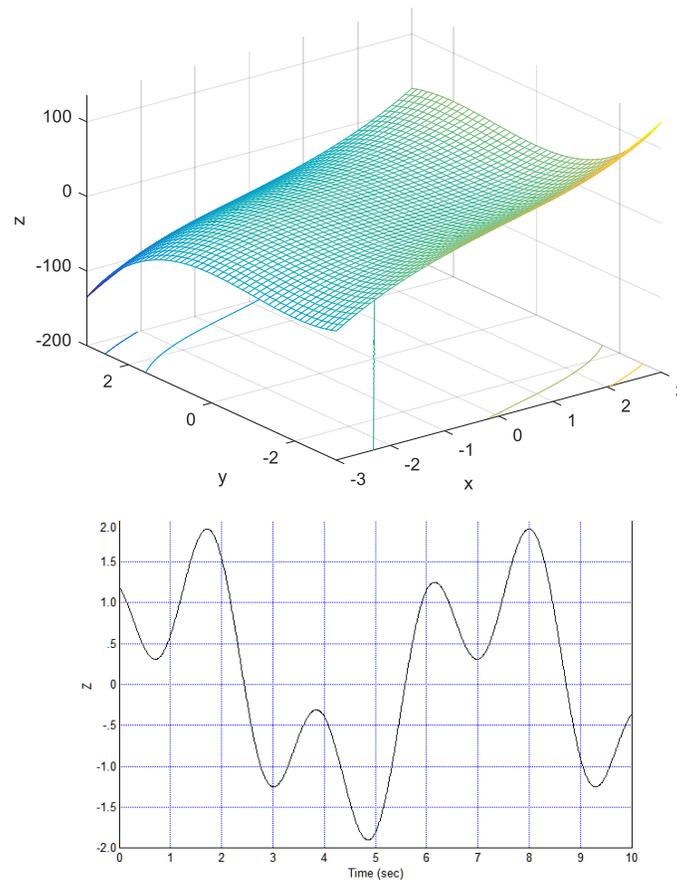


Figura 5.1. El centro del Manifold y respuesta a una entrada acotada

Se confirma con este planteamiento teórico, que el centro del Manifold se comporta como un atractor. Este razonamiento justifica la importancia de obtener mapas de puntos de equilibrio (numéricos) y emplearlos como representaciones de atractores.

## 5.6 COMPORTAMIENTO DEL SISTEMA A UNA DESINTONIZACIÓN DE LOS LAZOS.

En esta parte vamos a analizar lo que sucede a nivel de rechazo de perturbaciones en un sistema MIMO acoplado. ¿Que se desencadena al desintonizar algunos lazos de control? Considere la matriz anterior (5.33).

$$\begin{bmatrix} -(XA_i^T - M_i^T B_i^T + A_i X - B_i M_i) & -PE_i & C_i^T \\ -E_i^T P & \gamma^2 \cdot I & 0 \\ C_i & 0 & I \end{bmatrix} \geq 0$$

Supongamos que es la representación más cercana al punto de equilibrio y abusando de la notación, los valores  $A, B, C, E, P$ , permanecen constantes pero por efecto de una desintonización de los  $n-1$  lazos la sub matriz  $M$  que representa la acción de control, se les reduce los valores de

sus componentes respecto al valor nominal excluyendo de esto al lazo crítico. Si el controlador es de tipo descentralizado, la forma de  $M$  es diagonal y presenta la siguiente estructura en el caso de un sistema (3×3).

$$M = \begin{bmatrix} M^* & & \\ & M^1 & \\ & & M^2 \end{bmatrix}$$

Donde  $M^*$  es el lazo crítico que no se desintoniza. La matriz anterior para garantizar estabilidad debe presentar acotamiento. Si ese acotamiento se puede relacionar con la norma de la matriz  $\|M\|$ , analicemos la componente de la desigualdad anterior que es función de  $M$

$$-(XA_i^T - M_i^T B_i^T + A_i X - B_i M_i) \geq 0$$

Si se le asignan valores a  $M^1$  y  $M^2$  de tal forma que la norma de la sub matriz anterior, que representa el esfuerzo en el controlador, disminuya, entonces el algoritmo procurará tener la norma de la matriz acotada y al intentar buscar un mínimo para  $\gamma^2$  el cual será menor que el que se encontró en condiciones nominales (la calificación global se transfiere al lazo óptimo), esto indica que la capacidad del sistema en la zona de la variable que no fue desintonizada debe tener mejor rechazo a la perturbación. La razón de esto es que si el lazo crítico permanece óptimo y los otros lazos se hacen subóptimos, una disminución en  $\gamma^2$  indirectamente debe mejorar el desempeño en el lazo crítico. Esto confirma los resultados que se observan en la simulación (ver apartado 5.13.), donde el sistema mejora bastante al disminuir la consigna en un solo lazo. Además, en la prueba con el reactor (CSTR) confirmamos que el grado de desintonización en los controladores por medio de consigna puede llegar a ser muy diferente, de hecho, se comprobó que solo disminuyendo la temperatura la respuesta al rechazo de perturbación por parte del lazo crítico mejora bastante y por efecto de la consigna del nivel la mejora es muy reducida.

Ahora es claro que desintonizar los lazos rechaza la perturbación en el lazo óptimo y ese rechazo mejora cuando la acción de control sobre los lazos no críticos *disminuye* en intensidad. El paso siguiente en el control es procurar un buen desempeño. Esta tarea la realizará el control colaborativo. Se requiere ahora garantizar la adecuada desintonización de los lazos.

## 5.7 CONTROL COLABORATIVO DE PROCESOS

Inicialmente el control colaborativo no fue pensado para el control de procesos de hecho se propuso como técnica de optimización en inteligencia artificial. Por definición, un sistema *colaborativo* depende de un grupo de participantes que hacen esfuerzos individuales para que se logre un beneficio común [17, 18, 19, 20, 22, 23]. Para lograrlo explota de la mejor forma posible las fortalezas de cada participante y vigila continuamente que esos esfuerzos por parte de ellos, que pueden ser llamados agentes, no entren en conflicto entre sí o con el *Líder*, mejor dicho, frente a la totalidad del sistema. Así de forma indirecta logra ahorro de energía, y es muy robusto. La idea de mitigar el conflicto se denomina en cualquier estrategia colaborativa: el *consenso*, y es la característica especial que logra que esta técnica logre convergencia a una solución *óptima y global* [17], las bondades que esto implica fueron descritas en el Capítulo 4.

Sin apartarnos de esta filosofía de trabajo (colaborativa) vamos a presentar, justificar y formalizar una *técnica de control colaborativa propia*, que se asimile al control de procesos MIMO descentralizado PI-PID para plantas de características acopladas, donde todo el tiempo se le dé prioridad a una sola variable del proceso ( $x^*$ ). Esto no implica que se descuiden el resto de variables; simplemente su desempeño no será óptimo, pero si adecuado. Para cumplir con la estructura colaborativa básica se requiere hacer tres modificaciones estructurales, la primera es que los *agentes* pueden ser asimilados a dinámicas controladas descentralizadas en los

procesos. La segunda es disponer de una red o mecanismo de comunicación entre agentes (*matriz de participación y modelo de grafos*) que se estudió en el Capítulo 4, esta información se puede extraer del modelo de planta y del modelo en lazo cerrado. La tercera modificación es identificar un *líder*, esto último se asimila a la dinámica representada en una variable o un estado que vamos a declarar como crítico ( $x^*$ ).

Para generalizar la aplicación de la propuesta se requiere tomar un problema de las características descritas anteriormente e identificar los elementos requeridos para conformar una estrategia colaborativa general. Como esta propuesta parte de un controlador MIMO-PID cada agente será asimilado a un lazo del control. No es suficiente seleccionar un lazo solo porque fue declarado en el diseño original, ahora el agente seleccionado debe tener influencia sobre la variable crítica. Esto quiere decir que una vez conformado el lazo de control PID local (descentralizado), una variación de su consigna debe lograr impactar la variable crítica en el punto de operación deseado, de forma tal que la perturbación sea rechazada. Una vez se realice la identificación y selección de los agentes, se deben asignar su rol y grado de compromiso en el control colaborativo propuesto.

Un criterio para facilitar esto es medir el grado de influencia optimizando el esfuerzo de cada agente, ya que él debe cumplir con un compromiso local y así evitar sobreesfuerzo en el control y una posible situación donde un actuador final alcance una situación de saturación. Hay que entender también que esta influencia puede cambiar con el punto de operación y el grado de perturbación aplicado.

### 5.7.1 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN COLABORATIVA

Considere un sistema de  $c$  agentes donde cada agente  $i \in \mathbb{C} = [1 \dots c]$  tiene asociado con él un vector de variables de optimización,  $r_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ , con  $r = [r_1 \dots r_c] \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Para cada agente se define una función de costo independiente  $f_i(r_i)$ , donde  $f_i: \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Se puede definir un problema de optimización descentralizada como sigue.

*Definición Optimización Descentralizada.*

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} [f_1(r_1), \dots, f_c(r_c)]$$

Con la restricción  $g(r)$  referencias controladores  
 $h(x)$  estados dinámicos

Donde  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  son listas de restricciones como desigualdades e igualdades que pueden incluir tanto requerimientos locales como globales. Se asume que las funciones  $f_i$ ,  $g$ ,  $h$ , son continuamente diferenciables, de variables continuas.

La formulación del problema por métodos de penalidad, permite un tratamiento separado de las restricciones que no incrementan la dimensión del problema de optimización, pero requieren iteración de todo el proceso de optimización hasta la convergencia. La penalidad asigna costo a la violación de restricciones al incluir una función de penalidad en la minimización. El método de penalidad para restricciones interconectadas se formula a continuación.

Para cada agente que alcanza una región factible  $R_i$ .

$$R_i = \{x_i \in \mathbb{R}^{n_i} | g_i(r_i), h_i(x_i)\} \forall i \in \mathbb{C}$$

y sea  $\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^{ni} | r_i \in \mathcal{R}_i, \forall i \in \mathbb{C}\}$

Ahora vamos a definir una función de penalización inexacta y diferenciable  $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  que penaliza todas las restricciones de interconexión del sistema por:

$$C(r) = \sum_{k=1}^{it} \max(0, g^k(r))^\gamma$$

Donde  $it$  define el número total de restricciones de interconexión en el sistema y  $\gamma \in \mathbb{R}$ .  $\gamma \geq 2$  define el orden de la función de penalidad. El problema de optimización descentralizada en la forma de penalidad resuelve múltiples iteraciones del siguiente funcional cuando el parámetro de penalidad  $\beta \in \mathbb{R}_+ \rightarrow 0$ .

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \left( \min_{r \in \mathcal{R}} [f_1(r_1), \dots, f_c(r_c)] \cdot \omega + \frac{1}{\beta} C(r) \right)$$

El método de optimización descentralizada que usa funciones de penalidad inexacta, garantiza la convergencia a una solución, suponiendo que una solución factible existe y suponiendo que el parámetro de penalidad se selecciona de modo que la convergencia alcanza algún valor. Si el parámetro converge a cero, la solución encontrada cumple con condiciones de optimalidad de Pareto [18]. Además si la solución óptima es factible y resulta en un  $C(r) = 0$ , cada solución intermedia está acotada superiormente por el costo óptimo, y así la optimización no estará mal condicionada en cualquier estado del proceso.

## 5.7.2 SELECCIÓN DE AGENTES COLABORATIVOS

Cuando se presentó el concepto de control por consignas se demostró el éxito de transformar un problema de optimización en un problema de consignas, que se reduce a seleccionar un conjunto de variables que mejor impacten la salida deseada. También hay otros recursos más formales que miden el grado de acoplamiento de un sistema MIMO, basados en evaluar la sensibilidad que determinadas entradas tienen sobre su salida directa y sobre las salidas vecinas o acopladas. Esto se conoce como el pareamiento, que se formaliza a través de la matriz RGA [6, 11, 21, 24]. En este punto se requiere un concepto similar pero ahora es en lazo cerrado, que mide los efectos desde la consigna hasta la salida. Se desea que un cambio acotado desde alguna de las  $(n - 1)$  consignas provoque un cambio óptimo en la salida crítica  $y^*$  lo más rápido posible pero subóptimo en el resto de salidas pero si acotadas. Esto debe cumplirse si el sistema en lazo cerrado cumple con un criterio de estabilidad de entrada, que ya se explicó, y se debe verificar antes de operar el control colaborativo. Se deben sintonizar los  $(n - 1)$  controladores PID, que serán agentes colaborativos y en modo seguimiento, con el fin de facilitar el rechazo a la perturbación. Para lograrlo se debe hacer una modificación a la técnica de sintonía descrita en el Capítulo 3, por medio de LMI, para darles especificación de seguimiento.

El sistema colaborativo exige hacer una asignación de responsabilidades por parte de sus integrantes para que el desempeño sea lo mejor posible. Esa asignación se traduce después en un grado de compromiso específico según el punto de operación del sistema. Este será un punto de partida para proponer una métrica que facilite los criterios de selección. Para lograr esto se propone una matriz que relacione la sensibilidad de la variable crítica sobre cambios de consigna en los  $(n-1)$  controladores PID. Esta información es de suma importancia para lograr la mejor respuesta transitoria del sistema según la contingencia que experimenta el sistema a causa de la perturbación.

**Definición.** *Agente colaborativo candidato para un estado con consenso:* sea un control PI o PID, se dice que éste representa un agente colaborativo para un estado con consenso, si logra aportar desplazamiento acotado al punto de equilibrio actual para que alcance un nuevo punto de equilibrio cumpliendo con las condiciones de consenso, donde el efecto de la perturbación sea rechazado y el error en el estado crítico se minimice.

Sea  $\Omega(C_i) \in \mathbb{R}$  un conjunto de controladores PID descentralizados que conforman un controlador MIMO. Si existe una función  $\Psi \in \mathbb{R}^n : X^n(x_i) \rightarrow X^{n-1}(x_i)$  que logre proyectar un estado de dimensión  $n$  en un espacio de dimensión  $n - 1$  el controlador  $C_i$  se puede considerar candidato colaborativo para el estado crítico.

*Asignación inicial de roles.* Los sistemas colaborativos antes de operar deben seleccionar las fortalezas de sus agentes. Al asimilar ese concepto en los sistemas dinámicos que tratan los procesos, vamos a proponer unas cifras de mérito que permitirán hacer selecciones a priori de los mejores lazos de control que entran a participar. Igual que como ocurre en un equipo de futbol, los más dotados para la situación actual juegan y los menos dotados esperan a ser llamados.

**Definición.** *Matriz de participación:*  $W$ . Una matriz de participación es un arreglo que reúne la sensibilidad local del sistema que las consignas producen sobre la salida crítica y sobre las otras salidas no críticas. La matriz de participación evalúa el impacto colateral de carácter local que se logra ejercer sobre los demás lazos excluyendo el lazo crítico. Esta matriz tiene la característica que continuamente es mejorada ya que sus valores son actualizados en cada paso  $k$  de optimización. Su valor inicial se debe calcular fuera de línea (off line) en el punto de equilibrio nominal. Es una matriz normalizada, esto significa que, si todos los agentes participan, cada uno hace un porcentaje del esfuerzo completo. Hay que admitir la existencia de una función  $\varphi(e, r) \in C^\infty$  tal que para la primera derivada la matriz de participación es  $\neq 0$ , ver Figura (5.2).

