CONTRIBUCIÓN A LA ENSEÑANZA DE LAS CONICAS MEDIANTE EL USO DE LA ASTRONOMIA

JESÚS ALBERTO MURILLO SILVA

Ingeniero Geólogo

Universidad Nacional de Colombia

Maestría en Ciencias exactas y naturales

Medellín, Colombia

2012

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Magister en enseñanza de las ciencias exactas y naturales

Director:

Carlos Julio Echavarría Hincapié

Matemático

Universidad Nacional de Colombia

Facultad, de ciencias

Escuela, de Matemática

Medellín, Colombia

(INCLUYE ANEXO SOBRE EL NUMERO DE ORO)

2012

A WAIRA, JERÓNIMO Y MELINA POR PERMITIRME COMPARTIR UN SUEÑO

Y UNA ESTRELLA A ESTE LADO DEL CIELO

Institución educativa Josefina Muñoz González. Antigua Capilla dedicada ahora a Biblioteca Central

El Universo lleva impreso el ornamento de las proporciones armónicas, pero hay que acomodar las armonías a la experiencia. Kepler quedó muy afectado al verse en la necesidad de abandonar una órbita circular y poner en duda su fe en el divino geómetra. Una vez expulsados del establo de la astronomía los círculos y las espírales, solo le quedó como dijo él, una carretada de estiércol, un circulo alargado.

Carl Sagan, Cosmos

Agradecimientos

A la Universidad Nacional de Colombia, la Maestría en Enseñanza de las ciencias exactas y Naturales y a su director el Profesor Arturo Jessie Manuel, quien ha luchado incansablemente por sacar adelante esta Maestría, por permitirme adquirir una nueva formación académica que fortalece y complementa mis conocimientos, bridándome herramientas pedagógicas para mejorar cada día mi labor docente y enriquecer la cotidianidad con mis estudiantes.

A la Institución Educativa Josefina Muñoz González, especialmente los estudiantes de 10°3, con quienes se realizó el presente trabajo, con el apoyo del docente Jack Navarro.

A Carlos Julio Echavarría Hincapié, Matemático, Profesor de Astronomía en la Maestría y asesor de este trabajo de grado, por su dedicación, su gran colaboración y sus valiosos y desinteresados aportes, que permitieron el desarrollo y culminación de un sueño.

A todos los profesores, monitores y compañeros de la maestría por sus incansables aportes.

A Mario Arenas y Wilmar Flórez, (Homero) quienes me ofrecieron su oportuna ayuda, en el momento justo.

A Diana Espejo y Aida Zapata, Mis compañeras de estudio quienes intercambiaron experiencias enriquecedoras de nuestro quehacer docente y compartimos largos y gratos momentos de nuestro quehacer cotidiano

Resumen

El bajo rendimiento académico, en general, la apatía y el temor que se manifiesta hacia la matemática hace que los docentes desarrollen nuevas estrategias para acercar el conocimiento a ellos, conservando su desarrollo personal, y la autonomía escolar.

Para los estudiantes de décimo grado, el estudio de las leyes físicas, paralelamente con la trigonometría, donde el capítulo de las cónicas se ha tomado de último por efectos del desarrollo del presente trabajo, despierta el interés porque, se puede ver en estas dos áreas, la transversalidad de los conceptos que se han visto en las charlas y videos relacionados con la matemática y la astronomía, en el proyecto de uso del tiempo libre.

El presente trabajo pretende contribuir al acercamiento de las cónicas mediante el uso de las aplicaciones de ellas en la astronomía, además en la indagación preliminar se encuentra que muchos estudiantes de la Institución educativa josefina Muñoz, de los grados décimos, evidencian relevante interés por la astronomía, y temas afines con la matemática, gusto desarrollado en los talleres lúdicos de aprovechamiento del tiempo libre, perteneciente a los proyectos extracurriculares, que se desarrollan en las instituciones educativas, y en este caso se aprovechará para potenciar el aprendizaje de las cónicas.

Palabras clave: Cónicas, parábola, elipse, hipérbola, circunferencia, vértice, foco, eje focal, directriz, radio, centro, asíntotas, eje conjugados planetas, cometas, trayectorias y luna

Abstract

His poor academic performance in general apathy and fear manifested toward math makes teachers develop new strategies to bring knowledge to them, preserving their personal development, and school autonomy.

For sophomores, the study of the laws of physics, parallel with trigonometry, where the conical section of the latter is taken for the purposes of development of this work, it arouses interest, you can see in these two areas the mainstreaming of the concepts that have been in talks and videos related to mathematics and astronomy, in the proposed use of leisure time.

This paper aims to contribute to the rapprochement of conics using these applications in astronomy, and in the preliminary investigation found that many students of the educational institution Josefina Muñoz, tenth grade, show significant interest in astronomy and issues related to mathematics, developed in workshops like playful use of leisure time, part of extracurricular projects that are developed in educational institutions, and in this case will be used to enhance learning of conics.

Keywords: Conics, parabola, ellipse, hyperbola, circle, vertex, focus, focal axis, guideline, radio, center, asymptotes, conjugate axis planets, comets, trajectories and moon

Contenido

Pág.

Lista de Figuras

Lista de Tablas

PAG

Anexos

Pág.

Introducción

La astronomía incita al alma a

mirar Hacia las alturas y nos conduce

desde este, a otro mundo.

Platón.

Las secciones cónicas son aplicables a la mecánica celeste, esto fue descubierto por Johannes Kepler, quien utilizó los precisos datos tomados por Ticho Brahe, descubriendo que las órbitas o trayectorias que describen los planetas corresponden precisamente a las secciones cónicas inicialmente Él pudo calcular dichas órbitas con circunferencias, pero encontraba en sus cálculos errores, que solamente desaparecían si se cambiaba la circunferencia por una elipse. Para Kepler fue difícil este cambio, por sus creencias religiosas, pero lo aceptó y con base en esa órbita elíptica, pudo formular sus tres leyes del movimiento de los planetas, la cual se cumple para todo el sistema solar, donde el sol está uno de los focos de la elipse.

Las curvas cónicas son importantes ya que cuando dos cuerpos masivos interactúan según la ley de gravitación universal, enunciada por Newton, sus trayectorias describirán secciones cónicas si su centro de masa se considera en reposo. Si están relativamente próximas describirán elipses, si se alejan demasiado describirán parábolas, o en el caso de los cometas que describe una hipérbola cuando se alejan del sol.

Para los estudiantes de décimo grado, el estudio de las leyes físicas, paralelamente con la trigonometría, donde el capítulo de las cónicas se ha tomado de último por efectos del presente trabajo, se despierta el interés porque se puede ver en estas dos áreas la transversalidad de los conceptos que se han visto en las charlas y videos relacionados con la matemática y la astronomía.

Una de las aplicaciones más importantes de las cónicas en astronomía, se da al planear el despegue de una nave espacial, ya que para que esta pueda abandonar la tierra e ir a algún planeta o satélite (por ejemplo la luna) tiene que encontrarse la tierra en algún punto de la excentricidad correspondiente a la órbita elíptica descrita por la tierra.

Otras aplicaciones en la construcción de telescopios parabólicos, con mercurio líquido, en puentes colgantes, las trayectorias de los proyectiles, en cuerpos en la caída sobre plano inclinado y ahora se está pensando que a nivel atómico, los electrones se comportan siguiendo dichas trayectorias.

La experiencia ha permitido que los docentes notemos como las ciencias exactas y naturales siempre han sido las asignaturas con mayores dificultades tanto para el aprendizaje de los estudiantes como para la enseñanza de los profesores, los primeros porque las ven muy complejas y los segundos porque tienen que pensar constantemente en nuevas estrategias pedagógicas y didácticas que les permitan llegar a los estudiantes, posibilitando en éstos la formación y adquisición de nuevos conceptos en sus estructuras cognitivas de una forma significativa, es por ello que surge la necesidad de retomar diferentes tipos de herramientas y establecer otras metodologías que permitan que el estudiante no solo se acerque al conocimiento propio de estas áreas sino que pueda potenciar las competencias básicas comunicativas haciéndolos responsables de su propio aprendizaje y desarrollando actitudes favorables dentro de su contexto.

Para desarrollar la propuesta, se diseñaron e implementaron cuatro guías didácticas, para cada una de las cónicas, las cuales fueron construidas teniendo en cuenta no sólo los planteamientos propuestos por Pierre Faure para la elaboración de guías sino los contenidos y núcleos temáticos del área de matemáticas propuestos para el grado décimo durante el tercer y cuarto períodos del año académico 2012. La propuesta se desarrolló en tres fases: diagnóstico, intervención y análisis de los resultados.

1. Contribución a la Enseñanza de las Cónicas Mediante el Uso de Astronomía

1.1 Formulación de la Pregunta de Investigación

Si he sido capaz de ver más lejos,

se debe a que estaba encaramado en

hombros de gigantes.

Isaac Newton.

¿Cómo contribuir al mejoramiento del aprendizaje de las cónicas mediante el uso de la astronomía, en el grado 100 de la Institución Educativa Josefina Muñoz González del municipio de Rio negro?

1.2 Propuesta

El bajo desempeño en matemática, en los tópicos relacionados con los elementos de las cónicas, en la Institución Josefina Muñoz, de Rionegro, en el grado 10°, llevaron al planteamiento de una posible solución que permitiera superar las debilidades e incrementar las fortalezas encontradas, tratando de aprovechar al máximo el interés por la astronomía.

Conviene, sin embargo advertir que, existe una estrecha relación entre la geometría y astronomía, por el simple hecho de que en todo el universo lo gobiernan las formas geométricas, por ejemplo las orbitas de los planetas entorno al sol, como el sistema solar, satélites entorno a un planeta, meteoritos al penetrar la atmósfera y cometas en torno a una estrella. Las orbitas son secciones cónicas es decir elipses, hipérbolas, parábolas y circunferencias.

Debemos reconocer que la astronomía ha tomado ciertos elementos de la geometría para poder tener referenciados ciertos objetos en la bóveda por medio de las coordenadas celestes, tan necesarias para los navegantes, e inquietos observadores del cielo. Es de anotar, que fue Einstein quien mediante la geometría, pudo establecer que la distancia más corta entre dos puntos es un segmento de curva (geodésica) y no una línea recta como se pensaba en términos de la geometría Euclidiana. Para concluir más tarde, que el universo es curvo.

Es así como se propone la astronomía como una alternativa que contribuya al mejoramiento del aprendizaje significativo de la matemática, en especial los tópicos geométricos concernientes a las cónicas y a sus elementos constitutivos que permiten a los estudiantes un mejor manejo de conceptos y estrategias para graficarlas en plano cartesiano y de este modo comprender las relaciones existentes entre las partes de ellas y sus múltiples aplicaciones cotidianas. Esto se logrará con los grupos que han demostrado interés por dicha disciplina, lo que se manifiesta en los conversatorios e indagaciones, que se han sostenido con estudiantes del grado decimo, que son los de más bajo rendimiento en matemática y los más interesados por los temas de astronómicos, ofrecidos en el proyecto de uso del tiempo libre.

Por otra parte, la propuesta pretende brindar a los estudiantes las herramientas necesarias para ampliar los temas vistos en los talleres relacionados con la temática del grado décimo, que involucran las cónicas aplicadas directamente a los movimientos ocurridos en el cielo, dando un lugar privilegiado a las figuras geométricas tan importantes en el desarrollo del conocimiento que ha permitido comprender el universo del cual hacemos parte.

La guía se apoya en la teoría del constructivismo, ya que en ella aparece como requisito el de dar a los estudiantes elementos y herramientas tendientes a que ellos mismos hagan sus propias deducciones que les permita acercarse a la resolución de problemas, usando unos conocimientos previos, los cuales se transformarán en la medida que el aprendizaje avance en la dirección de seguir aprendiendo.

En el constructivismo, la enseñanza y el aprendizaje son dinámicos, al ser manipuladas especialmente por el sujeto que aprende. Este es el método que más se practica en la enseñanza de las matemáticas, pues el estudiante ve lo que se hace y luego replica lo hecho por el maestro, es decir que es participativo e interactivo.

1.3 DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

Para el desarrollo de la unidad didáctica para la enseñanza de los elementos que conforman las cónicas, se planearán actividades integradoras con la astronomía, que permitan experimentar directamente mediante el uso de material didáctico para adquirir conceptos geométricos y astronómicos, lo cual se realizara en cinco etapas:

Reconocimiento de conceptos previos: Inicialmente se plantean preguntas que permitan al docente identificar los conceptos previos existentes en los estudiantes, en esta etapa el docente es un agente motivador, que permite que sus estudiantes interactúen con las cónicas y su aplicación a la astronomía, como una gran lluvia de ideas.

Elaboración del material de apoyo: consiste en el diseño de test que recojan la mayor información posible en cuanto a las cónicas y su estrecha relación con la astronomía, y preparación de guías que permitan no solo construir las cónicas, sino relacionar sus elementos directamente con la astronomía.

Experimentación: En este episodio se trabaja con el material requerido, por ejemplo las guías para construir las cónicas con sus elementos constitutivos, o el cono de donde se originan todas las cónicas por cortes con planos determinados y emparentando experiencias con la astronomía, como los equinoccios presentados este año y sus respectivas mediciones, donde el maestro toma nota detallada, que hará parte del informe final de observaciones.

Evaluación: Aquí se tendrá en cuenta las inquietudes y preguntas que los mismos estudiantes han formulado, las cuales se adecuaran y corregirá su ortografía, pero de todas maneras serán las relacionadas con el tema pertinente de astronomía y de las cónicas, para que el tema quede bien visto en un alto porcentaje, deduciendo de este modo que tan efectiva ha sido la unidad didáctica. Los datos obtenidos se compararan con los resultados de la evaluación inicial para “evaluar” la efectividad de la unidad didáctica.

Socialización de los resultados obtenidos: Parte en la que cada estudiante expone los resultados obtenidos en la experiencia, teniendo en cuenta que se deben relacionar conceptos geométricos-astronómicos relacionados y las dificultades presentadas en la experimentación. El docente debe motivar para que los estudiantes identifiquen, clasifiquen, organicen las ideas y comparen con los demás compañeros y expliquen el concepto de la forma más indicada.

1.4 Objetivos de la Propuesta

1.4.1 Objetivo General

Diseñar una propuesta con actividades, sobre nociones básicas y conceptos de Astronomía, que permitan motivar el aprendizaje de las cónicas, de un modo significativo, aprovechando las diferentes interrelaciones entre estas disciplinas

1.4.2 Objetivos Específicos

Identificar los niveles de conocimiento e interpretación de los estudiantes respecto de los elementos de las cónicas y realizar una revisión teórica de los diferentes enfoques que utilizan medios de enseñanza como recurso didáctico; en particular, el uso de la astronomía.

Hacer de la astronomía un elemento de aproximación a los conceptos matemáticos y estructurantes de las cónicas

Construir de manera práctica las diferentes cónicas

Identificar los distintos elementos que constituyen las cónicas y localizarlas en cada una de ellas.

Encontrar las cónicas en elementos cotidianos.

1.5 Referente Teórico

En pedagogía es importante el concepto de aprendizaje significativo, dado que este facilita el quehacer pedagógico y plantea desde dicho aprendizaje a los estudiantes aprenden lo que les llama la atención, sea porque es nuevo o por ser novedosa la metodología del aprendizaje, en la medida que se está modificando su estructura conceptual.

Para Ausubel, el aprendizaje significativo, es un proceso a través del cual la información no se toma de manera arbitraria o literal, pues se interrelaciona con una estructura de conocimiento. Para Ausubel, en la teoría del aprendizaje significativo, aparecen los subsunzores, que, son como ideas capaces de conectar unos conceptos con conocimientos ya establecidos, ampliando de este modo la nueva visión de lo aprendido.

El "subsumidos", es por lo tanto, un concepto, una idea, una proposición ya existente en la estructura cognitiva, capaz de servir de puente para la nueva información de modo que ésta adquiera, significado para el individuo (i.e. que tenga condiciones de atribuir significaos a esa información)"[1].

A medida que el estudiante incorpora nuevos conceptos básicos de astronomía a su estructura cognitiva y los contrasta con los elementos conocidos de las cónicas, en este caso, su aprendizaje se realiza por asimilación, al existir conocimientos previos en el estudiante, se posibilita el establecimiento de nuevos conceptos, favoreciendo el aprendizaje significativo.

Una vez adquirido el aprendizaje significativo, los nuevos conocimientos son incorporados en la estructura cognitiva y los subsumidores se convierten en conceptos más generales, abstractos e inclusivos, por lo tanto, el almacenamiento de la información se da jerárquicamente a través de la experiencia, partiendo de elementos más sencillos hasta otros de mayor complejidad, adquiriéndose de este modo un real aprendizaje significativo.

En pedagogía es muy difícil tener la seguridad que los estudiantes saben lo que quieren, por tanto es más difícil aún saber si les interesa el tema que está impartiendo el maestro en el aula de clase, pero si debe haber seguridad en que es necesario hacer que el tema sea interesante para que el otro aprenda.

"El cambio conceptual, en el sentido de adoptar una concepción científica y abandonar una no científica, es una tarea compleja y difícil. Tanto los estudios encarados al respecto como las hipótesis emergentes de los mismos, constituyen aportes de indiscutible importancia al campo de la enseñanza específica de las ciencias, y han contribuido a poner en evidencia la necesidad y el valor de enseñar astronomía en las escuelas"[2]

Interpretando el deseo de los estudiantes de las últimas generaciones, se puede ver que ellos tienen el "chip" incluido para todo pero tienen unas carencias orgánicas e intelectuales, que se manifiestan en la falta de la necesidad de saber y de explorar, es decir que carecen conceptos y datos claros y más específicos sobre el movimiento del sol, la tierra y la luna y en general sobre el sistema solar, y

---

[1]MOREIRA, Marco. Porto Alegre: Universidad Porto Alegre. La teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel. 1983). p. 31.

[2]TIGNANELLI, Horacio. Buenos Aires: Culturé. Astronomía en liliput. Diapositivas del curso de Astronomía. 2006. p.17.

las leyes que lo rigen, para que la representación de las trayectorias es decir las mismas cónicas sean efectivamente correspondientes a lo que sucede allá en cielo[3].

1.6 Referente Disciplinar

1.6.1 El inicio de la Astronomía.

La curiosidad con respecto a la duración del día y la noche, a los eclipses de Sol y de Luna y las vibraciones de las estrellas, llevó a los hombres primitivos a la conclusión de que los cuerpos celestes parecen moverse de un modo regular. La primera utilidad de estas observaciones fue, por lo tanto, la de definir el tiempo en periodos y como herramienta de orientación, en especial los navegantes que usaron las estrellas como una brújula.

La astronomía solucionó los problemas inmediatos de las primeras civilizaciones: la necesidad de establecer con precisión las épocas adecuadas para sembrar y recoger las cosechas y para las celebraciones, y la de orientarse en los desplazamientos y largos viajes. Para los pueblos primitivos el cielo mostraba un arreglo sistemático. El Sol que separaba el día de la noche salía todas las mañanas desde una dirección, el Este, se movía uniformemente durante el día y se ponía en la dirección opuesta, el Oeste. Por la noche se podían ver miles de estrellas que seguían una trayectoria definida. En las zonas tropicales, comprobaron que el día y la noche no duraban exactamente lo mismo a lo largo de un mismo año. En los días largos, el Sol salía más al Norte y ascendía más alto en el cielo al mediodía. En los días con noches más largas el Sol salía más al Sur y no se veía tan alto. Luego viene el conocimiento de los movimientos cíclicos del Sol, de la Luna y de las estrellas, que mostraron su utilidad para la predicción de fenómenos como el ciclo de las estaciones, de cuyo conocimiento dependía la supervivencia.

Cuando la actividad principal del hombre primitivo era la caza, se convertía en primordial el hecho de poder predecir el momento en el que se producía la

---

[3] GIL, Quílez, M. José y Martínez Peña, M. Begoña. España: Universidad de Zaragoza. El modelo sol-tierra-luna en el lenguaje iconográfico de estudiantes de magisterio. Enseñanza de las ciencias. 2005. pp. 153–166.

migración estacional de los animales que les servían de alimento y, posteriormente, cuando nacieron las primeras comunidades agrícolas, era fundamental conocer el momento oportuno para sembrar y recoger las cosechas, además de saber con precisión cuando vendrían las lluvias que favorecería los cultivos y para evitar las posibles inundaciones en aquellos periodos de crecientes .

La alternancia del día y la noche debió ser un hecho explicado de manera obvia desde un principio por la presencia o ausencia del Sol en el cielo y el día pudo ser la primera unidad de tiempo universalmente utilizada. También debió de ser de suma importancia desde un principio, el hecho de que la calidad de la luz nocturna dependiera de las fases de la luna, y el ciclo de veintiocho a veintinueve días ofrecía una manera cómoda de medir el tiempo. De esta manera, los calendarios primitivos casi siempre se basaban en el ciclo de las fases de la luna.

En cuanto a las estrellas, para cualquier observador debió de ser obvio que ellas son puntos brillantes que conservan un esquema fijo en la noche.

Los primitivos, naturalmente, creían que las estrellas estaban fijas en una especie de bóveda sobre la Tierra. Pero que el Sol y la Luna no deberían estar incluidos en ella.

Se conservan grabados en piedra del megalítico, de las figuras de ciertas constelaciones como la Osa Mayor, la Osa Menor y las Pléyades. En estos grabados, cada estrella está representada por un alvéolo circular excavado en la piedra. Del final del Neolítico se han datado menhires y alineamientos de piedras, la mayor parte de ellos orientados hacia el sol naciente, aunque no de manera exacta sino siempre con una desviación de algunos grados hacia la derecha. Este hecho hace suponer que suponían fija la Estrella Polar e ignoraban la precesión de los equinoccios.

Con el tiempo, se observó que el esquema visible de las estrellas realiza un giro completo en poco más de 365 días. Lo que hace pensar que el sol describe un ciclo completo contra el fondo de las estrellas en ese intervalo de tiempo. Además dicho ciclo de 365 días del Sol concuerda con el de las estaciones, podemos observar que antes del 2500 a.C. los egipcios ya usaban un calendario basado en tal ciclo, por lo que cabe suponer que sí utilizaban la observación astronómica de manera sistemática desde el cuarto milenio.

De finales de la época egipcia (144 d.C.) son los llamados *papiros de Carlsberg*, donde aparece consignado un método para determinar las fases de la Luna, procedente de fuentes muy antiguas, en los cuales se establece un ciclo de 309 lunaciones por cada 25 años egipcios, de tal forma que estos 9125 días se disponen en grupos de meses lunares de 29 y 30 días. El conocimiento de este ciclo permite a los sacerdotes egipcios situar en el calendario civil las fiestas móviles lunares.

La orientación de templos y pirámides es otra prueba del tipo de conocimientos astronómicos de los egipcios: las caras de las pirámides están orientadas hacia los cuatro puntos cardinales, de forma que, por ejemplo, la desviación al Norte de las pirámides de Keops y Kefrén es de 2´28", es decir, prácticamente despreciable dada la dimensión del monumento. Probablemente esta orientación la efectuaban sabiendo que la sombra más corta de un objeto es la que apunta al Norte.

Un recuento histórico de las ideas geométricas del universo se aprecia en la siguiente tabla

Tabla 1.1 Conceptos geométricos del universo de algunos astrónomos.

FECHA a.C.	**ASTRONOMO**	**DESCUBRIMIENTO**
Hacia 600	TALES	El universo es una burbuja de aire hemisférica en el seno de una infinita más líquida. La superficie cóncava de esa burbuja es el cielo. La superficie plana es la tierra. La tierra flota en las aguas inferiores lo cual explica las perturbaciones del suelo y la atmósfera.
Hacia 570	ANAXIMANDRO	La tierra es un astro plano aislado en el universo que es esférico y compuesto de anillos de fuego el cual aparece a través de orificios.
Principios siglo	PITAGORAS	(Pitagóricos) La tierra es esférica (primera afirmación de este hecho que se encuentra en la antigüedad).
Hacia 450	ANAXAGORAS DE CLAZOMENE	La Luna, la Tierra y los planetas son "grandes piedras" en movimiento por el espacio. Explicación de los eclipses de Luna por la sombra que produce la Tierra cuando pasa entre el Sol y la Luna

450-400	FILOLAO(Discípulo de Pitágoras)	Todos los astros son esféricos y la Tierra es un astro como los otros, animado también de un movimiento de rotación circular en torno al fuego central. La duración de este movimiento (veinticuatro horas) explica el movimiento diurno de las estrellas (movimiento aparente de las estrellas en la bóveda celeste en sentido de este a oeste)
427-347	PLATON	En el Timeo, Platón sitúa la Tierra en el centro del universo, pero subraya su carácter esférico y el hecho de que hay que atribuir a los planetas un movimiento regular (movimiento que está por descubrir).
408-355	EUDOXO(Discípulo de Platón)	Descripción del movimiento de la Luna y de los planetas Venus, Mercurio, Júpiter y Saturno, por la combinación de movimientos circulares centrados en la Tierra.
384-322	ARISTOTELES	En De caelo (hacia el 350), Aristóteles reasume el sistema de Eudoxo, pero da una realidad concreta a las esferas que sostienen los movimientos circulares. Es dar una medida de la dimensión de la Tierra.
siglo IV	HERACLIDES DE PONTO	Es el primero en suponer que la Tierra gira sobre sí misma en veinticuatro horas y que Venus gira alrededor del Sol.
hacia 290	ARISTARCO DE SAMOS	Es el primero en suponer que la Tierra gira no sólo

		sobre sí misma sino también alrededor del Sol. Evaluó las distancias de Sol y la Luna a la Tierra.
hacia 280	APOLONIO	Teoría de las excéntricas.
287-212	ARQUIMEDES	Mide la circunferencia de la Tierra y propone una evaluación de las distancias del Sol y de la Luna a la Tierra.
273-192	ERATOSTENES	Mide rigurosamente la circunferencia de la Tierra.
Hacia 150	SELEUCO	Mesopotámico que reasume el sistema de Aristarco.
Hacia 140d.C	HIPARCO	Estudió con exactitud el movimiento de la Luna y del Sol. Descubrió la precesión de los equinoccios y estableció el primer catálogo de las estrellas. Adoptó el siguiente orden para el sistema solar: Tierra, Luna, Sol, Venus, Mercurio, Marte, Júpiter y Saturno. Situó las estrellas más allá del sistema solar.
	PTOLOMEO	Conservó la teoría de Hiparco y la completó con sus observaciones y las de los astrónomos posteriores a Hiparco. Su teoría del movimiento de los astros aparece en su libro el Almagesto.
1546 - 1601	TICHO BRAHE	
1571 - 1630	KEPPLER	Formulo tres leyes para el movimiento de los planetas y encontró sus relaciones entre áreas y tiempo
1564 - 1642	GALILEO	Mejoro el telescopio y favoreció las observaciones de las fases de la luna

1879 – 1955	EINSTEIN	Con la teoría de la relatividad pudo explicar la órbita de mercurio
1942-	HAWKING	Trata de aunar la teoría de la gravitación y la teoría de la relatividad en el cosmos

1.6.2 La astronomía en la educación

En algunas propuestas didácticas de forma implícita y diluida en los programas de ciencias naturales, que va desapareciendo del currículo, a medida que se avanza en los niveles académicos, retomando en física algunos conceptos de gravitación universal y las leyes del movimiento planetario.

LA Astronomía tiene una estrecha relación con la geometría, pues en la observación del cielo, la matemática es la herramienta precisa para describir lo que sucede, en tanto que la información es más completa en la medida que involucra un gráfico. Las cónicas, aparecen en el estudio de la astronomía, después de Kepler, cuando él se da cuenta que las órbitas de los planetas no son como lo habían concebido los griegos desde un comienzo, sino que la circunferencia podría transformarse en una elipse, dependiendo de las características de su achatamiento (excentricidad).

La astronomía se debe enseñar favoreciendo la observación, dado que los astrónomos no tienen laboratorio, sino observatorio, para comprender los fenómenos del cielo tan cotidianos como, las fases de la luna, y los movimientos de la tierra alrededor del sol, usado para construir el calendario. Estos movimientos se entienden aplicando las curvas cónicas, y que toman importancia en astronomía desde los inicios de la observación por los primeros astrónomos del mundo griego que matematizaron las observaciones, dándoles la historia un lugar en la memoria.

Dos cuerpos masivos que interactúan según la ley de la gravitación universal, sus trayectorias describen secciones cónicas si su centro de masa se considera en reposo. Si están relativamente próximas describirán elipses, si se alejan demasiado describirán hipérbolas o parábolas.

La vinculación de las cónicas a la astronomía es ejemplificada en los distintos movimientos de los cuerpos celestes, o artificiales, de modo que se pueden ejemplificar. La parábola es una órbita típica de un objeto que no está vinculado a un centro de gravedad y que viaja a una velocidad, llamada de fuga, que le es necesaria para librarse del campo gravitacional, por ejemplo, realizan órbitas parabólicas las sondas espaciales interplanetarias que tienen que escapar del campo gravitacional de la Tierra, con el fin de dirigirse hacia los planetas, impulsándose en ellos, como sucedió con el Pioner, que se dirigió hacia Marte.

La elipse es una curva que forma parte de la familia de las Cónicas. Matemáticamente, se trata de una curva cerrada que se obtiene al cortar un cono con un plano inclinado en un ángulo menor de 90º con respecto a la base, sin cortarla.

La elipse tiene la forma de un óvalo más o menos achatado y es la órbita típica de los objetos que giran alrededor de un centro de gravedad como lo hacen, por ejemplo, los planetas con el Sol, los planetas del sistema solar tienen órbitas elípticas con una excentricidad muy pequeña, excepto Plutón.

La circunferencia, tal vez la cónica más estudiada, porque el mundo griego concibió lo circular como perfecto y lo relacionó con lo divino, hasta el punto que cuando Kepler tuvo la necesidad de rehacer sus cálculos sobre las orbitas de los planetas y se dio cuenta que no eran circular, el manifestó abiertamente que debió cambiar las orbitas circulares por algo así como unas cosas alargadas, elipses.

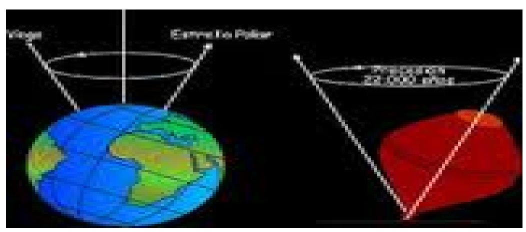


Figura 1.1 Angulo de inclinación de la tierra

Se sabe que la tierra tiene un ciclo de 25,000 años, donde su órbita pasa de circular a elíptica, este ciclo lo descubrió Milancovich, astrofísico Serbio nacido en Dalí en 1879 y fallecido en 1958, dedujo que se producían cambios en el ángulo del eje de la tierra, así como en su rotación, donde se origina un cono, y calculó todos esas variaciones. Los cambios que tienen lugar en la inclinación del eje de la Tierra son los que hacen que las estaciones sean más o menos severas.

La hipérbola es una curva cónica, es decir de las que pueden obtenerse cortando un cono con un plano. Se trata de una curva abierta, formada por dos ramas, que se obtiene al cortar una superficie cónica mediante un plano que no pasa por el vértice.

La hipérbola tiene dos asíntotas, dos rectas cuyas distancias a la curva tienden a cero cuando la curva se aleja hacia el infinito. Las hipérbolas cuyas asíntotas son perpendiculares se llaman hipérbolas equiláteras.

Desde el punto de vista astronómico y astronáutico, la hipérbola es una órbita abierta, típica de un cuerpo que procede a velocidades superiores a las necesidades para escapar al centro de atracción, por ejemplo al Sol.

Las órbitas de algunos cometas son hipérbolas. Estos cometas sólo se acercan una vez al Sol, que es uno de los focos de su trayectoria. Después se alejarán perdiéndose en los confines del Sistema Solar.

Todas estas observaciones se traerán al aula de clase, mediante ilustraciones, construcciones con los mismos estudiantes, y en lo posible se usaran simulaciones de software disponibles en la red y visitas al planetario municipal.

2. CÓNICAS Y SU HISTORIA

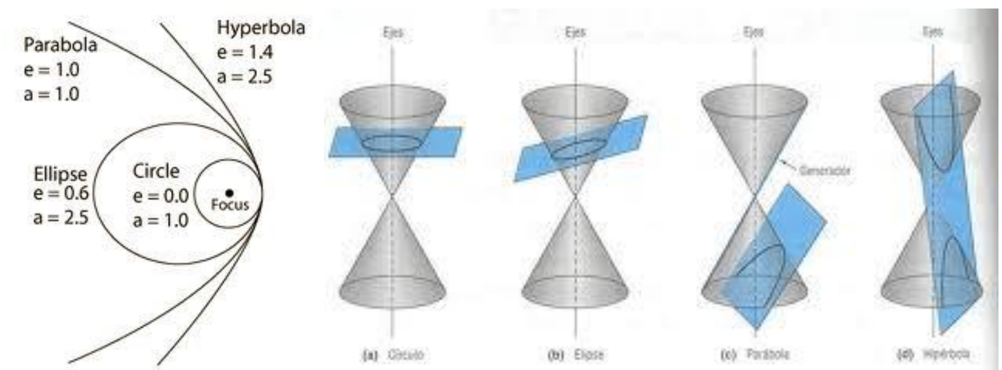
Si la Luna te ama, ¿qué te importa que las estrellas se eclipsen?

Proverbio Árabe.

La astronomía y la geometría están íntimamente ligadas, desde el comienzo de la cultura griega, pues se ha descubierto en 1900, cerca de la isla de Antikitera, lo que podría denominarse como la primera computadora mecánica del cielo. Los científicos modernos han logrado reconstruir esta maravillosa máquina que podía predecir por medio de círculos concéntricos, tangentes y entrelazados, los eclipses de luna, de sol, y los movimientos de algunos planetas. Mas no se trata solamente de esto, también predecía la hora en que sucederían y podría comprobarse directamente en la "máquina de Antikitera"

Probablemente el desarrollo de la teoría de las cónicas se debió en absoluto a los griegos, pues ya hacia fines del siglo IV a. de C. existieron dos obras importantes, desaparecidas. La primera es de Aristeo,(hacia 330 A C) el Libro de los lugares sólidos (lugares planos eran los que daban lugar a rectas y círculos; lugares sólidos, aquellos en los que aparecen las cónicas por intersección de cilindros y conos con planos). La segunda obra de interés, también perdida, fue de Euclides (330 a.C. - 275 a.C.), en cuatro libros, cuyo contenido debió ser, en sus líneas fundamentales, el que se encuentra en los cuatro primeros libros de Las Cónicas de Apolonio, aunque menos general y menos sistemático

Las figuras cónicas, o simplemente cónicas, se obtienen en la intersección de una superficie cónica con un plano. Se llama superficie cónica de revolución a la superficie generada por una línea recta que gira alrededor de un eje manteniendo un punto fijo sobre dicho eje, mientras que denominamos simplemente cónica a la curva obtenida al cortar esa superficie con un plano, como si tuviésemos un lápiz tomado por la mitad, que produzca giros sobre los dedos, genera dos conos, conectados por el punto central. Las diferentes posiciones de dichos conos en la intersección con un plano genera cuatro gráficas diferentes, llamadas: circunferencia, elipse, hipérbola y parábola, que dependerán del ángulo que dicho plano forme con el eje transversal .ver figura.



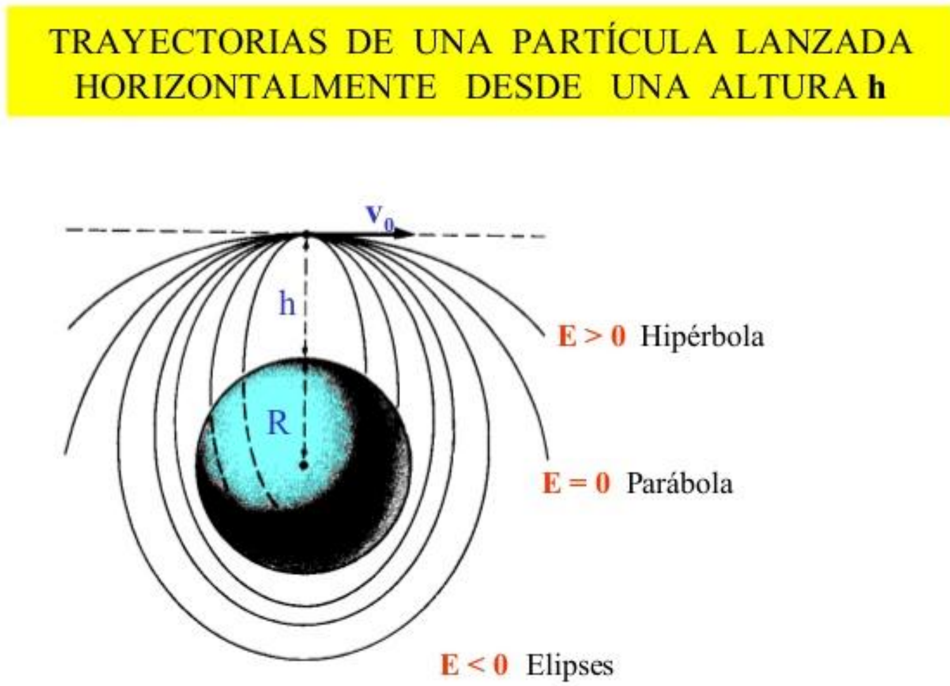


Figura 2.1 diferentes cortes de un cono para genrear las cónicas

Fue Hipócrates de Chios quien demostró que se podría conseguir la duplicación del cubo siempre que se pudiera encontrar curvas que cumplieran estas proporciones, de modo tal que a/x=x/y=y/2a; y Menecmo (350 A.C.) Halló dichas curvas como secciones (las secciones en aquellos tiempos sólo se consideraban perpendiculares a la generatriz) de conos circulares rectos (ortotoma), agudos (oxitoma) y obtusos (amblitoma).

Apolonio de Perga (262-190 A.C.), descubrió que las cónicas se podían clasificar en tres tipos a los que dio el nombre de: elipses, hipérbolas y parábolas.

Las elipses son las curvas que se obtiene cortando una superficie cónica con un plano que no es paralelo a ninguna de sus generatrices.

Las hipérbolas son las curvas que se obtiene al cortar una superficie cónica con un plano que si es paralelo a dos de sus generatrices (Base y arista).

Las parábolas son las curvas que se obtienen al cortar una superficie cónica con un plano paralelo a una sola generatriz (Arista).

Apolonio demostró que dichas curvas cónicas tenían muchas propiedades interesantes. Algunas de esas propiedades son las que se utilizan actualmente para definirlas. Quizás las propiedades más interesantes y útiles que descubrió Apolonio de las cónicas son las llamadas propiedades de reflexión. Si se construyen espejos con la forma de una curva cónica que gira alrededor de su eje, se obtienen los llamados espejos elípticos, parabólicos o hiperbólicos, según la curva que gira.

Apolonio demostró que si se coloca una fuente de luz en el foco de un espejo elíptico, entonces la luz reflejada en el espejo se concentra en el otro foco. Si se recibe luz de una fuente lejana con un espejo parabólico de manera que los rayos incidentes son paralelos al eje del espejo, entonces la luz reflejada por el espejo se concentra en el foco. Esta propiedad permite encender un papel si se coloca en el foco de un espejo parabólico y el eje del espejo se apunta hacia el sol, circunstancia utilizada por Arquímedes (287-212 A.C.), que según la leyenda, logró incendiar las naves romanas durante la defensa de Siracusa usando las propiedades de los espejos parabólicos. De los escritos de Arquímedes, solo sobrevivió un texto referente a sólidos de revolución de cónicas.

A Pappus de Alejandría, (290- 350) se le atribuye la introducción de los conceptos de foco y directriz. En la actualidad esta propiedad se utiliza para los radares, las antenas de televisión y espejos solares. La propiedad análoga, que nos dice que un rayo que parte del foco se refleja paralelamente al eje sirve para que los faros de los automóviles concentren el haz en la dirección de la carretera o para estufas. En el caso de los espejos hiperbólicos, la luz proveniente de uno de los focos se refleja como si viniera del otro foco, esta propiedad se utiliza en los grandes estadios para conseguir una superficie mayor iluminada.

En el siglo XVI el filósofo y matemático René Descartes (1596-1650) desarrolló un método para relacionar las curvas con ecuaciones. Este método es la llamada Geometría Analítica. En la Geometría Analítica las curvas cónicas se pueden representar por ecuaciones de segundo grado en las variables x e y.

El resultado más sorprendente de la Geometría Analítica es que todas las ecuaciones de segundo grado en dos variables representan secciones cónicas se lo debemos a Jan de Witt (1629-1672). Sin lugar a dudas las cónicas son las curvas más importantes que la geometría ofrece a la física. Por ejemplo, las propiedades de reflexión son de gran utilidad en la óptica. Pero sin duda lo que las hace más importantes en la física es el hecho de que las órbitas de los planetas alrededor del sol sean elipses y que, más aún, la trayectoria de cualquier cuerpo sometido a una fuerza gravitatoria es una curva cónica.

El astrónomo alemán Johannes Kepler (1570-1630) descubrió que las órbitas de los planetas alrededor del sol son elipses que tienen al sol como uno de sus focos en el caso de la tierra la excentricidad es 0.017 y los demás planetas varían desde 0.004

de Neptuno a 0.250 de Plutón. Más tarde el célebre matemático y físico inglés Isaac Newton (1642-1727) demostró que la órbita de un cuerpo alrededor de una fuerza de tipo gravitatorio es siempre una curva cónica. Kepler tuvo gran dificultad al aceptar este importantísimo descubrimiento, dado que solo la circunferencia era perfecta, entonces tuvo que cambiar hasta su fe en el divino geómetra por una carretada de estiércol, algo así como una circunferencia achatada, manifestaría posteriormente[4].La primera ley de Kepler sobre el movimiento de los planetas que estos siguen orbitas elípticas, en uno de cuyos focos se encuentra el Sol.

Newton, tal vez no habría podido descubrir la ley de la Gravitación Universal de no haber conocido la geometría de las elipses. La orbita que sigue un objeto dentro de un campo gravitacional constante es una parábola. Así, la línea que describe cualquier móvil que es lanzado con una cierta velocidad inicial, que no sea vert9ical, es una parábola.

En el Universo, el movimiento más frecuente de estrellas, planetas, satélites, etc. es el descrito mediante trayectorias elípticas (la circunferencia es un caso articular de elipse). Esto es así porque, a grandes distancias y para objetos sin carga eléctrica neta importante, la fuerza principal que gobierna este movimiento es la Fuerza Gravitatoria. Fue el gran físico y matemático Isaac Newton (16421727) quien formuló la Ley de la Gravitación que explica los movimientos de los planetas y satélites en el Sistema Solar.

Esta ley reúne las tres leyes de Kepler en una sola:

En donde:

F = fuerza de atracción,

G = la constante de gravitación universal,

M y m = las masas del Sol y el planeta y

R = la distancia al foco de la elipse, ocupado por el Sol.

$$F = G \frac{Mm}{R^2}$$

[4] SAGAN, Carl. Bogotá: Planeta. 1984 viajes a través del espacio. Cap. VIII. 1996.

Esto no es realmente exacto, ya que la gravedad no es constante: depende de la distancia del punto al centro de la Tierra. En realidad la curva que describe el móvil es una elipse que tiene uno de sus focos en el centro de la Tierra.

El punto y la recta son cónicas degeneradas (aunque cause risa la expresión). Son los casos límites de las cónicas por decirlo de alguna manera, así que agregando a lo anterior, todo lo que conlleve puntos y rectas también estaría inmerso en el mundo de las cónicas.

2.1 Importancia de las cónicas en astronomía

Las curvas cónicas son importantes en astronomía: dos cuerpos masivos que interactúan según la ley de la gravitación universal, sus trayectorias describen secciones cónicas si su centro de masa se considera en reposo. Si están relativamente próximas describirán elipses, si se alejan demasiado describirán hipérbolas o parábolas.

Las órbitas de planetas como la Tierra son elípticas donde uno de los focos corresponde al Sol, también los cometas describen elipses muy grandes, y de esta manera, se cree que este razonamiento también se puede aplicar a las órbitas de los átomos.

Una de las pocas obras conservadas de Apolonio, aunque una de sus obras fundamentales, es las Cónicas. De todas formas sólo se conserva en el original griego la mitad, los cuatro primeros de sus ocho libros; pero por suerte un matemático árabe, Thabit ibn Qurra, (836 Harán, actual Turquía - 901, Bagdad). tradujo los tres libros siguientes al árabe antes de que despareciera su versión griega, y esta traducción se ha conservado. En 1710, Edmund Halley publicó una traducción al latín de los siete libros, y desde entonces se han publicado muchas versiones en lenguas modernas.

2.2 La Circunferencia en Astronomía

Eudoxo (408 a.C. - 355 a.C) fue el primero en concebir el universo como un conjunto de 27 esferas concéntricas que rodean la Tierra, la cual a su vez también era otra esfera. Platón que era uno de sus más adelantados alumnos y Aristóteles (384 - 322 a.C.) mantuvieron el sistema ideado por Eudoxo agregándole no menos de cincuenta y cinco esferas en cuyo centro se encontraba la Tierra inmóvil.

Figura 2.2 usos de la circunferencia en astronomía

Ptolomeo (85 - 165 a.C.) recompiló el saber astronómico de su época en trece tomos del «Almagesto». Expuso un sistema en donde la Tierra, en el centro, estaba rodeada por esferas de cristal de los otros 6 astros conocidos. La Tierra no ocupaba exactamente el centro de las esferas y los planetas tenían un epiciclo (sistema creado por Apolonio de Bérgamo y perfeccionado por Hiparco) cuyo eje era la línea de la órbita que giraba alrededor de la Tierra llamada deferente.

Figura 2.3 fragmento de la máquina de Antikitera

El epiciclo permitía explicar el movimiento retrogrado observado especialmente el de Marte, como el planeta gira alrededor de su epiciclo se aproxima y se aleja de la Tierra manifestando un movimiento aparentemente retrogrado, visto desde la tierra.

Este sistema permitía realizar predicciones de los movimientos planetarios, aunque tenía una precisión deficiente, pero a pesar de esto fue popularizado y aceptado más que como modelo verdadero como una ficción matemática útil. Se calcula que el universo ptolemaico solo media 80 millones de kilómetros esto porque si fuera más grande, la esfera de las estrellas fijas debía rotar demasiado rápido para cumplir un ciclo en 24 horas.Fue Eratóstenes, (Cirene, c. 284 a.J.C.-Alejandría, c. 192 a.J.C.) Astrónomo, geógrafo, matemático y filósofo griego, quien por primera vez se atreviera a medir la circunferencia de la tierra. Se cuenta que en Alejandría había un pozo profundo, que se veía iluminado hasta el fondo el 21 de junio,

Eratóstenes entonces realizó las mismas observaciones en Alejandría el mismo día a la misma hora, descubriendo que la luz del Sol se veía reflejada en un pozo de agua el mismo día y a la misma hora. ËL Asumió de manera correcta que si como el Sol se encontraba a gran distancia, sus rayos cuando tocaban la tierra deberían llegar en forma paralela, si esta era plana como se creía en aquellas épocas y no se deberían encontrar diferencias entre las sombras proyectadas por los objetos a la misma hora del mismo día, independientemente de donde se encontraran. Sin embargo, al demostrarse que si lo hacían, (la sombra dejada por la torre de Siena actual Aswan, formaba 7 grados con la vertical) dedujo que la tierra no era plana y utilizando la distancia conocida entre las dos ciudades y el ángulo medido de las sombras calculó la circunferencia de la tierra en aproximadamente 250 estadios (40. 000 kilómetros), bastante exacto para la época y sus instrumentos rudimentarios.

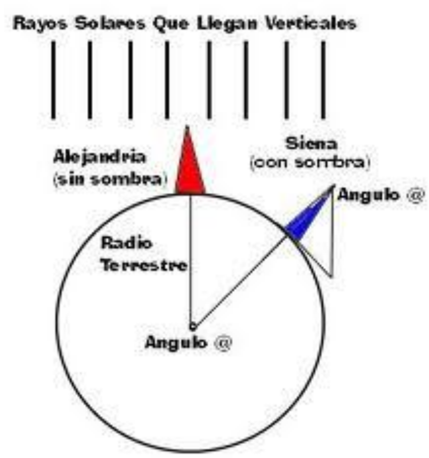


Figura 2.3 Ilustración de la mediada de la circunferencia terrestre por Eratóstenes

También calculó la distancia al Sol en 804. 000. 000 estadios y la distancia a la Luna en 780. 000 estadios. Midió casi con precisión la inclinación de la eclíptica en 23º 51' 15". Otro trabajo astronómico fue una compilación en un catálogo de cerca de 675 estrellas.

Creó uno de los calendarios más avanzados para su época y una historia cronológica del mundo desde la guerra de Troya. Realizó investigaciones en geografía dibujando mapas del mundo conocido, grandes extensiones del río Nilo y describió la región de Eudaimon (actual Yemen) en Arabia.

Eratóstenes vivió en Atenas hasta que fue llamado a Alejandría (245 a.J.C.) para educar a los hijos de Tolomeo III y para dirigir la biblioteca de la ciudad. Célebre en matemáticas por la criba que lleva su nombre, utilizada para hallar los números primos, y por su mesolabio, instrumento de cálculo usado para resolver la media proporcional.

2.3 Galileo, Observando Manchas Solares

Lo primero que comenta Galileo sobre las manchas solares en la segunda de las cartas escritas sobre este tema el 14 de agosto de 1.612, es su convencimiento de que las manchas se encuentran sobre la superficie solar o muy cerca de ella, pero no en su lejanía como indicaba Schneider. También añade que no son cuerpos consistentes como los planetas y que desaparecen y se generan nuevas siendo su tiempo de duración variable, desde unos pocos días a más de un mes de existencia. Galileo percibió cómo las manchas van variando su forma y tonalidad con el paso de los días y cómo algunas que aparecen en racimos parecen juntarse en una única mancha y como otras, provenientes de una sola mancha, al disgregarse ésta, se forman algunas más pequeñas. Cada mancha parece seguir un curso evolutivo propio diferente al de las demás, pero todas tienen una característica en común: recorren el disco solar siguiendo líneas paralelas entre sí. A raíz de este movimiento, Galileo dedujo que el Sol es completamente esférico y que gira en torno a su propio eje central aproximadamente en un mes lunar en dirección de oriente a occidente. También apuntó que las manchas se encuentran en una franja que no declina más de 29 grados al norte o sur respecto de su círculo máximo de rotación.

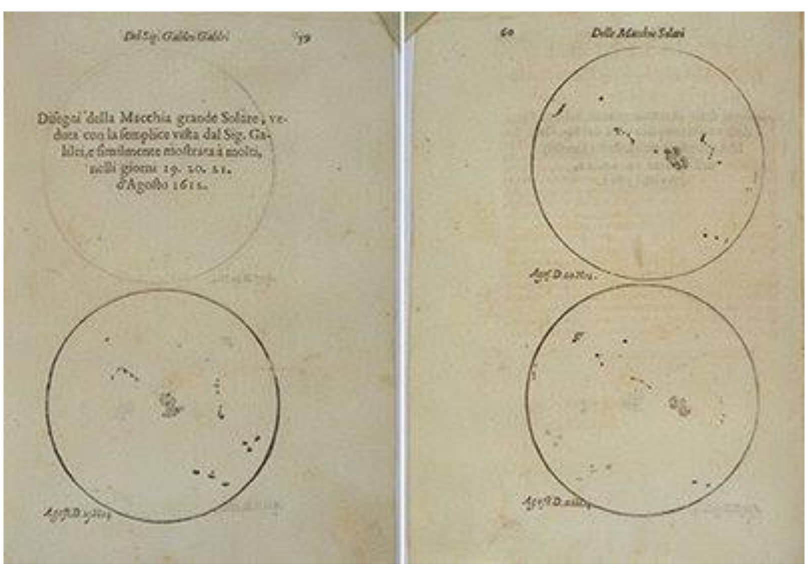


Figura 2.4 manchas solares, dibujadas por Galileo

2.3.1 La Elipse En La Astronomía

Leyes de Kepler

El astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630) formuló las tres famosas leyes que llevan su nombre después de analizar un gran número de observaciones realizadas por Tycho Brahe (1546-1601) de los movimientos de los planetas, sobre todo de Marte.

Kepler, haciendo cálculos sumamente largos, encontró que había discrepancias entre la trayectoria calculada para Marte y las observaciones de Tycho, diferencias que alcanzaban en ocasiones los 8 minutos de arco (las observaciones de Tycho poseían una exactitud de alrededor de 2 minutos de arco)

Estas diferencias lo llevaron a descubrir cuál era la verdadera órbita de Marte y los demás planetas del Sistema Solar.

1ra Ley - Órbitas Elípticas

Las órbitas de los planetas son elipses que presentan una pequeña excentricidad y en donde el Sol se localiza en uno de sus focos.

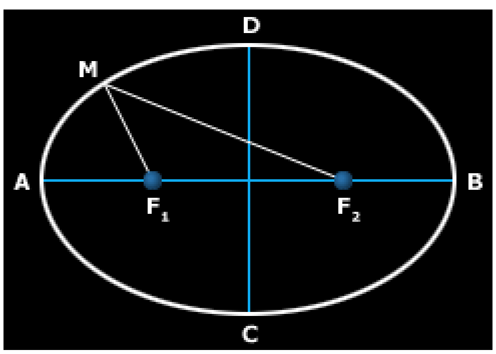


Figura 2.4 Elipse, con sus focos F_1 y F2, desde donde se dirige la distancia constante

Una elipse es básicamente un círculo ligeramente aplastado. Técnicamente se denomina elipse a una curva plana y cerrada en donde la suma de la distancia a los focos (puntos fijos, F1 y F2) desde uno cualquiera de los puntos M que la forman es constante e igual a la longitud del eje mayor de la elipse (segmento AB). El eje menor de la elipse es el segmento CD, es perpendicular al segmento AB y corta a este por la mitad

La excentricidad es el grado de aplastamiento de la elipse. Una excentricidad igual a cero representa un círculo perfecto. Cuanto más grande la excentricidad, mayor el aplastamiento de la elipse. Órbitas con excentricidades iguales a uno se denominan parabólicas, y mayores a uno hiperbólicas.

La excentricidad de la elipse puede calcularse de la siguiente manera:

$e = F_1F_2 / AB$ Donde e, es la excentricidad, F1F2 es a distancia entre los focos y AB es el eje mayor de la elipse. Si la distancia entre los focos F1F2 es cero, como en el caso del círculo, la excentricidad da como resultado cero.

Las órbitas de los planetas son elípticas, presentando una pequeña excentricidad. En el caso de la Tierra el valor de la excentricidad es de 0.017, el planeta de mayor excentricidad es Plutón con 0.248, y le sigue de cerca Mercurio con 0.206.

2da Ley - Ley de las Áreas

Las áreas barridas por el radio vector que une a los planetas al centro del Sol son iguales a tiempos iguales.

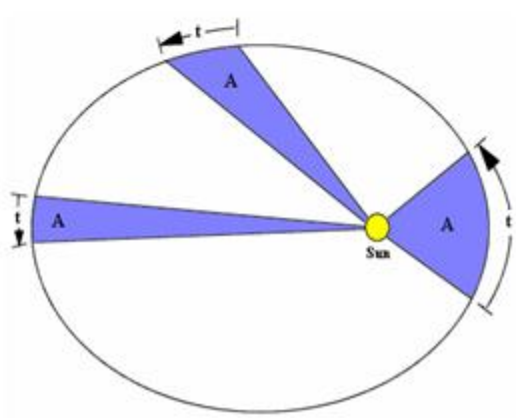


Figura 2.6 Ilustración de la ley de Kepler

La velocidad orbital de un planeta (velocidad a la que se desplaza por su órbita) es variable, de forma inversa a la distancia al Sol: a mayor distancia la velocidad orbital será menor, a distancias menores la velocidad orbital será mayor. La velocidad es máxima en el punto más cercano al Sol (perihelio) y mínima en su punto más lejano (afelio).

El radio vector de un planeta es la línea que une los centros del planeta y el Sol en un instante dado. El área que describen en cierto intervalo de tiempo formado entre un primer radio vector y un segundo radio vector mientras el planeta se desplaza por su órbita es igual al área formada por otro par de radio vectores en igual intervalo de tiempo orbital.

3ra Ley - Ley Armónica

Los cuadrados de los períodos orbitales sidéreos de los planetas son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al Sol.

El período sidéreo se mide desde el planeta y respecto de las estrellas: está referido al tiempo transcurrido entre dos pasajes sucesivos del Sol por el meridiano de una estrella.

Donde T1 y T2 son los períodos orbitales y d1 y d2 las distancias a las cuales orbitan del cuerpo central. La fórmula es válida mientras las masas de los objetos sean despreciables en comparación con la del cuerpo central al cual orbitan.

Para dos cuerpos con masas m1 y m2 y una masa central M puede usarse la siguiente fórmula:

Esta ley fue publicada en 1614 en la más importante obra de Kepler, "Harmonici Mundi", solucionando el problema de la determinación de las distancias de los planetas al Sol. Posteriormente Newton explicaría, con su ley de gravitación universal, las causas de esta relación entre el período y la distancia.

Ejemplo: Supongamos que queremos calcular la distancia entre Sol y Marte. Sabemos que su período orbital es de 1.8809 años. Luego necesitamos tener una referencia conocida, la cual puede ser la Tierra (ya que también órbita al Sol), con un período orbital de 1 año y a una distancia de 1 U.A. (Unidad Astronómica, distancia media entre el Sol y la Tierra).

Utilizando la tercera ley de Kepler y sin tomar en cuenta las masas de los cuerpos involucrados, podemos calcular el semieje de la órbita de Marte en U.A.:

$$\frac{T_1^2 \cdot (M + m_1)}{T_2^2 \cdot (M + m_2)} = \frac{d_1^3}{d_2^3}$$ Despejando D2 tenemos que:

$$\frac{1^2}{1.8809^2} = \frac{1^3}{d_2^3}$$

El cálculo nos da como resultado 1.5237 U.A. De la misma manera puede calcularse la distancia o el período orbital de los demás planetas.

Pero la órbita de Marte es una elipse, por tanto el cálculo nos da el semieje de la órbita (ver gráfico de ejemplo, excentricidad exagerada para mayor claridad). Para calcular el perihelio y el afelio debe introducirse la excentricidad en la ecuación:

Perihelio = a. (1 - e)

Afelio = a. (1 + e)

Donde a es el resultado de nuestro cálculo anterior (semieje), y e representa la excentricidad orbital del planeta, 0.093 en el caso de Marte. Reemplazando y calculando:

Perihelio = 1.5237. (1 - 0.093) = 1.3819 U.A.

Afelio = 1.5237. (1 + 0.093) = 1.6654 U.A.

El cálculo se acerca bastante a los datos reales del planeta (1.381 y 1.666 para el perihelio y afelio, respectivamente)

Podemos calcular también la longitud de los ejes. El eje mayor es, lógicamente, la suma entre la distancia en el perihelio y el afelio: unas 3.0473 U.A. La longitud del eje menor puede calcularse de la siguiente manera:

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

Donde b es la longitud del semieje menor (o sea, la mitad del eje menor), al semieje de la órbita y e la excentricidad orbital. Calculando con los datos anteriores, tenemos que la longitud del semieje menor es de 1.5171 U.A., lo cual parece lógico al pensar que debe ser mayor que la distancia en el perihelio y menor que la distancia en el afelio. La longitud del eje menor es 1.5171 x 2 = 3.0342 U.A.

Debe notarse que al calcular el semieje, se está calculando la distancia entre los centros de ambos cuerpos. En el caso de los planetas la diferencia es mínima (un radio planetario más un radio solar) entre el cálculo de la distancia entre los centros y las superficies, pero en el caso de un satélite artificial, la diferencia entre la distancia en el perigeo y el radio vector en ese momento es de un radio planetario (6378 km. en el caso de la Tierra), algo bastante significativo en comparación con la altitud de la órbita del satélite.

Kepler encontró sus leyes empíricamente, pero fue Newton, utilizando el Cálculo Diferencial que acababa de inventar, y su modelo de gravitación universal, quien probó dichas leyes.

En la tabla siguiente aparece la excentricidad de las órbitas planetarias, así como la distancia media del planeta al sol medida en unidades astronómicas (U.A.), una unidad astronómica es, por definición, la distancia media de la tierra al sol.

En la siguiente tabla se muestren a la excentricidad de la orbita de los planetas y la distancia en unidades astronómicas

Tabla 2.1 excentricidad de los planetas del sistema solar

Planeta	Excentricidad	Distancia media (U.A.)
Mercurio	0.206	0.387
Venus	0.007	0.723
Tierra	0.017	1.00
Marte	0.093	1.52
Júpiter	0.048	5.20
Saturno	0.056	9.54
Urano	0.047	19.18
Neptuno	0.009	30.06
Plutón	0.25	39.44

Si medimos el tiempo que tarda un planeta en dar la vuelta alrededor del sol en años terrestres, la constante de proporcionalidad de la tercera ley de Kepler es 1, es decir, su fórmula es p2 = a3, donde p es el período y a es el radio mayor de la elipse.

Ejemplos: Encontrar la diferencia entre el radio mayor y el radio menor de la órbita de la tierra, sabiendo que el radio mayor es aproximadamente de 149,600, 000 Km.

Solución: Como la excentricidad de la órbita terrestre es e = c

a = 0.017 y el radio menor es b = (a^2-c^2) 1/2

Entonces c = 0.017a y b = $(a^2$ (1-0.0172)) 1/2 = 0.999855 a = 149,578,308 Km

Así que la diferencia entre el radio mayor y el radio menor es 149,600,000-149,578,308 = 21,692 Km

que es menos de dos veces el diámetro de la tierra, es decir, es insignificante comparada con el tamaño de la órbita.

Encontrar el período de Urano.

Solución: La distancia media de Urano al sol es a = 19.18 U.A., así que su período, de acuerdo a la tercera ley de Kepler es p = Ö {19.183} = 84 años.

No nada más los planetas satisfacen las leyes de Kepler, sino que también todos los cuerpos que giran alrededor de otros, por ejemplo, los cometas girando alrededor del sol, los satélites girando alrededor de los planetas, y aún el sistema solar girando alrededor del centro de la Vía Láctea. La constante de proporcionalidad de la tercera ley depende básicamente de la masa del cuerpo central.

