

MODELIZACIÓN DIFUSA PARA LA PLANIFICACIÓN AGREGADA DE LA PRODUCCIÓN EN AMBIENTES DE INCERTIDUMBRE

FUZZY MODELIZATION FOR AGGREGATED PRODUCTION PLANNING UNDER UNCERTAINTY ENVIRONMENTS

MARTÍN DARÍO ARANGO SERNA

II. Doctor Ingeniero Industrial

Escuela de Ingeniería de la Organización. Facultad de Minas. Universidad Nacional, mdarango@unalmed.edu.co

CESAR VERGARA RODRÍGUEZ

II, Universidad Nacional de Colombia, cjvergar@unalmed.edu.co

HORACIO GAVIRIA MONTOYA

Estudiante de ingeniería industrial, Universidad Nacional de Colombia, hagaviri@unalmed.edu.co

Recibido para revisar Julio 5 de 2009 , aceptado Octubre 7 de 2009, versión final Octubre 26 de 2009

RESUMEN: El presente artículo presenta una herramienta de apoyo a los procesos de toma de decisión en la planificación de la producción a mediano plazo cuando la demanda es un parámetro con incertidumbre, desarrollada al interior del Grupo de Logística Industrial-Organizacional -GICO. El desarrollo de un plan de producción lleva consigo la determinación de parámetros que muchas veces poseen cierto grado de vaguedad, esto conlleva a que el personal a cargo de tomar dediciones asuma el manejo de esta incertidumbre. La lógica difusa aparece como una herramienta alternativa a la estocástica o tradicional para asistir procesos de toma de decisiones en ambientes difusos. Este artículo inicialmente realiza una breve introducción acerca de la planificación de la producción y de la lógica difusa. Seguidamente se diseña un modelo de programación lineal difusa como herramienta de apoyo para la toma de decisión en la planeación agregada de la producción cuando esta sigue una estrategia de alcance de la demanda prevista, asumiendo a la demanda como un parámetro difuso. Para la construcción de este modelo fue preciso plantear previamente un modelo de programación lineal que marcara los límites del modelo difuso. Finalmente en este artículo se soluciona un problema de planeación agregada donde la demanda posee incertidumbre, utilizando el modelo difuso propuesto.

PALABRAS CLAVE: Lógica difusa, planificación de la producción, decisiones en ambientes difusos, modelo de programación lineal difusa, planeación agregada, modelo de programación lineal

ABSTRACT: This article shows a tool to support decision making in production planning for the medium term if demand is an uncertain parameter, developed into the Industrial-Organizational Logistic Research Group "GICO". The development of a production plan involves the determination of parameters that often have some degree of vagueness, it is concluded that the personnel in charge of taking dedication assume the management of this uncertainty. Fuzzy logic appears as an alternative to traditional or stochastic processes to assist decision making in fuzzy environments. This article begins with a brief introduction of the production planning and fuzzy logic. In the second part it designs a fuzzy linear programming model as a tool to support decision making in the aggregate production planning when it follows a strategy of forecast demand, assuming the claim as a fuzzy parameter. For the construction of this model previously was to raise a linear programming model to mark the boundaries of the fuzzy model. Finally in this paper solves an aggregate planning problem where demand is uncertain, using the proposed fuzzy model.

KEYWORDS: Fuzzy logic, production planning decisions in fuzzy environments, fuzzy linear programming model, aggregate planning, linear programming model.

1. INTRODUCCIÓN

En este artículo se desarrolla el concepto de lógica Difusa, introducido en 1965 por Lotfi Asker Zadeh [8]. La lógica difusa es un lenguaje que permite modelar sentencias del lenguaje natural del ser humano como un formulismo matemático. Este modelamiento se realiza a través de una función de membresía o pertenencia continua en el intervalo [0,1] que califica el nivel de pertenencia de cada elemento de un conjunto [3], [9].

En un proceso de planificación de la producción se determina paralelamente los niveles de producción, inventario y capacidad de una organización para un horizonte de planificación conocido con el fin de minimizar los costos totales generados por el plan de producción [4].

En un problema de planificación de la producción donde la incertidumbre de los parámetros juega un papel importante, la herramienta de apoyo para la toma de decisiones debe seleccionarse de manera que le facilite al usuario tomar la decisión adecuada y responder a los posibles imprevistos que surjan [1].

El objetivo de este artículo es presentar una herramienta de apoyo para la toma de decisiones en la planificación de la producción, más concretamente en la planeación agregada.

Este artículo se enmarca dentro del proyecto de Investigación financiado por el DIME-2008 titulado “*Modelización matemática fuzzy para la planificación de la producción en contextos de incertidumbre*”

Se da un breve marco referencial asociado a la planificación de la producción y a la lógica difusa con el objetivo de familiarizar al lector con estas temáticas.

Para la construcción del modelo fuzzy se hizo necesario la delimitación de los parámetros difusos presentes en el mismo, esto se logra evaluando el modelo determinista equivalente en los límites que presentan los parámetros difusos.

Finalmente, se ilustra el uso del modelo de programación lineal difusa propuesto en este artículo en el campo de la planificación de la producción, específicamente brindando solución a un problema de planeación agregada, teniendo en

cuenta a la demanda como un parámetro difuso y las conclusiones más relevante sobre el problema modelizado.

