



UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA

# **Optimización topológica aplicada al diseño de turbomáquinas considerando restricciones estructurales y sobre el fluido**

## **Topology optimization applied to the design of turbomachines considering structural and fluid restrictions**

**Esteban Foronda Obando**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Minas, Departamento de Ingeniería Mecánica  
Medellín, Colombia

2020



# **Optimización topológica aplicada al diseño de turbomáquinas considerando restricciones estructurales y sobre el fluido**

**Esteban Foronda Obando**

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

**Magíster en Ingeniería Mecánica**

Director:

Ph.D., Wilfredo Montealegre Rubio

Grupo de Investigación:

Diseño y Optimización Aplicada - DOA

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Minas, Departamento de Ingeniería Mecánica

Medellín, Colombia

2020



## Resumen

El desempeño de las turbomáquinas depende fuertemente del diseño del rotor, por lo que la optimización de su interacción con el fluido ha sido un campo de investigación activo, tanto en la academia como en la industria. El Método de Optimización Topológica ha demostrado ser exitoso en el diseño de rotores de máquinas de flujo radial, incluyendo la evaluación de desempeño numérico y experimental y permitiendo la creación de geometrías no intuitivas. Comúnmente, el proceso de optimización es desarrollado desde la perspectiva del fluido, para funciones objetivo como la disipación de energía y la vorticidad; sin embargo, esta metodología no garantiza que la respuesta estructural satisfice las restricciones en factores como rigidez, esfuerzos y temperaturas, requiriendo un proceso iterativo para obtener una solución factible pero que no es óptima. En este trabajo, las dos físicas de este problema son acopladas al considerar la interacción fluido-estructura. Así, se verifica el efecto de incluir la respuesta estructural en el problema de optimización, consolidando una metodología robusta que puede ser extendida a resolver físicas más complejas, como compresibilidad del fluido, flujo transitorio y turbulencia.

**Palabras clave:**

Optimización topológica, turbomáquina, bomba, rotor, interacción fluido-estructura



## **Abstract**

The performance of turbomachines is highly dependent on the design of the rotor and optimizing its interaction with the fluid has been an active research field in academia and industry. The Topology Optimization Method has proven successful in the design of rotors of radial flow machines, including numerical and experimental performance assessment and allowing the creation of non-intuitive optimum geometries. Usually, the optimization process is developed from the fluid perspective, for objective functions such as energy dissipation and vorticity; however, this methodology does not guarantee that the structural response satisfies the constraints on factors like stiffness, stress and temperature, requiring an iterative process to obtain a feasible design that is no longer optimum. In the present work, the two physics of this problems are coupled by considering the fluid-structure interaction. The effect of including the structural response on the optimum designs is verified, consolidating a robust methodology that can be extended to solve more complex physics such as fluid compressibility, flow transients and turbulence.

### **Keywords:**

Topology optimization, turbomachine, pump, rotor, fluid-structure interaction



# Contenido

	Pág.
<b>1 Introducción .....</b>	<b>19</b>
1.1 Optimización de componentes de turbomáquinas .....	22
1.1.1 Optimización topológica .....	24
1.1.2 Optimización no topológica .....	34
1.2 Problema de investigación .....	38
1.3 Justificación .....	40
1.4 Objetivos .....	44
1.4.1 Objetivo general .....	44
1.4.2 Objetivos específicos .....	44
1.4.3 Alcance .....	44
1.5 Estructura de la tesis .....	45
<b>2 Simulación computacional de turbomáquinas.....</b>	<b>47</b>
2.1 Modelo matemático para turbomáquinas.....	47
2.1.1 Análisis de fluidos: Ecuaciones de Navier-Stokes.....	48
2.1.2 Análisis estructural: Elasticidad lineal .....	51
2.2 Modelo numérico: método de los elementos finitos .....	52
2.2.1 Formulación FEM para flujo viscoso .....	53
2.2.2 Formulación FEM estructural .....	57
2.3 Implementación del método de los elementos finitos.....	59
2.3.1 Selección del tipo de elemento finito.....	59
2.3.2 Funciones de forma para el modelo FEM .....	61
2.3.3 Solución del modelo FEM .....	62
2.3.4 Interacción fluido-estructura.....	63
<b>3 Optimización topológica de componentes de turbomáquinas .....</b>	<b>69</b>
3.1 La optimización en el proceso de diseño.....	69
3.2 El método de optimización topológica .....	74
3.2.1 Formulación TOM estructural.....	79
3.2.2 Formulación TOM para flujo poroso.....	83
3.3 Implementación TOM para interacción fluido-estructura.....	86
3.3.1 Función multiobjetivo .....	91
3.3.2 Solución del problema de optimización .....	94
3.3.3 Análisis de sensibilidad.....	97
3.3.4 Filtros y posprocesamiento del TOM.....	101

<b>4</b>	<b>Resultados .....</b>	<b>107</b>
4.1	Influencia del acoplamiento FSI en dos direcciones (two-way coupling) .....	107
4.2	Verificación del código implementado .....	112
4.2.1	Verificación del código FEM: flujo viscoso .....	112
4.2.2	Verificación del código FEM: interacción fluido-estructura .....	114
4.2.3	Verificación del código TOM: flujo viscoso.....	118
4.3	Resultados TOM para turbomáquinas.....	122
4.3.1	TOM mono-objetivo: Minimización de energía disipada.....	125
4.3.2	TOM multi-objetivo considerando FSI.....	137
4.3.3	Posprocesamiento de rotores de turbomáquinas.....	149
<b>5</b>	<b>Conclusiones y trabajos futuros.....</b>	<b>157</b>
	<b>Bibliografía .....</b>	<b>161</b>

## Lista de figuras

	Pág.
<b>Figura 1-1.</b> Esquema de una bomba centrífuga radial .....	20
<b>Figura 1-2.</b> Topologías de doble canal obtenidas mediante optimización topológica. (a) Diseño final, (b) Campo de presión para una sección de fluido .....	26
<b>Figura 1-3.</b> Rotores diseñados mediante optimización topológica: (a) Campo de velocidad del diseño para mínima disipación de energía, (b) Campo de velocidad del diseño para mínima disipación de energía y vorticidad, (c) Carcasa impresa, (d) Rotor impreso, (e) Ensamble del motor en uno de los prototipos manufacturados.....	27
<b>Figura 1-4.</b> Álabes de turbina optimizados topológicamente. (a) Modelo de elementos finitos, (b) Región de concentración de esfuerzos térmicos .....	28
<b>Figura 1-5.</b> Diseño del rotor de una turbina de gas radial con refrigeración. (a) Resultado de la optimización topológica, (b) Temperatura y recorrido del aire refrigerante .....	29
<b>Figura 1-6.</b> Silenciador de nevera optimizado topológicamente. (a) Dominio de diseño, (b) Comparación entre el diseño optimizado y el de referencia.....	30
<b>Figura 1-7.</b> Álabes de turbina eólica diseñados mediante optimización topológica. (a) Diseño final, (b) Resultados de la optimización topológica .....	31
<b>Figura 1-8.</b> Diseño del rotor de una turbina de gas mediante optimización topológica. (a) Diseño con cargas estáticas y análisis modal, (b) Diseño con celdas con elementos barra, (c) Diseño para mayor velocidad, (d) Diseño con cargas dinámicas de CFD.....	32
<b>Figura 1-9.</b> Pieza de transición de turbina eólica. (a) Ejemplo de pieza de transición real, (b) Resultado de la optimización topológica, (c) Resultado final, después del postprocesamiento .....	33
<b>Figura 1-10.</b> Esquema del motor de turbo-propulsión optimizado con redes neuronales	35
<b>Figura 1-11.</b> Modelo de refrigeración en rotor de turbina de gas. (a) Simplificación de flujo en un canal, (b) Distribución de temperaturas [Kelvin].....	36
<b>Figura 1-12.</b> Resumen del estado del arte (optimización en turbomaquinaria).....	38
<b>Figura 1-13.</b> Problema de investigación y necesidades en el diseño de turbomáquinas	41
<b>Figura 1-14.</b> Justificación del problema de investigación .....	42
<b>Figura 2-1.</b> Esquema de transformación a un marco no inercial de referencia.....	50
<b>Figura 2-2.</b> Interacción fluido estructura. (a) Una vía, (b) Dos vías .....	66

<b>Figura 2-3.</b> Malla ALE para el fluido y Lagrangiana para el sólido, en un único dominio de diseño .....	67
<b>Figura 3-1.</b> Cuatro categorías de optimización estructural: (a) optimización de tamaño, (b) optimización de material, (c) optimización de forma y (d) optimización topológica .....	72
<b>Figura 3-2.</b> Esquema de la implementación de la optimización en un proceso de diseño convencional .....	74
<b>Figura 3-3.</b> Ejemplo de homogenización en optimización topológica: (a) caso 2D, (b) caso 3D .....	75
<b>Figura 3-4.</b> Clasificación de los métodos más comunes de optimización topológica .....	77
<b>Figura 3-5.</b> Ejemplo de optimización topológica utilizando el método SIMP para el diseño de una viga .....	79
<b>Figura 3-6.</b> Dominio de diseño y topología óptima de (a) flujo en tuberías y (b) flujo alrededor de un cuerpo .....	84
<b>Figura 3-7.</b> Problema TOM considerando FSI. Métodos de optimización con contorno fijo y variable (wet-dry optimization) .....	88
<b>Figura 3-8.</b> Algoritmo de optimización topológica .....	98
<b>Figura 3-9.</b> Problemas del TOM con el método de densidades cuando no se utilizan filtros. (a) Escala de grises, (b) Tablero de ajedrez .....	103
<b>Figura 3-10.</b> Filtro de proyección con preservación de volumen .....	104
<b>Figura 4-1.</b> Esquema de la simulación con interacción fluido-estructura en dos vías....	108
<b>Figura 4-2.</b> Campo de velocidad para el fluido y campo de desplazamientos para el sólido, considerando FSI en dos vías .....	109
<b>Figura 4-3.</b> Influencia de la interacción FSI de dos vías sobre la velocidad máxima.....	110
<b>Figura 4-4.</b> Influencia de la interacción FSI de dos vías sobre la presión mínima.....	110
<b>Figura 4-5.</b> Influencia de la interacción FSI de dos vías sobre la vorticidad total .....	111
<b>Figura 4-6.</b> Influencia de la interacción FSI de dos vías sobre el torque total .....	111
<b>Figura 4-7.</b> Campo de velocidad para el problema de flujo viscoso utilizado para verificación del código FEM, según la Tabla 4-1. (a) Código implementado, (b) Software comercial, (c) Romero y Silva (2014), (d) Sá (2016) .....	113
<b>Figura 4-8.</b> Campo de presión para el problema de flujo viscoso utilizado para verificación del código FEM. (a) Código implementado, (b) Software comercial, (c) Romero y Silva (2014), (d) Sá (2016).....	114
<b>Figura 4-9.</b> Esquema de la simulación FSI para el problema de la pared (the wall).....	115
<b>Figura 4-10.</b> Resultados del fluido para el problema benchmark de FEM con FSI. (a) Campo de velocidades, (b) Campo de presiones.....	117
<b>Figura 4-11.</b> Campo de desplazamientos estructurales para el problema benchmark de FEM con FSI. (a) Código implementado, (b) Yoon (2010b).....	118

<b>Figura 4-12.</b> Problema tipo benchmark conocido como el difusor utilizado para verificación del código TOM para flujo viscoso.....	119
<b>Figura 4-13.</b> Resultado de la topología obtenida para el problema conocido como el difusor. (a) Resultado de Borrvall y Petersson (2003), (b) Código implementado de MMA con filtro lineal en variables de diseño, (c) Con filtro de proyección, (d) Campo de velocidad .....	121
<b>Figura 4-14.</b> Esquema del problema de diseño de rotores de turbomáquinas usando TOM – Campo de fluidos para una bomba centrífuga .....	123
<b>Figura 4-15.</b> Esquema del problema de diseño de rotores de turbomáquinas usando TOM y FSI – Campo estructural y FSI para el rotor de una bomba centrífuga.....	124
<b>Figura 4-16.</b> Resultados TOM para el diseño de rotores de turbomáquinas minimizando la disipación de energía. (a) Topología final, (b) Campo de velocidad.....	127
<b>Figura 4-17.</b> Curva de convergencia. TOM para el diseño de rotores de turbomáquinas minimizando la disipación de energía. Configuración de referencia.....	128
<b>Figura 4-18.</b> Resultados TOM para el diseño de rotores de turbomáquinas minimizando la disipación de energía. Linealización del Jacobiano. (a) Topología final, (b) Campo de velocidad .....	130
<b>Figura 4-19.</b> Topologías finales en función del punto de diseño inicial. Disipación de energía en función de $(\alpha e)0$ : (a) 0.25, (b) 0.05, (c) 0.50, (d) 0.95 .....	132
<b>Figura 4-20.</b> Campo de velocidad de las topologías finales en función del punto de diseño inicial. Disipación de energía en función de $(\alpha e)0$ : (a) 0.25, (b) 0.05, (c) 0.50, (d) 0.95 .....	133
<b>Figura 4-21.</b> Topología final considerando $\kappa_{max} = 1 \times 10^4$ y $\beta_{max} = 12.8$ . Función objetivo: disipación de energía .....	135
<b>Figura 4-22.</b> Topología final considerando $\kappa_{max} = 1 \times 10^4$ y $\beta_{max} = 25.6$ . Función objetivo: disipación de energía .....	136
<b>Figura 4-23.</b> Evolución de la flexibilidad en TOM para minimización de energía ( $wd = 1$ y $wr = ws = 0$ ).....	137
<b>Figura 4-24.</b> Evolución de la vorticidad en TOM para minimización de energía ( $wd = 1$ y $wr = ws = 0$ ). (a) Total de iteraciones, (b) A partir de la iteración 40 (mejor escala) .....	139
<b>Figura 4-25.</b> Topología final TOM multiobjetivo y FSI, con $wd = 0.7$ , $wr = 0$ , $ws = 0.3$ .....	140
<b>Figura 4-26.</b> Curva de convergencia para TOM multiobjetivo y FSI, con $wd = 0.7$ , $wr = 0$ , $ws = 0.3$ .....	141
<b>Figura 4-27.</b> Evolución de la disipación de energía para TOM multiobjetivo y FSI, con ponderación $wd = 0.7$ , $wr = 0$ , $ws = 0.3$ .....	141
<b>Figura 4-28.</b> Evolución de la vorticidad para TOM multiobjetivo y FSI, con ponderación $wd = 0.7$ , $wr = 0$ , $ws = 0.3$ . (a) Total de iteraciones, (b) A partir de la iteración 100 (mejor escala) .....	142