2.3.2 La Parábola en la Astronomía

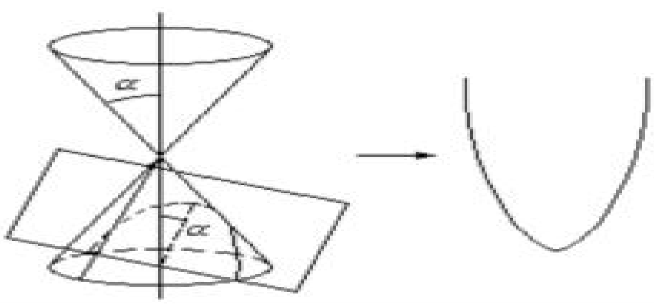


Figura 2.7 cono con sus diferentes cortes

Hubo uno en 1677, otro de especial brillo en 1680 y un tercero en 1682. Todos ellos fueron observados cuidadosamente por los astrónomos de la época anotando cada noche sus distancias a estrellas fijas y estableciendo así la dirección relativa en que se movían respecto a la Tierra. Sin embargo, ninguna conclusión definitiva se obtuvo de estas observaciones. De acuerdo con la mecánica de Newton, si un cometa entraba en el sistema solar procedente de una región muy alejada, debería rodear el Sol según una órbita parabólica (a pesar de que Kepler juró que se desplazaban en línea recta) y partir hacia el infinito. Halley, basándose. en este hecho comenzó un estudio general de los cometas a partir de antiguas observaciones y calculando sus órbitas tan exactamente como podía.

Al analizar sus resultados con más .de dos docenas de cometas encontró una serie de coincidencias en los cometas de 1531, 1607 y 1682. Todos ellos tenían en común un nodo ascendente de unos 200 en Tauro, una inclinación orbital de 180° (ángulo que forma el plano orbital del cometa con el plano de la eclíptica), un perihelio próximo a 2 en Acuario y una distancia perihélica de 58 millones de kilómetros.

Halley calculó estas órbitas como parábolas, pero él sabía perfectamente que en la región próxima al foco, una parábola difería muy poco de una elipse alargada. Llegó a la conclusión de que no se trataba de tres cometas distintos, sino de tres apariciones del mismo cometa que se desplazaban en una órbita muy elíptica con un periodo de setenta y cinco a setenta y seis años. En ese caso el cometa que él había presenciado en Islington en 1682 debería regresar en 1758. Halley murió en 1742, y por tanto, no vivió lo suficiente para comprobar su predicción. (*)

Después de 11 meses de angustiosa espera, el cometa fue visto por vez primera el día de Navidad de 1758 por un campesino alemán llamado Pálizsch y alcanzó el perihelio el 12 de marzo de 1759. El pequeño retraso con respecto a las predicciones de Halley era debido a las perturbaciones producidas por Urano y Neptuno, desconocidos en 1704 y por tanto, no tenidos en cuenta en los cálculos de Halley. Indirectamente, la influencia de estos planetas en el periodo del cometa Halley constituyó uno de los primeros triunfos de la teoría de Newton de la gravitación universal. Por vez primera en la historia de la humanidad un cometa había regresado cuando y donde le esperaban los astrónomos. Era pues razonable pensar que los otros cometas también eran miembros regulares del sistema solar. Halley no descubrió «su cometa en el sentido de ser el primero en verle, ni siquiera en estudiarle.

Para su descubrimiento necesitó apoyarse en las observaciones previas de otros astrónomos como Peter Apiano, Longomontanus y Kepler. Ningún astrónomo pudo observar dos venidas de un cometa de setenta y seis años y pocas personas pueden verle dos veces en su vida. Sus trabajos sobre los cometas están compendiados en la obra Synopsis astronomiae cometicae.

Si una órbita típica de un objeto que no está vinculado a un centro de gravedad y que viaja a una velocidad, llamada de fuga, que le es necesaria para librarse del campo gravitacional. Por ejemplo, realizan órbitas parabólicas las sondas espaciales interplanetarias que deben escapar al campo gravitacional de la Tierra, con el fin de dirigirse hacia los planetas.

Desde el punto de vista geométrico (matemático) la parábola pertenece a la familia de las Cónicas. Se trata de una curva plana, abierta, que se obtiene al cortar una superficie cónica mediante un plano que no pasa por el vértice pero corta la base dejando "fuera" un ángulo menor de 180º. La parábola se puede definir como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco, y de una recta fija llamada directriz.

2.3.3 La Hipérbola en Astronomía

Pero es más hay satélites que describen parábolas alrededor de la Tierra, y algunas estrellas describen la mitad de una hipérbola (ya que entera sería imposible, porque las estrellas no se tele trasportan todavía…)

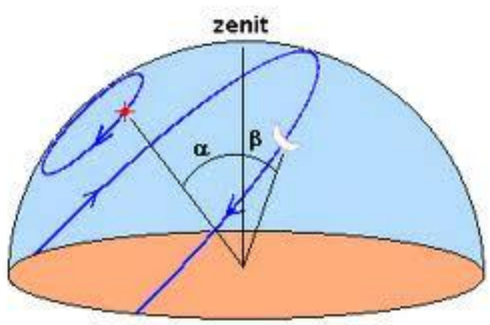


Figura 2. 8 La hipérbola en la semiesfera

Desde el punto de vista astronómico y astronáutico, la hipérbola es una órbita abierta, típica de un cuerpo que procede a velocidades superiores a las necesidades para escapar al centro de atracción, por ejemplo al Sol.

Una vez al Sol, que es uno de los focos de su trayectoria. Después se alejarán perdiéndose en los confines del Sistema Solar. Las órbitas de algunos cometas son hipérbolas. Estos cometas sólo se acercan al sol y luego se pierden en el espacio.

El siguiente avance significativo lo hizo Johannes Kepler, quien estableció la ciencia física moderna como una extensión de estos antiguos descubrimientos griegos, tal como Nicolás de Cusa, Luca Pacioli y Leonardo da Vinci los redescubrieron. Kepler, citando a Cusa, a quien llamo “divino”, dio una particular importancia a la diferencia entre la curva (geométrica) y la recta (aritmética). Kepler escribió en su Mysterium Cosmographicum: “Pero, después de todo, .por que las distinciones entre la curva y la recta, y la nobleza de una curva, en la intención de Dios cuando creo el Universo? .Precisamente por qué? Salvo que para el Creador más perfecto fuera absolutamente necesario crear la más bella obra”. “Como parte de su investigación astronómica, Kepler domino Las Cónicas de Apolonio, que es una compilación de los descubrimientos griegos sobre estas curvas superiores.

Como resultado de su investigación sobre la refracción de la luz, Kepler aporto un concepto nuevo y revolucionario de las secciones cónicas”[5].

Y por primera vez, Kepler considero a las secciones cónicas como una multiplicidad proyectiva: “...entre estas líneas sucede lo siguiente en razón de sus propiedades: pasa de la línea recta, a través de una infinidad de hipérbolas, a una parábola, y de ahí, a través de una infinidad de elipses, al círculo”. Así, por un lado la parábola tiene dos cosas en naturaleza infinitas, la hipérbola y la línea recta, la elipse y el círculo[6].

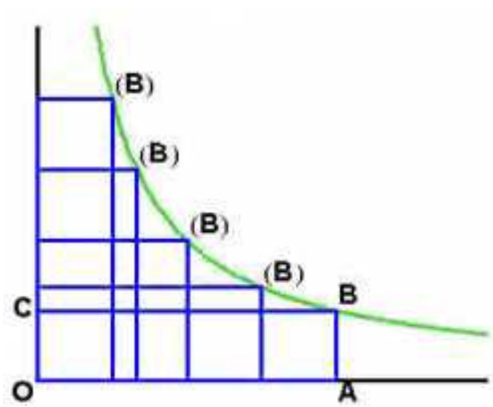


Figura 2.9 representación de una hipérbola

La hipérbola la conforma la esquina B del rectángulo OABC. En tanto los lados del rectángulo cambian, el área entendida.

2.4 Propiedades generales de las cónicas.

Las cónicas en general tienen propiedades importantes que son aplicables a diferentes campos de la ciencia, por consiguiente se enunciarán las propiedades geométricas más interesantes de las cónicas.

La suma de los radios vectores de un punto cualquiera de la elipse es igual a

Los radios vectores de los extremos del eje menor son iguales al semieje mayor

---

[5] SAGAN, Carl. Bogotá: Planeta. 1984 viajes a través del espacio. Cap. VIII. 1996.

[6] Ibid.

El semieje mayor a es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son perpendiculares: el semieje menor b y la sami-distancia focal.

Los ejes y centro de la elipse son respectivamente ejes de simetría y centro de simetría de la curva.

La tangente a la elipse en un punto de la curva es bisectriz del ángulo formado en dicho punto por un radio vector y la prolongación del otro. . La normal de una elipse, biseca al ángulo formado por los radios vectores del punto de tangencial.

2.4.1 Propiedades de la Hipérbola.

La diferencia de los radios vectores de un punto cualquiera de la hipérbola es igual a

Los dos semiejes y son los catetos de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es sami-distancia focal.

Una propuesta de enseñanza aprendizaje para la construcción y aplicación de las cónicas.

Cuando los dos semiejes a y b son iguales, la hipérbola se llama equilátera.

Los ejes y el centro de la hipérbola son respectivamente ejes de simetría y centro de simetría de la curva.

La tangente a la hipérbola en un punto de la curva es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores correspondientes a dicho punto.

La normal de una hipérbola, biseca al ángulo formado por un radio vector del punto de tangencia y la prolongación del otro radio.

2.4.2 Propiedades de la parábola.

El eje de la parábola es el eje de simetría de la curva.

La tangente a la parábola en un punto de la curva es bisectriz del ángulo formado por el radio vector correspondiente a dicho punto y la perpendicular a la directriz trazada por el mismo punto.

El foco equidista de los puntos de intersección de la tangente con la curva y con el eje.

La tangente que pasa por el vértice de la parábola es perpendicular al eje de la parábola y paralela a la directriz.

El lugar geométrico de las proyecciones del foco sobre las tangentes es la tangente en el vértice.

La normal de la parábola es la bisectriz del ángulo formado por el radio vector del punto tangente y la prolongación de la recta que es perpendicular a la directriz que pasa por el punto de tangencia.

2.4.3 La ecuación general de una sección cónica

El tipo de sección cónica puede ser descubierta por el signo de: B^2 - 4AC, en la ecuación

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Tabla 2.2 propiedades generales de una cónica

Si B2 - 4AC es...	pues la curva es...
< 0	un elipse, un círculo, un punto o ninguna curva.
= 0	una parábola, 2 líneas paralelas, 1 línea o ninguna curva.
> 0	una hipérbola o 2 líneas intersectadas.

Las Secciones Cónicas. Para, en cada uno de los abajo mencionados casos, lograr un centro (j, k) en vez de (0, 0), reponga cada término x con un (x-j) y cada término y con un (y-k).

Tabla 2.3 propiedades de los elementos de las cónicas

	Círculo	Elipse	Parábola	Hipérbola
Ecuación (vértice horizontal):	x^2 + y2 = r^2	$\boldsymbol{x2 / a2}$ + y^2 / b^2 = 1	4px = y^2	x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1
Ecuaciones de las asíntotas:				y = ± (b/a)x
Ecuación (vértice vertical):	$x^2 + y^2 = r^2$	y^2 / a^2 + x^2 / b^2 = 1	4py = x^2	y^2 / a^2 - x^2 / b^2 = 1
Ecuaciones de las asíntotas:				x = ± (b/a)y
Variables:	r = el radio del círculo	a = el radio mayor (= 1/2 la longitud del eje mayor)	Variables:	r = el radio del círculo
Excentricidad:	0		c/a	c/a
El Relación al Foco:	p = 0	a2 - b2 = c2	p = p	$a^2 + b^2 = c^2$
Definición: es	la distancia al	la suma del	la distancia al	la diferencia

el conjunto de todos los puntos que cumple la condición...	origen es constante	las distancias a cada foco es constante	foco = la distancia a la directriz	entre las distancias a cada foco es constante
Tópicos Similares:	La Sección Geométrica sobre Círculos	Tópicos Similares:	La Sección Geométrica sobre Círculos	Tópicos Similares:

$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$ (elipse, cuando a = b circunferencia).

$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = -1$ (elipse imaginaria).

$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 0$ (par de rectas imaginarias que se cortan en un punto real).

$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$ (hipérbola).

$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 0$ (par de rectas reales que se cortan).

$x^2 - 2py = 0$ (parábola).

$y^2 - 2px = 0$ (parábola).

$x^2 - a^2 = 0$ (par de rectas reales paralelas).

$x^2 + a^2 = 0$ (par de rectas imaginarias paralelas).

$x^2 = 0$ (par de rectas reales coincidentes).

La excentricidad de una circunferencia es cero ($\varepsilon = 0$).

La excentricidad de una elipse es mayor que cero y menor que 1 ($0<\varepsilon < 1$).

La excentricidad de una parábola es 1 ($\varepsilon = 1$).

La excentricidad de una hipérbola es mayor que 1 ($\varepsilon > 1$).

Tabla 2.4 las cónicas y su excentricidad

Sección cónica	ecuación cartesiana	excentricidad (ε)
circunferencia	$X^2 + y^2 = a^2$	0
elipse	$X^2/a^2 + y^2/b^2= 1$	$\sqrt{(\mathbf{1} - \boldsymbol{b}\mathbf{2}/\boldsymbol{a}\mathbf{2}\ )}$
parábola	$Y^2 =4ax$	1
hipérbola	$X^2/a^2 - y^2/b^2= 1$	$\sqrt{(\mathbf{1} + \boldsymbol{b}\mathbf{2}/\boldsymbol{a}\mathbf{2}\ )}$

3. Metodología de la Intervención

"Todos los efectos de la Naturaleza son sólo la

consecuencia matemática de un pequeño

Número de leyes inmutables".

Pierre Simón Laplace

Para aplicar las pruebas dentro del aula, se llevó a cabo un trabajo previo, preparatorio con los estudiantes, padres de familia, tendiente a facilitar el proceso, para que se pueda incluir en el plan curricular y además coincida con el periodo de desarrollo del trabajo de grado.

3.1 Técnicas

Aplicación de encuesta diagnostica, a los estudiantes del grado 10° 3 para determinar las causas de la apatía hacia las matemáticas., y establecer una base sobre los conceptos previos sobre el tema de astronomía, dado su interés por el área. (48 encuestas)

Análisis inicial, el cual se basa en el estudio de los resultados de las pruebas externas e internas, se realizara en el primer periodo escolar para las externas del año 2011 y 2012 y los resultados internos del primer y segundo periodos de 2012.

Revisión y articulación de las mallas curriculares de matemáticas

Realización de talleres en equipo, lo cual permite la interacción y el trabajo cooperativo, respetándose así los ritmos de aprendizaje

Implementación de diferentes estrategias pedagógicas para brindar variedad y hacer divertido el aprendizaje (charlas magistrales, videos, visita a la biblioteca de Empresas Públicas de Medellín, al planetario, y talleres con Alianza,

Realización de pruebas internas con preguntas estructuradas según estándares curriculares y modelo nacional, para aproximar los estudiantes a los modelos realizados por el ICFES

Comparación y análisis de los resultados internos en el primer, segundo y tercer periodos

Realizar Sensibilización y motivación a los estudiantes, docentes y padres de familia sobre la necesidad de un conocimiento matemático significativo, donde todos tenemos compromiso, por hacer parte de la comunidad educativa

Utilizar diferentes materiales didácticos como dibujos y recursos virtuales, juegos, pasatiempos etc. para crear alternativas de motivación, entendimiento y aprendizaje.

Puesta en escena de videos relacionados con la matemática y la astronomía

Organizar la información obtenida para crear el enlace necesario de los planes de área, que permitan una verdadera continuidad el próximo año en el proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el grado once.

Realizar análisis de pruebas externas e internas después de la aplicación de las estrategias y comparación con los análisis iníciales. (última semana de clase en noviembre)

El trabajo disciplinar propiamente dicho que se realizó en el aula, fue fundamental, ya que a partir de ella se demuestra la calidad de la formación en los estudiantes y se obtuvieron las conclusiones, las que se harán extensivas al total de la población y orientaran las futuras intervenciones. Para la recolección de la información inicial se utilizara una metodología cuantitativa[7], la cual permite obtener datos que proporcionan mediciones y permiten el análisis estadístico, también se empleara metodología cualitativa, pues se realizaran análisis de condiciones individuales.

Para el diagnóstico inicial se analizaron los resultados de las pruebas externas (Icfes y saber) y los resultados de las pruebas internas (resultados académicos 1°,2° y 3° periodos**).**

3.2 Aplicación de instrumentos valorativos

El trabajo realizado en el aula, se resume de la siguiente manera:

Test inicial

Trabajo de seguimiento

Aplicación de las guías de construcción de las cónicas con lápiz, alfileres y curda,

Construcción de las cónicas mediante el uso detallado utilizando medidas con la regla, compas, lápiz y escuadra

Realización de un crucigrama, con palabras tanto de conocimientos de astronomía, como de las cónicas una evaluación o test final de las cónicas

En la realización del primer test, se combinaron los temas tanto de la astronomía como las cónicas, porque esa era la finalidad, de integrar la astronomía con las cónicas.

El test se preparó en una sesión de dos horas, donde previamente se habían resuelto preguntas e inquietudes, así mismo se presentó previamente un video sobre los griegos: La Armonía de los mundos, donde se explica el movimiento retrogrado de los planetas vistos desde la tierra, las formas de sus trayectorias fotografiadas con cámaras de exposición continua, las galaxias y de las teorías de Copérnico y Kepler así como de sus historias y el vuelco que se dio al mundo científico por sus teorías y explicaciones más satisfactorias sobre el sistema solar y el sueño de Kepler de su misterio cósmico en relación con los sólidos pitagóricos.

El test se diseñó con 20 preguntas muy generales, que permiten tener un acercamiento a los conocimientos previos sobre la astronomía y propiamente de ella aplicada a las cónicas, así como de cultura general.

Como actividades intermedias cabe destacar la medición de la sombra el del equinoccio de junio 23, para ver la inclinación del eje terrestre, fecha que sirvió para la preparación del mismo evento en septiembre 21, el cual no se pudo ver, por la lluvia, pero dejo en los estudiantes una aguda inquietud sobre el tema, sus causas y el significado en términos climáticos para las diferentes zonas del planeta.

La visita guiada al planetario de Medellín Jesús Emilio Ramírez S J permitió ampliar el tema visto en clase y salpicado por la curiosidad del video de Carl Sagan, donde empiezan a aparecer las cónicas como caminos de los astros, según palabras de un estudiante.

Luego de tener identificadas las cónicas, por lo menos con sus nombres, se presenta la guía de construcción de las cuatro cónicas, de manera lúdica y utilizando una curda, unos soportes como alfileres o chinchetas, y una escuadra, los estudiantes logran comprender de manera casi inmediata, obtener todas las cónicas.

Luego de este abrebocas, se presenta una guía para construir las cónicas, pero en este caso si se presentan los elementos constituyentes, y con la facilidad de identificar cada elemento, ubicarlo en el plano cartesiano y deducir sus ecuaciones.

Como un material que sirvió de apoyo intermedio, se presentó un crucigrama que entrelaza términos relacionados con la astronomía y las cónicas.

La puesta en escena de esta actividad, generó momentos gratificantes, porque el estudiante se encuentra con algo práctico y alejado del pedestal de la incompresibilidad del tema, porque ya tenían elementos suficientes para identificar todas las cónicas con sus respetivos elementos y sobretodo, poder plasmarlas en el tablero, en cartulinas, inclusive en el mismo piso.

Antes de hacer la evaluación final del tema, donde ya se ha presentado suficiente ilustración, en cuanto a divulgación y ampliación del tema, por parte de los estudiantes, que hacían lecturas tendientes a complementar las clases y por la inquietud de ver algunos programas del canal History, que los estudiantes del club de Astronomía proponían como temas centrales.

Por último se presentó la evaluación final de las actividades, donde se evalúan todas las actividades propias de las cónicas, donde se identifican rectas y puntos significativos, orientación de las gráficas en los ejes coordenados, así como distancias dirigidas en el plano cartesiano. La identificación de elementos en el plano, de modo analítico, aplicación de sus propiedades deducidas de la ecuación general y ejercitación mediante la aplicación de cada una de las cónicas.

4. Análisis de Resultados

"El final de toda exploración será llegar al punto de partida y conocer el lugar por primera vez".

Thomas S. Eliot.

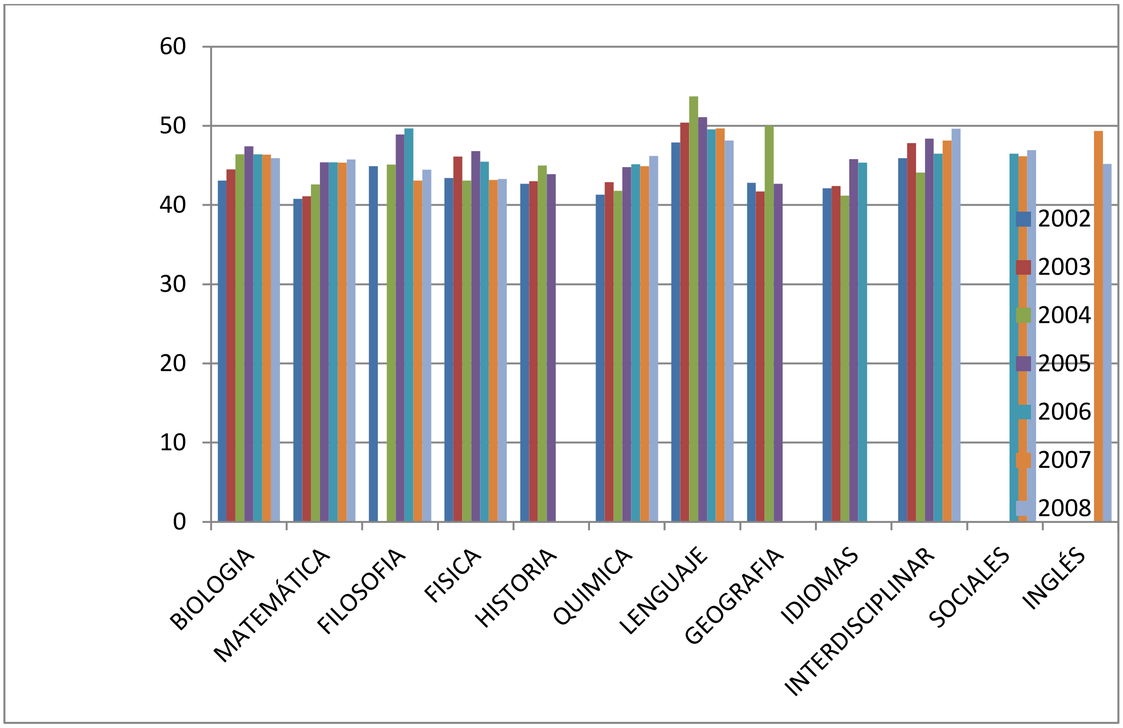


Tabla 4.1 cuadro comparativo del ICFES de la I.E Josefina Muñoz G.

4.1 Resultados del ICFES Para los Años Indicados

Se inicia el análisis de datos obtenidos, poniendo de manifiesto los resultados de las pruebas ICFES del colegio, donde se evidencia el bajo desempeño académico, especialmente en matemática, donde los resultados, están muy por debajo de la media, y aunque el colegio ha mejorado de puesto, el desempeño en matemática sigue siendo muy bajo, teniendo en cuenta otros factores como la cantidad de estudiantes que pasan a las universidades públicas, entre 6 y 10 en los últimos ocho años.

A continuación se hará una descripción detallada de los datos obtenidos en el primer test sobre cónica y astronomía, para los estudiantes de 10° 3, cuyo objetivo principal, era conocer los conceptos previos de las cónicas para relacionarlos con la astronomía

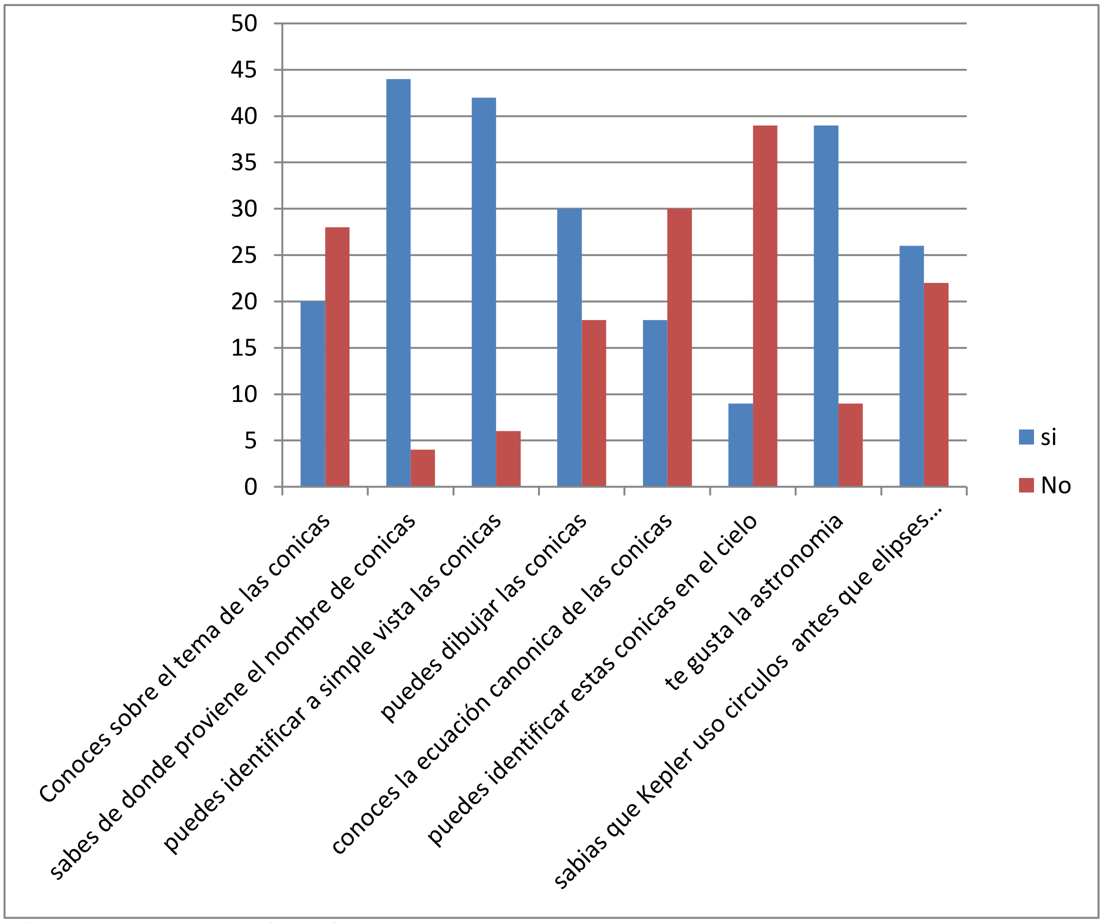


Tabla 4.2 preguntas del primer Test

El gráfico muestra que los estudiantes, en su gran mayoría, en el grupo 10° 3 conocen sobre el origen del nombre de las cónicas y también sobre el gusto por la astronomía, además de poder identificarlas en un dibujo y sobre todo que conocen el trabajo de Johannes Kepler, en su curso de física, y lo más importante es el gusto por el curso cuando planteamos la relación con la astronomía, que aunque solo fue un capítulo, se notó desde el comienzo el gran interés de todos los estudiantes, que veían en este tema, un capitulo sin tanta matemática y sobretodo fórmulas difíciles de deducir o aplicar, en palabras de ellos mismos.

Con los estudiantes, tanto dentro como fuera del aula, pero conectados al tema de interés, surgen cuestionamientos sobre las cónicas y en el escrito manifiestan que conocen muchos elementos con tales formas unos de pronto extraños, otros muy comunes, pero están de acuerdo que las cónicas parecen en la cotidianidad de una u otra forma, y lo expresan libremente porque en alguna parte las han visto. Se puede afirmar que la mayoría del grupo tiene conocimiento de esas formas

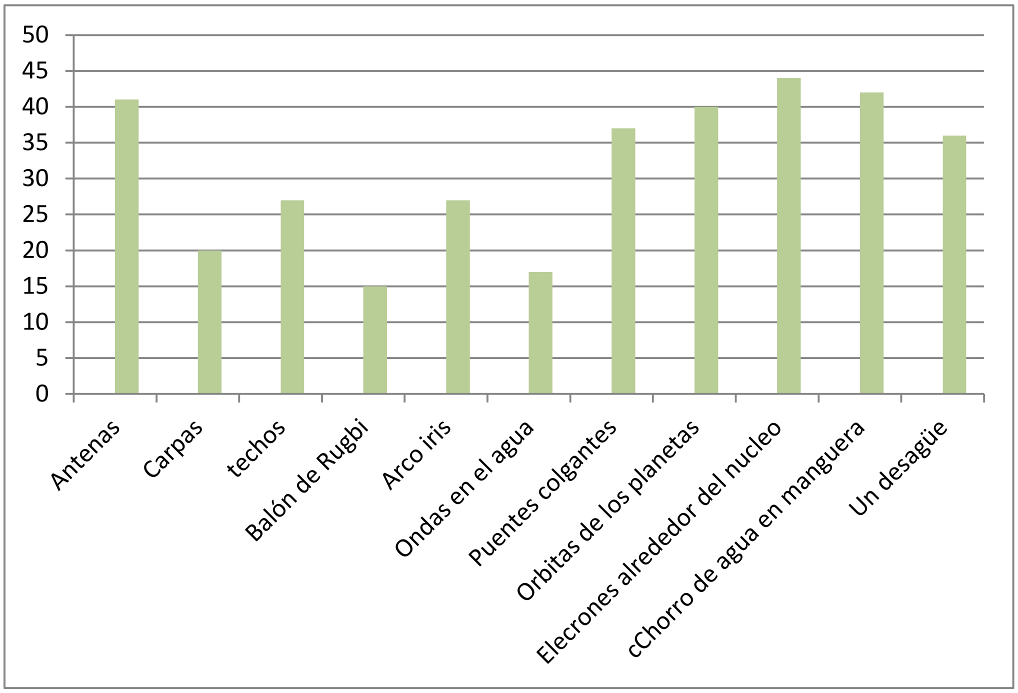
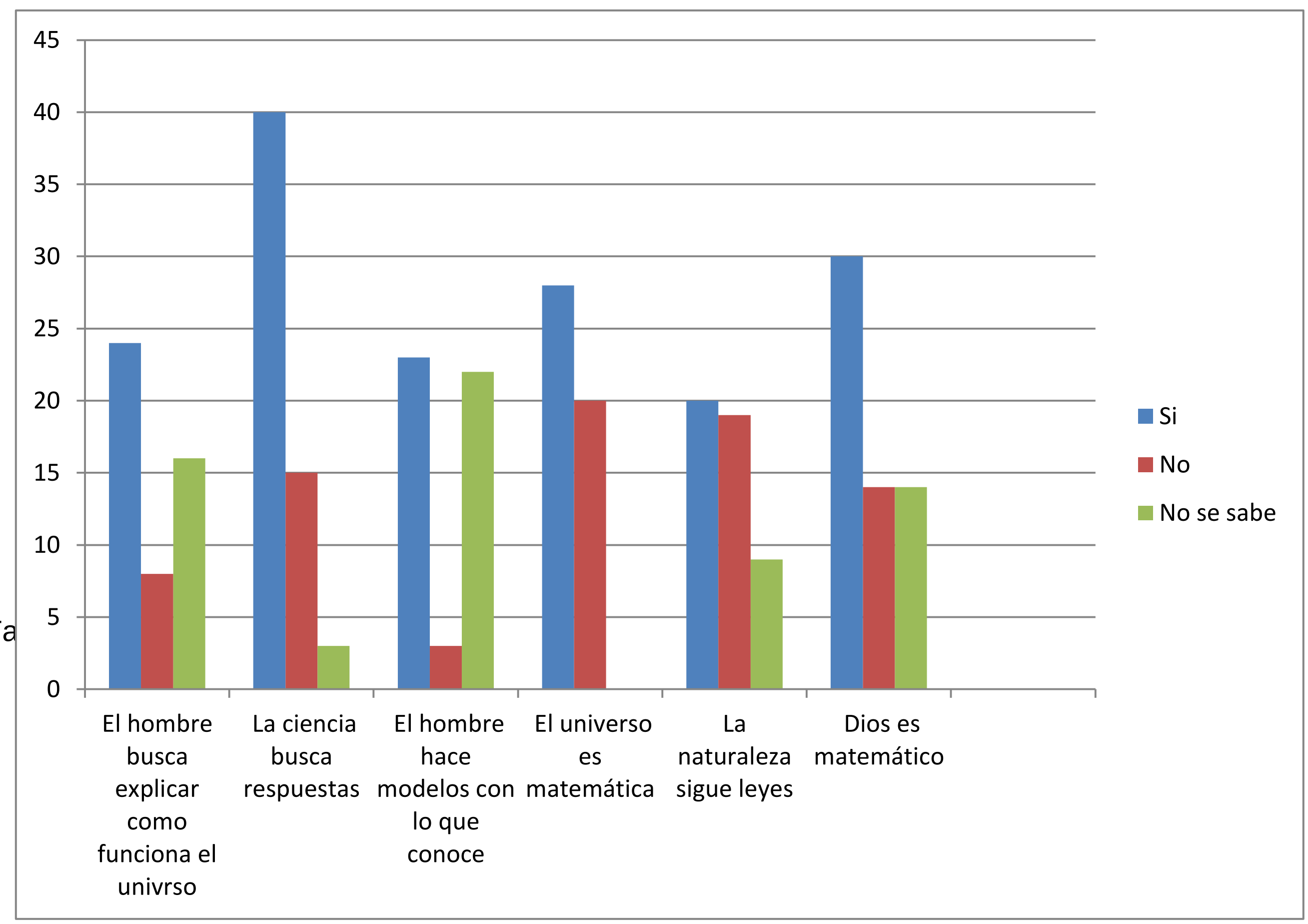


Tabla 4.3 aplicaciones cotidianas de las cónicas

Ta



Tratando de encontrar una relación entre la astronomía y la matemática, se formuló la pregunta sobre que pensaban los estudiantes con respecto a la astronomía y su función social, a lo que contestaron, que la matemática tiene su aplicación en todo lo que el hombre quiere responder sobre el origen del universo y su funcionamiento, haciendo modelos y aplicaciones de cosas que conoce, para generalizarlas mediante el uso de fórmulas y ecuaciones que describen de manera matemática los modelos

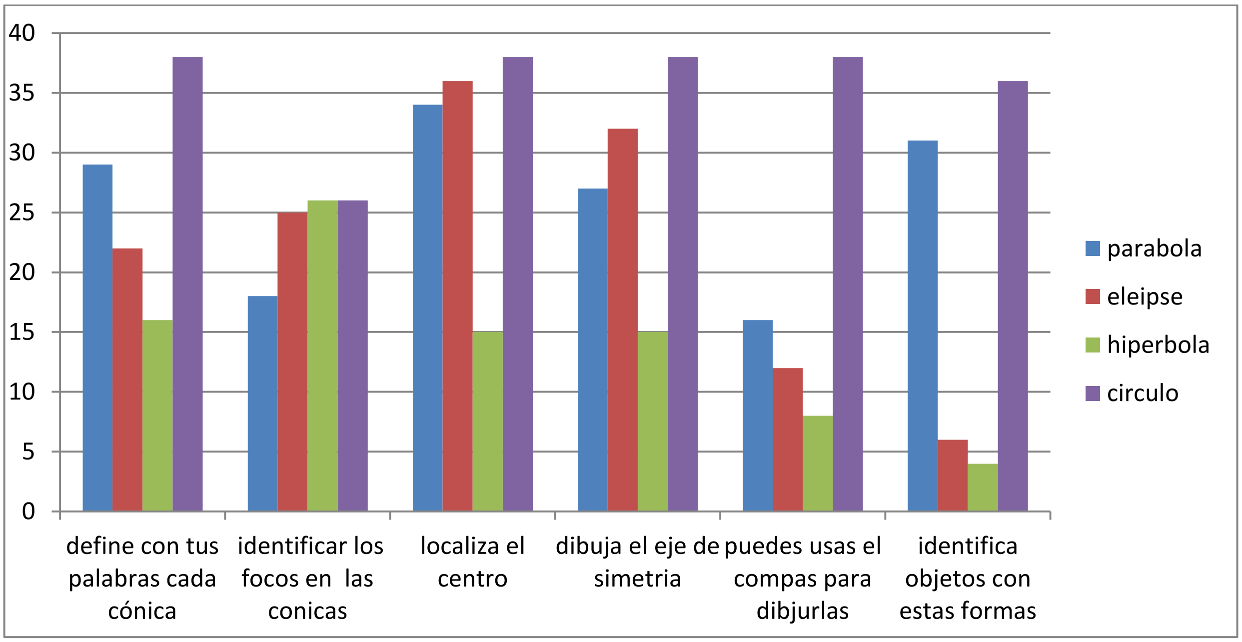


Tabla 4.5 Conocimiento particular de cada una de las cónicas

Del gráfico, se puede observar como hay una gran cantidad de estudiantes que pueden definir las cónicas con sus propias palabras, teniendo sentido y lógica matemática, de acuerdo a lo establecido en los programas curriculares, aunque muchas veces se nota la dificultad para expresar correctamente algo de lo que un estudiante está seguro.

De las cónicas más conocidas y que presentan mayor apropiación de conceptos básicos es la circunferencia, gráfica que los mismos estudiantes han catalogado como la ” elipse con dos centros”, pues sus experiencias cotidianas con elementos de esta forma, ayudan a tener conceptos asociados a dicha figura, como el movimiento circular, los rines de sus bicicletas, tapas de ollas, frisbi, monedas y en general objetos cotidianos tanto en sus casas como en el colegio.

La elipse es la segunda cónica, la cual es estudiada con mayor detenimiento en física y en química, donde se aplica en las leyes de Kepler y para las orbitales de los electrones alrededor del núcleo.

La parábola, se estudia el movimiento de proyectiles, es el descrito por un cohete cuando sale hacia un satélite hacia otro planeta. Por supuesto que la parábola es más conocida y aplicada en la vida cotidiana, puesto que de esta forma son todas las antenas que se observan en las azotes de los edificios, las repetidoras de celulares y el gran uso en la astronomía, dado que los telescopios son de esta forma y en especial el de Arecibo en Puerto rico, con una gran paraboloide de 305 m de diámetro. Por el contrario la hipérbola es la cónica de la que menos conocen, es menos familiar y no manifiestan conoces muchos objetos o representaciones de dicha cónica. En astronomía, referida a los cuerpos celestes, solo se conocen las trayectorias de los cometas como aplicaciones

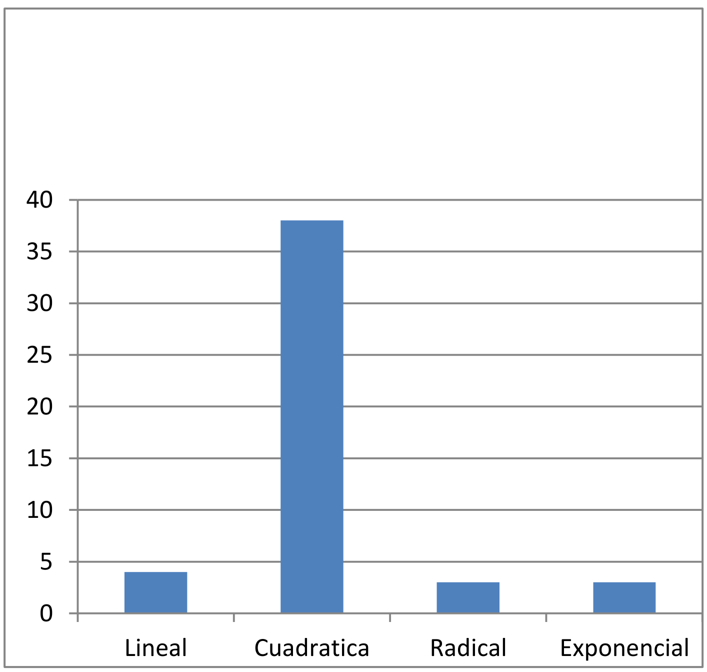


Tabla 4.6 naturaleza de la ecuación de una cónica

Ya adentrándose a la estructura de las ecuaciones de las cónicas es claro que la mayoría saben que sus ecuaciones son de tipo cuadrático dado que una ecuación o fórmula que tenga exponentes distintos de uno (1) no pueden ser líneas rectas y estas gráficas representan curvas en el buen sentido del lenguaje

Califica de 2 a 5 cada uno de los ítems presentados para tener idea de la valoración que se da a cada cónica, donde cada valor representa un atributo, siendo 2 el valor más bajo, o desfavorable y siendo 5 el máximo valor o valor más favorable a cada calificativo

Para la evaluación de la última actividad, se realizó una prueba con preguntas sobre el componente de las cónicas, puesto que ese era el objetivo inicial, poner las cónicas en manos de la astronomía, los resultados se pueden ver en las gráficas:

De la circunferencia

pregunta		2	3	4	5
1	La facilidad para la construcción de la gráfica es	4	2	2	40
2	La lógica de la deducción algebraica de sus ecuación es	1	6	2	39
3	Conoces aplicaciones de la circunferencia	2	6	20	20
4	los cuerpos celestes se aproximan a formas circulares	1	6	1	40
5	la importancia de la circunferencia es para el desarrollo humano	2	2	2	42

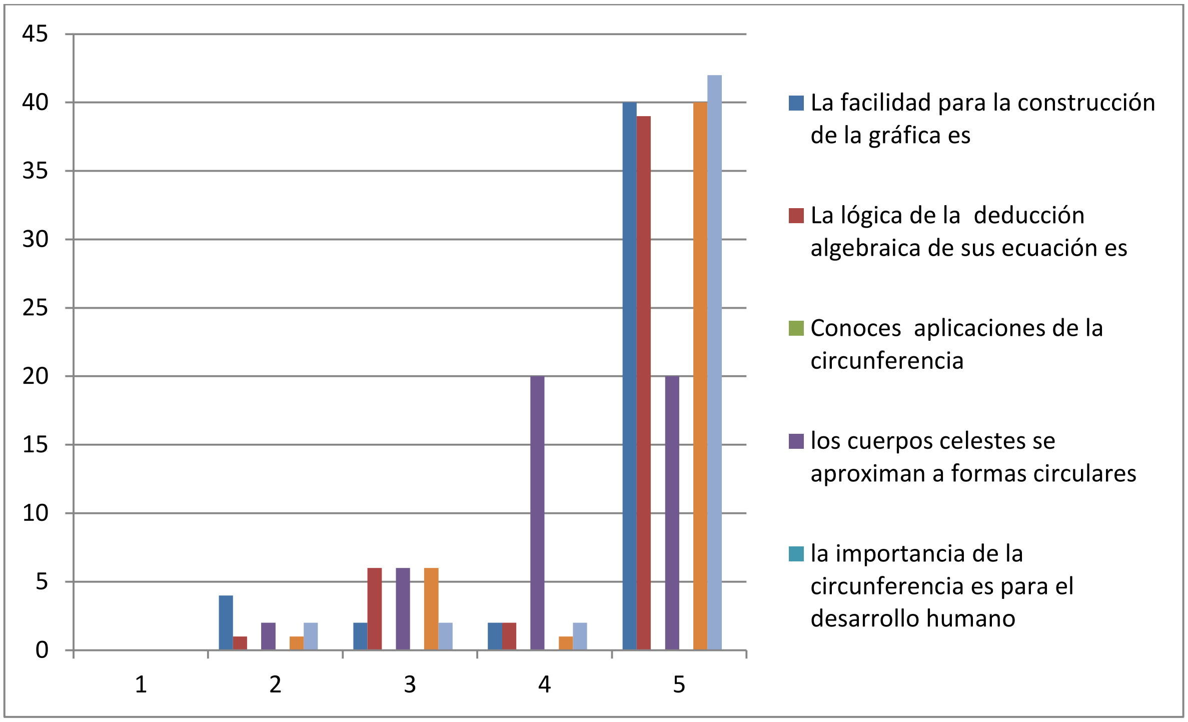


Tabla 4.7 calificación de la circunferencia

De la parábola

pregunta		2	3	4	5
6	La complejidad de la deducción algebraica de sus ecuación	23	16	1	10
7	Conoces aplicaciones de la parábola	4	6	2	36
8	Identificas claramente todos sus elementos	3	12	3	30
9	La facilidad de construcción de su gráfica es	28	12	7	1
10	La teoría se contrasta con la práctica	2	6	22	18
11	Identificas la trayectoria de una pelota e golf	4	6	21	17

	como una cónica				
12	Comprendes la utilidad de la ecuación de la parábola	1	4	13	30
13	Identificas la parábola con eventos astronómicos	2	15	14	17

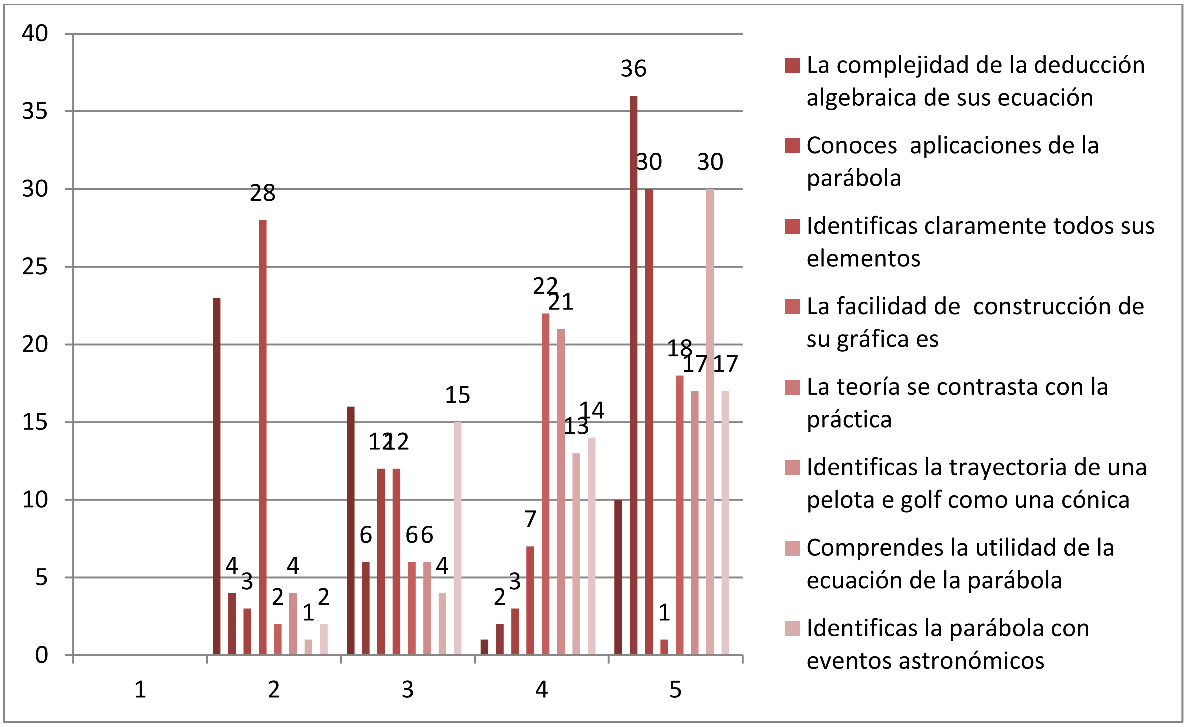


Tabla 4.7 calificación de la parábola

De la elipse se puede decir:

		2	3	4	5
14	La facilidad en la construcción de la gráfica es	2	18	2	26
15	Identificación de los diversos elementos	9	3	1	35

16	Análisis algebraico se facilita	5	9	4	30
17	Complejidad en construcción de la gráfica	5	1	2	40
18	La guía permite mayor comprensión del tema	4	6	2	36
19	La definición de elipse se ajusta o compara con lo que sucede en el sistema solar	1	4	29	14
20	Se logra una comprensión de su ecuación	4	6	19	1 9
21	Se comprende fácilmente la factorización para obtener su ecuación	40	1	7	40
22	Comprendes todas las propiedades de la elipse	0	1	6	41
23	La guía permite una comprensión completa del tema	4	3	1	40

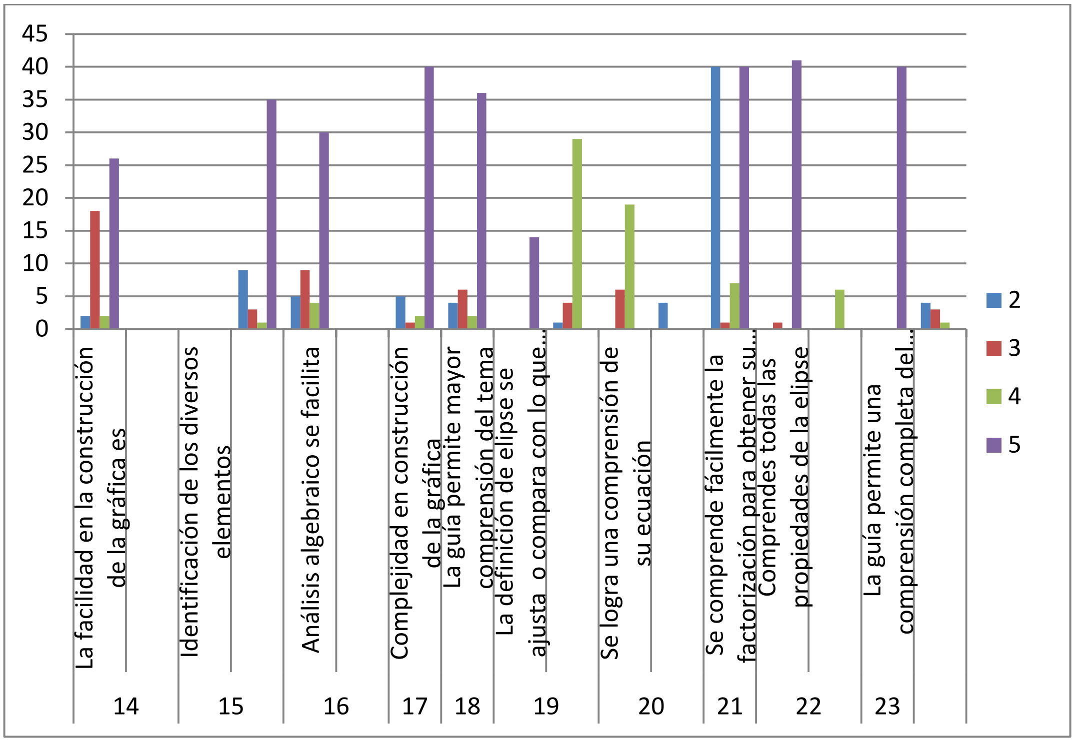


Tabla 4.8 calificación de la elipse

		2	3	4	5
14	La facilidad en la construcción de la gráfica es	2	18	2	26
15	Identificación de los diversos elementos	9	3	1	35
16	Análisis algebraico se facilita	5	9	4	30
17	Complejidad en construcción de la gráfica	5	1	2	40
18	La guía permite mayor comprensión del tema	4	6	2	36
19	La definición de elipse se ajusta o compara con lo que sucede en el sistema solar	1	4	29	14

20	Se logra una comprensión de su ecuación	4	6	19	1 9

21	Se comprende fácilmente la factorización para obtener su ecuación	40	1	7	40
22	Comprendes todas las propiedades de la elipse	0	1	6	41
23	La guía permite una comprensión completa del tema	4	3	1	40

Hipérbola

		2	3	4	5
24	La facilidad para la construcción de la hipérbola es	3	3	6	36
25	Se entienden las medidas tomadas como una explicación de sus propiedades	3	1	12	32
26	Es aplicable en la cotidianidad	7	9	18	16
27	La facilidad en deducción algebraica de su ecuación es	6	6	6	30
28	Puedes asociar su gráfica a eventos astronómicos	13	15	1	22
29	Puedes identificar todos los elementos que la constituyen	2	8	5	33
30	Conoces objetos que tengan su forma	30	2	10	6

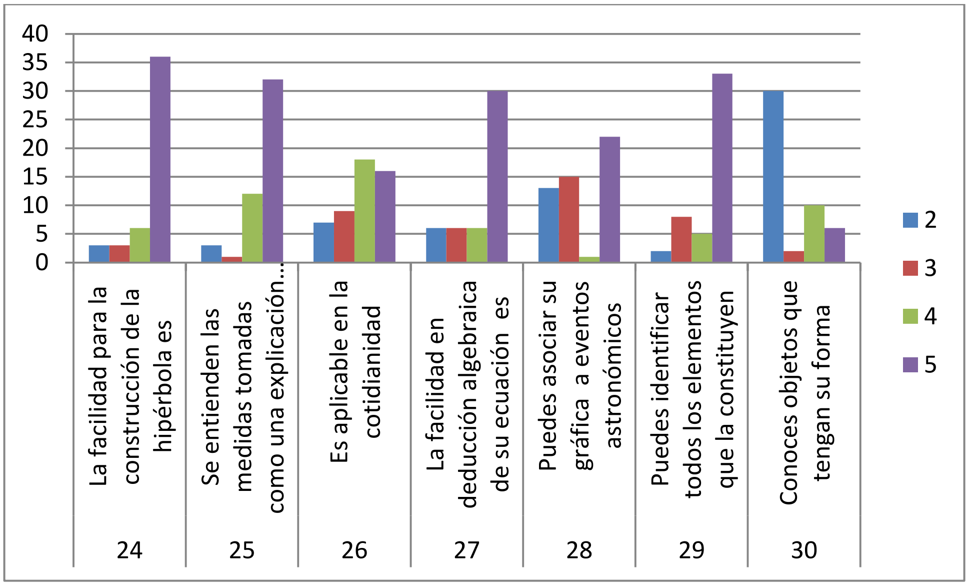


Tabla 4.8 calificación para la hipérbola

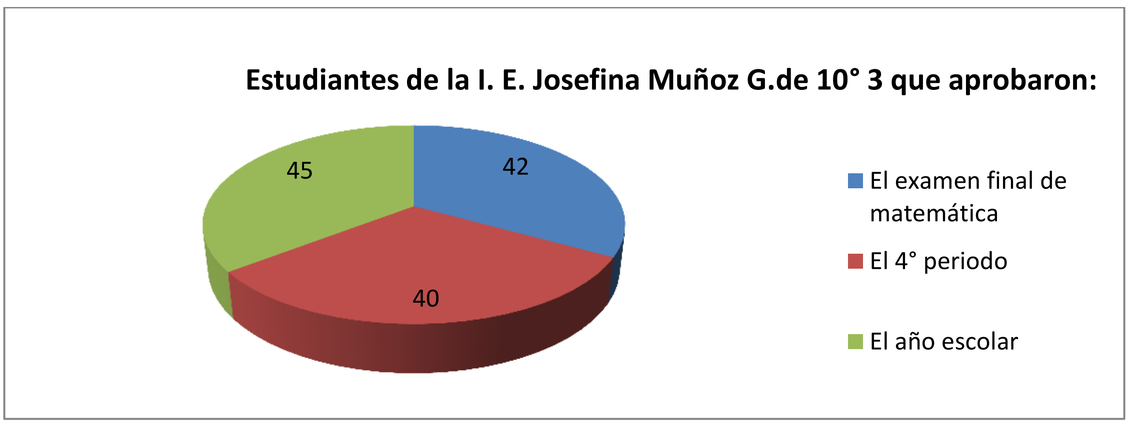


Tabla 4.9 despeño de los estudiantes de 10°3 en el último periodo.

La tabla anterior, muestra el desempeño de los estudiantes, y compara los resultados tanto del periodo en matemática, como el examen final que llevó a ganar el año finalmente.

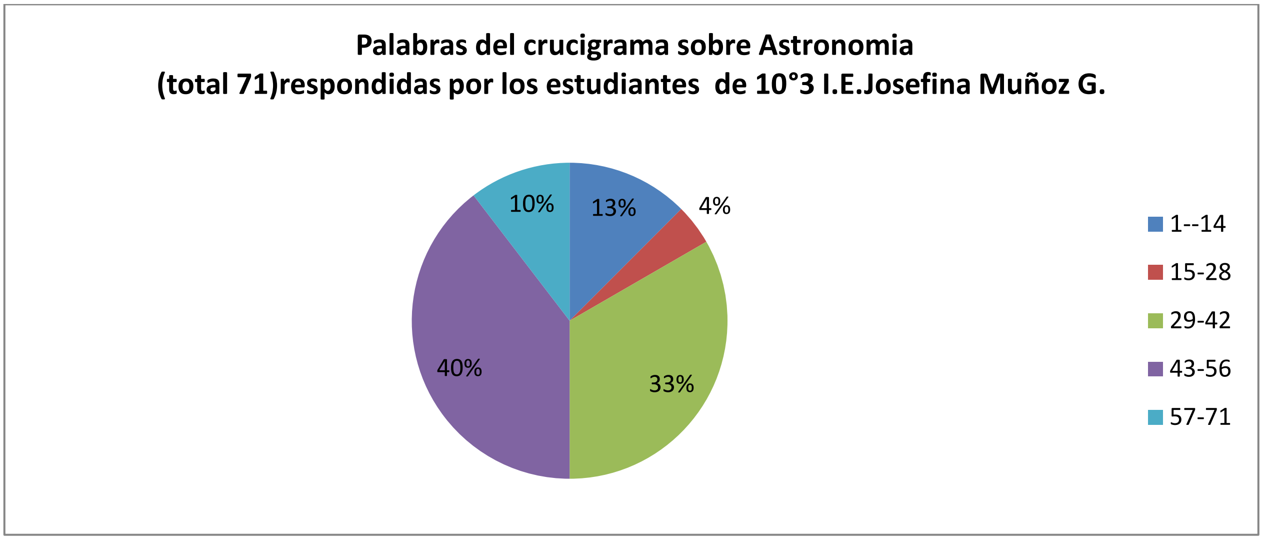


Tabla 4.10 resultados de la elaboración del crucigrama, como actividad mediadora entre la astronomía y las cónicas.

Se muestra como los estudiantes, pudieron resolver el crucigrama, ampliando de este modo su vocabulario e incorporando estos conceptos a las cónicas

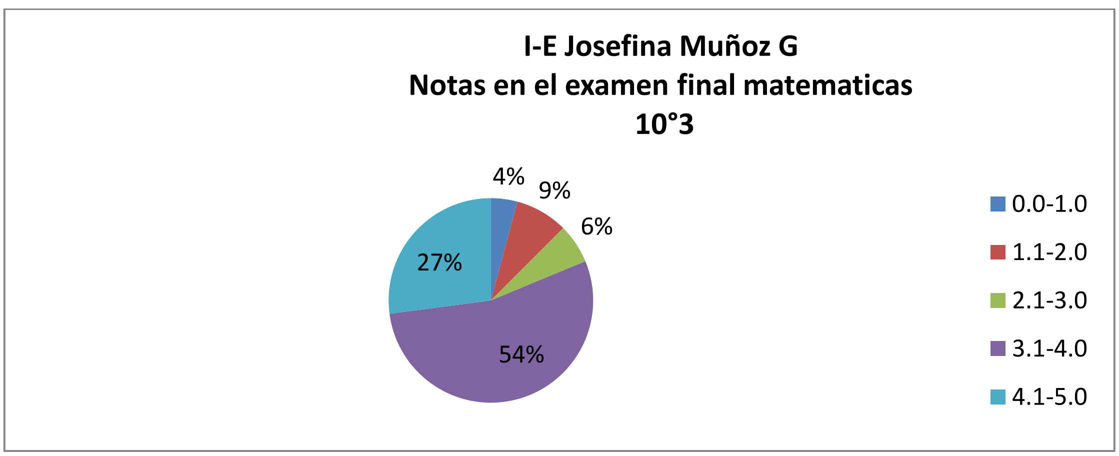


Tabla 4.11notas de la evaluación final

Se muestra como el rendimiento académico, evaluado en la parte final del periodo académico, a pesar de las múltiples actividades del fin de año, se obtuvieron buenos resultados, aun sabiendo que el examen estaba largo y resumía todos los tópicos de las cónicas.

Luego de estar listas las preguntas, los estudiantes realizan el crucigrama, donde se integral tema de las cónicas con las aplicaciones en astronomía.

Las actividades complementarias como los videos de astronomía, se ofrecieron dentro de las clases ordinarias y la visita al planetario municipal Jesús Emilio Ramírez, se programó un día lúdico para tal fin, al igual que la actividad para apreciar el equinoccio, y medir la sombra, donde se pudo ver con mayor ahínco el gusto por temas de astronomía.

5. Conclusiones y recomendaciones

“El universo es una esfera infinita cuyo centro está en todas partes y la circunferencia en ninguna”.

Blas Pascal.

5.1 De los estudiantes

- Cuando se factoriza completando cuadrados, se introducen en la ecuación, sus elementos
- Las ecuaciones de las cónicas son casi iguales, solo varia un signo
- El método lúdico de ver la astronomía, me ha permitido entender las cónicas y sus elementos más importantes
- La astronomía y las cónicas van de la mano
- Las cónicas se complementan con la astronomía
- Comprender los elementos de las cónicas ayuda a entender la factorización
- Todos los elementos de la astronomía en las cónicas, se construyen con la competición de cuadrados
- Si fuera posible encontraría un método para dibujar las cónicas pero sin matemática alguna.
- Aunque la construcción de las cónicas de manera lúdica, es necesario el uso de la matemática
- Me oriento por el uso del discriminante para saber a qué cónica nos referimos
- Conocer la elipse en astronomía, me permite entender las propiedades los semiejes y su ubicación
- Si uno sabe dibujar las cónicas, no veo la necesidad de deducir las ecuaciones
- Todas las cónicas tienen ecuaciones distintas, pero cuando las veo juntas, se me confunden
- Entender la astronomía y las cónicas, es como entender el libro de Baldor.
- Promover estrategias de este tipo en ciencias naturales con los chicos, para desarrollar el amor por la astronomía a más temprana edad.