2. PLANIFICACIÓN DE LA PRODUCCIÓN.

Una organización debe planear la producción antes de poder llevarla a cabo. Sin la planificación de la producción es probable que una empresa no pueda producir lo suficiente para lograr un incremento en la demanda futura. Quizás la capacidad no este disponible en ese momento y se pierdan las ventas [6].

2.1 La Jerarquía De Los Planes De Producción

La jerarquía de planes de la función productiva está compuesta por tres niveles [4]:

2.1.1 Planificación estratégica o a largo plazo

La determinación de la capacidad productiva es una decisión que lleva asociada una importante inversión de capital y va a determinar en gran medida las posibilidades de éxito de la organización. Por ello, es una decisión que debe analizarse de forma detenida, tratando de optimizar la utilización de los recursos financieros.

Se puede definir la capacidad como la máxima cantidad de bienes o servicios que pueden obtenerse en una unidad productiva en condiciones normales de funcionamiento en un periodo de tiempo determinado [4].

2.1.2 Planeación agregada

La finalidad principal de la planificación agregada es determinar la combinación de ritmos de producción, mano de obra y niveles de existencia, que minimiza costos y logra satisfacer la demanda prevista. Para ello se debe conseguir los siguientes objetivos:

- Minimizar el coste y maximizar los beneficios.
- Maximizar el servicio al cliente.
- Minimizar la inversión en inventario.
- Minimizar los cambios en el ritmo de producción.
- Minimizar las variaciones en la plantilla.
- Maximizar la utilización de la capacidad instalada.

Un plan agregado bien elaborado debe lograr adaptar la producción a las oscilaciones de la demanda o tratar de reducir la intensidad de dichas oscilaciones, a la vez que conseguir una eficiente utilización de la capacidad productiva de la empresa (mano de obra, maquinaria, etc.).

Algunas medidas para modificar la oferta son las contrataciones y despidos de empleados, utilización de horas extraordinarias, contratación de empleados temporales o a tiempo parcial, acumulación de inventario en temporada de poca demanda y la subcontratación de la producción. Esta última implica una serie de inconvenientes entre los que podemos señalar la pérdida de control sobre el tiempo de entrega y la calidad del producto [4].

Otra alternativa es mantener el ritmo de producción y tratar de modificar la demanda para amortiguar sus oscilaciones. Evidentemente esta opción no cuenta con tantas posibilidades de éxito, dado que en la demanda influyen muchos factores que se encuentran fuera de control de la organización. Aun así la empresa puede tratar de modificar la demanda mediante: la modificación de precio o de la política de comunicación, la retención de pedidos, la creación de nueva demanda y la complementación de la gamma de productos empresariales con otros que tengan una estacionalidad inversa [4].

Entre las estrategias alternativas que el director de operaciones debe elegir a la hora de confeccionar el plan agregado de producción se puede señalar las tres siguientes [4]:

- *Estrategia de producción constante:* En esta opción el ritmo de producción se considera fijo en el tiempo, con lo cual se consigue reducir los costos de contratación y despido, se simplifica el proceso de planeación de recursos, se incrementa la calidad del producto, se simplifica el cumplimiento del cronograma de producción

y se reduce el coste de mano de obra y materiales al evitar las paradas en el proceso productivo [4].

- *Estrategia de seguimiento de la demanda:* En este caso, el ritmo de producción se adapta en cada periodo a la demanda existente, por lo que el nivel de inventario es prácticamente inexistente. Para lograrlo es necesario contar con una enorme flexibilidad que nos permita variar el número de trabajadores, capacidad instalada y materiales de forma rápida y económica [4].
- *Estrategias mixtas:* Se trata de una mezcla de las opciones anteriores, en la cual la empresa establece un nivel base de producción constante que adapta a la demanda empleando horas extras, trabajadores temporales, subcontratación, acumulación de pedidos, etc. [4].

2.1.3 Programa maestro de producción (MPS)

Un programa maestro de producción (MPS) representa un plan para la fabricación. Este plan proporciona los requerimientos de insumos del nivel superior y desarrolla las cantidades y fechas que se deben explotar a fin de generar los requerimientos por periodo para componentes, piezas y materias primas.

El MPS no es una proyección de ventas, sino un plan de fabricación factible. Un MPS detallado determina la economía de la producción mediante el agrupamiento de diversas demandas y la elaboración de tamaños de lotes. De esta manera, el MPS conserva la integridad de las acumulaciones del sistema total, las acumulaciones anticipadas y los requerimientos de componentes de nivel inferior [4].

2.1.4 Planificación de la producción a muy corto plazo

El plan de producción a corto plazo tiene un horizonte de planeación inferior a tres meses. A esta planificación a corto plazo se la conoce en las empresas industriales como

gestión de talleres y se encarga de programar, controlar y evaluar las operaciones de producción a muy corto plazo, para lograr el cumplimiento del plan maestro con la capacidad disponible y con la mayor eficiencia posible.

Entre las principales funciones que realiza en dicha gestión de talleres cabe señalar las siguientes [4]:

- Evaluar y controlar los pedidos a fabricar.
- Establecer las prioridades entre los pedidos o trabajos a realizar, ordenándolos por centro de trabajo y asignándoselos a cada uno de ellos.
- Rastrear la evolución de los pedidos en curso.
- Controlar el desarrollo de las operaciones.
- Controlar la capacidad de cada centro de trabajo.
- Proporcionar realimentación al sistema de planificación y control de capacidad.