<b>Figura 4-29.</b> Evolución de la flexibilidad para TOM multiobjetivo y FSI, con ponderación $w_d = 0.7$ , $w_r = 0$ , $w_s = 0.3$ .....	143
<b>Figura 4-30.</b> Topología final TOM multiobjetivo y FSI, con $w_d = 0.4$ , $w_r = 0.3$ , $w_s = 0.3$ .....	144
<b>Figura 4-31.</b> Curva de convergencia para TOM multiobjetivo y FSI, con $w_d = 0.4$ , $w_r = 0.3$ , $w_s = 0.3$ .....	145
<b>Figura 4-32.</b> Evolución de la disipación de energía para TOM multiobjetivo y FSI, con ponderación $w_d = 0.4$ , $w_r = 0.3$ , $w_s = 0.3$ .....	145
<b>Figura 4-33.</b> Evolución de la vorticidad para TOM multiobjetivo y FSI, con ponderación $w_d = 0.4$ , $w_r = 0.3$ , $w_s = 0.3$ . (a) Total de iteraciones, (b) A partir de la iteración 100 (mejor escala) .....	146
<b>Figura 4-34.</b> Evolución de la flexibilidad para TOM multiobjetivo y FSI, con ponderación $w_d = 0.4$ , $w_r = 0.3$ , $w_s = 0.3$ .....	147
<b>Figura 4-35.</b> Topología final TOM multiobjetivo y FSI, con $w_d = 0.4$ , $w_r = 0.3$ , $w_s = 0.3$ , con fracción volumétrica objetivo de 0.3.....	149
<b>Figura 4-36.</b> Diseños finales de rotores de bombas considerando cinco álabes. (a) Caso 1: Mono-objetivo, (b) Caso 2: Bi-objetivo, (c) Caso 3: Multi-objetivo.....	150
<b>Figura 4-37.</b> Modelo de bomba de pequeña escala para posprocesamiento del diseño del rotor optimizado mediante TOM.....	151
<b>Figura 4-38.</b> Malla de volúmenes finitos para análisis CFD de la bomba de pequeña escala para posprocesamiento del diseño del rotor optimizado mediante TOM .....	152
<b>Figura 4-39.</b> Perfil de presión para el problema de diseño del rotor de una bomba de pequeña escala. (a) Caso 1: Mono-objetivo, (b) Caso 2: Bi-objetivo, (c) Caso 3: Multi-objetivo .....	153
<b>Figura 4-40.</b> Perfil de velocidad para el problema de diseño del rotor de una bomba de pequeña escala. (a) Caso 1: Mono-objetivo, (b) Caso 2: Bi-objetivo, (c) Caso 3: Multi-objetivo .....	154
<b>Figura 4-41.</b> Campo de desplazamientos [mm] y frecuencias naturales de vibración [Hz] para el problema de diseño del rotor de una bomba de pequeña escala. (a) Caso 1: Mono-objetivo, (b) Caso 2: Bi-objetivo, (c) Caso 3: Multi-objetivo .....	155

## Lista de tablas

	Pág.
<b>Tabla 1-1.</b> Búsqueda sistemática del estado del arte de la optimización topológica en turbomáquinas.....	24
<b>Tabla 4-1.</b> Parámetros de la simulación con interacción fluido-estructura en dos vías ..	108
<b>Tabla 4-2.</b> Parámetros de la simulación FSI para el problema de la pared (the wall) ....	116
<b>Tabla 4-3.</b> Parámetros del problema TOM benchmark conocido como el difusor .....	120
<b>Tabla 4-4.</b> Parámetros del problema de diseño de rotores de turbomáquinas usando TOM y modelando FSI .....	125
<b>Tabla 4-5.</b> Parámetros TOM mono-objetivo ( $w_d = 1$ ). Configuración de referencia .....	126
<b>Tabla 4-6.</b> Desempeño de las topologías finales en función del punto de diseño inicial. Disipación de energía.....	131
<b>Tabla 4-7.</b> Desempeño de las topologías finales para TOM multiobjetivo considerando FSI .....	148

## Lista de abreviaturas

Se decide utilizar el listado de abreviaturas en inglés, debido a que dichos términos son más conocidos en la comunidad académica que sus equivalentes en español.

### Abreviatura Término

---

<i>ALE</i>	Arbitrary Lagrangian-Eulerian
<i>BESO</i>	Bidirectional evolutionary structural optimization
<i>BVP</i>	Boundary value problem
<i>CAD</i>	Computer-aided design
<i>CAE</i>	Computer-aided engineering
<i>CNC</i>	Computer numerical control
<i>DP</i>	Dynamic pumps
<i>ESO</i>	Evolutionary structural optimization
<i>FDM</i>	Fused deposition modeling
<i>FSI</i>	Fluid-structure interaction
<i>FEA</i>	Finite element analysis
<i>FEM</i>	Finite element method
<i>FVM</i>	Finite volume method
<i>KKT</i>	Karush–Kuhn–Tucker conditions
<i>LBB</i>	Ladyzhenskaya–Babuska–Brezzi condition
<i>MMA</i>	Method of moving asymptotes

**Abreviatura Término**

---

<i>MEMS</i>	Micro-electro-mechanical systems
<i>NPSH</i>	Net positive suction head
<i>NREL</i>	National renewable energy laboratory
<i>OC</i>	Optimality criteria
<i>PDP</i>	Positive displacement pumps
<i>SIMP</i>	Solid isotropic material with penalization
<i>SLP</i>	Sequential linear programming
<i>SLS</i>	Selective laser sintering
<i>STL</i>	Stereolithography
<i>TOM</i>	Topology optimization method



# 1 Introducción

El término turbomáquina suele utilizarse, de forma general, para aquellos sistemas que agregan energía a un fluido (familia de las bombas) o la extraen (turbinas), y cuyo funcionamiento usualmente se asocia con la rotación de un eje de transmisión. Las primeras de estas se denominan simplemente bombas cuando el fluido es líquido, mientras que si operan con gases, es común clasificarlas en ventiladores, sopladores y compresores, dependiendo del incremento en la presión del fluido.

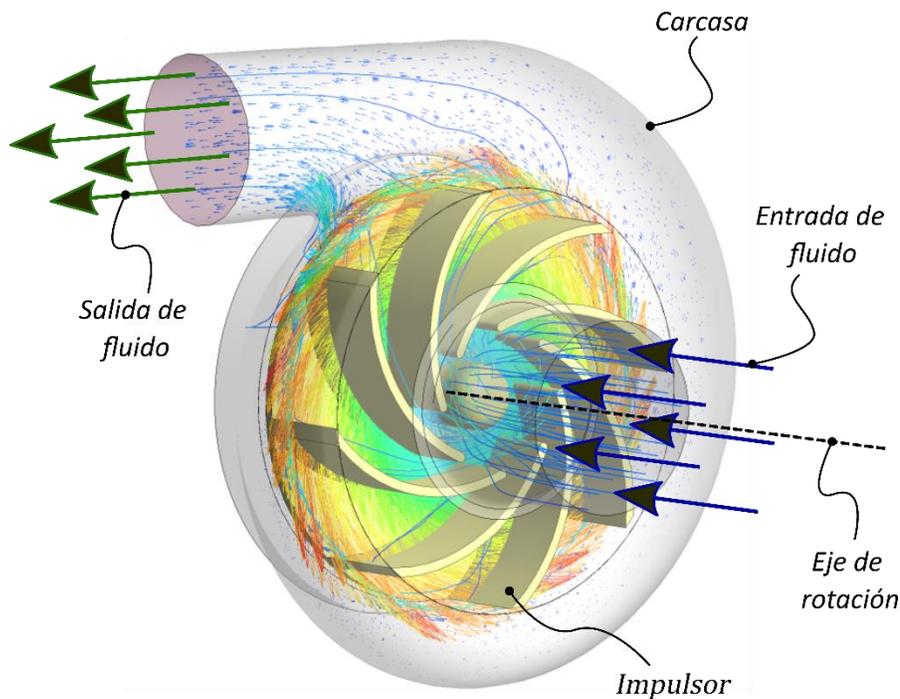
De esta manera, siguiendo la nomenclatura propuesta por White (2011), las bombas se pueden dividir en dos categorías: bombas de desplazamiento positivo (PDP, por sus siglas en inglés) y bombas dinámicas (DP). Una PDP se caracteriza por tener una cámara en la que recibe un volumen de fluido y luego lo comprime para forzarlo a fluir por un camino más restringido, utilizando el cambio de volumen como base para aumentar la presión del fluido. Por su parte, una DP incrementa la cantidad de movimiento (momentum) del fluido mediante la interacción permanente del fluido con elementos mecánicos y luego convierte dicha velocidad en incremento de presión. En el caso de las turbinas, se reconocen dos tipos: las turbinas de reacción y las de impulso. En una turbina de reacción el cambio de presión se genera en su rotor, permitiendo la extracción dinámica del momentum del fluido. Por otro lado, en una turbina de impulso el fluido es forzado a pasar a través de una tobera, en la cual se produce la caída de presión, para que posteriormente el fluido entre en contacto con el rotor de la turbina y transfiera su energía cinética.

De acuerdo a la trayectoria del flujo, las turbomáquinas pueden ser: axiales, cuando el flujo es en su mayoría paralelo al eje de rotación; radiales, si este es perpendicular; o mixtas, si en la zona de la descarga la influencia de las componentes radial y axial de la velocidad del flujo son significativas (S. L. Dixon & Hall, 2014, p. 1). A manera de ejemplo, en la Figura 1-1 se muestra una representación esquemática de una bomba centrífuga radial, en la cual se observa que en la entrada el flujo tiene una dirección paralela al eje de rotación, mientras que a la salida el flujo es rotado 90° respecto a su dirección original. Así,

el componente encargado de cambiar la dirección del flujo, y simultáneamente incrementar la energía mecánica del fluido, es el rotor (para el caso de bombas, se suele utilizar específicamente el término impulsor).

Es así como, a pesar de que la clasificación presentada permite agrupar las turbomáquinas según ciertas características comunes, las necesidades que deben satisfacer son tan diversas que dentro de cada categoría existe una gran cantidad de tipos de máquinas específicas. Por consiguiente, los componentes (entendidos como unidades autónomas que cumplen una función específica (Schobeiri, 2012, p. 341)) que constituyen cada máquina varían de una a otra, abriendo múltiples posibilidades a la optimización de los diseños, incluyendo, entre otras, modificaciones sobre el rotor, álabes, ductos, toberas, dosificadores, difusores, acoples, carcasa, piezas de soporte, ejes de transmisión y cojinetes.

**Figura 1-1.** Esquema de una bomba centrífuga radial



Adicionalmente, el diseño de cada componente se suele abordar desde múltiples perspectivas, por ejemplo, en la selección de materiales, parámetros de operación (Baklacioglu, Turan, & Aydin, 2015), características geométricas (Baloni, Pathak, & Channiwala, 2015; Jafarzadeh, Hajari, Alishahi, & Akbari, 2011; Shojaeefard, Tahani,

Ehghaghi, Fallahian, & Beglari, 2012), mecanismos de ensamble y procesos de manufactura (Lee et al., 2016); todo condicionado por restricciones como eficiencia, costo de producción, impacto ambiental, sostenibilidad, mantenimiento y vida útil. Debe destacarse que, de acuerdo al componente que es considerado en un diseño particular, la física del problema puede cambiar, incluyendo fenómenos magnéticos, térmicos, estructurales, de fluido mecánica, de vibraciones y eléctricos.

Asimismo, cada problema de diseño con turbomáquinas tiene asociado un flujo con características particulares, las cuales usualmente son adaptadas para simplificar la modelación. El presente trabajo se concentra en turbomáquinas que trabajan con fluidos en estado líquido y bajo el supuesto de incompresibilidad (densidad del fluido independiente de su presión). En términos generales, el desempeño de una turbomáquina parte del análisis de la energía mecánica en el sistema, pues esta se relaciona directamente con el trabajo externo. Es así como, asumiendo que la densidad del fluido es constante, la forma más básica para la energía mecánica  $E_m$  en una turbomáquina (para flujo unidimensional en un ducto) se muestra en la Ecc. 1 (Dick, 2015, p. 12).

$$E_m = \frac{1}{2}u^2 + \frac{p}{\rho} + U \quad \text{Ecc. 1}$$

Donde

- $u$  → velocidad
- $p$  → presión
- $\rho$  → densidad del fluido
- $U$  → energía potencial gravitacional

De esta manera, a pesar de que el cálculo energético para una turbomáquina específica puede implicar relaciones mucho más complejas, la expresión anterior permite identificar que el flujo de energía en este tipo de máquinas se enfoca en las componentes de la velocidad (energía cinética) y de la presión (entalpía). Así, dichas componentes definen la energía interna del fluido y, a través del balance termodinámico, esta se relaciona con el trabajo externo del eje de transmisión. Esta relación es de gran importancia, puesto que permite calcular las pérdidas energéticas que se producen en la turbomáquina, definiendo finalmente su eficiencia.

Al considerar los diversos métodos de optimización, el método de optimización topológica destaca por su versatilidad para ajustarse a las necesidades del diseño de turbomáquinas.

Recientemente, se ha demostrado el potencial de implementar optimización topológica en el diseño de rotores de turbomáquinas de flujo radial (Romero & Silva, 2014), por lo que la presente investigación se concentra en este tipo de máquinas. En especial, en el presente trabajo se propone realizar un estudio integral que no considere exclusivamente la optimización de las condiciones del flujo (como disipación de energía, vorticidad y potencia mecánica), sino que introduzca la relación estructural rigidez-peso, mediante la modelación de la interacción fluido-estructura, uno de los campos centrales en el diseño de turbomaquinaria (Shah, Jain, Patel, & Lakhera, 2013).

Adicionalmente, aunque no es suficiente describir una turbina simplemente asumiendo que es una “bomba operando a la inversa”, la diferencia más relevante entre ambas turbomáquinas corresponde a la dirección de flujo de la energía (desde el eje de transmisión hacia el fluido, en el caso de las bombas, y el camino opuesto, para las turbinas), permitiendo que la fundamentación del problema se construya de manera genérica. Consecuentemente, la priorización de cada uno de los objetivos a optimizar depende de cada aplicación particular. Por ejemplo, si se analiza el caso de bombas de asistencia ventricular, tiene más peso la vorticidad del fluido que las restricciones estructurales, pues es un factor determinante en la conservación de la calidad de la sangre; sin embargo, si se considera una turbina para generación eléctrica, factores como la eficiencia y la vida a la fatiga cobran más importancia.

Bajo este contexto, las próximas secciones de este capítulo introductorio se concentran en la revisión del estado del arte asociado a la optimización de componentes de turbomáquinas, con un claro énfasis en el método de optimización topológica. Luego, se describe el problema de investigación, justificado a partir de los hallazgos de dicha revisión bibliográfica. Posteriormente, se sintetiza el alcance de los objetivos de esta tesis de maestría.

## **1.1 Optimización de componentes de turbomáquinas**

El método de optimización topológica se ha implementado en los procesos de diseño de algunos componentes de turbomaquinaria o en aplicaciones similares en las que se busca la modelación de algunos de los fenómenos presentes en este tipo de máquinas. No obstante, debe tenerse en cuenta que, debido a la complejidad en la simulación de estos fenómenos, algunos autores han decidido utilizar herramientas de optimización

paramétrica (de tamaño y forma) y algoritmos de programación heurística, puesto que permiten realizar una conexión directa con resultados de la evaluación experimental de algún equipo en funcionamiento. Es así como, el abordaje utilizado para la identificación de los trabajos más relevantes para el propósito de esta investigación, parte de una búsqueda sistemática en la base de datos Scopus (Elsevier, 2019), utilizando diferentes palabras clave, las cuales permiten reconocer las investigaciones publicadas que se relacionan con el diseño de turbomáquinas, su optimización y la implementación del método de optimización topológica.

En la Tabla 1-1 se presenta el número de publicaciones encontradas para cada combinación de palabras. Es necesario destacar que, para simplificar la representación, en esta tabla el término *turbomachine* incluye: *turbomachinery*, *turbine*, *pump*, *compressor*, *blower* y *fan*; y los correspondientes a sus componentes: *rotor*, *propeller*, *blade*, *volute*, *carcass* y *bearing*. Además, no solo se muestra el total de las publicaciones, sino que se aplica un filtro para conservar solo aquellas de los últimos 5 (cinco) años (a partir del año 2014). Las columnas están divididas en T-K-A y T-K, donde T corresponde al título, K a las palabras clave y A al resumen. Esta clasificación surge de la dificultad asociada al encuentro de publicaciones que poseen las palabras de búsqueda en alguna sección del resumen en la que son mencionadas sin ser el centro de la investigación. Situación que es frecuente, por lo que es necesario destacar que en realidad el número de investigaciones directamente asociadas al tema de la presente tesis es menor que el de las cifras mostradas.