- Implementar las sala de videos con software educativos, y faciliten la enseñanza de la astronomía y de los tópicos especiales de matemática.
- Las cónicas tienen tantas ecuaciones como estrellas en el cielo, por eso no las distingo
- Es más fácil entender el cielo que las ecuaciones de las cónicas
- Las cónicas se aplican a muchos artefactos tecnológicos, como telescopios
- El que entiende las trayectorias de los astros, ya está leyendo la historia del universo
- La trayectoria de los comenta es una hipérbola
- Las cónicas se pueden obtener en una botella llena de líquido
- Es motivante saber que hubo estudiosos que se dedicaron a tratar el tema
- Los griegos lo descubrieron todo, respecto a la matemática de las cónicas
- Ver una moneda de 5 dracmas, con la efigie de Sócrates, hace ver lo actual de la historia de las matemáticas en Grecia
- No tiene sentido hacer una figura sin saber que o quien la produce en el cielo
- Todas las cónicas tienen sentido, menos la hipérbola que es como una figura partida
- Las partículas que se mueven a nivel subatómico, describen alguna cónica
- Dibujar las cónicas me hace recordar sus aplicaciones
- Las cónicas son derivadas de la sublime circunferencia
- La elipse es una circunferencia con “dos centros” que coincides
- La elipse es como la silueta de un huevo, pero pareja
- Las cónicas se pueden construir con partes de una circunferencia
- La circunferencia le dio a astronomía el camino para descubrir las otras cónicas
- Construir las cónicas con regla, lleva a entender las trayectorias de los cuerpos celestes
- Construir las cónicas con sus elementos, me ayuda a entender la factorización
- Las cónicas se aplican no solo en la astronomía, sino en objetos y aparatos cotidianos como las bielas de los carros

- Los epiciclos y ecuantes usados por los griegos, los llevaron a descubrir las cónicas.

5.2 Del profesor

- El diseño de cada una de las actividades permitió enriquecer los conocimientos teóricos y prácticos sobre la enseñanza de las cónicas y la astronomía, en particular para los estudiantes de grado décimo 3, demostrando con cada actividad, que si se puede llevar la lúdica al aula de clase para mejores resultados académicos.

- Para lograr identificar y adecuar tópicos de Matemáticas en las cónicas y relacionarlos con la Astronomía de forma pertinente, para adelantar trabajos con estudiantes de grado décimo, fue necesario hacer un estudio cuidadoso sobre los Lineamientos Curriculares y Estándares básicos en matemáticas y en física. Además, hacer una revisión teórica sobre la enseñanza y aprendizaje de las cónicas y la astronomía, con el fin de proporcionar un mejor diseño y fundamento teórico a la propuesta de actividades presentada.

- La elaboración y adecuación de guías existentes para de este trabajo se constituyó en un espacio importante en la formación como docente, ya que aporto de manera significativa hacia un cambio de visión sobre la enseñanza y aprendizaje no sólo de las matemáticas, sino también de las ciencias exactas y naturales.

- La interacción de los estudiantes con los materiales y los conceptos aprehendidos, evidenció una alegría desbordante que se manifestaba en el gusto por trabajar en la clase de matemática, por averiguar el próximo tema a tratar en la clase.

- Para los estudiantes fue agradable trabajar el tema, por la interdisciplinariedad representada en la astronomía y por el uso de la matemática en ella.

- Se evidencia apatía hacia el tema, especialmente cuando era necesario el procedimiento algebraico para dos o tres estudiantes que manifestaban abiertamente que no les gusta la matemática, y las dificultades que se les ha presentado a nivel disciplinario, tienen origen en esta apatía, aunque finalmente lograron adaptarse y comprender el tema

- El deseo de los estudiantes por implementar esta metodología en otras materias, especialmente aquellas que se les ha tenido en el pedestal del olvido o desprecio por ser disciplinas más difíciles y en las que más bajos resultados presentan.

- Es importante resaltar, que en las clases del último periodo, ningún estudiante se salió del aula de clase o del salón de video, antes de ser la hora de salir, por el contrario, en varias ocasiones fue necesario recortar la clase siguiente o el descanso para poder terminar la actividad.

- Se puede inferir, que el gusto por la astronomía de los estudiantes, es grande, dado que actualmente, algunos se dedican de lleno a la observación de las fases de la luna, las estrellas y su ubicación, y en general eventos astronómicos como los eclipses recientes.

- Se pudo evidenciar aprendizaje no mecánico, al poder ver, medir e identificar cada una de los elementos que conforman las cónicas y saber su ubicación y significado geométrico de los puntos y líneas particulares en el momento de relacionarlos con la astronomía, especialmente en las leyes de Kepler.

- El trabajo colaborativo que se dio en los talleres para desarrollar tanto la parte práctica de construcción, como en la adquisición de conceptos teóricos, se evidenció siempre el deseo de hacer trabajo en equipo, para un mayor enriquecimiento de los conceptos que tienen que ver con la astronomía**.**

- La I.E se debería comprometer para implementar un observatorio para estudiar el cielo, de una manera sencilla al principio, pero que pueda tomar fuerza con el tiempo y hacer que los estudiantes tomen más cariño a las ciencias, para un mejor desempeño académico en el grado once, y tener mejores resultados en las pruebas ICFES y en la universidad.

- Promover estrategias de este tipo en ciencias naturales con los chicos, desde primaria para desarrollar el amor por la astronomía a más temprana edad.

- Implementar las sala de videos con software educativos, que faciliten la enseñanza de la astronomía y de los tópicos especiales de matemática.

- La realización de actividades extra clase, permitió en los estudiantes ver que el aula de clase puede ser cualquier sitio donde se aprende, se cuestiona sobre un tema o se contrastan los conceptos previos con observaciones.

- Algunos estudiantes participan motu-propio en actividades realizadas en el planetario y en el observatorio del Recinto de Quirama, en el Carmen de Viboral.

- Cuando se identifican los elementos de una cónica, se comprende que la excentricidad es quien domina la astronomía forma de la figura resultante, y se aplica ampliamente en

- Realizar algunas actividades complementarias a las trazadas en el programa de la materia, permitió acercar los conceptos aplicados directamente al tema referido en este trabajo.

- Ver la imagen de Aristóteles en una moneda, me hace pensar en ese momento grandioso de la historia, que nos dio la cara para empezar a ser sabios.

5.3 Recomendaciones

- Implementar una aula taller de matemática

- procurar un método lúdico para la enseñanza de las otras áreas, como este que arroja buenos resultados

- procurar un método lúdico para la enseñanza de las otras áreas, como este que arroja buenos resultados

- organizar las clases de matemática y física con talleres para tener la oportunidad de aprender haciendo

5.4 Inquietudes

- ¿El sol está en uno de los focos de la elipse de los planetas, pero en el otro que hay?
- ¿La circunferencia es la figura que dio origen a las cónicas?
- Si Kepler contradijo la teoría del sistema solar, porque no lo quemaron?
- ¿Sería posible construir las cónicas sin el uso del álgebra?
- ¿Por qué la tierra solo tiene una luna?

- ¿Si las cónicas no se hubiesen descubierto, Kepler habría trabajado con la circunferencia y habría acomodado sus órbitas?
- ¿Cuál es la razón para que el átomo sea un sistema solara en miniatura?

BIBLIOGRAFIA

APÓSTOL, T. M. Calculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. En T. M. Apóstol, *Calculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal.* España: Reverté, 2001. p. 545.

GIL, Quílez, M. José y Martínez Peña, M. Begoña. El modelo sol-tierra-luna en el lenguaje iconográfico de estudiantes de magisterio. Enseñanza de las ciencias, España: Universidad de Zaragoza, 2005. pp. 153–166.

LEHMANN, C. H. *GEOMETRIA ANALITICA.* México: Limusa, 1989.

MEN.Lin.C. *Lineamientos curriculares de Matemáticas.* 1998. Recuperado de: Lineamientos curriculares de Matemáticas: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional. Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: Magisterio, 2000.

MOREIRA, Marco. La teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel. Porto Alegre: Universidad Porto Alegre. 1983. p.31.

OBANDO, Bernardo. Alternativas de enseñanza de las matemáticas, Universidad Católica de Manizales. 2010.

PALACINO RODRÍGUEZ, F. Competencias comunicativas, aprendizaje y enseñanza de las Ciencias Naturales: un enfoque lúdico. En: Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias. 2007, Vol. 6, nº 2, p.p. 275-298.

PALOMINO, J.L. (2008) Proyecto Atlántida. Las competencias básicas. Recuperado de: http://www.entretizas.org/proyecto-atlantida-las

SAGAN, Carl 1984 viajes a través del espacio COSMOS CAP VIII. Bogotá: Planeta, 1996.

TIGNANELLI, Horacio. Astronomía en liliput. Diapositivas del curso de Astronomía.Buenos Aires: Culturé, 2006. p.17.

REFERENCIAS VIRTUALES

http://www.youtube.com/watch?v=HWJHHcpziN8 Solsticio de verano
http://www.youtube.com/watch?v=CduKL-_f_S0&feature=related Movimiento aparente del Sol
http://www.youtube.com/watch?v=0T78mU-m_K0&feature=related

http://www.youtube.com/watch?v=a6moqEAzJbw movimiento parabólico de un chorro de agua parque explora

http://www.youtube.com/watch?v=RLPVCJjTNgk

Anexo A: primer test para estudiantes de 10° 3

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

MAESTRIA EN ENSEÑANZADE LAS CIENCIAS EXACTAS

Y NATURALES

ACTIVIDAD 1, TEST PARA ESTUDIANTES DE 10° I.E JOSFINA MUÑOZ GONZALEZ

NOMBRE____

¿Conoces sobre el tema de las cónicas? Si___No___

¿Conoces de donde proviene el nombre de cónicas para ciertos lugares geométricos? Sí___ No___

Identificas a simple vista las figuras de las cónicas Si__No__

¿Cuántas cónicas puedes identificar por sus dibujos? 0__ 1__2__3__4__

Nombra las cónicas que conoces____

¿Puedes dibujar las cónicas? Si___No___

Las ecuaciones que representan las cónicas son : Lineales__Cuadráticas____radicales___exponenciales____

Escribe los elementos de una Cónica____

¿Conoces la ecuación Canónica o general, delas cónicas? Si___No__

El lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de una recta fija y un punto fijo llamado foco, se denomina: Hipérbola ___ Parábola____ Elipse___ Circunferencia___

¿Cuáles aplicaciones cotidianas conoces de las Cónicas?____

¿Cual es la razón para que las culturas cultiven la astronomía? ____
____

¿Puedes identificar algunas de estas cónicas en el cielo? Si__No__Cuales_____________________________

____
____

¿Te parece interesante y ameno el estudio de la astronomía? Si__No ___ Porqué______________________

____
____

Cual relación conoces entre la astronomía y las cónicas: Las trayectorias ___las ecuaciones____ambas____Ninguna

Sabías que Kepler usó circunferencias antes de elipses para sus cálculos astronómicos? Si___No___

Cuáles son las trayectorias de las naves espaciales

Cuál es la forma geométrica con se muestra un agujero negro

Puedes graficar la forma de la Galaxia Vía láctea

Dibuja los anillos que tiene Saturno

Anexo B

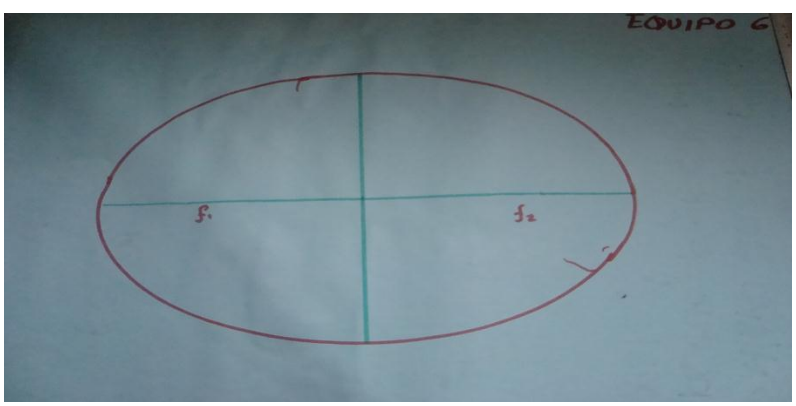
MAESTRIA EN ENSEÑANZADE LAS CIENCIAS EXACTAS

ACTIVIDAD 2 TALLER DE RECONOCIMIENTO Y CONSTRUCCIÓN DE LAS CÓNICAS SIN IDENTIFICAR SUS ELEMENTOS PRINCIPALES

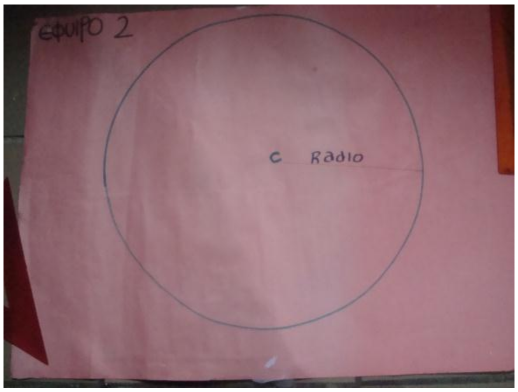
NOMBRE____
____

El objetivo de esta actividad, es familiarizar al estudiante con las construcciones de las cónicas de una manera amena, como si estuviéramos jugando, porque surgen muchas inquietudes, sobre todo cuando las relacionan con la astronomía y deducen de manera intuitiva las relaciones que se tienen entre los elementos de las cónicas y sus aplicaciones respectivas.

Fue tan agradable, que profesores del área, estuvieron presentes en la elaboración de este taller, y compartieron con nosotros, las dudas e inquietudes, sobre todo los profesores de 7° y 8° de la misma institución, así como estudiantes del grado once.

ELIPSE 

Se fijan dos puntos (que pueden ser dos alfileres en un cartón) F y F´. (La distancia entre F y F´ la llamaremos 2c) Se toma un hilo de longitud fija 2a y se unen los extremos con los alfileres el hilo tenso con un lápiz se puede dibujar una curva deslizando un lápiz en el hilo sobre el cartón. La resultante es una curva cerrada llamada elipse.

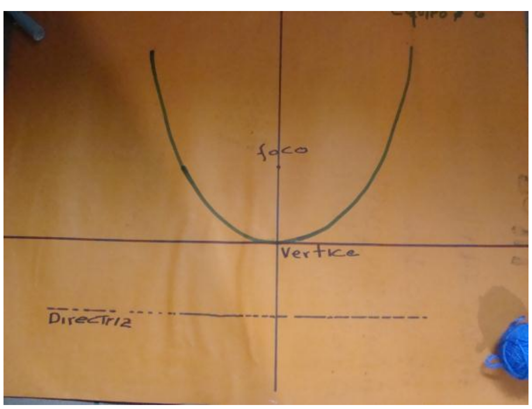


CIRCUNFERENCIA

La circunferencia es un caso particular de una elipse, donde los dos focos coinciden. En la circunferencia su excentricidad es la unidad

Se toma una cuerda, se fija con un alfiler en un extremo de una cuerda de longitud L, luego en el otro extremo, se coloca un lápiz y se dibuja la circunferencia haciendo girar el lápiz. Esta longitud es el radio de dicha circunferencia, este proceso también se puede reemplazar por un compás, para obtener mayor precisión

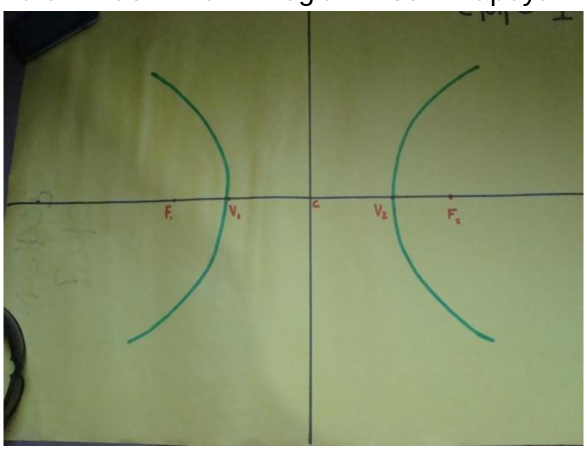
PARABOLA



Una parábola es el conjunto de todos los puntos P(x, y) en un plano que están a una misma distancia de un punto fijo, el foco, y una recta fija, la directriz. Para dibujar una parábola necesitamos una escuadra y una cuerda que tenga la misma longitud que uno de sus catetos. Fijamos un punto F que llamaremos foco y una recta d que llamaremos directriz. Un extremo de la cuerda lo fijamos en el vértice correspondiente al ángulo no recto del cateto cuya longitud coincide con la de la cuerda y el otro extremo en el foco F. El otro cateto de la escuadra se apoya en una recta fija d. Con un lapicero tensamos la cuerda manteniéndolo pegado al cateto al mismo tiempo deslizamos la escuadra a lo largo de la recta fija, de esta forma se dibuja la parábola.

HIPERBOLA

Una hipérbola es el conjunto de puntos P(x, y) en un plano tal que la diferencia de las distancias desde Pa puntos fijos F1 y F2, los focos, es constante. Para su construcción, se fijan dos puntos F y F´ (que llamaremos Focos) y se elige una regla de longitud L, mayor que la distancia FF´.Se Toma un hilo de longitud H, tal que L-H se menor que FF´, se fija un extremo del hilo en el extremo T de la regla, y el otro extremo del hilo se fija se une a uno de los focos por ejemplo F. El extremo libre de la regla se apoya sobre el otro foco F´.

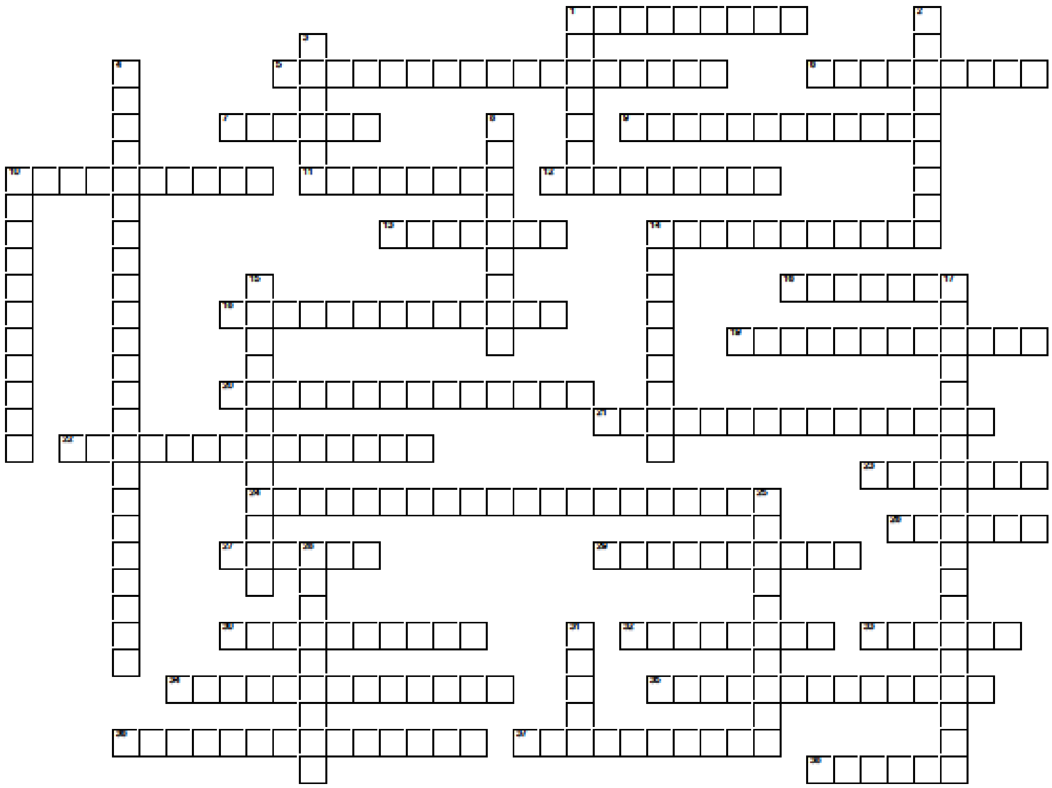


Se toma un lápiz P y tenso el hilo llevamos el lápiz junto a la regla. Deslizamos el lápiz sobre la regla manteniendo el hilo tenso, al desplazar el lápiz sobre la regla esta girara. De esta forma se traza una rama de la hipérbola. Para trazar la otra rama se apoya la regla en el otro foco y se hace lo mismo.

Anexo C

CRUCI ASTRONOMIA

NOMBRE DEL ESTUDIANTE________________________________ GRADO ___



Horizontales

1. Luna de Júpiter
5. la Tierra sigue una elipse, pero esta elipse cambia poco a poco. A esta órbita se la denomina órbita esculladora.
6. momentos del año en los que el Sol alcanza su mayor o menor altura aparente en el cielo
7. Orbita de los planetas en sistema solar
9. El intervalo entre dos sucesivos pasajes de la Luna a través del mismo nodo de su órbita
10. son los semicírculos máximos del geoide terrestre que pasan por los polos
11. Una elipse tiene eje menor y eje
12. es la línea que aparentemente separa el cielo y la tierra
13. Teórico de las secciones cónicas
14. es cada una de las veinticuatro áreas en que se divide la Tierra

Verticales

1. Punto interior de una cónica
2. Se emplea para describir el destello luminoso que acompaña la caída de materia del sistema solar sobre la atmósfera terrestre.
3. Orbita en la que Kepler trazó la trayectoria de los planetas
4. Sirven para ubicar un objeto celeste
8. Recta externa a una parábola, con distancia constante
10. El intervalo entre dos Lunas Nuevas sucesivas.
14. Trayectoria de algunos cometas
15. del lexicógrafo Griego Suidas, con el ciclo de eclipses del mismo período. El nombre que Suidas daba al ciclo era el Saros.
17. Relacionada con la longitud de onda de los diferentes colores

Horizontales

16. Instrumento de orientación geográfica

18. es el hecho de que 19 años tropicales contienen 6.939,60 días

19. 19 de octubre de 1910 – 21 de agosto de 1995) fue un físico, astrofísico y matemático Indio.

20. Cono formado por la sombra que produce la Tierra o la luna en un eclipse

21. Calendario basado en el movimiento del sol

22. Elipse de excentricidad 1

23. es un hecho en el que la luz procedente de un Cuerpo celeste es bloqueada por otro,

24. Cosmogonía kogi

26. Figura resultante de cortar un cono en diferentes ángulos

27. Medio para ir a la luna

29. Utilizó espejos parabólicos en la guerra

30. Se denomina equinoccio al momento del año en que el Sol está

32. Estudioso de las cónicas

33. Es el ángulo en grados, medido hacia el este desde el norte o hacia el oeste desde el sur

34. es un parámetro que determina el grado de desviación de una sección cónica con respecto a una circunferencia.

35. Calculó el perímetro de la tierra

36. Línea que divide en dos hemisferios la bóveda celeste

37. Ciencia que estudia los astros

38. cuerpos celestes constituidos por hielo y rocas que orbitan en el Sol

Verticales

25. Biblioteca donde trabajo Ptolomeo

28. circunferencia máxima de la esfera celeste descrita por el movimiento aparente del Sol en el curso del año, que corta el Ecuador en ángulo de 23 grados

31. Punto del firmamento que corresponde verticalmente al lugar de la Tierra donde está situado el observador.

Horizontales

2. Recta externa a una parábola, con distancia constante

Verticales

1. El intervalo entre dos sucesivos pasajes de la Luna a través del mismo nodo de su órbita
3. Sirven para ubicar un objeto celeste

Anexo D

Guías para construir las cónicas con compas y regla

Proyecto	Maestría en enseñanza de la ciencias exactas y naturales
Materiales	Escuadra, regla, lápiz, papel, marcadores, lana, chinchetas
Elaboró:	Carlos J. Echavarría H. Mayo de 2000 GRUPO ÁBACO
Adaptación	Jesús Alberto Murillo Silva, noviembre 2012
Número de paginas	7
Bibliografía:	*Dibujo Geométrico y de Proyección*. BronislaoYurksas, Editorial Panamericana

Debes seguir atentamente las instrucciones que a continuación se te indican:

Actividad I construcción de una elipse

Traza una línea (de la longitud que desees) que pase por el centro de la hoja.

Sobre el extremo izquierdo de la línea que acabas de trazar ubica un punto D y traza la perpendicular en D, luego a 3 cm de D y a la derecha ubica el punto V, a partir de este punto y desplazándote a 3 cm a la derecha ubica el punto F.

Ubica un punto A a la derecha de V y por él traza la perpendicular.

Toma el compás con radio AD y con centro en F corta la línea perpendicular en dos puntos y márcalos.

Ubica un punto cualquiera B entre V y F, traza la perpendicular que pasa por él.

Toma el compás con radio BD y con centro en F, corta la línea perpendicular en dos puntos y márcalos.

Repite los pasos 5 y 6 mínimo dos veces más.

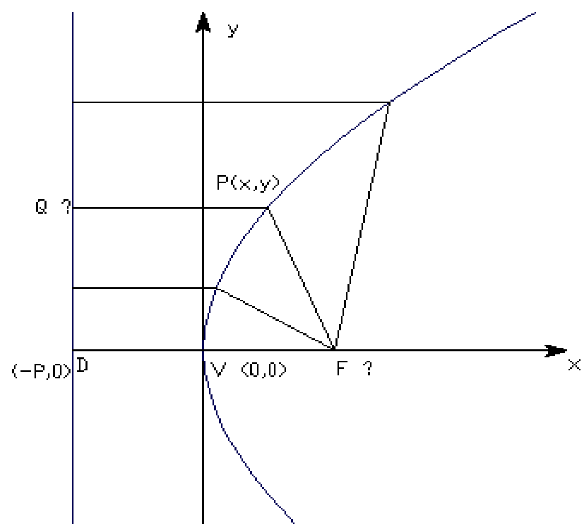
¿Qué curva crees que obtendrías si unieras estos puntos? Asígnale un nombre: ________________________

Une F con cada uno de los puntos de corte de las perpendiculares. A partir de estos puntos traza cada una de las perpendiculares a la recta perpendicular que pasa por D. Mira cada una de las distancias y anota tus mediciones

____

¿Crees que las otras distancias medidas desde F hasta los puntos de corte de las perpendiculares y desde estos puntos de corte hasta la perpendicular que pasa por D tienen el mismo valor? ____________________

Si estas distancias tienen la misma medida, describe la propiedad que cumplen los



puntos de corte de las perpendiculares:

____

Actividad II deducción de la ecuación de la elipse

Escribe las coordenadas cartesianas correspondientes a los puntos F y Q.

Completa la siguiente deducción:

d(P,F) = d(P,Q) , d significa distancia por definición de parábola.

$\sqrt{(P-X)^2+(Y-0)^2} = \sqrt{(X+P)^2+(Y-Y)^2}$ por definición de distancia entre dos puntos.

_____________ = ______________ por propiedad fundamental de los radicales.

4. $P^2 - 2PX + X^2 + Y^2 = X^2 +$ ____ + ____ por el desarrollo del Cuadrado de un binomio.

5. $P^2 - 2PX + X^2 + Y^2 - X^2 - P^2 = 2PX$ _____________________

6. $-2PX + Y^2 = 2PX$ por reducción de términos Semejantes.

7. $Y^2 =$ ______ por transposición de Términos.

La ecuación general de la parábola es entonces: ______________________

Actividad III, construcción de la elipse

Debes seguir atentamente las instrucciones que a continuación se te indican:

1. Traza dos segmentos perpendiculares que se corten en su punto medio C.
2. Sobre los extremo del segmento horizontal marca los puntos A y A'.
3. Igual que en el paso anterior, pero, esta vez sobre el segmento vertical y con una distancia menor que la que existe entre A y A', marca los puntos B y B'.
4. Toma el compás con centro en B y con radio AC traza dos arcos, que corten el segmento horizontal en F_1 y F_2.
5. Toma un punto D que se localice entre F_1 y F_2, con radio AD y centro en F_2 traza dos arcos uno a cada lado del segmento horizontal, luego con el mismo radio AD pero con centro en F_1, traza nuevamente dos arcos, uno a cada lado del segmento horizontal.
6. Toma ahora el radio DA' y con centro en F_2 traza dos arcos, éstos deben cortar uno de los pares de arcos trazados en 5, nómbralos T y L. Con el mismo radio DA' pero esta vez con centro en F_1 traza nuevamente dos arcos, estos deben cortar el otro par de arcos trazados en 5. Nómbralos.

7. Sigue tomando puntos (mínimo tres) sucesivamente entre F_1 y F_2. para cada uno repite los pasos seguidos en 5 y 6.

¿Si unieras los puntos que acabas de hallar qué curva obtendrías? Asígnale un nombre.

____

____

Desde F_1 y F_2 traza líneas que unan los puntos de la curva. Mide cada una de estas distancias, anota tus mediciones.

Para el efecto de este taller d significa distancia

$d(F_1,T)$=_______,$d(T,F_2)$=________,$d(F_1,B)$=________,$d(B,F_2)$=_________

$D(F_1,T)+d(T,F_2)$=__________

$D(F_1,B)+d(B,F_2)$=__________

¿Qué puedes observar en las distancias que acabas de sumar?

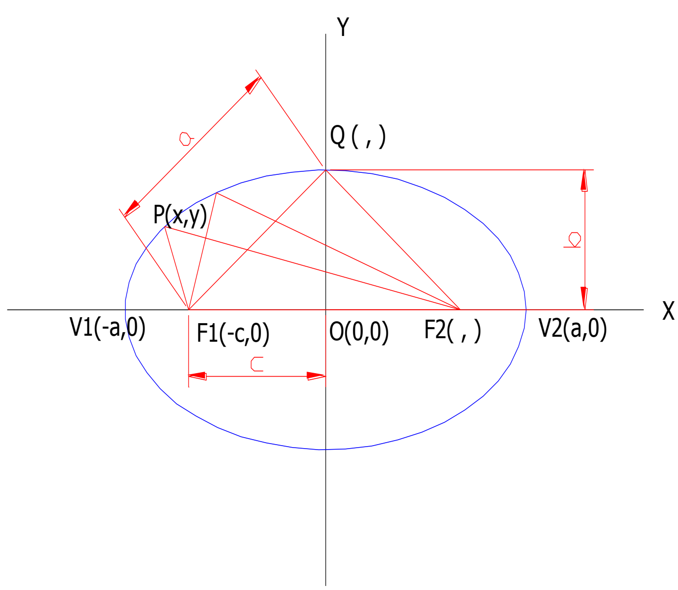
____

Mide la distancia que hay entre A y A', ¿cómo es esta respecto a las otras distancias?

____

____

Actividad IV



Deducción de la ecuación de una elipse

Escribe las coordenadas cartesianas correspondientes a los puntos F_2 y Q.

Completa la siguiente deducción:

DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA ELIPSE	JUSTIFICACIÓN
1. $d(P,F_1)+d(P,F_2)= 2a$	1. Por definición de elipse.
2. $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$	2. Por definición de distancia entre dos puntos.
3. $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=$ ____________________________	3. Trasposición de términos.
4. $(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$	4. ¿Por qué?
5. $(x+c)^2-4a^2-(x-c)^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$	5. Por reducción de términos semejantes.
6. x^2+ ___ $+c^2-4a^2-$ ____________ $=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$	6. Por el desarrollo del cuadrado de un binomio.
7. $4xc-4a^2=-4a$ ____________	7. ¿Por qué?
8. $(xc-a^2)^2=a^2\left[(x-c)^2+y^2\right]$	8. Por factor común y por la propiedad fundamental de los radicales.
9. $x^2c^2-2a^2cx+a^4=$ ____ $-$ _____ $+$ ____ $+$ _____	9. ¿Por qué?
10. $a^4-a^2c^2=a^2x^2-x^2c^2+a^2y^2$	10. Por reducción de términos semejantes.
11. $a^2(a^2-c^2)=(a^2-c^2)x^2+a^2y^2$	11. ¿Por qué?
12. $1=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}$	12. Por trasposición de términos.
13. $1=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$	13. Porque $a^2-c^2=b^2$ (ver elipse) teorema de Pitágoras.

Luego la ecuación general de la elipse es: ________________________.

Debes seguir atentamente las instrucciones que a continuación se te indican:

Actividad V

1. Traza un segmento de recta l y sobre ella dos puntos F y F' separados 10Cm.
2. Con el compás traza la perpendicular que pase por el punto medio. Éste punto será el origen O.
3. Separados unos tres centímetros del origen y sobre l marca los puntos V y V'.
4. Marca un punto S sobre el segmento de recta l y fuera del segmento FF'.
5. Con un compás con radio VS y haciendo centro en F, traza un arco a cada lado de la recta horizontal, ahora con centro en F' marca nuevamente dos arcos.
6. Toma ahora con el compás un radio V'S y haciendo centro en F traza dos arcos, estos deben cortar uno de los pares de arcos ya trazados, márcalos como M y N. Luego con centro en F' traza nuevamente dos arcos, nombra estos puntos de corte de los arcos.
7. Toma por lo menos cinco puntos más fuera del segmento y repite los pasos 5 y 6.

¿Qué curva crees que obtendrías si unieras estos puntos?. Únelos. Asígnale un nombre____.

Une F con cada uno de los puntos de su curva, luego une F' con estos mismos puntos. Mide las distancias de los segmentos que acabas de trazar, anota tus mediciones

Distancia de F al punto		Distancia de F al punto	
F_		F'_	
F_		F'_	
F_		F'_	
F_		F'_	
F_		F'_	

¿Cómo son estas distancias?_______________________________________.

Intenta observar lo que pasa con las medidas. ¿Cómo son las de la columna derecha con respecto a las de la columna izquierda?_____________________

Mide ahora la distancia entre V y V' ¿cómo es con respecto a las anteriores?

____.

Observa bien los valores de las distancias consignadas en la tabla de datos, resta una distancia de la otra. Realiza el mismo proceso para todos los valores de la tabla, compáralos con la distancia VV'.

¿qué puedes observar?

____

Ya sabes que V y V' están a la misma distancia de O. ¿Por qué?____________

Si denominas como a la distancia entre OV' ¿cuál es la distancia VV'?________

Elabora una definición para la propiedad que cumplen cada uno de los puntos de la hipérbola. Toma en particular un punto P sobre la hipérbola. Ten en cuenta los pasos que seguiste en la construcción con regla y compás. Por ejemplo mira lo que sucede cuando tomas el radio VS y luego el radio V'S, mide las distancias y observa lo que obtienes.

Describe las propiedades que cumplen estos puntos

¿Qué ocurrirá si realizo el mismo procedimiento sobre la otra rama de la hipérbola?____

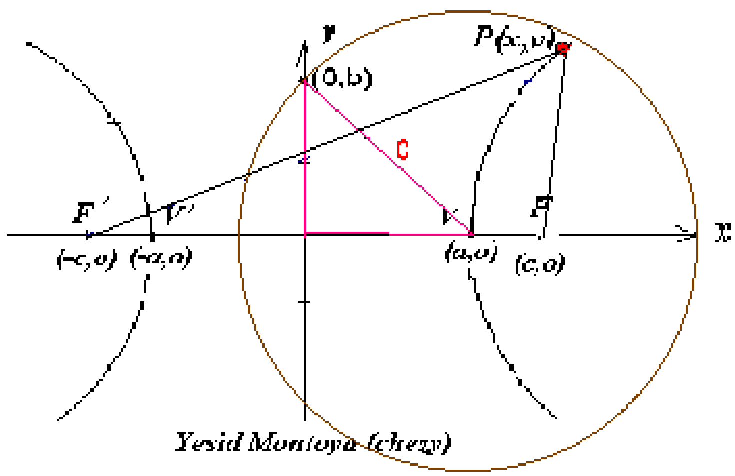
¿Qué ocurre si sumas las distancias FP + F’P?

____

¿Cómo es comparada con VV’?____

Argumenta ¿por qué la propiedad de lugar geométrico de los puntos de la hipérbola se cumple como FP – F’P = 2 a y no como F’P +FP = 2 a?

____
____
____



Actividad V IDEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA

	JUSTIFICACIÓN
1. d(F’,P)-d(F,P)= 2a	1. Por definición de hipérbola.
2. $\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}-$ ________________ $=2a$	2. Por definición de distancia entre dos puntos.
3. $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=$ ____________________________	3. Trasposición de términos.
4. $(x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$	4. ¿Por qué?

5. $(x+c)^2 - 4a^2 - (x-c)^2 = 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$	5. Por reducción de términos semejantes.
6. $x^2 + \_\_ + c^2 - 4a^2 - \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$	6. Por el desarrollo del cuadrado de un binomio.
7. $4xc - 4a^2 = 4a\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$	7. ¿Por qué?
8. $(xc - a^2)^2 = a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right]$	8. Por factor común y por la propiedad fundamental de los radicales.
9. $x^2c^2 - 2a^2cx + a^4 = \_\_\_\_ - \_\_\_\_ + \_\_\_\_ + \_\_\_\_$	9. ¿Por qué?
10. $a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2$	10. Por reducción de términos semejantes.
11. $a^2(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2$	11. ¿Por qué?
12. $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2}$	12. Por trasposición de términos.
13. $1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$	13. Porque $a^2 - c^2 = -b^2$ (ver hipérbola) teorema de Pitágoras.

Luego la ecuación general de la hipérbola es: _________________________.

ANEXO E EVALUACION FINAL DE PERIODO

MAESTRIA EN ENSEÑANZADE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

TEST FINAL PARA ESTUDIANTES DE 10° I.E JOSFINA MUÑOZ GONZALEZ

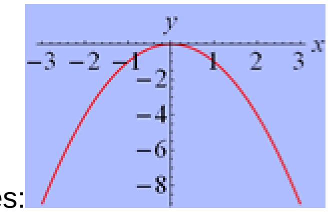
NOMBRE____

1. Hallar las coordenadas del centro, de los focos y de los vértices de la **hipérbola** $3y^2 - 2x^2 - 4y - 12x - 4 = 0$. Dar las ecuaciones de sus asíntotas y graficar.
2. **Una elipse** tiene los focos en (0, 1) y (2, 5) y un semieje focal de longitud $2\sqrt{5}$.
   a) Hallar su excentricidad y las coordenadas del centro.
   b) Dar la ecuación de su eje focal y graficar.
   c) Hallar su ecuación.
3. Hallar las coordenadas del centro, de los focos y de los vértices de la **hipérbola** $3y^2 - 2x^2 - 4y - 12x - 4 = 0$. Dar las ecuaciones de sus asíntotas y graficar.
4. Una elipse tiene los focos en (0, 1) y (2, 5) y un semieje focal de longitud $2\sqrt{5}$.
   a) Hallar su excentricidad y las coordenadas del centro.
   b) Dar la ecuación de su eje focal y graficar.
   c) Hallar su ecuación.

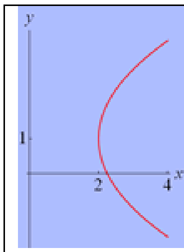
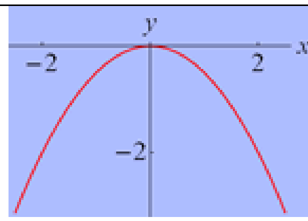
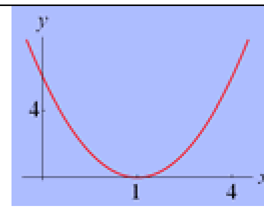
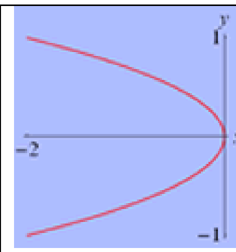
5. Indicar la ecuación de una **circunferencia** centrada en el punto C(1,0) y de radio R=2

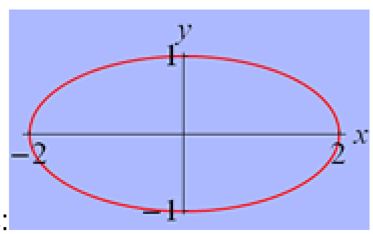
6. El lugar geométrico de todos los punto del plano OXY que equidistan de una recta fija (directriz) y un punto fijo (foco) que no pertenece al a recta, es una ...

a Elipse b Hipérbola c Parábola d Circunferencia

7. Indicar la ecuación de la parábola cuya gráfica es: 

8. Indicar cuál es la gráfica de la parábola cuya ecuación es $(Y-1)^2 = 4(X-2)$

 A	 B	 C	 D

9. indicar la ecuación de la curva cuya gráfica es: 

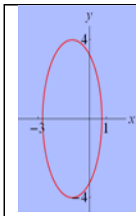
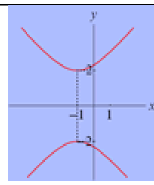
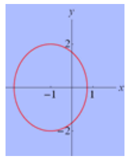
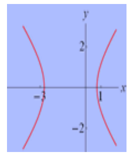
a. $\frac{X2}{4}$ $-y^2$ =1 b. . $\frac{x2}{2}$- y=1 c. $\frac{x2}{4}$ + $y2/1$ = d

10. Hallar el eje de simetría de la parábola $y=(x-1)^2 + 1$

a. y=1 b. x=2 c. x=1 d. x=0

11. ¿Cuál es la ecuación de la **parábola** que pasa por el origen de coordenadas y tiene su vértice en el punto V(1,1)?

a. $x-x^2$ b.2- $\frac{x2}{2}$c. $2x- x^2$ d. $2x+ x^2$

 a	 b	 c	 d

12. señala la gráfica cuya expresion es $x^2 + y^2 = 1$

13. Halla la ecuación de la hipérbola que tiene por focos los puntos F (–3, 0) y F' (3, 0) y que pasa por el punto P(8, 5).

Como los focos de la hipérbola están sobre el eje OX y el punto (0,0) es el punto medio de los dos focos, la ecuación de la hipérbola es:

14. Iidentifica la siguiente cónica, dibújala y halla sus focos y su excentricidad:

$\frac{X2}{25}+\frac{Y2}{49} = 1$

15.Las tres leyes de Kepler se repressentan en una gráfica que es:

a. una hiperbola **b** una parabola

c una circunferencia con excentricidad > 0

d ninguna de las anteriores

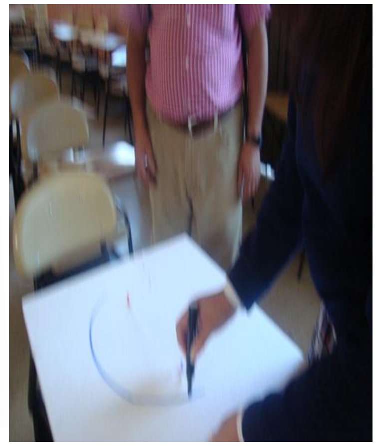
Anexo F Fotografías de las actividades propias del trabajo

Figura F. 1 y F.2 realizando una elipse e hipérbola en el patio del colegio con los estudiantes, utilizando los materiales disponibles en el aula de clase.

Figura F.3 y F.4 estudiantes del grupo 10° 3 viendo videos de astronomía

Figura F.5 Evidencia del gusto por la observación. Sección del arco iris, en la vecindad del Colegio, relacionado con un segmento de una parábola

Figura F.6 y F.7 figuras y objetos cotidianos que nos recuerdan las cónicas como objetos útiles

Figuras F.8, F.9 y F.10 Actividades desarrrolladas en la clase, con la orientación del profesor y la ejecución de los estudiantres


Figuras F.11 y F.12 actividades relacionadas con la astronomia, desarrolladas con los estudiantes. Medición de la sombra producida en el equinoccio del 23 de junio y realización de un reloj de aena.

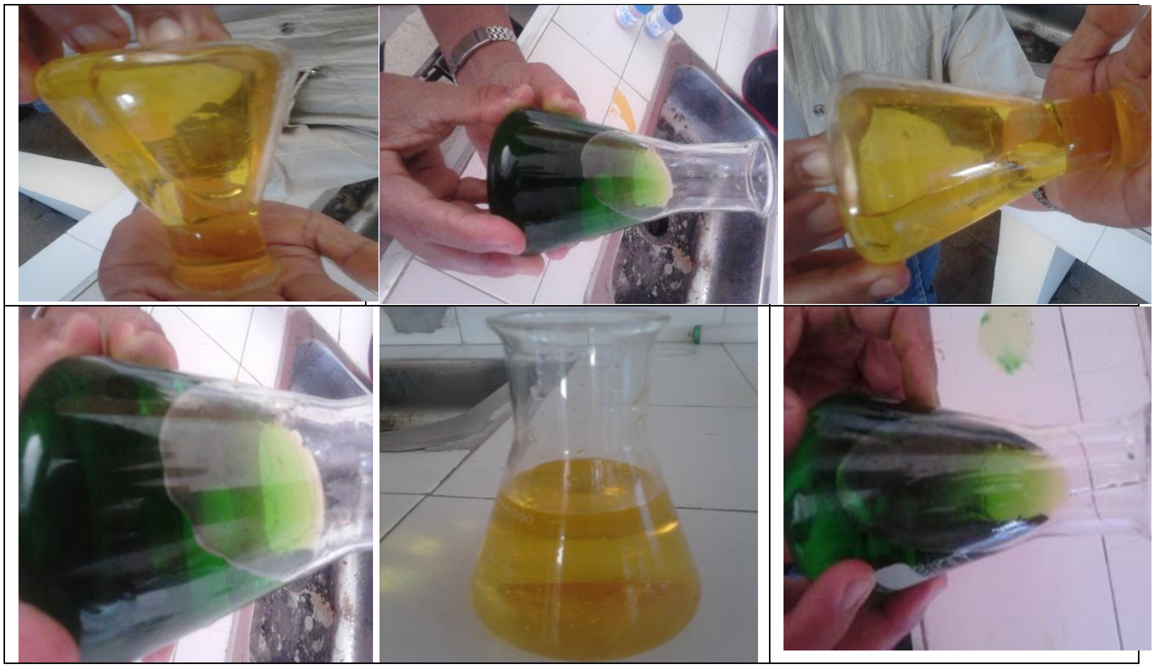
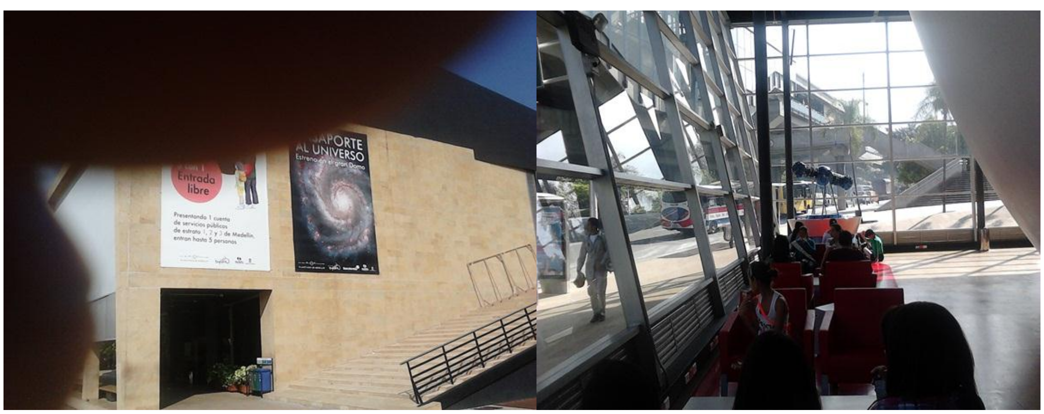


Figura F.13 Obtención de las cónicas en el labortario, mediante el uso de un Matraz, agua y colorantes para establecer contraste



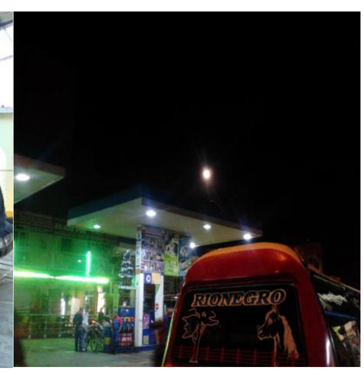
Figuras F.14y F.15 De visita por el planetario de Medellin, para ver

“El cielo esta noche” en una funcion didactica

Figura F.16 Observación y registro realizado por un estudiante con Camara

Cannon Eos, desde el Recinto de Quirama, El carmen de Viboral nov de 2012

Nótese esta porción de luna, semejante a una antena parabólica



FiguraSF.17,F.18 y F.19 Participación de los estudiantes en el planetario móvil de ALIANZA, y obserbación de la luna llena, luego de salir del taller

Figura F.20 material usado para explicar las fases de la luna,

en los talleres lúdicos

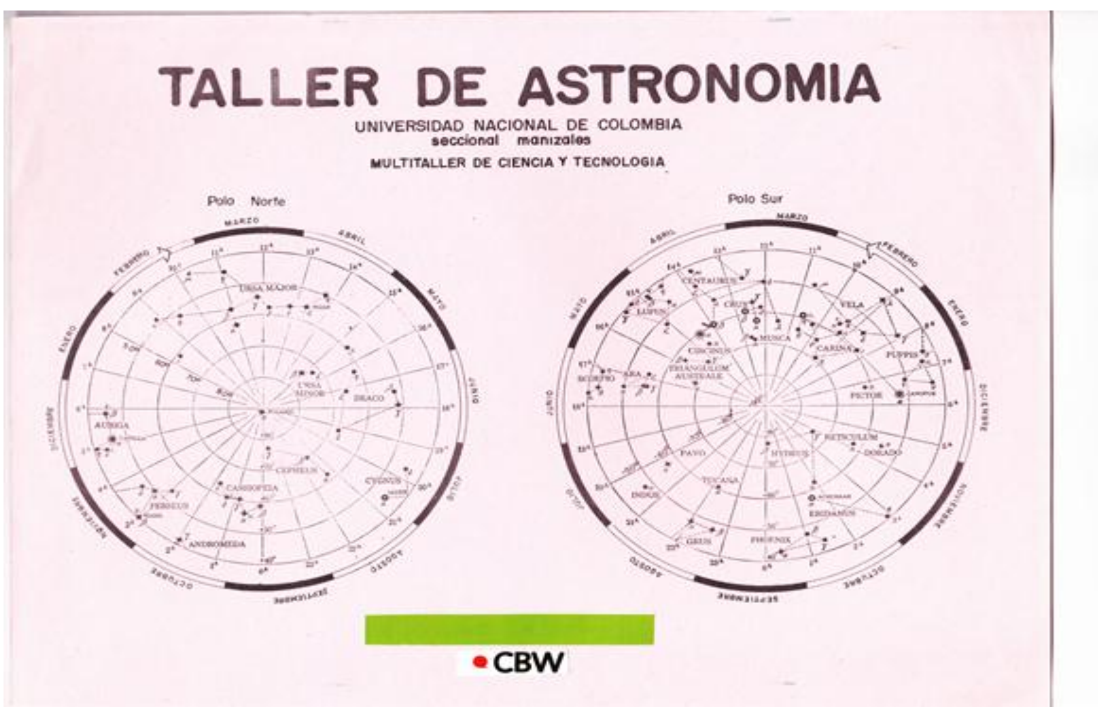
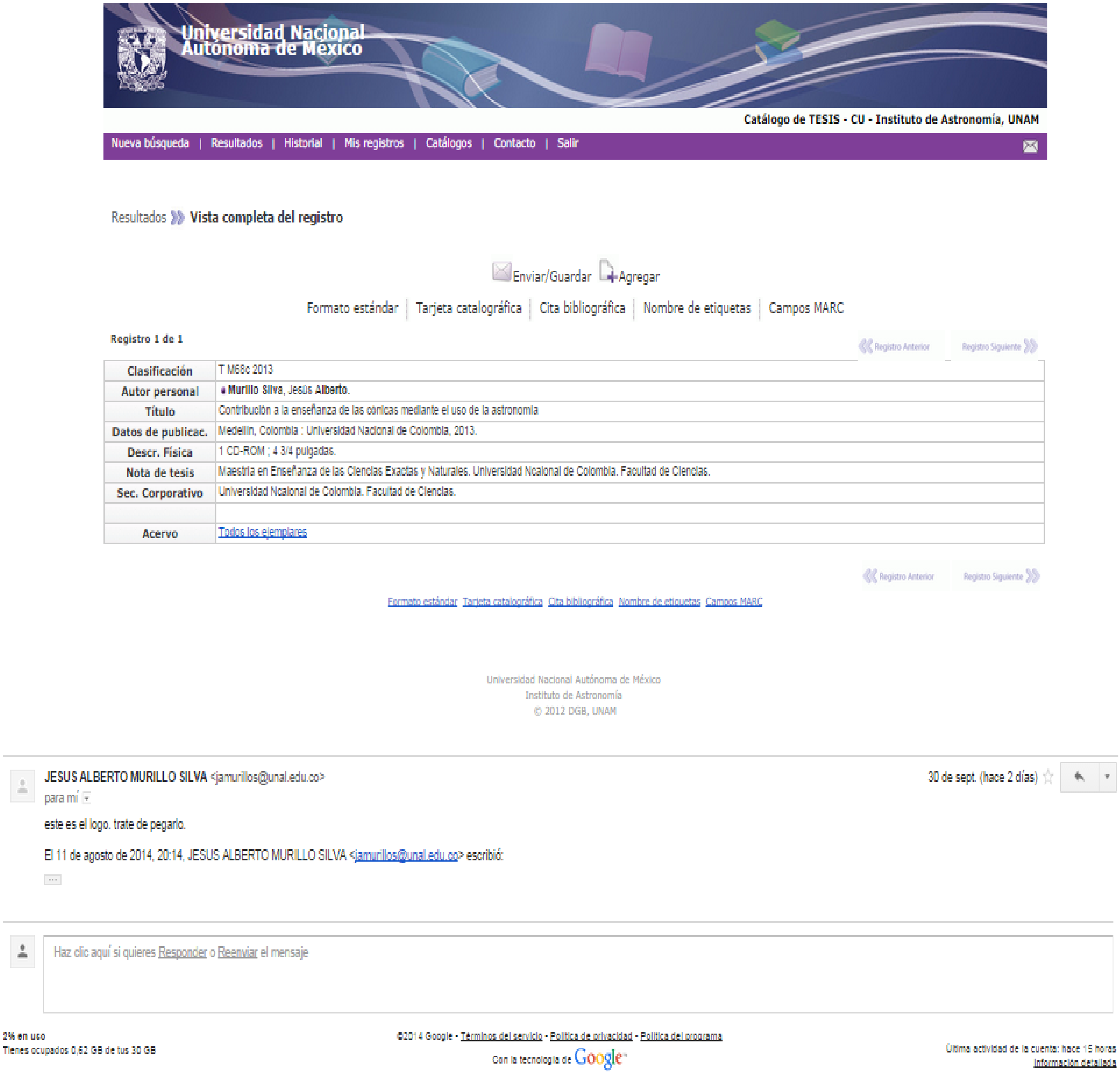


Figura F.21 Material usado para mostrar las diversas constelacioones de cada

uno de los hemisferios

Figura F.22 Invitación al Recinto de Quirama para ver Las Leónidas, en el cierre del presente trabajo, donde asistieron catorce estudiantes de 10°3 para participar de las observaciones con los entusiastas al tema de la astronomia

Figura F.23 Observatorio Astronómico ubicado en el Recinto de Quirama, Via que de Rionegro conduce a la ceja, a 5Km. De Rionegro.



Universidad Nacional Autónoma de México

Catálogo de TESIS - CU - Instituto de Astronomía, UNAM

Nueva búsqueda | Resultados | Historial | Mis registros | Catálogos | Contacto | Salir

Resultados » Vista completa del registro

Enviar/Guardar Agregar

Formato estándar | Tarjeta catalográfica | Cita bibliográfica | Nombre de etiquetas | Campos MARC

Registro 1 de 1

Registro Anterior Registro Siguiente

Clasificación	T M68c 2013
Autor personal	Murillo Silva, Jesús Alberto.
Título	Contribución a la enseñanza de las cónicas mediante el uso de la astronomía
Datos de publicac.	Medellín, Colombia : Universidad Nacional de Colombia, 2013.
Descr. Física	1 CD-ROM ; 4 3/4 pulgadas.
Nota de tesis	Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Ncaional de Colombia. Facultad de Ciencias.
Sec. Corporativo	Universidad Ncaional de Colombia. Facultad de Ciencias.
Acervo	Todos los ejemplares

Registro Anterior Registro Siguiente

Formato estándar Tarjeta catalográfica Cita bibliográfica Nombre de etiquetas Campos MARC

Universidad Nacional Autónoma de México
Instituto de Astronomía
© 2012 DGB, UNAM

JESUS ALBERTO MURILLO SILVA <jamurillos@unal.edu.co> 30 de sept. (hace 2 días)
para mí

este es el logo. trate de pegarlo.

El 11 de agosto de 2014, 20:14, JESUS ALBERTO MURILLO SILVA <jamurillos@unal.edu.co> escribió:

Haz clic aquí si quieres Responder o Reenviar el mensaje

2% en uso
Tienes ocupados 0,62 GB de tus 30 GB

©2014 Google - Términos del servicio - Política de privacidad - Política del programa
Con la tecnología de Google

Última actividad de la cuenta: hace 15 horas
Información detallada

UNIVERSIDAD BOLIVIANA
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
BIBLIOTECA CENTRAL
La Paz - Bolivia

Biblioteca Central UMSA

NOTA DIV.BIBL. CENT. Nº 201/2015
Junio 12 de 2015

Señor
Mg. Sc. Jesús Alberto Murillo Silva
Autor
Presente.-

De mi mayor consideración:

Luego de hacerle llegar un cordial saludo, por la presente tengo a bien acusar recibo, de la DONACIÓN de medio digital:

- Contribución a la Enseñanza de las Cónicas mediante el uso de la astronomía.

Material que sin duda será de gran utilidad para los usuarios de la Biblioteca Central de la Universidad Mayor de San Andrés.

A tiempo de agradecer su gentil donación, saludo a usted con la seguridad de mi consideración mas distinguida.

Atentamente,

Mg. Sc. Marilin Sánchez Rada
JEFE a.i. DIVISION BIBLIOTECA CENTRAL
UMSA

MSR/dc
cc.Arch.

PRESENCIA DEL NUMERO DE ORO EN EL UNIVERSO

TRABAJO FINAL DE ORIGENES DE LA CIENCIA

POR

JESUS ALBERTO MURILLO SILVA

PROFESOR

M Sc ALONSO SEPULVEDA

MAESTRIA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLÍN

MAYO 2011

TABLA DE CONTENIDO PÁGINA

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo recopilatorio sobre el número de oro, relación aurea o número de Fidias, tiene como objetivo, conocer la importancia que presenta en todas las cosas que nos rodea, tanto en el mundo natural, así como en el mundo de la construcción tecnológica.

Este número y su origen, ha sido estudiado desde el comienzo del conocimiento matemático, al igual que en un sinnúmero de aplicaciones en diversas ramas del saber humano, que desde los presocrático, los platónicos, los más modernos en Italia y Alemania como Pacioli, Durero, y Kepler, que han dado denotaciones de divina proporción, por asociarlo a la Trinidad, a lo inconmensurable de Dios, hasta el mismo Galileo habla de que, el Maestro geometriza el universo.

Mi inquietud como ingeniero y amante de la música me han llevado a hacer esta búsqueda en la red, y cada vez me sorprendo por un nuevo hallazgo sobre el fascinante mundo de Phi, el cual aparece donde menos se espera, teniendo presente que el hombre es un ser, abierto y dispuesto a conocer los diferentes asuntos que lo circundan y sabiendo que a partir de cosas pequeñas o insignificantes para otros se pueden hacer grandes investigaciones, las cuales redundan en el beneficio social, mejoramiento de la calidad de vida, pues es una de las razones primordiales del hombre: la búsqueda incansable de nuevas y mejores oportunidades, entonces teniendo en cuenta estos antecedentes, nace mi interés por el tema del número de oro., que también se relaciona de una manera sorprendente con la serie de Fibonacci-

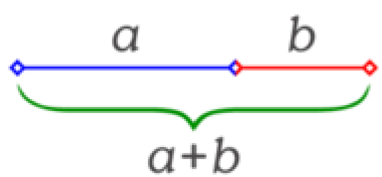
Con el número de oro he aprendido algo que se nos predica a los docentes, relacionado con la transversalidad de los temas, los cuales debemos verlos como un todo, es decir que la matemática no es una isla, ni la ciencia, ni el lenguaje. Cabe anotar que el número de oro se aplica en todas las ramas del saber humano, razón por la cual se hace más énfasis en la música.

Se publica esta recopilación sobre el número de oro, como un anexo al trabajo de Maestría, como muestra de agradecimiento a La Universidad Nacional Autónoma de México, por haber sido dicho trabajo el que me dió a conocer en la UNAM, en México DF, y luego en otros países.

1. DEFINICION Y ORIGEN DEL NUMERO DE ORO

$$\Phi$$

El número de oro, o proporción aurea, es una división en dos, de un segmento según proporciones dadas por el número áureo. La longitud total ***a+b*** es al segmento más largo ***a*** como ***a*** es al segmento más corto ***b***



Este número, se puede representar de diferentes maneras, como se muestra a continuación

Binario	1,1001111000110111011...
Decimal	1,6180339887498948482...
Hexadecimal	1,9E3779B97F4A7C15F39...
Fracción continua	$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$
Algebraico	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Se dice que dos números positivos **a** y **b** están en razón áurea si y sólo si:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$

Para obtener el valor de φ a partir de esta razón considere lo siguiente:

Que la longitud del segmento más corto *b* sea 1 y que la de *a* sea *x*. Para que estos segmentos cumplan con la razón áurea deben cumplir que:

$$\frac{1+x}{x} = \frac{x}{1}$$

Multiplicando ambos lados por x y reordenando:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Mediante la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado se obtiene que las dos soluciones de la ecuación son:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \approx 1,61803$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi} \approx -0,61803$$

La solución positiva es el valor del número áureo. Este número está presente en la Naturaleza como canon de la armonía , el Número de Oro (Fi) admira e inspira al hombre que, encontrándolo, sintiéndolo o intuyéndolo en él mismo, lo emplea para dar, en forma voluntaria o intuitiva, proporciones a lo más bello de su creación, en todos los campos y formas de su expresión.