3. LÓGICA DIFUSA

La imprecisión en la información tiene que ver con el entorno humano, esta puede ser del tipo estadístico o no estadístico. Precisamente es a este último tipo de incertidumbre es a la que se hace referencia como difusa. Por ejemplo, si se define el conjunto de objetos que están “cerca de 7”, entonces no será posible definir dicho conjunto empleando valores convencionales, con objetos que satisfagan propiedades precisas para el grado de pertenencia. Zadeh (1965) propuso la representación de dicho elemento mediante funciones de pertenencia, que mapean los números en el intervalo unitario $[0, 1]$, los cuales contienen un grado de pertenencia. Usando esta representación, se puede definir un conjunto de números que sean cercanos a 7. En dicho caso, si el grado de pertenencia es 0.98, entonces se puede inferir que se trata de un elemento con un valor casi igual a 7 [1], [2].

La función característica de un conjunto clásico asigna un valor de 1 ó 0 a cada individuo en el conjunto universal; 1 a los que son miembros de la relación y 0 a los que no. Esta función puede ser generalizada de tal manera que los valores asignados a los elementos del conjunto universal estén dentro de un rango, especificando con este el grado de

adhesión de estos elementos en el conjunto en cuestión. Los valores más altos indican un mayor grado de afiliación. Esa función se llama una función de pertenencia, y el conjunto definido por un conjunto difuso [3]. Zimmermann (1996), define formalmente los conjuntos difusos como: $\tilde{A} = \{x, \mu_A(x)\}, x \in X$ donde $\mu_A(x)$ se denomina la función de pertenencia (o grado de pertenencia) de x en \tilde{A} , y $\mu_A: X \rightarrow M$ es una función de X en un espacio M denominado espacio de pertenencia. Cuando el espacio de pertenencia sólo contiene los dos puntos 0 y 1, \tilde{A} no es difusa y $\mu_A(x)$ es idéntica a la función característica de un conjunto no difuso. $\mu_A(x)$ Es una función cuyo rango es un subconjunto de los números reales no negativos y que tiene la propiedad de que el supremo de este conjunto es finito. Así, la presunción básica es que un conjunto difuso \tilde{A} , a pesar de la imprecisión de sus límites, se puede representar con precisión asociándole a cada punto x un número entre dos límites inferior y superior, por ejemplo 0 y 1, que representan su grado de pertenencia en \tilde{A} [5]. Para el mejor entendimiento de los conjuntos difusos seguidamente se presentaran varios ejemplos.

Ejemplo 1. Se desea describir el conjunto de la gente joven.

$$B = \{\text{Conjunto de gente joven}\}$$

$$B = [0, 20]$$

El límite inferior puede ser 0, pero el límite superior es más difícil de definir.

- ¿Cómo se define el límite superior en 20, para una persona joven?
- ¿Una persona de 21 años o entre 20 y 21, ya no es joven?

La Figura 1 muestra una forma de definir el conjunto de personas jóvenes, asignándole una función de pertenencia entre 0 y 1.

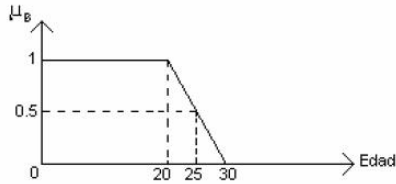


Figura 1. Ejemplo de conjunto difuso.
Figure 1. Example of diffuse set.

Se define el número difuso \tilde{A} , como el conjunto cuya función de pertenencia, μ_A toma el valor de 1, en el punto $x = A$. Un número difuso \tilde{A} corresponde a un subconjunto normal y convexo de un universo de discurso X . Normalmente $\forall x \in R$ y $\mu_A(x) = 1$. Dicha convexidad implica: $\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X, \alpha \in [0,1]$.

Si \tilde{A} es un número difuso, entonces se considera que es triangular si su convexidad es lineal a tramos. Con la finalidad de simplificar las operaciones con los números difusos, generalmente se simplifica su notación, de manera lineal. Desde este punto de vista, un número difuso triangular asimétrico se denota como sigue: $\tilde{a} = (m - \alpha, m, m + \beta)$ [2] (Figura 2).

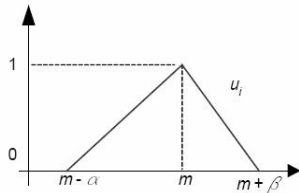


Figura 2. Número triangular difuso asimétrico:
 $\tilde{a} = (m - \alpha, m, m + \beta)$

Figure 2. Asymmetric diffuse triangular number:
 $\tilde{a} = (m - \alpha, m, m + \beta)$

Nótese que corresponde a una notación simple, como una representación de 3 números concretos, donde el número del centro representa el punto donde $\mu_A = 1$.

Ejemplo 2. Un número cercano a 6, (Representado en la Figura 3), puede denotarse como $\tilde{6} = (4.5, 6, 7.3)$

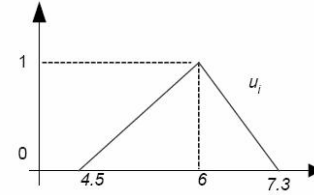


Figura 3. Número triangular difuso asimétrico
 $\tilde{6} = (4.5, 6, 7.3)$

Figure 3. Asymmetrical triangular fuzzy number
 $\tilde{6} = (4.5, 6, 7.3)$

Una extensión de la representación de los números difusos, puede realizarse tomando funciones de pertenencia trapezoidales. Se obtiene así un número difuso trapezoidal, como se denota a continuación: $\tilde{b} = (m, n, \alpha, \beta)$. La representación gráfica del número expresado en la ecuación anterior se observa en la Figura 4.

