Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen X No. 2 (2003), pp. 68–75

SOBRE ALGUNAS CLASES ESPECIALES DE ANILLOS

JESÚS ANTONIO ÁVILA G. (*)

Resumen. En el presente artículo se investiga la preservación por cocientes y fracciones de los $D-anillos$, $U-anillos$ y $Y-anillos$. Además se hacen algunas observaciones sobre su dimensión y se muestra que estas clases de anillos son no vacías, presentando ejemplos de ellos.

Abstract. This paper studies the preservation under the formation of quotients and ring of fractions of the structures of $D-rings$, $U-rings$ and $Y-rings$. Moreover, some observations about their dimension are made and their existence is verified by showing examples of them.

Palabras clave: axiomas de separación, dimensión, homomorfismo de anillos, anillo de fracciones.

Key Words: separation axioms, dimension, homomorphism of rings, ring of fractions.

2000 Mathematics Subject Classification: 13A99.

1. Introducción

La topología brinda aportes importantes a la teoría de anillos desde muchos puntos de vista. Uno de ellos consiste en dotar al conjunto de ideales primos del anillo con la topología de Zariski, con esto se consigue un funtor contravariante de la categoría de los anillos conmutativos unitarios a la categoría de los espacios topológicos [1]. De esta manera se consiguen caracterizar anillos cuyo espectro cumple ciertas propiedades topológicas [5], [8], [10], entre ellas conexidad, separación, normalidad, etc. El estudio de los axiomas

(*) Jesús Antonio Ávila G. Departamento de Matemáticas y Estadística Universidad del Tolima, Ibagué (Colombia)
E-mail: javila@ut.edu.co
Parte de este trabajo fue realizado cuando el autor era becario de la Universidad del Tolima y la Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia.

de separación entre T_0 y T_1 conduce a los $D-anillos$, $U-anillos$, $m-anillos$ y $Y-anillos$ [3], que serán los objetos de estudio del presente artículo.

El objetivo central es presentar algunas propiedades y características de estos anillos y mostrar el camino que podría seguirse en futuros trabajos de investigación sobre el tema.

2. Preliminares

En este numeral se muestran algunas definiciones de topología y álgebra conmutativa, que serán útiles para la comprensión de este artículo. Se asume que todos los anillos son conmutativos unitarios y con $Spec(R)$ se denotará el conjunto de ideales primos del anillo R, dotado con la topología de Zariski.

Definición 2.1. Sea R un anillo conmutativo unitario. Un subconjunto A de ideales propios de R se llama comaximal, si para todos $P, Q \in A$, no relacionados por contenencia, se tiene $P + Q = R$ (es decir P, Q son comaximales).

La siguiente proposición será utilizada en varias ocasiones en este trabajo. Su demostración puede ser consultada en [16].

Proposición 2.2. Si X es un conjunto finito parcialmente ordenado, entonces existe un anillo A tal que $Spec(A)$ y X son isomorfos como conjuntos ordenados.

La siguiente definición se refiere a las propiedades topológicas que dan origen a los anillos que se estudian en este artículo. Un estudio bastante completo de estos axiomas se encuentra en [2].

Definición 2.3. Un espacio topológico (X, τ) se llama:

(a) T_{UD} si para todo $x \in X$, $\{x\}'$ (el conjunto de puntos de acumulación de $\{x\}$) es unión de cerrados disyuntos.

(b) T_D si para todo $x \in X$, $\{x\}'$ es cerrado.

(c) T_Y si para todo $x, y \in X$, $x \neq y$, se tiene que $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}}$ es degenerado, esto es, vacío ó unitario.

(d) T_{YS} si para todo $x, y \in X$, $x \neq y$, se tiene que $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}}$ es $\emptyset$ ó es $\{x\}$ ó es $\{y\}$.

Nótese que $T_D \Longrightarrow T_{UD}$ y $T_{YS} \Longrightarrow T_Y$.

3. Algunas Clases Especiales de Anillos

En este numeral se definen los $D-$*anillos*, $U-$*anillos*, $m-$*anillos* y $Y-$*anillos* y se muestran algunos ejemplos de ellos. Mencionaremos sin demostración la relación entre estos anillos y los axiomas de separación entre T_0 y T_1. Las demostraciones formales pueden consultarse en [3].