El Número de Oro no sólo está en la configuración de la forma de fenómenos de diferente tipo y magnitud que existen o se dan en la Naturaleza, sino también, entre otras, en las relaciones espaciales y acústicas que pudieran existir entre ellos, en la plena y permanente manifestación de la Armonía Universal.

Al emular a la Naturaleza, el hombre crea obras excelsas y hace trascender a éstas, aunque en diferente forma, la armonía que él ha asumido, particularmente en las de las artes mayores de la arquitectura y de la música, que tienen entre ellas un patrón de analogía que no afecta a la singularidad de cada una.

Esa analogía no se manifiesta sólo en esas artes; lo hace también en el ámbito del lenguaje de creadores, estudiosos y críticos de las obras arquitectónicas y musicales. En el caso de la música, el lenguaje que emplean sus intérpretes utiliza expresiones que mantienen los mismos o parecidos valores y correspondencias.

Además, la semejanza entre dichas artes se amplía a los instrumentos que la música emplea, debido a que el desarrollo en esos tres campos (arquitectura, música e instrumentos musicales) se realizan con el empleo de criterios matemáticos del mismo tipo y que, por cierto, se manejan con las mismas facultades del intelecto.

Cabe anotar que, el tamaño y la forma de los instrumentos corresponden con los valores regulados por Fi de la antropometría de los ejecutantes, en un paradigma del diseño ergonómico porque, aparte de cumplir los objetivos de utilidad, eficiencia, facilidad de uso y valor estético, tiene el adicional de servir para transmitir belleza.

Entre los instrumentos musicales de diversos lugares, están los de cuerda, que tienen caja y mástil y cuya configuración geométrica permite observar claramente que, por el uso de métodos de diseño, quizás olvidados o por aparecer espontáneamente, Fi es el canon rector de su forma resultante, acorde con su rol acústico.

En cualquier caso, si esto es un secreto de la fabricación de los instrumentos de cuerda, si alguna vez se empleó Fi en la de otros y ahora sólo se repite sus dimensiones ignorando su causa, o si en la de los demás su presencia es espontánea, se explica claramente la correspondencia entre el instrumento y su propósito.

En consecuencia y para demostrar la analogía entre la arquitectura, la música y, por extensión, los instrumentos de cuerda, se presenta una amplia muestra de éstos que, en la diversidad de su origen geográfico y cultural, prueba la presencia del Número de Oro en su particular y tantas veces exquisita ‘arquitectura’.

Nótese que pese a las diferentes características de todo tipo de los diversos instrumentos analizados, aparte de los pocos casos en los que hay cifras algo complejas, están presentes con frecuencia las proporciones de Fi y de 1 que asociadas muestran la Sección Áurea), 1/ Fi , √ Fi , Fi 2 , Fi -.5, √5 (=2x 1/ Fi) y √5-

Es sabido que Filolao, discípulo de Pitágoras, al decir que la armonía "es la unificación de lo diverso y la disposición concordante de lo discordante", dio una clave para entender cómo y porqué se dan las proporciones en lo que tiene vida y movimiento en la Naturaleza y en lo que el hombre hace al emularla. Dado que en ambos casos la armonía es una expresión de belleza, en la obra humana se la define en general como la "conveniente proporción y correspondencia de unas cosas con otras" y en la música como la "unión y combinación de sonidos simultáneos y diferentes pero acordes".

Como paradigma de esa armonía, en la diversidad de la Naturaleza el Número de Oro (Fi) tiene presencia como el código universal de lo que tiene vida, movimiento o resulta de ellos: en lo minúsculo en la doble hélice del ADN y en la figura y disposición de las partes de los animales, en la forma de las hojas, flores y frutos de las plantas y en el patrón de crecimiento de éstas; en lo inorgánico: en la periodicidad de los elementos atómicos, en lo inmenso de la configuración de las galaxias y en lo minúsculo como en la molécula del Carbono 60 (C60), que es un hexapenta perfecto.

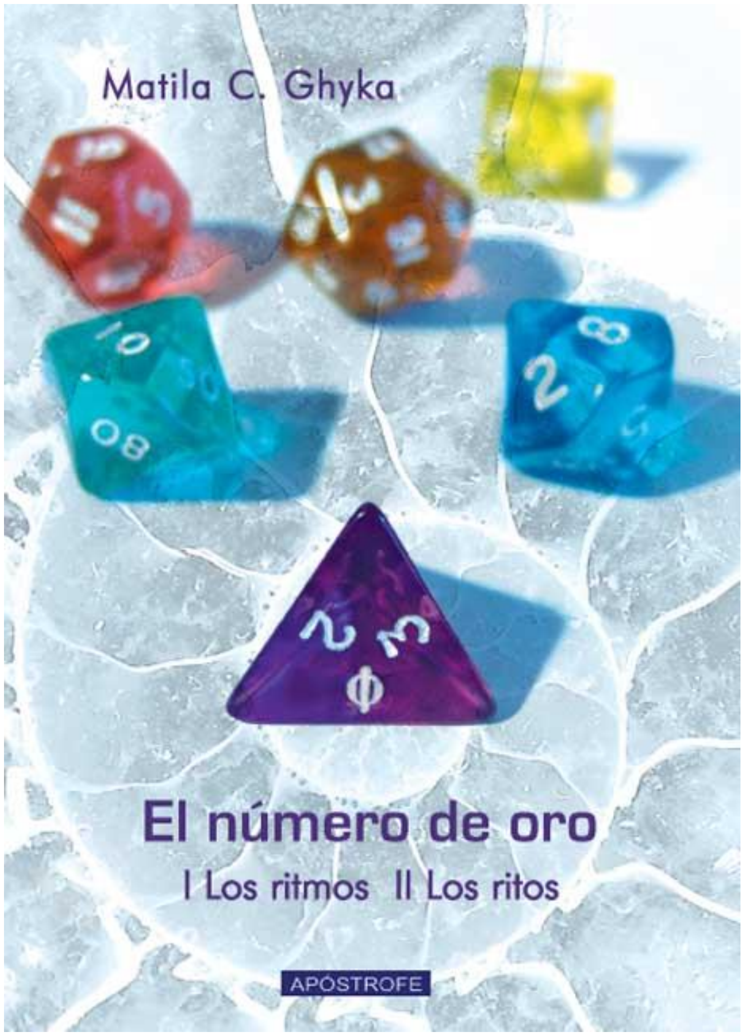
En ese amplio ámbito, la analogía entre la arquitectura y la música fue descrita por René Puaux que, al referirse a edificios griegos, dijo "el templo era en su conjunto una sinfonía musical en mármol" (1926), y por Schopenhauer que, generalizando, señaló que "la arquitectura es música congelada" (1819). Pero, aún más, al ser la analogía la consonancia mediante el Número de Oro, éste se halla en lo mejor de la obra arquitectónica y de la música, por ejemplo en la llamada "escala bien temperada", donde la frecuencia correspondiente a cada semitono es

(Fi+(1/ Fi ^{2}), o de otro modo $K_{12} = \sqrt[12]{2} = 1.0594630943592953...$

Como consecuencia de esa analogía, en ambas partes se usa expresiones equivalentes: armonía como ya se señaló, ritmo que significa la grata combinación y el orden en la sucesión de componentes de una obra o "periodicidad percibida" según S. Coculesco (citado por M. C. Ghyka), y consonancia que en la música es la "cualidad de aquellos sonidos que, oídos simultáneamente, producen efecto agradable" y que tiene correspondencia con proporción, que en la arquitectura y en las artes plásticas es la grata percepción de la conformidad entre las partes y entre éstas y el todo.

Las facultades del intelecto dedicadas a las matemáticas, como recurso obvio para la creación arquitectónica, en el caso de la música fueron aludidas por Leibniz al referirse a que ella consiste en la percepción inconsciente de proporciones armónicas en determinadas manifestaciones sonoras, cuando dijo que "es un ejercicio oculto de aritmética en el cual el espíritu ignora que calcula", y que hace recordar conceptos de estética que en la antigüedad clásica de Occidente se refirieron a lo que se expresa con las propiedades del Número de Oro en la amplia variedad de sus manifestaciones.

En la misma forma con la que se puede estudiar la composición arquitectónica de una determinada obra por la organización de su proyección plana con rectángulos de distinto tamaño que tengan sus lados con proporciones relacionadas y reguladas por Fi , también se puede analizar la geometría de un instrumento de cuerda del tipo que se ha elegido, mostrando el correspondiente conjunto armónico con el mismo método, al señalar las proporciones de sus dimensiones lineales, asumiendo que también se encontrará a Fi en otras posibles proyecciones planas del mismo instrumento.



2. HISTORIA

Existen varios textos que sugieren que el número áureo se encuentra como proporción en ciertas estelas Babilonias y Asirias de alrededor de 2000 a. C. Sin embargo, no existe documentación histórica que indique que el número áureo fue usado conscientemente por los arquitectos o artistas en la construcción de las estelas. También es importante notar que cuando se mide una estructura complicada es fácil obtener resultados curiosos si se tienen muchas medidas disponibles. Además para que se pueda considerar que el número áureo está presente, las medidas deben tomarse desde puntos relativamente obvios del objeto y este no es el caso de los elaborados teoremas que defienden la presencia del número áureo. Por todas estas razones Mario Livio y Álvaro Valarezo concluyen que es muy improbable que los babilonios hayan descubierto el número áureo.

El primero en hacer un estudio formal sobre el número áureo fue Euclides (c. 300-265 a. C.), quién lo definió de la siguiente manera:

"Se dice que una línea recta está dividida entre el extremo y su proporcional cuando la línea entera es al segmento mayor como el mayor es al menor."
Euclides en Los Elementos.

Euclides demostró también que este número no puede ser descrito como la razón de dos números enteros, es decir es irracional.

Platón (c. 428-347 a. C.) vivió antes de que Euclides estudiara el número áureo, sin embargo, a veces se le atribuye el desarrollo de teoremas relacionados con el número áureo debido que el historiador griego Proclo escribió:

"Eudoxo... multiplicó el número de teoremas relativos a la sección a los que Platón dio origen."
Proclo en Un comentario sobre el Primer Libro de los Elementos de Euclides.

Aquí a menudo se interpretó la palabra sección (**τομή**) como la sección áurea. Sin embargo a partir del siglo XIX esta interpretación ha sido motivo de gran controversia y muchos investigadores han llegado a la conclusión de que la palabra *sección* no tuvo nada que ver con el número áureo. No obstante, Platón consideró que los números irracionales, descubiertos por los pitagóricos, eran de particular importancia y la llave a la física del cosmos. Esta opinión tuvo una gran influencia en muchos filósofos y matemáticos posteriores, en particular los neoplatónicos.

Posteriormente con Fibonaci, descubridor de la serie que lleva su nombre, esta asociada al famoso número de oro. Esta serie empieza en 0, siguiendo con 1, y los términos posteriores se obtienen sumando los dos anteriores. Esta serie tiene la particularidad de que sus cocientes sucesivos dan como resultado Fi (el número de oro)

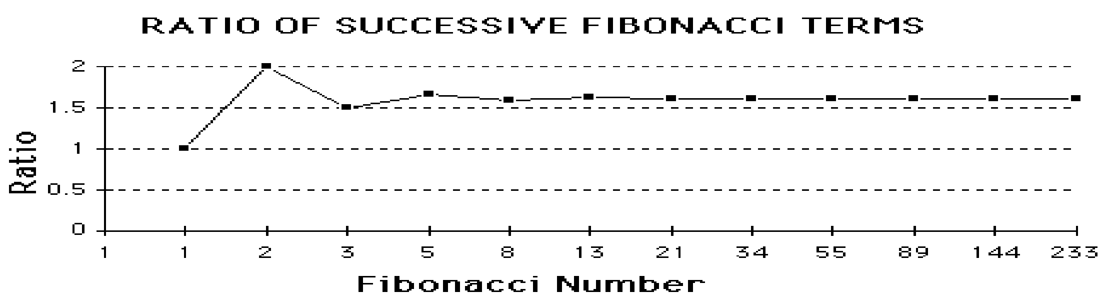
Serie de Fibonacci

Entre las muchas curiosidades de las Fibonacci, una de las más extrañas propiedades de las mismas es que la razón entre cada par de números consecutivos va oscilando por encima y por debajo de la razón áurea, y que a medida que avanzamos en la serie, la diferencia de la razón de Fibonacci con la razón áurea se va haciendo cada vez menor. En teoría, cuando llegásemos al último par de números, resultaría Φ / Φ-1 = 1,61803...

que es, precisamente, la razón áurea. La razón áurea es un célebre número irracional (como pi, sus cifras decimales no parecen terminar jamás).

La afirmación anterior se demuestra fácilmente. En nuestro ejemplo, 3 / 2 = 1,5

bastante por debajo de la razón áurea. Pero 5 / 3 = 1,66 algo por encima, pero menos que antes. Si seguimos veremos que 8 / 5 = 1,6 ; 13 / 8 = 1,625 ; 21 / 13 = 1,6153 y 34 / 21 = 1,61904 y esto lo podemos hacer sucesivamente con cada dos términos sucesivos de la serie, y cada vez aparecen más decimales, haciéndolo más exacto, convergiendo hacia el número de oro, por esta razón, también se le conoce como proporción aurea. A continuación se muestra un gráfico donde estos cocientes tiende a la recta y = Φ



Cómo saber si un número pertenece a la sucesión

¿Existe algún método para saber si un número cualquiera pertenece a una sucesión de Fibonacci? Es una pregunta ante la que un matemático frunciría el ceño, ya que es de apariencia no trivial y, además, en caso de respuesta afirmativa, uno espera encontrarse con una fórmula de ésas que requieren el uso de grandes ordenadores. Sin embargo, la respuesta es afirmativa y el resultado asombrosamente simple, hasta el punto de que, para números no excesivamente grandes, la comprobación se puede hacer con una calculadora de bolsillo.

Un número N pertenece a una sucesión de Fibonacci si y sólo se cumple que

$5N^2+4$ o bien

$5N^2-4$ es un cuadrado perfecto.

Tomemos un ejemplo con el número 3. Si lo elevamos al cuadrado tenemos 9, que multiplicado por 5 nos da 45 y al sumarle cuatro a este resultado obtenemos 49, que es un cuadrado perfecto, ya que $7^2 = 49$, luego el número 3 pertenece a la sucesión de Fibonacci. Probemos con un número más grande, como el 610:

$5\cdot(610)^2 - 4 = 5\cdot 372100 - 4 = 1860500 - 4 = 1860496$

que es el cuadrado de 1364, con lo que 610 pertenece a una sucesión de Fibonacci.

Por otra parte, no está de más añadir que la manera de saber si un número es un cuadrado perfecto es introducirlo en la calculadora y extraer la raíz cuadrada (para ver si da un número exacto.

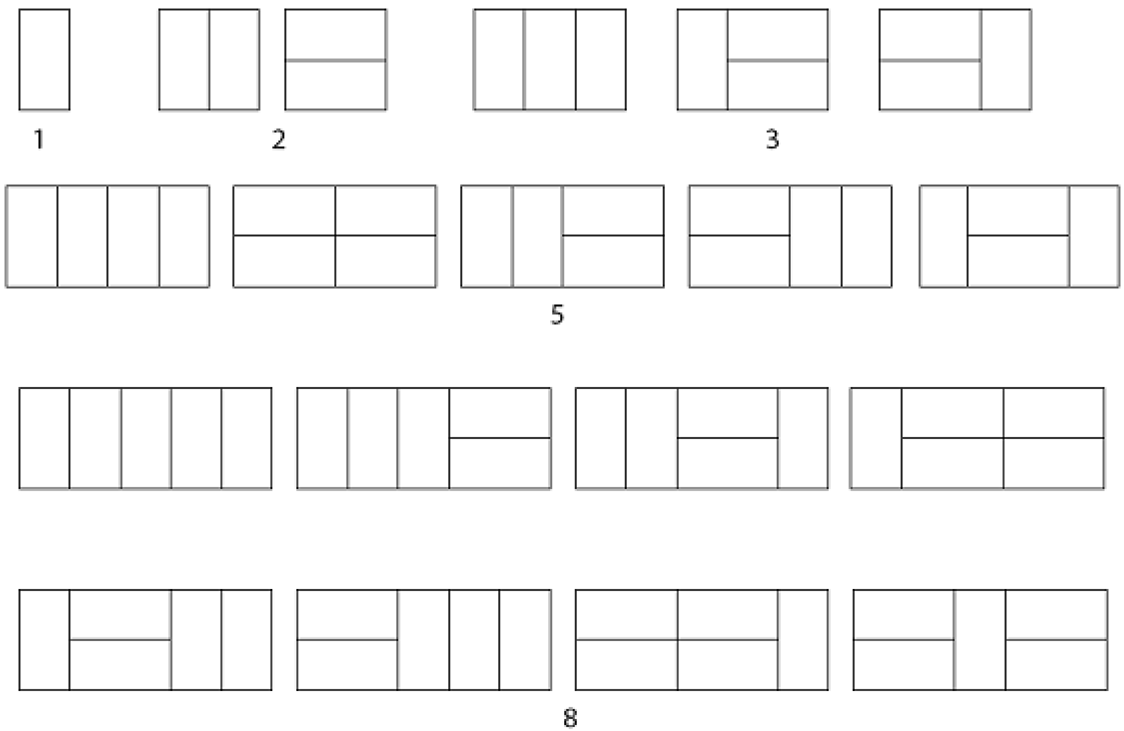
Esta sucesión, o serie puede representarse en forma de geométrica como un dominó geométrico

El dominó de Fibonacci

Cuando un matemático decide ponerse a hacer puzzles hay que echar a temblar, ya que lo que empieza como un simple pasatiempo puede acabar convirtiéndose, con suerte, en un teorema de difícil demostración y, en el peor de los casos, en una conjetura que traiga de cabeza a mucha gente durante mucho tiempo.

Un pasatiempo de estas características es por ejemplo el siguiente. Se trata de construir rectángulos con piezas de dominó. Entendiendo que un cuadrado es una clase concreta de rectángulo y que una pieza de dominó se caracteriza porque mide el doble de largo que de ancho, ¿cuántos rectángulos diferentes de 2×1 pueden construirse con piezas de dominó? Evidentemente uno sólo.

¿Y rectángulos de 2×2? Por muchas vueltas que le demos sólo se pueden hacer dos.



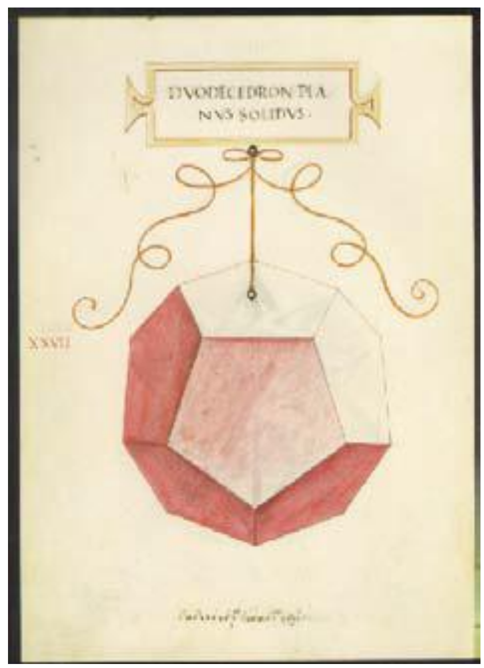
Rectángulos de 2×3 se pueden hacer exactamente tres y de 2×4 cinco. La cosa pinta bien. Lo suficiente para que nos animemos con los de 2×5 y comprobemos que sale el número esperado: ocho. De manera que nos encontramos con la sucesión 1, 2, 3, 5, 8, …

¿Nos permite esto asegurar rotundamente que el número de rectángulos 2xN que se pueden construir con fichas de dominó es F_N? O sea que, por ejemplo, habrá 610 maneras de construir triángulos de 2×15 con fichas de dominó?

El matemático norteamericano David Klarner (1940–1999), demostró que así era. La demostración, excesivamente compleja para describirla aquí, incluye el manejo de **"polyominós",** una generalización de las piezas de dominó, que se mueven a caballo entre los puzzles infantiles, la combinatoria moderna, la topología y alguna que otra lindeza matemática.

Los sólidos regulares (con sus caras iguales) se presenta dicha relación, siendo privilegiadas las formas naturales de muchos cristales

A pesar de lo discutible de su conocimiento sobre el número áureo, Platón se dio a la tarea de estudiar el origen y la estructura del cosmos, cosa que intentó usando los cinco sólidos platónicos, construidos y estudiados por Teeteto. En particular, combinó la idea de Empédocles sobre la existencia de cuatro elementos básicos de la materia, con la teoría atómica de Demócrito. Para Platón cada uno de los sólidos correspondía a una de las partículas que conformaban cada uno de los elementos: la tierra estaba asociada al cubo, el fuego al tetraedro, el aire al octaedro, el agua al icosaedro, y finalmente el Universo como un todo, estaba asociado con el dodecaedro, uno de los cinco sólidos pitagóricos.

Dibujos realizados por davinci

En Geometría, los sólidos de caras planas reciben el nombre de "poliedros". (En griego, *polys* = "múltiples" y *hedra* = "cara".) Los poliedros cuyas caras son polígonos regulares iguales se llaman *poliedros regulares*. Los poliedros regulares son cinco. En el cuadro siguiente se presentan sus nombres y características.

POLIEDRO REGULAR	HEXAEDRO REGULAR	TETRAEDRO REGULAR	DODECAEDRO REGULAR	ICOSAEDRO REGULAR	OCTAEDRO REGULAR
MODELO					
CARAS	6 cuadrados	4 triángulos equiláteros	12 pentágonos regulares	20 triángulos equiláteros	8 triángulos equiláteros
VÉRTICES	8	4	20	12	6
ARISTAS	12	6	30	30	12
ARISTAS POR VËRTICE	3	3	3	5	4
SENO DEL ÁNGULO ENTRE CARAS	1	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$	$\frac{2}{5}\sqrt{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$
ÁREA DE LA SUPERFICIE EXTERIOR	$6\,a^2$	$\sqrt{3}\,a^2$	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,a^2$	$5\sqrt{3}\,a^2$	$2\sqrt{3}\,a^2$
VOLUMEN	a^3	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$	$\frac{\sqrt{15+7\sqrt{5}}}{4}a^3$	$\frac{5\sqrt{3+\sqrt{5}}}{12}a^3$	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$
RADIO DE LA ESFERA CIRCUNSCRIPTA	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{\sqrt{6}}{4}a$	$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}a$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$
RADIO DE LA ESFERA INSCRIPTA	$\frac{1}{2}a$	$\frac{\sqrt{6}}{12}a$	$\frac{\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20}a$	$\frac{\sqrt{42+18\sqrt{5}}}{12}a$	$\frac{\sqrt{6}}{6}a$

En las fórmulas, *a* = *arista*.

Para mostrar por qué son cinco —y no más— se suele razonar del modo siguiente:

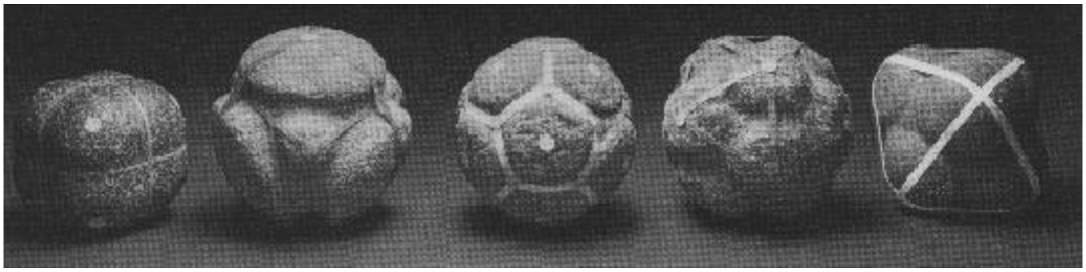
Cada vértice debe ser común por lo menos a tres caras para que se forme un sólido. (Si fuera común a dos, las caras estarían pegadas y no tendríamos un sólido.

La suma de los ángulos interiores de las caras que se encuentran en cada vértice debe ser menor que 360°, de manera que la figura se cierre, que no sea plana.

Dado que cada ángulo interior de un triángulo equilátero mide 60°, tomando en cuenta lo señalado en los enunciados anteriores, en un vértice podrían concurrir tres, cuatro o cinco de ellos. Ésos son los casos del *tetraedro*, el *octaedro* y el *icosaedro*, respectivamente. Cada ángulo interior de un cuadrado mide 90°, de modo que sólo podemos hacer coincidir tres de ellos en cada vértice. Ése es el caso del *cubo*. Los ángulos interiores del pentágono regular miden 108°. Poniendo tres de ellos en cada vértice se obtiene un *dodecaedro*. Con los polígonos siguientes ya no es posible formar poliedros regulares: los ángulos interiores de una hexágono miden 120° y no es posible poner tres juntos sin llegar al límite de 360°; los ángulos interiores de los siguientes son aun mayores.

Los poliedros regulares y los griegos antiguos

Los pitagóricos —que veían en los resultados matemáticos algo parecido a una verdad religiosa— consideraban muy importante la observación de que había sólo cinco poliedros regulares posibles. Muchos creen que fueron ellos quienes la hicieron por primera vez y por eso llaman "sólidos pitagóricos" a los poliedros regulares. (Lo más probable es que la demostración de esta afirmación se deba a los miembros de esa escuela.) Sin embargo, los arqueólogos han hallado imágenes en piedra de los poliedros regulares considerablemente más antiguas.



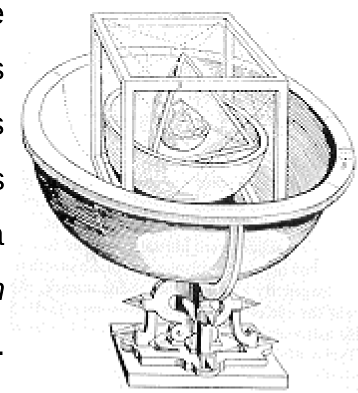
tierra, fuego, Universo, agua y aire. Imágenes recogidas en un yacimiento neolítico de Escocia

Por otra parte, en excavaciones realizadas cerca de Pádova (Italia), se halló un dodecaedro etrusco que probablemente era usado como juguete.

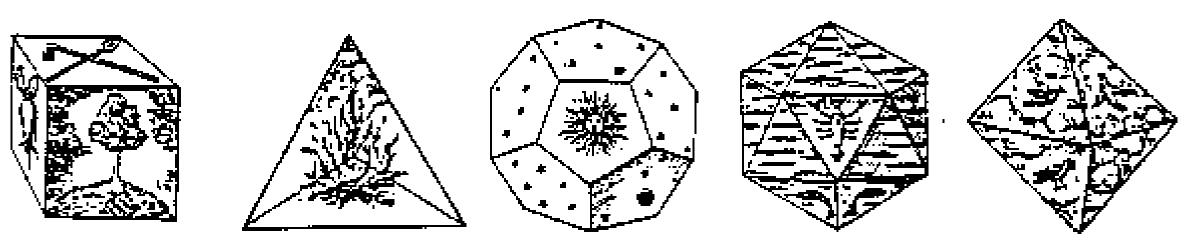
Se cree que fue Empédocles quien primero asoció el cubo, el tetraedro, el icosaedro y el octaedro con la tierra, el fuego, el agua y el aire, respectivamente. Estas sustancias eran los cuatro "elementos" de los griegos antiguos. Luego Platón asoció el dodecaedro con el Universo pensando que, dado que era tan distinto de los restantes (¿por sus caras pentagonales?) debía tener relación con la sustancia de la cual estaban hechos los planetas y las estrellas. (Por entonces se creía que los cuerpos celestes debían estar hechos de un elemento distinto del que estaban hechas las cosas que rodean al hombre en la Tierra.) De aquí que a los poliedros regulares se los conozca también como *sólidos platónicos*.

Los poliedros regulares y Johannes Kepler-

En el siglo XVI, los poliedros regulares inspiraron al joven Kepler una teoría sobre el movimiento de los planetas. Él creía que los radios de las órbitas (circulares) de los planetas estaban en proporción con los radios de las esferas inscriptas en sólidos platónicos dispuestos uno dentro de otro. El grabado de la derecha ha sido tomado de su tratado *Mysterium Cosmographicum* (*"El Misterio del Cosmos"*). (Kepler concluyó que ese modelo era erróneo y que los planetas se movían describiendo trayectorias elípticas recién cuando conoció los resultados de las observaciones de Tycho Brahe.)



En el cuadro siguiente aparecen reproducciones de otros grabados de la misma obra de Kepler en donde se observa cómo sobrevivía en esta época tan tardía la asociación entre elementos y poliedros establecida por Empédocles y Platón.

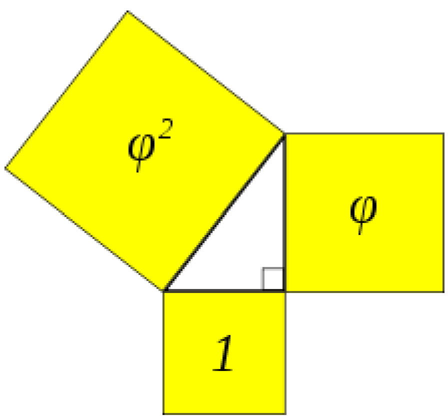


Tierra **fuego** **Universo** **agua** **aire**

Figuras tomadas del tratado *Mysterium Cosmographicum* de Johannes Kepler

El descubrimiento de Kepler de las leyes del movimiento de los planetas es uno de los primeros resultados de la aplicación del método científico tal como lo entendemos hoy.

6. Triángulo de Kepler



El **triángulo de Kepler** es un triángulo **rectángulo** formado por tres cuadrados con áreas en progresión geométrica de acuerdo al **número áureo**.

El **triángulo de Kepler** es un triángulo rectángulo con lados en progresión geométrica. La relación entre lados de un triángulo de Kepler, está vinculada al número áureo.

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

y puede ser escrita: $1 : \sqrt{\varphi} : \varphi$, o aproximadamente **1 : 1.272 : 1.618**. Los cuadrados de los lados de éste triángulo (véase **fig. tk1**) están en progresión geométrica de acuerdo al número áureo.

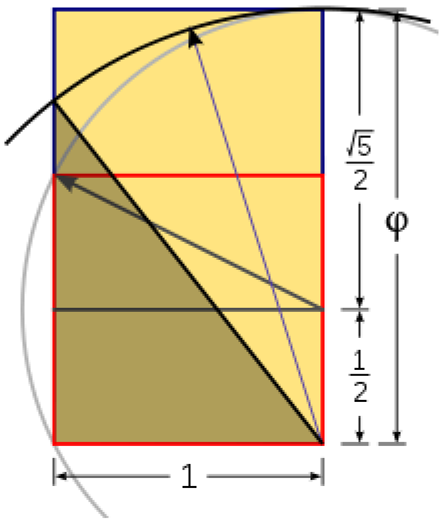
Los triángulos con dicha relación son llamados triángulos de Kepler, dado que el matemático y astrónomo alemán **Johannes Kepler** (1571–1630) fue el primero en demostrar que este triángulo se caracteriza por tener una relación entre los catetos y la hipotenusa igual a la proporción áurea.[4] El triángulo de Kepler combina dos conceptos clave de la matemática, el teorema de Pitágoras y número áureo, lo cual fascinó profundamente a Kepler, como quedó expresado en su propia cita:

La geometría tiene dos grandes tesoros: uno es el teorema de Pitágoras, el otro la división de un segmento entre el extremo y su proporcional. Al primero lo podemos comparar a un montón de oro, al segundo lo podemos llamar una piedra preciosa.

6.1 Relación con las medias aritmética, geométrica, y armónica

Para números reales positivos ***a*** y ***b***, sus media aritmética, media geométrica y media armónica, son las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, si y solo si tal triángulo es un triángulo de Kepler.

6.2 Como construir un triángulo de Kepler



Método para construir un triángulo de Kepler mediante la proporción áurea.

Un triángulo de Kepler puede ser construido usando solo regla y compás creando primero un rectángulo áureo:

Construir un simple cuadrado, (*rojo)*

Trazar una línea desde el punto medio de uno de sus lados hasta un vértice del lado opuesto.

Utilizar la longitud de esa línea, como radio para dibujar un arco (*gris en la figura*) que define la altura de un rectángulo áureo.

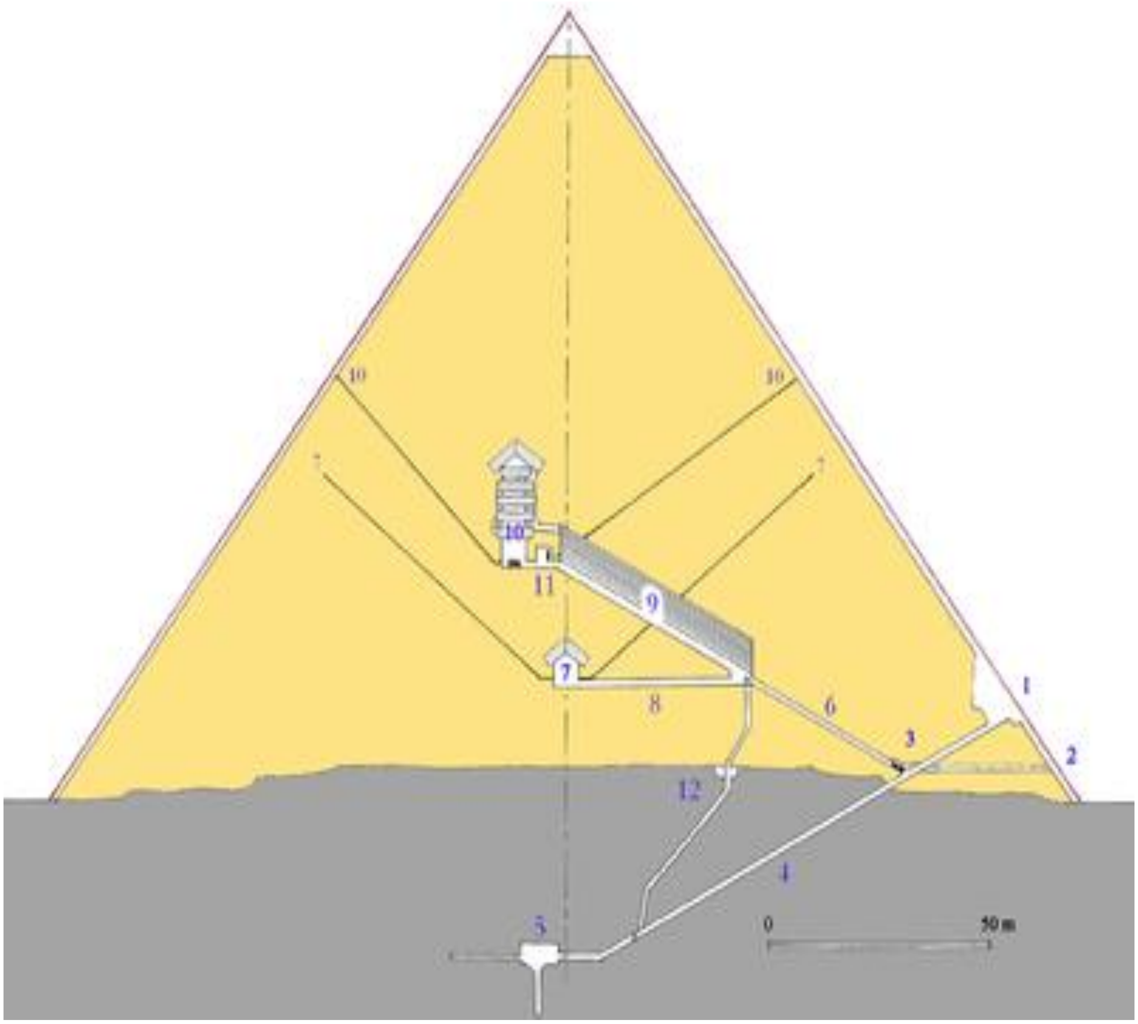
Completar el dibujo de dicho rectángulo.

Úsese el lado largo de la derecha del rectángulo, para trazar un arco hasta que intercepte al lado opuesto del rectángulo, dicha intersección define las longitudes de la hipotenusa y del cateto mayor del triángulo de Kepler (*área marrón)*

Kepler lo construía de manera diferente. Según una carta que le escribió a su antiguo profesor Michael Mästlin[4] : "Si un segmento se divide entre el extremo y su proporcional,[1] y se toma como hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto se halle sobre el punto que divide a la hipotenusa en dichas partes, entonces el cateto menor tendrá la misma longitud que la parte más larga del segmento de partida (*ahora hipotenusa*)."

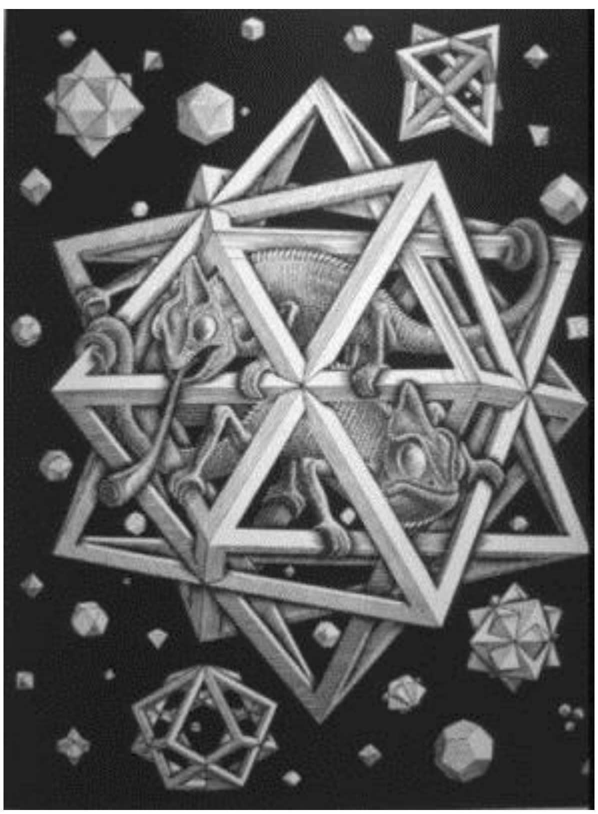
6.3 Curiosidades

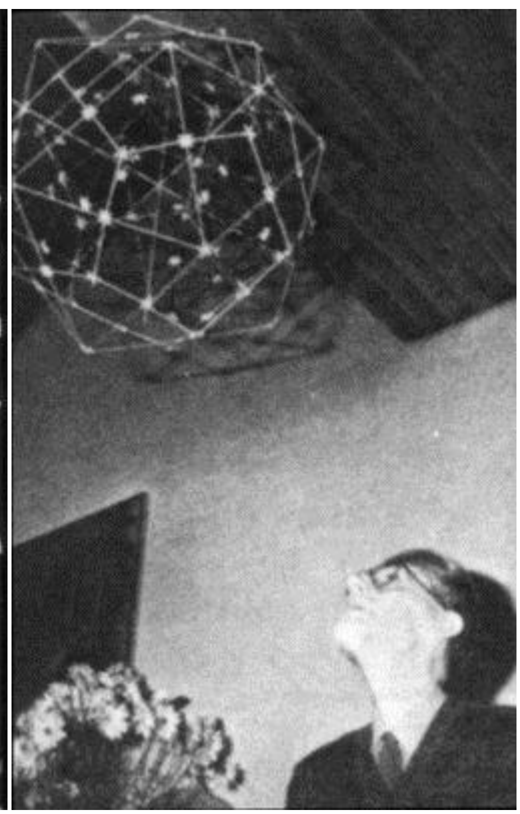
Algunas fuentes afirman que se puede reconocer en la gran pirámide de Guiza un triángulo con dimensiones aproximadas a un triángulo de Kepler.



Los poliedros regulares y Maurits Cornelis Escher

Los sólidos platónicos, por su historia, perfección, y belleza, continúan siendo hoy inspiradores de matemáticos y artistas. El holandés Maurits Cornelis Escher es uno de los artistas clásicos de nuestro tiempo que han experimentado la fascinación por estas figuras. A continuación se reproduce su grabado *Estrellas* (1948) y una fotografía que lo muestra observando una de sus obras: un conjunto de sólidos platónicos superpuestos.





Maurits, consiguió hacer representaciones de otras figuras que nos sólidos regulares, pero que con su ingenio, logra hacer tesalaciones con un sentido geométrico, pero saltándose los cánones especiales.

En 1509 el matemático y teólogo Luca Pacioli publica su libro *De Divina Proportione* (La Proporción Divina), en el que plantea cinco razones por las que considera apropiado considerar divino al Número áureo:

La unicidad; Pacioli compara el valor único del número áureo con la unicidad de Dios.

El hecho de que esté definido por tres segmentos de recta, Paciolo asocia con la Trinidad.

La inconmensurabilidad; para Pacioli la inconmensurabilidad del número áureo, y la inconmensurabilidad de Dios son equivalentes.

La Autosimilaridad asociada al número áureo; Pacioli la compara con la omnipresencia e invariabilidad de Dios.

Según Pacioli, de la misma manera en que Dios dio ser al Universo a través de la quinta esencia, representada por el dodecaedro; el número áureo dio ser al dodecaedro.

En 1525, Alberto Durero publica *Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas* donde describe cómo trazar con regla y compás la espiral basada en la sección áurea, que se conoce como “espiral de Durero”.

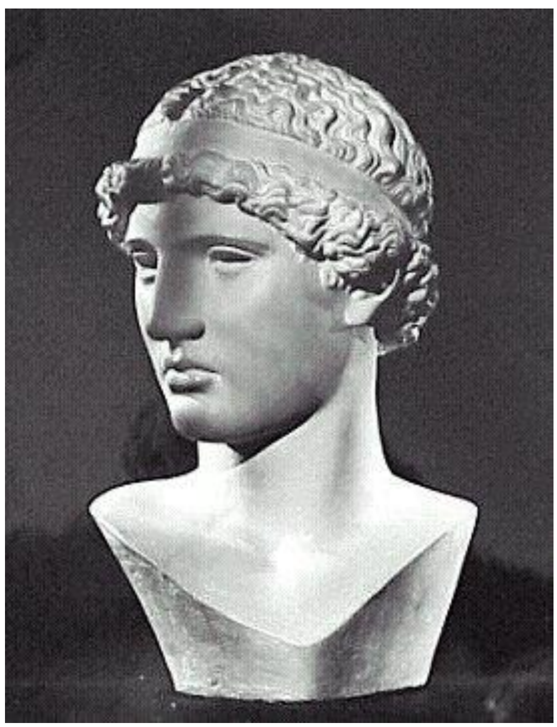
El astrónomo Johannes Kepler (1571-1630), desarrolló un modelo Platónico del Sistema Solar utilizando los sólidos platónicos, y se refirió al número áureo en términos grandiosos

“La geometría tiene dos grandes tesoros: uno es el teorema de Pitágoras; el otro, la división de una línea entre el extremo y su proporcional. El primero lo podemos comparar a una medida de oro; el segundo lo debemos denominar una joya preciosa”
Johannes Kepler en Mysterium Cosmographicum (El Misterio Cósmico).

El primer uso conocido del adjetivo áureo, dorado, o de oro, para referirse a este número lo hace el matemático alemán Martin Ohm, hermano del célebre físico Georg Simon Ohm, en la segunda edición de 1835 de su libro Die Reine Elementar Matematik (Las Matemáticas Puras Elementales). Ohm escribe en una nota al pie:

A pesar de que la forma de escribir sugiere que el término ya era de uso común para la fecha, el hecho de que no lo incluyera en su primera edición sugiere que el término pudo ganar popularidad alrededor de 1830.

En los textos de matemáticas que trataban el tema, el símbolo habitual para representar el número áureo fue **τ** del griego **τομή** que significa corte o sección. Sin embargo, la moderna denominación **Φ** ó **φ**, la efectuó en 1900 el matemático Mark Barr en honor a Fidias ya que ésta era la primera letra de su nombre escrito en griego (**Φειδίας**). Este honor se le concedió a Fidias por el máximo valor estético atribuido a sus esculturas, propiedad que ya por entonces se le atribuía también al número áureo, el cual aplico Fidias a sus hermosas esculturas



Fidias vivió entre el 490 A.C. al 431 A.C. Sobresalió en el mundo clásico griego, tanto en escultura, grabado y repujado. Pudiéndose decir que fue uno de los mejores escultores y arquitectos de todos los tiempos. Pero la escultura lo llevó a su punto máximo, por su perfección y armonía, destacando a cada momento la belleza humana. Algo que lo puso en lo más alto fue el trato que dio a las telas adheridas a los cuerpos, mostrando sus pliegues, dejando entrever las curvas de los cuerpos, la musculatura etc. Vivió en la época de Pericles, convirtiéndose en el protector de Fidias. Pericles quería hacer de la **Acrópolis de Atenas** la ciudad más grande, majestuosa y hermosa. Debido a ello casi toda su obra la realizó en Atenas.

3. PRESENCIA DEL NUMERO DE ORO

El número de oro se encuentra presente e inmerso en múltiples facetas del mundo natural, así como en la intervención de la creación humana en un sinnúmero de actividades que permiten pensar que esa relación aurea o número de oro, realmente merece llamarse así. A continuación se mostrarán algunas de esas facetas donde la proporción divina aparecen:

3.1 Φ EN LA MATEMATICA

6.3.1 Fórmula de la relación áurea

Para conseguir un número cuya relación con otro sea φ se puede utilizar esta fórmula: $a^2 = b^2 + ab$

A condición siempre de que a>b, a>0 y b>0

Si, por ejemplo, queremos un valor áureo para 2 y éste es el segmento menor, o sea b, resulta entonces que:

$a^2 = 4 + 2a$ Ordenando: $a^2 - 2a - 4 = 0$

Con la fórmula cuadrática:

$$a = 1 + \sqrt{5}$$

$$\frac{360°}{\varphi + 1} \approx 137{,}5°$$

- Φ es el único número real positivo tal que:

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

La expresión anterior es fácil de comprobar:

$$\varphi^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{2^2} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{2^2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi + 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Φ posee además las siguientes propiedades:

$$\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$$

$$\varphi^3 = \frac{\varphi + 1}{\varphi - 1}$$

Las potencias del número áureo pueden expresarse en función de una suma de potencias de grados inferiores del mismo número, establecida una verdadera sucesión recurrente de potencias.

El caso más simple es: $\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$, cualquiera sea n un número entero. Este caso es una sucesión recurrente de orden k = 2, pues se recurre a dos potencias anteriores.

Una ecuación recurrente de orden k tiene la forma $a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots + a_k u_n$, donde a_i es cualquier número real o complejo y k es un número natural menor o igual a n y mayor o igual a 1. En el caso anterior es $k = 2$, $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$.

Pero podemos «saltear» la potencia inmediatamente anterior y escribir:

$\Phi^n = \Phi^{n-2} + 2\Phi^{n-3} + \Phi^{n-4}$. Aquí $k = 4$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$ y $a_4 = 1$.

Si anulamos a las dos potencias inmediatamente anteriores, también hay una fórmula recurrente de orden 6:

$\Phi^n = \Phi^{n-3} + 3\Phi^{n-4} + 3\Phi^{n-5} + \Phi^{n-6}$

En general:

$$\Phi^n = \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}k} \binom{\frac{1}{2}k}{i} \Phi^{\left[n - \left(\frac{1}{2}k + i\right)\right]}; k = 2j \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}$$

En resumen: cualquier potencia del número áureo puede ser considerada como el elemento de una sucesión recurrente de órdenes 2, 4, 6, 8, ..., 2k; donde k es un número natural. En la fórmula recurrente es posible que aparezcan potencias negativas de Φ, hecho totalmente correcto. Además, una potencia negativa de Φ corresponde a una potencia positiva de su inverso, la sección áurea.

Este curioso conjunto de propiedades y el hecho de que los coeficientes significativos sean los del binomio, parecieran indicar que entre el número áureo y el número e hay un parentesco.

El número áureo $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ es la unidad fundamental «ε» del cuerpo $\mathbb{R}\left(\sqrt{5}\right)$ y la sección áurea $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ es su inversa, «ε^{-1}». En esta extensión el «emblemático» número irracional $\sqrt{2}$cumple las siguientes igualdades:

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\sqrt{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}.$$

La expresión mediante fracciones continuas es:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \quad \longrightarrow \quad \varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}}$$

Esta iteración es la única donde sumar es multiplicar y restar es dividir. Es también la más simple de todas las fracciones continuas y la que tiene la convergencia más lenta. Esa propiedad hace que además el número áureo sea un número mal aproximable mediante racionales que de hecho alcanza el peor grado posible de aproximabilidad mediante racionales.[5]

Por ello se dice que φ es el número más alejado de lo racional o el número más irracional. Este es el motivo por el cual aparece en el teorema de Kolmogórov-Arnold-Moser.

$$(\varphi)(\varphi-1)=1 \quad \longrightarrow \quad (\varphi)^2-\varphi-1=0 \quad \longrightarrow \quad \varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

El número áureo $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ y la sección áurea $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ son soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$x^2-\sqrt{5}\,x+1=0$$

$$x^3-y^3-4=0$$

$$x^4-3x^2+1=0=(x^2-x-1)(x^2+x-1)$$

$$\varphi=1+2\sin(\pi/10)=1+2\sin 18^\circ$$

$$\varphi=\frac{1}{2}\csc(\pi/10)=\frac{1}{2}\csc 18^\circ$$

$$\varphi=2\cos(\pi/5)=2\cos 36^\circ$$

$$\varphi=\frac{1}{2}\sec\frac{2}{5}\pi=\frac{1}{2}\sec 72^\circ$$

$$\varphi=\frac{\sin(2\pi/5)}{\sin(1\pi/5)}=\frac{\sin(72^\circ)}{\sin(36^\circ)}$$

Éstas corresponden al hecho de que el diámetro de un pentágono regular (distancia entre dos vértices no consecutivos) es φ veces la longitud de su lado, y de otras relaciones similares en el pentagrama.

En 1994 se derivaron las siguientes ecuaciones relacionando al número áureo con el número de la Bestia:

$$\frac{\varphi}{2}=-\sin 666^\circ=-\cos(6\cdot 6\cdot 6^\circ).$$

Lo que puede combinarse en la expresión:

$$\varphi = -\sin 666^\circ - \cos(6 \cdot 6 \cdot 6^\circ).$$

Sin embargo, hay que notar que estas ecuaciones dependen de que se elijan los grados sexagesimales como unidad angular, ya que las ecuaciones no se mantienen para unidades diferentes.

-

$$\varphi = \sqrt{1+\varphi} \quad \longrightarrow \quad \varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

Esta fórmula como caso particular de una identidad general publicada por Nathan Altshiller-Court, de la Universidad de Oklahoma, en la revista *American Mathematical Monthly*, 1917.

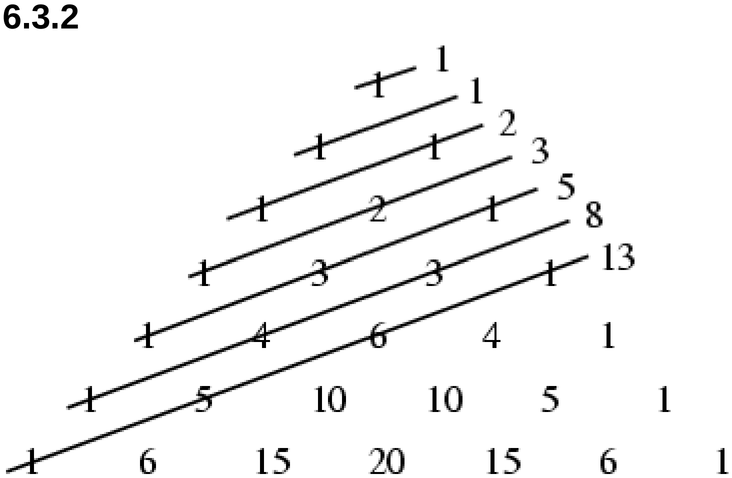
El teorema general dice:

La expresión $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \sqrt{a_4 + \sqrt{\cdots + \sqrt{a_n}}}}}}$ (donde $a_i = a$), es igual a la mayor de las raíces de la ecuación **$x^2 - x - a = 0$**; o sea,

$$\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

Relación del número de oro con el triangulo de Pascal

6.3.2



Este es el triángulo de Pascal que se forma situando el número uno por sus dos laterales y los demás números se hallan sumando los dos números que tiene justo encima. Sumando los números según las diagonales obtenemos la sucesión de Fibonacci.

- *Relación del número de oro con la serie de Fibonacci*

Si se denota el enésimo número de Fibonacci como F_n, y al siguiente número de Fibonacci, como F_{n+1}, descubrimos que, a medida que n aumenta, esta razón oscila, y es alternativamente menor y mayor que la razón áurea. Podemos también notar que la fracción continua que describe al número áureo produce siempre números de Fibonacci a medida que aumenta el número de unos en la fracción. Por ejemplo: $\frac{3}{2}=1,5$; $\frac{8}{5}=1,6$; y $\frac{21}{13}=1,61538461...$, lo que se acerca considerablemente al número áureo. Entonces se tiene que:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$$

Esta propiedad fue descubierta por el astrónomo alemán Johannes Kepler, pero pasaron más de cien años antes de que fuera demostrada por el matemático inglés Robert Simpson.

Con posterioridad se encontró que cualquier sucesión aditiva recurrente de orden 2 tiende al mismo límite. Por ejemplo, si tomamos dos números naturales arbitrarios, por ejemplo 3 y 7, la sucesión recurrente resulta: 3 - 7 - 10 - 17 - 27 - 44 - 71 - 115 - 186 - 301 ... Los cocientes de términos sucesivos producen aproximaciones racionales que se acercan asintóticamente por exceso y por defecto al mismo límite: 44/27 = 1,6296296...; 71/44 = 1,613636...; 301/186 = 1,6182795.

A mediados del siglo XIX, el matemático francés Jacques Philippe Marie Binet redescubrió una fórmula que aparentemente ya era conocida por Leonhard Euler, y por otro matemático francés, Abraham de Moivre. La fórmula permite encontrar el enésimo número de Fibonacci sin la necesidad de producir todos los números anteriores. La fórmula de Binet depende exclusivamente del número áureo:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \quad = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\phi)^n - \left(\frac{-1}{\phi}\right)^n\right]$$

3.2 Φ EN LA GEOMETRIA

6.3.3

El número áureo y la sección áurea están presentes en todos los objetos geométricos regulares o semirregulares en los que haya simetría pentagonal, que sean pentágonos o que aparezca de alguna manera la raíz cuadrada de cinco.

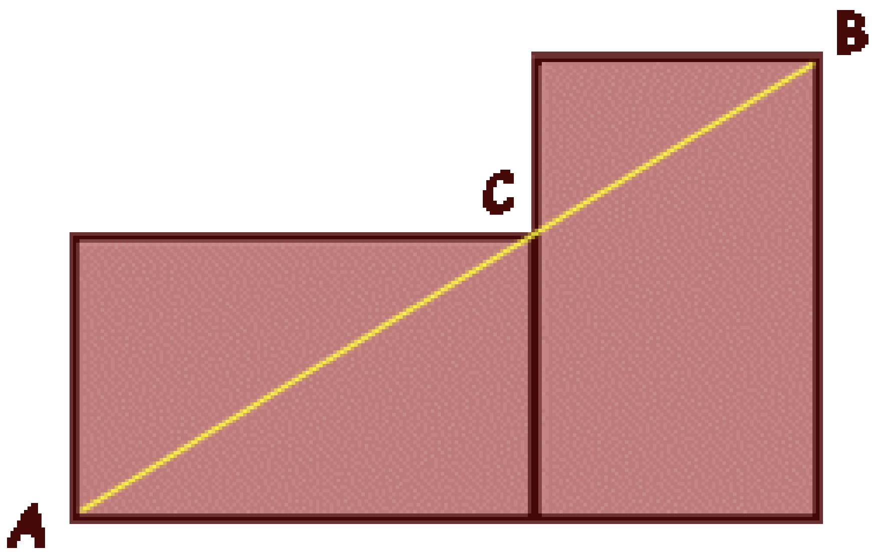
Relaciones entre las partes del pentágono.

Relaciones entre las partes del pentágono estrellado, pentáculo o pentagrama.

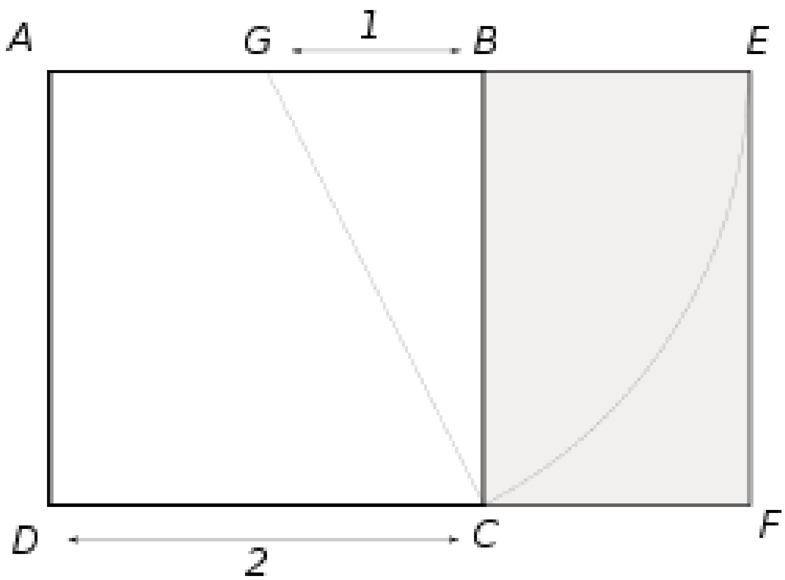
Relaciones entre las partes del decágono.

Relaciones entre las partes del dodecaedro y del icosaedro.

- **El rectángulo áureo de Euclides**



Una propiedad importante de los rectángulos áureos es que cuando se colocan dos iguales como indica la figura, la diagonal AB pasa por el vértice C.



Euclides obtiene el rectángulo áureo AEFD a partir del cuadrado ABCD. El rectángulo BEFC es asimismo áureo.

El rectángulo *AEFD* es áureo porque sus lados AE y AD están en la proporción del número áureo. Euclides, en su proposición 2.11 de *Los elementos*, obtiene su construcción.>

$$GC = \sqrt{5}$$

Con centro en G se obtiene el punto E, y por lo tanto:

$$GE = GC = \sqrt{5}$$

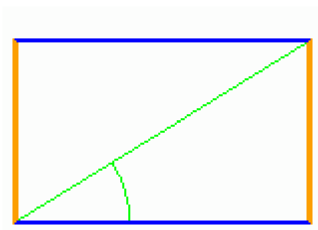
con lo que resulta evidente que

$$AE = AG + GE = 1 + \sqrt{5}$$

de donde, finalmente,

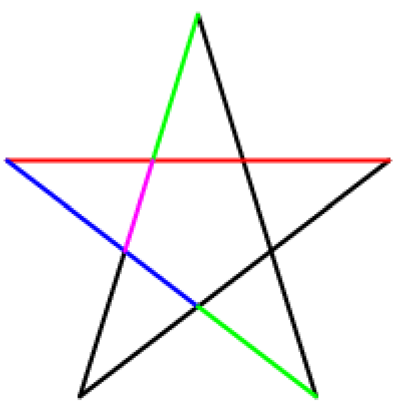
$$\frac{AE}{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

Por otra parte, los rectángulos AEFD y BEFC son semejantes, de modo que este último es asimismo un rectángulo áureo.



Generación de un rectángulo áureo a partir de otro.

- En el pentagrama

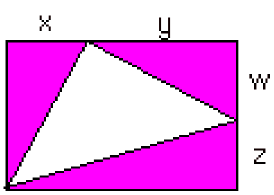


Pentagrama que ilustra algunas de las razones áureas: los segmentos rojo y azul, azul y verde, verde y morado.

El número áureo tiene un papel muy importante en los pentágonos regulares y en los pentagramas. Cada intersección de partes de un segmento interseca a otro segmento en una razón áurea.

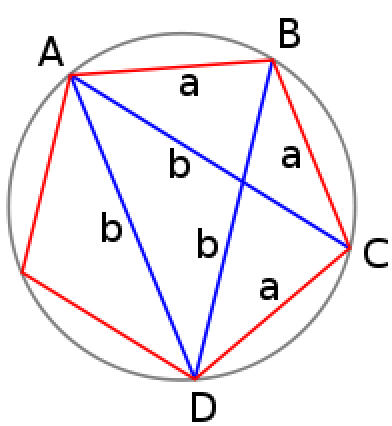
El pentagrama incluye diez triángulos isósceles: cinco acutángulos y cinco obtusángulos. En ambos, la razón de lado mayor y el menor es φ. Estos triángulos se conocen como los triángulos áureos.

Y una aplicación matemática la tenemos en la descomposición de un rectángulo cualquiera en tres triángulos (en rojo) de igual área. La solución se obtiene al hallar la parte áurea de sus lados.



Teniendo en cuenta la gran simetría de este símbolo, se observa que dentro del pentágono interior es posible dibujar una nueva estrella, con una recursividad hasta el infinito. Del mismo modo, es posible dibujar un pentágono por el exterior, que sería a su vez el pentágono interior de una estrella más grande. Al medir la longitud total de una de las cinco líneas del pentáculo interior, resulta igual a la longitud de cualquiera de los brazos de la estrella mayor, o sea Φ. Por lo tanto, el número de veces en que aparece el número áureo en el pentagrama es infinito al anidar infinitos pentagramas.

- El teorema de Ptolomeo y el pentágono



Se puede calcular el número áureo usando el teorema de Ptolomeo en un pentágono regular. Claudio Ptolomeo desarrolló un teorema conocido como el teorema de Ptolomeo, el cual permite trazar un pentágono regular mediante regla y compás. Aplicando este teorema, se forma un cuadrilátero al quitar uno de los vértices del pentágono, Si las diagonales y la base mayor miden **b**, y los lados y la base menor miden **a**, resulta que $b^2 = a^2 + ab$ lo que implica:

$$\frac{b}{a} = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}\,.$$

- *Relación del número de oro con los sólidos platónicos*

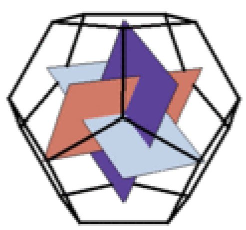
El número áureo está relacionado con los sólidos platónicos, en particular con el icosaedro y el dodecaedro, cuyas dimensiones están dadas en términos del número áureo.