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \frac{\partial e_2}{\partial r_1} & \frac{\partial e_3}{\partial r_1} & \cdot & \frac{\partial e_*}{\partial r_1} \\
 \frac{\partial e_1}{\partial r_2} & 0 & \frac{\partial e_1}{\partial r_2} & \frac{\partial e_1}{\partial r_2} & \frac{\partial e_*}{\partial r_2} \\
 \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\
 \frac{\partial e_1}{\partial r_{n-1}} & \frac{\partial e_2}{\partial r_{n-1}} & \frac{\partial e_3}{\partial r_{n-1}} & 0 & \frac{\partial e_*}{\partial r_{n-1}}
 \end{array}$$

Figura 5.2. Matriz de participación

**Definición.** *Efecto colateral:* Es la influencia que los lazos colaborativos ejercen sobre los lazos vecinos. La matriz de participación da información local sobre el Efecto colateral. Sea  $i$  el agente local y sea  $j$  el agente impactado que opera en la vecindad de  $i$

$$Col_i \in \mathbb{R}_+, \quad Col_i = \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{\partial e_j}{\partial r_i} \right) \tag{5.36}$$

**Definición.** *Grado de influencia colaborativa sobre la variable crítica:* Es la influencia colaborativa que se logra ejercer por parte de todos los agentes sobre la variable crítica ( $x^*$ ), para disminuir

el error y rechazar la perturbación sobre la variable crítica. Sea  $i$  el agente local e  $Icol_i \in \mathbb{R}_+$

$$Iol_i \in \mathbb{R}_+, Icol = \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial e_*}{\partial r_i} \right) \quad (5.37)$$

**Definición. Propuesta Colaborativa:** Es el valor óptimo entre la mejor influencia sobre la variable crítica con el menor impacto colateral. Es un proceso de selección de la mejor consigna donde se asigna una calificación

$$Pcol_i = \left[ \min \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \frac{\partial e_j}{\partial r_i} \right] + \max \sum_{j=1}^{n-1} \left[ \frac{\partial e_*}{\partial r_i} \right] \right] \quad (5.38)$$

Esta cifra mide el grado de acoplamiento colaborativo que debe presentar el sistema, con efecto colateral mínimo y el máximo grado de influencia en desplazar el estado crítico ( $x^*$ ) a un nuevo punto de equilibrio. Así el controlador PID\* le será más fácil rechazar las perturbaciones que impactan ( $x^*$ ). Esta última información se extrae de la matriz de participación (ver fig (5,4)). Esta escogencia no produce conflicto ya que no se está buscando un óptimo en un continuo, sino el mejor candidato de una matriz de participación. (Escogencia discreta)

**Definición. Propuesta Ganadora:** Es la Propuesta colaborativa que sin ser necesariamente optima, no incurre en conflicto. Las propuestas ganadoras deben ser ordenadas.

**Definición. Propuesta conflictiva:** Es la propuesta que inestabiliza el sistema. La propuesta conflictiva es la propuesta que no cumple con las desigualdades (5.37 o 5.38).

### 5.7.3. FUNCIONAL COLABORATIVO.

Por definición de funcional de optimización [31] este debe ser parte de un conjunto contractivo. Lo ideal en sistemas dinámicos es que sea un funcional de Lyapunov, pero esto es una tarea bien difícil de encontrar. Otras opciones pueden ser, plantearlo en forma cuadrática o convexa. Este funcional ayuda a seleccionar el vector de consignas. Vamos a proponer nuestro propio funcional colaborativo para una dinámica que se sacrifica con el fin de que un agente en su rol de **Líder** se vea beneficiado en su desempeño, porque se sabe que, si los agentes que lo rodean se desintonizan, él se favorece si la dinámica acoplada en esa situación particular logra impactar la dinámica de interés o crítica.

Ya se plantearon criterios colaborativos propios que permiten medir si el esfuerzo de algún agente, produce efectos en el lazo crítico con las ecuaciones (5.36 - 5.38) y la matriz de participación de la figura (5.4).

Para lograrlo el sistema debe monitorear continuamente el error del sistema local por medio del esquema de la figura (5.3). Una vez se supere un umbral de operación colaborativa. El esquema inicial descentralizado MIMO-PID pasa a tener comportamiento colaborativo. Cada agente colaborativo se desintoniza, se aleja de condiciones óptimas basándose en un criterio de optimización local. Recordemos que estamos deteriorando el desempeño de un sistema y este deterioro debe ser lo menor posible. Se deben establecer límites para colaborar el lazo que intente colaborar lo debe hacer dentro de una serie de límites técnicos que indica el proceso.

En caso de aproximarse al límite debe detener su acción, abandonar el esquema de colaboración y el sistema incorporará otro agente de su lista de candidatos.

Cada agente presenta su propio funcional, donde el intenta mejorar en el lazo remoto el desempeño al desintoniza de forma mínima para obtener el máximo beneficio sobre la disminución del error y la derivada del error en la variable critica. Este hecho obliga a imponer una condición conflictiva o no convexa entre agentes, algunos van a requerir acciones de control grandes y otras acciones de control reducidas. Entre un par de agentes vecinos el optimizador colaborativo debe plantearse como una combinación convexa entre ellos, en caso que el sistema este programado para recibir aportes simultáneos.

$$J_{i,j}^k = \lambda_k J_{i,*}^k + (1 - \lambda_k) J_{j,*}^k \quad (5.39)$$

Donde:  $J_{i,*}^k$  es el funcional correspondiente al agente  $i$  que debe impactar el lazo critico\* en la iteración  $k$  y  $J_{j,*}^k$  es el funcional correspondiente al agente  $k$  que debe impactar el lazo critico \*, en la iteración  $k$ . Por lo tanto para cada agente ( $i, j \dots n$ ) participante deberá minimizar el siguiente funcional.

$$\min_{Pcol_i} J_{i,*}^k \left( \lambda_k * r_i + k_{e,i} * e(t)^* + k_{de,i} * \frac{\partial e^*}{\partial t} \right) \quad (5.40)$$

Sujeto a  $r_i \in \xi$ . Que es la región de consignas admisibles, que se calculan fuera de línea con algún criterio que garantice robustez y estabilidad con un margen de seguridad  $\sigma \leq \bar{r}$ . En este trabajo se propone encontrar una región de puntos de equilibrio que toleran perturbación en un entorno centrado en una bola  $\Omega$  alrededor del punto de equilibrio nominal \*. Al hacer  $r_i \in \xi$ ,  $\xi \subset \Omega$ , El consenso queda garantizado.

Este funcional encuentra una consigna optima  $r_{ic}$  para el sistema por parte de algún  $i$  eximo agente colaborativo en casos donde solo el entra en el juego (no entran de forma simultanea más de un agente).

El grado de compromiso  $\lambda_k$  dependerá de la restricción  $c_i^{(k)}(r_i)$  que presenta en la iteración  $k$  para el  $i$  esimo agente sobre la consigna candidata ( $r_{ic}$ ) entre más se acerque a alguna restricción dura para el estado local  $i$  en  $x_i$  o en algún vecino  $x_j$  deberá comprometerse menos con el esquema colaborativo. Esa distancia hace parte de  $\sigma \in \xi$  donde  $\sigma \leq \bar{r}$ . El algoritmo colaborativo encuentra la distancia basándose en el modelo no lineal de la planta.

El termino  $Pcol_i$  en la minimización anterior (5.40), significa que la asignación de roles ya se ejecutó.

En el caso de entrar a participar más de un agente en forma simultánea se propone el siguiente funcional que encuentra la consigna que cumple con la restricción local y global.

$$c_i^{(k)}(r_i) = \min_{r_i \in \xi} \left( (1 - \lambda_k) r_i + \lambda_k \left( \sum_j^{n-1} w_{ij} c_j^{(k-1)}(r_j) \right) + k_{e,i} * e(t)^* + k_{de,i} * \frac{\partial e^*}{\partial t} \right) \quad (5.41)$$

Donde  $\sum_i^n w_{ij} = 1$ , son los elementos de una matriz de participación  $W$ .

$k$  Es el orden de la iteración,

$c_j^{(k-1)}$  Es la restricción unaria para el agente  $j$ .

$k_{e,i}$  y  $k_{de,i}$  son coeficientes de penalización para el error y la derivada del error.

Además, la matriz  $W$  se recalcula en cada iteración  $k$  a partir de los valores anteriores como ya se presentó en el capítulo 4, este hecho garantiza que en cada iteración el algoritmo intenta mejorar la respuesta. Este funcional penaliza el error y la derivada del error, note que no penaliza la integral del error ya que esa acción se logra a partir de los controladores PID locales. Al minimizar sistemáticamente el error y la derivada del error se espera generar el efecto de atractor en el desempeño del sistema, como en la Figura 5.3.

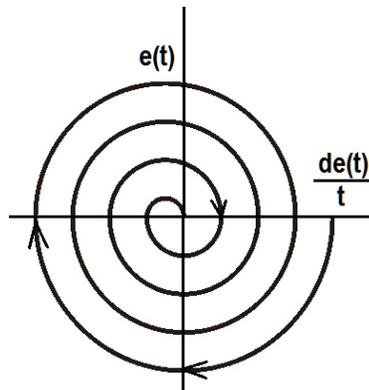


Figura 5.3. Efecto de atractor

## 5.8 RECHAZO DE PERTURBACIONES EN EL LAZO CRITICO POR ACONDICIONAMIENTO DE LA REFERENCIA EN (n-1) LAZOS RESTANTES

### 5.8.1 ESQUEMA DE CONTROL

La Figura 5.4. Ilustra un sistema de control descentralizado, para facilitar el análisis supongamos por el momento un proceso MIMO (3×3), con el método propuesto para rechazar la perturbación en el  $i$ ésimo lazo declarado crítico (\*). Se incluye un lazo auxiliar para el acondicionamiento de las referencias que no pertenecen al lazo crítico. Se aprecia un esquema general de un sistema descentralizado de (3×3), donde  $c_1, c_2, c_3$  son controladores SISO realizables y sintonizados de acuerdo al desempeño deseado. Se considera que la estructura de control ha sido correctamente elegida con alguna técnica de iteración existente y se supone que las referencias  $r_1, r_2, r_3$ , no cambian simultáneamente.  $P(s)$  Representa el proceso bajo control, el que puede ser en este caso estable.

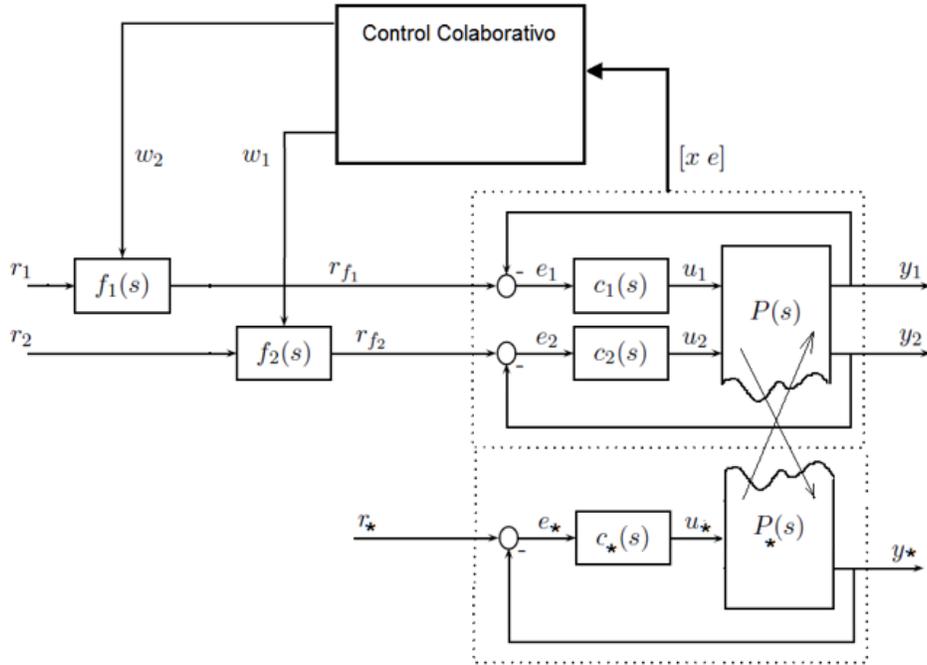


Figura 5.4. Esquema de control colaborativo para rechazo activo de la perturbación.

Se observa el lazo de acondicionamiento de la referencia o consigna por optimización colaborativa propuesto, para rechazar perturbaciones sobre el  $i$ ésimo lazo, esta parte se compone de  $f_1, f_2$ , que son filtros lineales de primer orden cuyas dinámicas son elegidas mucho más rápidas que las del lazo cerrado.

### 5.8.2 DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

Inicialmente se hace una representación del sistema con buen condicionamiento para la estructura del grafico anterior. Se asume que el modelo del proceso  $P(s)$  es conocido y tiene la siguiente representación mínima.

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= A_p \cdot x_p + B_p \cdot u \\ y &= C_p \cdot x_p + d,\end{aligned}\tag{5.42}$$

Donde las matrices  $A_p, B_p, C_p$ , para el caso en tratamiento, tienen dimensiones de  $n \times n, n \times 3, 3 \times n$  respectivamente. Los estados son  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ . La entrada al sistema es  $u = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$  y la salida es  $y = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T$ . Las perturbaciones a la salida son representadas por  $d = [d_1 \ d_2 \ d_3]^T$ . Nuestro objetivo será hacer rechazo de las perturbaciones que se acoplan a la salida declarada crítica. Los filtros  $f_1(s), f_2(s)$  se pueden expresar de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}\dot{x}_f &= A_f x_f + B_f r + B_w w_a \\ r_f &= C_f \cdot x_f\end{aligned}\tag{5.43}$$

Siendo  $A_f = -C_f = \text{diag}(\lambda_{f1}, \lambda_{f2}), B_f = I_2$  y  $B_w$  la matriz de permutación ( $3 \times 3$ ). Además  $w_a = \text{col}(r_{f1}, r_{f2})$  y  $r = \text{col}(r_1, r_2, r_3)$

Los tres controladores descentralizados  $c_1(s), c_2(s), c_3(s)$ , pueden ser del tipo PI o PID o cualquier otro tipo, con la siguiente representación en variables de estado.

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= A_c x_c + B_c \cdot e \\ u &= C_c x_c + D_c e\end{aligned}\tag{5.44}$$

Donde  $A_c$ ,  $B_c$ ,  $C_c$ ,  $D_c$ , son matrices diagonales apropiadas de dimensión  $D_c$  ( $3 \times 3$ ) y  $e = \text{col}(e_1 e_2 e_3)$ .

Como  $e = r_f - y$ , La dinámica en lazo cerrado desde la referencia  $r_f$  hasta la salida del proceso  $y$ , Tiene la siguiente forma.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Br_f + B_d d \\ y &= Cx + d\end{aligned}\tag{5.45}$$

Donde  $x = [x_p \ x_c]^T$  y

$$A = \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_p \\ -B_p C_p & A_c \end{bmatrix}, \quad B = -B_d = \begin{bmatrix} B_p D_c \\ B_c \end{bmatrix}, \quad C = [C_p \ 0].$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_p \\ -B_p C_p & A_c \end{bmatrix} [x_p \ x_c]^T + \begin{bmatrix} B_p D_c \\ B_c \end{bmatrix} r_f - \begin{bmatrix} B_p D_c \\ B_c \end{bmatrix} d\tag{5.46}$$

Luego de tener el modelo y los lazos de control descentralizados diseñados con criterios de estabilidad, un controlador en modo regulación atendiendo la variable crítica ( $x^*$ ) y  $(n - 1)$  lazos de control en modo seguimiento con filtros de entrada operando en modo seguimiento, se procede a identificar puntos por donde inyectar una señal exógena que altere transitoriamente la sintonía de los controladores de seguimiento y así inducir desde afuera una desintonización de estos lazos de control.

Luego conformamos una unidad de control colaborativa que puede ser un equipo de cómputo con la robustez computacional adecuada, o si el control es atendido por una plataforma general de la planta que si presenta la velocidad de respuesta suficiente, sería solo un problema de adicionar módulos de software.