Para empezar es importante mencionar que el espectro de todo anillo conmutativo unitario es T_0 y los anillos cuyo espectro es T_1 (y T_2) son aquellos donde primos y maximales coinciden [1]. Esto significa que esta propiedad es muy fuerte, pues esta clase de anillos es muy pequeña. Como se verá a continuación, estudiar los axiomas entre T_0 y T_1 permite definir las clases de anillos objeto de este artículo.

Definición 3.1. Un anillo conmutativo unitario R se llamará $D-$ *anillo* si para todo primo P no maximal, la intersección de los primos que lo contienen estrictamente es distinta de P.

Estos anillos son los que caracterizan la propiedad que $Spec(R)$ sea T_D. Es claro que los anillos donde primos y maximales coinciden y los anillos semilocales de dimensión uno son $D-$ *anillos*. El anillo $\mathbb{Z}$ y todo anillo de Jacobson de dimensión mayor ó igual que 1 no son $D-$ *anillos*.

Un espacio topológico es de Alexandrov si toda unión arbitraria de cerrados es cerrado. Como en un espacio topológico T_0, el conjunto de puntos de acumulación de un conjunto unitario es unión de cerrados, se tiene que si $Spec(R)$ es de Alexandrov, entonces $Spec(R)$ es T_D, esto quiere decir que la clase de anillos cuyo espectro es de Alexandrov, es una subclase de los $D-$ *anillos*.

Definición 3.2. Sea R un anillo conmutativo unitario, sean P, Q ideales maximales distintos de R,

$$M(P,Q) := \{I \in Spec(R) \mid I \text{ es minimal, } I \subseteq P \text{ e } I \subseteq Q\}.$$

Definición 3.3. Un anillo conmutativo unitario R se llamará $Y-$ *anillo* si para todo P, Q ideales maximales distintos de R, $M(P,Q)$ es degenerado.

Estos anillos son los que caracterizan la propiedad que $Spec(R)$ sea T_Y (con $\dim R \leq 1$). Obsérvese que esta clase de anillos contiene dos subclases: los llamados $pm-$ *anillos*, que son anillos donde cada ideal primo está contenido en un único maximal y los $m-$*anillos* que son los que caracterizan la propiedad que $Spec(R)$ sea T_{YS} (con $\dim R \leq 1$) y que a continuación se definen.

Definición 3.4. Un anillo conmutativo unitario R se llama $m-anillo$ si todo ideal primo contiene un único primo minimal.

Los $pm-anillos$ ya han sido estudiados en [8] y ejemplos de ellos se encuentran en la teoría de anillos de funciones [12], además se pueden construir anillos con esta propiedad mediante la Proposición 2.2. Los $m-anillos$ no aparecen referenciados en la literatura consultada, sin embargo en [14] se prueba que dado un anillo R, existe un anillo T cuyo espectro tiene el orden inverso del espectro de R.

La clase de $Y-anillos$ es amplia pues todos los dominios de integridad, los anillos locales y los anillos donde primos y maximales coinciden pertenecen a ella. Por otra parte, por la Proposición 2.2 existen anillos con espectro finito, los cuales no son $Y-anillos$.

Definición 3.5. Un anillo conmutativo unitario R se llama $U-anillo$ si para todo $P \in Spec(R)$ no maximal, $\{P\}'$ es comaximal.

Aunque estos anillos no caracterizan la propiedad que $Spec(R)$ sea T_{UD}, su espectro es T_{UD} siempre y cuando la profundidad de cada primo sea finita.

Es claro que los anillos donde primos y maximales coinciden, los anillos de dimensión 1 y los dominios de valuación son $U-anillos$. Por la Proposición 2.2 existen $U-anillos$ de cualquier dimensión finita, además si $Spec(R)$ es un árbol como conjunto ordenado, entonces R es un $U-anillo$. En [16] se prueba que existen dominios de Prüfer y de Bézout cuyo espectro es un árbol.