Los 12 vértices de un icosaedro con aristas de longitud 2 pueden darse en coordenadas cartesianas por los siguientes puntos:

(0, ±1, ±φ), (±1, ±φ, 0), (±φ, 0, ±1)

Los 20 vértices de un dodecaedro con aristas de longitud 2/φ=√5−1 también se pueden dar en términos similares:

(±1, ±1, ±1), (0, ±1/φ, ±φ), (±1/φ, ±φ, 0), (±φ, 0, ±1/φ)



Las 12 esquinas de los rectángulos coinciden con los centros de las caras de un dodecaedro.

Para un dodecaedro con aristas de longitud a, su volumen y su área total se pueden expresar también en términos del número áureo:

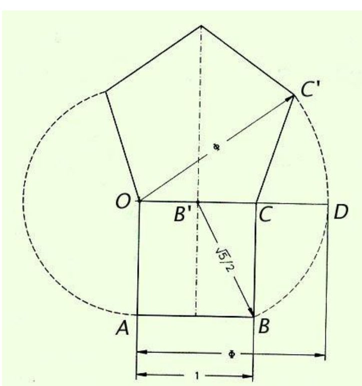
$$A = 3\sqrt{15+20\varphi}\cdot a^2$$

$$V = \frac{4+7\varphi}{2}\cdot a^3$$

Si tres rectángulos áureos se solapan paralelamente en sus centros, las 12 esquinas de los rectángulos áureos coinciden exactamente con los vértices de un icosaedro, y con los centros de las caras de un dodecaedro:

El punto que los rectángulos tienen en común es el centro tanto del dodecaedro como del icosaedro.

El número φ está muy ligado al pentágono regular tanto el convexo como el estrellado. El pentágono regular era el distintivo de los pitagóricos. Los pitagóricos se sentían fascinados por las propiedades de los números e hicieron importantes descubrimientos en música, al comprobar cómo al hacer vibrar una cuerda y su longitud fuera proporcional a ciertos números enteros, entonces se producían unos sonidos melodiosos, es decir, existían ciertas longitudes expresadas en forma de números asociados a la armonía de los sonidos y, por tanto, al deleite del espíritu. Esa escuela filosófica, más bien una secta religiosa, fascinados por las propiedades del número de oro y su representación gráfica en el pentágono regular hicieron suyo ese símbolo que siempre ha poseído unas connotaciones esotéricas. Para las invocaciones a los espíritus, al diablo, se valen de una escenografía donde siempre aparece el pentágono regular, como elemento intermedio, como puerta de acceso entre la realidad y la irracionalidad.



- para la construcción del pentágono regular partimos de un cuadrado de lado l
- construimos el segmento áureo OD, tal que $\frac{OD}{OC} = \varphi$, por el método expuesto anteriormente.
- con centro en B' prolongo el arco BD hasta C'.
- con centro en C trazo el arco OC'.
- el segmento CC' es el lado del pentágono regular y el segmento OC' es la diagonal del pentágono, ambos están relacionados.

diagonal = lado · φ

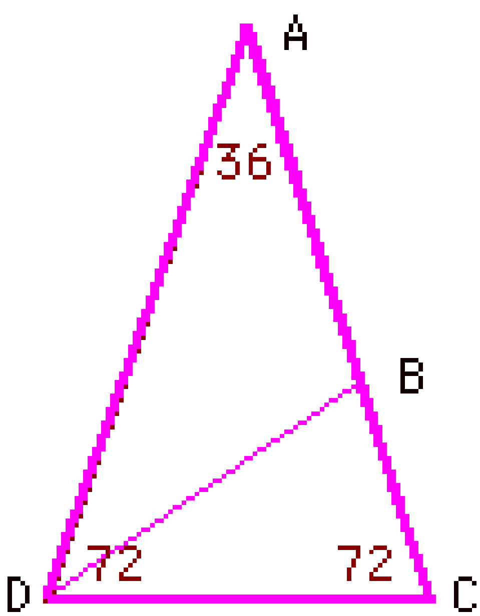
Los ángulos interiores de un pentágono miden: $\frac{180^o \cdot (n-2)}{n} = \frac{180^o \cdot (5-2)}{5} = 108^o$

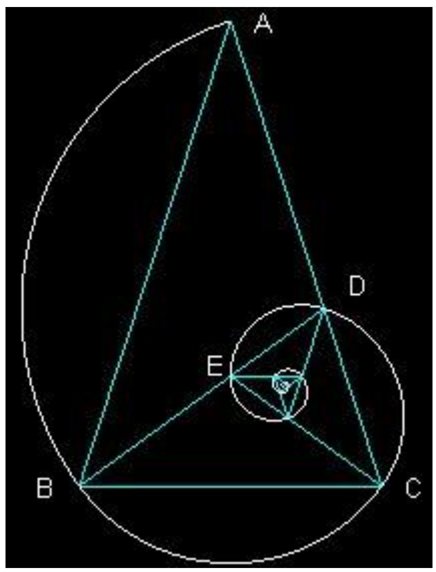
El triángulo OCC' es isósceles, los ángulos de los extremos miden, $\frac{180^o - 108^o}{2} = 36^o = \frac{\pi}{5}$

De aquí deducimos, por inspección del triángulo OCC', que.

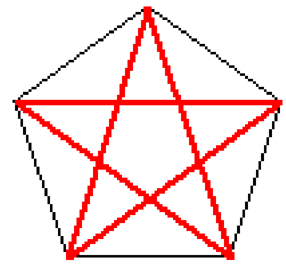
$$\varphi = 2 \cdot cos(\frac{\pi}{5})$$

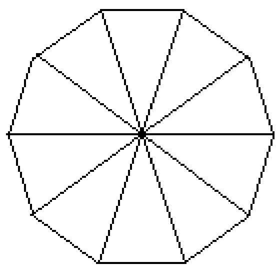
El triángulo isósceles de ángulos 36º, 72º, 72º es la base del pentágono regular estrellado. Obsérvese que las diagonales y el lado están en la proporción del número de oro.

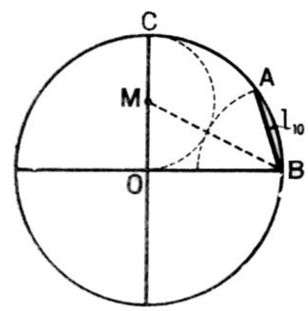




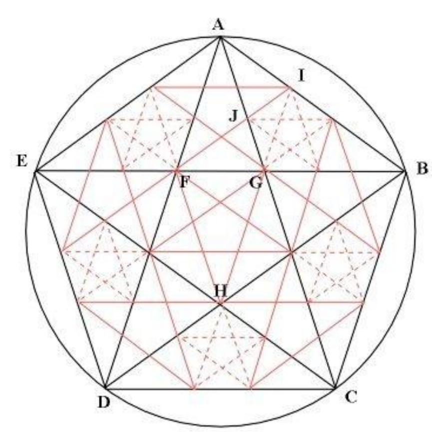
Triángulos áureos







El triángulo isósceles de ángulos; 36º-72º-72º nos servirá también para obtener el lado del decágono regular. Obsérvese que el decágono podemos descomponerlo en 10 triángulos isósceles de esas características y fácilmente se ve que el lado del decágono es justamente la parte áurea del radio. Por tanto, a partir del radio OB (ver figura superior), levantamos el segmento OM de longitud igual a R/2. Unimos M con B. Trazamos el arco OC con centro en M. El segmento AB es la parte áurea del radio y consecuentemente, el lado del decágono regular.



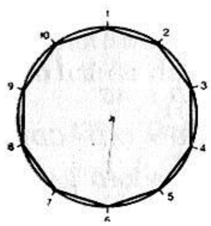


FIG. 70
Decágono

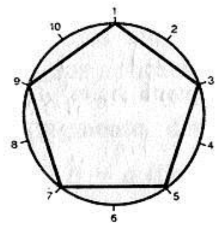


FIG. 71
Pentágono

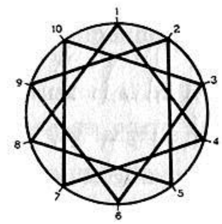


FIG. 72
Decágono estrellado

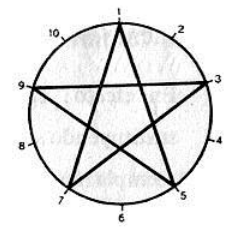
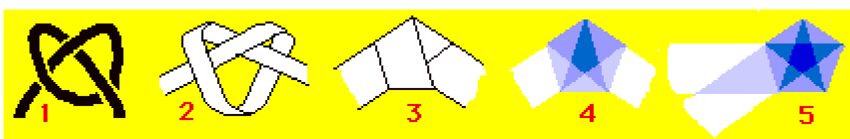


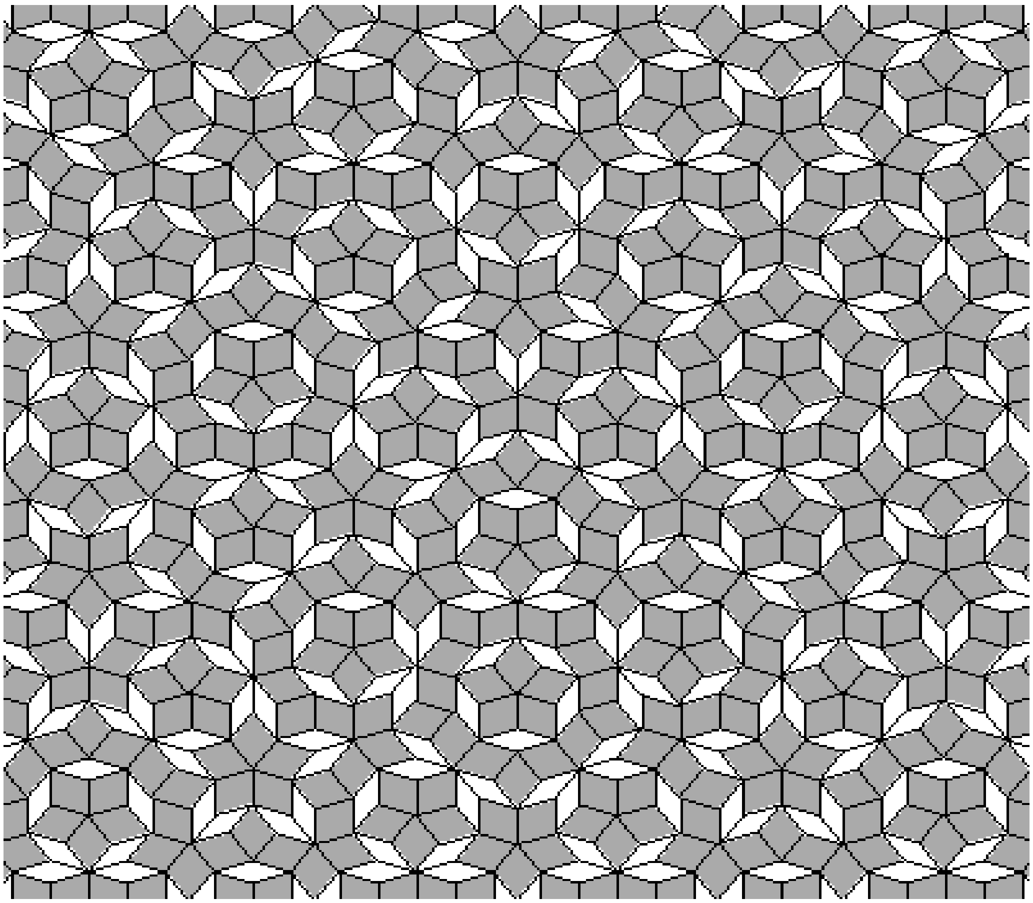
FIG. 73
Pentágono estrellado

Llevando ese valor sobre la circunferencia marcamos los 10 puntos. Al unirlos de dos en dos dibujamos el pentágono regular, al unirlos de tres en tres el decágono regular estrellado y al unirlos de cuatro en cuatro el pentágono regular estrellado. Obsérvese en los polígonos estrellados como se forma interiormente el polígono convexo correspondiente.

Una cinta de papel anudada nos proporciona un pentágono regular.

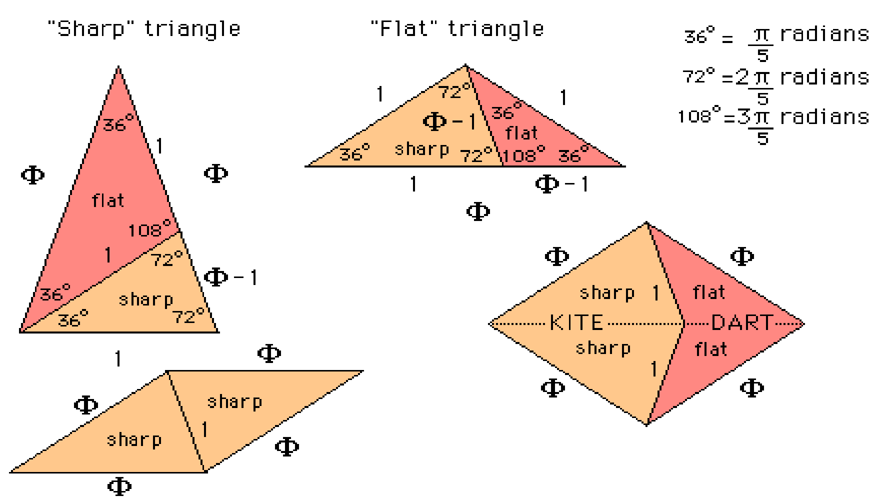


Un mosaico también muy hermoso diseñado por el profesor Roger Penrose, donde se usan triángulos que involucran las medidas del número de oro, como se muestra a continuación del mosaico o tesalación



Sus elementos tienen como base las figuras.

Otro ejemplo del diseño artístico basado en las estéticas sensaciones de la razón áurea.

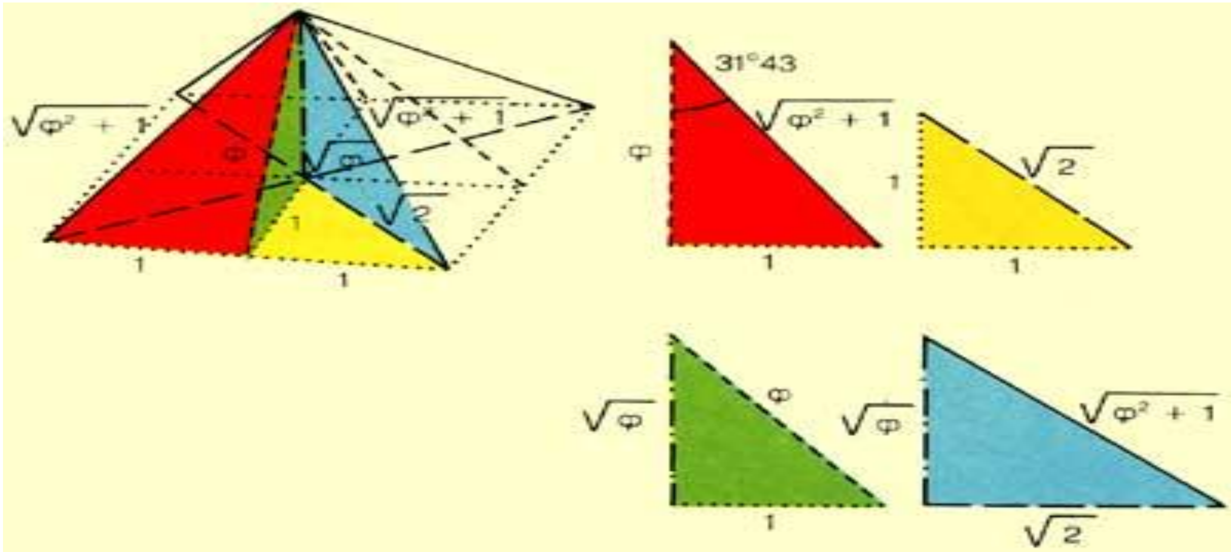


3.3 Φ EN LA ARQUITECTURA

El número áureo ha sido utilizado desde la época de los egipcios para la construcción de edificios, si bien, son los griegos los que lo explotaron al máximo usando en todas las facetas del arte. A continuación se detallan algunos ejemplos de este uso.

Pirámide de Keops

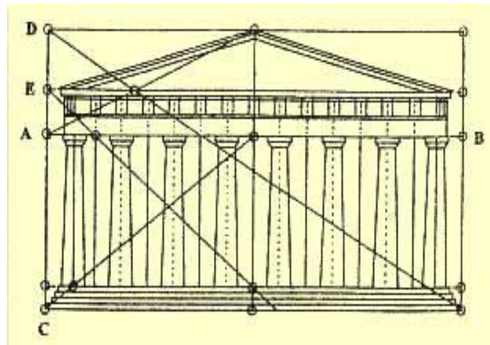
El primer uso conocido del número áureo en la construcción aparece en la pirámide de Keops, que data del 2600 a.C..



Esta pirámide tiene cada una de sus caras formadas por dos medios triángulos áureos: la más aparente, aunque no la única, relación armónica identificable en el análisis de las proporciones de este monumento funerario en apariencia simple.

Se nota en el bosquejo, las complejas relaciones de sus medidas para aplicar la proporcion aurea o número de oro

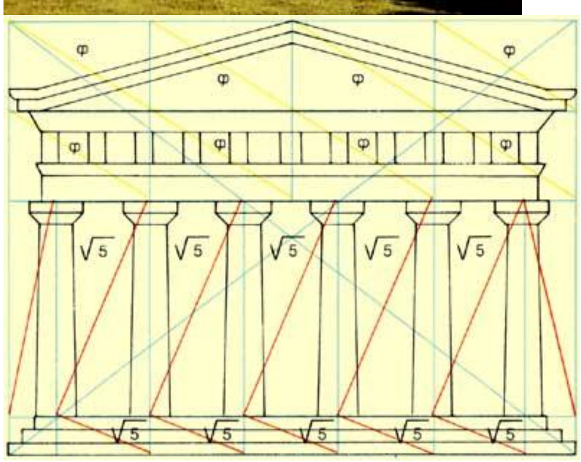
El Partenón



Un ejemplo de rectángulo áureo en el arte es el alzado del Partenón griego.

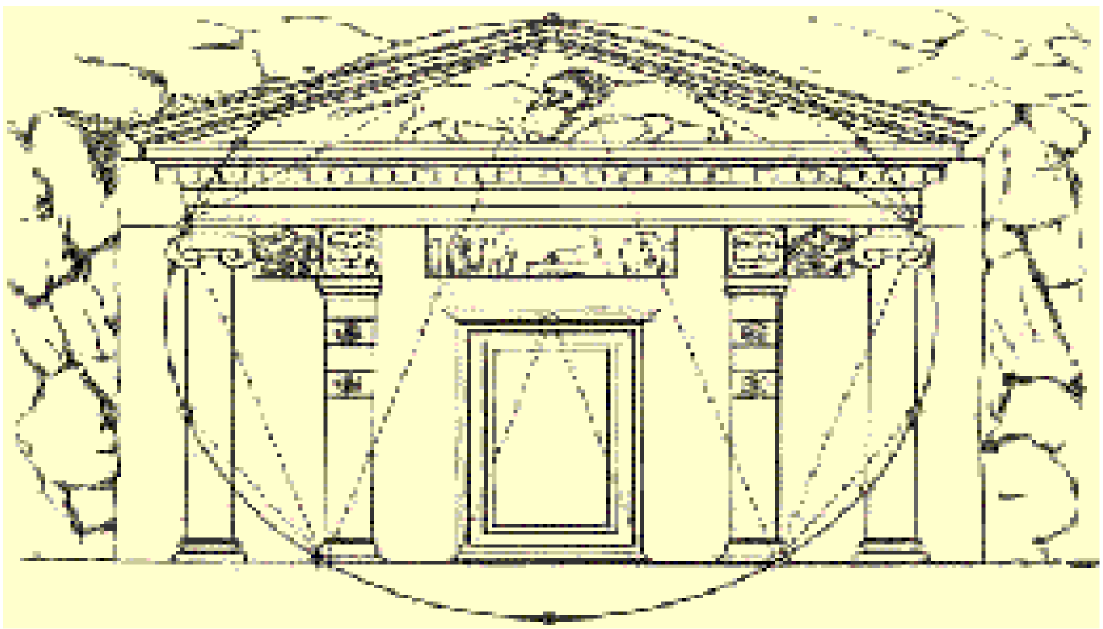
En la figura se puede comprobar que AB/CD=Φ. Hay más cocientes entre sus medidas que dan el número áureo, por ejemplo: AC/AD=Φ y CD/CA=Φ.

Templo de Ceres



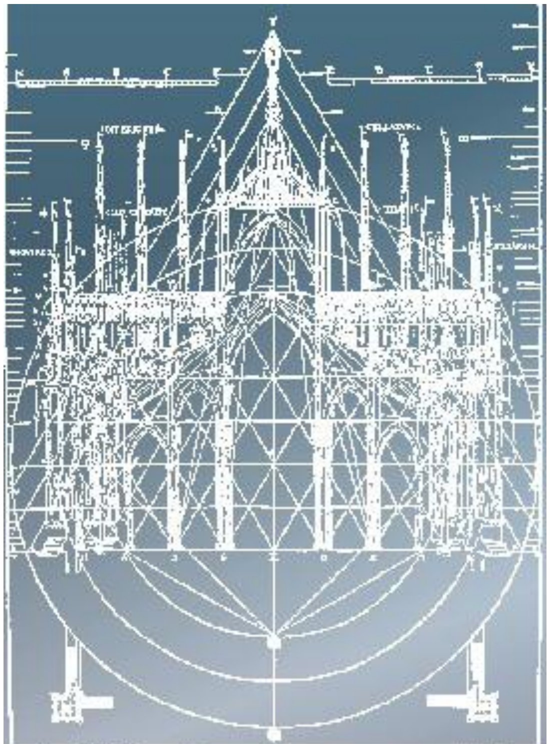
El Templo de Ceres en Paestum (460 a.C.) tiene su fachada construida siguiendo un sistema de triángulos áureos, al igual que los mayores templos griegos, relacionados, sobre todo, con el orden dórico.

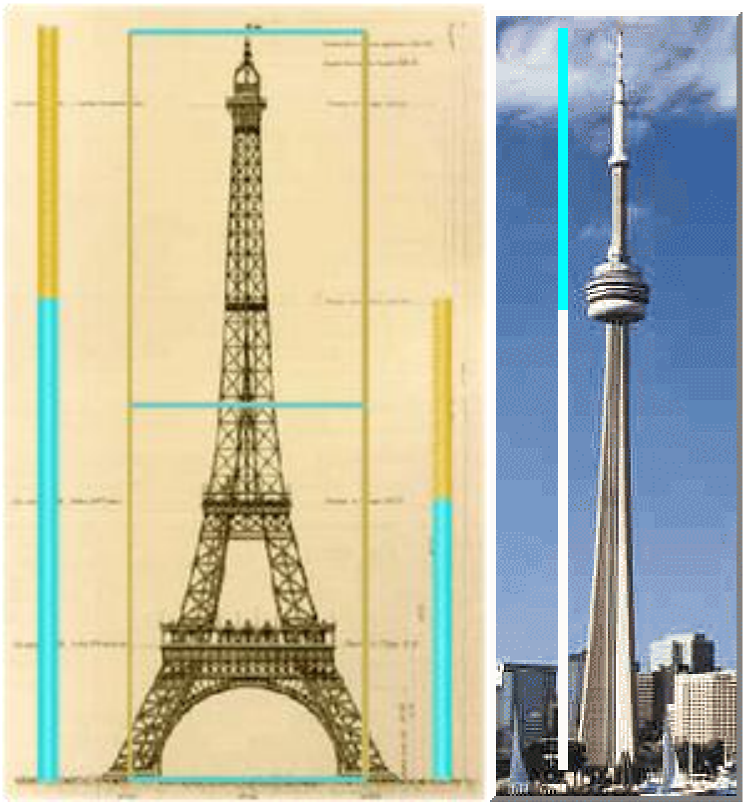
Tumba Rupestre de Mira



La Tumba Rupestre de Mira en Asia Menor basa su construcción en un pentágono áureo, en el que el cociente de la diagonal y el lado de dicho pentágono es el número áureo.


la catedral de Notre dame, en Paris está construida con las lelaciones del número de oro, obsérvese los rectángulos áureos demarcados a la izqierda





Los ejes de los cuatro pilares forman un cuadrado de 100 m2, que es el lado pequeño de un rectángulo aureo. Es decir que colocando los dos rectángulos se consigue la altura de la torre. También se encuentran en las diferentes partes de la torre, lo cual sucede cuando se multiplica 100 X 2 X Fi = 323,61 m, que es la altura de la torre.

También se encuentra en las diferentes partes de la torre, como se puede comprobar en el dibujo, que está hecho a escala, donde el espacio azul a 1, y Fi sería el espacio azul más el dorado.

La estatua de la Libertad y el número áureo

La estatua de la libertad es uno de los monumentos más famosos en el mundo y fue un regalo otorgado por los franceses a Norteamérica en conmemoración a la alianza hecha por las dos naciones durante la

Revolución Norteamericana.
La majestuosa estatua fue construida hace más de un siglo, y fue el producto de la combinación del talento artístico del ingeniero Gustave Eiffel y el escultor francés Frédéric Auguste Bartholdi. Este último se inspiró en el trabajo el escultor Cales de Lindos y en su famosa obra El Coloso de Rodas, una gigantesca estatua del dios griego Helios, erigida en la isla de Rodas, Grecia, en el siglo III a. C.

Dado a que el número áureo o número phi era conocido en la antigua Grecia, el arte de esa época fue influenciado enormemente por este descubrimiento y es muy probable que Bartholdi al inspirarse en el Coloso de Rodas haya plasmado en su escultura la proporción divina.
Esto se comprueba, por ejemplo en las dimensiones de largo y ancho de la tabla que sostiene la estatua en su mano izquierda. La longitud real es de 7,19 metros y su ancho es de 4,14 metros; si se determina la razón de ambas medidas se obtiene un valor de 1,7 metros, un valor cercano al número de oro. La misma situación ocurre si se relacionan la altura de la cabeza (5,26 metros) y su ancho (3,05 metros). La razón aproximada es también de 1,7 metros, haciendo evidente nuevamente la proporción divina

en su estructura.

Por otra parte, dado a que esta obra artística es figurativa, existen coincidencias con lo que apunta Leonardo da Vinci respecto a las proporciones que exhibe el cuerpo humano y que son cercanas a la razón áurea. Por ejemplo, se dice que existe una relación entre la longitud del brazo y la distancia del codo a los dedos. Realizando mediciones aproximadas en una fotografía de la estatua de la libertad, dado a que no existen datos disponibles, la presencia del número áureo se comprueba una vez más pues la razón de ambas medidas da un valor muy cercano al número de oro (aproximadamente1,6). Finalmente otro ejemplo claro se puede observar en la base de la estatua, pues en esta se encuentra repetidamente el rectángulo de oro.

3.4 Φ EN LA ESCULTURA

Para el escultor griego Fidias, el conocimiento del número de oro era vital para plasmar las proporciones perfectas en sus obras, la más conocida, Apolo de Belvedere, donde su nota su perfecto conocimiento de las proporciones brindadas por esta relación matemática.

6.3.4 Le Corbusier y "el modulor"

También fue importante la figura de Le Corbusier, el cual se interesó de modo especial en las proporciones del cuerpo humano. Quería presentar una medida humana como alternativa al metro -la millonésima parte del cuadrante terrestre-, introducido por Napoleón. El resultado fue "el modulor", un sistema de diseño basado en la medida de 113 cm. (la altura del ombligo medida desde el suelo) y en una proporción la sección áurea.

De esta manera una ventana estará a 113 cm. de altura, dividiéndola con la sección áurea, se obtienen 70 y 43 cm., las altura de una mesa y de una silla. Multiplicándose por dos, se obtienen 226 cm. la altura de la habitación, como un hombre con el brazo levantado. Y así sucesivamente.

El modulor consiste en dos escalas, diferente, que se pintaban de rojo de azul. Las dimensiones de la escala azul son el doble de la escala roja, y las divisiones de cada escala se basan en la proporción áurea. Por tanto el modulor no es solamente un instrumento de proporción arquitectónica, sino también un medio de asegurar la repetición de formas similares, como las diferentes formas que pueden hallarse en un rectángulo, gracias a unas líneas transversales horizontales y verticales.

El Número de Oro se ha encontrado presente desde las impresionantes construcciones de nuestros antepasados hasta las grandes obras de Arte de nuestro tiempo: la importancia de la proporción áurea en la Historia del Arte queda más que demostrada; y por tanto, vigente en el ser humano como parte de su esencia.

La Divina Proporción y el diseño web: Se dice que si a una línea recta le agregamos un punto en un lugar que no sea el centro, la mayoría de las veces lo agregaremos acercándonos a la proporción de 62% y 38%. Esto nos permite ofrecer composiciones más armoniosas que puedan enfocar la atención en un punto deseado. Una de las formas para trabajar con el número áureo es dimensionando el soporte. Esto no es otra cosa que utilizar un área de trabajo que tenga proporciones áureas.

El rectángulo es un área de trabajo áurea, si esto lo aplicamos al diseño web obtenemos que para una interfaz 1024 x 768 con un ancho de 1010 pixeles visibles (le restamos 14 pixeles, que es lo que usan las barras de deslizamiento laterales) le correspondería una altura de 624 pixeles. Aquí surge un problema, ya que en el diseño web generalmente podemos saber la anchura de un contenido, pero no la altura, ya que depende de la cantidad de contenido que estará en la página. Pero gracias a esta área de trabajo podemos crear una retícula proporcionada, para ajustar los elementos principales del diseño de un sitio web y ajustando los restantes con proporciones áureas.

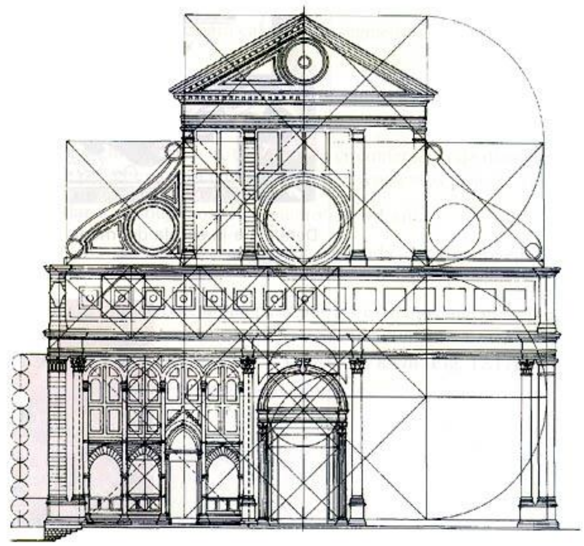
3.5 Φ EN LA PINTURA

En el cuadro *Leda atómica*, de Salvador Dalí, hecho en colaboración con el matemático rumano Matila Ghyka.

El número áureo aparece en las relaciones entre altura y ancho de los objetos y personas que aparecen en las obras de Miguel Ángel, Durero y Leonardo Da Vinci, entre otros.

Las relaciones entre articulaciones en el hombre de Vitruvio y en otras obras de Leonardo da Vinci

El "Entierro del Conde de Orgaz" y un estudio de sus proporciones basado en el número de oro.

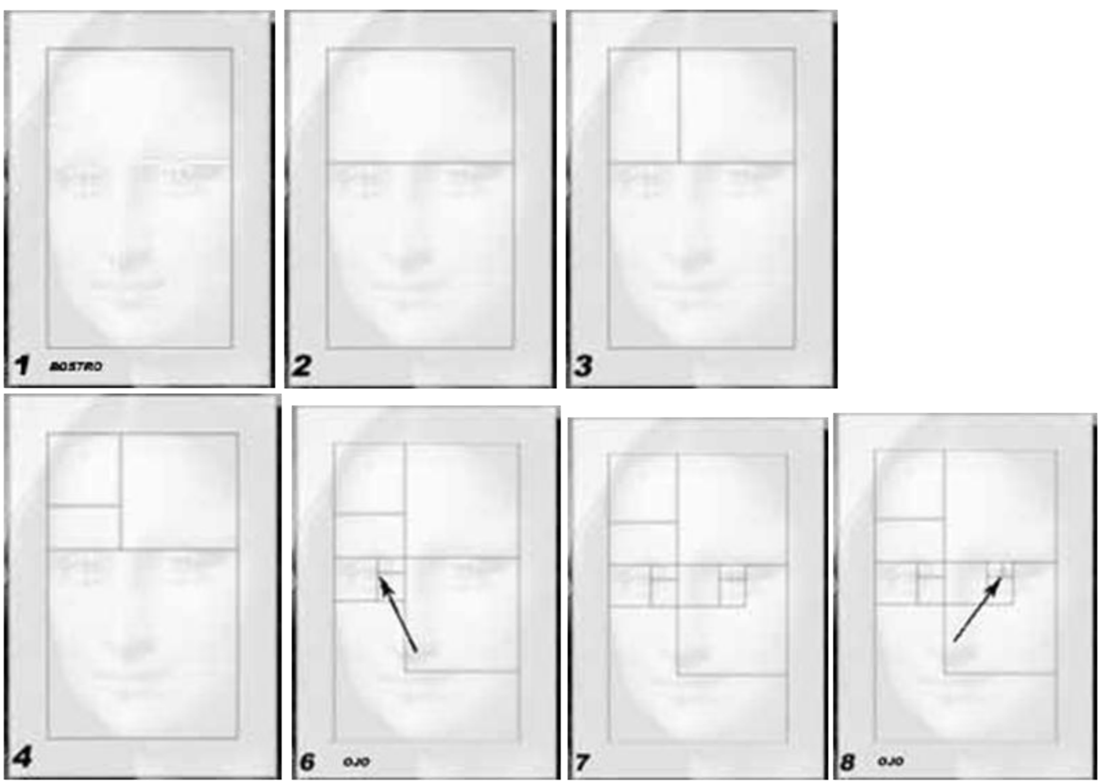


Si disponemos de una hoja de papel de dimensiones φ x 1, al eliminar el cuadrado de lado unidad obtenemos otro rectángulo de dimensiones 1 x (φ-1), que es semejante al primero. Procediendo sucesivamente tendremos toda una colección de rectángulos áureos de tamaño cada vez más pequeños pero todos semejantes entre sí. No sólo aparece el número de oro en las obras de arte sino también en la Naturaleza.

Una construcción similar podemos realizar partiendo de un rectángulo áureo de dimensiones φ x 1, dividiendo el rectángulo áureo en un cuadrado de lado = 1, entonces el rectángulo sobrante tiene dimensiones 1 x (φ-1). En ese nuevo rectángulo separamos el cuadrado de lado (φ-1) quedando un rectángulo sobrante de dimensiones (φ-1) x (2-φ). Siguiendo el proceso vamos obteniendo rectángulos de dimensiones (2-φ) x (5-3φ), (5-3φ) x (5φ-8), tal como observamos en la figura.

Los ejes de sus cuatro pilares forman un cuadrado de 100 metros, que seria el lado pequeño de un rectángulo áureo. Pues poniendo dos rectángulos conseguimos la altura de esta torre: 100 x Φ x 2 $\approx$ 323,61 metros. También se encuentra en las diferentes partes de la torre, vea el dibujo donde el espacio azul sería igual a uno y Phi seria el espacio azul más el dorado. La Gioconda es el cuadro insignia de Leonardo, y lo construyo estrictamente con las configuraciones del numero de oro, como se aprecia

Construcción fase por fase del mapa áureo del rostro de Mona Lisa



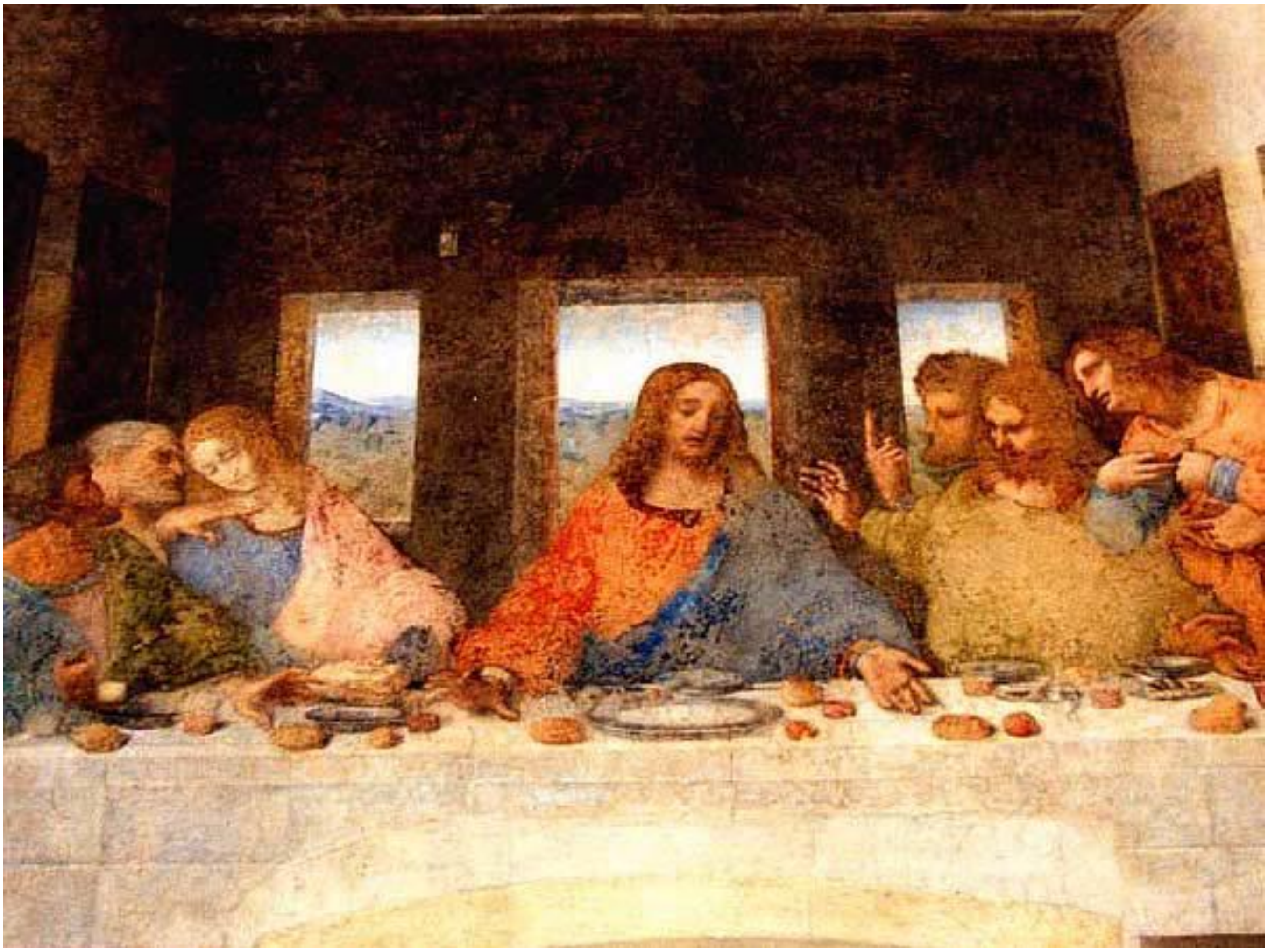
En el primer cuadro podemos ver como el rostro de la Gioconda se encuadra perfectamente en un rectángulo áureo.

Dentro de ese rectángulo áureo dibujamos un cuadrado en el segundo cuadro quedando arriba otro rectángulo áureo. En el tercer y cuarto cuadro realizamos la misma operación que para el segundo. Para el quinto cuadro trasladamos simétricamente según la línea que pasa justo encima de los ojos el cuadrado grande de arriba y el último rectángulo áureo obtenido.

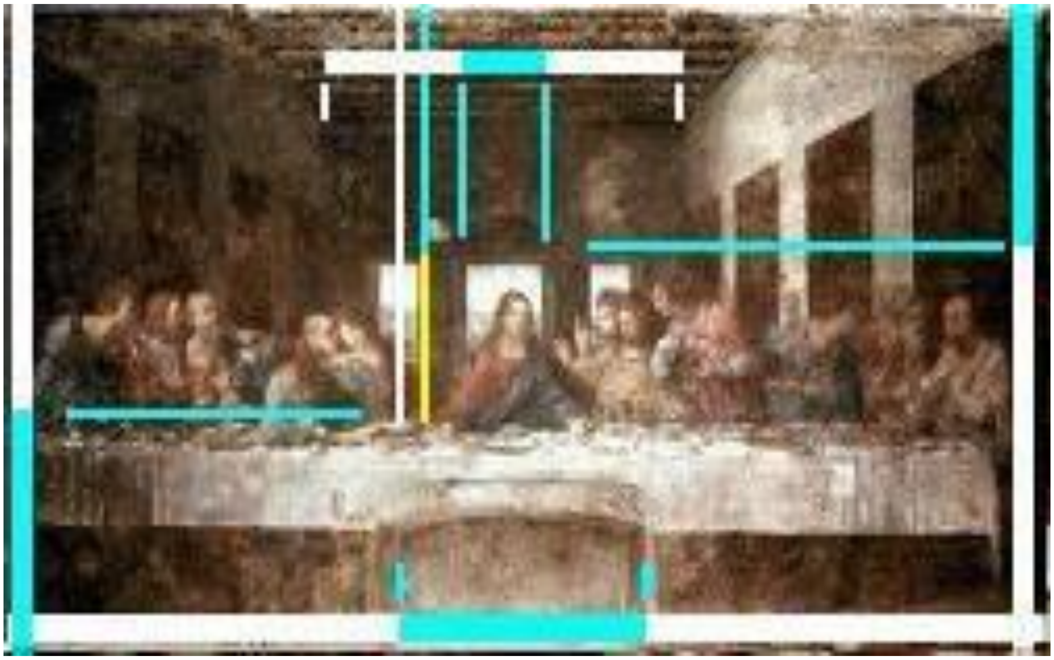
Se puede ver que la línea que sale exactamente del nacimiento del pelo (justo en la raya del pelo) pasa por la mitad de la nariz y termina en la mitad de donde empieza la boca de Mona Lisa.
Sucesivamente se realiza la misma operación para los cuadros finales, observando por último que el último rectángulo parte de la nariz y va hasta el ojo derecho.

También en la composición en el mundo de la pintura, "La Anunciación", de Da Vinci.

El hablar de Leonardo Da Vinci y en especial su obra llamada "la ultima Cena" va de la mano de muchos otros temas como la divina proporción, numero Phi, secuencia Fibonacci los cuales en resumidas cuentas tratan de lo mismo nicamente variado en el enfoque que se quiera dar, sea en matemáticas, física en la ciencia y especialmente en el arte. Estas relaciones las utilizó para definir todas las proporciones fundamentales en su pintura La última cena, desde las dimensiones de la mesa, hasta la disposición de Cristo y los discípulos sentados, así como las proporciones de las paredes y ventanas al fondo. Claro está que Da Vinci enfocó y plasmó esta relación perfectamente, para enseñar explícitamente el objetivo de su obra.



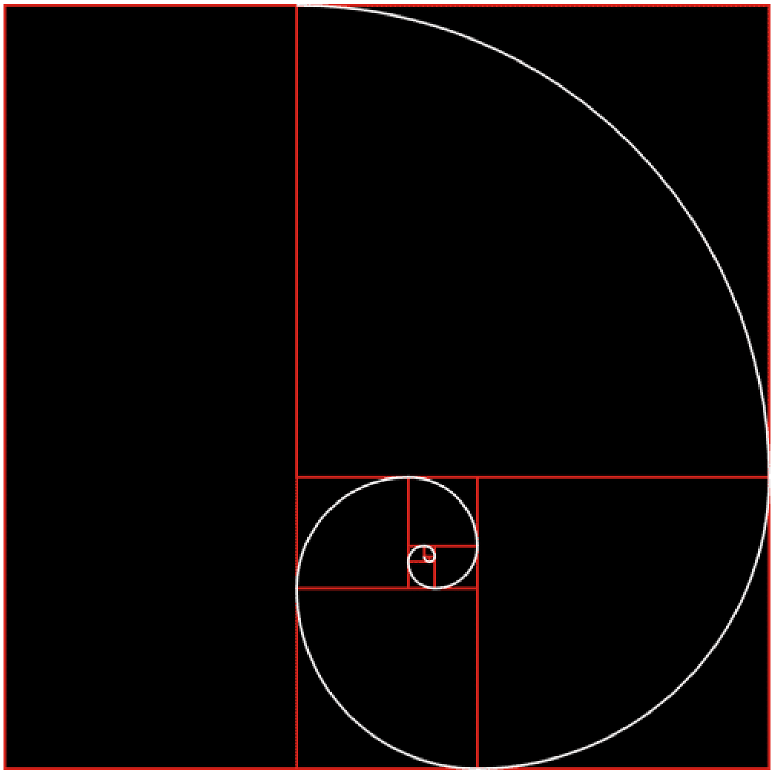
A pesar del tiempo y de todos los daños causados por el mismo, así como por la ignorancia de muchos hacia esta gran obra, se sigue dando una gran investigación alrededor de los misterios que encierra y de su magnificencia e imponencia en cuanto los cuidadosos trazos, que involucran la más alta armonía, estética que tiene.

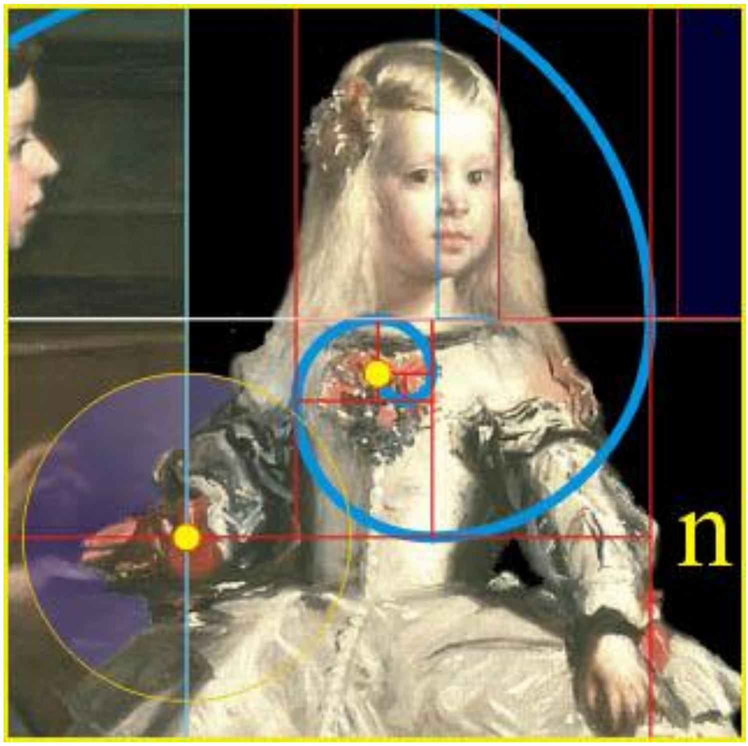


La divina proporción en esta obra nos muestra la importancia y las grandes aplicaciones que se le pueden brindar en la sociedad actual. observemos y exploremos las proporciones naturales, los patrones repetitivos y las pautas matemáticas de la naturaleza (incluida la vida humana), las formas y los patrones de la armonía, los modelos energéticos, los cuales hoy, donde uno se puede atrever a afirmar que contienen la "información más pura de todo el proceso del Universo."

La espiral de Durero y la serie de Fibonacci.

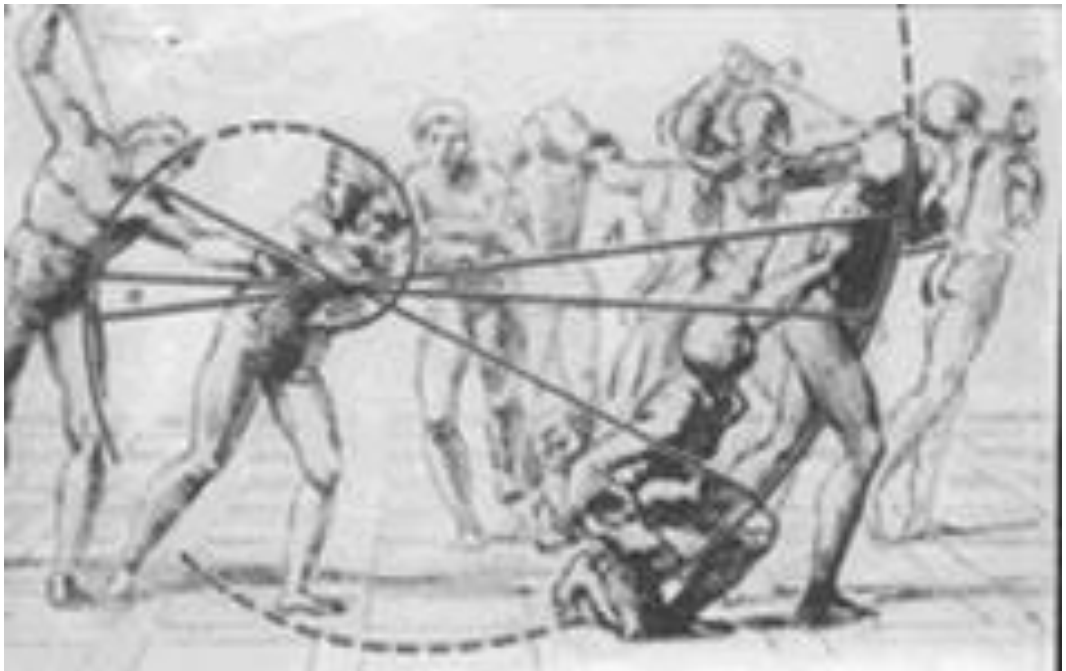
En 1525, tres años antes de morir, el genial pintor renacentista y gran enamorado de las Matemáticas, Alberto Durero (1471-1528) publica la obra titulada "Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas". Es un precioso libro en el que pretende enseñar a los artistas, pintores y matemáticos de la época diversos métodos para trazar diversas figuras geométricas. En esta obra Durero muestra cómo trazar con regla y compás algunos espirales y entre ellos uno que pasará a la historia con su nombre: "El Espiral de Durero" basado en la sección áurea, sin embargo, habría que recordar también que estuvo precedida tres siglos antes por los números de la sucesión; 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144..., de Fibonacci.



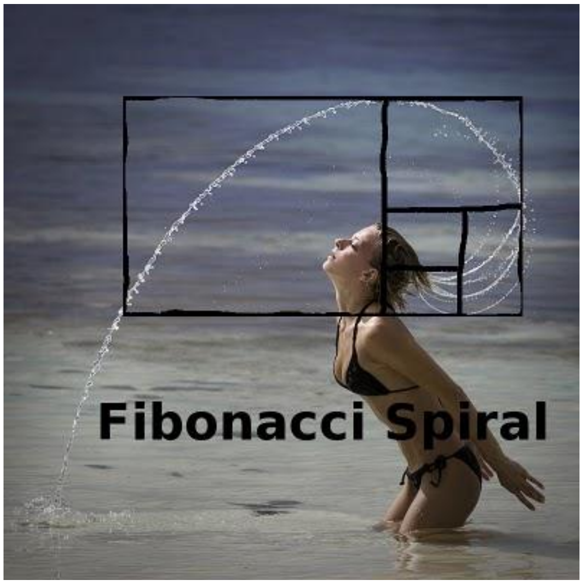


Por ejemplo, Diego de Silva Velázquez (1599-1660), pintor español, máximo representante de la pintura barroca en su país. Creó las obras maestras "Las Meninas" (1656). Representa a la infanta Margarita, rodeada de dos meninas o damas de honor, de pie junto al pintor, quien mira hacia el espectador desde la parte izquierda del cuadro. Velázquez aparece pintando al rey Felipe IV y a la reina doña Mariana, cuya presencia sólo queda sugerida por el reflejo de sus efigies en el espejo situado al fondo de la habitación.

En este caso de composición, el espiral nace en el centro del pecho de la Infanta Margarita de Austria, es decir; en su propio esternón. Las propiedades consolidadas del espiral, y su crecimiento proporcional sobre la superficie de Las Meninas, es consecuencia de la disponibilidad natural de la Geometría y algo más que nos remite a un amplio significado: "Simbólicamente, este punto medio y anatómico del cuerpo de la Infanta Margarita de Austria, marca el centro reservado de los elegidos, en todos los casos, una imagen o identidad exclusiva de la verdadera semilla de los reyes del mundo, tal y como en la tradición europea el Emperador se situaba, siempre, en el lugar central en las ceremonias".



La composición de un cuadro tiene muy en cuenta la ordenación de los elementos en un todo unitario. El concepto de simetría es uno de los aspectos a valorar. En un primer lugar, el pintor ordena los elementos en función de un eje y los distribuye de manera ordenada a su derecha e izquierda. Un tipo de composición es la simetría radial, esta se puede utilizar para crear las composiciones multisimétricas que tienen un centro visual fuerte del interés y de un alto grado de energía óptica.

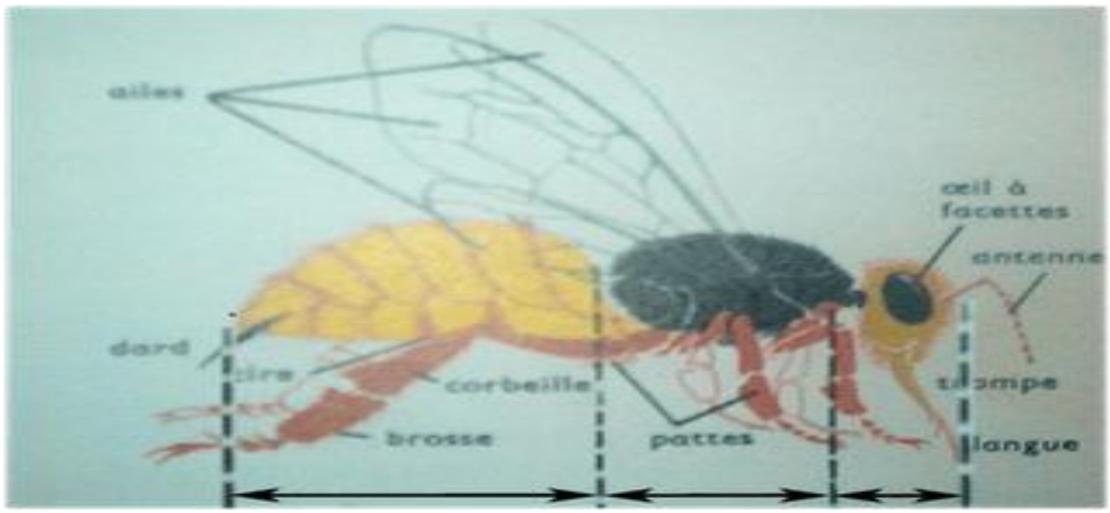


3.6 Φ EN LA NATURALEZA

En la naturaleza, hay muchos elementos relacionados con la sección áurea y/o los números de Fibonacci:

3.6.1 Abejas

La relación que existe entre la cantidad de abejas macho y hembra en un panal. Los machos de una colmena de abejas tienen un árbol genealógico que cumple con esta sucesión. El hecho es que los zánganos, el macho de la abeja, no tiene padre (1), pero sí que tiene una madre (1, 1), dos abuelos, que son los padres de la reina (1, 1, 2), tres bisabuelos, ya que el padre de la reina no tiene padre (1, 1, 2, 3), cinco tatarabuelos (1, 1, 2, 3, 5), ocho tataratatarabuelos (1, 1, 2, 3, 5, 8) y así sucesivamente, cumpliendo con la sucesión de Fibonacci.



La medida del abdomen de la abeja dividida por Φ es igual a la medida de su tórax y a su vez la medida del tórax dividida por Φ es igual a la medida de su cabeza.
También el número de descendientes en cada generación de

por Φ es igual a la medida de su cabeza. También el número de descendientes en cada generación de una abeja macho o zángano nos conduce a la sucesión al número áureo.

La relación entre la cantidad de abejas macho y abejas hembra en un panal.

el número de rutas que recorre una abeja cuando se desplaza por las celdillas de un panal son términos de la sucesión de Fibonacci, siendo **n** el número de celdillas. El número de antepasados de los zánganos son términos de Fibonacci (nótese que los zánganos son pro-

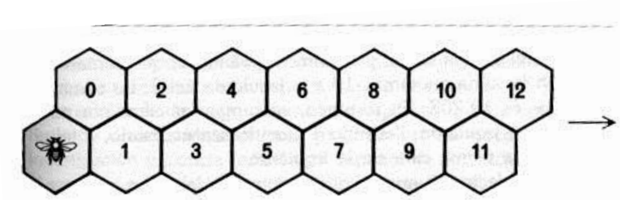
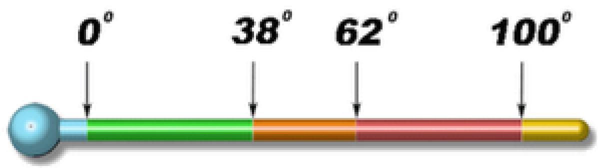


Fig. 75. La abeja puede caminar hasta la celdilla n de F_{n+2} maneras.

ducidos a partir de los huevos infertilizados de la abeja reina, es decir, tienen una madre pero no tienen padre).

3.6.2 Φ En Mamíferos

Phi en las temperaturas corporales de los animales

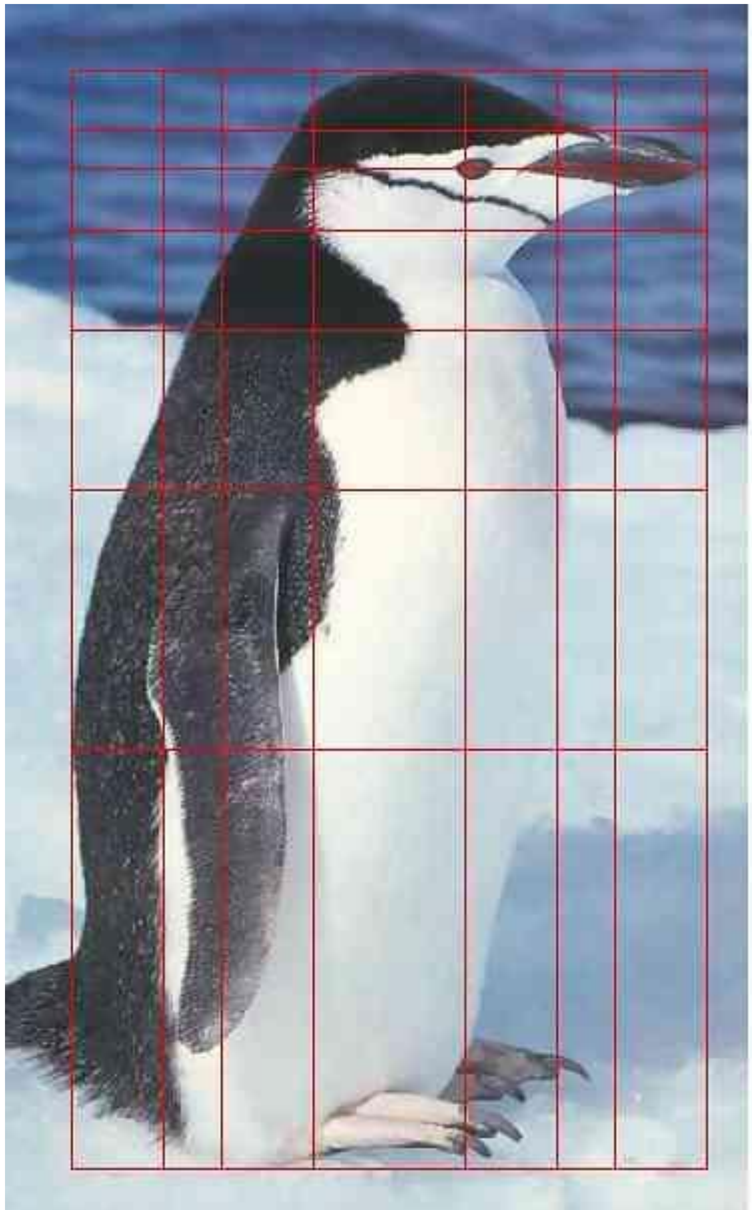


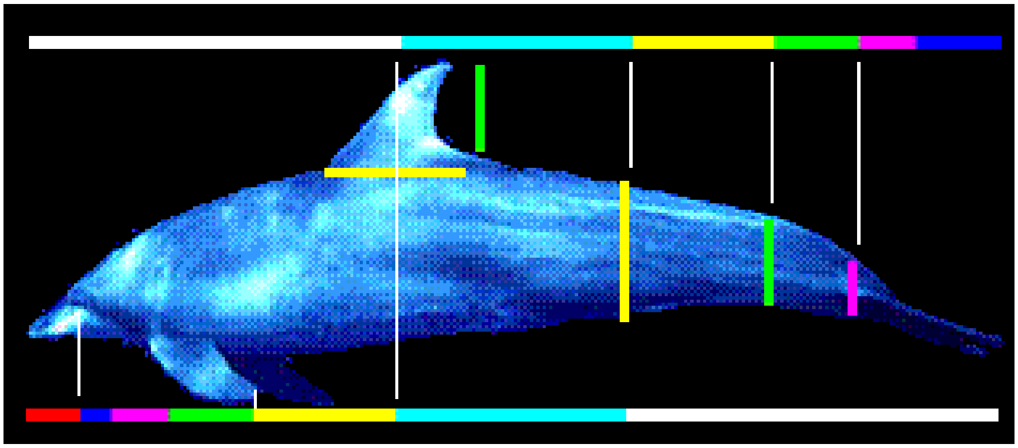
Si suponemos que la distancia desde 0° (temperatura de hielo del agua) hasta 100° (temperatura de ebullición del agua) es igual a Φ (≈1,618). Una unidad partiendo desde 0° seria aproximadamente 62° que es la temperatura límite de la vida, la temperatura mínima necesaria para matar las bacterias. La pasteurización se puede realizar a 62° en media hora. Una unidad partiendo desde 100° en dirección a 0° seria 38° que es la temperatura aproximada de los mamíferos. La temperatura normal del hombre está alrededor de 37° pero en cambio para los gatos o los perros esta alrededor de 39°. La media de los mamíferos está muy cercana a los 38°.