Aunque este tipo de números pueden abarcar una gran componente de incertidumbre, requieren tratamientos matemáticos de orden más complejo que el de los números triangulares [2].

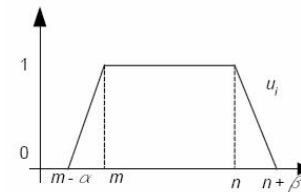


Figura 4. Concepto de número trapezoidal difuso asimétrico $\tilde{b} = (m, n, \alpha, \beta)$.

Figure 4. Trapezoidal fuzzy number concept of asymmetric $\tilde{b} = (m, n, \alpha, \beta)$

4. MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL PARA LA PLANEACIÓN AGREGADA DE PRODUCCIÓN.

Una de las tareas en que los administradores de producción han invertido más tiempo y recurso es en la planeación agregada. A lo largo del tiempo se han desarrollado muchos modelos utilizando programación lineal y estos han tratado de alcanzar los principales objetivos que busca una planeación agregada [6],[8]. Una de las ventajas que ofrece la programación lineal es que todas las

variables y sus coste se pueden expresar de manera explicita [6].

El modelo de programación lineal que se propone en este artículo, busca minimizar los costos asociados a la planeación agregada de producción.

La notación que se definirá de aquí en adelante es la que se utilizara a lo largo de este artículo.

4.1 Definición De Variables De Decisión

A continuación se definirán las variables de decisión del modelo de programación lineal para la planeación agregada de producción:

CE_i = Cantidad de empleados en el periodo i .

CHE_i = Cantidad Pr oducida en Horas Extras en el Periodo i .

CUS_i = Cantidad de Pr oduccion Subcontratada en el Periodo i .

CEC_i = Cantidad de Empleados Contratados en el Periodo i .

CED_i = Cantidad de Empleados Despedidos en el Periodo i .

PJR_i = Pr oduccion Jornada Re gular en el Periodo i .

NUI_i = Numero de Unidades en Inventario en el Periodo i .

4.2 Definición De Parámetros Constantes Del Modelo.

Los parámetros a continuación se consideran constantes dentro del modelo:

D_i = Demanda Pr evista en el Periodo i .

CDL_i = Cantidad de días Laborables en el Periodo i .

CMB = Capacidad Maxima en la bodega a(Pr oducto Ter min ado)

$CHTEU$ = Cantidad Horas de trabajo

Estan dar por unidad de la familia.

$CHEED$ = Cantidad de horas Estan dar por empleado dia.

CME = Capacidad max ima de Empleados

PHE = Política Limite Horas Extras.

PCE = Política Limite de Contrataciones por Periodo.

PDE = Política Limite de Despidos por Periodo.

PUS = Política Limite Unidades Subcontratadas por periodo.

D_i = Demanda Pr evista en el Periodo i .

$CostHR$ = Coste de hora Re gular.

$CostHE$ = Coste de Hora Extra.

$CostUS$ = Coste por Unidad Subcontratada.

$CostC$ = Coste de Contratar un Empleado.

$CostD$ = Coste de Despido de un Empleado.

$CostUI$ = Costo de Unidad en Inventario.

A continuación, se presenta la función objetivo y las restricciones del modelo de programación lineal.

4.3 Función Objetivo

Aunque existen diversas metas que alcanzar a la hora de crear un plan agregado, para el modelo de programación lineal propuesto solo nos centramos en un objetivo, minimizar los costos asociados al plan agregado de producción. En este sentido, para minimizar estos costos planteamos una función objetivo que esta conformada por unos costos de mano de obra y otros de manejo de inventario en el horizonte de planeación conocido. A continuación se define en que consiste cada uno de estos costos:

4.3.1 Costos mano de obra.

Este tipo de costos hace referencia a los ocasionados por el incremento de la producción, no son costos fijos, es decir, son costos asociados a la manufactura de productos en horas regulares, extraordinarias y costos de unidades subcontratadas. También tiene en cuenta los costos de contratación y despido de personal con el fin de alcanzar la demanda prevista [1]. El modelo de estos costos es el siguiente:

$$CMO = \sum_{i=1}^{12} (CDL_i \times CE_i \times CHEED \times CostHR) + \sum_{i=1}^{12} (CHE_i \times CHTEU \times CostHE) + \sum_{i=1}^{12} (CUS_i \times CostUS) + \sum_{i=1}^{12} (CEC_i \times CostC) + \sum_{i=1}^{12} (CED_i \times CostD)$$

Donde:

$$CMO = \text{Costo mano de Obra}$$

4.3.2 Costos asociados a manejo de inventario

Cuando se produce un descenso de la demanda puede mantenerse el ritmo de producción establecido acumulando en exceso de producción en nuestros almacenes. Dicha cantidad de artículos almacenados nos permitirán satisfacer un exceso de demanda que pueda producirse en un futuro sin necesidad de modificar nuestro ritmo de producción. Evidentemente la acumulación de inventarios tiene un coste importante, por lo que no se puede abusar de esta opción [4].