Obsérvese que si para todo $P \in Spec(R)$, $\{P\}'$ tiene minimales (por ejemplo anillos de dimensión finita ó anillos donde cada primo tiene profundidad finita), para que sea $U-anillo$ sólo se requiere que cada par de estos sea comaximal.

Nótese que en la caracterización de los espacios T_D y por ende los T_{UD}, se involucran propiedades algebraicas del anillo, mientras que en los demás son propiedades de $Spec(R)$ como conjunto ordenado.

4. Algunas Nociones Algebraicas

En este numeral se determina si las nociones de $D-anillos$, $U-anillos$ y $Y-anillos$ se preservan bajo la formación de cocientes y anillos de fracciones. Además se hacen algunas observaciones sobre la dimensión de dichos anillos y se presentan algunos resultados sobre el espectro.

En primer lugar se muestra una caracterización topológica de los $D-anillos$, cuando el anillo subyacente es local.

Proposición 4.1. Si R es local, entonces R es $D-anillo$, si y sólo si, $Spec(R)$ es T_{UD}.

Demostración.
$\Longrightarrow$: Si R es $D-anillo$, entonces $Spec(R)$ es T_D, luego es T_{UD}.

$\Longleftarrow$: Si R no es $D-anillo$, entonces existe $P \in Spec(R)$ no maximal, tal que $\{P\}'$ no es cerrado. Como $Spec(R)$ es T_{UD}, $\{P\}' = \bigcup_{i \in I} V(E_i)$, con $V(E_i) \cap V(E_j) = \emptyset$, para $i \neq j$. Como R es local, sea M el maximal de R, entonces $M \in V(E_i)$ para todo $i \in I$, luego $V(E_i) \cap V(E_j) \neq \emptyset$ para todo $i \neq j$, lo cual el falso. $\square$

En la siguiente proposición se muestra que la clase de $D-anillos$ es amplia, pues dentro de ella se encuentran todos los anillos que tienen espectro finito.

Proposición 4.2. Si $Spec(R)$ es finito, entonces R es un $D-anillo$.

Demostración. Sea $P \in Spec(R)$ no maximal, entonces $C = \{Q \in Spec(R) \mid P \subsetneqq Q\}$ es finito, es decir, $C = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_r\}$. Si $P = \bigcap_{i=1}^{r} Q_i$, entonces $P = Q_i$ para algún $i \in \{1, ..., r\}$, lo cual es falso. Por lo tanto, $P \neq \bigcap_{i=1}^{r} Q_i$ y entonces R es un $D-anillo$. $\square$

La existencia de anillos cuyo espectro es finito está garantizada por la Proposición 2.2 teniendo en cuenta los anillos de enteros módulo n, $\mathbb{Z}_n$. Otro ejemplo particular es el siguiente [21]: en el anillo de los enteros Gaussianos $\mathbb{Z}[i]$, el subconjunto $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid 5 \nmid x\}$ es un sistema multiplicativo y el anillo de fracciones RS^{-1} tiene tres ideales primos, de hecho

$$Spec(RS^{-1}) = \{\langle 0 \rangle S^{-1}, \langle 2+i \rangle S^{-1}, \langle 2-i \rangle S^{-1}\}.$$

Los cocientes y anillos de fracciones de $D-anillos$ son también $D-anillos$, como se muestra en las siguientes proposiciones.

Proposición 4.3. Si R es un $D-anillo$ e I es ideal de R, entonces R/I es un $D-anillo$.

Demostración. Si existe un ideal primo $\frac{M}{I}$ no maximal en R/I, tal que $\frac{M}{I} = \bigcap \frac{P}{I}$ con $\frac{P}{I} \in Spec(R/I)$ y $\frac{M}{I} \subsetneqq \frac{P}{I}$, entonces como $\bigcap \frac{P}{I} = \frac{\cap P}{I}$ con $P \in Spec(R)$ y $M \subsetneqq P$, se tiene $\frac{M}{I} = \frac{\cap P}{I}$ y esto implica $M = \bigcap P$ con $P \in Spec(R)$ y $M \subsetneqq P$, lo cual es falso, ya que R es un $D-anillo$. $\square$

Corolario 4.4. Toda imagen homomórfica de un $D-anillo$ es un $D-anillo$.