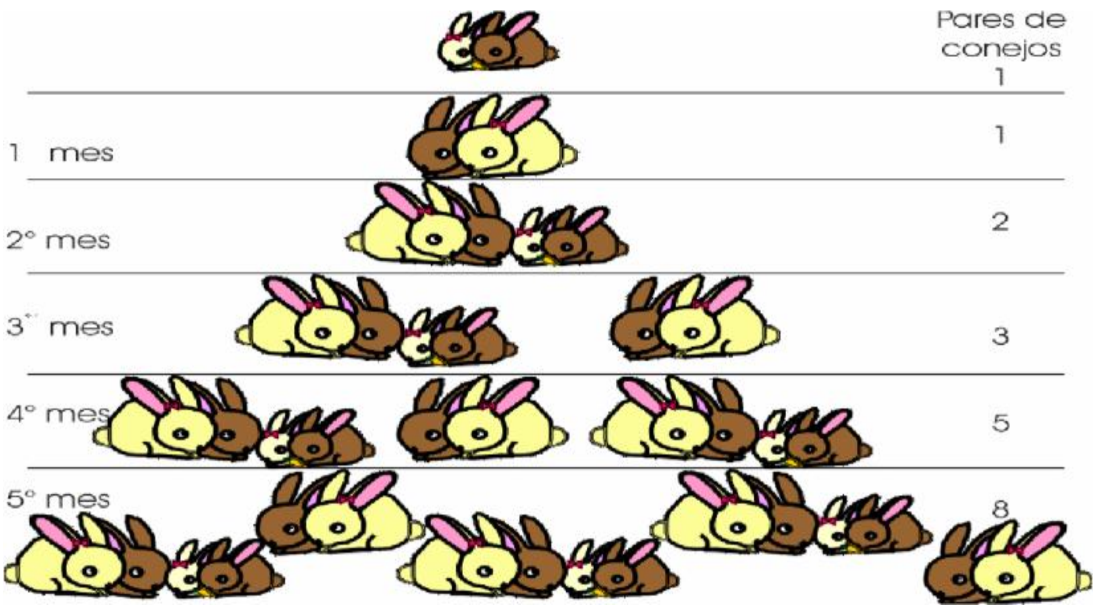
100/Φ ≈ 61,8 ≈ temperatura límite de la vida.

100 - [100/Φ] ≈ 38,2 ≈ temperatura de los mamíferos.

La forma de espiral de Durero o de Fibonacci que presentan la forma de los cuernos de alces, así como el problema de los conejos, que describe perfectamente la serie, suponiendo que los conejos procrean una pareja en un mes, aunque es de anotar que la preñez dura 32 días y una pareja de conejos, puede tener una camada de 4 a 6 conejos por parto

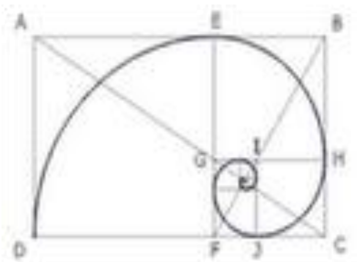




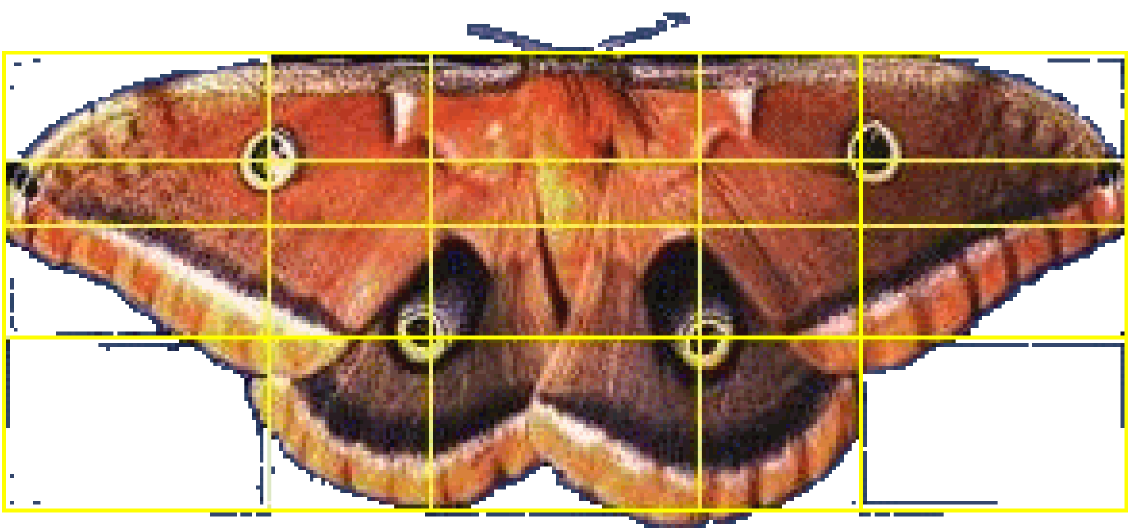


Supongamos una pareja de conejos, los cuales pueden tener descendencia una vez al mes a partir del segundo mes de vida, suponemos asimismo que los conejos no mueren y que cada hembra produce una nueva pareja (conejo, coneja) cada mes. La pregunta es, ¿cuántas parejas de conejos existen en la granja al cabo de n meses? Esta respuesta la encontramos en la serie.

3.6.3 Φ En Caracoles y similares




Lida Rose



3.6.4 Φ en plantas

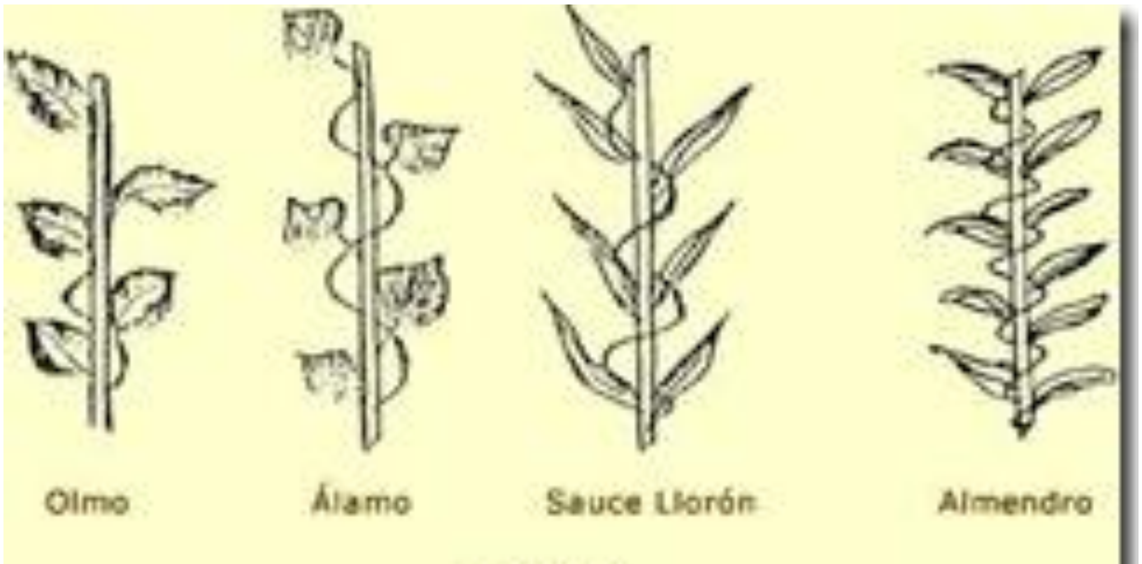
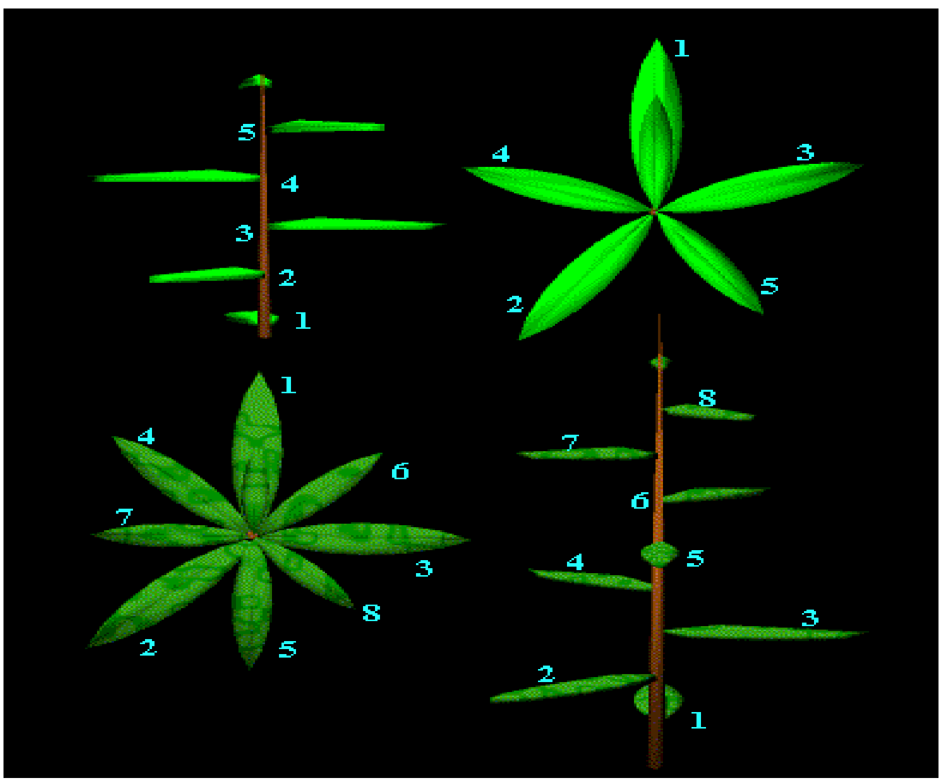
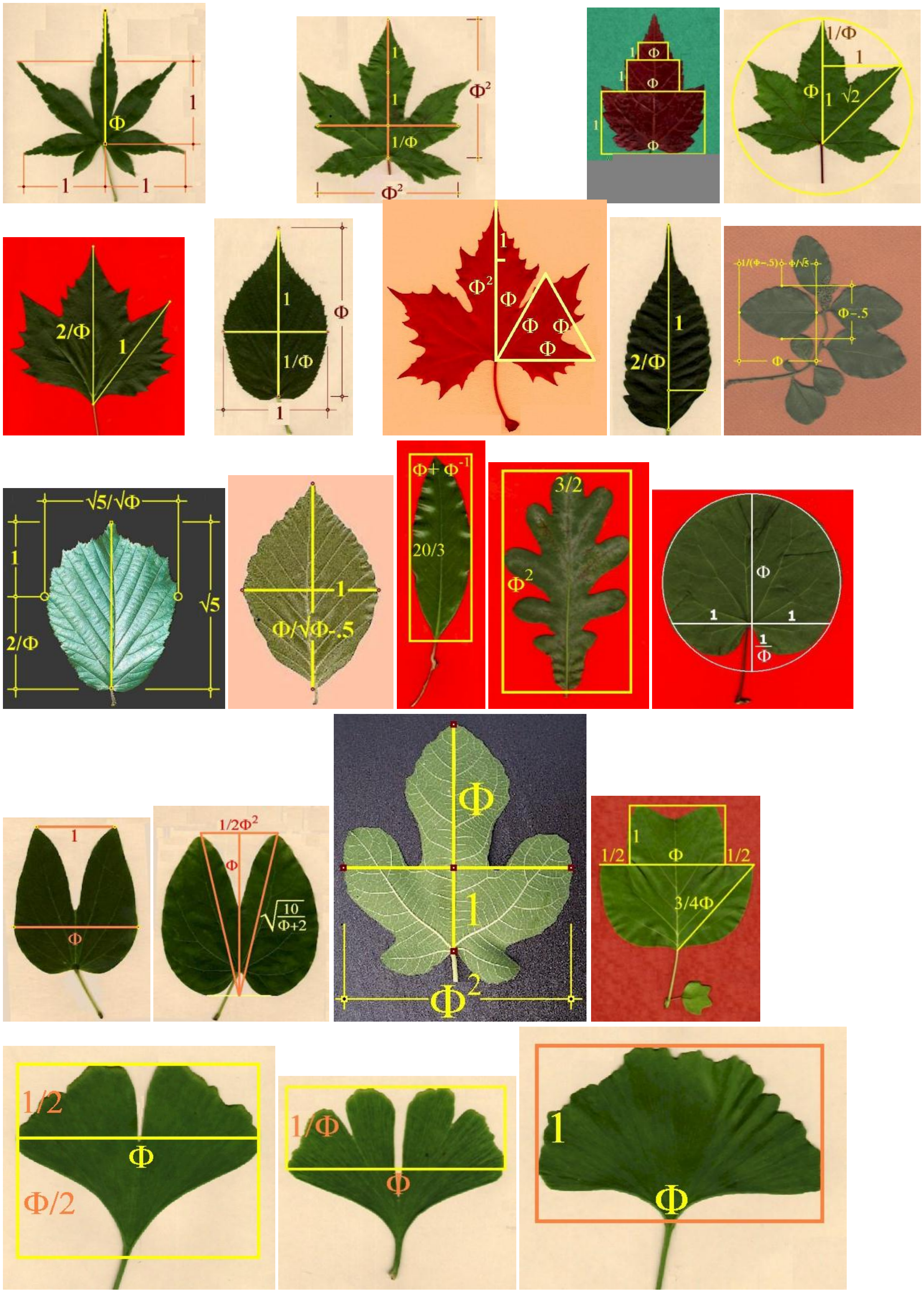
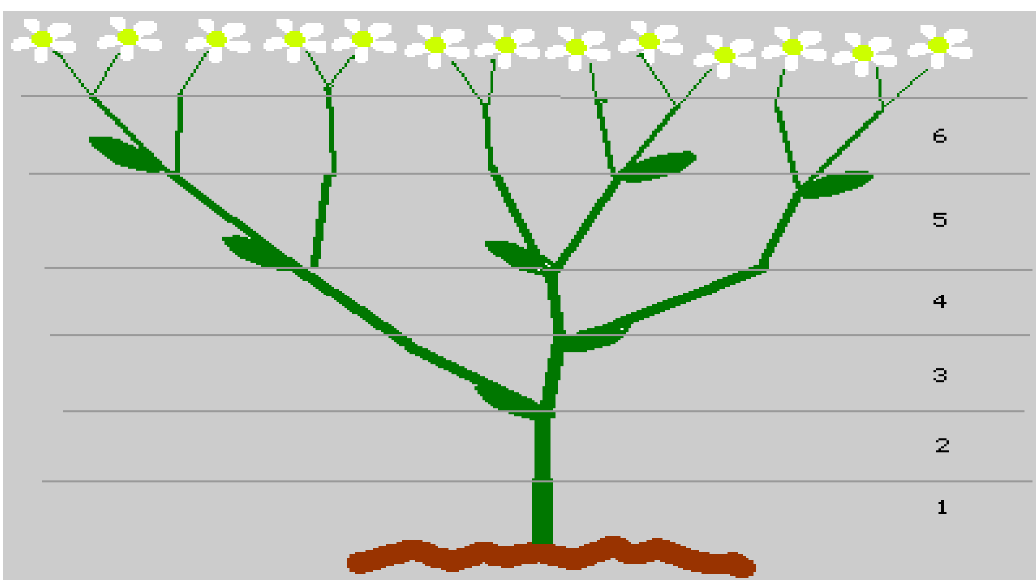


Figura 2




1
Φ
1 1
1
1
Φ^2
1/Φ
Φ^2
1 Φ
1 Φ
1
Φ
1/Φ
1
Φ
1
√2
2/Φ
1
1
Φ
1/Φ
1
1
Φ^2
Φ
Φ Φ
Φ
1
2/Φ
1/(Φ−.5) Φ/√5
Φ−.5
Φ
√5/√Φ
1
√5
2/Φ
1
Φ/√Φ-.5
$\Phi+\Phi^{-1}$
20/3
3/2
Φ^2
Φ
1 1
$\frac{1}{\Phi}$
1
Φ
$1/2\Phi^2$
Φ
$\sqrt{\frac{10}{\Phi+2}}$
Φ
1
Φ^2
1
1/2 Φ 1/2
3/4Φ
1/2
Φ
Φ/2
1/Φ
Φ
1
Φ

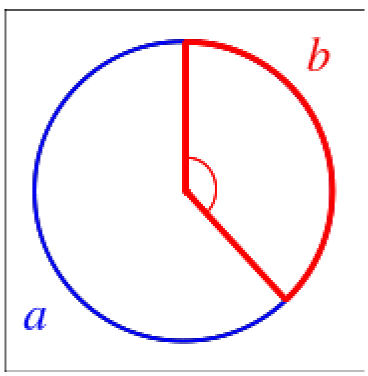
Todas estas hojas, presentan la relación del número fi en sus medidas.

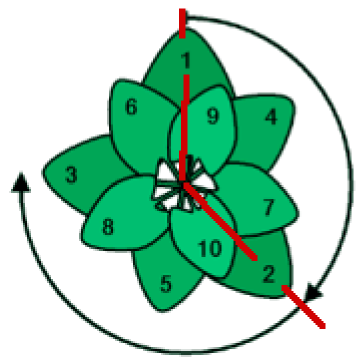


Además, las plantas posicionan sus hojas de acuerdo a los patrones de Fibonacci. El crecimiento de las plantas se da en la punta del tallo

(meristemo apical del tallo), que tiene una forma cónica. Cuando se ve la planta desde arriba, se observa que las hojas que crecieron primero (las que están más abajo) tienden a
estar radialmente más alejadas del tallo.

También están giradas con respecto al eje del tallo para no solaparse unas a otras. En 1837 los hermanos Bravais (Auguste y Louis) descubrieron que las nuevas hojas avanzan en forma rotatoria aproximadamente el mismo angulo, y que este ángulo está cerca de 137.5Âº. Este número está directamente relacionado con Phi. Si se calcula 360º/Phi, se obtiene 222.5º. Y el complemento, 360º-222.5º, es precisamente 137.5º, también llamado el Angulo Áureo.





Esto ocurre porque cuando una planta crece, la estrategia que utiliza para garantizar su supervivencia consiste en maximizar la distancia entre las ramas y las hojas, buscando Ángulos que no se solapen y en los que cada una de ellas reciba la mayor cantidad posible de luz, agua y nutrientes. El resultado es una disposición en trayectoria ascendente, y en forma de hélice, en la que se repiten los términos de la sucesión de Fibonacci.

Fractales

Los fractales, estudiados a profundidad por Benoit Mandenbrot, se pueden ver claramente en las ilustraciones que sus formas son manifestaciones artísticas naturales del número de oro y la serie de Fibonacci

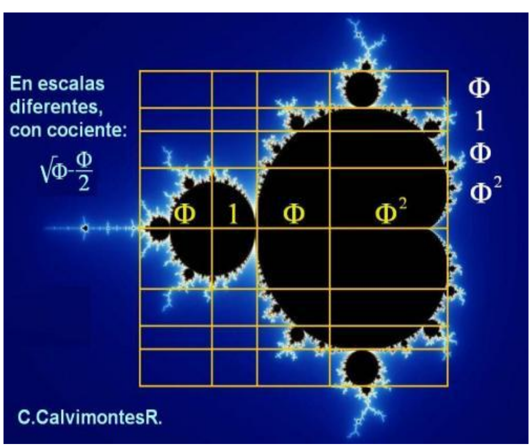
El matemático francés Benoit Mandenbrot acuñó la palabra fractal en la década de los '70, derivándola del adjetivo latín fractus. El correspondiente verbo latino: frangere, significa romper, crear fragmentos irregulares.

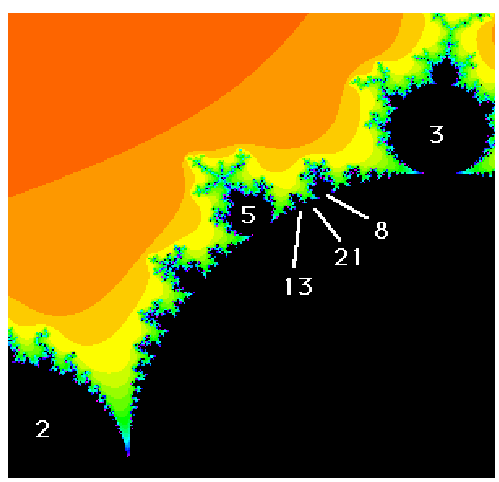
Los fractales fueron concebidos aproximadamente en 1890 por el francés Henri Poincaré. Sus ideas fueron extendidas más tarde fundamentalmente por dos matemáticos también franceses, Gastón Julia y Pierre Fatou, hacia 1918. Se trabajó mucho en este campo durante varios años, pero el estudio quedó congelado en los años '20.

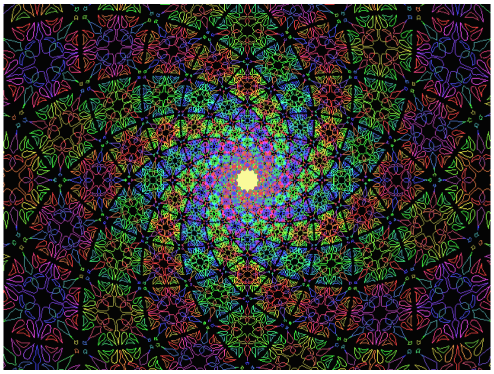
El estudio fue renovado a partir de 1974 en IBM y fue fuertemente impulsado por el desarrollo de la computadora digital. El Dr. Mandenbrot, de la Universidad de Yale, con sus experimentos de computadora, es considerado como el padre de la geometría fractal. En honor a él, uno de los conjuntos que él investigó fue nombrado en su nombre.

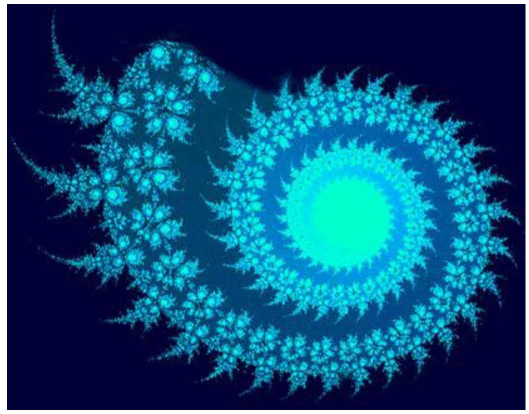
El Fractal es, matemáticamente , una figura geométrica que es compleja y detallada en estructura a cualquier nivel de magnificación. A menudo los fractales son semejantes a sí mismos; esto es, poseen la propiedad de que cada pequeña porción del fractal puede ser vizualizada como una réplica a escala reducida del todo. Manejan las dimensiones áureas, en su autorrepetimiento, como en el : el triángulo de Sierspinski, la curva de Koch, el conjunto Mandenbrot, los conjuntos Julia, y muchas otras.

Otra aplicación de los fractales aparentemente irrelevante es la música fractal. Ciertas músicas, incluyendo las de Bach y las de Mozart, pueden ser reducidas y todavía retener la esencia del compositor. Están siendo desarrolladas muchas nuevas aplicaciones software para el desarrollo de música fractal.



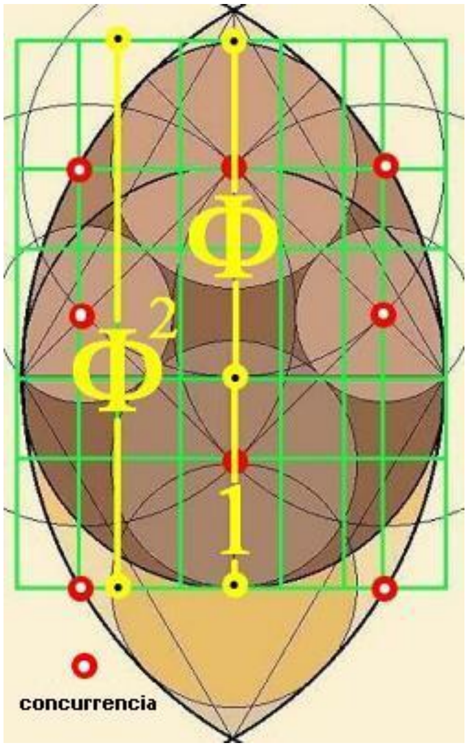


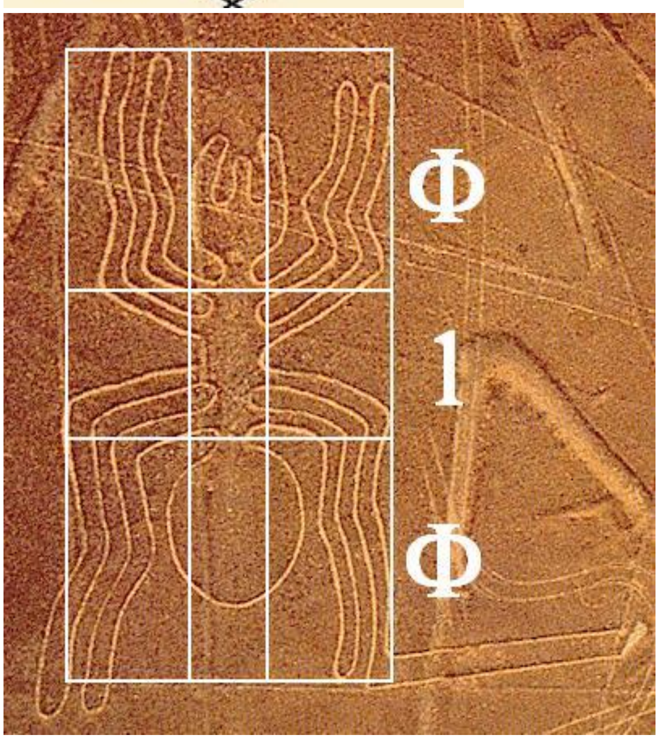




Como una verificación de lo expuesto en los libros Presencia del Número de Oro y Gudea Críptico, aquí se muestra la aplicación de Phimatrix en imágenes que forman parte de ellos, como también en otras figuras de la Naturaleza y de la obra humana.

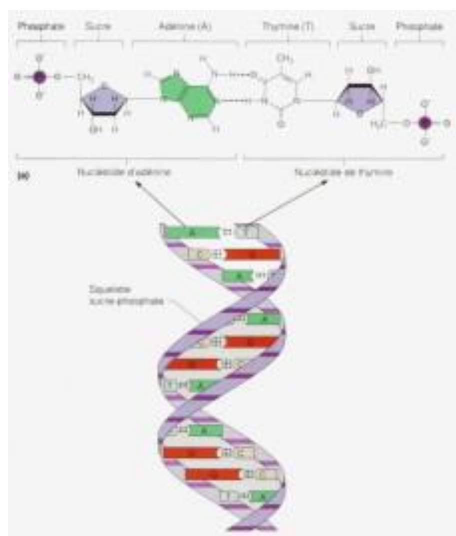
Homenaje a Bênoit Mandelbrot (1924-2010), matemático que desarrolló y difundió la geometría fractal.



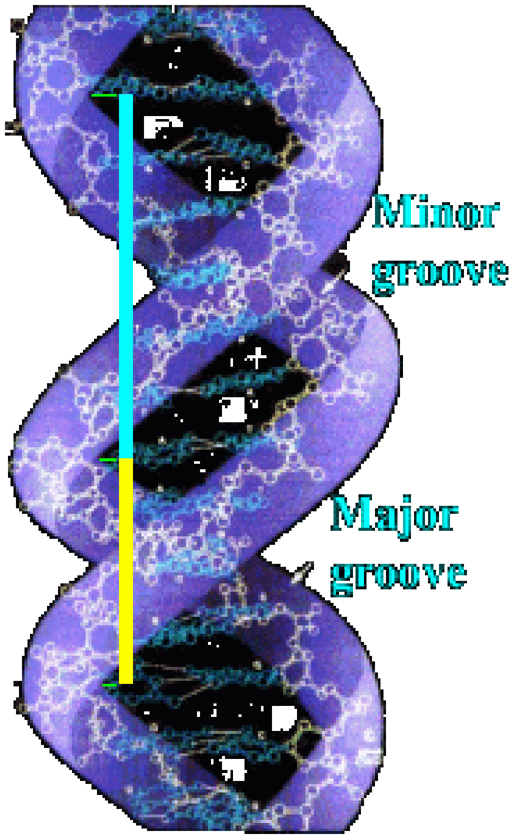


En las líneas Nazca, vistas desde el aire.

La figura muestra un fractal en una brócoli



La molécula de ADN, que contiene el libro de la vida, también se ajusta a la proporción áurea. Cada ciclo de su doble hélice mide 34 angstroms de largo por 21 angstroms de ancho, dos números de la secuencia de Fibonacci cuyo razón es, por supuesto, Phi (Φ)



Φ en las espirales de una piña de pino

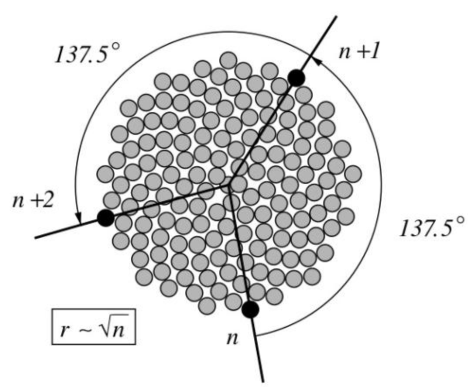
Lo mismo ocurre con las piñas de los pinos, tenemos dos números consecutivos de la sucesión de Fibonacci : 8 y 13.

Un matemático de la Universidad de Arizona, en Tucson, Alan Newell, y el estudiante Patrick Shipman han estudiado recientemente los cactus para determinar por qué este patrón numérico es tan universal. Estos investigadores analizaron la forma de la planta, el grosor de su piel y multitud de otras energías biomecánicas que dirigen su crecimiento. Cuando introdujeron los datos en el ordenador, descubrieron, por sorpresa, que las configuraciones más estables seguían las formas basadas en la serie de Fibonacci. "Logramos descubrir que de esta manera, la energía se economiza al máximo", afirma Shipman. Ellos esperan que secuencias similares, puedan darse también en la biología humana. Aplicando modelos matemáticos de estructuras de formación a problemas médicos, se podrían abrir campos nuevos en la investigación de procesos tales como la formación de tumores y el crecimiento de los huesos.

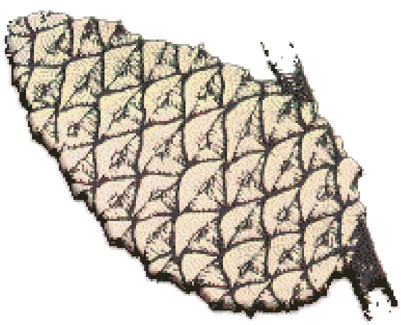
3.6.5 Φ en las flores

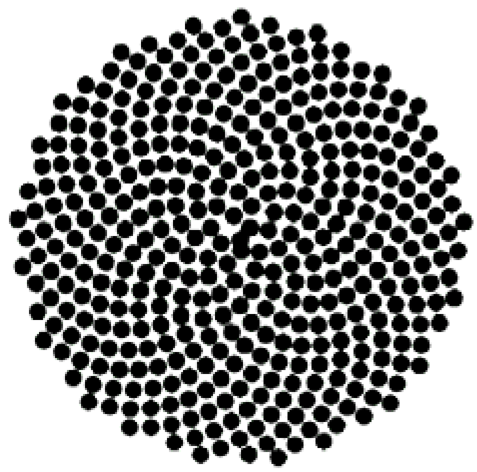
Podemos notar que en algunas flores nos encontramos con ciertos términos de la serie de Fibonacci, esto es; el lirio, tiene tres pétalos, algunos ranúnculos 5 o 8, las margaritas y girasoles pueden llegar a tener 13, 21, 34, 55 y hasta 89 pétalos.

- en los girasoles, las semillas se distribuyen en forma de espirales logarítmicas, unas en sentido horario y otras en sentido anti horario, si contamos el número de espirales que hay en un sentido y las que hay en el otro aparecen términos de Fibonacci consecutivos. Igual sucede en las piñas de los pinos.



3.6.6 Φ en frutos

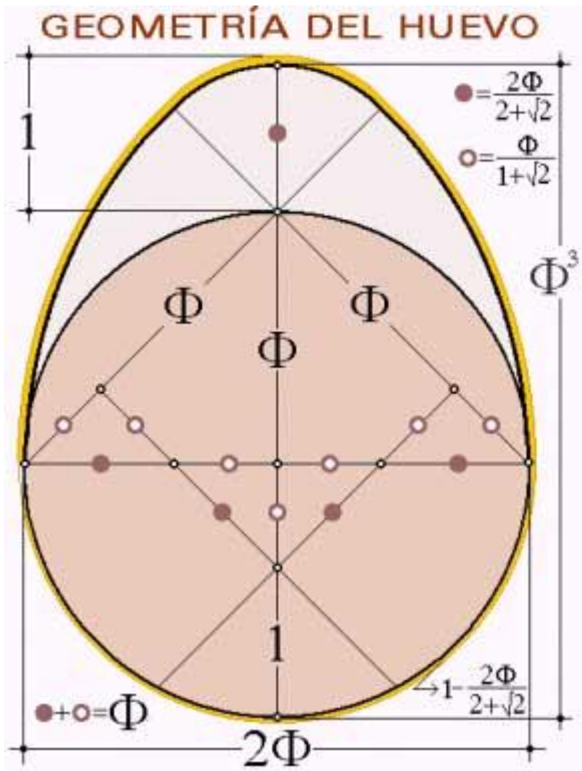




En la mayoría de los frutos de las coníferas, como el abeto, los cipreses, y los pinos pátulas, la disposición de algunas semillas de flores gigantes como el girasol, las púas de una pi.

3.6.7 Φ en Huevos de las aves

La mayoría de los huevos de las aves, tienen una relación entre la longitud mayor y la menor, estimada entre la raíz cuadrada del número de oro y dicho número.



3.6.8 Φ En el cuerpo humano

La anatomía de los humanos se basa en una relación Φ estadística y aproximada:

La relación entre la altura de un ser humano y la altura de su ombligo.

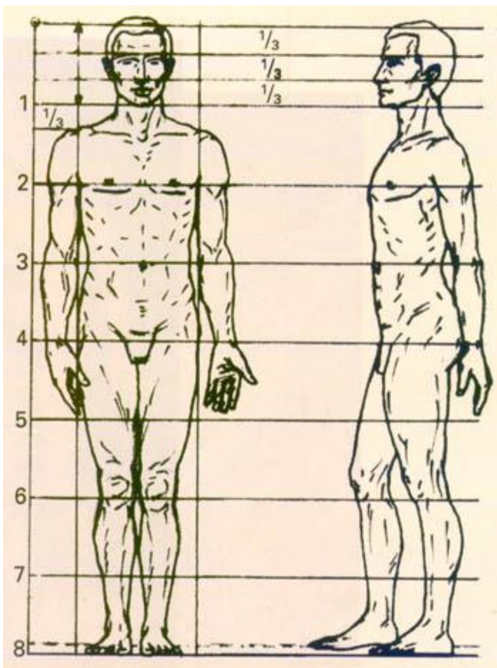
La relación entre la distancia del hombro a los dedos y la distancia del codo a los dedos. La relación entre la altura de la cadera y la altura de la rodilla.

La relación entre el primer hueso de los dedos (metacarpiano) y la primera falange, o entre la primera y la segunda, o entre la segunda y la tercera, si dividimos todo es Φ.

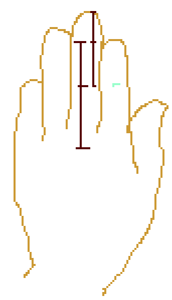
La relación entre el diámetro de la boca y el de la nariz Es Φ la relación entre el diámetro externo de los ojos y la línea inter-pupilar

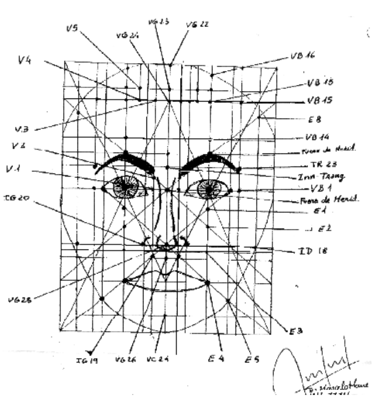
Cuando la tráquea se divide en sus bronquios, si se mide el diámetro de los bronquios por el de la tráquea se obtiene Φ, o el de la aorta con sus dos ramas terminales (ilíacas primitivas

Un detalle curioso conocido por los clásicos es que la distancia del ombligo al suelo es justamente la razón áurea de su altura.



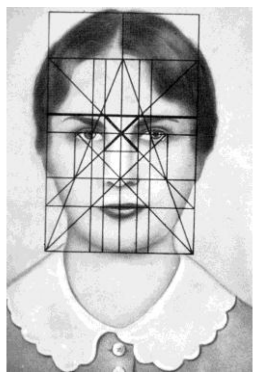
En la mano humana, la distancia entre las falanges está en la razón áurea de la longitud del dedo

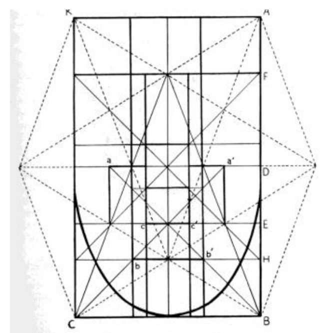




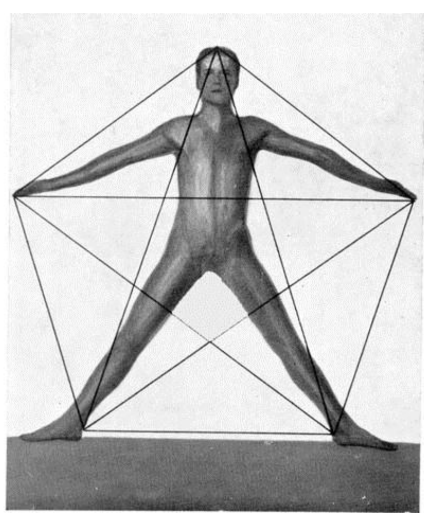
En resumen, el número de oro parte de una definición. Al dividir un segmento en dos partes, la razón entre el todo y la mayor es igual a la razón entre la mayor y la menor. Esta definición le confiere una serie de propiedades interesantes, una sucesión de potencias del número de oro participa del crecimiento aritmético y geométrico simultáneamente y también está vinculado con la sucesión de Fibonacci. Debido a las curiosas y sorprendentes propiedades de φ, existe mucha literatura acientífica que lo usa indebidamente. Por ejemplo, los puntos donde se localizan los meridianos en las sesiones de acupuntura se sitúan en zonas prefijadas por la relación áurea.

Para finalizar vamos a mostrar algunas relaciones de la razón áurea con la figura humana, si hemos aplicado este concepto a la arquitectura y a la Naturaleza, es normal que también los clásicos se hayan interesado por los cánones de belleza aplicados a las proporciones humanas.

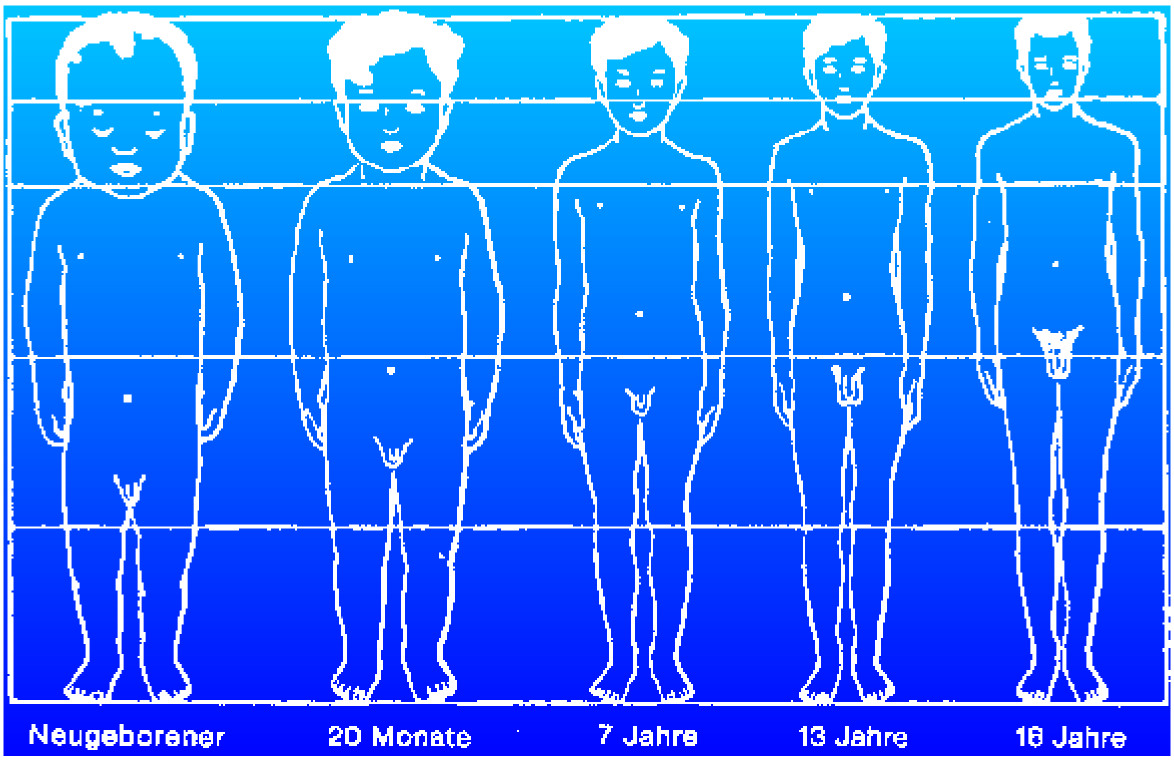




Este sería a juicio de un artista el rostro más perfecto de mujer. El cuerpo humano puede inscribirse en un pentágono regular. Una figura humana con esas proporciones estaría dentro del canon de la belleza ideal.



Leonardo Da Vinci ilustró la proporción divina que había establecido el matemático Luca Pacioli en 1509. Pacioli describe un hombre perfecto de manera que sus proporciones sean como las de este dibujo;



El proceso de madurez del cuerpo humano va buscando las proporciones áureas.

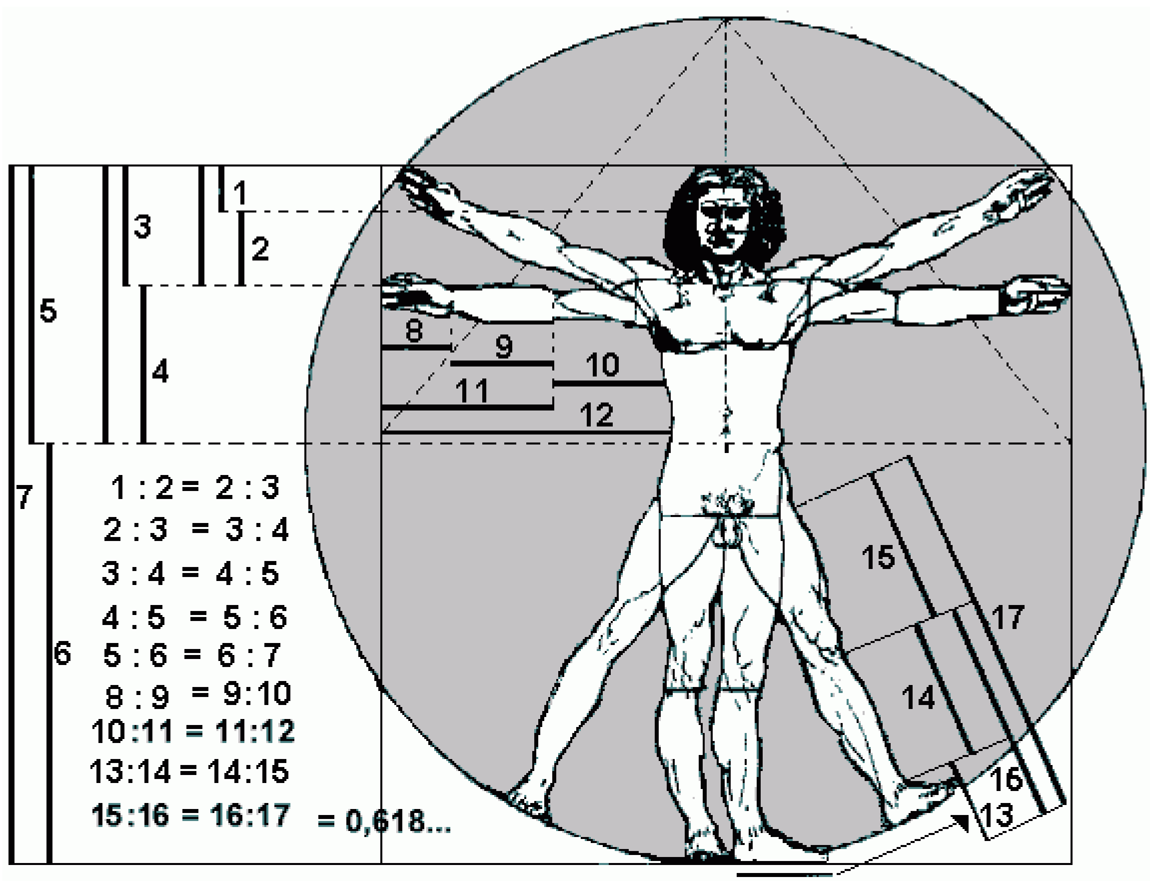
No obstante, las “des-proporciones” de la infancia tienen también una función

inhibidora de la agresividad y favorecen instintivamente la ternura.

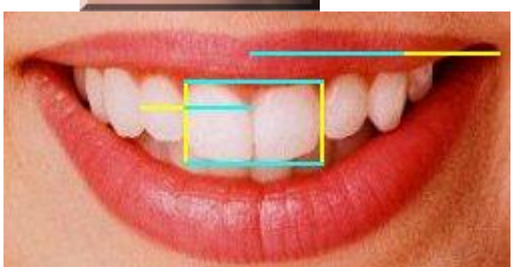
Se presenta las relaciones áureas y la serie de fibonacci, en las orejas. Donde el punto de inicio es la parte superior, donde se empieza a enroscar como una involuta de violín, cumpliendo así con la espiral de aurero.

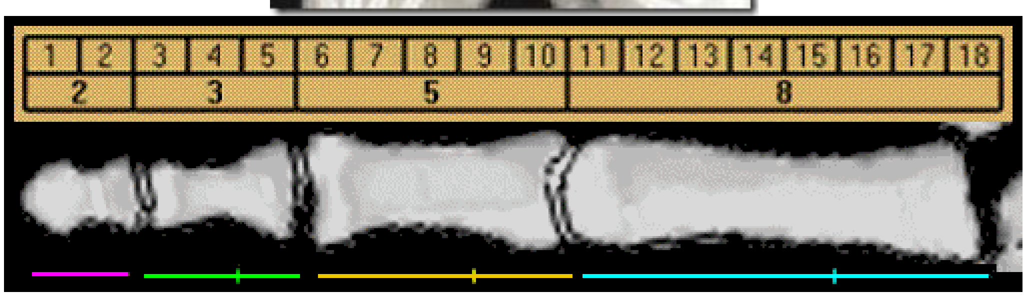
En las partes de los dientes, la parte visible, se ajusta a los cánones de la belleza, pues los laboratorios dentales donde fabrican "reinas de belleza", esto es lo que hacen para el diseño de sonrisa.

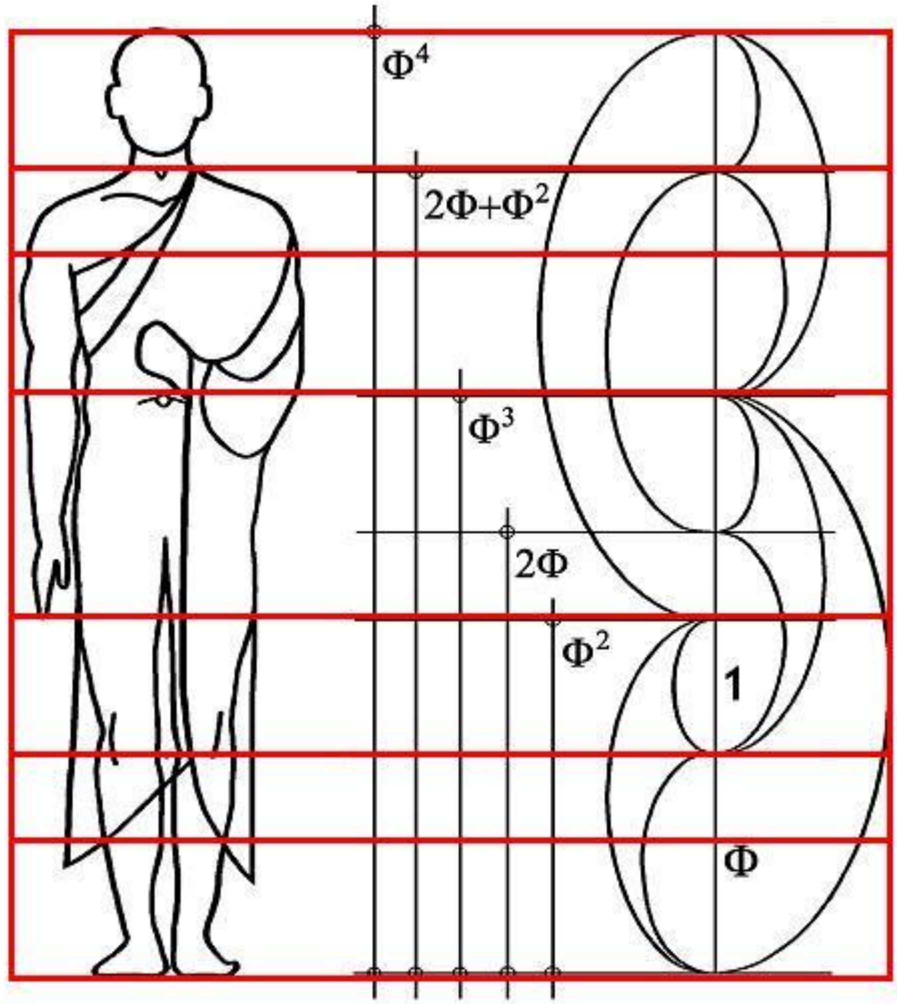
En las manos, todos y cada de los falanges, así como los brazos, cumplen con la proporción, que otrora se pensaba que si esta relación era más ajustada, mejor era la raza a la que pertenecía el individuo



Resulta que la relación entre la altura del hombre y la distancia desde el ombligo a la mano es el número áureo. Asi como la relación entre las falanges de los dedos es el número áureo, la relación entre la longitud de la cabeza y su anchura es también este número.







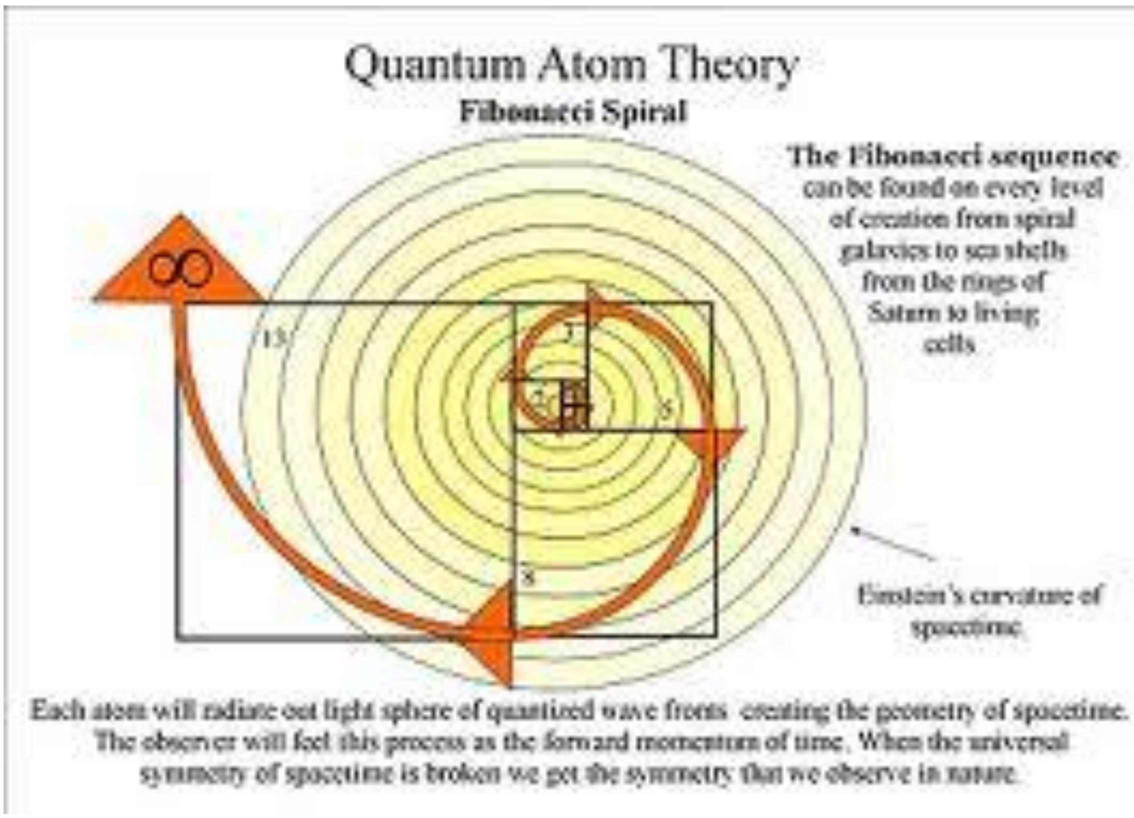
Relaciones de potencias de fi, en el cuerpo de una persona con cualquier estatura

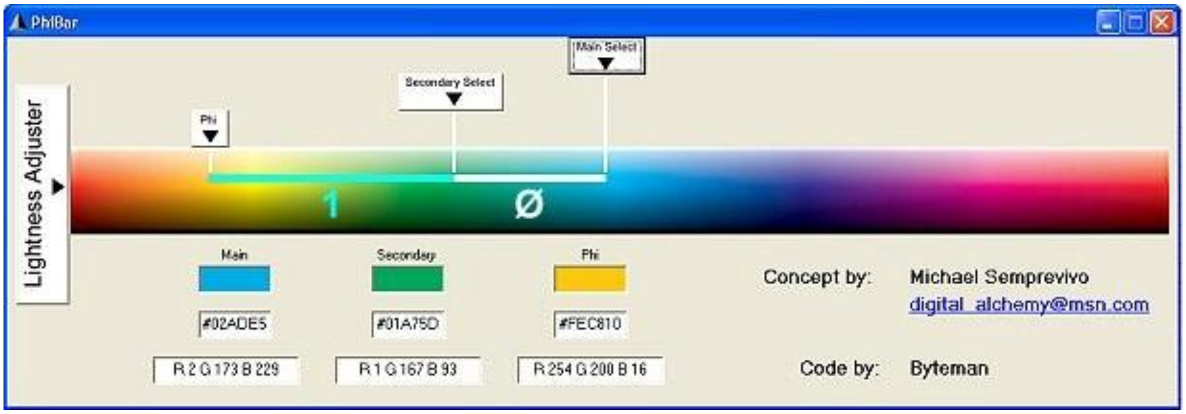
6.3.5 Human Age	6.3.6 Development Stage	6.3.7 Key Attributes
0	Gestation	Conception
1	Newborn	Birth
1	Infant	Walking, vocalizing
2	Toddler	Talking, expressing, imitating
3	Toddler	Self image and control, toilet training
5	Early child	Formal education begins
8	Mid child	Age of reason, knowing of right and wrong
13	Adolescent	Thinking, puberty, sexual maturation and drive
21	Young adult	Full physical growth, adult in society, education complete, beginning career, financial responsibility, eligible for voting
34	Mid adult	Refinement of adult skills, parenting role
55	Elder adult	Fulfillment of adult skills, serving, retirement begins with eligibility

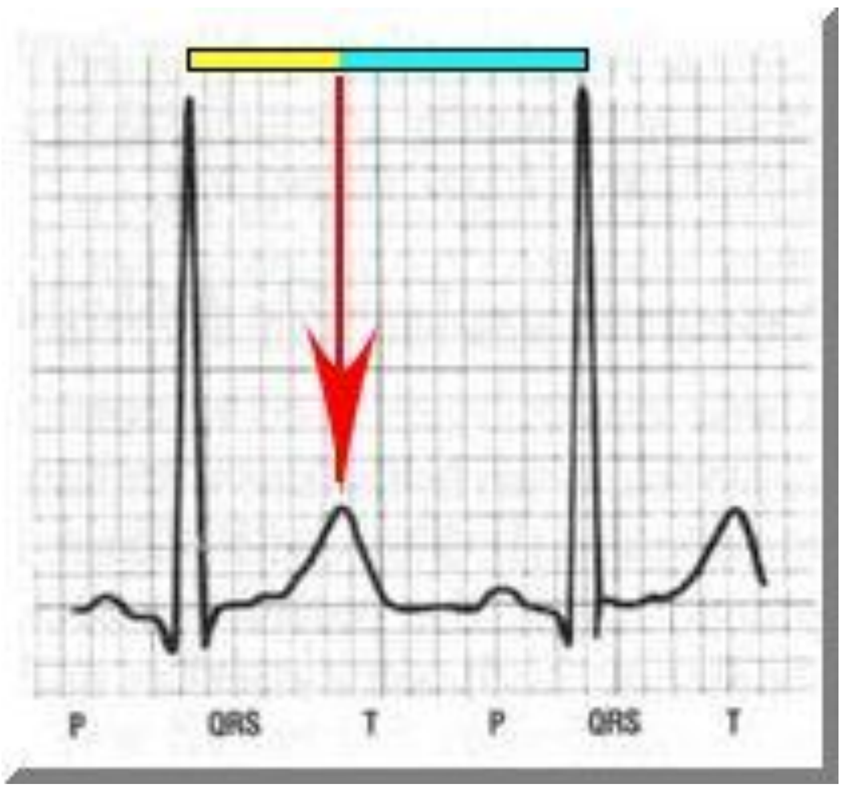
		for Medicare, Social Security and AARP
89	**Completion**	**Insight and wisdom into life**

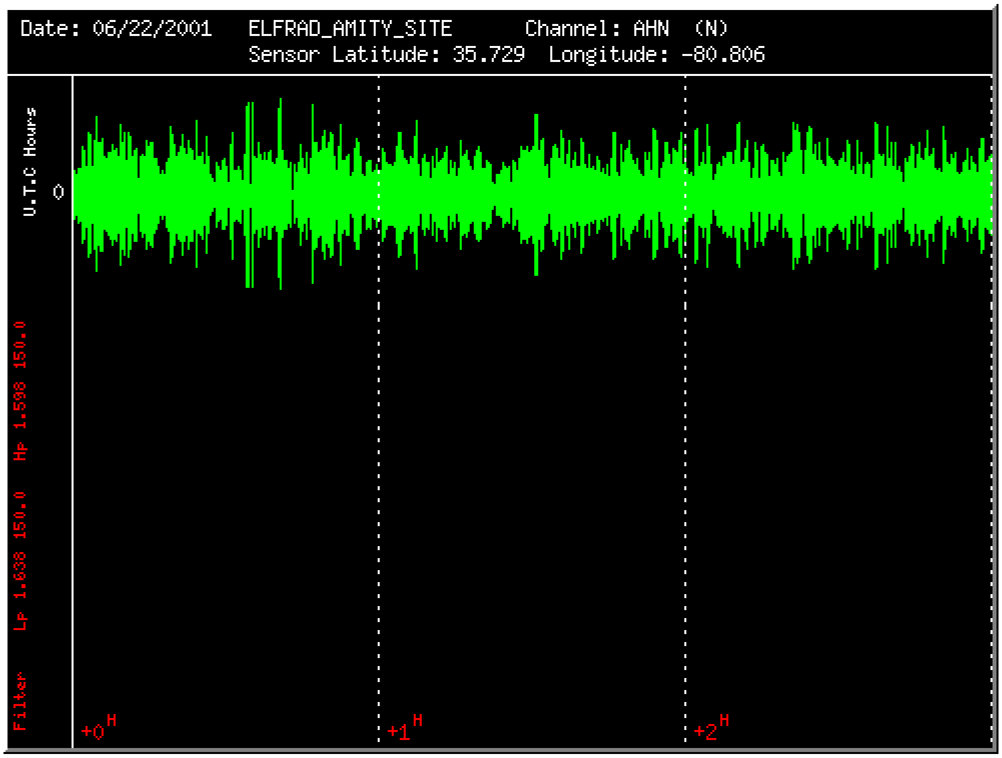
The Fibonacci series found in the human age numbers below relate to

3.6.9 Φ EN LA QUIMICA Y FISICA




PhiBar
Main Select
Secondary Select
Phi
Lightness Adjuster
1
Ø
Main
Secondary
Phi
#02ADE5
#01A75D
#FEC810
R 2 G 173 B 229
R 1 G 167 B 93
R 254 G 200 B 16
Concept by:
Michael Semprevivo
digital_alchemy@msn.com
Code by:
Byteman


P
QRS
T
P
QRS
T



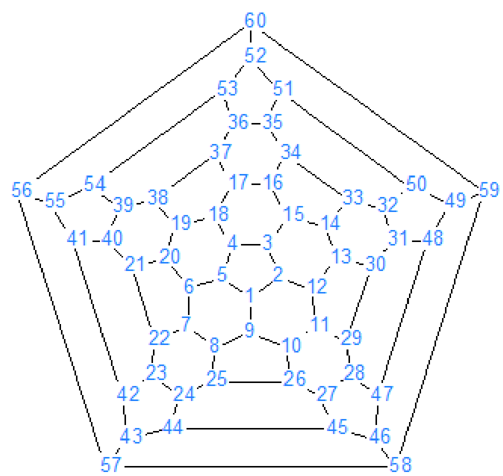
La “proporción áurea” (también conocida como número dorado, razón áurea, razón dorada, media áurea, número áureo y divina proporción) equivale aproximadamente a 1,618 y puede ser encontrado en varios aspectos de nuestras vidas, incluyendo la biología, la arquitectura y las artes.

