

## Solución numérica de la ecuación de onda en medios heterogéneos y aleatorios en 1 dimensión

Numerical solution to the wave equation in heterogeneous and random media in 1 Dimension

Omar Andrés Cuervo<sup>1,a</sup>

**Resumen.** Cuando queremos modelar el comportamiento de sistemas sometidos a parámetros que fluctúan por medio de ecuaciones diferenciales deterministas, encontramos limitantes en la aplicabilidad de los modelos. Es por ello que usamos coeficientes estocásticos (en lugar de las funciones deterministas) en las ecuaciones diferenciales, logrando una mejor predicción de la variabilidad de los parámetros del sistema. En este trabajo consideramos el problema de aproximar numéricamente la solución de la ecuación de onda en una dimensión y definida en medios aleatorios. Como la solución de este tipo de ecuaciones son procesos estocásticos, utilizamos herramientas de la teoría de probabilidad como la expansión de Karhunen-Loève para separar la parte determinista de la parte aleatoria de las ecuaciones y luego aplicamos un método de elementos finitos para obtener una aproximación de las estadísticas principales de las soluciones.

**Palabras claves:** ecuaciones diferenciales parciales en medios aleatorios, método de los elementos finitos, expansión de Karhunen-Loève.

**Abstract.** When it is desired to model the behaviour of systems which depend on parameters that fluctuate through deterministic differential equations, we find some limitations when using these models in applications. For that reason we use stochastic coefficients (instead of deterministic functions) in the differential equations, achieving a better prediction in the variability of the parameters of the system. In this work we consider the problem of numerically approximating the solution to the wave equation posed over random media. Since the solution of this type of equations are stochastic processes, we use tools of probability theory such as the Karhunen-Loeve expansion to separate the deterministic part from the random part of the coefficients and solutions of the equations and then, we apply a finite element method in order to obtain an approximation on the main statistics of the solutions.

**Keywords:** partial differential equations in random media, finite element method, Karhunen-Loève expansion.

Mathematics Subject Classification: 60H15, 65C20, 65N30, 65M60, 65C05.

Recibido: febrero de 2017

Aceptado: abril de 2017

<sup>1</sup>Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

<sup>a</sup>oacuervof@unal.edu.co

## 1. Introducción

En la actualidad gran parte del área de estudio de la física, matemática y disciplinas derivadas como las ingenierías se centran en problemas donde se debe solucionar ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales parciales. Estas ecuaciones diferenciales pueden estar definidas en un dominio espacial complejo, dificultando la solución de dicha ecuación. En la mayoría de los casos no se tiene éxito encontrando la solución analítica del problema y entonces se emplean métodos de aproximación numérica a las soluciones de estas ecuaciones. Entre estos métodos destacamos el método de elementos finitos que en la actualidad es ampliamente utilizado debido a su gran precisión y sencilla implementación computacional.

Un ejemplo de estos problemas consiste en el estudio de la ecuación de onda y de presión aplicada al transporte de solutos, donde podemos realizar una caracterización espacial de las propiedades del suelo por medio de la variabilidad de las componentes sólidas del terreno. Mediante métodos de muestreo y de medida se realizan estos estudios de variabilidad, que si son una aproximación del comportamiento real de las características del suelo, permiten realizar buenas predicciones para el uso eficiente del terreno, por ejemplo caracterizando la retención del agua en un suelo determinado. Distintas variables físico-químicas en las partículas sólidas de un suelo como la disposición, grado de cohesión y compactación, definen las propiedades hidrofísicas del suelo al determinar la proporción y tamaño de los poros. Detalles relacionados con dichas variables pueden ser consultadas en [1] y referencias allí encontradas. La capacidad de un suelo de dejar pasar agua o aire está relacionado con el volumen de los poros que componen el terreno, llamando a la relación entre el volumen del suelo y de los poros, la porosidad del terreno. Así, la porosidad depende directamente del tamaño de las partículas sólidas, teniendo que al presentar una mayor gama de tamaños existe menor porosidad en el terreno ya que las partículas de menor tamaño, llenan los espacios vacíos que dejan las de mayor volumen.

Se aplican técnicas de muestreo para determinar una distribución que caracterice la porosidad del suelo, tomando varias muestras independientes de un terreno y luego generando una distribución para el suelo en general. En dichas técnicas, aparece una correlación espacial en el comportamiento de las variables medidas en las muestras, ya que en la mayoría de casos se presenta menos variabilidad para muestras cercanas, por lo que se requiere realizar ciertas consideraciones estadísticas para determinar el tamaño, cantidad, ubicación y análisis de las muestras del suelo en estudio. Por lo anterior, se utilizan técnicas de geoestadística para la caracterización del suelo, midiendo principalmente variables con dos tipos de componentes, una componente aleatoria que es asociada a las variaciones impredecibles y erráticas de la variable, y una componente determinista que tiene variación lenta y que permite analizar el comportamiento general de la caracterización del suelo.

En situaciones como estas, se ven limitadas las ecuaciones diferenciales deterministas ya que no pueden modelar esas variaciones impredecibles en sus

parámetros, por lo que se presenta una necesidad de trabajar con funciones que tienen un componente aleatorio y que modelan problemas físicos como solución de ecuaciones diferenciales parciales. Dos ejemplos de estas ecuaciones son la ecuación de onda y la ecuación de presión en medios aleatorios que tienen como solución un proceso estocástico.

El estudio de la ecuación de onda es de vital importancia debido a sus numerosas aplicaciones entre las que encontramos la propagación de la luz y el sonido, el estudio de las ondas oceánicas y la transmisión de señales que son apenas unas pocas áreas donde se analiza dicha ecuación. Así mismo, si consideramos la aplicación de la ecuación de onda por disciplinas vemos que se destacan el electromagnetismo, la ciencia de los materiales y la geofísica. En la ingeniería de materiales se ha desarrollado en los últimos años una importante aplicación que consiste en conocer las propiedades mecánicas de un material determinado por medio de ultrasonido donde se utilizan métodos numéricos para simular las ondas que viajan por distintos medios de propagación, que en este caso serán los materiales que se desean analizar, ver [12]. En electromagnetismo encontramos dos ramas principales para el estudio de la ecuación de onda que comprenden el estudio de la propagación de ondas electromagnéticas en medios acotados y en medios no acotados. El estudio en medios acotados o cerrados se aplica en el análisis de resonancia, análisis de oscilaciones y las guías de onda, cuyos detalles pueden ser consultados en [9]. Para dominios no acotados básicamente estudia la dispersión de una onda electromagnética incidente en determinado medio.