El coste que se tendrán en cuenta para el manejo de inventario es el producido al almacenar un producto por periodo; el coste de ruptura de stock no se tendrá en cuenta dividido a la estrategia de alcance de la demanda que empleamos en el modelo no hay unidades faltantes. El modelo de estos costos es el siguiente:

$$CMI = \sum_{i=1}^{12} (NUI_{i-1} \times CostUI)$$

Donde:

$$CMI = \text{Costo Manejo de Inventario.}$$

Después de definir los costos de mano de obra y manejo de inventario nos disponemos a plantear nuestra función objetivo como sigue:

$$Min\ CAPA = CMO + CMI$$

Donde:

$$CAPA = \text{Costo de Aplicacion del Plan Agregado}$$

Para luego llegar a una versión sin contracción de la función objetivo:

$$\begin{aligned} Min\ CAPA = & \sum_{i=1}^{12} (CDL_i \times CE_i \times CHEED \times CostHR) \\ & + \sum_{i=1}^{12} (CHE_i \times CHTEU \times CostHE) + \\ & \sum_{i=1}^{12} (CUS_i \times CostUS) + \sum_{i=1}^{12} (CEC_i \times CostC) + \\ & \sum_{i=1}^{12} (CED_i \times CostD) + \sum_{i=1}^{12} (NUI_{i-1} \times CostUI) \end{aligned}$$

4.4 Planteamiento De Restricciones

Existen diversas categorías de restricciones en la industria manufacturera, como son: de mercado, de materiales e inventario, de capacidad, logística, administrativas y conductuales. Los requisitos y necesidades de mercado definen los límites de rendimiento específico de la empresa. Los problemas de materiales, inventario y capacidad le saltan a la vista al administrador de la producción, por lo tanto, es posible que estas reciban gran atención. En las industrias manufactureras también hay restricciones logísticas, administrativas y conductuales [7]. El modelo de programación lineal que proponemos para una planeación agregada tiene

en cuenta limitaciones de capacidad, mercado, materiales e inventario, administrativas y de no negatividad.

4.4.1 Restricciones de capacidad

Las horas regulares disponibles, están sujetas a la cantidad de empleados por periodo y dicha producción por periodo esta sujeta a la cantidad de horas regulares útiles.

$$CDL_i \times CE_i \times CHEED \times \left(\frac{1}{CHTEU} \right) = PJR_i$$

Reemplazando parámetros constantes y unidades de las variables de decisión tenemos:

$$CDL_i [dia] \times CE_i [empleado] \times \frac{[hora]}{[empleado \cdot dia]}$$

$$\times \left(\frac{1}{\frac{hora}{unidad}} \right) = PJR_i [unidad]$$

Otro tipo de restricción de capacidad tiene que ver con el límite de empleados que la empresa puede albergar.

$$CE_{i-1} + CEC_i - CED_i \leq CME$$

$$CE_i = CE_{i-1} + CEC_i - CED_i$$

4.4.2 Restricciones de mercado

Esta restricciones existen dividido a la estrategia de alcance de la demanda prevista que se utiliza para la planeación agregada, la cual adapta el ritmo de la producción en cada periodo a la demanda existente. A Continuación se muestra el modelo de la restricción de mercado que se utilizara.

$$PJR_i + CHE_i + CUS_i + NUI_{i-1} \geq D_i$$

Reemplazando parámetros constantes y unidades de las variables de decisión tenemos:

$$\left[CDL_i[\text{día}] \times CE_i[\text{empleado}] \times 8 \frac{[\text{hora}]}{[\text{empleado} \cdot \text{día}]} \times \left(\frac{1}{2 \frac{[\text{hora}]}{[\text{unidad}]}} \right) \right] +$$

$$CHE_i[\text{unidad}] + CUS_i[\text{unidad}] + NUI_{i-1}[\text{unidad}] \geq D_i[\text{unidad}]$$

4.4.3 Restricciones de materiales e inventario

El modelo no tiene consideraciones ni limitaciones acerca del manejo de materias primas. Para modelar las restricciones de inventario, se tiene que el inventario al final de un período debe ser igual al inventario del período anterior sumada la producción del período menos la demanda del este período.

$$NUI_i = NUI_{i-1} + PJR_i + CHE_i + CUS_i - D_i$$

Reemplazando parámetros constantes y unidades de las variables de decisión tenemos:

$$NUI_i[\text{unidad}] = NUI_{i-1}[\text{unidad}] + PJR_i[\text{unidad}] + CHE_i[\text{unidad}] + CUS_i[\text{unidad}] - D_i[\text{unidad}]$$

Los niveles máximos y mínimos de inventario están condicionados a la capacidad que se tiene en la bodega para almacenar producto terminado.

$$NUI_i \leq CMB$$

Este tipo de restricciones costa de una estructura muy simple, por lo cual no necesita la descripción de las unidades de los parámetros que la conforman.

4.4.4 Restricciones administrativas

Estas restricciones tienen que ver con las diferentes políticas que la gerencia ha impuesto en la empresa. Seguidamente se expondrán y detallaran estas políticas y las restricciones que estas conllevan.