Así, en la Tabla 1-1 se puede observar que el número de publicaciones relacionadas con la optimización de turbomáquinas es significativo, lo cual refleja la importancia de este campo de investigación. Sin embargo, el número de trabajos propios de optimización topológica en turbomáquinas representa una fracción baja del total de estas investigaciones (inferior al 1%), poniendo en evidencia que es un tema de vanguardia, innovador y con un alto potencial para seguir siendo explorado. Por otro lado, es de destacar que, al considerar la optimización topológica en turbomáquinas, incluyendo las palabras fluido (o flujo), el número de resultados cae drásticamente (en más del 50%), lo cual proviene del hecho de que la optimización topológica de estructuras ha sido mucho más aplicada que la de fluidos. Además, se resalta la situación presente en el caso de las turbinas, para las cuales la implementación de la optimización topológica se ha concentrado en la industria eólica (casi el 60%).

A continuación, se presentan algunos estudios para los que se considera existe una relación directa con la investigación propuesta, específicamente, que implementan la optimización topológica en el diseño de componentes de turbomáquinas. Adicionalmente, se mencionan algunas investigaciones que, a pesar de no utilizar optimización topológica, permiten identificar algunos campos potenciales de trabajo relacionados con la optimización en turbomaquinaria.

**Tabla 1-1.** Búsqueda sistemática del estado del arte de la optimización topológica en turbomáquinas

Criterio de búsqueda	Total		Últimos 5 años	
	T-K-A*	T-K	T-K-A	T-K
<i>Design &amp; Turbomachine</i>	152493	54957	42529	15048
<i>Optimization &amp; Turbomachine</i>	43038	23656	16695	9017
<i>Design &amp; Optimization &amp; Turbomachine</i>	20592	7857	7932	2822
<i>Topology optimization</i>	9068	7393	4269	3481
<i>Design &amp; Topology optimization</i>	6882	3649	3195	1573
<i>Topology optimization &amp; (Fluid OR Flow)</i>	792	416	436	235
<i>Topology optimization &amp; Turbomachine</i>	168	78	107	52
<i>Topology optimization &amp; Turbomachine &amp; (Fluid OR Flow)</i>	79	15	57	15
<i>Design &amp; Topology optimization &amp; Turbomachine</i>	127	39	79	24
<i>Topology optimization &amp; (Rotor OR Propeller)</i>	117	50	75	37
<i>Topology optimization &amp; Turbine</i>	96	29	64	22
<i>Topology optimization &amp; Wind turbine</i>	57	15	34	9
<i>Topology optimization &amp; Pump</i>	40	21	27	14

\* T: Título (Title), K: Palabras clave (Keywords), A: Resumen (Abstract)

**Fuente:** Resultados obtenidos de la base de datos Scopus (Elsevier, 2019)

### 1.1.1 Optimización topológica

Los métodos de optimización estructural suelen ser clasificados en cuatro categorías (Ole Sigmund, 2000): optimización de tamaño, de material, de forma y topológica. En la primera categoría, la optimización de tamaño, se parte de que se conoce el diseño general de la estructura y se desea definir el valor óptimo de algunas de las características geométricas (por ejemplo, longitud, diámetro, radio de redondeo o área de sección transversal). En la optimización de material se busca la combinación de propiedades que ofrece el mejor desempeño en una condición de carga establecida, en especial, es de utilidad para determinar la orientación y el espesor de las capas de materiales compuestos o la composición de materiales funcionalmente gradados (Miyamoto, Kaysser, Rabin, Kawasaki, & Ford, 1999). La optimización de forma parte de un dominio de diseño inicial y

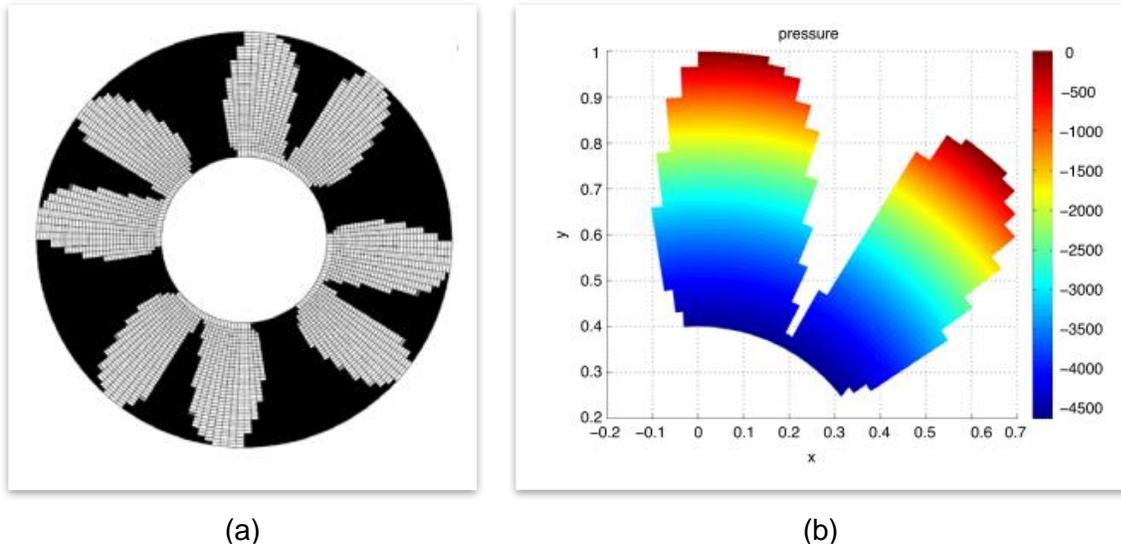
se concentra en la modificación de sus fronteras. Finalmente, la optimización topológica resuelve el problema de distribución de cierta cantidad de material en un dominio de diseño, tal que el desempeño, medido mediante una función objetivo, sea optimizado (Ole Sigmund, 2000); de tal manera que se determina la cantidad, conectividad, forma y ubicación de las regiones en las cuales la presencia de material no mejora el valor de la variable de respuesta (vacíos) (Deaton & Grandhi, 2014). Adicionalmente, debido a que la optimización topológica no necesita partir de un diseño definido, permite encontrar soluciones novedosas, puesto que son independientes de los paradigmas adoptados para cada problema de diseño (Campelo, Ram, & Igarashi, 2010).

Romero y Silva (2014) implementaron el método de optimización topológica en el diseño del rotor de máquinas de flujo radial, mediante la optimización de la forma del espacio entre dos aletas. El análisis numérico se aplicó para predecir el campo de flujo en el dominio de diseño y considerando una función multiobjetivo que incluía la minimización de la disipación de energía y de la vorticidad y la minimización (en el caso de bombas) o maximización (para turbinas) de la potencia mecánica. El método de los elementos finitos fue empleado para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes, considerando flujo laminar. El problema de optimización fue resuelto utilizando un algoritmo basado en el método de asíntotas móviles. Los resultados obtenidos por dichos autores permitieron observar una dependencia del diseño final del rotor respecto a los parámetros del algoritmo de optimización y la geometría de referencia de partida (aleta recta, curva o involuta). Para el caso de los impulsores de bombas, algunas de las geometrías encontradas permitieron alcanzar un incremento en la potencia entre el 5% y el 23%; sin embargo, reflejaron simultáneamente un aumento en la disipación de energía (36%-183%) y la vorticidad (38%-75%). Finalmente, el mejor desempeño fue el correspondiente a los diseños de doble canal, pues tuvieron el mejor balance entre los tres objetivos planteados (disminución en disipación de energía del 19%, vorticidad del 21% y potencia del 6%). En la Figura 1-2 se presenta una de las topologías de doble canal, en conjunto con el campo de presión del fluido, de tal manera que la región negra corresponde a la parte sólida y la blanca a la del fluido.

Romero y Silva (2016) extendieron este estudio al incluir la modelación de un fluido no-newtoniano (como es el caso de la sangre), de tal manera que la viscosidad no es constante sino que depende de la velocidad del fluido. Los diseños obtenidos mediante optimización topológica para estas condiciones condujeron a una reducción significativa

en la vorticidad del flujo, la cual tiene una relación directa con el índice de hemólisis (utilizado para medir la degradación de la sangre), demostrando así que la metodología adoptada puede ser empleada de manera exitosa para el diseño de componentes de bombas para asistencia ventricular.

**Figura 1-2.** Topologías de doble canal obtenidas mediante optimización topológica. (a) Diseño final, (b) Campo de presión para una sección de fluido



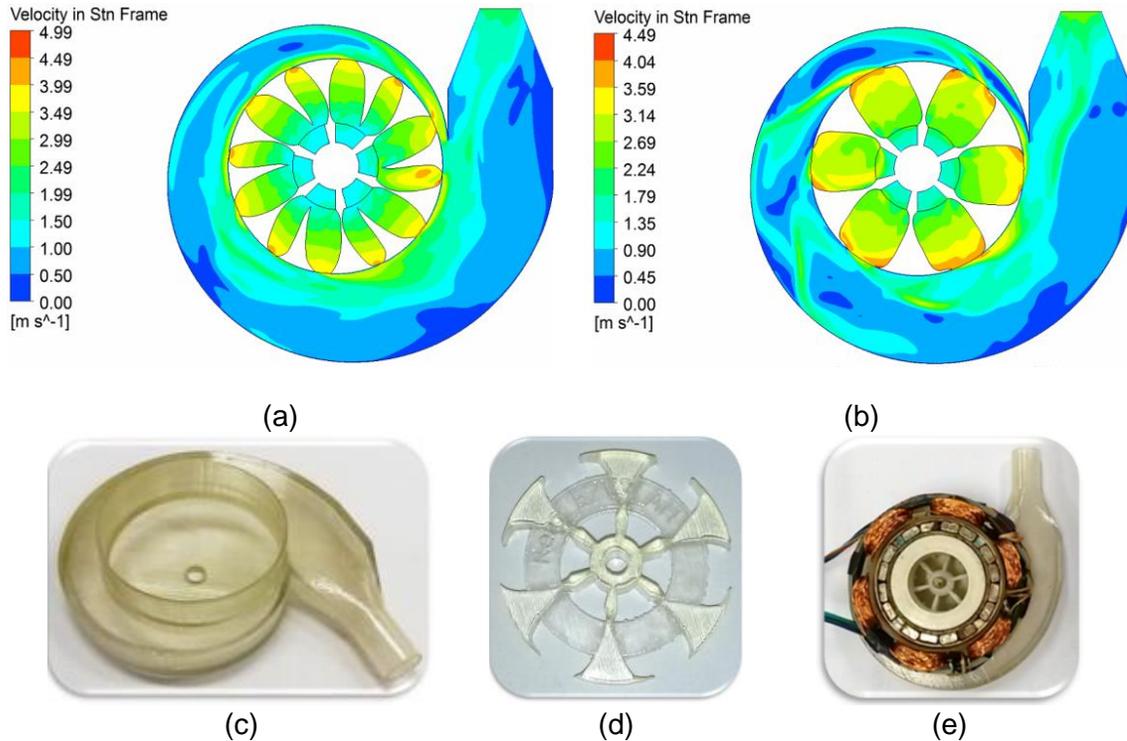
**Fuente:** Tomado de (Romero & Silva, 2014, pp. 289, 291)

Tomando como base el avance de Romero y Silva (2014), Sá (2016) continuó con la obtención de diseños optimizados para el rotor de turbomáquinas utilizando optimización topológica (versión preliminar publicada en (Sá, Romero, Silva, & Horikawa, 2015)). El modelo considerado por dicho autor partió de la formulación débil del problema y utilizó el software FEniCS (Alnæs et al., 2015) para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales parciales, propias del método de los elementos finitos. Debido a que los tres objetivos mencionados arrojaron una relación tipo Pareto (la mejora en una variable de diseño puede implicar un detrimento en otra de las variables), Sá obtuvo diferentes diseños dependiendo del objetivo al que le daba mayor peso. Así, se concentró en el diseño de un rotor solo para minimizar la disipación de energía y otro combinando minimización de disipación de energía y de vorticidad. Adicionalmente, este autor manufacturó dichos prototipos empleando una impresora 3D, de tal modo que construyó un montaje experimental que permitió validar los modelos computacionales (Figura 1-3). De este modo, los rotores optimizados topológicamente permitieron obtener una menor disipación de energía (mejora de hasta un 68%) y vorticidad (reducción de hasta un 62%), lo cual se tradujo además en

bombas con mayor eficiencia (consumo energético de hasta un 12% menor). Estos resultados presentados y complementados con un análisis de convergencia en Sá, Romero, Horikawa, & Silva (2018).

Posteriormente, Sá, Novotny, Romero, & Silva (2017) complementaron este trabajo introduciendo el concepto de derivada topológica en el algoritmo de optimización, lo cual, si bien los llevó a obtener diseños similares a los de Romero y Silva (2014), les permitió modelar con mayor precisión la interfaz fluido-sólido, evitando densidades intermedias (escala de grises) en la topología final.

**Figura 1-3.** Rotores diseñados mediante optimización topológica: (a) Campo de velocidad del diseño para mínima disipación de energía, (b) Campo de velocidad del diseño para mínima disipación de energía y vorticidad, (c) Carcasa impresa, (d) Rotor impreso, (e) Ensamble del motor en uno de los prototipos manufacturados

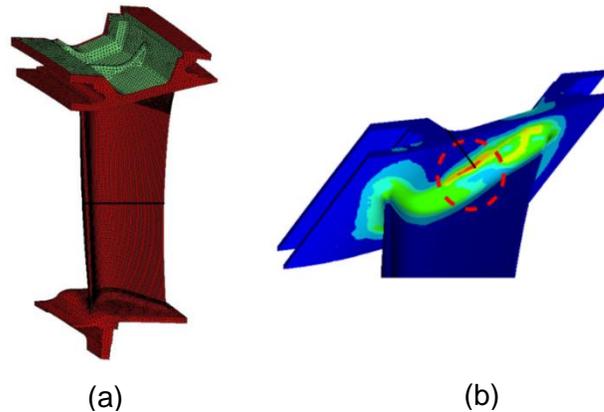


**Fuente:** Tomado de (Sá, 2016)

Otra aplicación de la optimización topológica al diseño de componentes de turbomáquinas fue realizada por Seppälä y Hupfer (2014), quienes rediseñaron los álabes del rotor de una turbina de gas a baja presión con aplicación en aeronáutica. El abordaje implementado tuvo como función objetivo la disminución del peso de la estructura y la minimización de la

flexibilidad, con restricciones en los desplazamientos y en las primeras frecuencias naturales de vibración. Aunque se lograron diseños con reducciones en peso de hasta 19%, se reflejó un incremento en los esfuerzos del 5% en la zona entre el cuerpo de la aleta y la guía exterior, región que tuvo un aumento en la temperatura del 58% (Figura 1-4). Por lo que se resalta la necesidad de incluir restricciones de esfuerzos en la búsqueda de una solución compromiso. Aunque los autores observan cierto potencial en la implementación de optimización topológica para el diseño de este tipo de componentes, considerando incluso la posibilidad de manufactura mediante impresión 3D, concluyen que es necesario analizar nuevamente el método de optimización empleado, incluyendo el efecto de la temperatura como una restricción adicional en la formulación del problema.