Proposición 4.5. Si R es $D-anillo$ y S es un sistema multiplicativo de R, entonces RS^{-1} es $D-anillo$.

Demostración. Los ideales primos de RS^{-1} son de la forma IS^{-1}, I ideal primo de R con $I \cap S = \emptyset$. Si existe un ideal primo MS^{-1} no maximal en RS^{-1}, tal que $MS^{-1} = \bigcap PS^{-1}$ con $PS^{-1} \in Spec(RS^{-1})$ y $MS^{-1} \subsetneqq PS^{-1}$, entonces como R es $D - anillo$ se tendría $M \subsetneqq \bigcap P$ con $P \in Spec(R)$, $M \subsetneqq P$ y $P \cap S = \emptyset$, luego $MS^{-1} \subsetneqq (\bigcap P)S^{-1} \subseteq \bigcap (PS^{-1})$, es decir $MS^{-1} \neq \bigcap PS^{-1}$, lo cual es falso. □

Por las Proposiciones 2.2 y 4.2 existen $D - anillos$ de cualquier dimensión finita, sin embargo, desconocemos la existencia de $D - anillos$ de dimensión infinita ó de espectro infinito (salvo en casos de anillos de dimensión cero).

Al igual que los $D - anillos$, los $U - anillos$ se comportan bien por cocientes y anillos de fracciones, como se muestra en las siguientes proposiciones.

Proposición 4.6. *Si R es un $U - anillo$ e I es ideal de R, entonces R/I es un $U - anillo$.*

Demostración. Sea $\frac{P}{I} \in Spec(R/I)$, no maximal y sean $\frac{M}{I}, \frac{Q}{I}$ ideales primos no relacionados que contienen estrictamente a $\frac{P}{I}$. Entonces M, Q son ideales primos no relacionados que contienen estrictamente a P, luego $M + Q = R$, entonces, $\frac{M}{I} + \frac{Q}{I} = R/I$ y esto implica que R/I es $U - anillo$. □

Corolario 4.7. *Toda imagen homomórfica de un $U - anillo$ es un $U - anillo$.*

Proposición 4.8. *Si R es un $U - anillo$ y S es un sistema multiplicativo de R, entonces RS^{-1} es un $U - anillo$.*

Demostración. Sea $PS^{-1} \in Spec(RS^{-1})$, no maximal y sean MS^{-1}, QS^{-1} ideales primos no relacionados que contienen estrictamente a PS^{-1}. Entonces M, Q son ideales primos no relacionados que contienen estrictamente a P, luego $M + Q = R$, entonces, $MS^{-1} + QS^{-1} = RS^{-1}$ y esto implica que RS^{-1} es un $U - anillo$. □

Por la Proposición 2.2 y teniendo en cuenta que todo dominio de valuación es un $U - anillo$, existen $U - anillos$ de dimensión infinita y de cualquier dimensión finita.

Es claro que si I es un ideal primo del anillo R, entonces R/I es un $Y - anillo$, ya que R/I es un dominio de integridad. Ahora, ser dominio de integridad o ser anillo local son propiedades que se preservan bajo imágenes homomórficas, sin embargo cuando se trata de $Y - anillos$ esta propiedad no se preserva, como se muestra a continuación.

Ejemplo 4.9. Por la Proposición 2.2 existe un anillo R, cuyo espectro es isomorfo al diagrama de la Figura 1, además por la Proposición 4.2, este anillo es un $D-$ *anillo* y directamente se observa que también es un $Y-$ *anillo*.

Entonces $Spec(R) = \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ y sea $I = \bigcap_{i=1}^{4} Q_i$. Por ser R un $D-$ *anillo*, se tiene que $I \neq Q_0$. Considérese el anillo cociente R/I. Como los ideales primos de R/I son los cocientes de los primos que contienen a I, se tiene que $Spec(R/I) = \{\frac{Q_1}{I}, \frac{Q_2}{I}, \frac{Q_3}{I}, \frac{Q_4}{I}\}$ que no es $Y-$ *anillo*.