- *Política de horas extras*

En la mayoría de los casos cuando se tienen políticas de horas extras, estas se calculan como un porcentaje de la producción en tiempo regular. Para Colombia, por ley, se tiene estipulado un máximo de producción en horas extras equivalente a un 10% de la producción en jornada regular [1].

$$CHE_i \leq PHE \times PJR_i$$

- *Políticas de contrataciones y despidos*

Esta política empresarial trata de no contratar o despedir más de un número de empleados en un solo período.

$$CEC_i \leq PCE$$

$$CED_i \leq PDE$$

- *Políticas de máxima subcontratación*

Esta restricción limita el número de unidades de producción que es conveniente delegar a otra empresa.

$$CUS_i \leq PUS$$

4.4.5 Restricciones De No Negatividad

Esta restricción implica que ninguna de las variables de decisión en el modelo deber ser negativa.

5. MODELO DE PLANEACIÓN AGREGADA DE PRODUCCIÓN CON LÓGICA DIFUSA

En esta parte del artículo se plantea un modelo de programación lineal difusa para la planeación agregada de producción, este modelo es una ampliación del modelo lineal planteado en la sección cuatro, con la diferencia que la demanda esta dada de forma imprecisa o vaga.

Un caso particular de la programación lineal difusa es cuando los coeficientes del lado derecho de las restricciones b_i son cantidades con cierto grado de incertidumbre [3].

Para el diseño de este modelo se asume que los valores de la demanda están definidos en el intervalo $[D_i, D_i + p_i]$ para cada periodo, donde D_i es la demanda pronosticada para el periodo i y p_i es el componente difuso; p_i se puede definir por métodos cualitativos para pronósticos de demanda para cada periodo; estos métodos se basan en percepciones y juicios de valor que se construyen a partir del entorno, de factores que determinan la demanda y en la presencia futura de estos [4].

Después de los anteriores supuestos se procede a plantear el modelo de difuso para la planeación agregada el cual busca maximizar la satisfacción del decisor (λ) minimizando a su vez los costos de implementación de un plan agregado bajo una estrategia de alcance de demanda prevista, cuando esta posee incertidumbre.

El primer supuesto que realizamos para nuestro modelo es que \tilde{D}_i es un número difuso. Para una mejor ilustración, \tilde{D}_i es un número difuso de la forma:

$$\tilde{D}_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } ax \geq D_i + p_i \\ \frac{ax - D_i}{p_i} & \text{si } D_i < ax < D_i + p_i \\ 0 & \text{si } ax \leq D_i \end{cases}$$

Cuya representación se muestra en la figura 5.

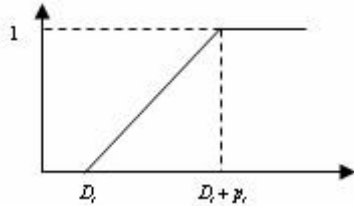


Figura 5. Número difuso \tilde{D}_i .

Figure 5. Fuzzy numbers \tilde{D}_i .

Ahora, para determinar el conjunto difuso de valores óptimos, primero se calculan los límites inferior y superior de estos. Para hallar estos límites, se solucionan los problemas de programación lineal estándar equivalentes:

$$\begin{aligned} \text{Min } CAPA^+ &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{S.a } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i + p_i \quad (i \in N_m) \\ x_j &\geq 0 \quad (j \in N_n) \\ \text{Min } CAPA^- &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{S.a } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i \quad (i \in N_m) \\ x_j &\geq 0 \quad (j \in N_n) \end{aligned}$$

Para este fin utilizamos el modelo de programación lineal que se propuso en el numeral cuatro.

Luego el conjunto difuso de valores óptimos (U), el cual es un subconjunto difuso de R^n , esta definido por [3]:

$$U(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq CAPA^- \\ \frac{CAPA^+ - x}{CAPA^+ - CAPA^-} & \text{si } CAPA^- < x < CAPA^+ \\ 0 & \text{si } x \geq CAPA^+ \end{cases}$$

En este caso el grado de satisfacción del decisor (λ) aumenta en la medida que la respuesta obtenida se acerca a $CAPA^-$ como lo muestra la figura 6.

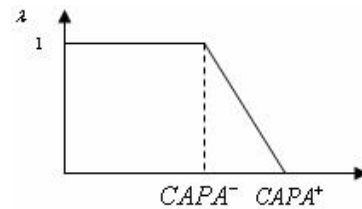


Figura 6. Número difuso $CAPA$
Figure 6. Fuzzy numbers $CAPA$.

Luego la solución más eficiente se encuentra resolviendo el siguiente modelo de programación lineal [7]:

$$\begin{aligned} \text{Max } &\lambda \\ \text{S.A.} & \end{aligned}$$

Restricciones De Capacidad:

$$\begin{aligned} CDL_i \times CE_i \times CHEED \times \left(\frac{1}{CHTEU} \right) &= PJR_i \\ CE_{i-1} + CEC_i - CED_i &\leq CME \end{aligned}$$

Restricciones De La Función Objetivo (Difusa):

$$\begin{aligned} &\lambda (CAPA^+ - CAPA^-) + \\ &\sum_{j=1}^n (CDL_i \times CE_i \times CHEED \times CostHR) + \\ &(CHE_i \times CHTEU \times CostHE) + \\ &(CUS_i \times CostUS) + (CEC_i \times CostC) + \\ &(CED_i \times CostD) + (NUI_{i-1} \times CostUI) \\ &\leq CAPA^+ \end{aligned}$$