**Figura 1-4.** Álabes de turbina optimizados topológicamente. (a) Modelo de elementos finitos, (b) Región de concentración de esfuerzos térmicos

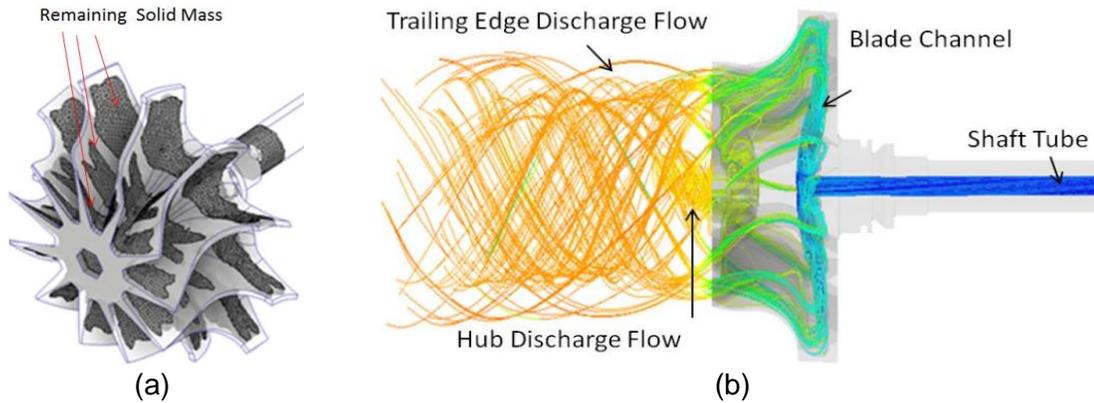


**Fuente:** Tomado de (Seppälä & Hupfer, 2014)

Zhang et al. (2018) diseñaron el rotor de una turbina de gas radial, de tal manera que el método de optimización topológica les permitió definir el camino óptimo para que un flujo de aire proveniente del compresor acoplado a la turbina refrigerara los álabes del rotor. El rotor fue sometido a simulaciones térmicas, aerodinámicas y estructurales para analizar su desempeño (en términos de esfuerzos y temperaturas). Adicionalmente, se utilizó el método de fundición con láser selectiva (SLM) para manufacturar el rotor y construir un montaje experimental que replicara las condiciones del modelo. El diseño final resultó un 25% más liviano y con una reducción en la temperatura máxima de 110K. A pesar de que el flujo adicional del refrigerante originó una caída en la eficiencia del sistema del 1.4%, un análisis termodinámico permitió demostrar que esto puede ser compensado mediante el

incremento de la temperatura del fluido en la entrada de la turbina, lo cual es posible gracias al mecanismo de refrigeración (ver Figura 1-5).

**Figura 1-5.** Diseño del rotor de una turbina de gas radial con refrigeración. (a) Resultado de la optimización topológica, (b) Temperatura y recorrido del aire refrigerante

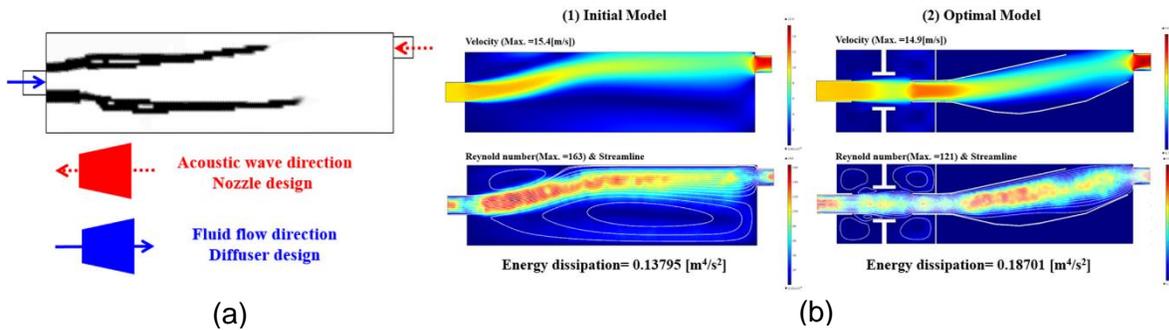


**Fuente:** Tomado de (Zhang et al., 2018)

Oh, Wang y Cho (2016) implementaron el método de optimización topológica en el diseño de un silenciador para la succión del compresor de una nevera. En su abordaje, estos autores no solo tuvieron como función objetivo la minimización de la caída de presión y del ruido en dicho equipo (objetivos del diseño tradicional), sino que utilizaron la modelación acústica para incrementar la eficiencia de la máquina, mediante el aumento de la impedancia acústica a través de pulsaciones de presión, provenientes de la vibración del silenciador a su frecuencia natural.

De esta manera, la metodología implementada permitió adquirir diseños cumpliendo las restricciones de optimización; esto es, con una frecuencia natural de vibración entre 338Hz y 350Hz (partiendo de que la frecuencia objetivo era de 340Hz), un incremento de la pérdida por transmisión (disminución de ruido) de hasta el 25% en bajas frecuencias (750Hz-1100Hz) y de hasta el 190% en altas frecuencias (4500Hz-8000Hz) y un incremento en la energía disipada que se considera aceptable (36%), teniendo presente que la satisfacción de las demás condiciones puede generar topologías con un aumento en este parámetro superiores al 400%. En la Figura 1-6 se muestra el dominio de diseño del silenciador, en donde la parte blanca corresponde a la cavidad y la negra a los elementos estructurales. Adicionalmente, se presentan los resultados de las simulaciones de fluidos realizadas para verificar el diseño final, comparando su desempeño contra un diseño de referencia.

**Figura 1-6.** Silenciador de nevera optimizado topológicamente. (a) Dominio de diseño, (b) Comparación entre el diseño optimizado y el de referencia

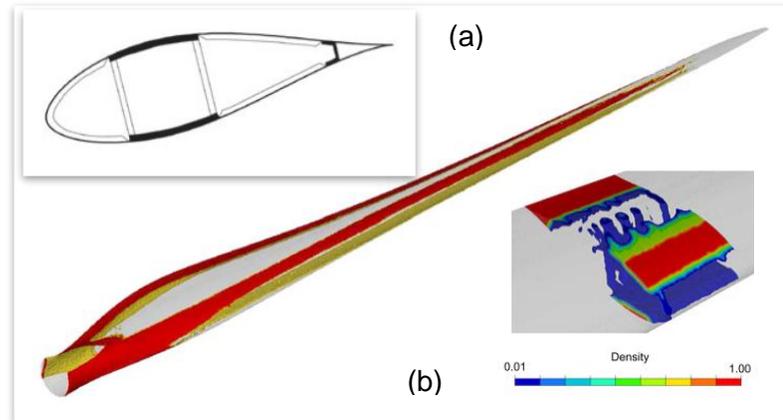


**Fuente:** Tomado de (Oh et al., 2016)

Buckney, Green, Pirrera y Weaver (2012) investigaron configuraciones estructurales alternativas para el rotor de turbinas eólicas, con el objetivo de incrementar la eficiencia de dicha fuente de generación eléctrica. Así, el principal argumento empleado por dichos autores es el hecho de que las turbinas eólicas tienen una tendencia de incremento en su tamaño, puesto que la potencia eléctrica generada aumenta con el cuadrado de la longitud de las aspas (lo cual representa beneficios de manufactura y económicos); sin embargo, la masa incrementa con el cubo de la longitud y, por lo tanto, se reduce la eficiencia estructural, como consecuencia de cargas mayores.

Así, para una de las aspas del rotor de una turbina de 3MW y 45m de radio, se exploraron como funciones objetivo la minimización de volumen con restricciones de esfuerzos y, por otro lado, la maximización de rigidez con restricciones de volumen (12.5% del volumen total de la región de diseño). Los materiales considerados durante el diseño fueron laminados de fibra de vidrio y de carbono y espumas poliméricas de diferentes densidades. Los resultados de la optimización topológica permitieron identificar la necesidad de utilizar algunos soportes internos (tipo costilla) para mejorar la integridad estructural de la turbina, logrando una reducción en peso del 13.8% (Figura 1-7). Posteriormente, una de las secciones del álabe optimizado fue analizado con mayor detalle mediante optimización paramétrica (de tamaño), lo cual permitió obtener configuraciones que permitían alcanzar la reducción de peso mencionada y simultáneamente satisfacer restricciones de falla estática, por fatiga, por pandeo y por deflexión.

**Figura 1-7.** Álabes de turbina eólica diseñados mediante optimización topológica. (a) Diseño final, (b) Resultados de la optimización topológica

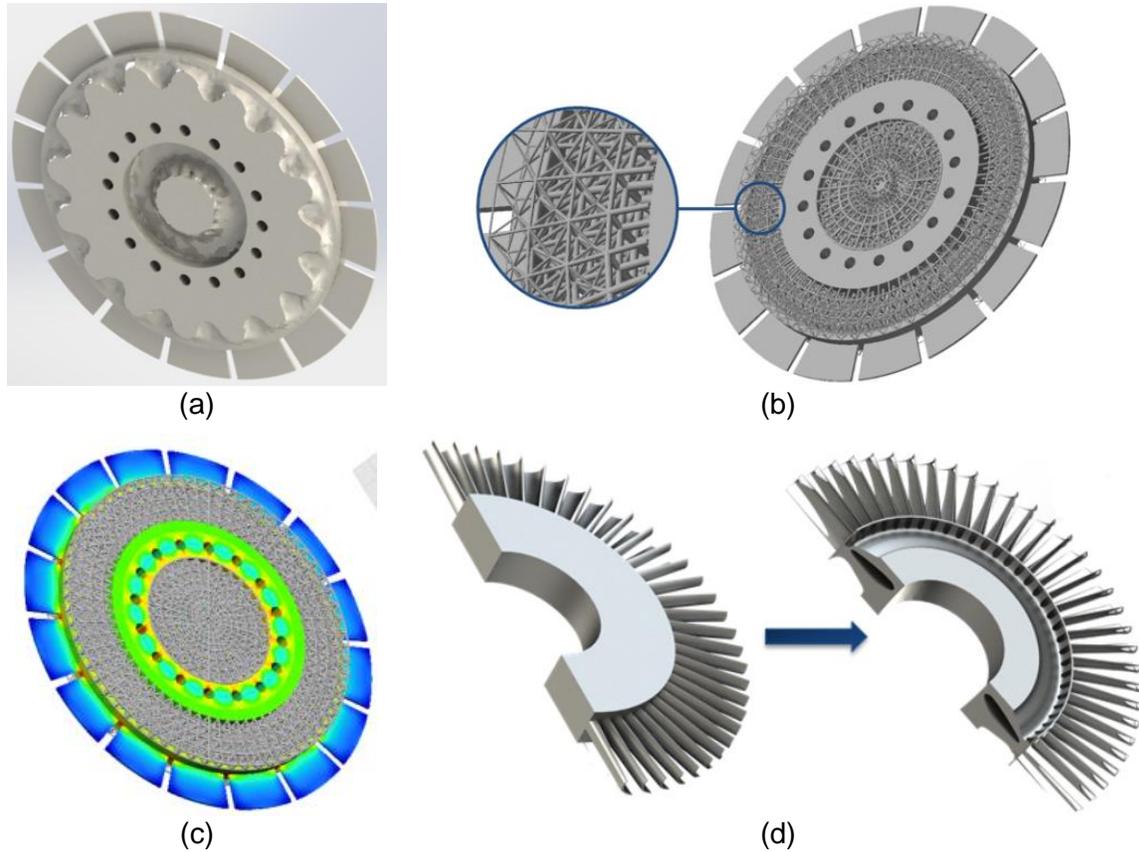


**Fuente:** Tomado de (Buckney et al., 2012)

Rindi et al. (2016) implementaron optimización topológica en el rediseño de un disco del rotor de una turbina de gas (componente unido al eje y que soporta los álabes) desde un punto de vista estructural; esto es, considerando en la función objetivo la minimización de peso, la maximización de rigidez y la modificación de las frecuencias naturales de vibración (para alejarlas de las frecuencias de operación y evitar resonancia). Dentro del modelo, aplicaron una carga estática asociada a la fuerza centrífuga producto de una rotación a 10,200 rpm. El diseño final se tradujo en una reducción de 16% en peso y una mejora del 63% en el margen de seguridad de las frecuencias naturales de vibración. Posteriormente, Boccini et al. (2017) complementaron este trabajo al introducir una segunda etapa de optimización topológica en la que los elementos finitos con densidades intermedias fueron sustituidos por celdas estructurales conformadas por elementos barra, logrando una reducción en el esfuerzo máximo de un 7%.

Asimismo, Boccini, Meli, Rindi, Corbò e Iurisci (2017) utilizaron el resultado anterior para incrementar la velocidad nominal del rotor hasta 11,040 rpm (8% mayor) conservando la reducción en el esfuerzo máximo de un 6%. Boccini et al. (2018) incluyeron cargas armónicas calculadas mediante dinámica de fluidos computacional y permitiendo diseñar un rotor con un peso 42% menor que el de referencia y con menores esfuerzos y desplazamientos en la punta de los álabes (ver Figura 1-8).

**Figura 1-8.** Diseño del rotor de una turbina de gas mediante optimización topológica. (a) Diseño con cargas estáticas y análisis modal, (b) Diseño con celdas con elementos barra, (c) Diseño para mayor velocidad, (d) Diseño con cargas dinámicas de CFD

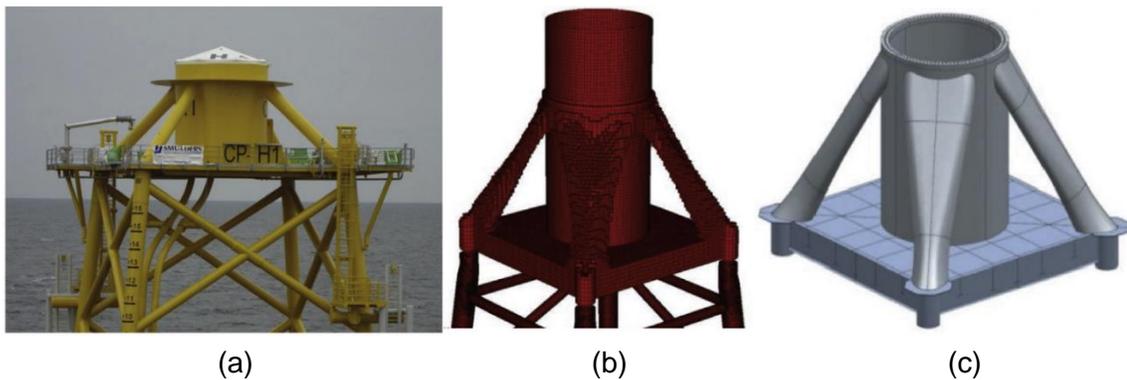


**Fuente:** Tomado de (a) (Rindi et al., 2016), (b) (Boccini, Meli, Rindi, Falomi, et al., 2017), (c) (Boccini, Meli, Rindi, Corbò, et al., 2017), (d) (Boccini et al., 2018)

Lee et al. (2016) incluyeron optimización topológica en el proceso de diseño de la pieza de transición de una estructura de soporte tipo camisa de una turbina eólica instalada mar adentro; esto es, la pieza que une la turbina con la estructura tipo cercha que se fija al lecho marino. Así, estos autores tomaron como referencia una turbina de 5MW desarrollada como prototipo por el Laboratorio Nacional de Energía Renovable (NREL), ubicado en Colorado (Estados Unidos) y las condiciones de operación de Yellow Coast, cerca de la costa suroccidental de la República de Corea. El diseño final resultó 7.4% más liviano que uno diseñado mediante metodologías tradicionales, reduciendo los esfuerzos máximos en casi 15% y disminuyendo el número de piezas y de juntas soldadas (Figura 1-9). Adicionalmente, la estructura final fue sometida a un análisis de fatiga, partiendo de una vida útil de 20 años de operación, de tal manera que se obtuvo una mejora en la vida a la fatiga entre dos y cuatro veces, respecto al diseño convencional. Aunque la

metodología de diseño que implementaron puede ser ajustada a diferentes condiciones del lugar de instalación, obteniendo un diseño con las mejoras descritas, Lee et al. afirman que es necesario que el diseño final sea evaluado desde el punto de vista de la estandarización en la manufactura y los beneficios económicos, pues la geometría optimizada representa mayor dificultad en la fabricación que la convencional.