### 5.8.3 UNIDAD COLABORATIVA

Si la dinámica del sistema es conocida  $\dot{F}_i = f(t)$  y los parámetros nominales de la planta están dados, se puede definir un conjunto de restricciones para el sistema  $Re_i \in \mathbb{R}^n \rightarrow Re_i \leq \varepsilon$  en lazo abierto y en lazo cerrado, ya que los controladores de esta propuesta son de estructura restringida PI o PID. Esta información es consultada por el optimizador colaborativo para tratar de evitar una condición de conflicto estático. El termino conflicto estático significa que propuestas de consigna  $r_i$  para  $(n - 1)$  controladores de seguimiento no producen conflicto al menos en la dinámica natural del sistema. Sabemos que, si esto se llega a dar, la propuesta de consignas no se aceptan (no hay consenso) y el optimizador debe recalcular valores óptimos para ser lanzados de nuevo. El recalcu se hace reasignando roles a los agentes de cada controlador por medio de parámetros que encuentra el optimizador e inicialmente pueden ser sugeridos por medio de una medición del nivel de sensibilidad que la  $r_i$  consigna de alguno de los  $(n - 1)$  lazos de control tiene sobre el estado declarado como critico  $x^*$ . Esto es:

$$\left. \frac{\partial x^*}{\partial x_{(i-1)} \Big|_i} \right| \leq \vartheta \quad i = 1, 2 \dots n$$

Se plantea una matriz de sensibilidad que se asimila a un modelo de comunicación entre agentes y se determina fuera de línea (off line) para ahorrar tiempo computacional en el cálculo de la variable  $u(t)_i$  del control PI o PID. El optimizador colaborativo debe seleccionar los lazos que más influencia tiene sobre la variable crítica  $x^*$  y a su vez tienen influencia mínima sobre sí mismos y los vecinos, sobre todo si estos estados comprometen la rentabilidad del proceso.

El paso siguiente es calcular fuera de línea (off line) el invariante de control robusto  $\xi$  con alguna técnica de optimización conocida ya sea basada en poliedros o politopos, que sea función de las consignas  $r_i$  y en el cálculo se deberá incorporar tanto la norma de la perturbación  $\|w\|_i$  así como la norma  $\|r\|_{i-1}$  que puede tolerar antes de perder la estabilidad del sistema, también se deberán incorporar las dinámicas de los filtros de consigna. Se puede hacer un diseño previo de controladores PI o PID que cumplan con las exigencias de un criterio de estabilidad *entrada estado*.

Que ya está formalizado en el diseño de controladores robustos y por medio de programación semidefinida LMI. Usando una representación mínima del problema de forma afín.

$$\|w\|_i \in \xi$$

Dependiendo de la complejidad del sistema este cálculo anterior puede ser extremadamente tedioso y podría ser interesante expresar la dinámica con una representación mínima o pseudolinealizada como puede ser usar un modelo LPV (variación de parámetros) [12,30] y hacer el diseño basándose en el cálculo de los vértices de un politopo empleando la ecuación matricial de Lyapunov para la ecuación de Riccati y así capturar la geometría de la región deseada [5,19]. Hay que notar en esta parte que la submatriz de los controladores que se calculan en el algoritmo de optimización LMI es constante ya que fueron calculados fuera de línea (off line), antes de iniciar este proceso. Adicionalmente se aclara que en esta propuesta los parámetros de los controladores no cambian, solo cambian los niveles de consigna de los lazos de control no críticos que inducen desintonía de los lazos de seguimiento.

Una vez las consignas sean calculadas estas debe hacer parte de un conjunto admisible  $\vartheta \in \xi$  que por criterios de robustez puede estar contenido en el invariante de control del sistema, así, las consignas pueden ser lanzadas al controlador:

$$\vartheta \in \mathbb{R}^n \text{ y } \xi \in \mathbb{R}^n \rightarrow \vartheta \subset \xi$$

Ahora el control colaborativo puede medir el desempeño del estado crítico  $x^*$  y hacer sugerencias a los agentes.

### 5.8.4 VERIFICACIÓN DE QUE HAY CONSENSO

Antes de dar apertura de la señal que alterará la consigna seleccionada, ésta deberá alcanzar un nivel de consenso requerido. En caso contrario, se recalcula otra consigna para volver a negociar en colectivo. Las restricciones para esta selección serán tanto estáticas como dinámicas. El criterio de selección colaborativo se extrae del modelo en lazo cerrado con el controlador PI o PID previamente diseñado.

Con el funcional (39) se plantea la ley de control admisible para casos generales, en este caso es una ley de control estática. Luego se establecen los límites de actuación del control colaborativo. Este entra a intervenir el sistema en caso de contingencia, que se da cuando la variable declarada como crítica  $C_A$  (concentración) se aleja demasiado del punto de equilibrio nominal, siendo un síntoma de que el lazo de regulación es incapaz de rechazar la perturbación local, con el esquema de control original descentralizado MIMO-PI-PID. Esto se logra conectando

de forma transitoria la señal que se incorpora a la consigna por intermedio de un filtro que debe atenuar componentes de alta frecuencia que puedan empeorar la respuesta deseada.

## 5.9 ALGORITMO DE CONTROL COLABORATIVO

A continuación, se enumeran los pasos en el orden requerido para que un módulo de software pueda resolver el problema de control colaborativo por desintonía de algunos lazos de control.

### 5.9.1 PASOS PARA IMPLEMENTAR UN CONTROLADOR COLABORATIVO

1. Obtener el Modelo del sistema
2. Establecer las restricciones de la planta, tanto de entradas como de salidas
3. Declarar la variable crítica
4. Trazar el mapa de puntos de equilibrio fuera de línea (OFF-LINE). Como se presenta en la Figura 5.7.
5. Proceder a sintonizar el control descentralizado MIMO-PID Robusto. Empleando el método de las LMI interactivas del Capítulo 3. Si la no linealidad es muy alta, construir fuera de línea (OFF-LINE) en un entorno cercano al punto de equilibrio nominal ( $x^*$ ) un continuo de modelos parametrizados usando información del mapa de puntos de equilibrio de la figura 5.7.
6. Evaluar la matriz de participación inicial en el punto de equilibrio nominal del sistema ( $x^*$ ) y proceder a seleccionar los Lazos de Control candidatos o el esquema de cooperación  $Pcol_i$ . Esto significa la selección inicial de los agentes que participaran en el esquema de colaboración.
7. Medir los estados y el error del sistema
8. Establecer valores para  $\lambda_k, k_{e,i}, k_{de,i}$  Minimizar el funcional Colaborativo (5.40 o 5.41) según el caso.
9. Verificar si las acciones de control calculadas presentan consenso, comparando sus valores con la desigualdad (12). Verificar que no se comprometa la estabilidad. Verificar que la acción no viole las restricciones y hagan parte del conjunto contractivo  $r_i \in \xi, \xi \subset \Omega$ ,
10. Si las consignas calculadas pasan las pruebas anteriores enviarlas a la planta. Recalcular los valores de la matriz de participación que cambiaron y saltar al paso 7.
11. En caso de que las consignas de control no logren consenso, reasignar roles o cambie el valor de los coeficientes de castigo de funcional colaborativo ( $\lambda_k, k_{e,i}, k_{de,i}$ ).
12. Si los dos procedimientos anteriores (12, 13) no mejoran la respuesta. transferir el control al PID-MIMO original.

## 5.10 PRUEBA DE LA PROPUESTA SOBRE UN REACTOR TIPO CSTR.

Se aclara que los procesos o dinámicas que inspiran esta propuesta son aquellos donde hay un fuerte interés es preservar la integridad de un estado que se considera prioritario o crítico ( $x^*$ ) por encima del resto de estados, esto se justifica porque de él depende de forma directa la calidad de lo que se produce y no conviene hacer una gran inversión de dinero e ingeniería para instalar un equipo que sumado a una dinámica compleja intente, sin gran éxito, mantener de forma óptima todos los estados, sobre todo si estos no influyen fuertemente en la calidad del proceso. La visión de esta propuesta es pragmática con un fuerte sentido económico y valor agregado. Para el caso de un reactor CSTR, Figura 5.4, el interés primordial es producir materia prima que puede ser una resina con una concentración específica  $Ca$ , éste estado capta toda la atención del responsable del proceso, independientemente del valor que pueda tener otro estado, como por ejemplo, la temperatura de la resina y el nivel del tanque. En esta última parte puede haber algunas salvedades, por ejemplo, aunque el nivel del tanque desde el punto de vista del modelo pudiera no ser de interés es importante que éste no sea exageradamente bajo ya que las cantidades de material producido también influyen directamente en la rentabilidad del proceso. A estas características en algunos estados no prioritarios debe prestársele la mayor atención, pues, aunque nuestra propuesta altera las consignas de los lazos de control descentralizados, ésta estrategia no debe comprometer el proceso de forma tal que lo haga improductivo por calidad o por economía. Por lo tanto, esta propuesta explota al máximo la cualidad de algunos lazos en su capacidad de influir en el lazo crítico para hacer rechazo activo de la perturbación con el mínimo impacto sobre el proceso en su parte técnica y económica.

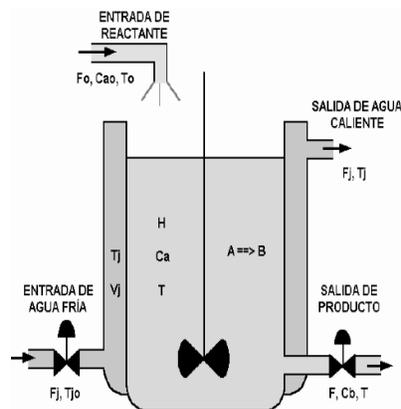


Figura 5.5. Reactor tipo CSTR

### 5.10.1 MODELO FENOMENOLÓGICO

El modelo fenomenológico desarrollado a partir de un balance de masa y de energía para el reactor y de un balance de energía para la chaqueta, está sujeto a las siguientes suposiciones:

- Las propiedades físicas como densidad y capacidad calorífica del reactivo y del producto son constantes.
- Existe mezcla perfecta dentro del reactor.

• No hay pérdidas de energía al ambiente, sólo existe transferencia de calor entre el producto dentro del reactor y el fluido refrigerante contenido en la chaqueta.

Bajo estas suposiciones, el modelo estará dado por las ecuaciones (5.47-5.53) [2].

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{A_{Tanque}} \cdot F_0 - \frac{C_V \cdot \sqrt{g}}{A_{Tanque}} \cdot L^{\frac{1}{2}} \quad (5.47)$$

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F}{V} (C_{A0} - C_A) - k_0 C_A e^{-\left(\frac{E}{RT}\right)}$$

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F_0}{A_{Tanque} \cdot L} \cdot C_{A0} - \frac{C_V \cdot \sqrt{g}}{A_{Tanque} \cdot L} \cdot C_A - k_0 \cdot C_A \cdot e^{-\frac{E}{RT}} - \frac{1}{L} \cdot C_A \cdot \frac{dL}{dt}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{F_0}{V} \cdot (T_0 - T) - \frac{\Delta H_R \cdot k_0 \cdot C_A \cdot e^{-\left(\frac{E}{RT}\right)}}{\rho \cdot C_p} + \frac{F_j \cdot C_{p_j} \cdot \rho_j}{\rho \cdot C_p \cdot V_j} \cdot (T_{0j} - T) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{UA}{F_j \cdot C_{p_j} \cdot \rho_j}\right) \right] \quad (5.48)$$

Si la dinámica de la chaqueta es más rápida que en el reactor se simplifica en (5.49).

$$\frac{dT}{dt} = \frac{F_0 \cdot T_0}{A_{Tanque} \cdot L} - \frac{C_v \cdot \sqrt{g} \cdot T}{A_{Tanque} \cdot L^{\frac{1}{2}}} - \frac{\Delta H_R \cdot k_0 \cdot C_A \cdot e^{-\left(\frac{E}{RT}\right)}}{\rho \cdot C_p} - \frac{U_A \cdot A_j \cdot (T - T_j)}{\rho \cdot C_p \cdot A_{Tanque} \cdot L} - \frac{T}{L} \cdot \frac{dL}{dt} \quad (5.49)$$

Se puede hacer un proceso de linealización, que no tiene sentido extender en esta parte del texto, y el resultado son las siguientes tres ecuaciones (5.50-5.52).

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)' = -\frac{1}{2} * \frac{C_{VEE} \cdot \sqrt{g}}{A_{Tanque} \cdot L_{EE}^{\frac{1}{2}}} \cdot L' - \frac{\sqrt{g} \cdot L_{EE}^{\frac{1}{2}}}{A_{Tanque}} \cdot C'_V + \frac{1}{A_{Tanque}} \cdot F'_0 \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dC_A}{dt}\right)' = & \left[ -\frac{F_{0EE}}{A_{Tanque} \cdot L_{EE}^2} \cdot C_{A0} + \frac{C_{VEE} \cdot \sqrt{g}}{A_{Tanque} \cdot L_{EE}^{3/2}} \cdot C_{AEE} \right] \cdot L' + \left[ -\frac{C_{VEE} \cdot \sqrt{g}}{A_{Tanque} \cdot L_{EE}^{1/2}} - k_0 \cdot e^{-\left(\frac{E}{RT_{EE}}\right)} \right] \cdot C'_A \\ & - \left[ k_0 \cdot C_{AEE} \cdot e^{-\left(\frac{E}{RT_{EE}}\right)} \cdot \frac{E}{RT_{EE}^2} \right] \cdot T' - \left[ \frac{\sqrt{g}}{A_{Tanque} \cdot L_{EE}^{\frac{1}{2}}} \cdot C_{AEE} \right] \cdot C'_V + \left[ \frac{C_{A0EE}}{A_{Tanque} \cdot L_{EE}} \right] \cdot F'_0 \\ & + \left[ \frac{F'_{0EE}}{A_{Tanque} \cdot L_{EE}} \right] \cdot C'_{A0} \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{dT}{dt}\right)' = & \left[ -\frac{F_{0EE} \cdot T_0}{A_{Tanque} \cdot L_{EE}^2} + \frac{C_{vEE} \cdot \sqrt{g} \cdot T_{EE}}{A_{Tanque} \cdot L_{EE}^{3/2}} + \frac{U_{EE} \cdot A_j \cdot (T_{EE} - T_j)}{C_p \cdot \rho \cdot A_{Tanque} \cdot L_{EE}^2} \right] \cdot L' - \left[ \frac{k_0 \cdot e^{-\frac{E}{R \cdot T_{EE}} \cdot \Delta H_R}}{C_p \cdot \rho} \right] \cdot C_A' \\
 & + \left[ \frac{C_{vEE} \cdot \sqrt{g}}{A_{Tanque} \cdot L_{EE}^{1/2}} - \frac{k_0 \cdot e^{-\frac{E}{R \cdot T_{EE}} \cdot \Delta H_R}}{C_p \cdot \rho} \cdot C_{AEE} \cdot \frac{E_A}{R \cdot T_{EE}^2} - \frac{U_{EE} \cdot A_j}{C_p \cdot \rho \cdot A_{Tanque} \cdot L_{EE}} \right] \cdot T' \\
 & + \left[ \frac{A_j \cdot (T_{EE} - T_j)}{C_p \cdot \rho \cdot A_{Tanque} \cdot L_{EE}} \right] \cdot U' - \left[ \frac{\sqrt{g} \cdot T_{EE}}{A_{Tanque} \cdot L_{EE}^{1/2}} \right] \cdot C_v' + \left[ \frac{T_{0EE}}{A_{Tanque} \cdot L_{EE}} \right] \cdot F_0' \\
 & + \left[ \frac{F_{0EE}}{A_{Tanque} \cdot L_{EE}} \right] \cdot T_0'
 \end{aligned} \tag{5.52}$$

A partir del modelo fenomenológico desarrollado se deduce que el sistema cuenta con tres estados que son: concentración de reactivo a la salida del reactor (CA), temperatura del reactor (T), y temperatura de la chaqueta (Tj). Sin embargo, debido a los requerimientos del producto y considerando que las dinámicas principales del sistema son los estados: concentración y temperatura del reactor, teniendo en cuenta que los tiempos de residencia del refrigerante en la chaqueta son cortos; y que además la temperatura de la chaqueta es aproximadamente la misma en toda la chaqueta, pero diferente a la de entrada, es posible despreciar la dinámica secundaria: temperatura de la chaqueta. Al despreciar dicha dinámica, es posible representar la variable temperatura de chaqueta (Tj) por medio de la ecuación algebraica resultante del balance de energía para la chaqueta en estado estable, ver (5.53).

$$T_j = \frac{F_j \cdot T_{j0} \cdot \rho_r \cdot C_{pr} + U_j \cdot A_j \cdot T}{F_j \cdot \rho_r \cdot C_{pr} + U_j \cdot A_j} \tag{5.53}$$

Las condiciones de operación y los valores nominales de los parámetros y constantes utilizados en la simulación del CSTR se muestran en Tabla 5.1.