En la actualidad existen diversos métodos numéricos para la aproximación de la solución a la ecuación de onda, aplicados según las necesidades del problema debido a las ventajas y desventajas que posee cada uno de ellos. Se puede dar una clasificación de tres categorías para los métodos de análisis existentes [2]: métodos directos, métodos de ecuaciones integrales y los métodos asintóticos.

En la aproximación por métodos directos se discretiza el dominio espacial de trabajo en un número finito de puntos que define una malla numérica. Estos métodos son ampliamente utilizados ya que no maneja restricciones sobre la modelación para distintos materiales y puede ser muy pequeño el error numérico si se utiliza una discretización lo suficientemente fina. La principal desventaja radica en el costo computacional con respecto a los métodos de las otras categorías. Se destacan entre los métodos directos el método de elementos finitos, el método de diferencias finitas y el método pseudoespectral. Estos métodos requieren una discretización del dominio espacial y temporal del problema.

Los métodos de ecuaciones integrales se basan en el principio de Huygens el cual establece que el estado de una onda en cierto punto del tiempo se puede descomponer como la superposición de varias ondas en volúmenes acotados o no acotados lo que lleva a establecer ecuaciones integrales de volumen y de frontera. Estos métodos tienen limitaciones para el tipo de dominio del problema pero resultan ser eficientes para ciertas geometrías específicas.

Los métodos asintóticos o de trazados de rayos consideran la onda como una reunión de varios eventos ondulatorios, cada uno de ellos con cierta amplitud

y tiempo previamente definidos. La principal limitación de éstos métodos es que no se considera el campo de onda completo pero se usan con frecuencia en la actualidad debido a su bajo costo computacional. En nuestro trabajo implementamos métodos directos, utilizando el método de elementos finitos para solucionar el problema en la discretización espacial y el método de diferencias finitas para realizar la discretización temporal cuyos detalles matemáticos serán comentados más adelante.

Como caso de estudio, aproximamos numéricamente  $E(u(x, t, \omega)) = \bar{u}(x, t, \omega)$  el valor esperado de la solución de la ecuación de onda en una dimensión para medios heterogéneos y aleatorios, es decir, donde la velocidad de propagación no es constante ya que varía su valor en el espacio y su comportamiento depende de un coeficiente estocástico. Dicha ecuación la podemos definir como ecuación diferencial parcial hiperbólica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t, \omega) - \frac{\partial}{\partial x} \left[ e^{c(x, \omega)} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t, \omega) \right] = f(x, t, \omega) \quad (1)$$

donde  $u(x, \omega, t)$  es una función que depende del espacio  $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , el tiempo  $t \in [0, T]$  y el comportamiento del coeficiente estocástico  $e^{c(x, \omega)}$  que define la velocidad de propagación de la onda y que describe las propiedades del medio aleatorio [8]. El coeficiente  $c(x, \omega)$  depende del valor que toma una sucesión de variables aleatorias  $\{Y_i\}_{i \geq 1}$  de la siguiente forma

$$c(x, \omega) := c(x, Y_1(\omega), Y_2(\omega), \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x) Y_i(\omega), \quad (2)$$

donde las variables aleatorias  $Y_i := Y_i(\omega)$  son independientes con distribución normal estandar y las funciones deterministas  $a_i$  están definidas en el mismo dominio espacial de  $u$ . Dichas variables aleatorias tienen funciones de distribución de probabilidad que son calculadas con las medidas obtenidas a partir de las muestras, describiendo por medio de estas variables aleatorias las propiedades del suelo. Según [11], existen dos distribuciones de probabilidad que se ajustan a las variables físico-químicas del terreno. La distribución normal para medidas de humedad y densidad aparente, y la distribución log-normal que modela la conductividad hidráulica y la distribución de sedimentos, entre otras. Finalmente,  $f$  será la fuerza externa aplicada que determina el comportamiento de la onda, que tiene los mismos dominios de  $u$  y que de forma general también va a depender de un coeficiente aleatorio.

Para utilizar métodos numéricos en la aproximación de la solución de ecuaciones diferenciales con coeficientes aleatorios damos dos tipos de condiciones, la primera es la condición de frontera, que representa el comportamiento de la función solución en la frontera del dominio, y la segunda son las condiciones iniciales, que representan el comportamiento de la solución  $u$  en el instante  $t = 0$ . Para la condición de frontera en el presente trabajo, vamos a desarrollar experimentos de dos tipos, condición de Dirichlet y condición de Neumann [4], y distintas condiciones iniciales según el problema abordado. Establecidas las

condiciones iniciales y de frontera de la ecuación, procedemos a solucionar el problema. Utilizamos el método de elementos finitos que realiza una división del dominio espacial de la ecuación en regiones geométricas simples llamadas *elementos*. Usando esta malla de elementos generamos soluciones aproximadas del problema por medio de un sistema lineal de ecuaciones. La idea del método es expresar la ecuación diferencial como una ecuación integral sobre cada elemento, resolviendo el problema de manera local y posteriormente sumando cada contribución para calcular la solución global aproximada. Esto último se genera resolviendo un sistema lineal o una ecuación diferencial ordinaria en dimensión finita.

En lo que sigue, el documento se desarrollará así: en la siguiente sección se presentan los detalles de la expansión en serie de potencias del coeficiente mostrado en (2) y mostrar un método de aproximación del valor esperado  $\bar{u}(x, \omega, t)$ . Seguido damos las definiciones y herramientas básicas para la solución de la ecuación (1) por medio del método de los elementos finitos para posteriormente definir el problema en sus diferentes formulaciones que nos permiten realizar la implementación computacional. En la última sección se mostrarán los resultados numéricos del problema mostrado a lo largo del documento.