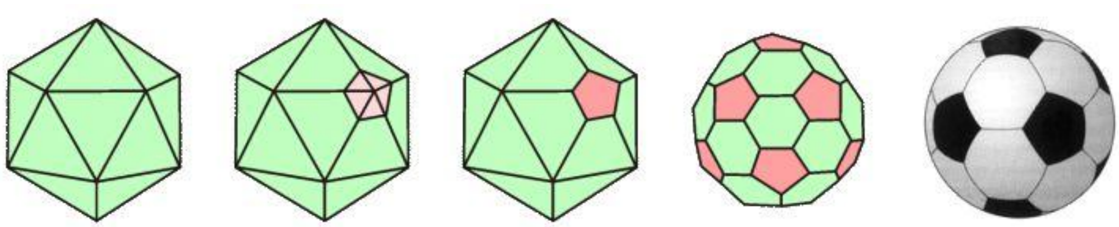
Recientemente fue descubierto que esta proporción especial también se refleja en la escala manométrica, gracias a los investigadores de la Universidad de Oxford, la Universidad de Bristol y el Laboratorio Rutherford-Appleton en el Reino Unido e investigadores de Helmholtz-Zentrum Berlín (HBZ) para Materiales y Energía en Alemania.

La investigación, publicada en la revista Science el ocho de enero, examinó cadenas de átomos de cobalto niobato magnético ($CoNb_2O_6$), de sólo un átomo de grosor, con el objeto de investigar el principio de incertidumbre de Heisenberg. Ellos aplicaron un campo magnético a ángulos rectos sobre el sin alineado de la cadena magnética para introducir más incertidumbre cuántica. Registrando los cambios en la dirección del campo, descubrieron que estos pequeños imanes resonaban magnéticamente.

Los átomos de niobato fueron bombardeados con neutrones para detectar notas resonantes. “Encontramos una serie (escala) de notas resonantes: las dos primeras notas muestran una perfecta relación entre sí. Sus frecuencias (tono) están en la proporción 1,618… la proporción áurea, conocida por el arte y la arquitectura”, afirmó el investigador principal de la Universidad de Oxford, Dr. Radu Coldea, en un comunicado de prensa. “Refleja una hermosa propiedad del sistema cuántico--una simetría oculta”.

El Dr. Alan Tennant, quien dirigió al grupo de investigación en Berlín, afirma: “tales descubrimientos están conduciendo a los físicos a especular que el mundo cuántico, atómico podría tener su propio orden subyacente. Sorpresas similares pueden estar esperando a los investigadores en otros materiales en estados cuánticos críticos”.





El fullereno está formado por 60 átomos de carbono; cada átomo forma parte de dos hexágonos y un pentágono lo que da lugar a una estructura cerrada con la simetría de un icosaedro truncado (poliedro formado por 12 pentágonos y 20 hexágonos).

Esta molécula de 20 átomos de Carbono es la más pequeña de toda una serie de moléculas esféricas. Se puede aislar a partir del hollín que se produce al hacer saltar un arco eléctrico entre dos electrodos de grafito (algo así como un experimento de relámpagos a escala

La razón áurea y la serie Fibonacci, se puede constatar en los fulerenos. Los fullerenos se obtuvieron por primera vez de forma casual al irradiar una superficie de grafito con un láser. Cuando el vapor resultante se mezcló mediante una corriente de helio se formó un residuo cristalizado cuyo estudio reveló la existencia de moléculas formadas por sesenta átomos de carbono. Como se dedujo en un principio, estas moléculas tenían una geometría semejante a la de la cúpula geodésica diseñada por el arquitecto Buckminster Fuller, con motivo de la exposición universal de 1967. Por ello, se conoce a esta familia de moléculas como fullerenos, que en su estructura, semejante a los sólidos pitagórica, manifiesta en su estructura las relaciones aureas.

También la física parece adorar las sucesiones de Fibonacci. Si se colocan dos láminas planas de vidrio en contacto y se hace que unos rayos luminosos las atraviesen, algunos (dependiendo del ángulo de incidencia) las atravesarán sin

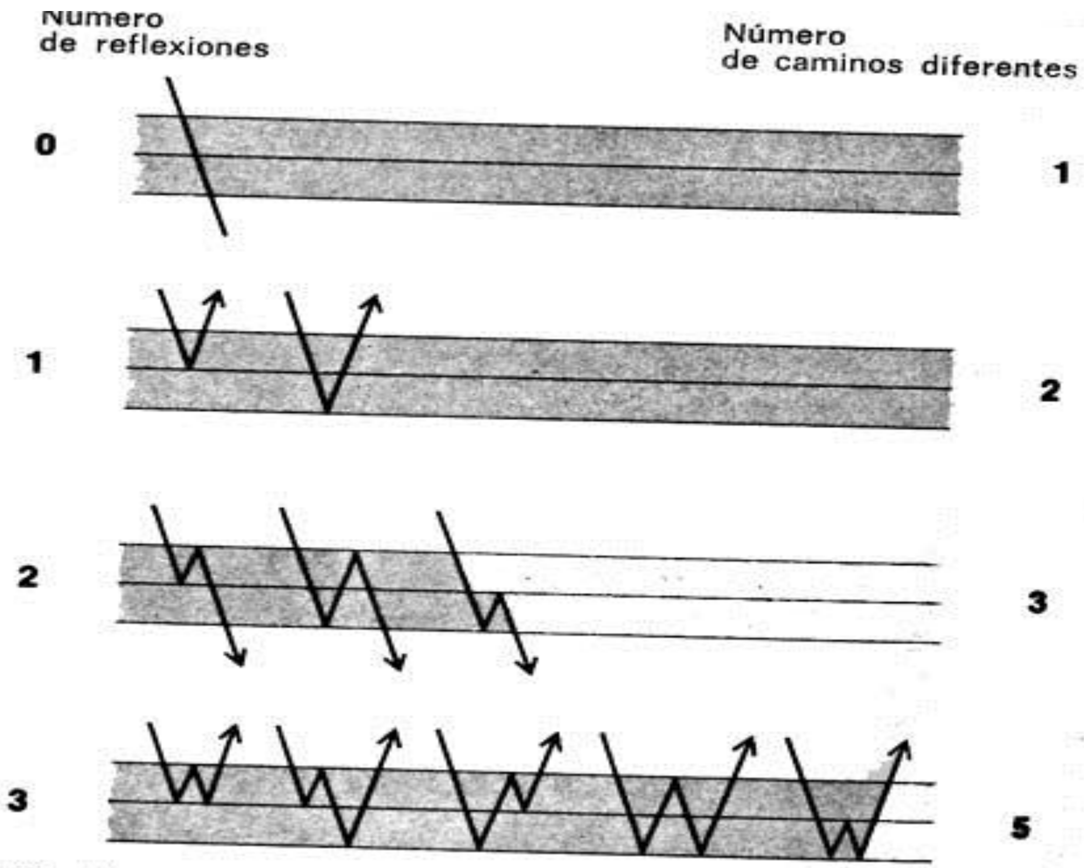


Fig. 74. Un rayo de luz puede reflejarse según F_{n+2} caminos al sufrir n reflexiones entre dos láminas de vidrio.

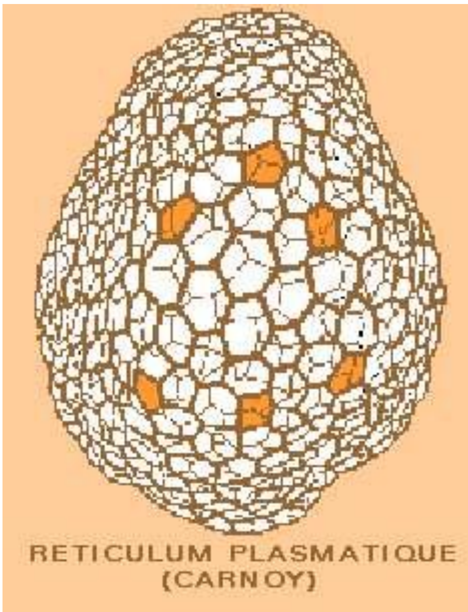
reflejarse, pero otros sufrirán una reflexión. El rayo que no sufre reflexión tiene sólo

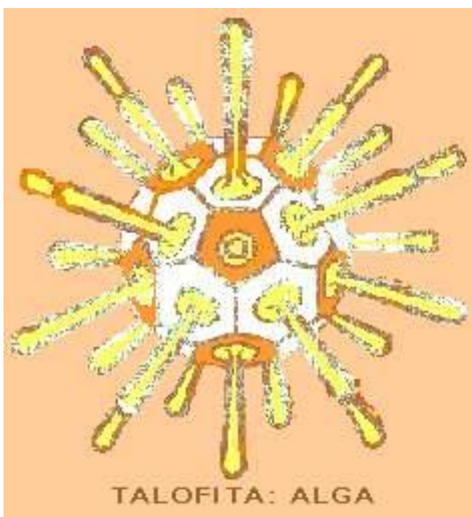
una trayectoria posible de salida; el que sufre una reflexión tiene dos rutas posibles; el que sufre dos reflexiones, tres trayectorias, el que experimenta tres reflexiones, cinco, y así sucesivamente. Tenemos aquí nuevamente una serie de Fibonacci.

3.6.9.1 la divina proporción en los domos hexapenta

El 'domo exapenta' (o hexapenta) tiene una forma prácticamente semiesférica generada por la presencia armonizadora de pentágonos en conjuntos de exágonos (o hexágonos), que pueden estar respectivamente reticulados por triángulos isósceles y equiláteros. Esa forma, que responde con relevantes condiciones estéticas, constructivas y estructurales a la doble exigencia arquitectónica de encerrar y cubrir espacios, tiene su contraparte en otras existentes en la Naturaleza, representadas por el paradigma geométrico del icosaedro truncado de la molécula gigante del carbono 60 y por la extraordinaria belleza de los radiolarios.

Convencionalmente se denomina hexapenta al icosaedro truncado y a otros poliedros formados por un mayor número de hexágonos y pentágonos regulares, que se muestran en la Naturaleza y en la obra humana en sendas extensas variedades por la diferencia entre el número de esas dos figuras geométricas en cada cuerpo. Sin embargo, existe un patrón común en la configuración de todos esos poliedros, determinada por la consonancia existente entre hexágonos y pentágonos que tienen la misma longitud de sus lados por ser éstos comunes entre ambas figuras: la relación de sus apotemas está definida por el Número de Oro.

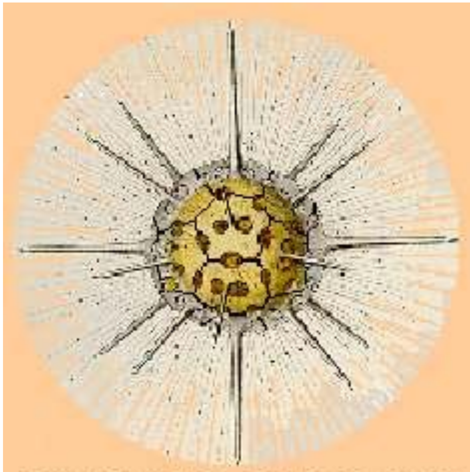




- *EL NÚMERO DE ORO EN LA ARMONÍA DE LO CREADO*

En un mismo campo fenoménico, dos cosas de la misma especie pero de diferente magnitud armonizan si entre ellas se manifiesta el Número de Oro (o su figura emblemática, el pentágono), módulo de la relación de consonancia en ese relativo desequilibrio característico de lo que tiene vida, la tuvo o tiende a ella, y de lo que ha tenido o tiene movimiento molecular, como en las estructuras dinámicas, en contraposición a la predominancia del hexágono en lo inerte que tiene el equilibrio cristalino propio del mundo mineral.

Sin embargo, en la infinidad de formas geométricas existentes en las obras de la Naturaleza, no hay una polaridad entre aquellas cosas que muestran la presencia o traducen las proporciones de pentágonos y otras que están impregnadas por hexágonos o sus derivaciones; hay unas terceras donde coexisten ambas figuras o sus proporciones, en manifestaciones de lo vivo y lo inerte, lo dinámico y lo estable, lo orgánico y lo inorgánico, lo que tiene mayor o menor entropía.



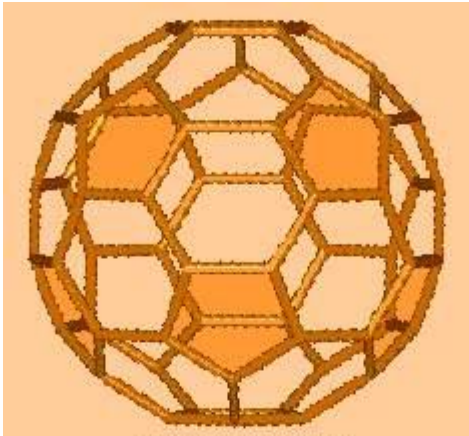
RADIOLARIO: DORATASPIS LORICATA (HAECKEL)

LÁMPARA EN LA CRIPTA DE LA SAGRADA FAMILIA BARCELONA (ANTONI GAUDÍ)

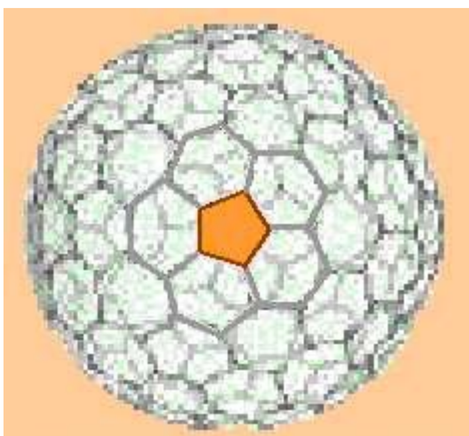
- *ARMONÍA EN LA ARQUITECTURA Y EN TODA CREACIÓN HUMANA*

Entre renombrados arquitectos con el mismo pensamiento es ejemplar la figura de Antoni Gaudí, cuya obra tuvo como constante su inspiración en el "gran libro de la Naturaleza". Al establecer él que "la calidad esencial de la obra de arte es la armonía" explica que "la arquitectura crea el organismo y por eso éste debe tener una ley en consonancia con las de la Naturaleza", porque éstas no son otras que las de la armonía que el hombre reconoce y asume, para repetirlas en lo más excelso de su creación.

En general, como producto de acciones determinadas por la intuición o por la reflexión, el factor de coherencia para valorizar una obra arquitectónica por la armonía entre sus partes es el Número de Oro, que añade a su rol estético otro que condiciona medidas y proporciones por ser connatural al hombre. Por eso mismo, éste también utiliza patrones de composición y proporción, con los mismos principios físicos y geométricos de la armonía preestablecida, para valorizar su obra artística e utilitaria en diferentes campos.



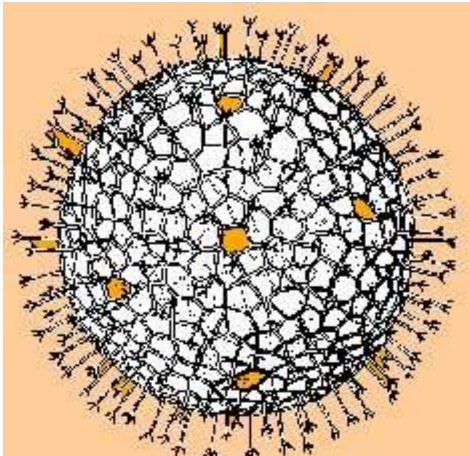
CARBONO 60
(CIENCIA NET)



CARBONO 240 (LEVITUS)

- *EXAPENTAS EN LA NATURALEZA*

Aunque es propio de la química inorgánica, el carbono, a través de sus compuestos, genera toda la química orgánica. Además de esa excepcional peculiaridad, por la cristalización de sus moléculas tiene otras formas alotrópicas aparte de las del grafito (sistema cúbico) y del diamante (sistema hexagonal). En ellas se destaca la molécula gigante, hueca y esférica del carbono 60, que en un icosaedro truncado reúne con máxima economía pentágona y hexágono regulares.
La molécula del C_{60}, abundante en el universo pero descubierta recién en 1985, tiene propiedades únicas (que no se acaba de descubrir) en la química y en la física, destacándose en su forma y estructura la simetría más alta existente entre todas las moléculas conocidas y la belleza de lo perfecto. Junto con su descubrimiento se hizo el de otras moléculas similares: C_{240} y C_{540}. Éstas no por ser cada vez más grandes son progresivamente más esféricas ni tampoco aumentan su simetría; sino que conservan la del C_{60}.



RADIOLARIO: AULASTRUM TRICEROS (HAECKEL)

Entre lo mineral y lo que tiene vida, como en un juego de espejos, a los carbonos recién encontrados se les contraponen los radiolarios (protozoarios que hacen una de las más simples áreas de lo orgánico). Son minúsculos animales marinos unicelulares, con esqueleto de sílice, en su mayoría de forma esférica; de excepcional belleza por las combinaciones de pentágonos y exágonos en la gran variedad de las formas de sus perforaciones, complementadas con los seudópodos radiales que determinan su nombre.

GLOBIGERINA (HAECKEL)

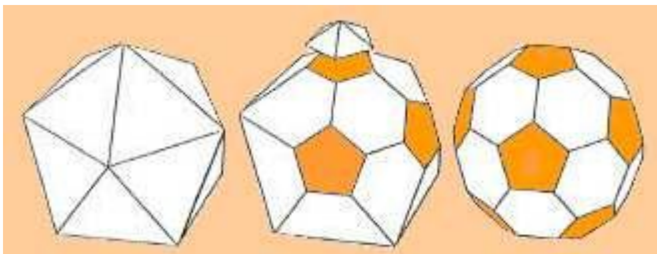
También entre los protozoarios están los foraminíferos, de los cuales los más difundidos y abundantes se encuentran en el género de las globigerinas, que reciben este nombre por presentar su concha formada por varias cámaras globulosas constituidas por carbonato de calcio, las cuales permiten que el animal flote. Entre los varios cientos de especies de globigerinas que se conoce actualmente, existen unas que tienen el conjunto de sus cámaras con la armoniosa configuración de un hexapenta regular.

ESPUMA (D'ARCY THOMPSON)

En los procesos físico-químicos de partición del espacio con el resultado conocido como espuma, el conjunto de las paredes de los compartimientos busca la mínima extensión posible de superficie, en una diversidad de soluciones en las que se debe cumplir condiciones de forma y relación. Con ese condicionamiento y la tendencia adicional de que el conjunto de burbujas busca la esfericidad, hay espuma formada por poliedros irregulares que tienen entre sus lados: cuadrados, pentágonos y hexágonos.

- *GEOMETRÍA DEL ICOSAEDRO TRUNCADO*

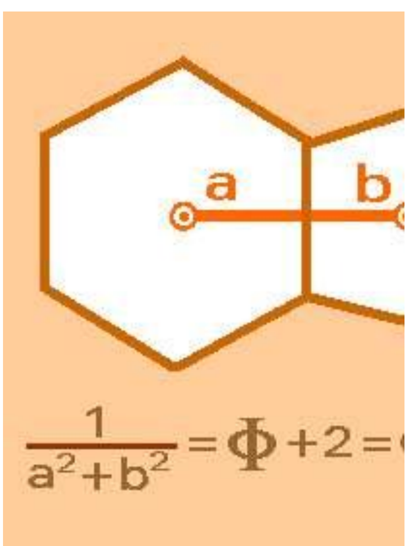
El icosaedro truncado deriva del icosaedro, uno de los cinco sólidos fundamentales y conocidos como platónicos, el cual está formado por 20 caras que tienen forma de triángulos equiláteros. Cortando con un plano perpendicular a su eje por el tercio superior de su altura cada una de las pirámides que componen el icosaedro, se forman las 12 caras pentagonales y las 20 hexagonales del icosaedro truncado, cuya simetría es totalmente equivalente a la del icosaedro original.

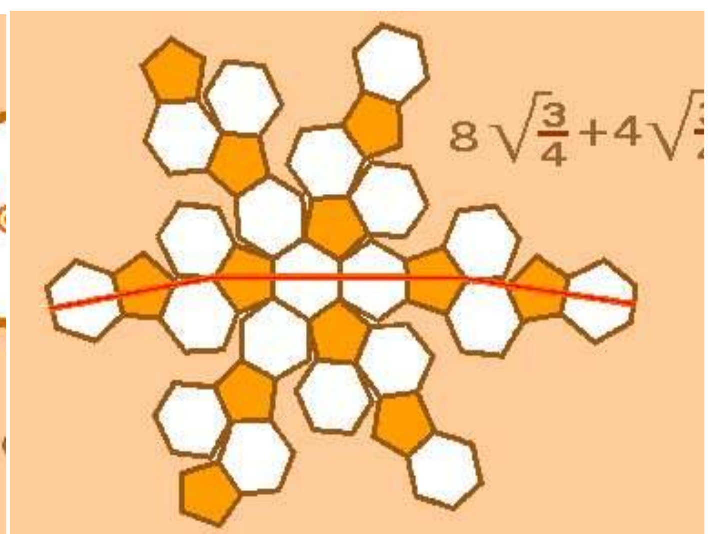


PROCESO DEL TRUNCAMIENTO DEL ICOSAEDRO (LEVITUS)

- *ARMONÍA DE LA RELACIÓN ENTRE PENTÁGONOS Y EXÁGONOS*

Como demostración de la armonía de su configuración, en el icosaedro truncado y en los exapenta en general, la consonancia entre sus pentágonos y exágonos componentes (considerando que ambas figuras en cada caso tienen la misma longitud de sus lados o aristas del poliedro), está dada en la relación de sus apotemas mediante el Número de Oro. Con esa base, al igualar el lado con la unidad, para el caso del icosaedro truncado se calculó la longitud de su circulo máximo:





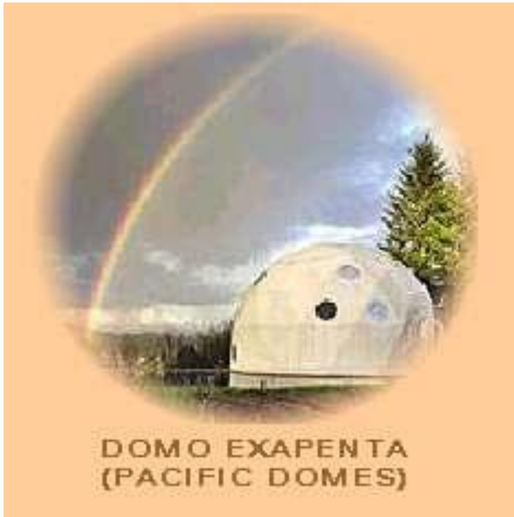
ICOSAEDRO TRUNCADO
(PIERO DE LA FRANCESCA)

UCOCEDRON ABSCISUS VACUUS
(LEONARDO DA VINCI)

- *EXAPENTAS EN LA OBRA HUMANA*

Luca Paccioli (1445-1517), para su libro De Divina Proportione (1498) se inspiró en las obras de Arquímedes y de su maestro Piero Della Francesca (1420-1492), pintor y matemático, e hizo de diversos poliedros modelos huecos de madera, que Leonardo da Vinci (1452-1519) utilizó para hacer las ilustraciones de ese libro. Al haberse encontrado en el siglo XX manuscritos de la obra de Della Francesca, se comprobó la existencia del dibujo más antiguo conocido del icosaedro truncado.

Paccioli, importante exponente de la relación entre arte y matemáticas en el Renacimiento, aparte de contribuir al mejor conocimiento de los poliedros, se refirió a la amplia presencia del Número de Oro en la Naturaleza y, por esa razón, le adjudicó el nombre de Divina Proporción, como patrón de la armonía en todo lo creado. Aunque él no lo señaló, como demostración de esa armonía y confirmación de la designación que propuso, está también el icosaedro truncado que figura en su libro.

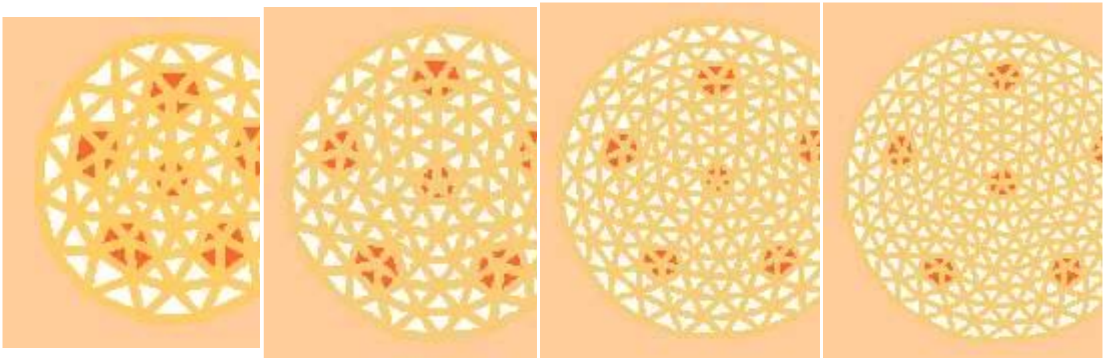


Buckminster Fuller, quien relacionó la Naturaleza con su obra, pudo haber conocido el estudio de Ernst Haeckel (Die Radiolarien, 1862) y el de D'Arcy Thompson (On Growth and Form, 1917), donde se muestra y analiza la configuración de los radiolarios, para fundamentar en la década de 1940 su exitoso impulso a la utilización de lo que él llamó el 'domo geodésico', originalmente creado por el ingeniero alemán Walter Bauersfeld en 1922 para instalar un planetario de la Zeiss en Jena.

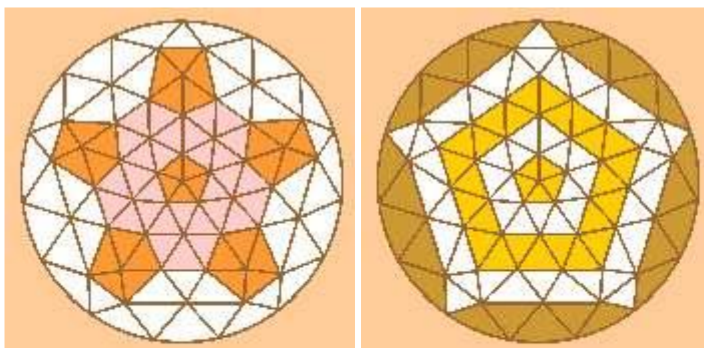
En la historia del fútbol ha sido importante la preocupación por contar con una pelota que combine la mayor y constante esfericidad con la regularidad de la distribución de las costuras que son necesarias por las características del juego. Esa doble condición tuvo la respuesta perfecta en la simetría de la Telstar de 1970. Aunque se ha producido una gran evolución en el uso de materiales, no ha variado esa forma geométrica, ni su peso y tamaño, hasta llegar a la Fevernova del 2002.

- ### *3.6.9.2.* ***Geometria de los hexapente***

En los domos hexapenta, el número de 6 pentágonos es constante cualquiera sea el de los hexágonos. En una proyección horizontal, un pentágono está en la clave del domo y los otros separados de él por uno o más anillos formados por triángulos equiláteros. Si es un anillo, tiene 75 de éstos; si dos, 120; si tres, 175; si cuatro, 240..........; en un ritmo constante según el número de anillos intermedios sea impar o par. En el caso de ser impar, el de los triángulos aumenta en 100 a partir de los 75 del primero; si es par, en 120 a partir de los 120 del segundo.



En la misma proyección horizontal, además de la regularidad en la presencia de los pentágonos dentro de conjuntos de hexágonos, se forman otras figuras semejantes que son concéntricas al pentágono que se encuentra en la clave del domo.

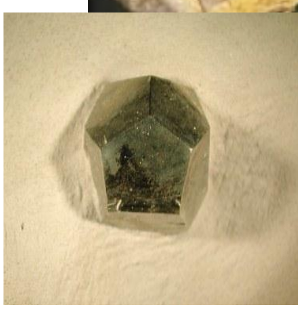


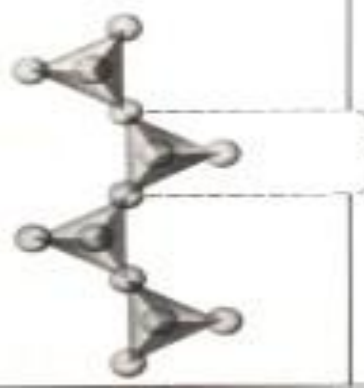
3.6.10 Φ EN CRISTALOGRAFIA Y MINERALOGIA

Observamos en la mayoría de los minerales, una cristalización característica, de cada mineral, siendo muchos de ellos pertenecientes a los cinco sólidos pitagóricos, tal es el caso de la halita, que se forma como el hexaedro, la pirita como el piritoedro (caras pentagonales), el cuarzo en una de sus múltiples cristalizaciones, como un octaedro.

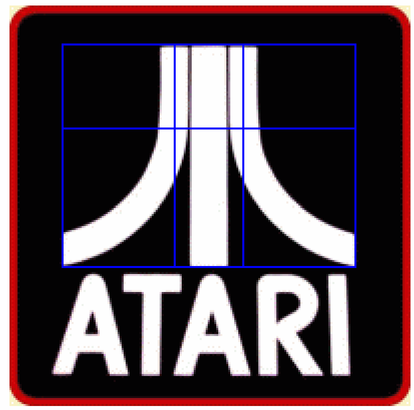
El grupo de los silicatos, por ser el más abundante en la naturaleza (SiO_2) presenta la organización geométrica con tetraedros de silicio, para formar todos iso, ino, tecto silicatos.

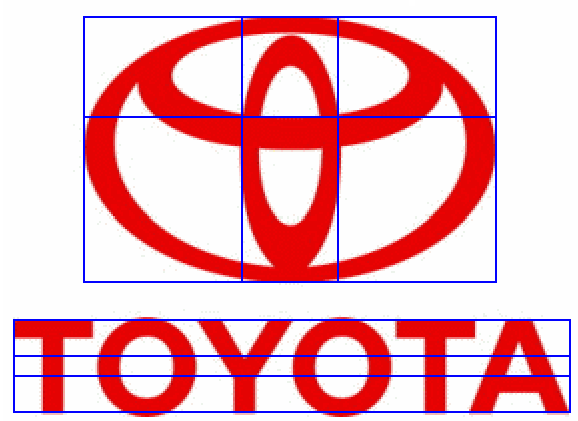


Clase	Distribución de los tetraedros de SiO_4 (el Si^{4+} central no está indicado)	Composición unitaria	Ejemplo mineral
Neosilicatos		$(SiO_4)^{-4}$	Olivino $(Mg, Fe)SiO_4$
Sorosilicatos		$(Si_2O_7)^{-6}$	Hemimorfita $Zn_4Si_2O_7(OH) \cdot H_2O$
Ciclosilicatos		$(Si_6O_{18})^{-12}$	Berilo $Be_3Al_2Si_6O_{18}$
Inosilicatos (cadena simple)		$(SiO_3)^{-2}$	Piroxeno, por ej., enstatita $MgSiO_3$

4 Φ EN EL COMERCIO Y PUBLICIDAD



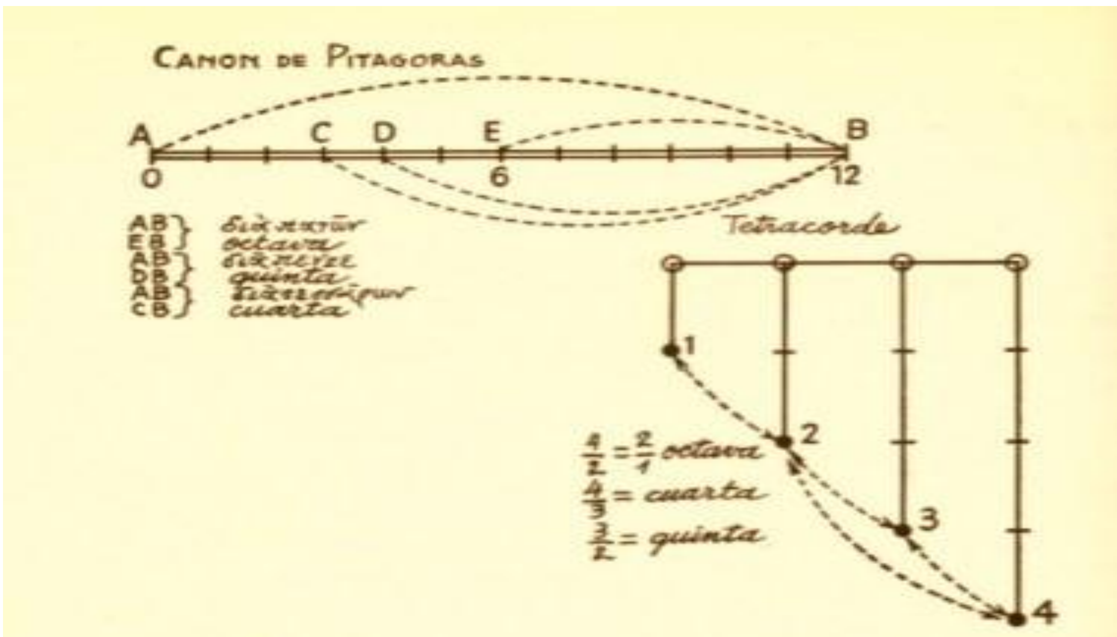


No es de extrañar que las tarjetas de crédito y muchas obras arquitectónicas modernas adopten esta forma, son rectángulos áureos, acertadamente elegida su forma para así hacer de oro a quien las emite. El documento nacional de identidad español también es un rectángulo áureo.

La mayoría de los objetos electrónicos, tales como ipod, iphones, y un sinnúmero de objetos del hogar y la oficina, tienen la sección aurea involucrada en todas sus medidas, como factor de agradabilidad para la vida cotidiana.

La mayoría de las tesalaciones o embaldosados usan figuras de los sólidos regulares o combinaciones para hacer grandes y hermosos tapices, que desde la época de Estcher, se han trabajado, más como un ejercicio matemático y artístico, demostrando que se pueden hacer dichas tesalaciones con otros objetos de forma irregular, tales como serpientes, cocodrilos, aves, etc.

5 Φ EN LA MUSICA



La contribución de los pitagóricos a la música es sumamente interesante. Demostraron que los intervalos entre notas musicales pueden ser presentados mediante razones de números enteros, utilizando una especie de guitarra con una sola cuerda, llamada monocordio. Este poseía un puente móvil que al desplazarse producía, en ciertas posiciones, notas que, comparadas con la emitida por la cuerda entera, resultaban más armoniosas que otras.

Si el alma es armonía, la música debe ejercer sobre el espíritu un especial poder: la música puede restablecer la armonía espiritual, incluso después de haber sido turbada. De tal idea se deduce uno de los conceptos más importantes de la estética musical de la Antigüedad: el concepto de catarsis. El vínculo de la música con la medicina es muy antiguo, y la creencia en el poder mágico-encantador, y con frecuencia, curativo, de la música, se remonta a tiempos anteriores a Pitágoras.

Pero los pitagóricos, no solo establecieron una especie de medicina musical del alma, sino que empleaban también para ciertas enfermedades los encantos creyendo que la música contribuía grandemente a la salud si se empleaba del modo más conveniente. Por tanto, se establecía un lazo indisoluble entre salud y música, puesto que la proporción y equilibro de las notas produce armonía y orden, tanto en el cuerpo como en el alma.

Apelan al razonamiento, al rigor lógico y la abstracción extrema. La orrespondencia entre la música y la ciencia se conoce desde hace mucho tiempo. Probablemente, hacia el siglo VI a.C., en Mesopotamia ya advirtieran las relaciones numéricas entre longitudes de cuerdas. Pero fue en la Grecia antigua cuando se trazaron las diferentes escalas armónicas basadas en las proporciones
numéricas. Para los pitagóricos el Universo era armonía y número, las notas musicales se correspondían con los cuerpos celestes, los planetas emitían tonos según las proporciones aritméticas de sus órbitas alrededor de la Tierra, y los sonidos de cada esfera se combinaban produciendo una sincronía sonora: la “música de las esferas”. Platón hace referencia a ella y le atribuye valores éticos.

Las enseñanzas en Grecia incluían la aritmética y la música de forma conjunta. La aritmética permitía la comprensión del universo físico en tanto que la música se dirigía a la armonía universal. Más tarde la música formó parte del Quadrivium, junto con la astronomía, la geometría y la aritmética. La tradición que consideraba al Universo como un gran instrumento musical se prolongará durante la Edad Media y hasta el siglo XVII, cuando aparece la fi gura de Johannes Kepler. El astrónomo alemán intentó comprender las leyes del movimiento planetario y consideró que éstas debían cumplir las leyes pitagóricas de la armonía.

La tendencia del hombre, desde tiempos remotos es describir un sistema que busca unifi car los fenómenos del mundo físico y del mundo espiritual en términos de números en particular, en términos de razones y proporciones de enteros. Sabemos que el sonido producido al tocar una cuerda depende de la longitud, grosor y tensión de la misma. Entendemos que cualquiera de estas variables afecta a la frecuencia de vibración de la cuerda. Lo que Pitágoras defendió es que, al dividir una cuerda en ciertas proporciones, era capaz de producir sonidos placenteros al oído. Números y belleza podían ser uno; por tanto, el mundo emocional y el físico podrían ser descritos con

números sencillos. Situaba los sonidos a determinadas distancias regulares en el monocordio, instrumento de una cuerda, resultando de ello sonidos consonantes o armónicos y una colocación
que sirvió de base para el desarrollo de las escalas musicales que sirven de soporte a nuestra música occidental.

El músico, desde siempre, es un técnico que ejerce y aplica su genio y su inspiración mediante un enredado y complejo sistema de trascripción de ideas. El sistema musical desde Pitágoras fue desarrollándose como el resto de las ciencias y movimientos artísticos, llegando a sofisticados sistemas que nos permiten controlar y dominar el sonido. El músico en su quehacer maneja elementos esenciales e imprescindibles. No le basta su genio ni depende de su inspiración. Es un conocedor del ritmo, la melodía, la armonía, el timbre de los instrumentos o los elementos formales según la época que le toca vivir.

Trabaja con estos ingredientes de igual modo que otro artesano con los suyos. Mezcla de manera coherente, revolucionaria, intencionada, audible, inaudita…
Uno de los factores más decisivos en la música es la melodía. Es la idea principal que sobresale en la mayoría de las composiciones, sean una simple canción o alguna forma compleja y larga en el tiempo. Suele ser triste o alegre, noble o diabólica, juguetona, saltarina o relajante. Expresa una variedad innumerable de matices y diferencias y apela a nuestro estado de ánimo. Va unida inevitablemente al ritmo y produce en nosotros un efecto físico y un efecto emocional que no necesita de palabras ni descripciones.

Una melodía bella, como una pieza entera de música, ha de tener proporciones satisfactorias. Debe darnos la impresión de cosa consumada e inevitable. Desde un punto de vista técnico, todas las melodías existen dentro de los límites de algún sistema escalístico. Una escala no es más que una determinada disposición de una serie de notas, y esa colocación no ha sido un hecho arbitrario. Podemos decir que los constructores de escalas, empezando por Pitágoras, confiaron en su instinto y más tarde, los hombres de ciencia los apoyaron con sus cifras de vibraciones relativas por segundo. En nuestro sistema moderno el trecho de la escala está la de Fibonacci, es decir, asigna un número a cada nota que le
permitirá construir el sujeto de la fuga utilizando esos sonidos.

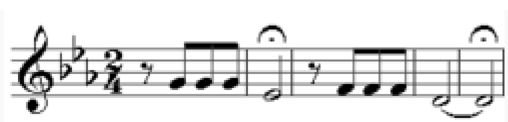
Do	**Re**	**Mib**	**Fa**	**Lab**	**Do**
1	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**

Realiza la fuga en un total de 89 compases. En los primeros 55 genera la tensión que debe llevar toda fuga desde la exposición del tema hasta el punto culminante, para concluir 34 compases más tarde. En el momento de culminación del estrecho tenemos exactamente el Número de Oro. Luego Bartok lleva magistralmente la fuga en decadencia hasta el final, momento en el que aparece la celesta, instrumento de tecla con sonido similar al de un carillón. Al margen de un estilo, de unas dificultades a la hora de escuchar un lenguaje del siglo XX, Bartok nos conduce hacia lugares remotos de belleza, magia y misterio. El número de Oro es un número mágico; la Música, un tesoro a nuestro alcance.

Beethoven no dijo nada de su intención secreta en la *Quinta Sinfonía*. Tampoco Debussy ni tantos otros. Bartok dejó escrito: “Dejad que mi música hable por mí; no reclamo los derechos de ninguna explicación de mis obras”. Lo cierto es que, para nuestro gozo, todos siguieron las normas de Tomas de Aquino: Los sentidos se deleitan en las cosas debidamente proporcionadas.

En esta Sinfonía, Beethoven distribuye el famoso tema siguiendo la sección áurea. El clímax de la obra se encuentra al 61,8 % de ella.

La famosa apertura “motto” suena exactamente en el punto dorado 0,618(*) en el compás 372 de 601 y nuevamente en el compás 228 el cual es el otro punto dorado (0.618034 desde el final de la pieza), por esta razón Beethoven tuvo que usar 601 compases para conseguir esas figuras. Esto lo hizo ignorando los 20 compases finales que vienen detrás de la ocurrencia final del “motto” e ignorando a su vez el compás 387.



Cuatro primeras notas: corto, corto, corto, largo

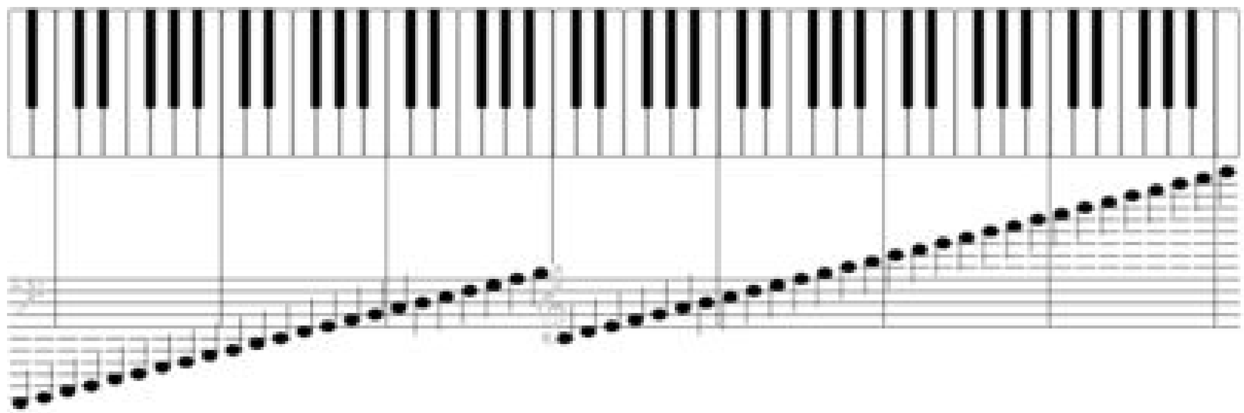
Características de la Sonata Nº1 para piano de Mozart

El segundo tema armónico de la obra siempre es más extenso que el primero:

Primer movimiento subdividido en 38 y 62 compases y 63 / 38 = 1.6315

Segundo movimiento subdividido en 28 y 46 compases y 46 / 28 = 1.6428

Otros instrumentos musicales, a parte de los violines, incluyen la divina proporción en sus formas, por ejemplo, el piano está constituido por siete octavas ordenadas de forma creciente de graves a agudas. De esta manera, los primeros seis números de la Sucesión de Fibonacci figuran en una octava de piano, la cual consiste en 13 teclas, 8 teclas blancas y 5 teclas negras (en grupos de 2 y 3)



La razón de todos los segmentos de un pentagrama equivale a Phi

Es necesario aclarar que cuando se menciona al número áureo en una realización artística de cualquier naturaleza no se está haciendo mención al número áureo de los matemáticos, un irracional con infinitos decimales, sino a una aproximación racional adecuada a las circunstancias o a un dibujo hecho con regla no graduada de un solo borde y longitud indefinida y un compás de abertura fija o variable.

Generalmente se utilizan cocientes de números pertenecientes a la sucesión de Fibonacci que dan valores aproximados, alternativamente por defecto o por exceso, según la necesidad o la sensibilidad humana y hasta la capacidad de separación tonal de cada instrumento, Un violín, por ejemplo, puede separar hasta un tercio de tono.

El oído humano sano y entrenado distingue hasta trescientos sonidos por octava. Como un ejemplo conocido y no discutido tenemos a la escala atemperada o templada. Esta es una escala logarítmica. Se creó muy poco tiempo después de que los logaritmos pasaran al patrimonio de la matemática. La octava atemperada está basada en $\sqrt[12]{2}$. Este número irracional tiene infinitos decimales, pero la afinación se hace redondeando las cifras de las frecuencias a uno o dos decimales. De cualquier manera, el error tonal total cometido no es superior al doceavo de tono y el oído humano no lo nota. La uniformidad de la separación de las notas y la coincidencia de bemoles y sostenidos permite comenzar una melodía por cualquier nota sin que se produzcan las desagradables disonancias de la escala diatónica y la escala física. De la misma manera se actúa con la distribución de tiempos o la altura de los tonos usando el número áureo; con una aproximación racional que resulte práctica. Existen numerosos estudios al respecto, principalmente de la Universidad de Cambridge.

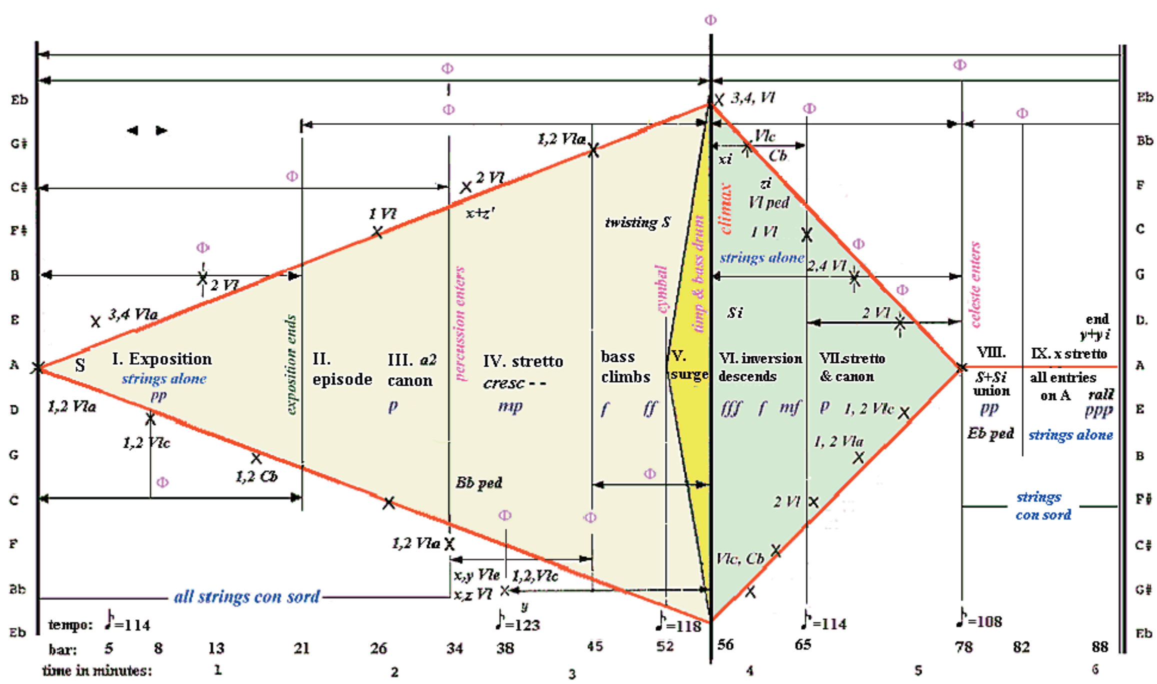
Autores como Bártok, Messiaen y Stockhausen, entre otros, compusieron obras cuyas unidades formales se relacionan (a propósito) con la sección aurea

Clave bien temperado, Johann Sebastian Bach, (1685-1750)

Bartók nunca habló de su técnica compositiva, sino que ha sido el musicólogo húngaro Ernö Lendvai quien dedicó gran parte de su vida a descubrir las bases de este sistema. Según Lendvai, la música de Bartók está basada en gran parte en sus investigaciones con el folklore, en especial del húngaro, y podría dividirse en dos grandes bloques, distintos en cuanto a concepción pero complementarios entre sí, llegando a alternarse incluso en una misma obra en distintas secciones; son el Sistema diatónico, basado en la música folklórica, sus modos y ritmos, en la escala acústica, y en otros procedimientos que no entraremos a valorar, y el Sistema cromático, influenciado también por el folklore, y que se basa por un lado en el Sistema axial, y por otro en la Proporción áurea.

El método de Bartók, en su construcción formal, está estrechamente ligado a las leyes del Número Áureo. Éste constituye un elemento formal que es, al menos, tan significativo en la música de Bartók, como la cuadratura en el periodo clásico.

Bartok: Music for String Instruments, Percussion and Celeste I. Fugue



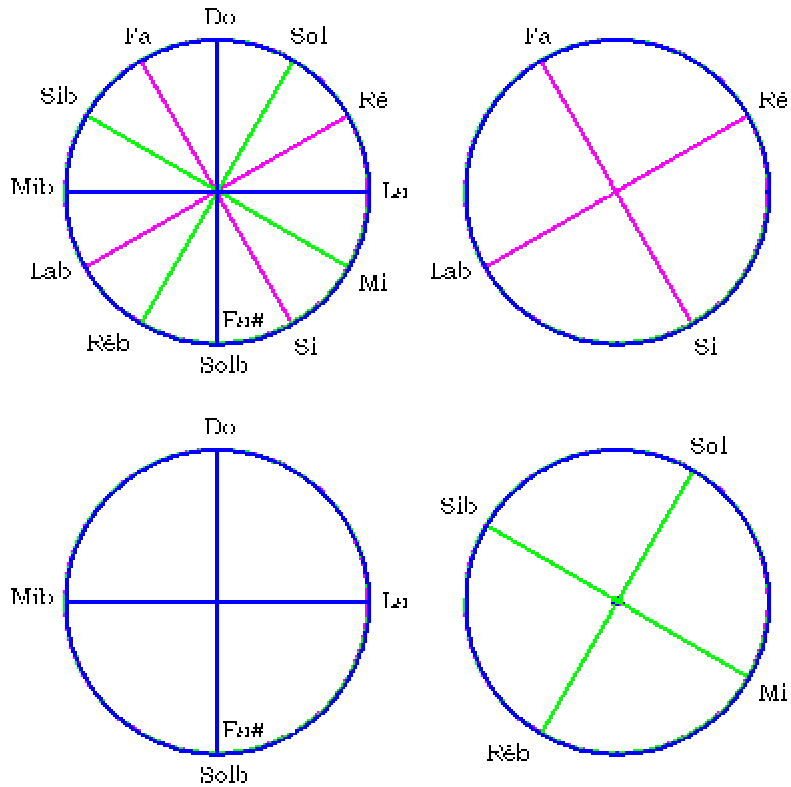
El compositor mexicano Silvestre Revueltas (1899-1945) utilizó también el número áureo en su obra *Alcancías*, para organizar las partes (unidades formales).

El grupo de rock progresivo norteamericano Tool, en su disco Lateralus (2001) hacen múltiples referencias al número áureo y a la sucesión de Fibonacci, sobre todo en la canción que da nombre al disco, pues los versos de la misma están cantados de forma que el número de sílabas pronunciadas en cada uno van componiendo dicha secuencia. Además la voz entra en el minuto 1:37, que pasado al sistema decimal coincide muy aproximadamente con el número áureo.

Zeysing notó la presencia de los números 3, 5, 8 y 13, de la Sucesión de Fibonacci, en el cálculo de los intervalos aferentes a los dos tipos de acordes perfectos. Los dos tonos del acorde mayor final, mi y do por ejemplo (la sexta menor o tercia mayor invertida en do mayor), están entre sí en la razón cinco octavos. Los dos tonos del acorde menor final, por ejemplo, mi bemol y do (sexta mayor o tercia transpuesta en do menor) dan la razón tres quintos.

6.3.8 El sistema axial

Se trata de la división de círculo de quintas en tres ejes dobles, uno de tónica, otro de dominante y otro de subdominante.



Cada función tiene dos ejes, eje principal y eje secundario. A su vez cada eje tiene dos extremos, polo y antípoda.

Aunque el parentesco entre un polo y su antípoda es menos cercano que con los puntos vecinos, cada polo puede ser sustituido por su antípoda, realizando la misma función. Por tanto, se mantienen las funciones tradicionales de I, IV y V. Una sucesión MI-LA-RE-SOL-DO-FA, en Bela Bartók puede ser MI-LA-LAb-REb-DO-FA.

La división áurea puede considerarse que sigue uno o dos cursos posibles, según aparezca primero la sección más larga o la más corta. Llamaremos sección positiva a la sección larga; la otra posibilidad será la sección negativa, la sección corta seguida de la larga. Un estudio analítico de varias obras de Bartók permite llegar a la conclusión de que la sección positiva va acompañada de intensificación, ascenso dinámico o concentración de material, mientras que la sección negativa de descenso y apaciguamiento.

El estudio de estas proporciones nos conduce inmediatamente a la cuestión del uso que hacía Bartók de acordes, escalas e intervalos. Su sistema cromático se basa en las leyes de la proporción áurea y especialmente en la serie numérica de Fibonacci.

Calculado en semitonos:

1 representa la segunda menor, 2 representa la segunda mayor, 3 representa la tercera menor, 5 representa la cuarta justa, 8 representa la sexta menor, 13 representa la octava aumentada.

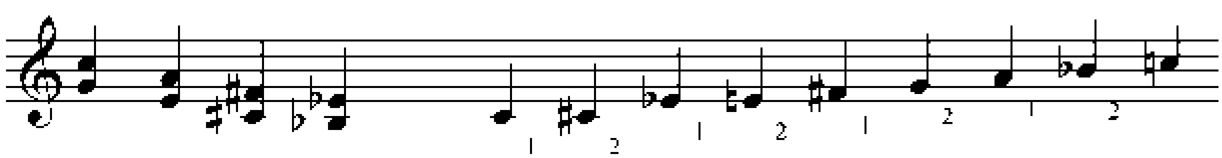
Mencionemos ahora un grupo frecuentemente recurrente de escalas del tipo áureo, las cuales representan estructuralmente intervalos de 1:5, 1:3 y 1:2. La relación de la proporción áurea entre estas tres fórmulas es resultante de la proporción 5:3:2. Cada una de ellas surge de la repetición periódica de los intervalos 1:5, 1:3 y 1:2. Su estructura es, por tanto, así:

Modelo 1:5 alternando segundas menores y cuartas justas, por ejemplo, Do-Do#-Fa#-Sol-Do…

Modelo 1:3 alternando segundas menores y terceras menores, Do-Do#-Mi-Fa-Sol#-La-Do…

Modelo 1:2 alternando segundas menores y mayores, Do-Do#-Mib-Mi-Fa#-Sol-La-Sib-Do…

De todas estas escalas, la más importante es el Modelo 1:2, ya que representa realmente el grupo de escalas de los ejes de tónica y dominante:



6.4 Obras selectas

en varias sonatas para piano de Mozart, la proporción entre el desarrollo del tema y su introducción es la más cercana posible a la razón aurea, esto se presenta en la sonata N° 1 para piano

el segundo tema armónico de la obra siempre es más extenso que el primero, pues el primer movimiento está dividido en 38 y 62 compases y 62/38 =1,6315, el segundo movimiento está dividido en 28 y 46 compases, y 46/28 = 1,642

Aunque no se sabe si Beetoven estaba al tanto de esto, pero en su Quinta sinfonía, distribuye el tema siguiendo la sección aurea. El clímax de la obra se encuentra al 61,8% de ella.

Los músicos de Jazz autodidactas, pueden no ser conscientes de la teoría de las escalas, armonía y formas que usan habitualmente, pero igual producen obras armoniosas.

Finalmente, podemos decir que el piano está constituido por siete octavas ordenadas en forma creciente de graves a agudas, así los primeros números de la sucesión de Fibonacci figuran en una octava de piano, la cual consiste de 8 teclas, 5 teclas negras en grupos de 2 y 3 teclas.

Las proporciones musicales en la catedral de Chartres

Una investigación recientemente realizada en la Universidad de Palermo, Buenos Aires, Argentina permitiría inferir que el diseño geométrico de la catedral de Chartres se basa en las proporciones correspondientes a las *consonancias perfectas* y el *intervalo de tono*. Esta geometría tendría su fundamento filosófico y teológico en la cosmología musical del *Timeo* de Platón, comentada por Calcidio, e interpretada cristianamente por los pensadores de la escuela de Chartres del siglo XII.

La posibilidad de una geometría chartriana basada en las proporciones musicales ya había sido propuesta, alrededor del año 1956, por el historiador del arte Otto von Simson. Sin embargo, hasta el momento no se han notado estudios geométricos de la catedral de Chartres que permitan concluir, de manera contundente, que su arquitectura se basa en las proporciones de la escala diatónica. Por esta razón, la hipótesis de O. von Simson ha sido muy discutida por otros importantes historiadores del arte, como R. Wittkower La investigación que se reseña a continuación podría aportar algunos datos interesantes en favor de la hipótesis de O. von Simson. Al mismo tiempo, esta investigación sugiere la posibilidad de que la geometría basada en relaciones musicales de proporción se encuentre también presente en otras construcciones cristianas de la época, puesto que la doctrina cosmológica musical del *Timeo* impregnó la estética del Medioevo cristiano.

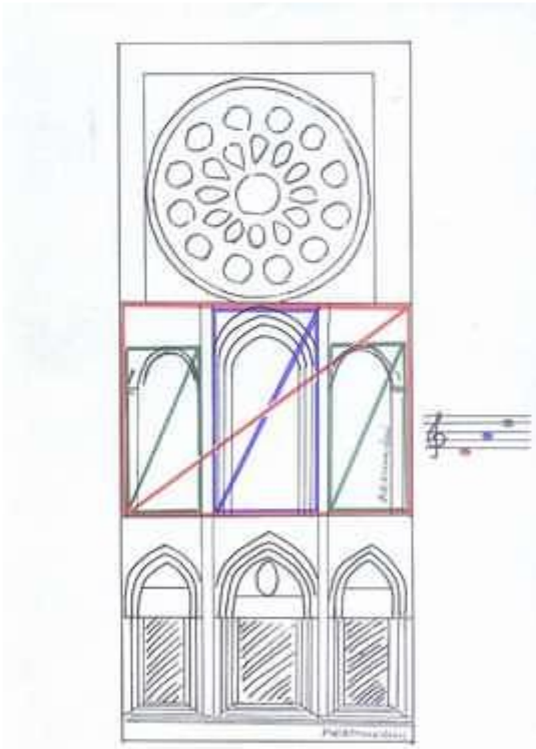
Antecedentes filosóficos de la cosmología de la catedral de Chartres

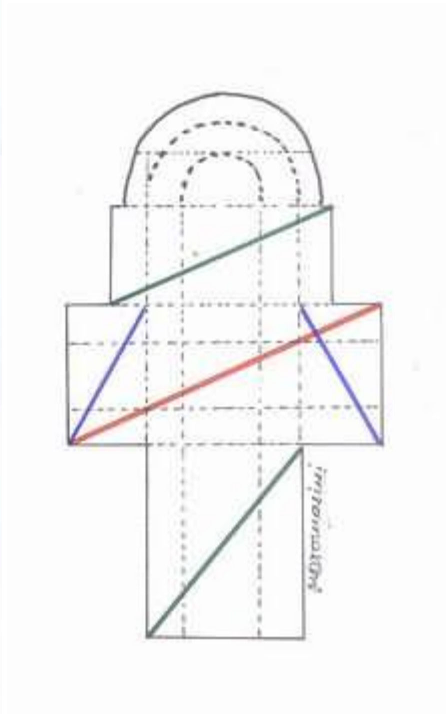
El *Timeo* es uno de los diálogos platónicos que mayor influencia ha ejercido sobre la estética de Occidente. En este diálogo se describe la generación del universo en términos aritméticos y geométricos. Efectivamente, según relata Platón en este texto, el Demiurgo ha generado el universo llevándolo desde el desorden al orden. Es decir que la generación del universo, en el Timeo, es la imposición del orden sobre el Cuerpo y el Alma del Mundo. En particular, al ordenar el Alma del Mundo el Demiurgo instala en ella las ***proporciones*** correspondientes a las ***consonancias*** *perfectas* y el *tono*. Como es sabido, estas proporciones constituyen el fundamento matemático sobre el cual se apoyan las relaciones armónicas de la *octava musical*. Es decir que el orden impuesto al Alma del Mundo en el momento de su generación es un *orden musical*. De esta manera, al ser ordenada musicalmente, el Alma del Mundo contiene en sí a la *armonía arquetípica* – armonía a la que deben tender las almas individuales.

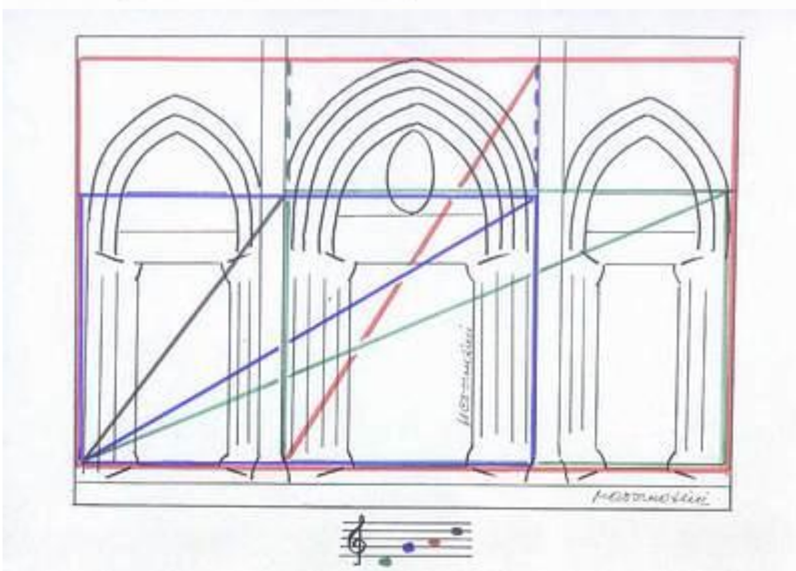
La concepción musical del Alma del Mundo, que en el Timeo se encuentra apenas esbozada, fue posteriormente ampliada y desarrollada por los filósofos neoplatónicos de fines de la Antigüedad. En Occidente, el principal comentador del *Timeo* platónico fue Calcidio, quien habría escrito sus obras en la primera mitad del siglo IV d.C. Tal como era costumbre en la época, Calcidio tradujo al latín parte del *Timeo*, acompañando esta traducción con abundantes explicaciones e interpretaciones personales. Los Comentarios al Timeo de Calcidio fueron, prácticamente, la única versión del diálogo platónico conocida por el medioevo latino. Esta autor dedicó unos cincuenta capítulos de su obra a explicar los fundamentos matemáticos de la música. Sus *Comentarios* conforman, por lo tanto, un verdadero tratado sobre el tema, cuyos contenidos son similares a los que, posteriormente, aparecerán en los escritos de Boecio (siglo VI d.C.). Sin embargo, el objetivo principal de la obra de Calcidio es dilucidar la naturaleza del Alma del Mundo. Según expresa este filósofo, el Alma ha sido ordenada en conformidad con las tres principales disciplinas: la geometría, la aritmética y la música. Explica que la divinidad ha modulado el Alma como si se tratase de un instrumento musical de cuerda, y afirma explícitamente que existe una relación armónica entre el Anima del Mundo y los acordes musicales. En síntesis, puede decirse que Calcidio interpreta la cosmología del *Timeo* acentuando las connotaciones musicales de la misma.