**Tabla 5.1 Condiciones de operación y valores nominales de los parámetros y constantes utilizados en la simulación del CSTR.**

<i>Variable</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Valor Nominal</i>
Concentración de reactivo A	$C_A$	0.0753 mol litro <sup>-1</sup>
Temperatura en el reactor	$T$	402.51 K
Flujo de alimento	$F_0$	100 litros min <sup>-1</sup>
Volumen del tanque	$V$	1000 litros
Concentración del alimento	$C_{A0}$	1 gmol litro <sup>-1</sup>
Factor de frecuencia	$k_0$	7.2 x 10 <sup>10</sup> min <sup>-1</sup>
Factor exponencial	$E/R$	9.98 x 10 <sup>3</sup> K
Temperatura en el alimento	$T_0$	310 K
Calor de reacción	$\Delta H_R$	-2.0 x 10 <sup>5</sup> cal mol <sup>-1</sup>
Capacidad calorífica del reactor	$C_p$	1 cal g <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
Densidad en el reactor	$\rho$	1000 g litro <sup>-1</sup>
Capacidad calorífica del refrigerante	$C_{pj}$	1 cal g <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
Densidad del líquido refrigerante	$\rho_j$	1000 g litro <sup>-1</sup>
Flujo de líquido refrigerante	$F_j$	100 litros min <sup>-1</sup>
Temperatura del líquido refrigerante	$T_{0j}$	310 K
Características de la transferencia de calor	$UA$	7 x 10 <sup>5</sup> min <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
Tiempo de muestreo o paso	paso	0.1 min

### 5.10.2 CONDICIONAMIENTO DEL PROBLEMA

El sistema debe tener una representación mínima, donde se represente en variables de estado con un modelo no lineal invariante en el tiempo. Las restricciones del proceso y los valores nominales deben tenerse a disposición. El modelo del proceso bajo estudio se lleva al programa de simulación VisSim [3]. Más adelante presentamos las simulaciones del modelo mostrando el comportamiento del reactor en el punto de equilibrio nominal, de esta forma se pueden hacer estudios de sensibilidad. La respuesta que se obtiene en la práctica es la que reportan los modelos de [2].

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u, \quad y = Cx + Du, \quad y_s = C_sx, \quad y_r = C_r x \quad (5.54)$$

Con el vector de estado siguiente. Así como vectores de variables manipuladas de las perturbaciones.

$$x = [L' \ C_A' \ T']^T, \quad u = [C_V \ F_0 \ U]^T, \quad w = [C_{A0} \ T_0 \ F_{0j}]^T, \quad y = [L \ C_A \ T]^T \quad (5.55)$$

Esta asignación no es única. Puede ser modificada según el criterio de pareamiento que se emplee, sea este por matriz RGA.

Se puede expresar de forma más compacta las ecuaciones linealizadas del modelo en variables de estado de la siguiente manera.

$$A = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ T_1 & T_2 & T_3 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_6 & 0 & 0 \\ 0 & T_7 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} L_2 & L_3 & 0 \\ C_4 & C_5 & 0 \\ T_5 & T_6 & T_4 \end{bmatrix}$$

$$C_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 5.10.3 SIMULACIONES en el software VisSim 8.0

Una vez se tenga el modelo de planta se proceden a hacer pruebas para evaluar de forma cualitativa el comportamiento dinámico de la planta.

Inicialmente hacemos estudios transitorios para el del reactor CSTR en el punto de equilibrio nominal para las variables L,Ca,T. Las respuestas por parte del software de simulación se presentan en la Figura 5.5. Se aclara que los modelos simulados no presentan ningún tipo de linealización.

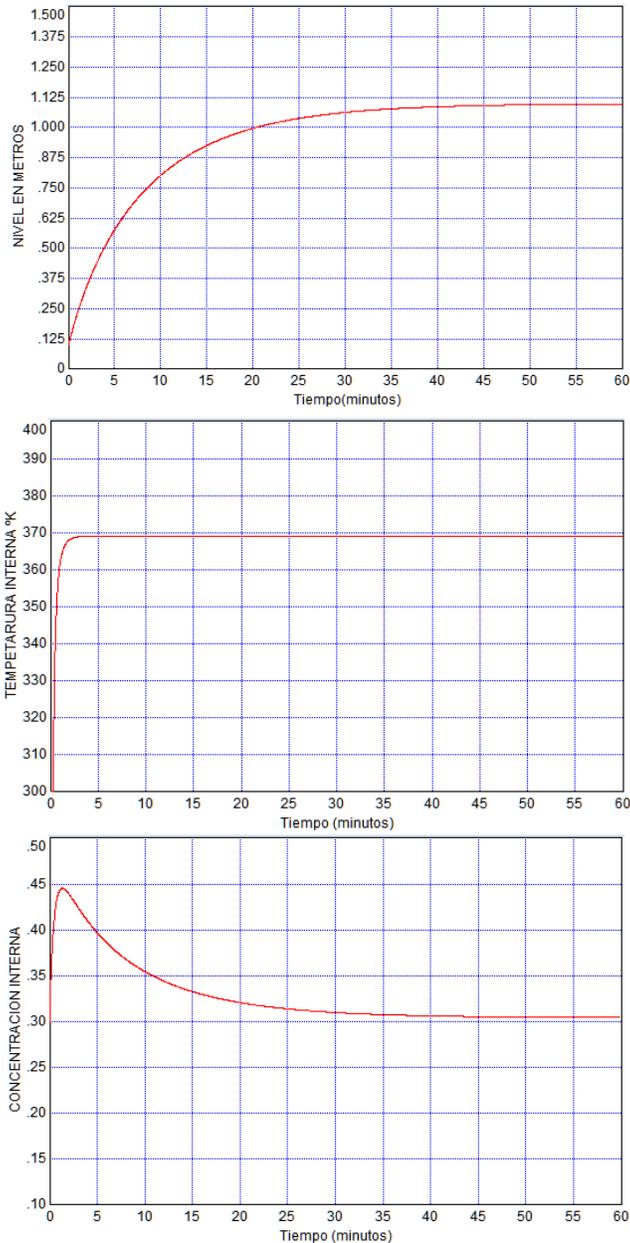


Figura. 5.6. Respuesta transitoria natural del sistema en el punto de operación nominal en lazo abierto.

Tabla 5.2 Valores nominales en el reactor CSTR

Estado	Valor	Significado	Entrada/Salida
$C_a$	0.304797	Concentración del producto	S
$L$	1.09571	Nivel del reactor	S
$T$	369.152	Temperatura del reactor	S
$C_{ao}$	0.5	Concentración de entrada	E
$F_o$	0.00073	Flujo del alimento	E
$F_j$	0.0011	Flujo del refrigerante	E
$T_o$	398	Temperatura del alimento	E
$C_v$	2.2245e-4	Coefficiente de descarga de la válvula	E
$T_{oj}$	350°K	Temperatura de refrigeración de entrada	E

Las variables se estabilizaron en los valores nominales.  $C_a=0.304797$ ,  $L=1.09571$ ,  $T=369.152$ . Luego se provocan cambios en los estados colaboradores. Se logra la respuesta de la Figura 5.5. Tanto en  $F_j$  como en  $C_v$  permanecen en valores nominales. (Válvulas de Agua de refrigeración como válvula de salida del tanque). Los valores nominales en estado estable se presentan en la Tabla 5.2.

### 5.10.4 PRUEBAS DE SENSIBILIDAD CUALITATIVA

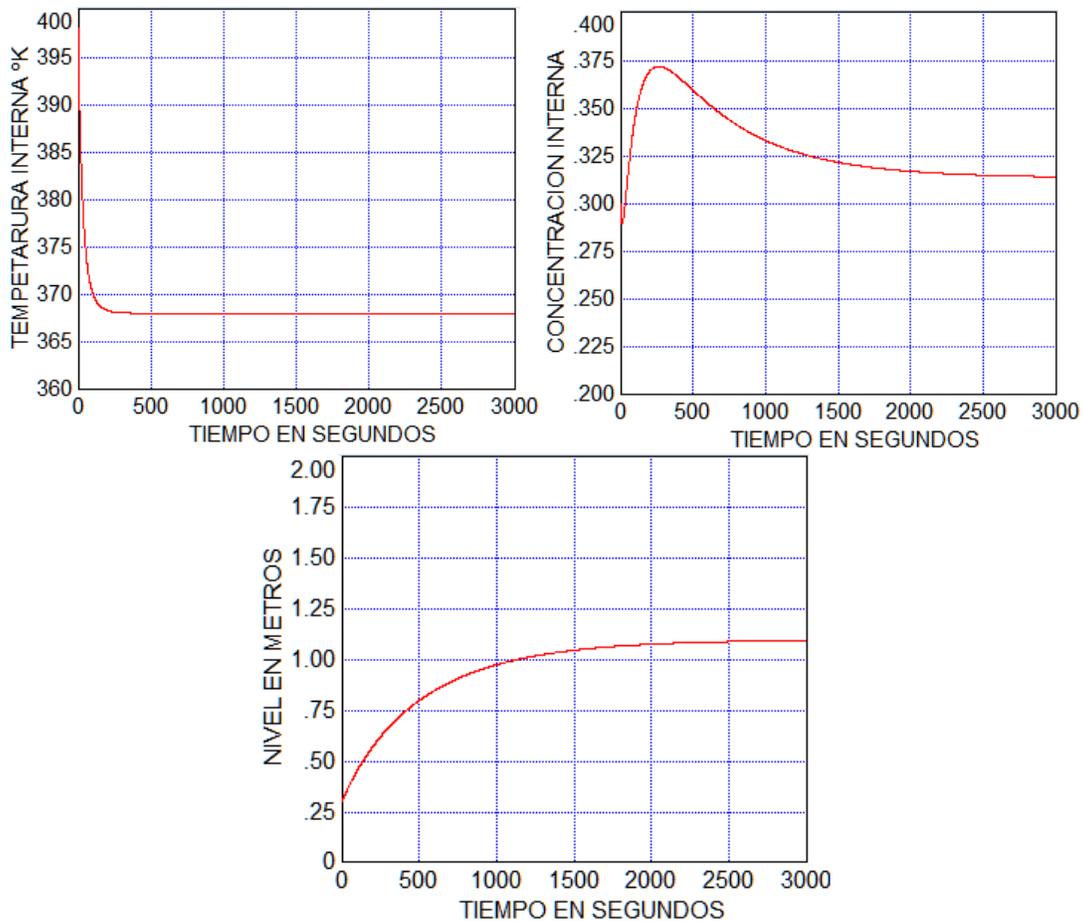
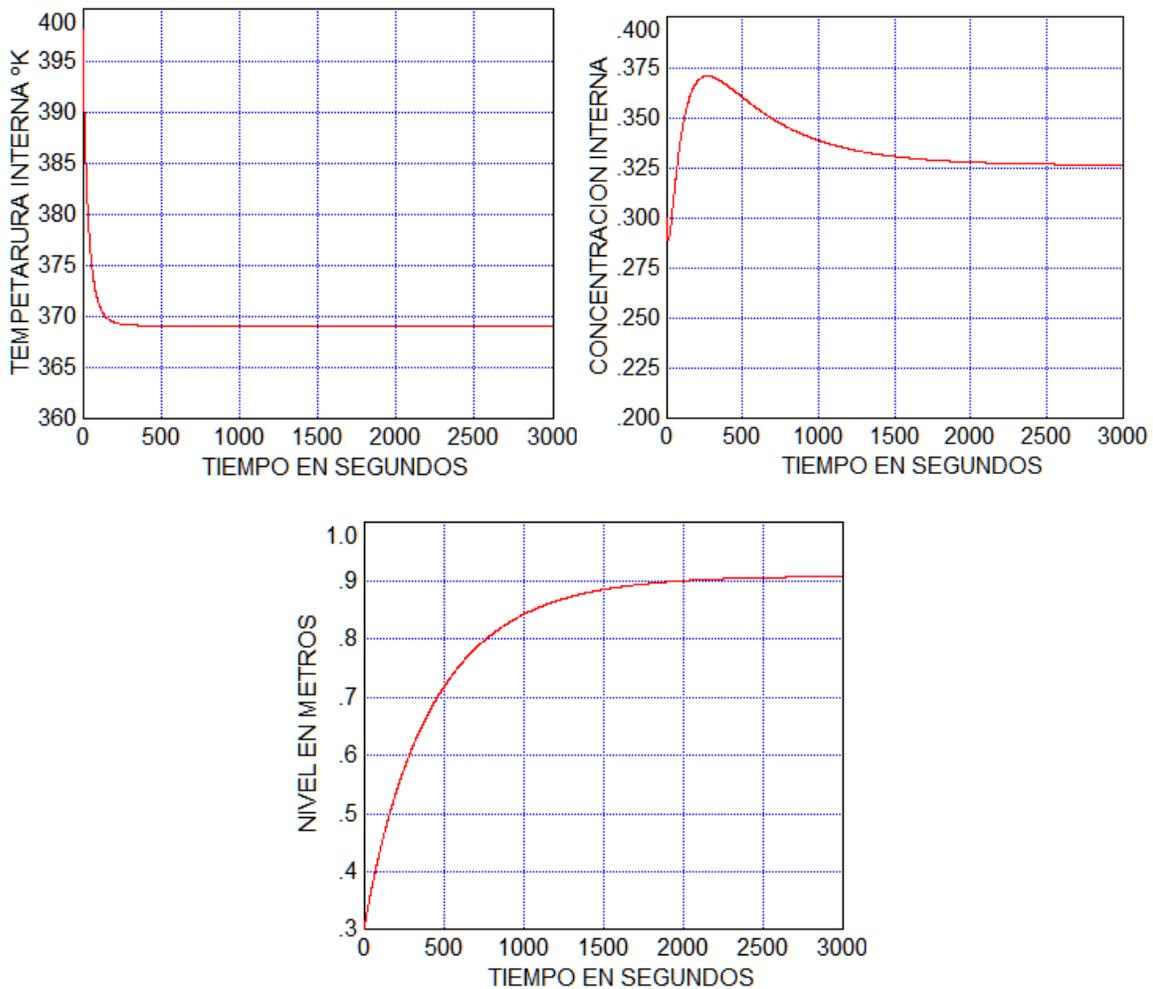


Figura 5.7. Respuesta a un movimiento del punto de equilibrio en la dirección de  $F_j$  de un 10%

En la prueba anterior las variables se estabilizaron en los valores nominales.  $Ca=0.314208$ ,  $L=1.09571$ ,  $T=368.066$ , se nota una respuesta esperada, el flujo de chaqueta enfría el sistema y esa disminución de temperatura produce un aumento en la concentración.

En la siguiente prueba se aplica un cambio transitorio en  $C_v$  del 10%.



**Figura 5.8. Respuesta a un movimiento del punto de equilibrio en la dirección de  $C_v$  de un 10%**

Las variables se estabilizaron en valores nominales.  $Ca=0.326546$ ,  $L=0.907829$ ,  $T=369.152$ , se nota una respuesta esperada, Un aumento en el coeficiente de descarga de la válvula se refleja en una pérdida de nivel que equivale a un aumento de concentración ya que disminuye la cantidad de reactivo en el tanque, además la temperatura aumenta. Se nota un efecto inverso. Luego de continuar con las pruebas se recolectan los siguientes datos que se reúnen en las Tablas 5.3 y 5.4.