**Figura 1-9.** Pieza de transición de turbina eólica. (a) Ejemplo de pieza de transición real, (b) Resultado de la optimización topológica, (c) Resultado final, después del postprocesamiento



**Fuente:** Tomado de (Lee et al., 2016)

Tsai y Cheng (2012) exploraron la posibilidad de diseñar volantes para baterías electro-mecánicas mediante el método de optimización topológica. La optimización se concentró en la maximización de la primera frecuencia de vibración torsional, del momento de inercia y de la rigidez. Cuando los dos primeros objetivos fueron considerados simultáneamente, se logró un incremento en la primera frecuencia de vibración torsional de 18% (de 645Hz a 761.1Hz) y una reducción en el momento de inercia del 9%. No obstante, al considerar como función objetivo la maximización de la rigidez, se tuvo un detrimento en los valores de los otros dos objetivos que alejaron el resultado de ser óptimo. De esta manera, los autores concluyen que es necesario realizar futuras investigaciones que integren satisfactoriamente los fenómenos descritos.

Hahn y Cofer (2014) mezclaron la optimización paramétrica con el método de optimización topológica (no paramétrica) para obtener el diseño de un sistema conformado por la carcasa, los cojinetes y el eje de transmisión de una máquina rotativa genérica (no se concentraron, por ejemplo, en el rotor de una turbina o compresor específico, sino que partieron de un diseño no particular). Con esto, los autores concluyeron que, si la carcasa

del sistema tiene una frecuencia de vibración comparable con la de los componentes rotativos, es necesario considerarla dentro del proceso de optimización paramétrica.

Liu y Wei (2014) utilizaron el método de optimización topológica para diseñar la conexión entre dos bombas en paralelo, empleadas para la extracción subterránea de fluidos con alta viscosidad. Los autores partieron de que, debido a que la potencia de este tipo de bombas puede representar entre 1/3 y 1/2 de la potencia total requerida para la estación de bombeo, un incremento en su eficiencia (que usualmente se encuentra entre 75% y 80%) se traduciría en una contribución significativa a la conservación energética y la reducción de emisiones. Así, el diseño optimizado de la conexión permitió reducir la resistencia del fluido en un 73% e incrementar la tasa de bombeo en más del 6%.

Por otro lado, diferentes trabajos se encuentran en los que se implementa el método de optimización topológica en conjunto con la modelación de fenómenos electromagnéticos para incrementar la eficiencia de motores eléctricos, mediante la modificación de la geometría y ubicación de los componentes del rotor y del estator (ver por ejemplo el trabajo de Hermann, Mijatovic, & Henriksen (2016) y el de Ishikawa, Mizuno, & Krita (2017)).

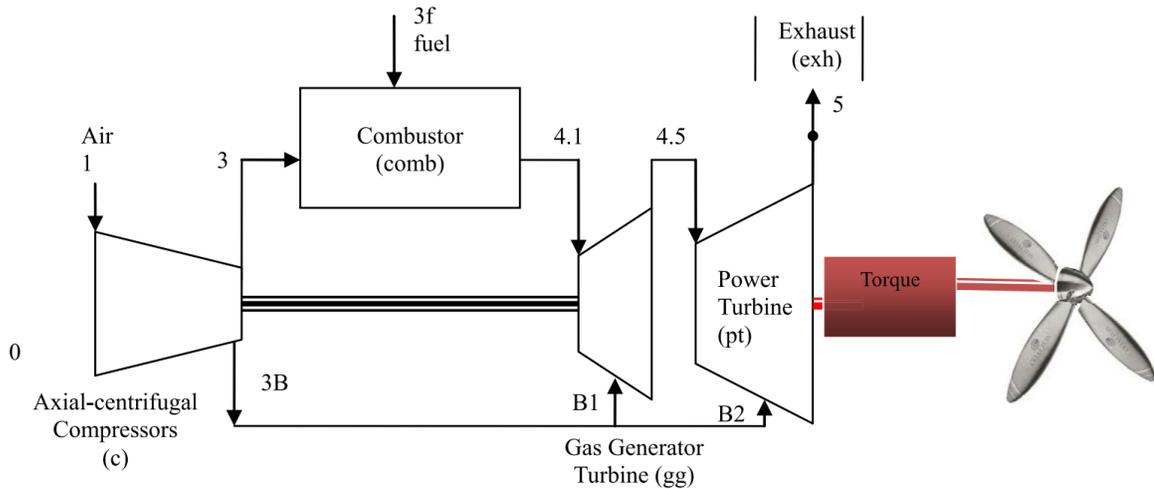
### **1.1.2 Optimización no topológica**

La optimización de componentes de turbomaquinaria no se ha limitado al uso de métodos de programación matemática, también se pueden encontrar estudios como el desarrollado por Baklacioglu, Turan y Aydin (2015), quienes optimizaron la topología de una red neuronal artificial utilizando algoritmos genéticos en el modelamiento de la eficiencia exergética de los componentes de un motor de turbo-propulsión de la industria aeronáutica (Figura 1-10). Los parámetros de entrada del modelo fueron el torque, la potencia, la velocidad del generador de gas, el flujo de aire en el motor y el flujo másico de combustible. Así, se generaron 206 configuraciones de parámetros que arrojaron como resultado la eficiencia exergética de la cámara de combustión (76%-82%), del compresor (83%-85%), de la turbina de gas para transmisión al compresor (92%-98%) y la turbina de potencia (90%-95%).

De esta manera, los autores desarrollaron una herramienta que, no solo les permitió identificar que el componente más crítico desde el punto de vista exergético (con las mayores pérdidas) era la cámara de combustión, sino que se convierte en el punto de partida para optimizar el desempeño de este tipo de máquinas, a partir de mediciones

sobre equipos operativos. Trabajos similares pueden encontrarse también para otro tipo de turbomáquinas, como es el caso de Kilchyk, Senay y Abdelwahab (2017), quienes implementaron un algoritmo de optimización para incrementar la eficiencia de compresores centrífugos incorporando información de entrada probabilística, reflejando condiciones reales de operación y originando diseños robustos a cambios en las condiciones operativas.

**Figura 1-10.** Esquema del motor de turbo-propulsión optimizado con redes neuronales



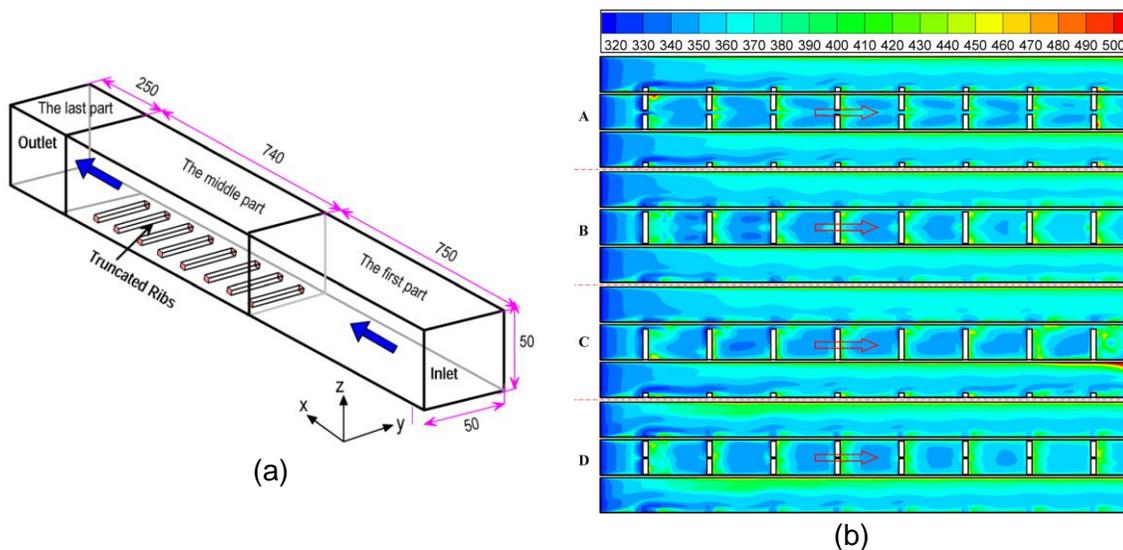
**Fuente:** Tomado de (Baklacioglu et al., 2015)

Baloni, Pathak y Channiwala (2015) utilizaron el diseño de experimentos de Taguchi para optimizar los parámetros geométricos de la voluta de la carcasa de una máquina sopladora. Inicialmente, consideraron cuatro variables: ancho de la voluta, ángulo de la zona más estrecha, área de la zona más ancha y ubicación radial de la sección transversal de la voluta. La optimización se concentró en la maximización de la presión total y la minimización de la variación de la presión estática a la salida del impulsor y de la pérdida de presión en el interior de la voluta. Mediante un análisis de sensibilidad, se identificó que el área de la zona más ancha de la voluta no tenía influencia sobre las variables de respuesta. Con los tres factores resultantes (ancho de la voluta, ángulo de la zona más estrecha y ubicación radial de la sección transversal de la voluta), cada uno con tres niveles (seleccionados de manera distribuida casi uniformemente en un intervalo definido a partir de parámetros encontrados en equipos operativos), se realizaron nueve modelos de dinámica de fluidos computacional para obtener los resultados. Es así como, los autores lograron definir la mejor combinación de parámetros para el diseño de la voluta, el cual fue

comparado a nivel experimental contra un diseño de referencia, logrando un incremento en la eficiencia del 7.4% (pasó de 46.7% a 54.1%).

Por otro lado, debido a que la eficiencia térmica de las turbinas está directamente asociada a la temperatura del fluido en la entrada, diversos abordajes se han empleado en el diseño de los sistemas de refrigeración de los componentes de este tipo de máquinas. En este sentido, Xie et al (2014), se concentraron en la refrigeración interna de las aletas del rotor de una turbina de gas, utilizando un modelo simplificado de flujo en un ducto con nervios perpendiculares al flujo, evaluando las ventajas de utilizar nervios truncados (ver Figura 1-11). El modelo de dinámica de fluidos computacional fue tridimensional, considerando un flujo de aire seco turbulento, en estado estacionario y no rotatorio.

**Figura 1-11.** Modelo de refrigeración en rotor de turbina de gas. (a) Simplificación de flujo en un canal, (b) Distribución de temperaturas [Kelvin]



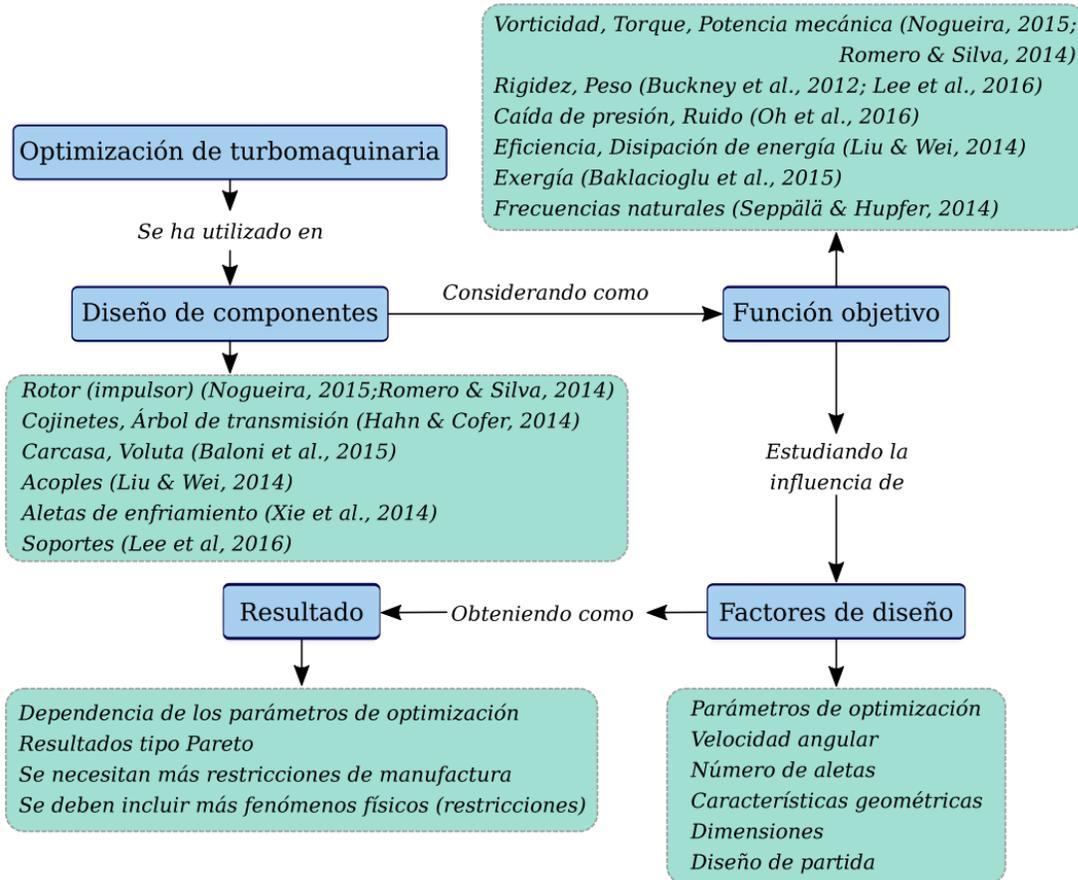
**Fuente:** Tomado de (Xie et al., 2014)

Así, los autores identificaron que mediante el truncamiento de los nervios del canal era posible disminuir las pérdidas por fricción (reduciendo la caída de presión) y obtener una disipación de calor más homogénea, respecto al caso sin truncamiento. Si bien estos autores no implementaron propiamente un método de optimización estructurado, sino que compararon algunas configuraciones geométricas que definieron intuitivamente, su trabajo refleja la necesidad por buscar alternativas de diseño que den solución a los problemas térmicos en los componentes de turbomáquinas.

En la Figura 1-12 se resume el estado del arte actual en el tema de optimización en turbomaquinaria, de tal manera que se observa que la optimización se ha concentrado en el diseño de diversos componentes, como el rotor (Alonso, Sá, Saenz, & Silva, 2018, 2019; Boccini et al., 2018; Buckney et al., 2012; X. M. Chen, Lai, Zhang, & Zhou, 2013; Rindi et al., 2016; Romero & Silva, 2014; Sá, 2016; Shen, Dong, & Chen, 2014), álabes (Iseler & Martin, 2017; McClanahan, Liu, Turner, & Anantharaman, 2018; Pietropaoli, Montomoli, & Gaymann, 2018; Xie et al., 2014), ductos, toberas, dosificadores (Andreasen, 2017), difusores (Oh et al., 2016), acoples (J. H. Liu & Wei, 2014), carcasa, piezas de soporte (Chang & Lee, 2008; Dubrovskaya, Dongauzer, & Faskhutdinov, 2017; Faskhutdinov, Dubrovskaya, Dongauzer, Maksimov, & Trufanov, 2017; Lee et al., 2016; Wu et al., 2019; B. Xu, Ye, & Zhang, 2016), volantes (Jiang & Wu, 2017), ejes de transmisión y cojinetes (Hahn & Cofer, 2014), existiendo distintos abordajes de acuerdo al objetivo que se desee priorizar durante la optimización. Bajo este contexto, los factores de diseño no solo se han concentrado en la geometría, sino que también incluyen otros, como las condiciones de operación, los diseños de referencia y los parámetros de la optimización.