## 2. Herramientas de Probabilidad

El objetivo de esta sección es mostrar como la solución  $u$  se puede ver como un proceso estocástico, para el cual proporcionamos una herramienta de aproximación del valor esperado de la solución, llamado el método Monte Carlo. Además, definimos un método estadístico para calcular el coeficiente  $c(x, \omega)$  como una expansión en serie de funciones deterministas (funciones de las cuales se conoce el comportamiento exacto) acompañadas de unos respectivos coeficientes aleatorios. La idea del método es definir el coeficiente  $c(x, \omega)$  como un proceso estocástico al cual asociamos una función de covarianza que va a caracterizar las propiedades del medio poroso en donde se desarrollen los problemas. En [11] se clasifican las variables aleatorias mostradas en (2) que están asociadas a las muestras tomadas sobre el suelo en estudio. Allí, llaman las variables estacionarias cuando la función de covarianza del proceso estocástico depende directamente de la distancia media entre los poros de una muestra. Esta expansión del coeficiente  $c$  es llamada la expansión de Karhunen-Loève (KL).

### 2.1. Expansión de Karhunen-Loève

Dado un espacio de probabilidad  $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, P)$  se define un proceso estocástico real como una sucesión de variables aleatorias  $\{Y_x = Y(x)\}_{x \in S}$  con dominio el espacio de probabilidad y que toman valores en los reales. Al conjunto  $S$  se le llama conjunto de índices del proceso estocástico ya que los valores  $x \in S$  indexan el proceso estocástico y el conjunto  $T \subseteq \mathbb{R}$  de valores que toma cada una de las variables del proceso es llamado el conjunto de estados del

proceso. Dependiendo la característica discreta o continua de los conjuntos  $S$  y  $T$  podemos clasificar los procesos estocásticos, ver [5].

Dado  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , un kernel  $A : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  se dice definido positivo en  $\Omega$  si para cada sucesión finita de puntos  $\{x_i\}_{i=1}^N \subseteq \Omega$  y correspondiente sucesión de coeficientes  $\{\lambda_i\}_{i=1}^N \subseteq \mathbb{R}$  tenemos,

$$\sum_{n,m=1}^N \lambda_n \lambda_m A(x_n, x_m) \geq 0.$$

Además, el kernel se llama simétrico si  $A(x, y) = A(y, x)$  para todos  $x, y \in \Omega$ . Entonces, si consideramos el coeficiente  $c(x, \omega)$  y definimos el proceso estocástico  $Z_x = c(x, \omega) - \bar{c}(x)$ , siendo  $\bar{c}$  el valor esperado de  $c(\cdot, \omega)$ , entonces definimos la función de covarianza

$$\text{Cov}(x, y) = E[Z_x Z_y], \quad (3)$$

que podemos ver como un kernel y pedir que sea definido positivo y simétrico para aplicar los resultados mostrados a continuación, por lo que restringimos las funciones de covarianza a ciertas funciones que cumplan las condiciones pedidas.

Dado el Kernel Cov, definimos el operador  $\mathbb{A} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  por

$$\mathbb{A}(f) = \int_{\Omega} \text{Cov}(x, y) f(x) dx,$$

donde  $L^2(\Omega)$  es el espacio de funciones cuadrado integrables con dominio  $\Omega$  y deducimos que si la función Cov es continua, entonces  $\mathbb{A}(f)$  es una función continua y además el operador  $\mathbb{A}$  es también continuo. Ahora, por el *teorema espectral para operadores compactos* aseguramos la existencia de  $\{\varphi_i\}_{i \in I} \in L^2(\Omega)$  eigenfunciones y  $\{\mu_i\}_{i \in I}$  los respectivos eigenvalores del operador  $\mathbb{A}$ , es decir las funciones que cumplen la igualdad

$$\mathbb{A}(\varphi_i) = \mu_i \varphi_i,$$

y que formarán una base ortonormal del espacio  $L^2(\Omega)$ . Entonces el *teorema de Hilbert-Schmidt* [10], establece que si el Kernel Cov es simétrico este cumple la expansión en serie

$$\text{Cov}(x, y) = \sum_i \mu_i \varphi_i(x) \varphi_i(y). \quad (4)$$

Por el *teorema de Mercer* se tiene que si el Kernel Cov es simétrico entonces además es definido positivo y por lo tanto los eigenvalores  $\{\mu_i\}_{i \in I}$  son no negativos y la expansión (4) tiene convergencia uniforme.

Dado  $\{Y_1, Y_2, \dots\}$  conjunto de variables aleatorias con distribución normal estandar e independientes entre sí, definimos

$$c(x, \omega) = \bar{c}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\mu_i} \varphi_i(x) Y_i(\omega), \quad (5)$$

llamada la expansión de Karhunen-Loève para el proceso estocástico definido por el coeficiente  $c$ . Observamos que para el proceso  $Z_x = c(x, \omega) - \bar{c}(x)$  por la linealidad del valor esperado, asumiendo que la serie (5) converge y por definición de las variables aleatorias  $Y_i$ , la función de covarianza

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x, y) &= E[Z_x(\omega)Z_y(\omega)] \\ &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\mu_i} \varphi_i(x) Y_i(\omega)\right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\mu_j} \varphi_j(y) Y_j(\omega)\right)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\mu_i} \sqrt{\mu_j} \varphi_i(x) \varphi_j(y) E[Y_i(\omega)Y_j(\omega)] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \varphi_i(x) \varphi_i(y), \end{aligned}$$

cumpliendo la expansión mostrada en (4) y que bajo las condiciones pedidas, tendrá convergencia uniforme. Esto muestra que el proceso estocástico  $Z_x$  tiene la covarianza deseada y encontramos una forma de definir el proceso por medio de su función de covarianza asociada.

Para efectos numéricos, definimos la expansión de Karhunen-Loève truncada en  $K$  términos para el proceso estocástico, por

$$c(x, \omega) \approx \bar{c}(x) + \sum_{i=1}^K \sqrt{\mu_i} \varphi_i(x) Y_i(\omega), \quad (6)$$

donde  $\varphi_i$  son las eigenfunciones asociadas al operador  $\mathbb{A}$  definido por la función de covarianza  $\text{Cov}(x, y)$ .