**Tabla 5.3 Cambio en Fj.**

Nominal	+10%	+20%	+30%
L=1.09571	L=1.09571	L=1.09571	L=1.09571
C=0.304797	C=0.314208	C=0.322495	C=0.329829
T=369.152	T=368.066	T=367.097	T= 366.227

**Tabla 5.4 Cambio en Cv.**

nominal	+10%	+20%	+30%
L=1.09571	L=0.907829	L=0.763481	L=0.650707
C=0.304797	C=0.326546	C=0.345568	C=0.362074
T=369.152	T=369.152	T=369.152	T= 369.152

### 5.10.5 CONTROLADORES PID

Se configuran, luego de las pruebas, tres lazos de control descentralizados que se pueden sintonizar según los procedimientos descritos en el Capítulo 3. El controlador que atiende de forma independiente la variable crítica ( $x^*$ ), se diseña con criterios de regulación, robustez y estabilidad en un entorno cercano al punto de equilibrio nominal, con las restricciones que exige tanto la planta como el proceso. La estructura del controlador se diseña según criterios de apareamiento, donde se hace una selección adecuada de las mejores variables manipuladas. De ese análisis para el caso de este ejemplo se escogen las siguientes variables manipuladas:

- Flujo de entrada al reactor  $F_0$  para controlar de forma directa la concentración del producto  $C_a$ .
- Flujo de refrigeración del reactor a la entrada de la chaqueta  $F_j$ , para controlar de forma directa la temperatura  $T$ .
- Coeficiente de descarga de la válvula del reactor  $C_v$ , para controlar el nivel de tanque  $L$ .

Se puede notar que dos variables manipuladas tienen influencia sobre la acumulación de masa en el tanque y son el flujo de entrada y el coeficiente de descarga.

$$F_0 = F_{0EE} + \frac{100}{Bp_c} (C_{A_{sp}} - C_A(t)) + \frac{Kp_{CA}}{Ti_{CA}} \int_0^t (C_{A_{sp}} - C_A(t)) dt$$

$$F_j = F_{jEE} + \frac{100}{Bp_c} (T_{sp} - T(t)) + \frac{Kp_T}{Ti_T} \int_0^t (T_{sp} - T(t)) dt$$

$$L = L_{EE} + \frac{100}{Bp_L} (L_{sp} - L(t)) + \frac{Kp_L}{Ti_L} \int_0^t (L_{sp} - L(t)) dt$$

Luego de tener diseñados los controladores se procede a plantear el funcional colaborativo con los siguientes criterios y restricciones: Inicialmente el optimizador colaborativo propone una asignación de roles o compromisos para los participantes, esa asignación se da según las fortalezas de los agentes. El agente que presente la sensibilidad más alta impactando el estado crítico ( $x^*$ ) debe hacer menos esfuerzo que los demás, el resto asume sus roles con este orden jerárquico. Por lo tanto, el punto de ajuste de las  $(n - 1)$  consignas por parte de los agentes

comprometidos debe ser mínimo, esto con el fin de no impactar demasiado el desempeño global del sistema.

### 5.10.6 CALCULO NUMÉRICO DE LAS CONSIGNAS ADMISIBLES EN LAZO CERRADO

Este cálculo se hace a partir del punto de equilibrio nominal con el fin de no provocar un cambio transitorio indeseado que pueda comprometer el desempeño local y global del sistema. A partir del modelo del sistema con un control MIMO-PID previamente sintonizado en el punto de equilibrio nominal del sistema se hace un cálculo de la región de puntos de equilibrio. En esta propuesta se trabaja con tres estados para facilitar la demostración del método. Este cálculo determina una superficie de puntos de equilibrio posibles que el sistema puede alcanzar (ver Figura 5.8), luego se traza un plano perpendicular al punto del eje cartesiano donde se ha señalado el valor nominal que debe tener la variable o el estado crítico elegido en el diseño ( $x^*$ ). La intersección de esta superficie y el plano que contiene el estado crítico anterior forma un continuo de puntos de equilibrio que el controlador puede alcanzar. Lo interesante de este razonamiento radica en que al determinar varios de esos puntos de equilibrio se verifica que se pueden alcanzar diferentes valores de ajuste en los  $(n - 1)$  estados restantes, que a su vez son controlados por  $(n - 1)$  controladores PID.

Esta es otra aseveración que confirma la hipótesis inicial. Es importante resaltar que este procedimiento aporta grados de libertad al control propuesto que de alguna forma van a beneficiar el desempeño del sistema y se puede considerar como otro aporte de esta tesis.

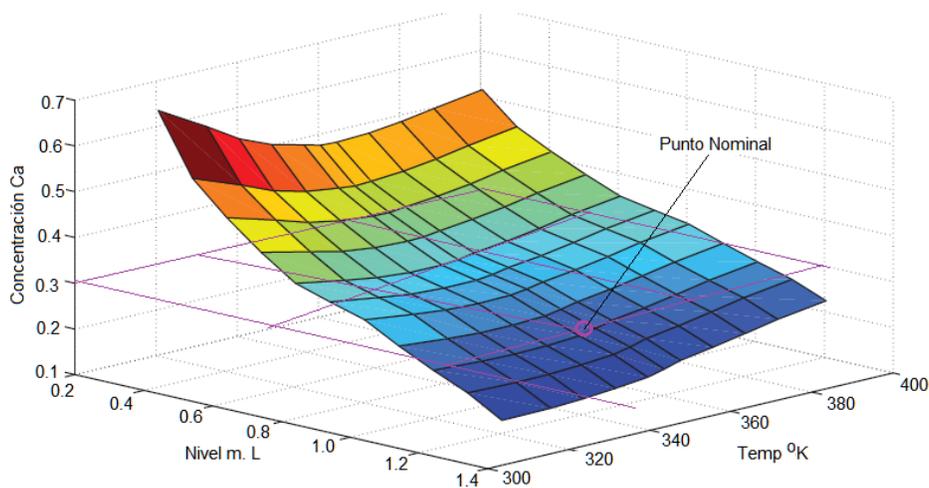


Figura 5.9. Mapa de puntos de equilibrio en lazo cerrado con el plano trabajo para  $C_a$  (nominal).

#### Acoplamiento del sistema a controlar (CSTR) en lazo abierto

Se debe hacer un estudio de acoplamiento entre dinámicas, de forma estática por medio de la matriz RGA, para determinar las influencias que tienen las entradas sobre las salidas tanto directas como indirectas, esto da una noción del grado del acoplamiento entre dinámicas. Luego de hacer este cálculo se dispone de un criterio preliminar para asignar estados manipulados y posibles entradas de perturbación medibles.

### **Sensibilidad de la variable crítica ( $x^*$ )**

La variable de interés será la concentración del reactor CSTR ( $C_a$ ). La sensibilidad que se percibe debido a pequeños cambios desde las variables seleccionadas como manipuladas, así como los efectos colaterales sobre el resto de lazos, se presentan en las Figuras 5.9 y 5.10. En ellas se ve tendencia directa entre la variable manipulada y la variable crítica, además los valores de la gráfica se realizaron con valores en estado estable en ausencia de perturbación desde las salidas.

### **Comportamiento de la temperatura respecto a $F_j$**

Es intuitivo que el efecto es enfriar. En esta situación el nivel  $L$ , no se ve comprometido. Para no comprometer la temperatura que a su vez compromete la concentración son deseables flujos de  $F_j$  mínimos, este comportamiento se aprecia mejor con la ayuda de la Figura 5.9. Salvo que el compromiso debido a la perturbación sobre  $C_a$  exija un esfuerzo mayor.

### **Comportamiento $C_a/F_j$**

En esta situación que se aprecia en la figura 5.9. Hay una influencia casi directa (no lineal) entre  $F_j$  y  $C_a$ . Es interesante ver que esta gráfica muestra información sobre el efecto colateral sobre la temperatura que es conflictiva para el controlador de temperatura y será de utilidad para decidir cómo impactar  $C_a$ . Con el mínimo compromiso sobre la temperatura nominal, aunque es difícil mantener la variación de temperatura en valores nominales, afortunadamente la temperatura no compromete la producción. En esta situación el nivel del tanque no se altera y conserva el valor nominal de 1.099 m.

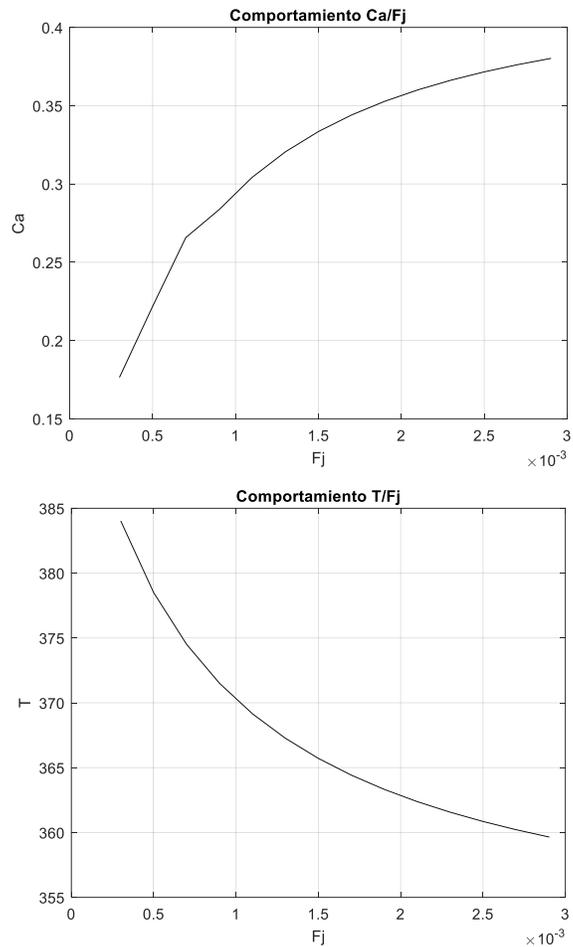


Figura 5.10 Comportamiento Ca/Fj y Comportamiento Colateral T/Fj con nivel constante en 1.099m.

**Comportamiento Ca/Cv:** en la Figura 5.10. Se aprecia un efecto directo (no lineal) con el coeficiente de descarga de la válvula de vaciado del tanque, pero el efecto colateral de la imagen de la derecha puede presentar un reto al controlador ya que la situación es conflictiva y delicada por ejercer pérdida de nivel en el tanque, se traduce en pérdida de masa o material en el proceso. Se aprecia que el efecto colateral sobre la temperatura del tanque es muy poco.

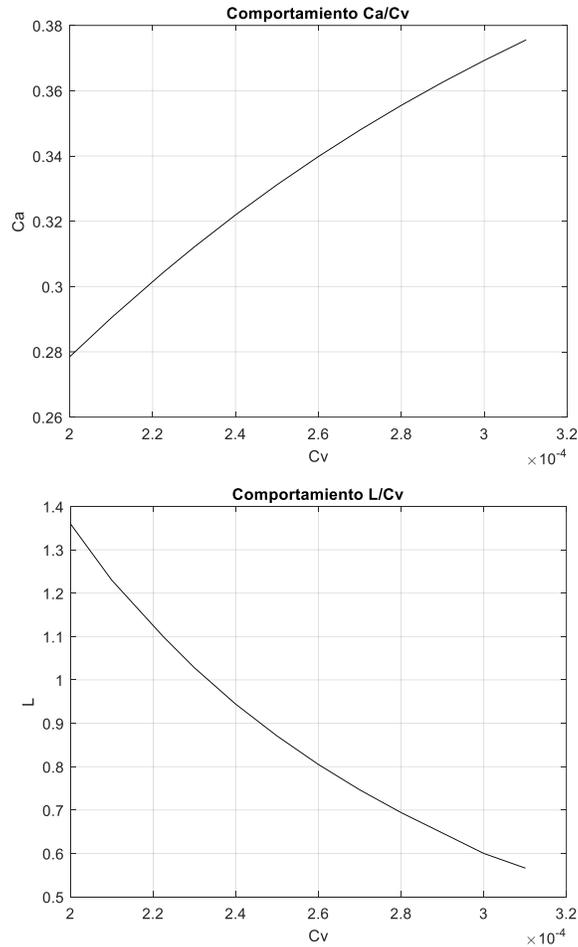


Figura 5.11. Comportamiento Ca/Cv y efecto colateral sobre el nivel. La temperatura constante en 369.1oK

### 5.10.7 SINTONÍA DEL CONTROLADOR MIMO-PID

En el Capítulo 3. se presentó el método de sintonía para este mismo reactor CSTR, por medio de desigualdades lineales matriciales interactivas LMIs, donde se hace un diseño robusto, estable y que garantiza que con entradas acotadas las salidas permanecen acotadas. Luego de ejecutar el programa de cálculo de sintonía (ver Anexo 1) se logran obtener los parámetros de sintonía requeridos por los tres controladores MIMO-PID. Las respuestas transitorias de los controladores al ponerlos en operación, donde deben alcanzar un estado estable inicial y con ausencia de perturbación, que se puede ingresar por donde este proceso no será manipulado, se muestra en la Figura 5.10. Para los tres estados controlados del sistema.

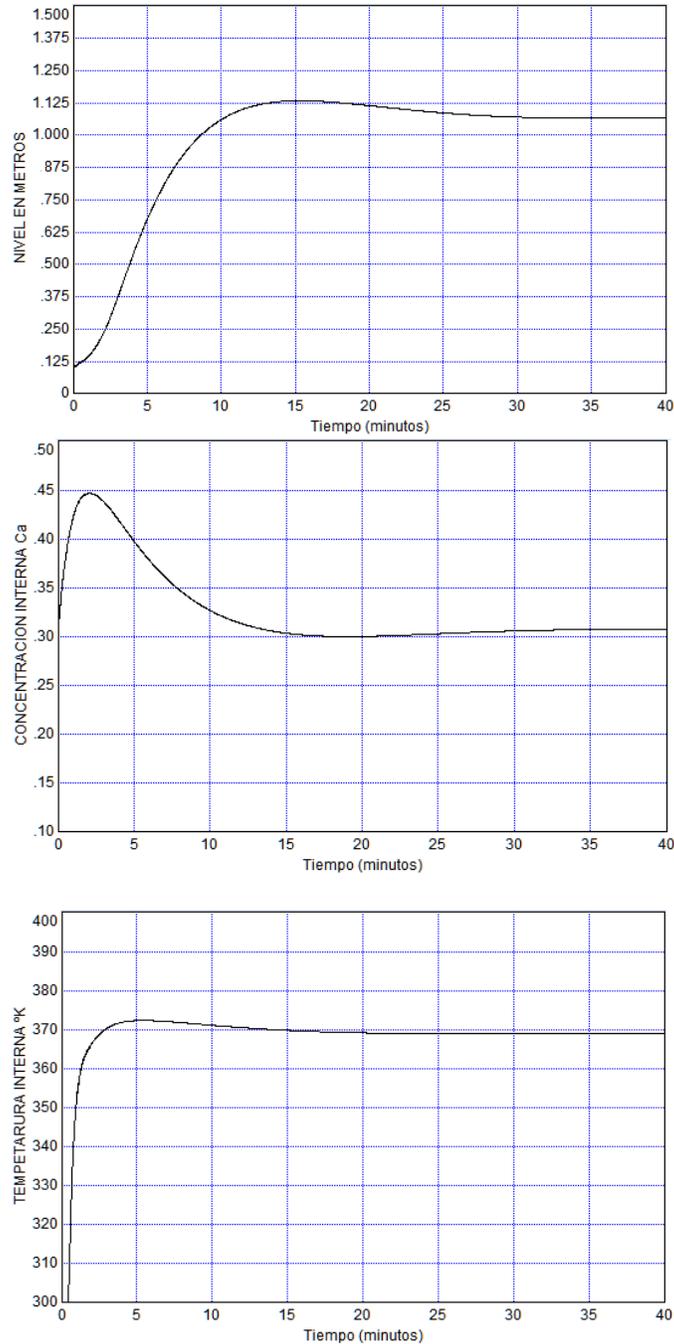
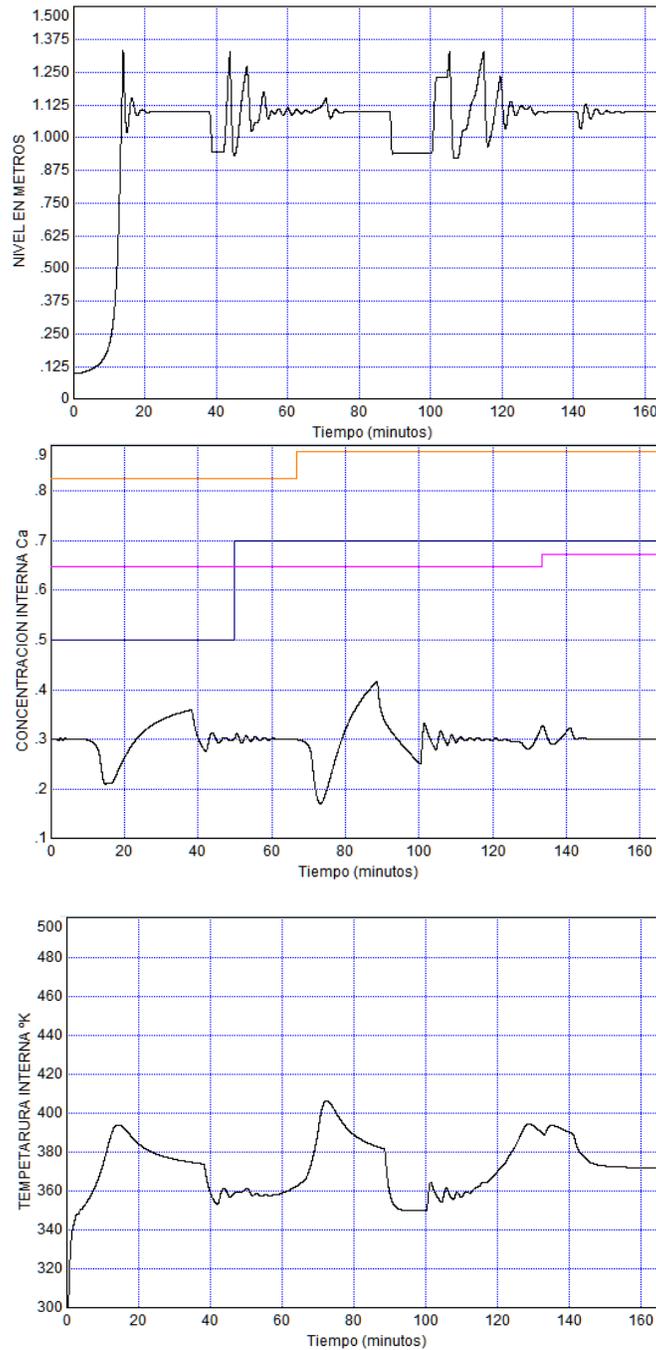