Consecuentemente, se concluye que es necesario continuar con el desarrollo de metodologías de optimización de componentes de turbomáquinas, que permitan encontrar soluciones que representen un compromiso entre múltiples objetivos de diseño e incorporando varios fenómenos físicos simultáneamente. En particular, se identifica un potencial para implementar el método de optimización topológica en el diseño de rotores de turbomáquinas, considerando simultáneamente la influencia de fenómenos estructurales y del fluido (interacción fluido-estructura). Lo anterior proviene del hecho de que, a pesar de que la optimización de los rotores de las turbomáquinas se aborda usualmente desde el punto de vista de la mecánica de fluidos computacional, el estado del arte sintetizado en las secciones anteriores evidencia que el diseño de estos componentes debe considerar análisis estructural, involucrando variables como peso, rigidez, esfuerzos, frecuencias de resonancia, ruido y resistencia a la fatiga, representando un campo de crecimiento significativo para la optimización topológica.

Figura 1-12. Resumen del estado del arte (optimización en turbomaquinaria)



## 1.2 Problema de investigación

Tomando como referencia el estado del arte descrito anteriormente, es posible concluir que las herramientas computacionales y experimentales utilizadas actualmente para la optimización de turbomaquinaria no consideran simultáneamente restricciones estructurales sobre los componentes mecánicos y condiciones de desempeño sobre el fluido, lo cual incrementa el número de prototipos que deben ser evaluados para encontrar una mejora en el diseño.

La situación anterior está enmarcada en la dificultad para abordar, mediante las metodologías de optimización actuales, el efecto de múltiples fenómenos presentes en las turbomáquinas (por ejemplo, interacción estructura-fluido, diversas etapas de conversión energética, fatiga estructural, cambios de fase del fluido y condiciones extremas de temperatura, velocidad y presión) y traducirlo en funciones multiobjetivo que den respuesta

directa a las necesidades que surgen para este tipo de máquinas (como eficiencia energética, consumo de combustible, costo por unidad de tiempo, ganancias por la venta del producto, cantidad de emisiones, impacto ambiental y sostenibilidad) (Baklacioglu et al., 2015). Por lo tanto, el balance entre las variables de diseño usualmente no logra alcanzarse mediante una única herramienta o metodología, con el agravante de que es común encontrar resultados de la evaluación de estos equipos (experimental y computacional) que tienen un comportamiento de óptimo de Pareto (Oh et al., 2016; Romero & Silva, 2014; Sá, 2016; Seppälä & Hupfer, 2014; Tsai & Cheng, 2012), esto es, la mejora en uno de los objetivos conduce a un detrimento en otro de los objetivos.

De igual modo, los altos costos y el gran tiempo asociado a las pruebas netamente empíricas (por ensayo y error) incrementan los recursos necesarios para el desarrollo de las turbomáquinas, lo cual disminuye su atractivo desde el punto de vista comercial; de tal manera que, aunque las metodologías tradicionales permiten mejorar estos productos, no es común que a través de ellos se logre encontrar las soluciones óptimas. En este punto debe tenerse presente que esta problemática no es exclusiva de los grandes sistemas de generación energética (como hidroeléctricas o termoeléctricas), sino que su impacto se evidencia en las diversas aplicaciones en las que se utilizan turbomáquinas, incluyendo, entre otros, los motores de aeronaves, los sistemas de disipación de calor en dispositivos electrónicos y las bombas auxiliares de bombeo sanguíneo.

Bajo este contexto, en la Figura 1-13 se presenta esquemáticamente el problema de investigación abordado en este trabajo. Así, las limitaciones mencionadas para las metodologías de diseño de los componentes de turbomáquinas dan origen a la necesidad de desarrollar alternativas más robustas, multifísicas y que permitan obtener soluciones con un compromiso entre distintas variables de respuesta, situación que es explícita al considerar la búsqueda sistemática (Tabla 1-1) realizada para la construcción del estado del arte (Sección 1.1). En particular, esta investigación se enfoca en el problema de diseño de rotores de turbomáquinas de flujo radial mediante el método de optimización topológica; de tal manera que se utilizan como objetivos de diseño la introducción de dos tipos de fenómenos físicos: las condiciones del flujo, como disipación de energía, vorticidad y potencia mecánica; y el desempeño estructural, medido mediante la relación rigidez/peso. Se destaca además que, a pesar de que esta metodología de optimización parte de una formulación para turbomáquinas genéricas, se decide enfocar los problemas abordados hacia el diseño de bombas, pues permite simplificar los modelos físicos y, sin pérdida de

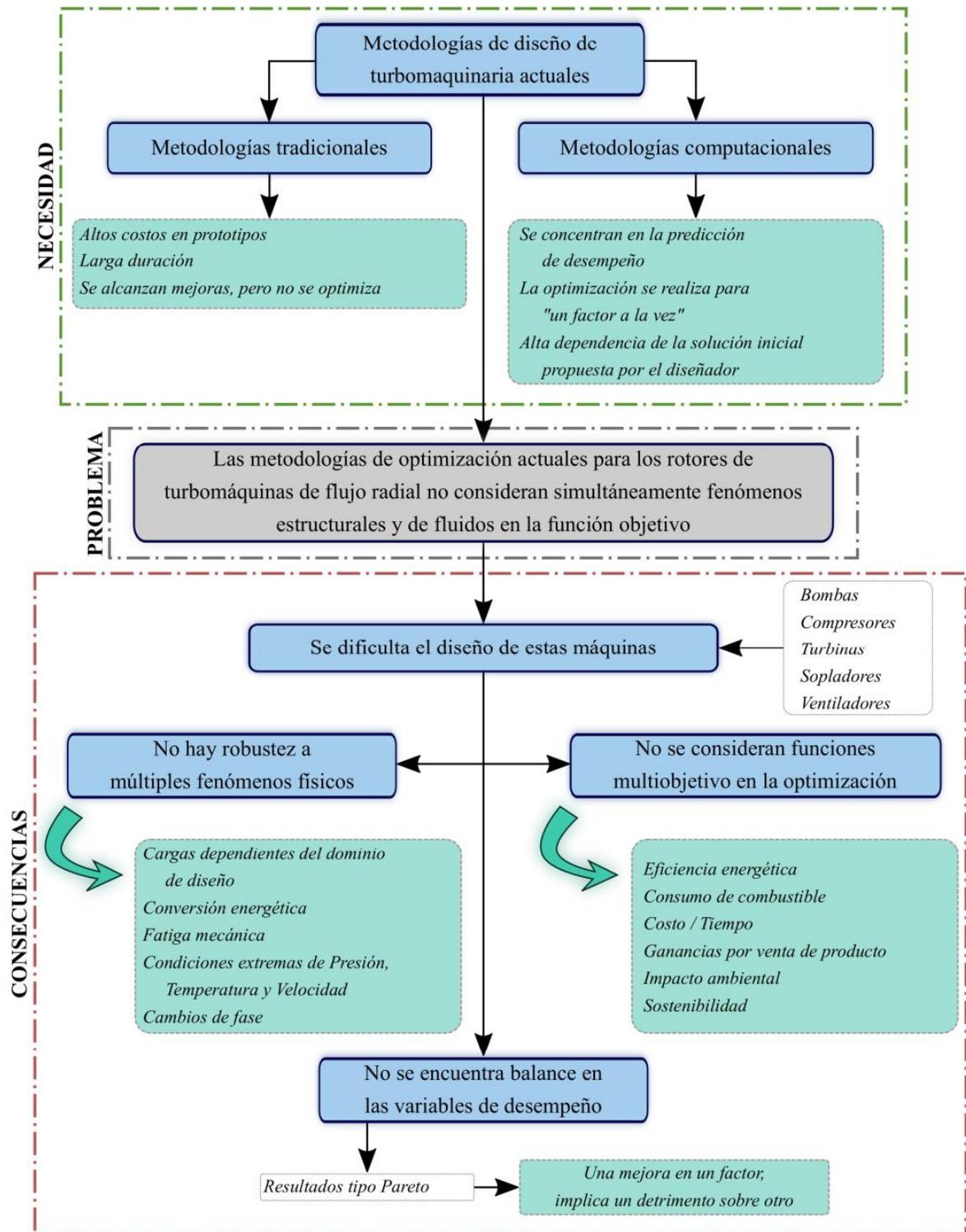
generalidad, hacer énfasis en la optimización y en la interacción fluido-estructura. Específicamente, la pregunta de investigación que guía la presente tesis es: ¿pueden los métodos de optimización topológica estructural y de fluidos ser integrados para obtener diseños de rotores de turbomáquinas con un desempeño más equilibrado entre ambas físicas?

### **1.3 Justificación**

El desarrollo de las sociedades depende, en conjunto con otros factores, del balance entre la implementación de nueva tecnología y el consumo energético. En particular, la eficiencia de los procesos llevados a cabo en diferentes industrias (por ejemplo, automotriz, de generación eléctrica y de equipos médicos) está usualmente condicionada por el desempeño de la turbomaquinaria. Es por esto que la reducción de las pérdidas energéticas en turbomaquinaria ha sido un campo de investigación permanente, puesto que un pequeño incremento en el desempeño de estas máquinas puede representar ganancias financieras significativas. Las técnicas tradicionales de diseño han sido utilizadas para mejorar la respuesta de componentes específicos de las turbomáquinas (como toberas, rotores y ejes de transmisión), principalmente a partir de los resultados de actividades empíricas (ver por ejemplo, (J. a Dixon, Verdicchio, Benito, Karl, & Tham, 2004; Qian, 1990)). Adicionalmente, las metodologías numéricas han sido implementadas satisfactoriamente, permitiendo al diseñador concentrarse en la optimización. De esta manera, la simulación numérica se convierte en una herramienta robusta, que permite evaluar diferentes diseños y considerando simultáneamente la influencia de las diversas variables involucradas (Cheah, Lee, Winoto, & Zhao, 2007), dando respuesta a las necesidades de modelación del comportamiento de turbomaquinaria en múltiples aplicaciones.

No obstante, los modelos para determinar la eficiencia de un proceso en el que interviene una turbomáquina particular dependen de un gran número de variables, que describen tanto el comportamiento del fluido (por ejemplo, vorticidad, caída de presión y turbulencia), como la respuesta de la estructura (como vida a la fatiga, resonancia y dilatación térmica). Así, está claro que cada aplicación tiene sus necesidades específicas y por lo tanto es imperativo actualizar las metodologías de optimización conforme las herramientas permitan incorporar un mayor número de objetivos deseables, logrando así diseños más robustos (Figura 1-14).

Figura 1-13. Problema de investigación y necesidades en el diseño de turbomáquinas

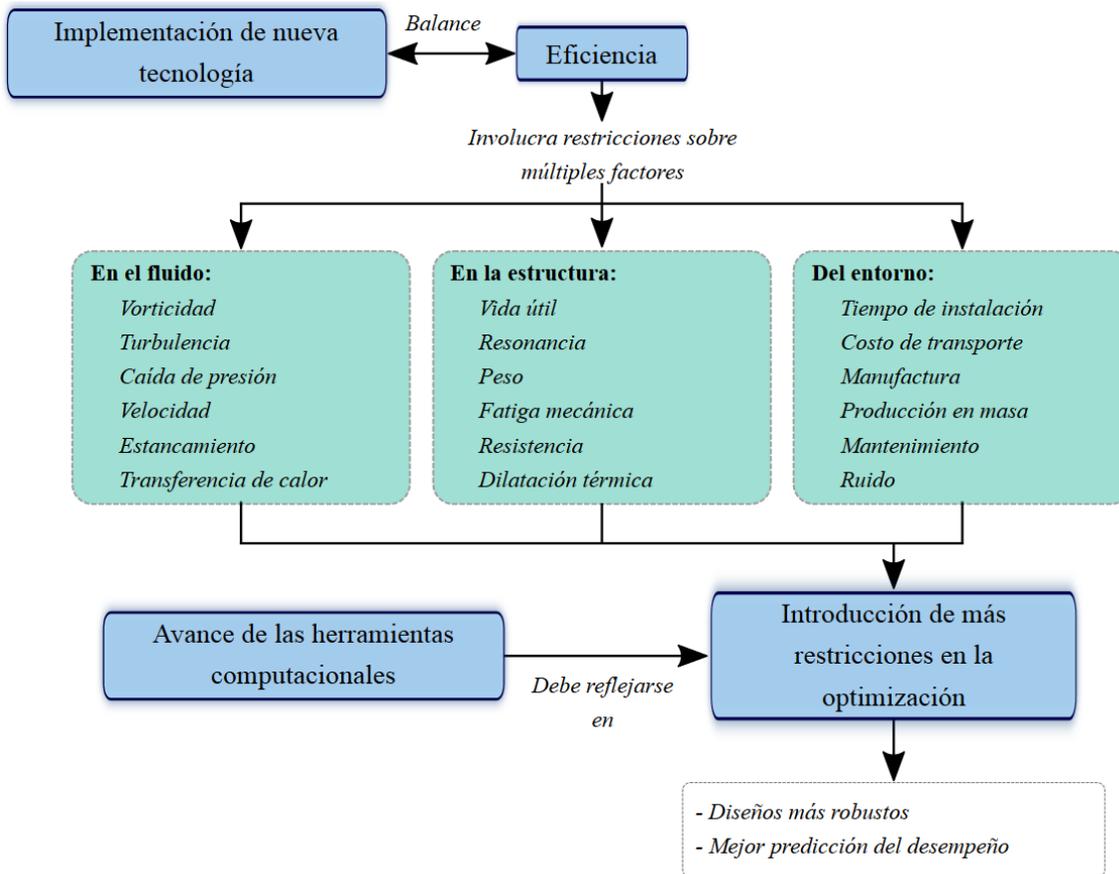


A manera de ejemplo, si se analiza el caso de las bombas auxiliares ventriculares, se observa que la hemodinámica ha permitido identificar la reducción de problemas como la

trombosis y la hemólisis mediante el control del estancamiento y la turbulencia del flujo sanguíneo (Qian, 1990) y la simulación numérica ha contribuido al incremento en el torque y la eficiencia de los motores de dichas bombas (Neethu, Shinoy, & Shajilal, 2010), lo cual pone en evidencia dos necesidades diferentes (una que depende de las condiciones de flujo de la sangre y otra de la eficiencia energética de la máquina) que deben ser incorporadas en el mismo diseño.

Otra aplicación corresponde al diseño de turbomaquinaria para los ciclos de generación de potencia con dióxido de carbono en estado supercrítico (de gran interés para plantas nucleares, solares y en ciclos combinados de turbinas de gas), puesto que su desarrollo se dificulta como consecuencia de la rápida variabilidad de las propiedades del fluido alrededor del punto crítico y de las elevadas presiones de operación, lo cual conlleva a gran incertidumbre en el momento de seleccionar los parámetros de operación del equipo (Cho et al., 2016).