## 2.2. Método Monte Carlo

Para las ecuaciones diferenciales que vamos a trabajar, podemos ver el conjunto de las soluciones  $u(x, \omega)$  como un proceso estocástico ya que el comportamiento de cada solución depende del valor que tome el coeficiente aleatorio  $c(x, \omega)$ . Si consideramos  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  dominio poligonal y  $\mathcal{T}_h$  una partición de  $\Omega$ , tenemos que para cada  $x \in \Omega$  que sea nodo de la partición  $\mathcal{T}_h$ ,  $u(x, \omega)$  define una variable aleatoria  $Y_x$  de la forma  $Y_x(\omega) = u(x, \omega)$ , teniendo así que el conjunto de índices del proceso es el conjunto de nodos de la discretización establecida. El conjunto de estados  $T$  estará conformado por los valores que tome cada solución  $u$  del problema que se pueden presentar a través de todo un intervalo. Así, tenemos que el proceso estocástico definido es un proceso con conjunto de parámetros discreto y conjunto de estados continuo.

Así, para las ecuaciones que definimos deseamos encontrar el valor esperado  $\bar{u}(x)$  de las soluciones del problema. De forma general, dado un proceso

estocástico  $\{Z_x\}_{x \in S}$  definido en un espacio de probabilidad  $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, P)$ , generalmente, la función de medias  $\mu_x = E[u]$  es desconocida, pero se puede conocer el comportamiento aproximado de los datos por resultados estadísticos, como lo es el método Monte Carlo que sirve para dar solución a problemas complejos por medio de métodos numéricos que van a depender de factores aleatorios. La base principal del método Monte Carlo es la generación de números aleatorios para calcular probabilidades, o en nuestro caso los valores esperados. Existen diversas y complejas formas para generar dichos números aleatorios que deben estar en un conjunto estadístico determinado [7], pero en nuestro trabajo haremos uso de la función *rand* que trae por defecto Matlab la cual será la encargada de generar los valores que toma una variable normal estándar y que serán los números aleatorios para aplicar el método.

Dada una variable aleatoria  $Y(\omega)$  definida en un espacio de probabilidad  $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, P)$  y cuya función de densidad es  $f_Y$ , sabemos que para un función  $g$  con dominio el conjunto de estados de la variable aleatoria  $Y$  se cumple, por la regla del valor esperado [5] que la esperanza de la variable aleatoria  $Z = g(Y)$  se puede ver como

$$E[g(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) P^Y(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) f_Y(\omega) d\omega.$$

Con el método Monte Carlo podemos aproximar el valor de la integral tomando  $M$  valores o realizaciones de  $Y$ ,  $\{Y(\omega_i) = y_i\}_{i=1}^M$  y calculando

$$E[g(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) f_Y(\omega) d\omega \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g(y_i). \quad (7)$$

Aplicando lo anterior al proceso estocástico de las soluciones  $Z_x(\omega)$ , tenemos

$$\bar{u}(x) = E[u(x, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) f_Y(y) dy \quad (8)$$

y utilizando (7), tenemos la aproximación

$$\bar{u}(x) \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M u(x, y_i)$$

donde aproximamos el valor de la integral (8) calculando el promedio de las soluciones  $u(x, y_i)$  a  $M$  realizaciones del problema donde cada coeficiente aleatorio cumple  $c(x, \omega_i) := c(x, Y(\omega_i)) = c(x, y_i)$ .

### 3. El Método de los Elementos Finitos

El método de los elementos finitos halla aproximaciones numéricas a la solución de ecuaciones diferenciales parciales, principalmente de ecuaciones parabólicas e hiperbólicas descomponiendo el dominio de la ecuación diferencial

en subdominios que no se intersectan, llamados elementos. Vamos a implementar el método a la ecuación de onda mostrada en (1) que es una ecuación diferencial parcial hiperbólica estocástica. La implementación la realizamos en tres pasos: Establecer una formulación variacional del problema (o formulación débil) donde se describe la ecuación de onda en términos de integrales de funciones que viven en un espacio de Hilbert definido más adelante. Seguido, reemplazamos el espacio de funciones por un espacio de dimensión finita al cual llamaremos espacio de elementos finitos, definiendo unas funciones que serán una base para el espacio. Finalmente, establecemos un sistema lineal cuya solución es la aproximación de la solución del problema que se va a estudiar en distintos escenarios.

Dado un intervalo real  $[a, b]$  y un conjunto de puntos  $\{a = z_0 < z_1 < \dots < z_N < z_{N+1} = b\}$ , definimos una partición del intervalo como el conjunto de subintervalos  $E_i = [z_{i-1}, z_i]$  donde  $i = 1, \dots, N + 1$ . Llamamos elemento a cada  $E_i$  y vértices o nodos a cada uno de los  $z_j$  con  $j \in \{0, \dots, N + 1\}$ . Observamos que se cumple que

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^{N+1} [z_{i-1}, z_i].$$

La ecuación de onda mostrada en (1) es una ecuación diferencial parcial con coeficientes aleatorios definidos en una dimensión espacial. Dichas ecuaciones tendrán como dominio el intervalo  $[0, 1]$ . Denotamos  $h = \max_{1 \leq i \leq n} |E_i|$ . Sobre el intervalo  $[a, b]$ , podemos definir los espacios de funciones  $L^2[a, b]$  y  $H^1[a, b]$  que resultan ser espacios de Hilbert dotados de un producto interno y por ende de una norma, ver [6]. Si tomamos el espacio  $C[a, b]$  de funciones de valor real y continuas que están definidas en el intervalo  $[a, b]$ , definimos el producto interno

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2[a, b]} : C[a, b] \times C[a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\mapsto \langle f, g \rangle_{L^2[a, b]} = \int_a^b f(x)g(x)dx, \end{aligned}$$

que induce la norma

$$\| \cdot \|_{L^2[a, b]} : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que

$$\| f \|_{L^2[a, b]} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2[a, b]}}. \quad (9)$$

Definimos así, el espacio  $L^2[a, b]$  como el conjunto de funciones medibles que tienen norma  $\| \cdot \|_{L^2[a, b]}$  finita [3]. Cabe mencionar que el espacio  $L^2[a, b]$  es un espacio de Hilbert de dimensión infinita y llamamos norma  $L^2$  a la norma  $\| \cdot \|_{L^2[a, b]}$ . Ahora, sobre  $L^2[a, b]$  podemos definir el subespacio  $H^1[a, b]$  como el conjunto

$$H^1[a, b] = \{f \in L^2[a, b] : f' \in L^2[a, b]\}$$

donde  $f'$  representa la primera derivada de  $f$ . A  $H^1[a, b]$  lo podemos dotar del producto interno

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1[a, b]} : L^2[a, b] \times L^2[a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\mapsto \langle f, g \rangle_{H^1[a, b]} = \int_a^b (f(x)g(x) + f'(x)g'(x))dx, \end{aligned}$$

con norma inducida

$$\|f\|_{H^1[a, b]} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{H^1[a, b]}}, \quad (10)$$

que se llamará norma  $H^1$ .