Figura 5.12. Respuesta transitoria del control MIMO-PID sintonizado por LMIs. Para el reactor CSTR al encendido del equipo.

### 5.10.8 RESPUESTA CONTROL MIMO-PID A PERTURBACIONES SEVERAS

Se presenta el comportamiento del control MIMO-PID a una situación de severas perturbaciones, donde se aprecia en simulación en la Figura 5.12. Los escalones de color solo indican el instante en que se aplican. La primera perturbación corresponde al instante de encendido del reactor y no es visible. Se nota que el controlador es incapaz de mantener un desempeño aceptable. Se ha

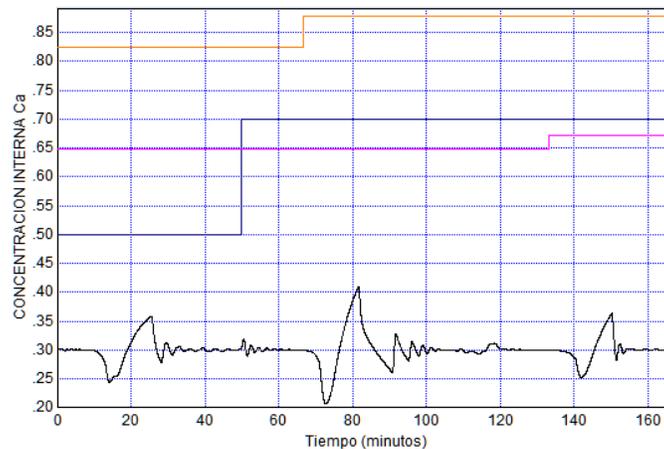
llevado el sistema a una condición donde las perturbaciones son superiores que las condiciones nominales en alrededor de un 20%, además con la precaución de evitar una situación de pérdida de estabilidad en el sistema. El controlador PID convencional es incapaz de manejar esta situación. En la Figura 5.12. Se aprecia que, aunque el error nominal tiende a ser cero en promedio, la respuesta transitoria es muy pobre en los tres lazos de control.



**Figura 5.13. Respuesta controlador MIMO-PID del reactor CSTR a perturbaciones severas en variables de nivel, concentración y temperatura.**

### 5.10.9 RESPUESTA DEL SISTEMA MIMO-PID A AJUSTES SUB-ÓPTIMOS DE ENTRADA $u(t)$

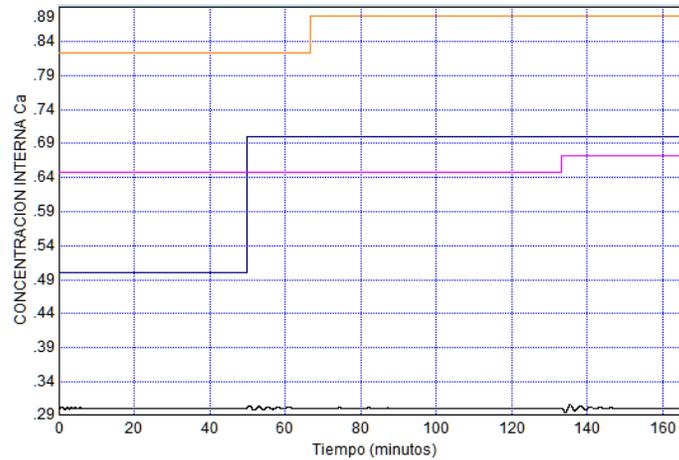
Para probar en simulación si el método basado en movimientos de consigna tiene una respuesta positiva en el desempeño del control, se procede a bajar el nivel del tanque en un 30% del valor nominal (0.769 m). Por encima no se hacen incrementos, con el fin de no saturar el tanque. La consigna de concentración ( $C_a$ ) permanece siempre fija en su valor nominal.



**Figura 5.14.** Respuesta del reactor CSTR a un ajuste de reducción de la entrada  $u(t)$  al 70% del valor nominal.

Se aprecia que el desempeño no mejora, indicando que el ajuste de ese lazo no tiene influencia en el rechazo de la perturbación en el lazo crítico (concentración  $C_a$ ).

Luego se restablece el nivel a su valor nominal de 1.099 m. y se procede a hacer un ajuste sobre el otro lazo restante, que es el de temperatura. Se ajusta la temperatura nominal un 10% por debajo de su valor nominal de 369 °K (332.1°K). La respuesta a ese cambio se ilustra en la Figura 5.13. Se nota un aumento apreciable en la respuesta, los efectos sobre la temperatura resultaron en que ese lazo no pudo mantener esa temperatura y por el contrario solo se redujo a 350°K, valor que genera menos impacto que el que se proyectó inicialmente. La idea inicial se confirma de forma positiva, si se puede hacer rechazo de la perturbación en un lazo ajustando las consignas de otros lazos. Este hecho ya se ha discutido desde el punto de vista de los polos del semiplano derecho, es posible moverlos de una salida a otra y el precio que se paga es modificar, aunque no atenuar el acoplamiento [6] de todos los lazos y eso también se verificó en este experimento sobre el control.

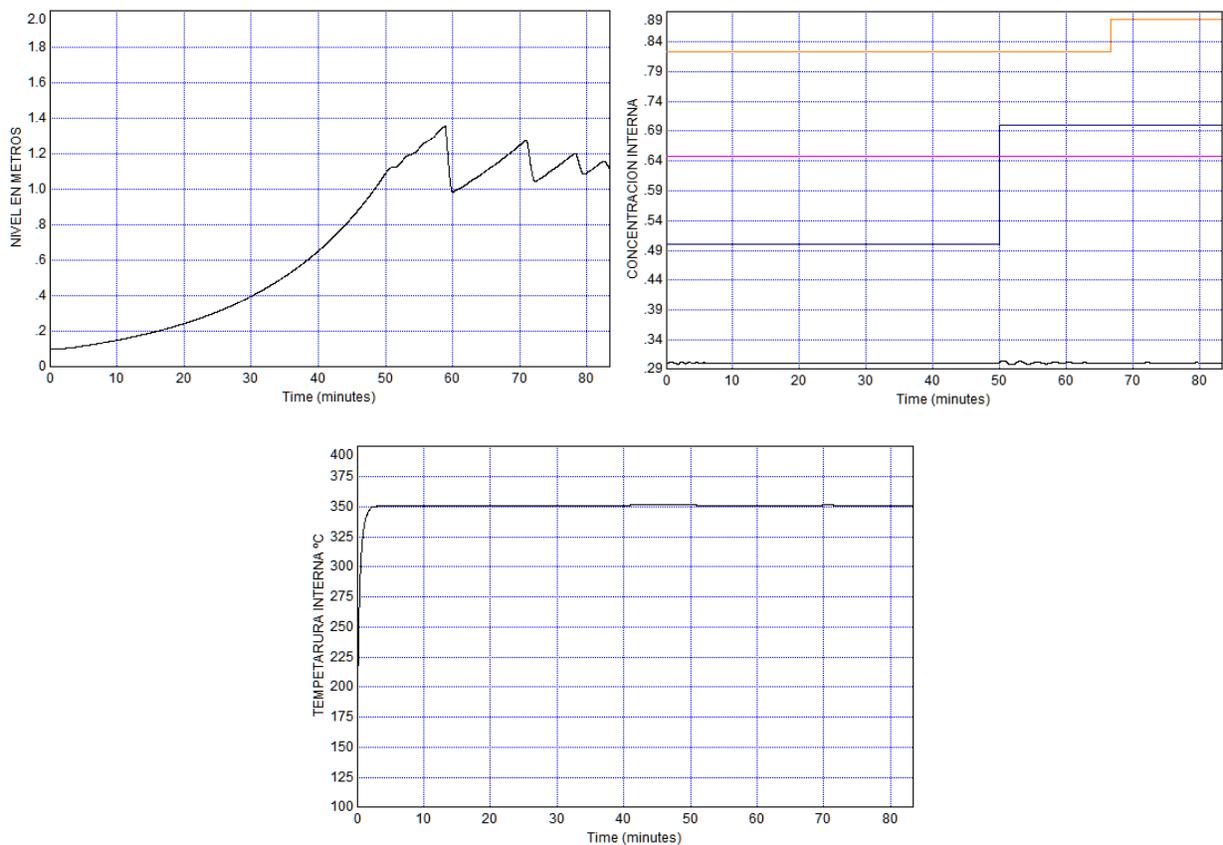


**Figura 5.15.** Respuesta del reactor en lazo abierto a una disminución de la consigna  $u(t)$  desde el lazo de temperatura en un 10% del valor nominal (322 °K)

Al final se logra muy buen rechazo de la perturbación en el lazo crítico. Sin pérdida de nivel en el tanque dando un desempeño general muy bueno. A continuación, procedemos a implementar un control con características colaborativas para hacer este movimiento de consignas de forma óptima.

### 5.10.10 RESPUESTA DEL SISTEMA A LA ESTRUCTURA DE CONTROL COLABORATIVA

Partiendo de las expresiones de control colaborativo que se presentaron antes (5.36-5.41). Se implementa una estrategia de consenso basada en el modelo del reactor CSTR y se programa en código que se escribe en el lenguaje (bloques con instrucciones de la sintaxis de VisSim) que no podemos anexar a esta tesis por ser demasiado largo y difícil de presentar. La figura 5.15. Muestra las tres respuestas en los tres lazos de control por medio de la estrategia colaborativa. Se aprecia un gran rechazo en la perturbación en el lazo de concentración que es la meta de esta tesis. Demostrando estos resultados que el método presenta muy buen desempeño. Toda la simulación se hace a través del programa VisSim creando un módulo **OptimizerPro**, que permite ejecutar tareas de Optimización de procesos, que pueden ser programadas por el usuario al incorporar líneas de código. Note que el efecto colateral más grande es sobre el nivel del tanque; ya que el efecto colateral sobre la temperatura no es muy importante.



**Figura 5.16. Respuesta del control Colaborativo a una condición de fuertes perturbaciones en los tres estados L, Ca, T.**

Se observa que no hay mucha diferencia entre las dos graficas anteriores (5.14, 5.15. en la concentración, Ca) la explicación es que la técnica de control propuesta es robusta. Cumpliendo así con un objetivo de esta tesis; de hacer buen rechazo de la perturbación.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1]Eric Feron, and Venkataramanan Balakrishnan. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM.1994.
- [2]Luyben William L. PROCESS MODELING, SIMULATION, AND CONTROL FOR CHEMICAL ENGINEERS. Second Edition McGraw-Hill. 1996
- [3]<http://www.vissim.com/>
- [4]FengZheng, Qing Guo Wan, and Tong Heng Lee. On the design of multivariable PID controller via LMI approach. The 27th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society. 2001
- [5]Colmenares William, Tadeo R. Fernando, Apuntes sobre el control robusto y multiobjetivo de sistemas. Editorial Equinoccio. Venezuela.
- [6]Sigurd Skogestad, Ian Postlethwaite. MULTIVARIABLE FEEDBACK CONTROL Analysis and design, JOHN WILEY & SONS, Second Edition, 2004.
- [7]Astrom KJ, Hagglund T (2005) Advanced PID control. ISA – The instrumentation, systems, and automation, society, Research Triangle Park, NC 27709
- [8]D.W. Gu, P. Hr. Petkov and M. M. Konstantinov, Robust Control Design with MATLAB® Springer-Verlag London Limited 2005
- [9]Evangelhos Zafuiou, SETPOINT TRACKING vs. DISTURBANCE REJECTION FOR STABLE AND UNSTABLE PROCESSES, Chemical Engineering, 206-41 California Institute of Technology Pasadena, CA 91125.
- [10]L. Chisci, P. Falugi and G. Zappa, Set-point tracking for a class of constrained nonlinear systems with application to a CSTR Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control. Maui, Hawaii USA, December 2003
- [11]Albertos P, Sala A (2004) Multivariable control systems: An engineering approach. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg
- [12]R. Tóth, P.M.J. Van den Hof, J.H.A. Ludlage and P.S.C. Heuberger, Identification of nonlinear process models, in an LPV framework, Proceedings of the 9th International Symposium on Dynamics and Control of Process Systems, Leuven, Belgium, July 5-7, 2010
- [13]Alessandro Astolfi, Lorenzo Marcon, Analysis and Design of Nonlinear Control Systems: In Honor of Alberto Isidori. Springer, 2008.
- [14]Proaño Rosero Víctor, Aguilar Jaramillo Edwin, Aplicación de las LMI al diseño de controladores robustos. 2006. Escuela Politécnica Nacional. Quito Ecuador
- [15] Kai-Nan Chueha. A compact positively invariant set of solutions of the Nagumo equation, Journal of Differential Equations Volume 28, Issue 1, April 1978, Pages 35–42, Science Direct.
- [16] [https://en.wikipedia.org/wiki/Center\\_manifold](https://en.wikipedia.org/wiki/Center_manifold)
- [17] Don Grundel, Robert Murphey, Panos M Pardalos. Theory and Algorithms for Cooperative Systems. 2004. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [18] Zhongkui Li, Zhisheng Duan. Cooperative Control of Multi-Agent Systems A CONSENSUS REGION APPROACH. CRC Press. Taylor & Francis Group. 2015.
- [19] David W.K. Yeung. Leon A. Petrosyan. Subgame Consistent Economic Optimization, An Advanced Cooperative Dynamic Game Analysis. ISBN 978-0-8176-8261-3 e-ISBN 978-0-8176-8262-0. Springer. New York Dordrecht Heidelberg London. 2010.
- [20]Lihui Wang, Andrew Y.C. Nee. Collaborative Design and Planning for Digital Manufacturing. ISBN 978-1-84882-286-3 e-ISBN 978-1-84882-287-0. Library of Congress Control Number: 2008939925. 2009 Springer-Verlag London Limited.
- [21] Kurt E. HaggBlom. Partial Relative Gain Array: A new tool for control structure selection. Process Control Laboratory, Faculty of Chemical Engineering. Abo Academy University. Finland. 1997.