**Figura 1-14.** Justificación del problema de investigación



Como se presentó anteriormente, distintos abordajes se han propuesto para incrementar la eficiencia de las turbomáquinas a partir del análisis, rediseño y optimización de algunos de sus componentes (como rotor, cojinetes, toberas, válvulas internas, carcasas y ejes de transmisión), desde un enfoque numérico, no solo concentrándose en la disminución de las pérdidas energéticas, sino incluyendo restricciones de manufactura, en el número de operaciones de ensamble o incluso en los costos asociados con el transporte de los equipos desde el lugar de fabricación hasta el de operación (las referencias específicas pueden observarse en la Figura 1-12). Así, múltiples enfoques pueden adoptarse dependiendo de la aplicación particular; por ejemplo, la eficiencia de los motores de turbinas a gas puede incrementarse, desde el punto de vista termodinámico, aumentando la temperatura del fluido a la entrada de la turbina, decisión que implica la modelación de dicho efecto sobre los componentes de la turbomáquina, principalmente requiriéndose el diseño de complejos sistemas de enfriamiento para las aspas del rotor (Xie et al., 2014).

Bajo este contexto, se le ha prestado especial atención al diseño de los rotores de bombas y compresores, buscando la configuración óptima de variables como el número de aspas, su geometría y posición; de tal modo que las herramientas numéricas han jugado un papel importante en la predicción del desempeño de cada uno de los diseños (Jafarzadeh et al., 2011), las cuales, en conjunto con la dinámica de fluidos computacional y los algoritmos de optimización, han permitido construir metodologías eficientes para obtener diseños óptimos que no son intuitivos para el diseñador (Romero & Silva, 2014). En este sentido, la optimización del desempeño de este tipo de máquinas ha permitido alcanzar incrementos en la eficiencia energética superiores al 8% (Sá, 2016). Complementando lo anterior, existen pocos estudios en la literatura que incorporen la optimización topológica en el análisis de fenómenos multifísicos, como es el caso de los componentes con una carga térmica elevada, por ejemplo en los rotores de turbinas de gas, cuyo diseño está sujeto a las restricciones de fatiga provenientes de los ciclos térmicos de operación (Seppälä & Hupfer, 2014).

Así, los trabajos en los cuales se implementa la optimización topológica en el diseño de componentes de turbomáquinas, considerando múltiples restricciones, son pocos, lo cual fue puesto en evidencia en la búsqueda sistemática (Tabla 1-1) realizada para construir el estado del arte (Sección 1.1), reconociéndose este como un campo potencial de investigación. Por lo tanto, se considera que realizar la presente tesis alrededor de la optimización topológica aplicada al diseño de rotores de turbomáquinas, considerando el

comportamiento del fluido (disipación de energía, vorticidad y potencia mecánica) en conjunto con restricciones estructurales (rigidez y peso), permite abordar un problema que no ha sido tratado específicamente en el estado del arte para este tema y que contribuye a proporcionar alternativas de solución para las necesidades que se observan alrededor de la optimización de turbomáquinas (Figura 1-13).

## **1.4 Objetivos**

### **1.4.1 Objetivo general**

Diseñar rotores de turbomáquinas de flujo radial utilizando métodos computacionales de simulación mediante elementos finitos y de optimización topológica, considerando restricciones estructurales y sobre el fluido, asumiendo que el fluido es incompresible y se comporta según un flujo laminar.

### **1.4.2 Objetivos específicos**

- O.1.** Desarrollar algoritmos de optimización topológica para el diseño de rotores de turbomáquinas, incluyendo restricciones estructurales de rigidez, frecuencias naturales de vibración, esfuerzos y fatiga mecánica; y de comportamiento del fluido, mediante la disipación de energía, la vorticidad y la potencia mecánica.
- O.2.** Determinar el efecto de los parámetros iniciales de la optimización sobre las topologías resultantes, encontrando la configuración que genere los resultados más balanceados, esto es, el equilibrio entre el desempeño del fluido y la respuesta estructural.
- O.3.** Evaluar la influencia de las restricciones estructurales sobre las topologías obtenidas para los rotores de turbomáquinas a través de simulaciones multifísicas, tomando como criterio de comparación el balance entre el desempeño del fluido y las características de la estructura.

### **1.4.3 Alcance**

Las características del flujo a modelar definen las condiciones bajo las cuales se cumplen los supuestos utilizados para la formulación del problema de optimización, motivo por el que se hace énfasis en que solo se considera: flujo radial (bidimensional), fluidos incompresibles y bajos números de Reynolds. De manera similar, para la parte estructural,

la sollicitación mecánica se limita al régimen elástico lineal de materiales isotrópicos. Asimismo, la evaluación del desempeño estructural y del flujo se puede definir a partir de múltiples variables de respuesta; no obstante, luego de identificar la necesidad de modelar la interacción fluido-estructura, los resultados aquí presentados se acotan a la relación rigidez-peso, para la parte estructural y a la disipación de energía y la vorticidad, para el fluido. Por otro lado, las actividades a ejecutar se enmarcan dentro de un contexto computacional, sin incluir componentes experimentales. Así, la verificación de la correcta implementación de los algoritmos computacionales se soporta a través de la replicación del problema de elementos finitos para las topologías finales utilizando software comercial y mediante la réplica de problemas tipo benchmark encontrados en la literatura y cuya solución ha sido aceptada y validada por la comunidad científica.

A continuación, se presentan los indicadores de evaluación de cada uno de los objetivos específicos propuestos, de tal manera que I.1, I.2 e I.3 se asocian a los objetivos específicos O.1, O.2 y O.3, respectivamente.

- I.1. Algoritmo de optimización topológica para el diseño de rotores de turbomáquinas, incluyendo restricciones estructurales y de comportamiento del fluido, mediante la disipación de energía, la vorticidad y la potencia mecánica.
- I.2. Configuración de parámetros de simulación y de evaluación de los resultados de la optimización que genere el balance más adecuado en los múltiples factores considerados en la función objetivo, tanto para el fluido como para la estructura.
- I.3. Diseño optimizado de algunos rotores de turbomáquinas, verificando la influencia de incluir o no restricciones estructurales en la optimización topológica.

## **1.5 Estructura de la tesis**

Partiendo del contexto anteriormente introducido para los objetivos y el alcance de la presente tesis de maestría, en el Capítulo 2 se muestran las ecuaciones que rigen los modelos matemático y numérico utilizados en la simulación computacional de turbomáquinas mediante el método de los elementos finitos. Adicionalmente, se indican las consideraciones de implementación cuando se incluyen simultáneamente fenómenos de fluidos y estructurales. En el Capítulo 3 se introduce la formulación del método de optimización topológica, prestando especial atención a la modelación de la interacción fluido-estructura. En el Capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos con los códigos

implementados en este trabajo, tanto para ejemplos de la literatura utilizados para verificación, como para los problemas de simulación y optimización topológica de componentes de turbomáquinas. Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones más relevantes de esta tesis y se recomiendan algunos campos hacia los que puede ser extendida.

## **2 Simulación computacional de turbomáquinas**

Los modelos construidos para el análisis de turbomáquinas incluyen fenómenos de múltiples físicas cuyas variables permiten crear escenarios de evaluación del desempeño. De esta manera, en este trabajo la atención se centra en modelos en los cuales se desea tomar decisiones de diseño que involucran simultáneamente características estructurales y de fluidos. En general, el problema de diseño se limita a turbomáquinas que operan en unas condiciones predefinidas a partir de la relación entre el flujo y la presión en la succión y la descarga, generando así una sollicitación mecánica sobre los componentes estructurales, particularmente el rotor. Es así como, el foco recae sobre la modelación de la interacción fluido-estructura (FSI) y su posterior integración en un único algoritmo de optimización. Es necesario resaltar que es por esta simplificación que se decide dirigir los problemas aquí abordados al diseño de bombas, pues al considerar otro tipo de turbomáquinas (como, por ejemplo, las turbinas y los compresores), fenómenos específicos como la compresibilidad, la disipación de energía térmica y las ondas de choque cobran mayor relevancia.

### **2.1 Modelo matemático para turbomáquinas**

En la Ecc. 1 se presentó un primer abordaje a la modelación de turbomáquinas mediante el balance termodinámico entre la energía que ingresa al sistema y su conversión en energía interna del fluido. En el caso de las turbomáquinas centrífugas, todo esto alrededor de un rotor unido a un eje de transmisión de potencia mecánica que sirve como vehículo de dicha transformación de energía. Si bien esta ecuación representa un modelo que incluye múltiples simplificaciones, constituye la base del diseño y selección de turbomáquinas con participación en ciclos de potencia. Específicamente, en el campo del diseño de bombas centrífugas, su desempeño es medido a partir de curvas características en las cuales se relacionan variables como la cabeza de presión, el caudal, la eficiencia, la potencia mecánica y la cabeza positiva mínima en la succión (NPSH) (Gülich, 2014).

Este abordaje simplificado (para flujo incompresible se denominan las ecuaciones de Bernoulli) resulta usualmente suficiente desde un punto de vista práctico en el cual se busca el diseño completo de un sistema termodinámico y se tienen factores de corrección empíricos para considerar las pérdidas de energía desde un punto conservativo. Esta formulación parte de un modelo unidimensional conocido como las ecuaciones de Euler, en el cual se asume que la cabeza de presión adquirida por un fluido al interactuar con el rotor de una bomba depende únicamente de la velocidad en la succión y en la descarga y del ángulo de inclinación de cada álabe (White, 2011).

No obstante, cuando el foco del diseño pasa de ser el sistema termodinámico a los componentes de una turbomáquina en particular, la escala del problema es tal que los fenómenos disipativos deben ser modelados con mayor detalle, prestando gran atención a las interfaces de transferencia de energía. Así, las ecuaciones que gobiernan los fenómenos físicos a modelar son las ecuaciones de Cauchy, las cuales describen la relación esfuerzo-deformación en un medio continuo, mediante el balance de momentum. En el campo de los fluidos estas ecuaciones son conocidas como las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales permiten encontrar el perfil de velocidad y presión de un fluido en un dominio determinado. A su vez, las fuerzas que genera el fluido en la interfaz con la estructura originan una distribución de esfuerzos y deformaciones que siguen la ley de Hooke, para el caso de sólidos isotrópicos y en régimen lineal.

### **2.1.1 Análisis de fluidos: Ecuaciones de Navier-Stokes**

Las leyes de conservación de masa, momentum y energía permiten describir la dinámica de un fluido en un dominio determinado y bajo condiciones de frontera específicas. Adicionalmente, diversas simplificaciones pueden emplearse dependiendo de las condiciones del flujo y las propiedades del fluido. Cuando los fenómenos térmicos no son considerados (la diferencia de temperaturas en el interior de la turbomáquina no es significativa, como suele ser el caso de las bombas) y se asume que el fluido es Newtoniano (viscosidad independiente de la tasa de deformación), la viscosidad y la densidad del fluido son asumidas constantes espacialmente. Adicionalmente, asumiendo flujo laminar (bajo número de Reynolds) e incompresible (densidad del fluido independiente de su presión), las ecuaciones de Cauchy (Ecc. 2) se convierten en las ecuaciones Navier-Stokes, las cuales representan el balance de momentum que es presentado en su forma diferencial y notación vectorial en la Ecc. 3 (Kundu, Cohen, & Dowling, 2016).

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} \quad \text{Ecc. 2}$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad \text{Ecc. 3}$$

Donde

$\mathbf{u}$ →	vector de velocidad	$\mathbf{g}$ →	vector de la aceleración gravitacional
$x$ →	vector de posición	$\mu$ →	viscosidad cinemática
$\mathbf{T}$ →	tensor de esfuerzo	$\nabla$ →	Operador gradiente
$t$ →	tiempo	$\nabla^2$ →	Operador Laplaciano
$p$ →	vector de presión	$\nabla \cdot$ →	Divergencia
$\frac{D}{Dt}$ →	derivada total temporal		

Adicionalmente, la aceleración total se compone de un término local y uno advectivo, que siguen, en dicho orden, la Ecc. 4.

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \quad \text{Ecc. 4}$$

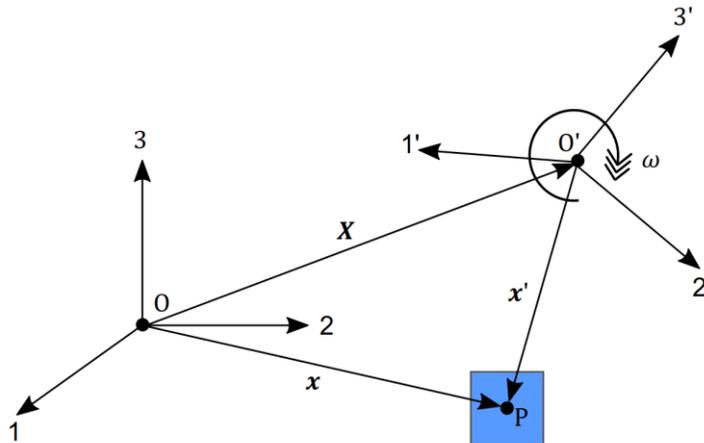
No obstante, en las etapas tempranas del diseño de turbomáquinas, que comúnmente son aquellas en las cuales la optimización topológica tiene una contribución directa, al permitir la exploración de diseños no intuitivos, es suficiente con realizar un análisis en estado estacionario, por lo que no se tiene en cuenta la dependencia del tiempo y  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$ . El término correspondiente a la energía potencial gravitacional suele despreciarse, puesto que la altura ganada en el interior de una turbomáquina centrífuga representa una cabeza no significativa, en comparación con los correspondientes a la energía cinética. Finalmente, la forma fuerte de la ecuación de Navier-Stokes simplificada es la Ecc. 5.

$$\rho \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad \text{Ecc. 5}$$

Debido a que las turbomáquinas se caracterizan porque su principio de funcionamiento parte de la rotación de un eje de transmisión, es usual escribir las ecuaciones de Navier-Stokes en un marco no inercial de referencia; esto es, en un sistema coordenado que rota a una velocidad angular (constante en estado estacionario). De esta manera, el vector posición  $x$  de una partícula de fluido P respecto a un marco inercial O puede ser escrito como la suma del vector posición  $x'$  respecto a un marco no inercial O' y el vector de posición relativa entre ambos marcos  $X$  (ver Figura 2-1). Consecuentemente, la velocidad

de la partícula P en función de las componentes de velocidad del marco no inercial de referencia  $\mathbf{U}$  y  $\boldsymbol{\omega}$ , sigue la Ecc. 6.

**Figura 2-1.** Esquema de transformación a un marco no inercial de referencia



**Fuente:** Construido con base en (Kundu et al., 2016)

Así, en el nuevo marco no inercial (asumiendo un observador que rota en el centro del rotor), en dos dimensiones, el flujo se describe como el movimiento de un fluido en un canal, permitiendo identificar la contribución explícita de la aceleración centrípeta y la fuerza de Coriolis en la ecuación de momentum, escritos en este orden en la Ecc. 7 (Kundu et al., 2016). Así, de izquierda a derecha, en esta ecuación se encuentra el término advectivo de la aceleración (no lineal), igualado a la contribución de las fuerzas normales debidas a la presión, un término difusivo de fuerzas viscosas, la aceleración centrípeta y la fuerza de Coriolis. El sistema de ecuaciones conformado por la Ecc. 7 y la ecuación de continuidad (Ecc. 8) permiten encontrar las variables de estado  $\mathbf{u}$  y  $p$ .

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}' \quad \text{Ecc. 6}$$

$$\rho \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \omega^2 \mathbf{R} - 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad \text{Ecc. 7}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{Ecc. 8}$$

Donde

$\mathbf{R}$  → vector de posición radial

$\boldsymbol{\omega}$  → vector de velocidad angular (de magnitud  $\omega$ )

### 2.1.2 Análisis estructural: Elasticidad lineal

De manera homóloga, la respuesta de un sólido a unas cargas externas se modela mediante la ecuación de Cauchy, la cual establece su igualdad con las fuerzas internas. Así, en el caso de análisis estático (independencia del tiempo), la ecuación de momentum para la estructura es la Ecc. 9 (Reddy, 2006).