El espacio  $H^1[a, b]$  es un espacio de Hilbert de dimensión infinita el cual nos va a servir para establecer la formulación débil los problemas mostrados en los siguientes capítulos. Para ciertas aplicaciones, es útil definir el espacio  $H_0^1[a, b]$  visto como subespacio de  $H^1[a, b]$  y definido por

$$H_0^1[a, b] = \{f \in H^1[a, b] : f(a) = f(b) = 0\}.$$

Este espacio es utilizado cuando consideramos los problemas definidos mediante una ecuación diferencial parcial y cuyas condiciones de frontera son las condiciones de Dirichlet homogéneas e iguales a cero para definir las respectivas formulaciones débiles. Este tema es discutido mas a fondo en [6] donde se definen los espacios de funciones tipo Sobolev.

En  $[a, b]$  definimos el espacio de funciones continuas y lineales por partes como el conjunto

$$V = \left\{ f \in C([a, b]) : f|_{[z_{i-1}, z_i]} \text{ es lineal, con } i = 1, \dots, N+1 \right\}.$$

Si llamamos  $h_i = z_i - z_{i-1}$  notamos dicho espacio por  $V^h$ , cuando  $h = \max_{1 \leq i \leq n} |E_i|$ . Al espacio  $V^h$  lo vamos a llamar el espacio de elementos finitos. Allí, podemos definir el conjunto de funciones base  $\{\phi_0, \dots, \phi_{N+1}\}$  dadas por

$$\phi_i(z_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Vemos que  $V^h$  es un espacio de dimensión finita que tendrá como base el conjunto  $\{\phi_0, \dots, \phi_{N+1}\}$ . En la Figura 1 podemos observar el comportamiento de dos funciones base  $\phi_i$  y  $\phi_{i+1}$  para una partición uniforme de  $N = 11$  nodos del dominio  $[0, 1]$ .

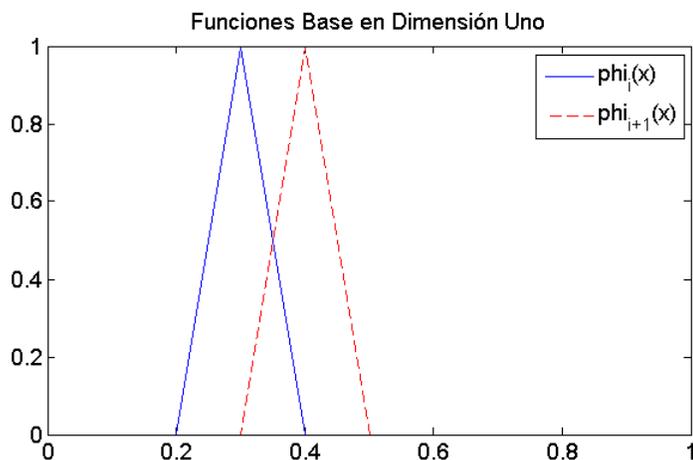


Figura 1: Funciones base del espacio de elementos finitos  $V^h$  definidas en  $[0, 1]$ .

Cabe resaltar que el espacio  $V^h$  es solo un ejemplo de espacio de elementos finitos con el cual trabajamos aquí, pero existen otros espacios de elementos finitos con los cuales podemos mejorar el grado de error en la aproximación pero cuya implementación numérica puede ser un poco más complicada. Algunos ejemplos de dichos espacios pueden ser consultados en [6].

Análogamente a lo presentado con los espacios  $H^1[a, b]$  y  $H_0^1[a, b]$ , al espacio de elementos finitos  $V^h$  le podemos asociar un subespacio  $V_0^h$  de funciones  $f$  que viven en  $V^h$  y que cumplen la condición de  $f(a) = f(b) = 0$ . Con el espacio  $V_0^h$  se define la formulación de Galerkin (con espacio de dimensión finita) al trabajar con condiciones de frontera de Dirichlet iguales a cero. Podemos observar que  $V_0^h$  tiene como base el conjunto de funciones  $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ .

A partir de las normas (9) y (10) podemos estudiar dos tipos de errores, el error  $L^2$  y el error  $H^1$  notados  $\varepsilon_{L^2}$  y  $\varepsilon_{H^1}$ , respectivamente. Observamos como podemos implementar dichos errores sobre el espacio  $V^h$  encontrando una expresión matricial para el cálculo de los errores sobre las aproximaciones dadas por el método de elementos finitos. Dada una función  $f \in V^h$ , tenemos que existen  $a_0, \dots, a_{N+1} \in \mathbb{R}$  coeficientes tal que

$$f(x) = a_0\phi_0(x) + \dots + a_{N+1}\phi_{N+1}(x).$$

Por esto, podemos asociarle a cada función  $f \in V^h$  un vector columna  $v_f$  que será la representación de la función  $f$  en forma matricial cuyas entradas son los  $N + 2$  coeficientes  $a_i$  llamados grados de libertad de  $f$ . Ahora, si consideramos la norma  $L^2$  para  $f$ , tenemos

$$\|f\|_{L^2[a,b]} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx},$$

y por propiedades de la integral observamos que

$$\int_0^1 v(x)u_{tt}(x, t, \omega)dx + \int_0^1 e^{c(x, \omega)}v_x(x)u_x(x, t, \omega)dx = \int_0^1 v(x)f(x, t, \omega)dx$$