Las proporciones musicales de la catedral de Chartres

Las mediciones realizadas en el transcurso de la investigación señalan que la geometría que subyace a la arquitectura de la catedral exhibe concordancias basadas en las *consonancias perfectas* y el *tono*. Este estudio se limita a la fachada occidental (figura 1) y a la planta de la catedral (figura 2). Las partes analizadas fueron construidas durante el período de auge del Platonismo en la Escuela de Chartres. Por lo tanto, la incidencia de proporciones musicales en estas partes del edificio podría indicar que *las ideas platónicas del obispo Fulberto y de sus seguidores conformaron el fundamento filosófico y teológico de la geometría de la catedral*.

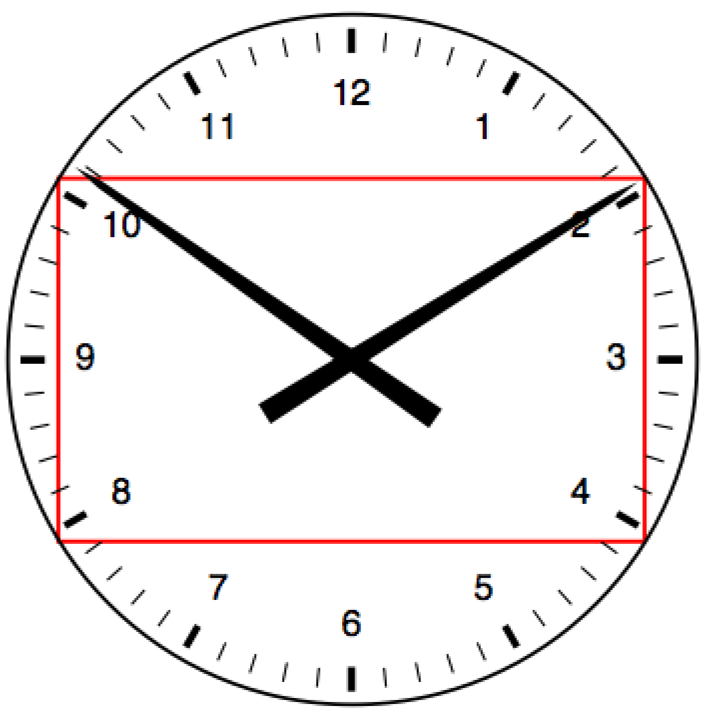






Las mediciones realizadas durante la investigación muestran que las diagonales de los rectángulos principales de la fachada occidental están relacionadas entre sí según los *intervalos de cuarta, de quinta, de octava y de tono* Estas relaciones se verifican, por ejemplo, entre las diagonales de los rectángulos que encierran a los tres ventanales románicos (figura 3), entre el diámetro del rosetón y el lado del cuadrado que lo encierra (figura 4), y entre otras importantes diagonales de la fachada (figura 5). Sin embargo, es en el Portal Real donde se observa la más armoniosa de las trazas (figura 6). En efecto, este diseño está basado en *rectángulos áureos* cuyas diagonales también están proporcionadas entre sí . Las relaciones musicales también se observan entre las diagonales de los rectángulos fundamentales que definen la planta de la iglesia (figura 8). Más aún, la nave principal podría haber sido diagramada como un *monocordio*. Ciertamente, si se compara la longitud total de la nave con una cuerda, entonces los puntos más importantes del recorrido –inicio y final del transepto, centro del crucero, ubicación del coro, etc.- se corresponden con las divisiones que dan lugar a las notas de la escala diatónica.

Hasta en el tiempo, aparece esta formidable relación, pues un reloj, sin importar su forma, la hora cercana a las 10:10, es la más usada para las publicidades, dado que a esta hora, las manecillas del reloj, están en los extremos de un rectángulo áureo.



6 Φ EN EN LA LITERATURA

Rafael Alberti Merello (El Puerto de Santa María, Cádiz, 16 de diciembre de 1902- ibídem, 28 de octubre de 1999) fue un escritor español, especialmente reconocido como poeta, miembro de la Generación del 27. Está considerado uno de los mayores literatos españoles de la llamada *Edad de Plata* de la literatura española, cuenta en su haber con numerosos premios y reconocimientos. Murió a los 96 años en 1999, no sin antes dejar escrita una poesía que dedicó al número de oro, llamándola Sección Aurea,

A la sección aurea

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.
A ti, cárcel de la retina,
aúrea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el Universo armónico origina.
A ti, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.
Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

Aurea Mediocritas!

1.618 ad infinitum!
Never repeating, always intriguing
Fibonacci born; phi!

Golden Section behold!
Creation sequence, nature's frequence

Mathematical phenomena; phi!

Heaven's divine proportion!
Ancient mystery, living history
Infinite and eternal; phi!

John Sarber

Inspiration Comes (Fibonacci)

1 *I*

1 *am*

2 *sitting*

3 *quiétalo,*

5 *listening for the*

8 *quiet noises in the darkness,*

13 *ghostly images flying between the tall pine trees,*

21 *illusion created by the mind, made by shadows, the brain playing tricks on itself.*

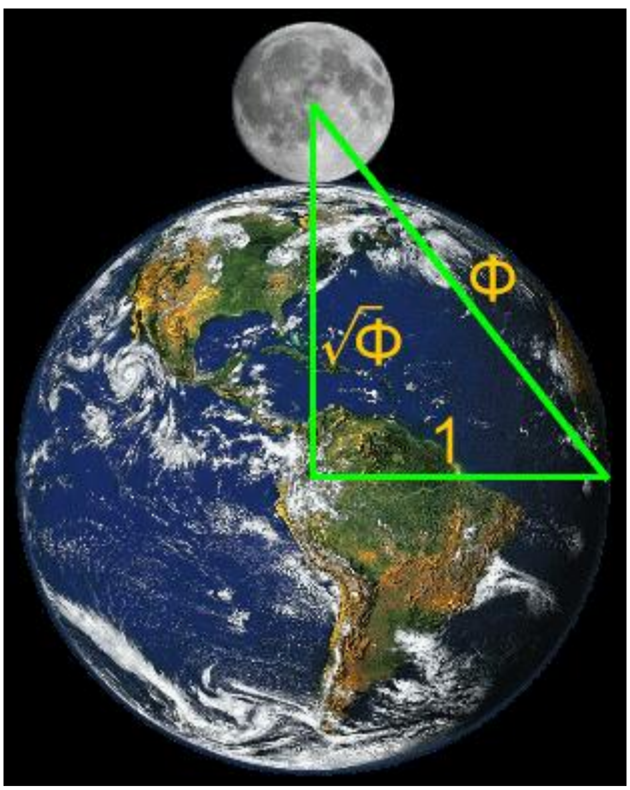
34 *It sits there, the raven, black as night, looking at me with its dark eyes in the dark night. Inspiration comes. Words form in my head. Evermore.*

7 Φ EN LA LUTIERIA

Para la construcción de instrumentos musicales, al comienzo se hacia con elementos que solamente permitían una afinación empírica, pero posteriormente cuando se conoció el número de oro, éste se incorporó en los talleres de lutieria, para perfeccionar sus sonidos y estandarizar las medidas. Al principio se creía que solamente el violín debería cumplir la relación aurea para su perfecto funcionamiento, y que los famosos violines Stradivarius tenían algún secreto en su fabricación, fue en el violín que por primera vez se revelara su relación con el número de oro en sus distribuciones. Se muestra a continuación una lista selecta de los instrumentos más destacados de algunos países, que tienen en su fabricación inmersa la proporción divina.

Antonio Stradivari examinando un instrumento, en una impresión romántica del Siglo XIX.

8 Φ EN EL UNIVERSO



	Dimension (km)	Proportion (Earth=1)	Mathematical Expression
Radius of the Earth	6,378.10	1.000	A
Radius of the Moon	1,735.97	0.272	
Earth Radius + Moon Radius	8,114.07	1.272	B
Hypotenuse	10,320.77	1.618 (Φ)	C
Hypotenuse / (Earth Radius + Moon Radius)	1.618 (Φ)		$A^2+B^2=C^2$

Caricatura alegórica a la visión cosmogónica de Pitágoras con base en los poliedros regulares.

El libro de las coincidencias, desvela a los jóvenes las asombrosas coincidencias astronómicas que desde hace siglos desconciertan a los científicos. Por ejemplo, las relaciones espacio-temporales entre las órbitas planetarias se ajustan a sencillas proporciones idénticas a las de las notas musicales, lo que llevó a los antiguos a hablar de "música de las esferas". El Sol y la Luna, vistos desde nuestro planeta, tienen el mismo tamaño aparente. Venus dibuja un pentagrama alrededor de la Tierra cada ocho años...

El presente libro constituye una guía inusual del sistema solar, pues sugiere la posibilidad de que existan relaciones fundamentales entre el espacio, el tiempo y la vida que todavía no hemos comprendido. Desde las observaciones de Ptolomeo y Kepler hasta la armonía de las esferas y la estructura oculta del sistema solar, el autor revela los exquisitos diseños orbitales de los planetas y las relaciones matemáticas que los gobiernan.

Encontramos la proporción áurea en la distancia de los diferentes planetas del sistema solar al sol.

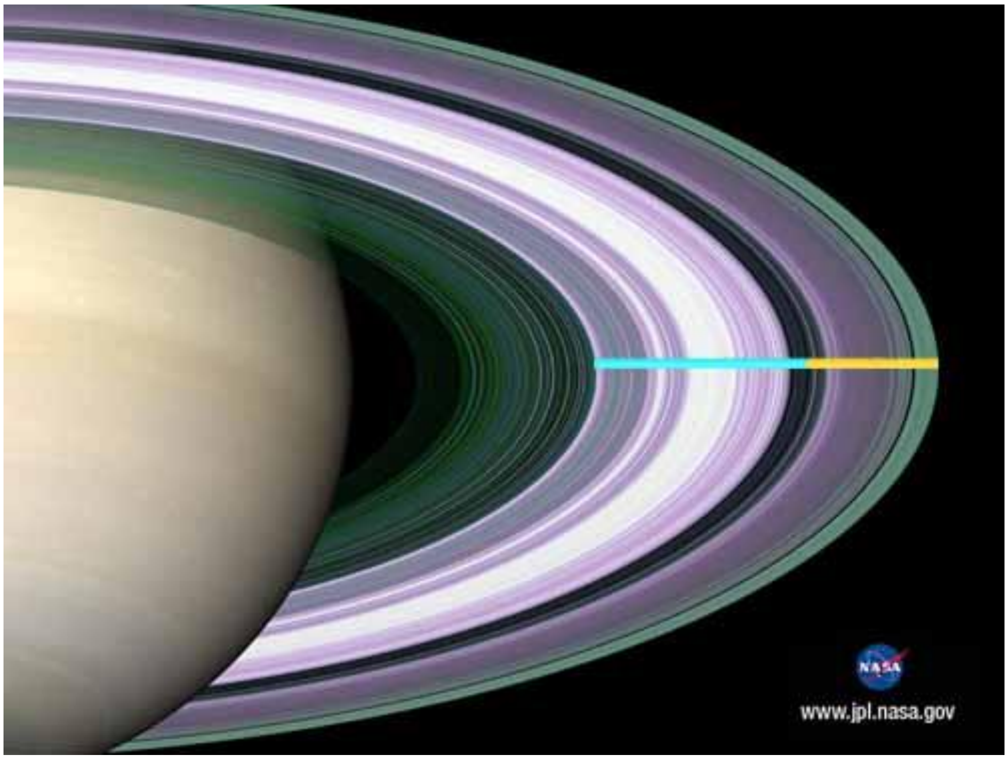
En la tercera columna de la siguiente tabla el resultado es el de dividir la distancia del planeta al sol por la distancia del anterior, por ejemplo en Tierra dividimos 149,6 por 108,2 = 1,383 .

Para Mercurio, al no tener planeta anterior le hemos asignado 1.

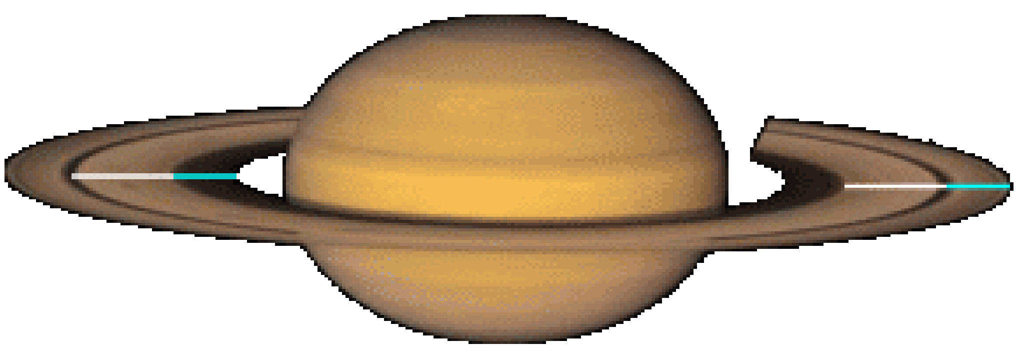
Muchas veces cuando hablamos del sistema solar omitimos el cinturón de asteroides, también representa una masa considerable en el "equilibrio del sistema solar", siendo Ceres el asteroide mayor. Ceres es tan grande que tiene una forma esférica (como los otros planetas) y representa un tercio del total de la masa del cinturón de asteroides situado entre Marte y Júpiter.

Planetas	Distancia al sol en millones de Km.	Relación entre las distancias de los sucesivos planetas
Mercurio	57,9	1
Venus	108,2	1,869
Tierra	149,6	1,383
Marte	227.9	1,523
Ceres	413,7	1,815
Júpiter	778,6	1,881
Saturno	1433,5	1,841
Urano	2872,5	2,004
Neptuno	4495,1	1,565
Plutón	5870	1,306
Total		16,187
Media		1,6187
Numero Phi		1,6180

En los anillos de Cassini del planeta Saturno se encuentra la relación Phi.

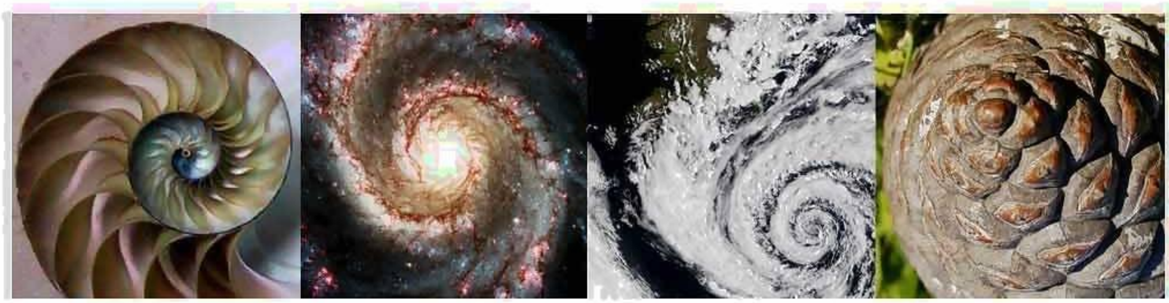


Si el segmento dorado (más claro) es igual a 1, el segmento azul (más oscuro) es igual a Phi.



8.1 Φ EN LAS GALAXIAS

Las galaxias, tiene sus brazos en forma de la espiral que se forma con la serie de Fibonacci, y por supuesto con el número de oro. Muchas de las relaciones entre el tamaño y la masa de estrellas neutrón, antes de convertirse en agujeros negros, encierran la proporción aurea, al igual que las relaciones entre la velocidad de giro y la velocidad tangencial que se soporta en dicha relación.

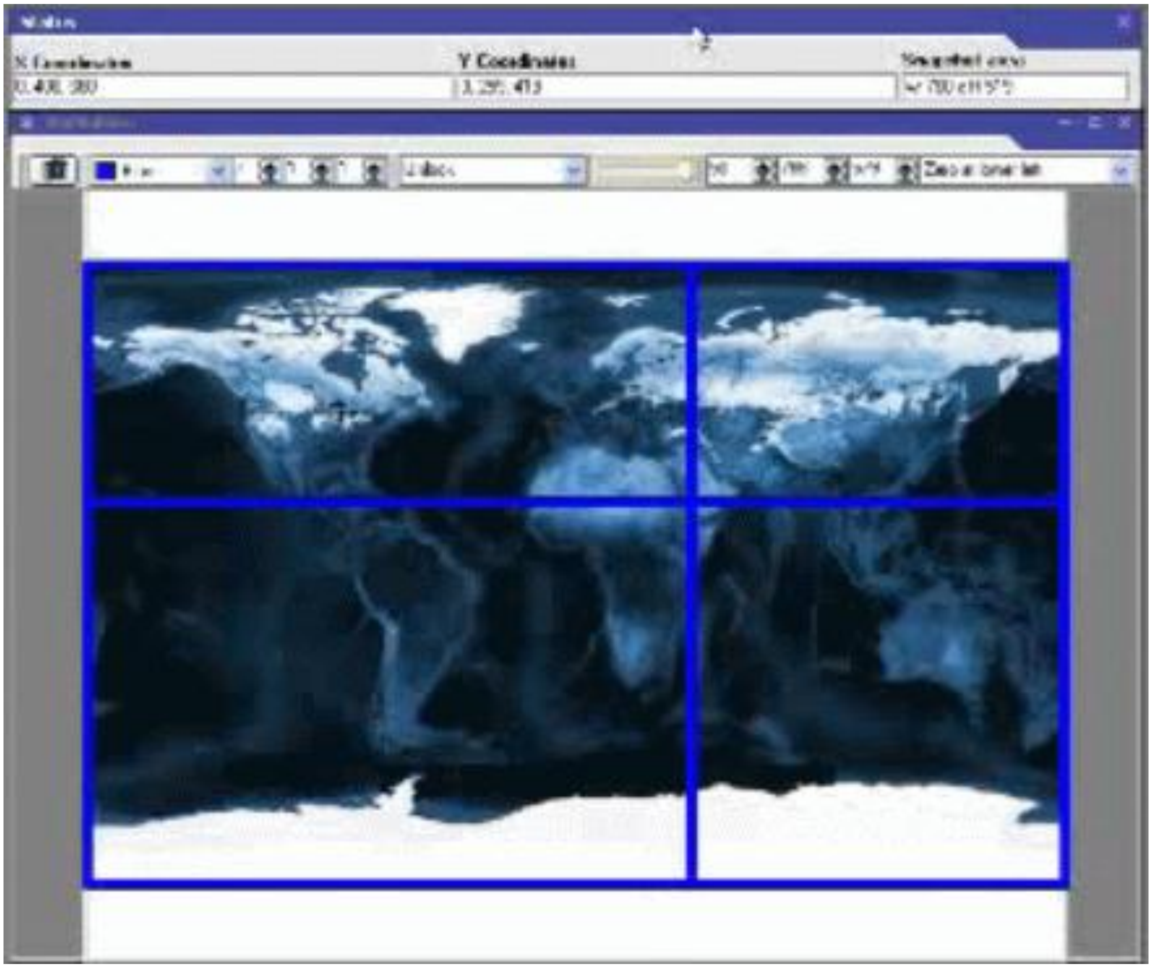


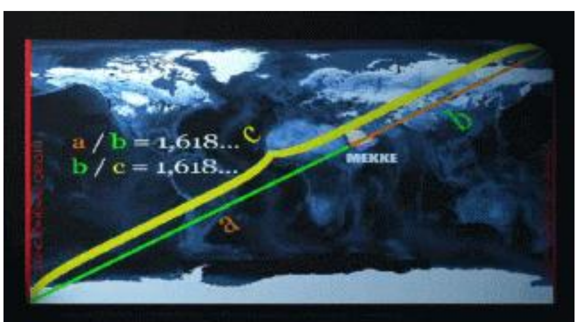
8.2 Φ EN LAS RELACIONES DE LA TIERRA EN EL MUNDO MUSULMAN Y CRISTIANO

La distancia entre La Mecca y el polo norte, así como hacia el polo sur, esta proporción es exactamente 1,618, el número de oro, cuyas distancias son 7631,68 km y 12342,32 Km, cuyo cociente es 1,618. Además la proporción entre el polo sur y la ciudad de Meca, así como entre los dos polos es otra vez 1,618.

Las distancias son 12348,32 Km y 19980,0 donde al efectuar el cociente aparece nuevamente el número de oro. Para los musulmanes el milagro no ha terminado, el numero dorado está en Mecca, según el mapa de longitud y latitud el cual es común para la humanidad para determinar las localizaciones. La proporción de elongación este con la oeste, a partir de la Mecca, hasta los extremos del solsticio es de 1,618, además puede verse en el mapa de **Google-Eart**, la proporción de la elongación desde Meca hasta la línea del solsticio occidental, con el perímetro de la tierra a esa misma latitud, es sorprendentemente el número de oro.

Para los sistemas de mapas aún si varían algunos kilómetros, el número dorado de la tierra está siempre dentro del perímetro de la ciudad de la Meca, en la región sagrada, que incluye el Kaaba.




a / b = 1,618...
b / c = 1,618...
c
MEKKE
b
a


c
a
MEKKE
b
a / b = 1,618...
b / c = 1,618...

En el Corán hay un verso que incluye la palabra Mecca, y una expresión que dice que hay claras evidencias en la ciudad que otorga fe a la humanidad. La relación entre la ciudad Meca y el número de oro, está gravado en el capítulo Al-Imran, verso 96. El número total de letras es 47, calculando el número de estas letras, encontramos que la palabra Mecca está mencionada en 47/1,618 = 29, es decir que hay 29 letras desde el principio del verso hasta la palabra Meca. Si tan solo faltara una letra, este cociente nunca podría haberse construido.

En el ojo musulmán también se reflejan las proporciones áureas. La relación entre la sección vertical y la sección horizontal del ojo, dan como resultado el número de oro.

En la cruz latina (la cristiana). La relación entre el palo vertical y el horizontal es esta proporción.
Además el palo horizontal divide la cruz en secciones áureas. Hay otros símbolos también en los que se puede ver las relaciones áureas.

6.5 Un estudio realizado por la SARU (Science and religion united = ciencia y religión unida

en noviembre del año 2005, analizó meticulosamente el "Evangelio Prohibido de Judas" descubierto a principios del año 2000 (aquel que afirma que en realidad Jesús le pidió a Judas que lo traicione). Entre otros hallazgos, fue notorio el hecho de que se detallaran las medidas de la cruz en la cual Jesucristo fue crucificado, y más sorprendentemente, una de sus características: el trozo de madera más largo de esta medía 3,23 m aproximadamente; mientras que el trozo más corto tenía una longitud aproximada de 2m. Lo curioso fue que notaron que al dividir la longitud del trozo mayor por la del menor se obtiene (usted mismo puede comprobarlo) 1,615, que es el valor aproximado de F.

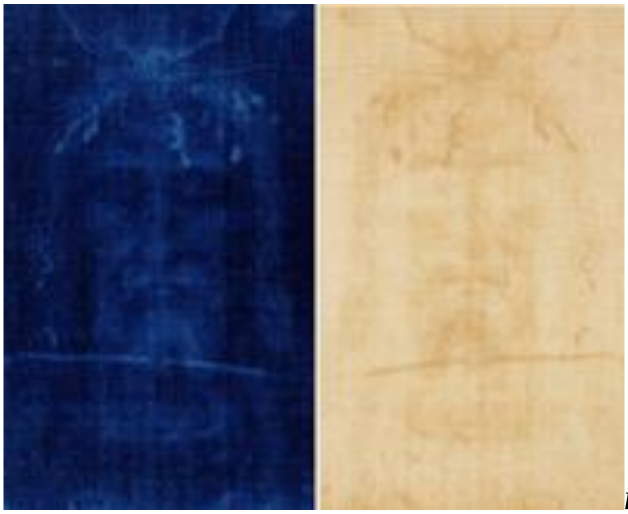
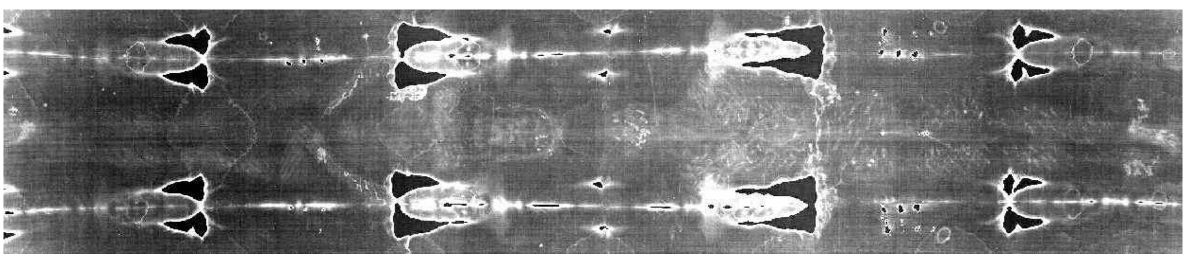


Image *n a la izquierda:* Imagen a colores del Santo Sudario, como aparece, en su estado natural, mostrando el color rojizo de las manchas de sangre.



Otro estudio de la SARU, en este caso sobre el Santo Sudario (la tela en que se cree que Jesús fue envuelto en su sepulcro), en el que se presentan marcas y traumas físicos propios de la crucifixión; demuestra que las marcas alrededor del cráneo que, según se cree, fueron causadas por la corona de espinas, se presentan en forma de espiral logarítmico, y consecuentemente sus espinas siguen la sucesión de Fibonacci. Por lo que se cree, el sudario fue falsificado por Da Vinci.

La Biblia, la palabra de Dios, no tiene por qué ser la excepción, también contiene la sección áurea. Según la Traducción del Nuevo Mundo de las Santas Escrituras, contiene un canon de 66 libros inspirados, distribuidos proporcionalmente. La sección áurea es: 66 x 0,6 igual a 39 libros, que forman las escrituras Hebreo arameas y su diferencia igual a 27 libros, que forman las escrituras Griegas cristianas. Ahora, si a estos valores se les representa gráficamente en un rectángulo, el resultado sería una forma áurea o rectángulo de oro.

Una de las primeras construcciones navales en la historia del hombre desde su creación, es el Arca de Noé, cuyas dimensiones fueron proporcionadas por Dios mismo al patriarca Noé. Contiene la sección áurea o Proporción Divina en su medidas. Por ejemplo: Su largo es de 300 codos, dividido por (6) equivale a 50 codos para lo ancho, y esto multiplicado por la sección áurea igual a 0,6 equivale a 30 codos de alto. La Proporción de (6 a 1) es usada en la arquitectura naval moderna. Las medidas originales fueron dadas en codos convertidas a metros: Largo 134 metros, ancho 22,5 metros y alto 13,5 metros. Un codo es equivalente aproximadamente 44,5 cm.

8.2 RAMANUJAN Y EL NUMERO DE ORO

La **fracción continua de Rogers–Ramanujan** es una fracción continua descubierta por Rogers (1894) y más tarde estudiada por **Srinivasa Ramanujan, intimamente relacionada con las identidades de Rogers-Ramanujan, que puede ser evaluada explícitamente para determinados** valores de su argumento.

La fracción continua de Ramanujan es:

$$1+\cfrac{q}{1+\cfrac{q^2}{1+\cfrac{q^3}{1+\cdots}}}=\frac{G(q)}{H(q)}=1+q-q^3+q^5-\cdots$$

(sucesión A003823 en OEIS)

donde

$$G(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q;q^5)_\infty(q^4;q^5)_\infty}=1+q+q^2+q^3+2q^4+2q^5+3q^6+\cdots$$

(sucesión A003114 en OEIS)

y

$$H(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q^2;q^5)_\infty(q^3;q^5)_\infty}=1+q^2+q^3+q^4+q^5+2q^6+\cdots.$$

(sucesión A003106 en OEIS)

son funciones que aparecen en las identidades de Rogers-Ramanujan.

Aquí, $(a;q)_\infty$ denota el símbolo q-Pochhammer para el caso infinito.

Si $q = e^{2\pi i\tau}$, entonces $q^{-1/60}G(q)$ y $q^{11/60}H(q)$ y también $q^{1/5}H(q)/G(q)$) son formas modulares de τ. Puesto que éstas tienen coeficientes enteros, la teoría de la multiplicación compleja implica que sus valores para τ siendo un número imaginario cuadrático irracional son números algebraicos que pueden ser evaluados explícitamente. En particular, la fracción continua de Ramanujan se pueden evaluar para estos valores de τ.

6.5.1 Ejemplos

$$\frac{1}{1+\frac{e^{-2\pi}}{1+\frac{e^{-4\pi}}{1+\ldots}}}=\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)e^{2\pi/5}=e^{2\pi/5}\left(\sqrt{\varphi\sqrt{5}}-\varphi\right)=0.998136$$

donde φ es el número áureo (Aproximadamente 1.618)

El inverso multiplicativo de esta expresión es:

$$1+\frac{e^{-2\pi}}{1+\frac{e^{-4\pi}}{1+\frac{e^{-6\pi}}{1+\ldots}}}=\frac{1}{2}\left[1+\sqrt{5}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}\right]e^{-2\pi/5}$$

$$=\frac{e^{-2\pi/5}}{\sqrt{\varphi\sqrt{5}}-\varphi}=1.0018674\ldots$$

$$\frac{1}{1+\frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+\frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+\ldots}}}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{5}}{1+\left[5^{3/4}(\varphi-1)^{5/2}-1\right]^{1/5}}-\varphi\right)e^{2\pi/\sqrt{5}}=0.99999920\ldots$$

El inverso multiplicativo de esta expresión es:

$$1+\cfrac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+\dots}}$$

$$=\cfrac{e^{-2\pi/\sqrt{5}}}{\cfrac{\sqrt{5}}{1+[5^{3/4}(\varphi-1)^{5/2}-1]^{1/5}}-\varphi}=1.000000791267\dots$$

.

9. RESUMEN.

7. Treinta datos que no sabías sobre el 'número más bello'

La escalera de Bramante, en los Museos Vaticanos

Para muchos, las matemáticas son poco más que un recuerdo de los días escolares, y sin embargo, como dice la canción del amor, las matemáticas están por todas partes. Raro es el proceso que no puede ser explicado con fórmulas, ya sea una explosión de motor o el crecimiento de una flor. Por eso hay conceptos matemáticos que traspasan los tratados científicos y se convierten en ideas comunes que, de forma más o menos profunda, hasta los ajenos a la materia conocen y manejan. Ese es el caso de ***phi***, el número de oro. No es nada más que una cifra: 1,61803... seguido por infinitos decimales. Sin embargo, se trata de uno de los números que más fascinación ha levantado a lo largo de la historia. Estudiado hasta la saciedad, conviene distinguir tres componentes distintos en la historia del número áureo.

- El número de oro, 'phi' o número áureo: como decimos, es un número irracional que se expresa con la siguiente fórmula:

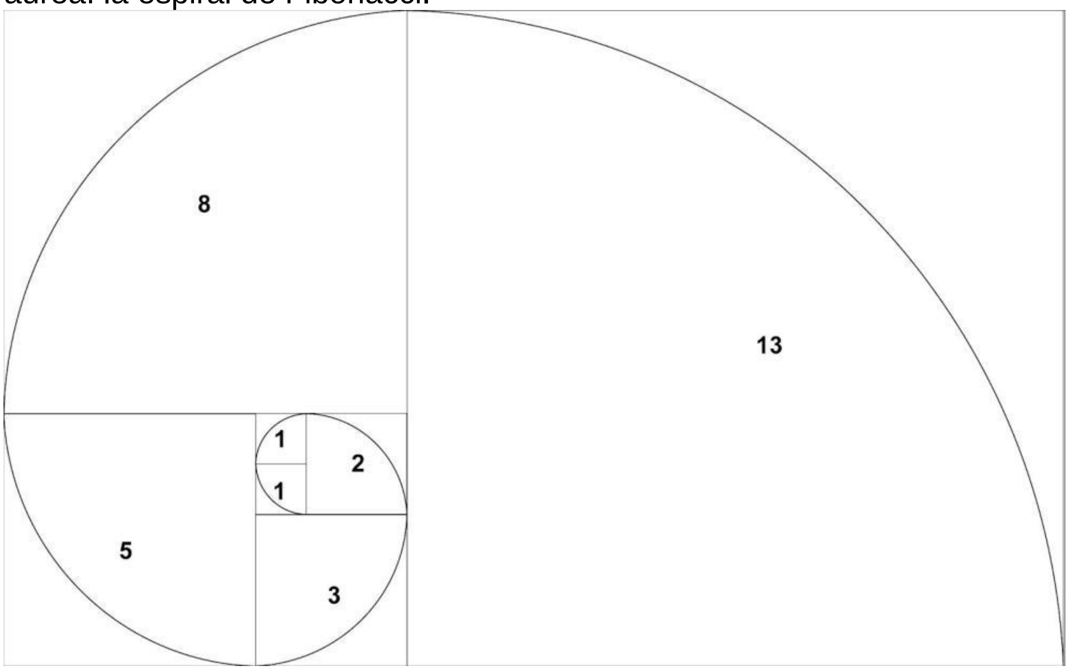
$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033988749...$$

- La divina proporción o proporción áurea: es un concepto geométrico, que se da cuando al partir un segmento en dos partes desiguales, dividiendo el total por la parte más larga obtenemos el mismo resultado que al dividir la más larga entre la más corta.

- La sucesión de Fibonacci: entra el en campo de la aritmética y está íntimamente relacionada con el número de oro. Se trata de una serie infinita de números naturales que empieza con un 0 y un 1 y continúa añadiendo números que son la suma de los dos anteriores, quedando con la forma siguiente:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1.597, 2.584, 4.181, 6.765, 10.946, 17.711, 28.657...

Uniendo el concepto aritmético con su representación geométrica se obtiene una de las imágenes más comúnmente asociadas al número y la razón áurea: la espiral de Fibonacci.



La relación de esta sucesión con el número de oro estriba en que al dividir cada número por el anterior de la serie se obtiene una cifra cada vez más cercana a 1,61803, quedando el resultado alternativamente por debajo y por encima del número preciso, sin llegar nunca a alcanzarlo absolutamente.

Con estos tres conceptos diferenciados y aclarados, solo queda entrar a descubrir detalles sorprendentes que desde hace siglos rodean al número áureo.

7.1.1 La historia del número de oro

1. Su descubrimiento se lo debemos, como tantas otras cosas, a los griegos. Ellos le dieron un tratamiento básicamente geométrico, y fue Euclides en su obra***Elementos*** uno de los primeros que se refirió a este concepto.

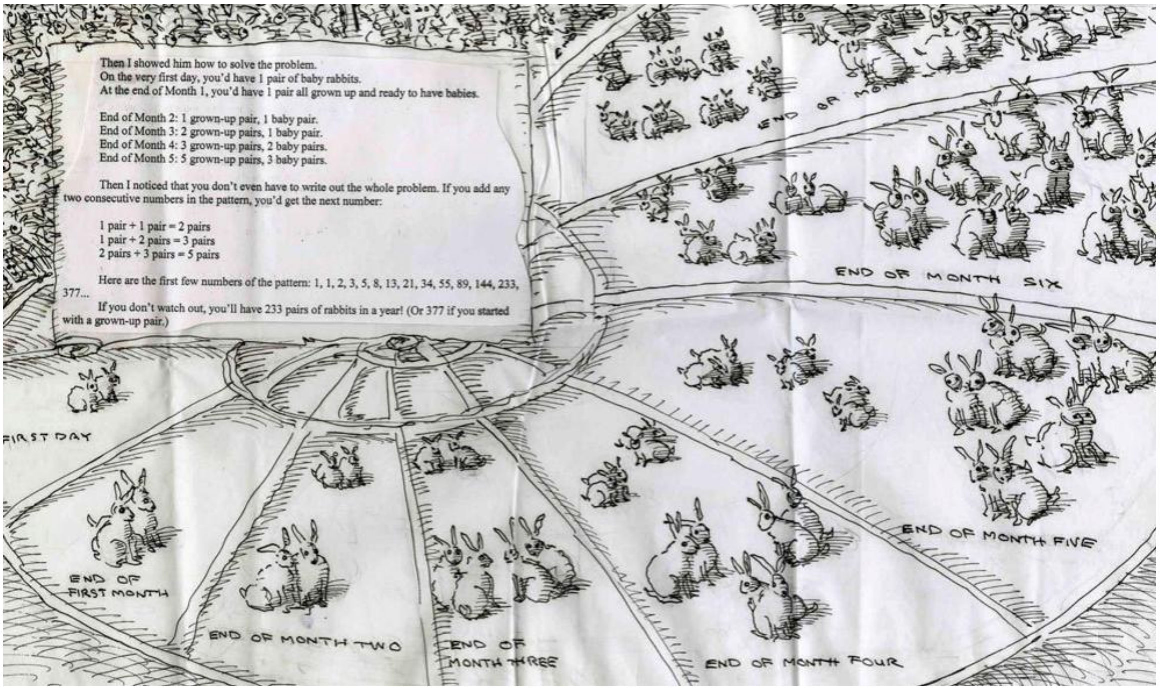
2. La fascinación por la proporción áurea ha sido tal a lo largo de la historia que en 1509 el matemático y teólogo italiano **Luca Pacioli** publicó un libro titulado *La Divina Proporción* en el que daba cinco razones por los que el número áureo era eso, divino:
a) La unicidad del número, que asemeja a la de Dios;
b) El hecho de que esté definido por tres segmentos de una recta, que asemeja a la Trinidad;
c) La inconmensurabilidad del número, igual que Dios es inconmensurable;
d) Dios es omnipresente e invariable, igual que lo es este número;
e) Dios dio ser al universo a través de la quinta esencia, representada por un dodecaedro, y el número áureo dio ser al dodecaedro.

3. Seguimos hablando de la supuesta relación entre la divina proporción y la divinidad, porque no son pocos los que aseguran **que la Biblia está salpicada de referencias a este concepto**. Por un lado, es una forma que parece gustar a Dios, puesto que tanto en las instrucciones para el Arca de la Alianza que dio a Moisés, como las que dio a Noé para *la otra* arca, pide unas proporciones 5x3 (casualmente, dos números de la sucesión de Fibonacci) que dan como resultado 1,666, suficientemente cercano a *phi* como para engañar al ojo. Puestos a encontrar, hay quien encuentra relación entre 666, el número del anticristo, y el número áureo.

4. Áureo, dorado, divino... A este número se le han dado muchos nombres, pero su símbolo lo hace inequívoco: es la letra griega *phi*, en honor al escultor griego Fidias, cuyas obras se consideraban lo más cercano a la perfección estética, igual que lo es la proporción áurea. El símbolo se lo adjudicó en el año 1900 el matemático Mark Barr.

5. Puede que el número áureo tenga un origen divino, o puede que no. Pero desde luego su pariente aritmética, la **sucesión de Fibonacci**, surgió de un problema mucho más mundano, relacionado con la reproducción de los conejos, que planteó Leonardo Pisano, Fibonacci, en su *Libro del ábaco* en 1202.

“¿Cuántas parejas de conejos tendremos a fin de año si comenzamos con una pareja que produce cada mes otra pareja que procrea a su ver a los dos meses de vida?”. La respuesta, mes a mes, es: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 y 144.



7.1.2 curiosidades matemáticas

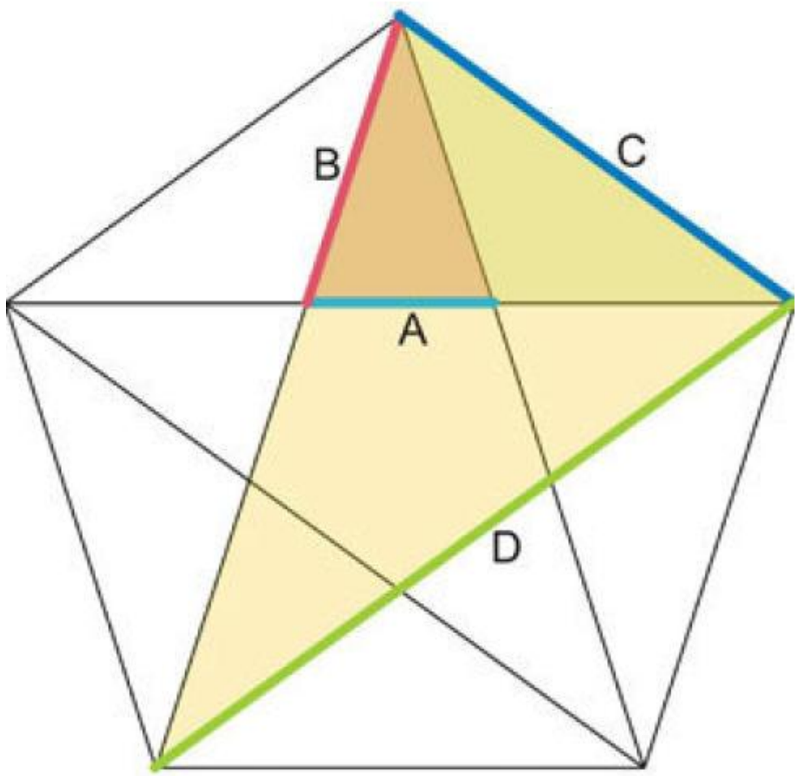
6. La sucesión de Fibonacci está llena de anécdotas matemáticas que harán las delicias de los más curiosos. Por ejemplo: si sumamos 10 números consecutivos de la serie elegidos al azar, el resultado siempre es múltiplo de 11.

21+34+55+89+144+233+377+610+897+1.597=4.147=11x377

89+144+233+377+610+987+1.597+2.584+4.181+6.765=17.567=11x1.597

De hecho, los resultados son iguales a multiplicar por 11 el séptimo número elegido, en estos dos casos, 377 y 1.597

7. Se ha estudiado mucho la sucesión de Fibonacci y el conocimiento sobre ella es amplio, pero no completo. De hecho, hay una conjetura aún sin demostrar: que la sucesión de Fibonacci contiene infinitos números primos. A día de hoy, nadie sabe si esto es verdadero o falso. Por si algún matemático entre los lectores se anima a buscar una respuesta…



8. Se conoce como estrella pentagonal a la que está inscrita en un pentágono regular, y también está relacionada con la proporción áurea: el segmento D que forma la diagonal del pentágono (o un lado de la estrella), al dividirlo entre un lado del pentágono C, da como resultado la proporción áurea. Esta estrella también ha sido profusamente representada, tiene mucho simbolismo y es incluso la base de muchos juegos populares, ya que es una de las formas de tablero más antiguas que se conocen.

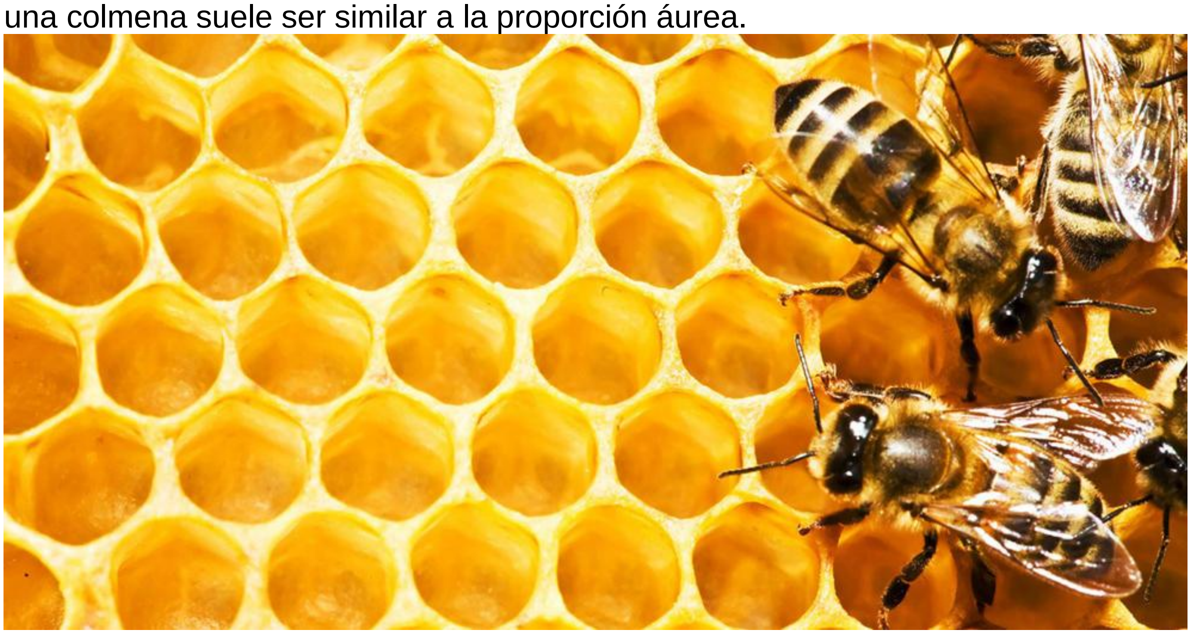
9. Si está usted a punto de lanzarse en la búsqueda de la proporción áurea en todo lo que le rodea, aquí tiene un modo de hacerlo: construya un compás áureo. Es sencillo. Recorte dos tiras de cartón o plástico de 34 centímetros de largo, dos de ancho y terminadas en punta. Únalas a 13 centímetros de una de las puntas con un encuadernador, imitando la estructura de unas tijeras. Al moverlas obtendrá dos triángulos de lados iguales que miden 21 y 13 centímetros respectivamente. Al ser dos términos consecutivos de la

sucesión de Fibonacci, su cociente será próximo al número áureo. Para ver si dos segmentos guardan esa proporción, solo habrá que abrir el extremo pequeño hasta que coincida con el segmento menor y, sin variar la posición del compás, poner el otro extremo en el segmento grande. Si coincide, ambos segmentos respetan la proporción áurea.

10. ¿Por qué tanta popularidad para esta forma tan concreta? Según Adrian Bejan, profesor de ingeniería mecánica de la Universidad de Duke, en Carolina del Norte, Estados Unidos, se trata básicamente de **una razón evolutiva**. Recogió en su investigación que nuestros ojos analizan más eficazmente una imagen si está encuadrada en un rectángulo áureo, de forma que se habría utilizado de forma intuitiva desde la Antigüedad porque es la forma más cómoda y agradable a la vista.

7.1.3 En la naturaleza

11. Uno de los motivos por los que esta cifra lleva siglos fascinando a los que la estudian es que se encuentra de forma natural en los lugares más insospechados. Por ejemplo, la proporción entre abejas hembra y macho en una colmena suele ser similar a la proporción áurea.



12. Y ya que hablamos de abejas, éstas cumplen con otra regla, en esta ocasión **relacionada con la sucesión de Fibonacci**: los machos tienen un árbol genealógico que cumple con ésta. Un zángano (1) nace de un huevo no fecundado, de forma que solo tiene madre (1) y no padre. Su madre, al ser hembra, tuvo dos progenitores (2). Estos, macho y hembra tuvieron en total tres progenitores (3), la madre del macho y la madre y el padre de la hembra, es decir, dos hembras y un macho. Eso significa que tuvieron cinco progenitores a su vez (5)… A medida que ascendemos, la regla se sigue cumpliendo.
13. La disposición de los pétalos de las flores, la caracola de algunos animales, la forma de las piñas que dan algunos árboles, la distribución de las pipas en un girasol, el grosor que tienen las ramas de los árboles... Todas estas cosas tienen en común que de una forma u otra están relacionadas con la proporción áurea o la serie de Fibonacci. Por eso algunos expertos postulan que el número Phi sea al crecimiento orgánico lo que Pi es a la medición del círculo: el número en el que están basados todos los cálculos y fenómenos.
14. Con un punto de humor, hay quien llama al número y la proporción áureos *el huevo de Pascua de la naturaleza*, ya que parecen haber sido escondidos por todas partes por un programador juguetón a la espera de ser descubiertos en cualquier momento por un observador espabilado.

15. También en el cuerpo humano podemos encontrarnos con la proporción áurea. **Jasper Veguts**, ginecólogo del Hospital Universitario de Lovaina, en Bélgica, asegura que se puede determinar si el útero de una paciente tiene un aspecto normal basándose en sus medidas: que al dividir su altura por su anchura, el resultado sea cercano a 1,618.

16. Se supone que es la representación ideal de la belleza, y sería, expresada sencillamente, la siguiente: la altura total debe ser igual a la distancia entre las puntas de los dedos teniendo los brazos y las manos totalmente abiertos. Esto equivale a ocho palmos, ocho veces la cara o seis veces los pies. En total, es la misma distancia que obtendríamos si multiplicásemos por 1,618 la distancia que separa nuestro ombligo del suelo.

7.1.4 En la arquitectura

17. En la arquitectura del Partenón, en la Gran Pirámide de Gizeh, en palacios de la antigua Babilonia… Se supone que es posible encontrar ejemplos del uso de la proporción áurea en decenas de obras arquitectónicas a lo largo de la historia. Pero expertos en matemáticas y arte llaman al escepticismo: tomando las medidas necesarias sería posible encontrar esta

proporción en cualquier sitio, pero eso no significa que fuese utilizada de forma consciente.

18. Hay un edificio histórico en nuestro país, que seguramente muchos de los lectores han contemplado, escudriñado al detalle en busca de la famosa rana que asegura el aprobado a fin de curso, cuya reconstrucción en el siglo XV estuvo guiada por la relación de oro. ¿Saben cuál es?

Sí, es la fachada de la Universidad de Salamanca

7.1.5 En el arte

19. Otros artistas a lo largo de la historia sí han empleado la proporción áurea de forma plenamente consciente. *La Gioconda* o *La última cena* de Leonardo Da Vinci, *El David* o *La Sagrada Familia* de Miguel Ángel, *El nacimiento de Venus* de Sandro Botticelli son solo algunas de las obras más conocidas que se crearon respetando esos conceptos.

20. Existe diversidad de opiniones sobre si una obra concreta de Leonardo da Vinci se creó siguiendo la proporción áurea o no. Se trata de El hombre ideal o el **Hombre de Vitruvio**. Se trata de la figura de un hombre relacionada

con la geometría e inserto en un cuadrado y un círculo. Para la figura humana, siguió las recomendaciones de Vitruvio, el arquitecto de Julio César, pero Da Vinci dibujó las formas geométricas de forma que la razón entre el lado del cuadrado y el radio del círculo es áurea.

21. El artista español Salvador Dalí tenía muchas inquietudes y una inclinación por la ciencia. Trabajó con el matemático rumano Matila Ghyka durante meses haciendo diversos cálculos antes de comenzar una de sus obras más famosas, *Leda Atómica.* En ella, la composición y los objetos representados guardan una estricta proporción entre sí y respecto al cuadro al completo. Además, están distribuidos en las cinco puntas de un pentagrama áureo.

22. Dentro de los movimientos de arte vanguardista hubo toda una escuela dentro del cubismo dedicada a esta cuestión, llamada, cómo no, Sección Áurea o **Sección de Oro**. Se trataba de llevar las matemáticas a la pintura,

sobre todo en las proporciones al descomponer una figura en cubos. Marcel Duchamp lideró esta tendencia, en la que también participó el español Juan Gris.

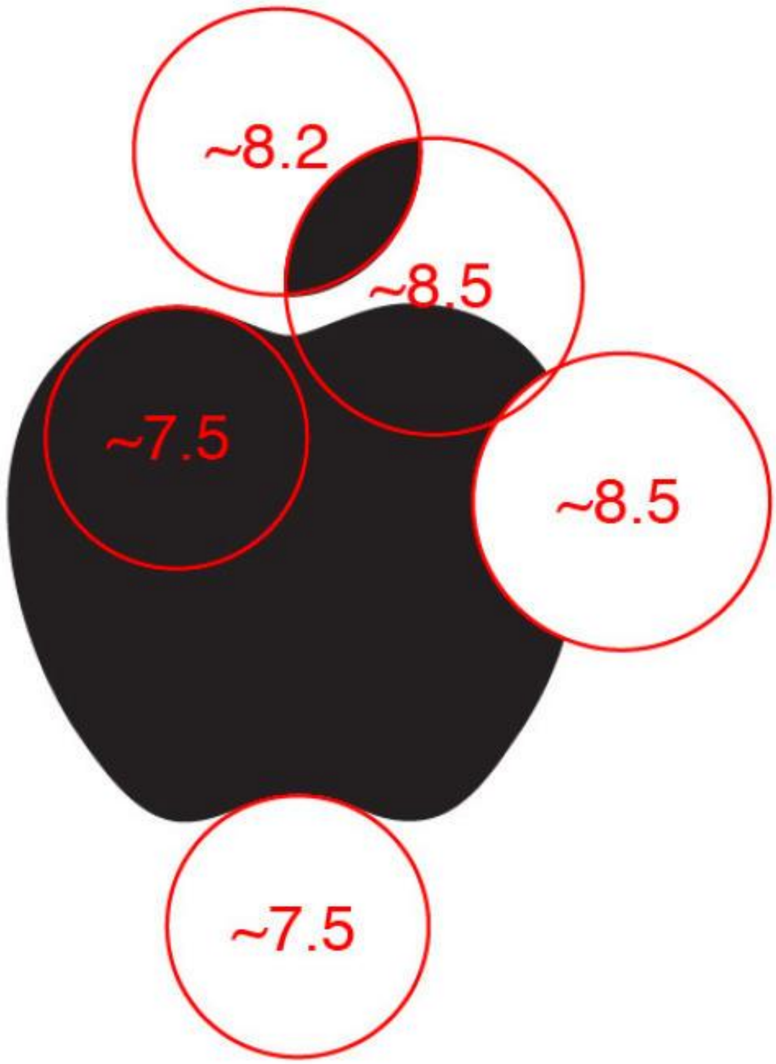
23. El famoso fabricante de instrumentos Antonio Stradivarius, que vivió entre los siglos XVII y XVIII ponía mucho cuidado en situar las aberturas en sus violines en consonancia con la proporción áurea. Seguramente se tratase más de una cuestión estética que sonora, puesto que no hay indicios de que esto tenga ningún impacto en la calidad del sonido de los instrumentos.

24. Y no fueron solo los artistas, también muchos científicos quedaron maravillados con la perfección del número y su serie correspondiente para describir la naturaleza en los lugares más insospechados. El astrónomo Johannes Kepler recogió su tratado ***El Misterio Cósmico*** la siguiente frase: "La geometría tiene dos grandes tesoros: uno es el teorema de Pitágoras; el otro, la división de una línea entre el extremo y su proporcional. El primero lo

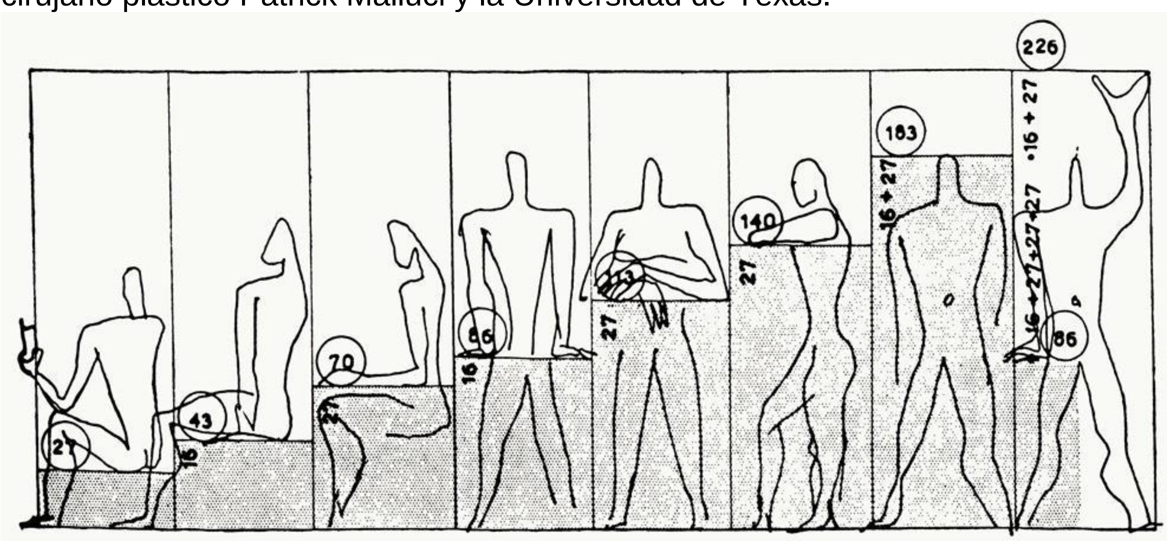
podemos comparar a una medida de oro; el segundo lo debemos denominar una joya preciosa".

7.1.6 En las cosas cotidianas

25. Pero podemos encontrar ejemplos de esa proporción tan celebrada sin tener que irnos a un museo ni mirar a las estrellas. Las **tarjetas de crédito** que utilizamos a diario, las cajetillas de tabaco y hasta un simple folio son todos rectángulos áureos. Eso quiere decir que se dividimos su lado más largo por el más corto, la solución sería 1,618.



26. Donde no se encuentra esta proporción, por mucho que corra el bulo, es en el logotipo de Apple. Muchos han caído en atribuir al logo esta cualidad, teniendo en cuenta la conocida obsesión de la compañía por perfeccionar el diseño de sus productos hasta el extremo. Pero en el caso de su logo, las curvas no encajan con las que prescribiría la serie de Fibonacci. David Cole, diseñador, publicó **la prueba** hace poco más de un año. La famosa manzana gustará más o menos, pero no es áurea.
27. Algunas fuentes aseguran que el estadio Santiago Bernabéu tiene unas medidas de proporción casi áurea (106x66=1,606). Pero la verdad es que, según la **información oficial del Real Madrid**, esto no es así: su campo mide 105x68 metros, lo que se traduce en una proporción de 1,54.
28. Si cumplir con la proporción áurea hace que el cuerpo de una estatua sea bello y estético, ¿hay personas reales que nos resulten especialmente atractivas por lo mismo? Al parecer sí. Kelly Brooks es una modelo británica, y ha sido elegida como **la mujer más próxima a la proporción áure**a, según el cirujano plástico Patrick Malluci y la Universidad de Texas.



29. El arquitecto suizo Le Corbusier utilizó el número áureo en muchos de sus diseño, y como base de un nuevo sistema métrico, que propuso como

alternativo al sistema métrico decimal y al sistema anglosajón de medidas. La idea era utilizarlo en arquitectura, arte y diseño a nivel mundial, de forma que todo fuese siempre compatible, además de más bello y pensado con el hombre como dentro de todo. Si el patrón del sistema métrico era el metro, el del **sistema Modulor**, como lo llamó, era la medida del hombre. Sobra decir que su ambiciosa idea no llegó a triunfar.

30. Donde sí se ha infiltrado, en este caso la sucesión de Fibonacci, es en el juego de la Bolsa. Entre las herramientas que utilizan los analistas para intentar predecir el comportamiento de un valor (es decir, si subirá o bajará y por tanto si conviene invertir en él o no), están las **proyecciones de Fibonacci**. Marcan niveles en los que se pueden producir picos en la gráfica: tanto rebotes de subida si el valor está cayendo como de bajada si se encuentra al alza.

CONCLUSIONES

La bibliografía disponible sobre el número de oro es copiosa, por tanto se ha seleccionado los tópicos que me han parecido más interesantes

Este trabajo estará disponible para que los estudiantes que se interesen por el tema, lo amplíen hasta sus necesidades.

Todos los temas tratados, tienen solamente un pequeña introducción, para poder abarcar un número mayor de tópicos

En la red se encuentran estudio profundo y detallado de la intervención del número de oro en todo lo que nos rodea, e incluso en aquello que no podemos ver

La más importante, pude conocer muchas cosas que no imaginaba, pero que ahora puedo investigar con mayor interés.

Agradezco al profesor de la asignatura "origen de la ciencia moderna" por la oportunidad de hacer un trabajo de algo que me interesó y que fue un placer realizarlo.

BIBLIOGRAFIA

Circo matemático. Martin Gardner. Alianza Editorial

El mundo de las matemáticas, sigma. Editorial Grijalbo

El número de oro. Matila C. Ghyka. Ed. Poseidón

Instantáneas matemáticas. Hugo Steinhaus. Ed. Salvat

Matemáticas e imaginación. E. Kasner/J. Newman. Ed. Salvat

Miscelánea matemática. Martin Gardner. Ed. Salvat

YouTube, videos vistos

CIBERGRAFIA

http://averroes.cec.junta-andalucia.es/recursos_informaticos/concurso/accesit3

http://es.wikipedia.org

http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/

http://www.enigma-tico.com/fibonacci.html

http://www.isftic.mepsyd.es/w3/eos/MaterialesEducativos/secundaria/matematicas/

phi/marcoprincipal.htm

http://www.mathsoft.com/

http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html

http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/phi2DGeomTrig.html http://www.tecnociencia.es/monograficos/Constantes/index.html

http://www.portalplanetasedna.com.ar/pagina_nueva_5.htm

http://spanish.fxstreet.com/privateresources/content/109510/content.asp?menu=knowledge

http://www.sciencemag.org/cgi/content/abstract/327/5962/177

GRACIAS UNAM OCTUBRE 2016