Restricción De Mercado (Difusa)

$$\sum_{j=1}^n PJR_j + CHE_j + CUS_j + NUI_{i-1} - \lambda p_i \geq D_i$$

Restricciones De Materiales e Inventario (Difusa):

$$NUI_i - (NUI_{i-1} + PJR_i + CHE_i + CUS_i) - P_i \lambda = -D_i$$

$$NUI_i \leq CMB$$

Restricciones Administrativas:

- *Política De Horas Extras:*

$$CHE_i \leq PHE \times PJR_i$$

- *Política De Contrataciones Y Despidos:*

$$CEC_i \leq PCE$$

$$CED_i \leq PDE$$

- *Políticas De Máxima Subcontratación:*

$$CUS_i \leq PUS$$

Y Restricciones De No Negatividad

Donde λ es el nivel que como mínimo tienen que alcanzar todas las funciones de pertenencia. Lo anterior se interpretará como el nivel de aspiración o de satisfacción de un decisor [2].

6. APLICACIÓN DEL MODELO DIFUSO A UN PROBLEMA DE PLANEACIÓN AGREGADA

En el siguiente problema se ilustra la ventaja de considerar incertidumbre en la formulación de modelos para la planificación de la producción. Se presenta a continuación la solución de un problema de programación lineal difusa para la planeación agregada de producción cuando la demanda es un parámetro difuso.

6.1 Enunciado Del Problema

Una empresa que se dedica a la fabricación y venta de electrodomésticos, que venden con marca blanca en una importante cadena comercial, las previsiones de demanda para el próximo año aparecen reflejadas en la tabla 1.

Tabla 1. Demanda prevista
Table 1. Expected demand

Demanda Prevista	
Enero	2500
Febrero	3200
Marzo	3800
Abril	2300
Mayo	1800
Junio	2500
Julio	4000
Agosto	3200
Septiembre	3800
Octubre	2600
Noviembre	2100
Diciembre	1800

El gerente de esta empresa ha comprobado (experiencia) que la demanda alcanza aproximadamente 200 productos más que las predicciones que se realizan en la empresa, el explica que esto se debe a que las predicciones que se realizan son muy conservadoras.

El comportamiento de la demanda difusa se describe en la figura 8.

Teniendo en cuenta la información anterior y los datos operativos de la empresa (Tabla 2) se busca maximizar la satisfacción del decisor al implementar una planeación agregada de producción. Esta satisfacción se logra minimizando los costos de la planeación agregada alcanzando la demanda en cada periodo.

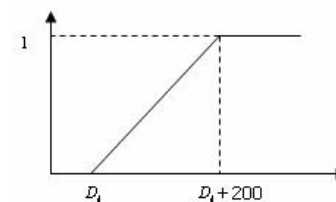


Figura 7. Demanda difusa

Figure 7. Fuzzy demand

En la tabla 2 muestra otra serie de datos operativos de la empresa.

Tabla 2. Datos operacionales
Table 2. Operational data

Datos Operacionales	
Inventario final	500
Produccion mesde diciembre del presente año	2000
Coste unitario de almacenamiento mensual	\$ 33.600
Coste de contratacion por empleado	\$ 1.120.000
Coste despido por trabajador	\$ 1.400.000
Coste de una hora de mano de obra regular	\$ 25.200
Coste de una hora de mano de obra extra	\$ 42.000
Coste de subcontratacion por unidad	\$ 140.000
Limite de horas extrasmensuales	5% de la produccion en jornada regular.
Horas de trabajo mensual	2

6.2 Análisis Y Solución Del Problema Difuso De Planeación Agregada

Para propósitos de ilustración, iniciaremos el análisis del problema con una lista de suposiciones usuales, para después, presentar la solución encontrada.

Supuestos

1. Se supone que los costos que se manejaran, se comportaran de manera constante a lo largo del horizonte de planeación.
2. La planta de empleados es de 25 al inicio del horizonte de planificación.
3. La empresa trabaja 5 días a la semana, un turno al día, comenzando labores a las 8 A.M. y terminándolas a las 5 P.M. Con una hora de almuerzo a las 12M.
4. Se supone que la cantidad de días laborables durante el horizonte de planeación son los siguientes (Tabla 3):

Tabla 3. Días laborados.
Table 3. Labor days.

Días Laborados	
Enero	20
Febrero	20
Marzo	21
Abril	20
Mayo	19
Junio	19
Julio	21
Agosto	19
Septiembre	22
Octubre	21
Noviembre	19
Diciembre	21

5. Se supone que la capacidad de producción en horas regulares, extras se mantiene constante a lo largo del horizonte de planeación.
6. Para determinar la cantidad de horas estándar por día por trabajador, se toma la suposición que es la misma cantidad de horas laborables por día.
7. Se supone que la cantidad de horas estándar por unidad de la familia es igual las horas de trabajo por unidad ($2 h/Unidad$).
8. Se supone que el espacio destinado para almacenaje de producto terminado en la bodega de la empresa es para máximo 500 unidades.
9. Se supone que la empresa tiene una política de producción en horas extras de no superar 10% del total de producción en jornada regular.
10. Se supone que la empresa tiene una política de no superar la contratación o despido de mas de 10 empleados por periodo.
11. Se supone que la empresa utiliza una política la cual tiene como limite máximo de unidades subcontratadas por periodo de 500 unidades.
12. Se supone que la empresa puede tener una cantidad de empleados máxima de 50.