Entonces, si definimos la matriz cuadrada  $M$  de tamaño  $N + 2$  con entradas

$$m_{ij} = \int_0^1 \phi_{i-1}(x)\phi_{j-1}(x)dx, \quad (11)$$

para  $i, j = 1, \dots, N + 2$ , tenemos que

$$v_f^t M v_f = \sum_{i=0}^{N+1} \sum_{j=0}^{N+1} a_i a_j \int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)dx,$$

donde  $v_f$  es el vector columna asociado a la función  $f$  y  $v_f^t$  es la traspuesta del vector. De esta forma encontramos una expresión matricial para la norma  $L^2$  determinada por

$$\|f\|_{L^2[a,b]} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N+1} \sum_{j=0}^{N+1} a_i a_j \int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)dx} = \sqrt{v_f^t M v_f}, \quad (12)$$

donde la matriz  $M$  es la matriz cuyas entradas están definidas en (11) y que es llamada la matriz de masa. De esta forma, cuando hacemos estudios de error entre la solución analítica  $u$  de un problema y la solución aproximada  $u^{(a)}$  por el método de elementos finitos, generamos el vector  $u^h \in V^h$  que será la interpolación de  $u$  al espacio de elementos finitos. Así, generamos tablas o gráficas de error con función de error definida por

$$\varepsilon_{L^2} = \|u^h - u^{(a)}\|_{L^2[a,b]} = \sqrt{(u^h - u^{(a)})^t M (u^h - u^{(a)})}. \quad (13)$$

Ahora, si definimos la matriz cuadrada  $A$  cuyas entradas están dadas por

$$a_{ij} = \int_0^1 \phi'_{i-1}(x)\phi'_{j-1}(x)dx,$$

para  $i, j = 0, \dots, N + 1$ , llamada matriz de rigidez, tenemos

$$v_f^t A v_f = \sum_{i=0}^{N+1} \sum_{j=0}^{N+1} a_i a_j \int_a^b \phi'_i(x)\phi'_j(x)dx.$$

Por medio de una acotación de la norma  $H^1$  que es considerada en [3] y con las consideraciones tomadas en (14), podemos definir otra función de error asociada

a la norma  $H^1$  para generar gráficas y tablas de error entre la aproximación numérica de una solución y la solución analítica. Definimos entonces

$$\varepsilon_{H^1} = \|u^h - u^{(a)}\|_{H^1[a,b]} = \sqrt{(u^h - u^{(a)})^t A (u^h - u^{(a)})}, \quad (14)$$

donde  $u^h$  es la interpolación al espacio  $V^h$  de la solución analítica del problema y  $u^{(a)}$  es la aproximación dada por el método de elementos finitos. En los casos donde no se pueda determinar analíticamente la solución  $u$  de una ecuación diferencial, podemos reemplazar el vector  $u^h$  por una función de referencia para hacer estudios de convergencia de un método.

## 4. Formulaciones del Problema

Una vez definidos los espacios de funciones, vamos a mostrar las formulaciones del problema con condiciones de frontera Neumann homogéneas igual a 0. Como la ecuación (1) tiene derivadas con respecto al espacio  $x$  y el tiempo  $t$  requerimos realizar la discretización de los dos dominios para definir la aproximación numérica.

Definimos la formulación fuerte del problema por

$$(S) \begin{cases} \text{Encontrar } u : [0, 1] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que} \\ u_{tt}(x, t, \omega) - [e^{c(x, \omega)} u_x(x, t, \omega)]_x = f(x, t, \omega), & x \in [0, 1] \\ e^{c(x, \omega)} u_x(x, t, \omega) = 0, \quad x \in \{0, 1\}, \quad t \geq 0 & \text{Condición de Frontera} \\ u(x, 0, \omega) = u_0(x), \quad x \in (0, 1), & \text{Posición Inicial} \\ u_t(x, 0, \omega) = v_0(x), \quad x \in (0, 1). & \text{Velocidad Inicial} \end{cases}$$

Aquí, las condiciones iniciales  $u_0(x)$  y  $v_0(x)$  son funciones suaves y definidas en el intervalo  $[0, 1]$ . Seguido queremos considerar una formulación débil del problema, para lo cual tomamos una función  $v \in H^1[0, 1]$  que se llamará función de prueba, la multiplicamos a la ecuación mostrada en (S) y definimos las integrales

$$\int_0^1 v(x) u_{tt}(x, t, \omega) dx - \int_0^1 v(x) [e^{c(x, \omega)} u_x(x, t, \omega)]_x dx = \int_0^1 v(x) f(x, t, \omega) dx. \quad (15)$$

Si integramos por partes y por la condición de frontera que se estableció, tenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} - \int_0^1 v(x) [e^{c(x, \omega)} u_x(x, t, \omega)]_x dx &= - \left[ v(x) e^{c(x, \omega)} u_x(x, t, \omega) \right]_{x=0}^{x=1} \\ &\quad + \int_0^1 e^{c(x, \omega)} v_x(x) u_x(x, t, \omega) dx \\ &= \int_0^1 e^{c(x, \omega)} v_x(x) u_x(x, t, \omega) dx. \end{aligned}$$



donde

$$u_{z-i} = u(x, t_{z-i}, \omega) \quad \text{y} \quad t_{z-i} = (z-i)\Delta t.$$

Observamos que para poder resolver el problema en esta formulación, tenemos que conocer las soluciones en los dos instantes de tiempo anteriores, donde hacemos uso de las dos condiciones iniciales tomando la posición inicial  $u_0(x)$  como la solución en el tiempo  $t = 0$  y la velocidad inicial  $v_0(x)$  como la solución en el tiempo  $t = -1$  para la solución en la primera iteración. Nuevamente, si fijamos  $z \in \{0, \dots, M\}$  tenemos que  $u_z \in V^h$ , entonces

$$u_z = a_0\phi_0 + a_1\phi_1 + \dots + a_N\phi_N + a_{N+1}\phi_{N+1},$$

donde los  $a_i$  son números reales para  $i = 0, \dots, N+1$ . Por otro lado, como la ecuación es válida para toda  $v \in V^h$ , en particular si tomamos  $v = \phi_i$ , notando  $\phi'_i = \frac{d\phi_i}{dx}$  para cada  $i = 0, \dots, N+1$  y reemplazando en (G), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t^2} \int_0^1 (a_0\phi_0 + \dots + a_{N+1}\phi_{N+1})\phi_i dx - \frac{2}{\Delta t^2} \int_0^1 u_{z-1}\phi_i dx + \frac{1}{\Delta t^2} \int_0^1 u_{z-2}\phi_i dx \\ + \int_0^1 e^c (a_0\phi'_0 + \dots + a_{N+1}\phi'_{N+1})\phi'_i dx = \int_0^1 f\phi_i dx, \end{aligned}$$