Por la Proposición 2.2 y teniendo en cuenta que todo dominio de integridad es un $Y-$*anillo*, existen $Y-$*anillos* de dimensión infinita y de cualquier dimensión finita.

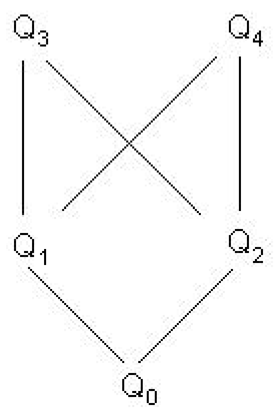

Figura 1

5. Observaciones finales

Además de las nociones algebraicas de formación de cocientes y de anillos de fracciones en las clases de los $D-$*anillos*, $U-$*anillos* y $Y-$*anillos* estudiadas en este trabajo, se podría considerar la formación de anillos productos, anillos de polinomios, anillos de series formales y extensiones de anillos, nociones que podrían dar origen a resultados interesantes.

Actualmente se está desarrollando la teoría del espectro primo sobre un módulo [4], [6], [7], [18], teoría que generaliza la del espectro primo de un anillo. Un estudio similar al realizado en [3] podría dar origen a módulos con propiedades especiales, lo cual sería una continuación del presente trabajo.

Bibliografía

[1] M. F. Atiyah y I. G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1969.

[2] C. E. Aull and W. J. Thron, *Separation Axioms Between T_0 and T_1*. Indag. Math., **24** (1963), 26–37.

[3] J. A. Ávila, *Propiedades Topológicas del Espectro Primo de un Anillo Conmutativo Unitario.* Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2002.

[4] S. P. Barragán, *Espectro Primo de un Módulo sobre un Anillo Conmutativo*. Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2001.

[5] N, Bourbaki, *Algèbre Commutative.* Hermann, París, 1961.

[6] Chin-Pi Lu, *The Zariski Topology on the Prime Spectrum of a Module.* Houston Journal of Mathematics, **25** No. 3 (1999), 417–432.

[7] Chin-Pi Lu, *Spectra of Modules.* Communications in Algebra, **23** No. 10 (1995), 3741–3752.

[8] DeMarco, Giuseppe and Orsatti, Adelberto, *Commutative rings in which every prime ideal is contained in a unique maximal*. Proc. Amer. Math. Soc., **30** (1971), 459–466.

[9] J. Dieudonné, *Cours de géométrie algébrique I.* PUF, París, 1974.

[10] J. S. Fernández, *The Prime Spectrum of a Ring: A Survey.* MSC Tesis, Florida Atlantic University, Boca Ratón, 1991.

[11] R. Gilmer, *Multiplicative Ideal Theory*. Marcel Dekker, New York, 1972.

[12] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*. Van Nostrand, New Jersey, 1962.

[13] A. Grothendiek, *Eléments de géométrie algébrique. Le langage des schémas*. IHES, Pub. Math., No. 4. París, 1960.

[14] M. Hochster, *Prime Ideal Structure in Commutative Rings*. Trans. Amer. Math. Soc., **142** (1969), 43–60.

[15] O. Lezama y E. Villamarín, *Anillos, Módulos y Categorías.* Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1994.

[16] W. J. Lewis, *The Spectrum of a Ring as a Partially Ordered Set*. Journal of Algebra, **25** (1973), 419–434.

[17] W. J. Lewis J. and Ohm, *The Ordering of Spec*(R). Can. J. Math., **XXVIII** No. 3 (1976), 820–835.

[18] R. L. McCasland, *On the Spectrum of a Module over a Commutative Ring*. Communications in Algebra, **25** No. 1 (1997), 79–103.

[19] N. H. McCoy, *Prime Ideals in General Rings*. AMS. 1948.

[20] J. R. Munkres, *Topology, a First Course*. Prentice-Hall, New Jersey, 1975.

[21] K. H. Spindler, *Abstract Algebra with Applications (I y II).* Marcel Dekker, New York, 1994.