- [22] Jeff S. Shamma. Cooperative Control of Distributed Multi-Agent Systems. John Wiley & Sons Ltd, 2007.
- [23] He Bai, Murat Arcak, John Wen. Cooperative Control Design. A Systematic, Passivity-Based Approach. ISBN 978-1-4614-0013-4. Springer 2011.
- [24] Salgado Mario E. Una medida de la interacción multivariable en el dominio del tiempo y la frecuencia. CEA. Comité Español de Automática. ISSN: 1697-7912 Vol 6. Num 2. Abril 2009.
- [25][https://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski\\_functional](https://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski_functional)  
Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui,
- [26]KEMIN ZHOU, JOHN C. DOYLE and KEITH GLOVER, ROBUST AND OPTIMAL CONTROL PRENTICE HALL, Englewood, New Jersey 07632
- [27]Guang-Ren Duan and Hai-Hua Yu, LMIs in Control Systems Analysis, Design and Applications
- [28]A. I. Zecevic and D. D. Siljak, Stabilization of Nonlinear Systems With Moving Equilibria, IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL. 48, NO. 6, JUNE 2003
- [29]Laurent El Ghaoui and Silviu-Iulian Niculescu Laurent El Ghaoui: Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control. SIAM. 2000
- [30]FREDRIK BRUZELIUS, Linear Parameter-Varying Systems, an approach to gain scheduling CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, Göteborg, Sweden, 2004, ISBN 91-7291-394-0
- [31] Mietek A. Brdys, Piotr Tatjewski. Iterative Algorithms for Multilayer Optimizing Control. Imperial College Press, London, 2005.

# CAPÍTULO 6

## CONCLUSIONES

La técnica de control colaborativa que se presentó en esta tesis es: intuitiva, fácil de implementar, robusta con estabilidad garantizada.

Se demostró que el cambio en consignas es una buena opción para rechazar perturbaciones en el lazo de interés principal de un proceso.

La técnica colaborativa para control de procesos concebida de esta forma es doblemente robusta por las siguientes razones:

1. Probamos en el teorema 4 del capítulo 4, que los algoritmos colaborativos son insensibles a la perturbación y convergen a un atractor.
2. Controlar por ajuste de consignas óptimas, ensancha la región de robustez de un sistema, situación que se discutió en el capítulo 2.

Mantener el control rígido de los  $n$  controladores PID en un sistema no lineal, fuertemente acoplado funciona para una condición donde el nivel de perturbación es muy reducido. Sin embargo, la respuesta de un controlador descentralizado PID por medio de optimización colaborativa de consignas presenta una respuesta buena, aun con fuertes perturbaciones.

En esta tesis se probó que el esquema colaborativo propuesto, mejora bastante el nivel de robustez del sistema original basado en controladores PID descentralizados y sintonizados por LMIs. (Que es la mejor forma de sintonizar PID en la actualidad).

Esta propuesta se verifico tanto en la teoría como en lo que se percibe en simulación. La desintonización de los lazos PID debe hacerse en una sola dirección (esto último facilita bastante la búsqueda de la consigna por parte del optimizador). Otras técnicas de control no lineal basadas en optimización no cuentan con esta ventaja, de esta forma el esquema de control colaborativo propuesto converge rápido y hace que el desempeño del proceso sea bueno.

Un resultado muy valioso de este trabajo es que se demostró que, con solo calcular la superficie de puntos de equilibrio de forma numérica fuera de línea, se construye el contorno exterior de un Center Manifold que representa el atractor de la acción de control, que se asimila a la invariante de control. (Ver sección 5.5)

En sistemas de orden mayor a  $2 \times 2$  (TITO) se afirma que son difíciles de lograr, tal como se dice en la referencia [12] del Capítulo 1 (tesis doctoral que desacopla un sistema TITO por movimiento de consignas usando métodos deslizantes). En esta tesis se ha generalizado la solución para  $n$  dinámica y se verificó en sistemas  $3 \times 3$ . Este resultado es notable.

Concluimos de lo expuesto, que esta tesis presenta valor agregado a lo que inicialmente proponen controladores MIMO-PID descentralizados (aporte general).

Se probó que técnicas de control complejas para problemas complejos, no son siempre necesarias si se enfrenta el problema con pragmatismo. Este enfoque se formalizó con técnicas matemáticas de reconocida solidez (aporte en ingeniería).

La apropiación del esquema colaborativo propuesto en esta investigación se puede aplicar a disciplinas diferentes al control de procesos, como la robótica.

Esta tesis propone sus propios criterios (originales) colaborativos en el capítulo 5. De estos planteamientos se puede en el futuro proponer una teoría integral de control colaborativo en procesos.

La tesis descubre un principio para controladores descentralizados donde se puede decir: para el caso de un lazo óptimo y el resto subóptimos, los lazos desintonizados aportan robustez a lazo óptimo.

Se puede hacer rechazo de las perturbaciones sobre una zona declarada crítica en un sistema de dinámicas acopladas, desintonizando otros lazos que se ubican alrededor del lazo crítico y llegar a una condición estable sin cambiar la calidad final del producto.

El tratamiento de la estabilidad según las desigualdades lineales matriciales es un procedimiento sencillo, formal y eficaz en problemas complejos. LMI junto con el control colaborativo por consenso es una combinación exitosa.

En publicaciones indexadas a la fecha no se han encontrado propuestas que propongan rechazar perturbaciones en un lazo específico por medio de optimización colaborativa con movimientos de consigna. En esta tesis además se logra probar que la desintonización de lazos en decremento de la acción, logra rechazo de la perturbación en otro lazo declarado como crítico. Igualmente, en varias oportunidades se han revisado patentes y aun no se publica algo con la metodología que propone esta tesis.

Los sistemas colaborativos representan una nueva metodología que es valiosa aplicar en control de procesos. Generan robustez y hacen mejor uso de los recursos que otras técnicas de optimización. Además, pueden resolver situaciones conflictivas.

La región de consenso en un sistema colaborativo, se puede asimilar a un conjunto de acciones admisibles que garantizan estabilidad manteniendo la calidad del proceso.

La construcción de una región invariante se reduce a calcular numéricamente el mapa de puntos de equilibrio, con una perturbación acotada en todos los lazos.

## 6.1. TRABAJOS FUTUROS

Extender esta propuesta en sistemas industriales de dimensión mayor a 3, para ofrecer una herramienta aplicable a problemas reales de gran escala.

Terminar su implementación en hardware: Durante la realización de este trabajo se pensó llevar esta propuesta a un producto físicamente realizable y patentable por medio de una red que se administra sobre un pequeño servidor que corre bajo una plataforma Java donde se administran tres servidores que actúan como agentes soportados por módulos de programación tipo ARM y

se programan los algoritmos locales en C++. Un aporte interesante es que se logró comunicar los tres agentes de hardware con el servidor, de tal forma que este asigna tareas a los agentes y estos a través del servidor logran comunicarse entre sí. Logramos mover datos analógicos de los puertos de entrada y salida de estos módulos, simulando lazos descentralizados de control. Esta etapa no se logró culminar, ya que esta investigación tenía otro objetivo. Estos ensayos no fueron financiados por ninguna institución colombiana y los reducidos fondos eran personales. El prototipo realizado y el estudio de selección del procesador tipo ARM, se resume en el anexo 2 de este informe.

Hacer estudios comparativos de desempeño (donde se evalúe: desempeño, rechazo a perturbaciones, estabilidad, costo computacional, costo de la tecnología necesaria, etc.) con un reactor CSTR (o planta acoplada no lineal) entre esta propuesta y otras técnicas como:

- Controlador predictivo basado en modelo por modo dual supervisorio:
- Controlador basado en modos deslizantes.
- Controlador basado en técnicas QFT. (Quantitative Feedback Theory, estado del arte actual en control de procesos)
- Controlador difuso.

## ANEXO 1

# Código MATLAB para calcular por medio de ILMI coeficientes de un controlador MIMO-PID para un reactor CSTR

```
%SINTONÍA DE CONTROLADORES PID MULTILAZO USANDO ILMI
format long% ESTABLECE CÁLCULOS EN DOBLE PRECISIÓN
Cvee=4e-4 %coeficiente de descarga de la válvula
Atanq=0.1963; %area del tanque
g=9.8; %GRAVEDAD
Lee=1.0999 % nivel en estado estable
Foe=7.3027e-4 %flujo de entrada en estado estable
Cao=0.5 %concentración nominal de entrada
Ca=0.1 %concentracion del reactor en estado estable
E_R=9.98e3 %cociente E/R
Tee=395.8954 %temperatura del reactor en estado estable
Ko=1.2e9 %
Cp=1000 %coeficiente de transferencia térmica
ro=1000
Aj=3.1416*0.5*Lee % area de la chaqueta de enfriamiento
dHr=-163
Tj=350 %temperatura de la chaqueta
To=125+273
U=2.8e4
%-----
%Cálculo de los coeficientes de las Ec.Linealizadas en el punto de
%equilibrio
%respecto al nivel del tanque
L1=-Cvee*sqrt(g)/Atanq/2/sqrt(Lee);
L2=-sqrt(g)*sqrt(Lee)/Atanq;
L3=1/Atanq;
%-----
%respecto a la concentracion del reactor
C1=-Foe*Ca/Atanq/Lee^2+Cvee*sqrt(g)*Ca/Atanq/sqrt(Lee^3);
C2=-Cvee*sqrt(g)/Atanq/sqrt(Lee)-Ko*exp(-E_R/Tee);
C3=-Ko*Ca*exp(-E_R/Tee)*E_R/Tee^2;
C4=-sqrt(g)*Ca/Atanq/sqrt(Lee);
C5=Ca/Atanq/Lee;
C6=Foe/Atanq/Lee;
%-----
%respecto a la temperatura del tanque
T1=-Foe*To/Atanq/sqrt(Lee)+Cvee*sqrt(g)*Tee/Atanq/sqrt(Lee^3)+U*Aj*(Tee-
Tj)/Cp/ro/Atanq/Lee^2;
T2=-Ko*exp(-E_R/Tee)*dHr/Cp/ro;
T3=-Cvee*sqrt(g)/Atanq/sqrt(Lee)-Ko*exp(-E_R/Tee)*dHr*Ca*E_R/Cp/ro/Tee^2-
U*Aj/Cp/ro/Atanq/Lee;
T4=Aj*(Tee-Tj)/Cp/ro/Atanq/Lee;
```

## Control Colaborativo de Dinámicas Múltiples

```
T5=-sqrt(g)*Tee/Atanq/sqrt(Lee);
T6=-Toee/Atanq/Lee;
T7=-Foee/Atanq/Lee;
%-----
%Definición de las matrices del sistema
A=[L1,0,0;C1,C2,C3;T1,T2,T3]%Matriz de estados del sistema
B1=[0,0,0;C6,0,0;0,T7,0];%Matriz de Transferencia para perturbaciones
B2=[L2,L3,0;C4,C5,0;T5,T6,T4];%Matriz de transferencia para Variables manipuladas
Cs=eye(3)
%-----
%ALGORITMO PARA HALLAR LOS VALORES DE UN CONTROLADOR PID DESCENTRALIZADO
%USANDO PROGRAMACIÓN SEMIDEFINIDA O LMIs
%inicialmente se hacen las transformaciones sugeridas en el texto
Z3=zeros(3)%3X3
A1=horzcat(A,Z3)%3x6
A2=horzcat(Cs,Z3)%3x6
AA=vertcat(A1,A2)%6X6,matriz ampliada;"AA
BB1=vertcat(B1,Z3)%6X3,matriz ampliada;"B1max! Entradas de Perturbacion
BB2=vertcat(B2,Z3)%6X3,matriz ampliada;"B2max! Entradas de Control
Cs1=horzcat(Cs,Z3)%3X6
Cs2=horzcat(Z3,eye(3))%3x6
cf=Cs*A
Cs3=horzcat(cf,Z3)%3x6
r1=Cs1
r2=Cs2
r3=Cs3
CCs=vertcat(r1,r2,r3)%9x6, matriz ampliada "Csmax" transpuesta
Q=eye(6)*7.18 % Iterando el LMI con valores para la matriz A, este valor garantiza
% una matrix P_optima Positiva
b=ones(6)
Valores=eig(Q)
%-----
%PRIMERA ETAPA DEL ALGORITMO PROBAR ESTABILIDAD EN LAZO ABIERTA PARA EL
%CSTR. ¿Alcanza algún estado estable?
%HASTA ESTE PUNTO CALCULAMOS RICATTI
[P,L,G]=care(AA,CCs',Q)%Esta expresion calcula ricatti
EEE=eig(P)%chequeamos que la matriz P, sea positiva inspeccionando sus valores
%propios calculados
%se continúa con el cálculo de algoritmo ILMI y se igualan las siguientes
%expresiones
RE=P
X=RE
%-----
%SEGUNDA ETAPA" PROBAR SI EXISTE UN CONTROLADOR "PID" QUE LLEVE EL SISTEMA
%A ESTADO ESTABLE
% En este punto se inicia el cálculo de un sistema de LMIs las definiciones
% siguientes se hacen según las indicaciones
%-----A-----
% DEFINICIÓN DE VARIABLES
setlmis([])
F=lmivar(2,[3,9])
P=lmivar(1,[6,1])
a=lmivar(1,[1,1])
%DEFINICIÓN DE TÉRMINOS
lmiterm([1 1 1 P],AA,1,'s')
lmiterm([1 1 1 0],BB1*BB1')
```

## Control Colaborativo de Dinámicas Múltiples

```
lmiterm([1 1 1 P],-X*CCs'*CCs,1)
lmiterm([1 1 1 P],-1,CCs'*CCs*X)
lmiterm([1 1 1 0],X*CCs'*CCs*X)
lmiterm([1 1 1 0],-0.58*P)%lmiterm([1 1 1 a],-1,P)
%-----
lmiterm([1 1 2 F],BB2,1)
lmiterm([1 1 2 P],1,CCs')
lmiterm([1 2 1 -F],1,BB2')
lmiterm([1 2 1 -P],CCs,1)
%%%%
%TÉRMINOS DE LA DIAGONAL
lmiterm([1 2 2 0],-1)
%-----LMI ANTERIOR ES CORRECTA
%segunda LMI
lmiterm([2 1 1 P],1,1)
LMIs=getlmis % fin de la definición de la LMI
options=[1e-5 0 0 0 0]
[tmin,xfas]=feasp(LMIs)
Fmin=dec2mat(LMIs,xfas,F)
Amin=dec2mat(LMIs,xfas,a)
Pmin=dec2mat(LMIs,xfas,P)
Tr=trace(CCs'*P*CCs')
EIG_POPT=eig(Pmin)
%Matrices Finales
F11=[Fmin(1,1),Fmin(1,2),Fmin(1,3);Fmin(2,1),Fmin(2,2),Fmin(2,3);Fmin(3,1),Fmin(3,2),Fmin(3,3)]
F22=[Fmin(1,4),Fmin(1,5),Fmin(1,6);Fmin(2,4),Fmin(2,5),Fmin(2,6);Fmin(3,4),Fmin(3,5),Fmin(3,6)]
F33=[Fmin(1,7),Fmin(1,8),Fmin(1,9);Fmin(2,7),Fmin(2,8),Fmin(2,9);Fmin(3,7),Fmin(3,8),Fmin(3,9)]
%-----
% Matrices recuperadas que contienen los parámetros PID de los tres lazos
FA3=F33*(inv(eye(3)+Cs*B2*F33)) %...Parámetros D
FA2=(eye(3)-FA3*Cs*B2)*F22 %...Parametros I
FA1=(eye(3)-FA3*Cs*B2)*F11 %...Parametros P
%Fin del Algoritmo LMI..... si las condiciones del algoritmo no se cumple
%Se hacen las iteraciones según las indicaciones del documento.
%NOTA el valor de restricción para la traza del producto triple, no se logra
%minimizar el valor de 2.172070180207604e+002, iterando con el algoritmo LMI.
```

## ANEXO 2

# IMPLEMENTACIÓN EN HARDWARE

### Inventario de Hardware

Las tarjetas electrónicas para este proyecto deben ser seleccionadas bajo una serie de criterios básicos que se pueden resumir así:

1. Deben ser programables con algún tipo de plataforma IDE (ambiente integrado de trabajo) en lenguaje de alto nivel, sea este compilado o interpretado. Las opciones más populares pueden ser: lenguaje C o C++, Python, Lua; inclusive Basic de última generación (corebasic) que se usa en plataformas como soldercore.
2. Deben tener buen soporte para puertos tipo GPIO (General Port Input Output) de características análogas y digitales y con respaldo en software para interrupciones.
3. La conexión a red es primordial para nuestro propósito ya que varias tarjetas seleccionadas se comunican e intercambian información entre ellas.
4. El procesador debe ser al menos de tipo ARM por razones técnicas de desempeño, con varios núcleos de CPU y una velocidad competitiva.
5. Muy buen soporte a nivel de ejemplos y curva de aprendizaje rápida.