agrupando

$$\begin{aligned} a_0 \left[ \frac{1}{\Delta t^2} \int_0^1 \phi_0\phi_i dx + \int_0^1 e^c \phi'_0\phi'_i dx \right] + \dots \\ \dots + a_{N+1} \left[ \frac{1}{\Delta t^2} \int_0^1 \phi_{N+1}\phi_i dx + \int_0^1 e^c \phi'_{N+1}\phi'_i dx \right] \\ = \int_0^1 f\phi_i dx + \frac{2}{\Delta t^2} \int_0^1 u_{z-1}\phi_i dx - \frac{1}{\Delta t^2} \int_0^1 u_{z-2}\phi_i dx. \end{aligned}$$

Entonces como esto es válido para cada  $i = 0, \dots, N+1$ , obtenemos un sistema de  $N+2$  ecuaciones con  $N+2$  incógnitas (los coeficientes  $a_i$ ) que serán precisamente los valores que aproximan la solución  $u_z$  en el tiempo previamente establecido. Obtenemos así un sistema lineal llamado la formulación matricial (M) del problema que será el método que se resuelve computacionalmente en cada instante de tiempo  $t_z$  para generar la aproximación de la solución del problema.

## 5. Resultados Numéricos

Presentamos los resultados a la ecuación de onda donde la función que define el medio de propagación es el coeficiente aleatorio  $c(x, \omega)$  definido mediante la serie KL descrita en la Sección 2. Trabajamos con  $N = 100$  elementos, un parámetro de tiempo  $\Delta t = 0.01$  y en todas las simulaciones asumimos que

la velocidad inicial de la onda está dada por la función  $v_0(x) = 0.1e^{-(50x)^2}$  con  $x \in [0, 1]$ . Suponemos que la onda se encuentra inicialmente en posición  $u_0(x) = 0$  en todo el intervalo de dominio y sin fuerza externa. En los resultados mostrados cabe resaltar que vamos a generar  $M = 100$  realizaciones del ejercicio, obteniendo varias soluciones con las que vamos a implementar el metodo Monte Carlo para generar la aproximación de la media de las soluciones.

En la Figura 2 mostramos el comportamiento general de la solución media en 4 instantes de tiempo para las condiciones establecidas en la descripción de la figura. Además, calculamos la desviación estándar de la solución y con líneas punteadas mostramos las soluciones correspondientes a la media  $\bar{u}$  más y menos el valor de la desviación estándar.

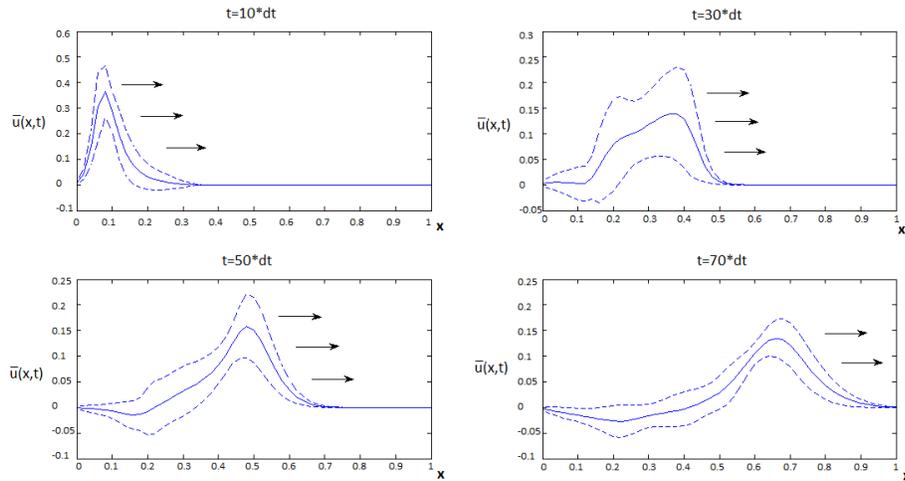


Figura 2: Gráfica de la solución media de la ecuación (1) y de las soluciones que representan la media más y menos la desviación estandar en 4 instantes de tiempo distintos, con un  $\Delta t = 0.01$ , para 100 realizaciones y con condiciones iniciales  $v_0(x) = 0.1e^{-(50x)^2}$ , posición inicial dada por  $u_0(x) = 0$  y sin fuerza externa actuante. Para definir el coeficiente  $c(x, \omega)$  se utiliza una matriz de covarianza determinada por la ecuación  $C(Q_1, Q_2) = e^{-|Q_1 - Q_2|^{1.5}}$ , aplicando la expansión definida en (6) con 20 términos de la serie. Para obtener el resultado se utiliza el método de elementos finitos con  $N = 100$  elementos.

Seguido, queremos comparar las soluciones en el tiempo final cuando se trunca la serie, con distintas cantidades de términos. Para este experimento se toma un  $\Delta t = 0.02$  y el último instante de tiempo es 70 veces el valor de  $\Delta t$ .