Para resolver este problema se utiliza los modelos lineal y difuso planteados en este

artículo los cuales fueron solucionados utilizando el software GAMS. Primero se encontraron los límites superior e inferior del modelo difuso. Los valores de $CAPA^+$ y $CAPA^-$ son \$ 2.016.682.272 y \$ 1.887.366.690 respectivamente.

En la tabla 4 se encuentran el manejo de empleados encontrado con el modelo, con el fin de minimizar costos y alcanzar la demanda en cada periodo del horizonte de planificación.

Tabla 4. Manejo de empleados.
Table 4. Management employees

Periodo	Cantida de empleados	Numero de empleados contratados	Numero de empleados despedidos
1	28	3	0
2	38	9	0
3	38	0	0
4	28	0	10
5	21	0	6
6	31	10	0
7	41	10	0
8	40	0	1
9	39	0	1
10	29	0	10
11	26	0	3
12	20	0	6

El volumen de producción resultante para el horizonte de planificación se encuentra discriminado en la tabla 5.

Tabla 5. Producción
Table 5. Production

Periodo	Producción en jornada regular	Producción en jornada extraordinaria	Cantidades subcontratadas	Producción total
1	2250	0	0	2250
2	3003	0	0	3003
3	3153	315	161	3629
4	2203	0	0	2203
5	1623	0	0	1623
6	2384	0	0	2384
7	3474	347	0	3821
8	3039	0	0	3039
9	3449	199	0	3648
10	2452	0	0	2452
11	1954	0	0	1954
12	1655	0	0	1655

Con estos resultados se alcanzó un nivel de satisfacción del decisor de $\lambda = 0.7195 \cong 72\%$. En la figura 8 podemos apreciar la producción resultante de los modelo difusos, deterministas y la demanda predicha.

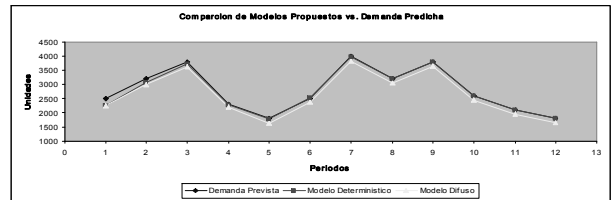


Figura 8. Comparación de Modelos.
Figure 8. Comparison of Models

7. CONCLUSIONES

Alguno de los beneficios que ofrece la lógica difusa a los procesos de toma de decisiones en la planificación de la producción es el manejo de la incertidumbre. Esta característica le permite a la persona o equipo que toman las decisiones, modelar con mayor exactitud el comportamiento de un parámetro difuso.

aplicación con lógica difusa propuesta en este artículo para la toma de decisiones en la planificación de la producción a mediano plazo es un modelo de programación lineal difusa que tiene por objetivo maximizar la satisfacción del decisor. Esta aplicación es útil cuando la demanda es un parámetro con cierto grado de incertidumbre y la empresa sigue una estrategia de alcance de la demanda. Esta aplicación ofrece una solución a las principales variables de decisión en la planeación agregada de producción como lo son: la producción a realizarse en jornada regular y extra, la producción que será subcontratada y el número de contrataciones y despidos por periodo en un horizonte de planificación conocido.

El modelo de programación lineal difuso propuesto se utiliza en este artículo para solucionar un problema de planeación agregada donde la demanda posee incertidumbre.

solución que entrega el modelo para este problema alcanza un nivel de satisfacción en el decisor de 72% aproximadamente, este resultado es aceptable dentro del conjunto de modelos diseñados para la planeación de la producción en donde los mejores alcanzan un nivel de satisfacción del 78%.

Los modelos que se propone en este trabajo son sólo un ejemplo de las diferentes

aplicaciones que puede tener la lógica difusa para facilitar la toma de decisiones a la hora de planificar la producción.

REFERENCIAS

- [1] ARANGO S., MARTIN D.; URAN S., AUGUSTO; PEREZ O., GIOVANNI. (2008). Aplicaciones de lógica difusa a las cadenas de suministro. Avance en Sistemas e Informática, Vol. 5, N° 3.
- [2] CORREA, JORGE. Aproximaciones Metodológicas Para la Toma de Decisiones, Apoyadas en Modelos Difusos. (2004). tesis presentada a la Universidad Nacional de Colombia para optar al grado de Magíster en Ingeniería de Sistemas. Medellín.
- [3] KLIR, GEORGE. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Theory and Applications. (1995). Vol. 1, New Jersey: Prentice Hall PTR
- [4] MIRANDA, FRANCISCO. Manual de dirección de operaciones. (2005). Vol. 2, Madrid.
- [5] MULA, JOSEFA, Aplicaciones de la Teoría de los Conjuntos Difusos en la Planificación de la Producción: Un Estudio de la Literatura. (2004). Memorias VIII Congreso de Ingeniería de Organización. Leganés.
- [6] NARASIMHAN, S. Planeación de la producción y control de inventarios. 2 ed. México: Prentice Hall. [1996].
- [7] UMBLE, MICHAEL. Manufactura Sincrónica. (1995). Vol. 1, México.
- [8] ZADEH. From circuit theory to systems theory. (1965). IRE Proc
- [9] ZIMMERMANN. Fuzzy Set Theory and its Application. (1996). third ed., Kluwer Academic Publishers.