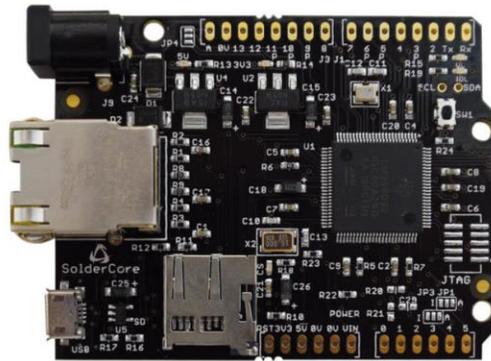
A continuación, se hace una descripción de algunas tarjetas comerciales con las cualidades que se desean realizar este proyecto.

### SOLDER CORE

El SolderCore fue diseñado en conjunto con CoreBASIC. CoreBASIC es un lenguaje de programación para microcontroladores embebidos. Es fácil de usar, es de gran alcance, y sobre todo es interactivo.

Usa lenguaje BASIC alto nivel diseñado para facilitar su uso. Alta velocidad del procesamiento, en base a CoreOS y pilas TCP / IP y software FAT altamente optimizados. Soporte para más de 50 escudos de plug-in, de terceros proveedores. Completo entorno de desarrollo autónomo para acceder mediante FTP o navegador web. Función de actualización sencilla para que tengan acceso a la última versión. Rico conjunto de funciones matemáticas, como Números complejos. Trigonometría, funciones hiperbólicas y logarítmicas. Matrices. CoreBASIC es un entorno de desarrollo completo que se ejecuta en la board SolderCore. El uso de una conexión de red le

permite escribir código desde cualquier PC o dispositivo móvil que es capaz de ejecutar un cliente telnet. Los programas que se escriben en el SolderCore se pueden guardar en la tarjeta MicroSD. CoreBASIC soporta FAT, por lo que los datos guardados en la tarjeta pueden ser intercambiados con un ordenador. En la Figura A-II.1. Se aprecia la placa.



**Figura A-II.1 Módulo CoreBasic**

Características:

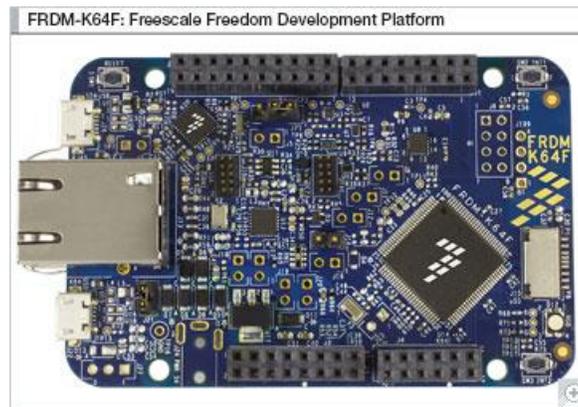
1. Factor de forma Tipo Arduino
2. Soportada en un procesador ARM Cortex-M3 80
3. 512 KB de memoria Flash, y 96KB de RAM
4. Construido con soporte Ethernet en un conector RJ45 en la board.
5. Soporte de comunicación USB OTG a través de un conector en la board de tipo microAB.
6. Socket para una memoria microSD en board.
7. Soporte para dispositivos adicionales Flash y FRAM.
8. Buses: CAN, I2S, 2xI2C, UART, PWM, ADC, SPI y QEI inclusive
9. Puerto JTAG SWD estándar en board. (Sólo instalado en la variante de Comando)
10. Soporte de red (SMTP, HTTP, FTP, DNS, TELNET y mucho más).
11. Soporte de gráficos vectoriales.
12. Soporte para almacenamiento masivo.

La potencia puede ser suministrada a través del conector USB o a través de una entrada de directa de (6V - 9V DC).

### **FRDM-K64F de Freescale**

La FRDM-K64F es una plataforma de desarrollo de ultra bajo costo para las series Kinetis K64, K63, K24 y MCU. El hardware es de factor de forma compatible con la disposición de pines de Arduino, proporcionando una amplia gama de opciones de la placa de expansión. Tiene una multitud de funciones con una gran cantidad de periféricos para habilitar el prototipado rápido, que incluye un acelerómetro digital de 6 ejes y magnetómetro, dispone de un LED tricolor y 2 pulsadores de usuario para la interacción directa y la retroalimentación. Se puede expandir la memoria con una ranura para insertar tarjetas microSD, tiene soporte de conectividad alámbrica e inalámbrica con opciones utilizando en board un puerto Ethernet y sockets dedicados a módulos Bluetooth y RF de 2,4 GHZ. Cuenta con una interfaz tipo OpenSDA v2, que es un adaptador serie embebido para poder depurar y programar. Esta tarjeta ofrece varias opciones para la

comunicación en serie, de programación flash, y de gestión de control de depuración. En la Figura A-II.2. Se aprecia la placa.



**Figura A-II.2 Módulo ARM tipo FRDM-K64F (Freescale)**

Características:

1. CPU ARM tipo MK64FN1M0VLL12 120 MHz, 1 MB de memoria flash, 256 KB de RAM, de baja potencia, sin cristal (interno)
2. Doble interfaz USB con un conector micro USB-B
3. LED RGB
4. Un acelerómetro FXOS8700CQ y magnetómetro
5. Dos pulsadores de usuario
6. Opción de fuente de alimentación flexible
7. Interfaz OpenSDAv2 USB, Kinetis K64 USB y fuente externa
8. Fácil acceso a la MCU de entrada / salida a través de conectores Arduino R3 compatibles de E / S
9. Programable a través de OpenSDAv2 y circuito de depuración para apoyar el software CMSIS-DAP
10. Dispositivo de almacenamiento masivo (MSD) como interfaz de programación de Flash
11. CMSIS-DAP interfaz de depuración más de un conductor menor USB HID conexión proporcionando depuración de control de ejecución y compatibilidad con las herramientas IDE
12. Interfaz de puerto serie virtual
13. El código abierto proyecto de software CMSIS-DAP
14. Ethernet
15. SDHC
16. Módulo adicional RF: nRF24L01 + Nordic 2.4GHz Radio
17. Módulo adicional Bluetooth

El soporte de software y desarrollo de aplicaciones se ofrecen a través del kit de desarrollo de software Kinetis (SDK), una extensa gama de robustos periféricos conductores, pilas y middleware (sustitución de paquetes de código de muestra / ejemplos).

Programas relacionados y herramientas

OPENSDA: OpenSDA de serie y el adaptador de depuración

TWR-K64F120M : Kinetis K64 MCU Módulo Sistema Torre

FROM-CR20A : Freescale Junta de Desarrollo Libertad para MCR20A Wireless Transceiver

## RASPBERRY PI MODEL B

La Raspberry Pi es una placa computadora de bajo costo desarrollada en Reino Unido por la Fundación Raspberry Pi, con el objetivo de estimular la enseñanza de ciencias de la computación en las escuelas. Tiene una base de 85 x 54 milímetros (del tamaño aproximado de una tarjeta de crédito) en el que se aloja un chip Broadcom BCM2835 con procesador ARM hasta a 1 GHz de velocidad (modo Turbo haciendo overclock), GPU VideoCore IV y 512 Mbytes de memoria RAM. En la Figura A-II.3. Se aprecia la placa.



**Figura A-II.3 Raspberry Pi**

Se requiere de un medio de almacenamiento (Raspberry Pi utiliza tarjetas de memoria SD o microSD), conectarlo utilizando cualquier cargador microUSB de al menos y de al menos 2000mah. Se consiguen carcasas para que todo quede a bien instalado y su apariencia sea más estética.

En función del modelo que se seleccione, dispone de más o menos opciones de conexión, aunque siempre hay disponible al menos un puerto de salida de video HDMI y otro tipo RCA, minijack de audio y un puerto USB 2.0 (modelos A y A+, B dispone de dos USB y B+ y Raspberry Pi 2 disponen de 4 USB) al que conectar un teclado y ratón.

Dispone de un puerto Ethernet (los modelos A y A+ no disponen de puerto Ethernet) para enchufar un cable RJ-45 directamente al router o utilizar cualquier adaptador inalámbrico WiFi compatible. Raspberry Pi, incorpora dos puertos USB, ya que, de lo contrario, no se podría conectar el teclado y el ratón.

### Hardware Raspberry Pi 2 Model B:

Chip integrado Broadcom BCM2835, que contiene un procesador ARM11 con varias frecuencias de funcionamiento y la posibilidad de subirla (haciendo overclocking) hasta 1 GHz sin perder la garantía, un procesador gráfico VideoCore IV, y 512MB de memoria RAM. La última Raspberry Pi 2 cuenta con 1GB de memoria RAM. Todo ello equivale en la práctica a un ordenador con unas capacidades gráficas similares a la XBOX de Microsoft y con la posibilidad de reproducir vídeo en 1080p.

Salida de vídeo y audio a través de un conector HDMI, para conectar la tarjeta tanto a televisores como a monitores que cuenten con dicha conexión.

## Control Colaborativo de Dinámicas Múltiples

Salida de vídeo compuesto y una salida de audio a través de un minijack.

Conexión ethernet 10/100, gracias a los dos puertos USB incluidos puede suplirse la carencia de WiFi con un adaptador.

Los puertos tienen una limitación de corriente, para conectar discos duros u otro dispositivo hay hacerlo a través de un hub USB con alimentación.

Lector de tarjetas SD (microSD para los modelos A+, B+ y Pi 2), lo que abarata enormemente su precio y da la posibilidad de instalar un sistema operativo en una tarjeta de memoria de 4 GB o más (clase 4 o clase 10).

### Software para Raspberry Pi:

Windows 10 para Raspberry Pi

Snappy Ubuntu Core para Raspberry Pi

BerryBoot, un programa que se encarga de todo el trabajo de instalación del software desde la propia Raspberry Pi.

Raspbian para Raspberry Pi.

Noobs, una aplicación que facilita la instalación de diversas distribuciones Linux. Opción de instalar soluciones como Raspbian, Arch Linux, RaspBMC, Pidora u OpenELEC sin problemas.

## CUBRIEBOARD 2

Cubrieboard literalmente es una computadora completa (soporta disco duro e interfaz gráfica de alta definición en board) que puede correr múltiples sistemas operativos generalmente Linux o Windows, entre otros, y sobre ese SO se puede programar en Python, C, C++ e incluso algunos intérpretes. En la Figura A-II.4. Se aprecia la placa.

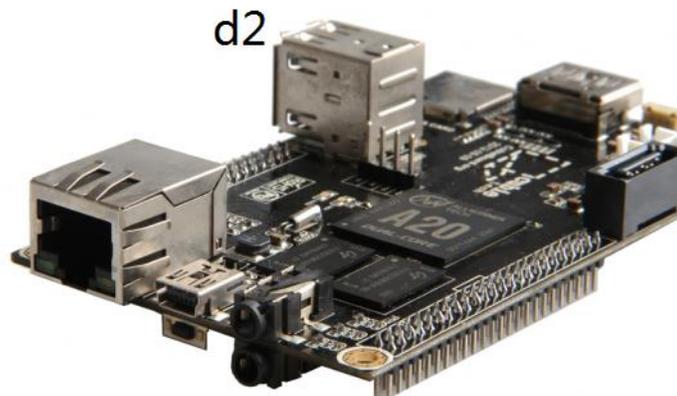


Figura A-II.4 Cubrieboard

## Control Colaborativo de Dinámicas Múltiples

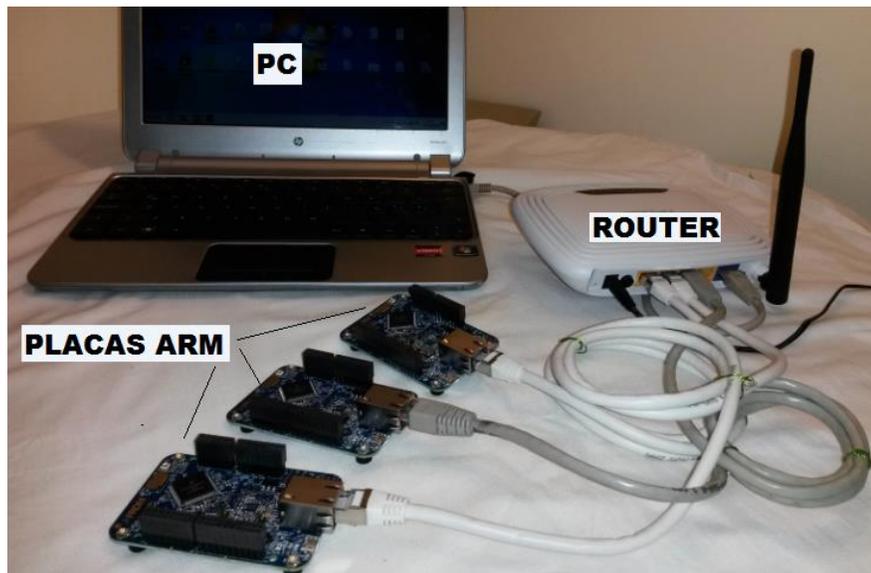
### Características:

1. Procesador ARM cortex-A8 a 1 GHz
2. Procesador gráfico Mali400
3. Memoria RAM 1GB DDR3 @480MHz
4. Salida HDMI 1080p
5. Conexión Ethernet 10/100M
6. Memoria interna de 4GB Nand Flash
7. Conexiones: 2 USB, lector tarjetas micro SD, 1 SATA, 1 infrarrojos
8. Soporta Android, Ubuntu y otras distribuciones Linux

### Arquitectura de la plataforma Final

Proponemos una arquitectura basada en red de agentes de software y hardware interconectados, esta red se administra a través de una PC encargada de impartir órdenes a nivel de líder o árbitro. Esta topología estará jerarquizada donde en el nivel de mando puede estar una PC.

La plataforma operará como un sistema de cómputo distribuido en tiempo real donde se distribuyen tres o más agentes de hardware-software soportados sobre tarjetas electrónicas de las características descritas que sean seleccionadas.



**Figura A-II.5 Montaje básico control colaborativo en red (FRDM-K64F)**

Esos módulos se interconectan a través de un switch o un router para poder ser fácilmente accedidos desde una red que es administrada desde un servidor que corre sobre una PC convencional, con su respectiva aplicación corriendo en Python desde una PC o notebook convencional de al menos 7 núcleos y a 64 bits. Una ilustración del sistema mínimo se aprecia en la figura A-II.5. En él se ven tres módulos FRDM, descritos antes, e interconectados por un router a una PC que los administra. Además, se debe realizar la conexión respectiva a sensores y actuadores para configurar un control colaborativo unido a una planta virtualizada implantada por medio de este mismo tipo de tarjetas.