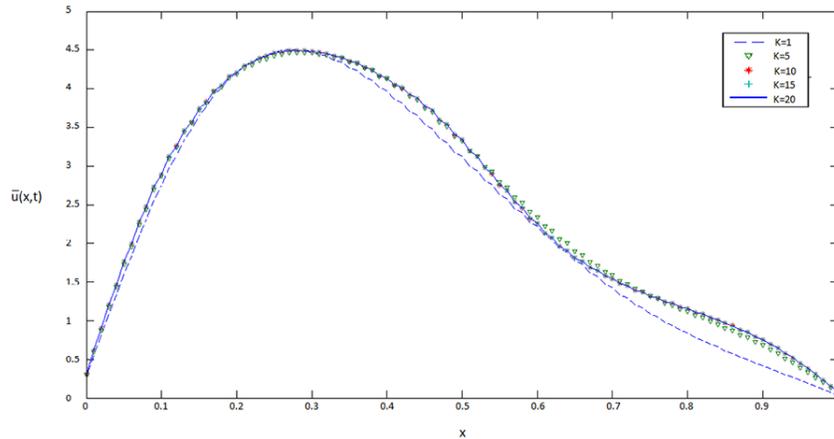


Figura 3: Gráfica de las soluciones promedio de la ecuación de onda unidimensional en el tiempo final para  $M = 100$  realizaciones con condiciones iniciales  $v_0(x) = 0.01e^{-(50x)^2}$ , posición inicial  $u_0(x) = 0$  y sin fuerza externa actuante. Para definir el coeficiente  $c(x, \omega)$  se utiliza una matriz de covarianza determinada por la ecuación  $C(Q_1, Q_2) = e^{-|Q_1 - Q_2|^{1.5}}$  comparando las soluciones con 1, 5, 10, 15 y 20 términos de la serie. Se toma un  $\Delta t = 0.02$  y las gráficas corresponden a las soluciones en un tiempo de 70 veces el  $\Delta t$ . Para obtener el resultado se utiliza el método de elementos finitos con  $N = 100$  elementos.

Resaltamos que en los experimentos se decide calcular hasta  $K = 20$  términos de la serie porque se observa que allí las soluciones ya se han estabilizado. Este hecho lo podemos observar en la Figura 4 que es una gráfica de error donde se estudia el comportamiento cuando se agregan términos a la serie con respecto a la solución con  $K = 20$  términos de la serie. En la Figura 4 el eje de las abscisas es el número de términos de la serie y la altura es el valor de error entre las soluciones con distintos términos de la serie.

Además podemos hacer un análisis del comportamiento de las soluciones en un mismo nodo con unas gráficas de mareograma mostradas en la Figura 5 que muestra las soluciones en el punto previamente fijado a través del tiempo para las 5 cantidades de términos de la serie que se mostró en la Figura 3.

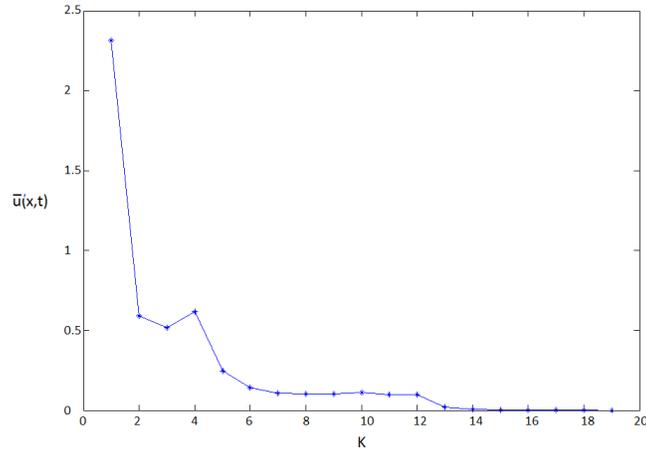


Figura 4: Gráfica de error para el nodo 50 ( $x = 0.5$ ) del comportamiento de las soluciones mostradas en la figura (3), comparando las soluciones en el instante  $t = 70\Delta t$  desde 1 término hasta 20 términos de la serie KL y determinada por la matriz de covarianza establecida en la Figura 2.

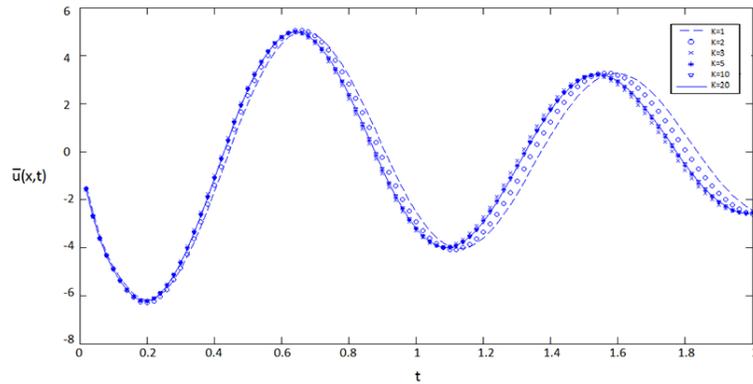


Figura 5: Mareograma de las soluciones para el nodo 50 donde se observa el comportamiento de la solución media  $\bar{u}(x,t)$  de la ecuación (1) en  $x = 0.5$  a través del tiempo hasta 100 veces el  $\Delta t$ .

## Agradecimientos

El autor agradece el apoyo recibido por el proyecto **Hermes 28255**.

## Referencias

- [1] L. D. Baver et al., *Soil physics.*, Soil physics. (1940).
- [2] J. M. Carcione, G. C. Herman, and A. Ten Kroode, *Seismic modeling*, *Geophysics* **67** (2002), no. 4, 1304–1325.
- [3] W. D. Evans, *Partial differential equations*, (1988).
- [4] J. Galvis and H. Versieux, *Introdução à aproximação numérica de equações diferenciais parciais via o método de elementos finitos*, Lecture notes for a minicourse in the **28** (2011).
- [5] J. Jacod and P. Protter, *Probability essentials*, Springer Science & Business Media, 2004.
- [6] C. Johnson, *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*, Courier Corporation, 2012.
- [7] D. P. Kroese, T. Taimre, and Z. I. Botev, *Handbook of monte carlo methods*, vol. 706, John Wiley & Sons, 2013.
- [8] J. C. McWilliams, J. M. Restrepo, and E. M. Lane, *An asymptotic theory for the interaction of waves and currents in coastal waters*, *Journal of Fluid Mechanics* **511** (2004), 135–178.
- [9] L. Pichon, *Finite element analysis of bounded and unbounded electromagnetic wave problems*, (1995).
- [10] F. Riesz and B. S. Nagy, *Functional analysis, frederick ungar, new york, 1955*, English Translation (1990).
- [11] F. J. Samper and J. Carrera, *Geoestadística: Aplicaciones a la hidrología subterránea*, CIMNE. Barcelona. Spain (1990).
- [12] S. Zhou, J-L. Robert, J. Fraser, Y. Shi, H. Xie, and V. Shamdasani, *Finite element modeling for shear wave elastography*, *Ultrasonics Symposium (IUS)*, 2011 IEEE International, IEEE, 2011, pp. 2400–2403.