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F} \quad \text{Ecc. 9}$$

Donde

$\boldsymbol{\sigma}$  → vector de esfuerzos internos

$\mathbf{F}$  → vector de fuerzas externas

La ecuación anterior debe ser complementada con una ley constitutiva que, para el caso de mecánica de sólidos, corresponde a la relación esfuerzo-deformación. De esta manera, cuando se considera un material elástico lineal, esta relación corresponde a la ley de Hooke Ecc. 10.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{Ecc. 10}$$

Donde

$\mathbf{D}$  → matriz de constantes elásticas del material

$\boldsymbol{\varepsilon}$  → vector de deformación

En este punto se destaca que la matriz  $\mathbf{D}$  representa un acoplamiento entre las deformaciones y los esfuerzos en diferentes direcciones. Entonces, en el caso de un material isotrópico, para un análisis de elasticidad plana (bidimensional), dicha matriz se puede definir completamente mediante el módulo de Young  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$ . Así, bajo estos supuestos, la matriz  $\mathbf{D}$  tiene la forma de la Ecc. 11.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad \text{Ecc. 11}$$

En elasticidad plana, la relación entre  $E$  y  $\nu$  para definir las componentes de  $\mathbf{D}$  depende de si se considera estado plano de esfuerzos o estado de deformación plana. Asumiendo un

sistema coordenado cartesiano  $(x, y, z)$ , con el *eje*  $z$  fuera del plano, la relación esfuerzo-deformación es la de la Ecc. 12 (Logan, 2012).

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Ecc. 12}$$

Donde

$\sigma_x$ y $\sigma_y$	→	esfuerzos normales
$\tau_{xy}$	→	esfuerzos tangenciales (cortantes)
$\varepsilon_x$ y $\varepsilon_y$	→	deformación longitudinal (normal)
$\gamma_{xy}$	→	deformación angular

En el caso de estado plano de esfuerzos,  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ , que resulta en  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ , con  $\varepsilon_z \neq 0$  y la matriz  $\mathbf{D}$  para un material isotrópico se convierte en la Ecc. 13.

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{Ecc. 13}$$

Por otro lado, para el caso de estado de deformación plana,  $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ , que resulta en  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ , con  $\sigma_z \neq 0$  y la matriz  $\mathbf{D}$  para un material isotrópico se convierte en la Ecc. 14.

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{Ecc. 14}$$

## 2.2 Modelo numérico: método de los elementos finitos

En la sección anterior se presentaron las ecuaciones diferenciales que gobiernan los fenómenos físicos de los problemas del presente trabajo. La construcción de soluciones analíticas para estas ecuaciones se limita a geometrías simples, que permiten generar supuestos que simplifican la integración en el dominio de interés, foco de los libros de mecánica de fluidos (Kundu et al., 2016) (por ejemplo, para flujo potencial) y de mecánica de sólidos (Hibbeler, 2014) (como es el caso del análisis de vigas, ejes y columnas). Incluso, bajo ciertas consideraciones, se pueden obtener soluciones analíticas en sistemas con marcos no inerciales de referencia, ver por ejemplo el trabajo de Antonios, Avenue,

Nikolaos & Vassilios (2015) para el caso de bombas centrífugas. No obstante, el diseño de la geometría de componentes como el rotor de una turbomáquina requiere la modelación detallada de fenómenos localizados que implican un abordaje menos simplificado que el utilizado en soluciones analíticas.

Es así como, los modelos numéricos discretizan el continuo y ofrecen una aproximación de la solución que converge a la analítica, conforme se refina dicha discretización. Aunque en el campo de la mecánica de fluidos es común utilizar el método de los volúmenes finitos (FVM) como estrategia de discretización, gracias a que su formulación parte directamente de las leyes de conservación, en este trabajo se decide utilizar el método de los elementos finitos (FEM) para construcción de los modelos numéricos. Esta decisión se fundamenta en que es un método sólidamente establecido para el análisis estructural (Cook, Malkus, Plesha, & Witt, 2002; Reddy, 2006) y que además ha garantizado ser completamente compatible con los métodos de optimización topológica para problemas de fluidos (Borrvall & Petersson, 2003).

### 2.2.1 Formulación FEM para flujo viscoso

Existen diversos métodos de formulación mediante elementos finitos. En este trabajo se emplea la nomenclatura y procedimientos presentados por Reddy y Gartling (2010), siguiendo el método de Galerkin. De esta manera, la forma integral del modelo matemático (Ecc. 7 y Ecc. 8) es formulada en su forma ponderada para un elemento finito cualquiera  $\Omega^e$  (el superíndice  $e$  se utiliza aquí para denominar cantidades a nivel del elemento finito, el cual se puede seguir siendo tratado como un medio continuo). En este punto se destaca que la formulación presentada es conocida como modelo mixto presión-velocidad, pues utiliza las dos ecuaciones gobernantes de forma directa en la construcción del modelo de elementos finitos, en contraposición a modelos como el de penalización, en el cual la ecuación de continuidad es impuesta como una restricción en las ecuaciones de momentum.

Así, se obtiene la formulación débil de Galerkin (Ecc. 15 y Ecc. 16), al utilizar como funciones de ponderación  $Q$  y  $\mathbf{w}$ . En estas ecuaciones,  $\mathbf{f}_1$  y  $\mathbf{f}_2$  corresponden, respectivamente, a los términos que quedan al igualar a cero la ecuación de continuidad (Ecc. 8) y la de momentum (Ecc. 7).

$$\int_{\Omega^e} Q \mathbf{f}_1 \, d\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{Ecc. 15}$$

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_2 \, d\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{Ecc. 16}$$

Es importante mencionar que, para mantener la simplicidad de las ecuaciones, los términos correspondientes a la aceleración centrípeta y la fuerza de Coriolis se incluirán únicamente en la expresión final de elementos finitos, puesto que la transformación a marcos no inerciales de referencia aplica de igual manera tanto en la formulación fuerte como en la débil y la discreta.

Luego de expandir cada uno de los términos de la forma integral ponderada, empleando notación de índices (también conocida como convención de Einstein) para dejar explícita cada contribución e incluyendo las fuerzas externas, se obtiene el modelo de Galerkin mixto ponderado de las Ecc. 17 y Ecc. 18. Según se indicó anteriormente, los términos de dependencia temporal fueron retirados de la formulación pues se asume estado estacionario.

$$\int_{\Omega^e} Q \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{Ecc. 17}$$

$$\int_{\Omega^e} \left\{ \rho \left( w_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left[ -p \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] - \rho w_i f_i \right\} d\mathbf{x} \quad \text{Ecc. 18}$$

$$- \oint_{\Gamma^e} w_i T_i \, ds = \mathbf{0}$$

Donde

$i, j \rightarrow$ índices para relacionar componentes en distintas direcciones (suma en índices repetidos)	$w_i \rightarrow$ componentes de la función de ponderación $\mathbf{w}$
$f_i \rightarrow$ fuerzas de volumen	$T_i \rightarrow$ Componente del esfuerzo externo aplicado en $\Gamma^e$ (tracciones)
$\Gamma^e \rightarrow$ frontera del elemento finito $e$	$ds \rightarrow$ diferencial tomado en $\Gamma^e$

El método de los elementos finitos aproxima la respuesta del continuo mediante la contribución de cada variable de estado evaluada en puntos discretos conocidos como nodos. Además, se utilizan funciones de interpolación (funciones de forma) para describir la distribución de cada variable de estado dentro de cada elemento finito. Lo anterior se

refleja en las Ecc. 19 y Ecc. 20, de modo que la velocidad y la presión en cualquier punto del dominio analizado es descrito como la sumatoria de las funciones de forma multiplicadas por los valores nodales.

Aquí debe notarse que  $u_i^m$  corresponde al valor de la componente de la velocidad  $\mathbf{u}$  en la dirección  $i$ , evaluada en el nodo  $m$ . Asimismo,  $p_l$  representa el valor de la presión  $\mathbf{p}$  evaluada en el nodo  $l$ . Con lo cual es evidente que se realiza una diferenciación entre los grados de libertad para la velocidad y la presión. Esta situación se amplía más adelante en la selección de los elementos finitos y la forma explícita de las funciones de forma. Por el momento, se considera pertinente mencionar que la solución de este tipo de modelos mediante elementos finitos en los cuales se tienen dos campos simultáneos (el de la velocidad y la presión), requiere la integración de modelos de aproximación compatibles y por esto es que algunas de las formulaciones parten de tener ubicaciones de medición nodal distintas para cada variable de estado.

$$u_i(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M \psi_m(\mathbf{x}) u_i^m = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{u}_i \quad \text{Ecc. 19}$$

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^L \phi_l(\mathbf{x}) p_l = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{p} \quad \text{Ecc. 20}$$

Donde

$M \rightarrow$ número total de nodos para $\mathbf{u}_i$ en $\Omega^e$	$l \rightarrow$ nodo en el que se evalúa $\mathbf{p}$
$m \rightarrow$ nodo en el que se evalúa $\mathbf{u}_i$	$\phi_l \rightarrow$ funciones de forma correspondientes al nodo $l$
$\psi_m \rightarrow$ funciones de forma correspondientes al nodo $m$	$\mathbf{\Phi} \rightarrow$ matriz de funciones de forma para $\mathbf{p}$
$\mathbf{\Psi} \rightarrow$ matriz de funciones de forma para $\mathbf{u}$	$\square^T \rightarrow$ transpuesta de una matriz o un vector
$L \rightarrow$ número total de nodos para $\mathbf{p}$ en $\Omega^e$	

Siguiendo la formulación de Galerkin, las funciones de ponderación son aproximadas por sus correspondientes funciones de forma:  $Q \approx \phi_l$  y  $\mathbf{w} \approx \mathbf{\Psi}$ , con lo cual es posible construir el sistema de ecuaciones discretizado. Reescribiendo las ecuaciones de continuidad y momentum en forma matricial, se obtienen Ecc. 21 y Ecc. 22.

$$-\mathbf{Q}^T \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{Ecc. 21}$$

$$\mathbf{K}_c(\mathbf{u}) \mathbf{u} + \mathbf{K}_d \mathbf{u} - \mathbf{Q} \mathbf{p} = \mathbf{F} \quad \text{Ecc. 22}$$

Donde

$\mathbf{Q}$  → matriz de las funciones de forma de  $\mathbf{p}$

$\mathbf{K}_c$  → matriz del término advectivo en la ecuación de momentum (también denominado convectivo), dependiente de  $\mathbf{u}$  (no lineal)

$\mathbf{K}_d$  → matriz del término difusivo

$\mathbf{F}$  → vector de fuerzas externas

Hasta este momento, las ecuaciones se han escrito con notación de índices, la cual es genérica para cualquier combinación de direcciones  $i, j$ . No obstante, se decide limitar los diseños del presente trabajo a modelos bidimensionales, simplificación que suele ser comúnmente utilizada en bombas centrífugas en las que la geometría del rotor es uniforme en la dirección perpendicular al plano, por lo que la contribución de esta componente en las ecuaciones de conservación puede ser despreciada. De esta manera, en la Ecc. 23 se muestra de manera explícita el sistema de ecuaciones de elementos finitos en dos dimensiones para el campo de fluidos, a nivel de cada elemento finito (análisis local). Aquí, se conserva la notación con negrita para las componentes de la velocidad debido a que cada  $\mathbf{u}_i$  es un vector de un tamaño igual al número de nodos de velocidad de cada elemento finito ( $M$ ). Adicionalmente, la matriz  $\mathbf{K}_r$  corresponde al término de la fuerza de Coriolis (multiplica a las variables de estado) y  $\mathbf{F}_c$  a la fuerza producto de la aceleración centrípeta.

Por otro lado, los modelos de optimización topológica con fluidos suelen incluir un término correspondiente a la fuerza de Darcy  $\mathbf{K}_\kappa$  para el flujo en medios porosos (Borrvall & Petersson, 2003; Romero & Silva, 2014); de tal manera que las regiones que corresponden a sólido (estructura) son modeladas como un fluido impermeable, mientras que las zonas de fluido corresponden a un medio completamente permeable. Esto se conoce como el modelo de penalización de Brinkman (Rozvany & Lewiński, 2014), con  $\mathbf{K}_\kappa = \mathbf{K}_\kappa(\kappa)$ , donde  $\kappa \rightarrow \infty$  para una región sólida (se genera una gran fuerza resistiva que impide el flujo) y  $\kappa = 0$  en una región completamente fluida.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{K}_c(\mathbf{u}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_c(\mathbf{u}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{12} & -\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{11} + 2\mathbf{K}_{22} & -\mathbf{Q}_2 \\ -\mathbf{Q}_1^T & -\mathbf{Q}_2^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ p \end{Bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K}_r & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_\kappa & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_\kappa & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{c1} \\ \mathbf{F}_{c2} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{Ecc. 23}$$

Donde

$\mathbf{K}_c \rightarrow$  matriz componente advectiva

$\mathbf{K}_{ij} \rightarrow$  matriz componente difusiva

$\mathbf{Q}_i \rightarrow$  matriz gradiente de presión

$$\mathbf{K}_c(\mathbf{u}) = \int_{\Omega^e} \rho \Psi (\Psi^T \mathbf{u}_j) \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} dx$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega^e} \mu \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} dx$$

$$\mathbf{Q}_i = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \Phi^T dx$$

$$\mathbf{K}_r = \int_{\Omega^e} 2\omega \Psi \Psi^T dx$$

$\mathbf{K}_r \rightarrow$  matriz fuerza de Coriolis

$\mathbf{F}_c \rightarrow$  vector aceleración centrípeta

$\mathbf{K}_\kappa \rightarrow$  matriz fuerza de Darcy

$$\mathbf{K}_\kappa = \int_{\Omega^e} \kappa \Psi \Psi^T dx$$

$$\mathbf{F}_i = \int_{\Omega^e} \rho \Psi \mathbf{f}_i dx + \oint_{\Gamma^e} \Psi T_i ds$$

$$\mathbf{F}_{ci} = \int_{\Omega^e} \rho \omega^2 \Psi x_i dx$$

$$i, j = 1, 2$$

$\kappa \rightarrow$  penalización de Brinkman

## 2.2.2 Formulación FEM estructural

El procedimiento para formular las ecuaciones discretas de elementos finitos para el análisis estructural es similar al presentado para el campo de fluidos, con la diferencia de que en este caso la variable de estado corresponde al desplazamiento  $\mathbf{u}_s$ , donde se utiliza el subíndice  $s$  para indicar que corresponde al análisis estructural. Así, si se tiene un dominio bidimensional en el cual un elemento finito  $\Omega^e$  tiene un volumen  $V^e = h^e \Omega^e$ , se puede construir la forma débil de la ecuación de equilibrio de momentum (Ecc. 9) aplicando el principio de desplazamiento virtual, el cual es equivalente al principio de minimización de la energía potencial (Reddy, 2006). En general, estos principios establecen que si se asume un desplazamiento virtual  $\delta \mathbf{u}_s$ , el trabajo de las fuerzas internas es igual al trabajo de las fuerzas externas.

De esta manera, la forma débil del modelo matemático estructural, en notación de índices, resulta en la Ecc. 24. Se destaca nuevamente que en esta ecuación no se incluye la dependencia del tiempo y el modelo se simplifica a análisis estático.

$$\int_{V^e} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_{V^e} f_i \delta u_{si} dV + \oint_{\Gamma^e} t_i \delta u_{si} ds \quad \text{Ecc. 24}$$

Donde

$i, j \rightarrow$ índices para relacionar componentes en distintas direcciones	$\Gamma^e \rightarrow$ frontera del elemento finito $e$
$\delta \rightarrow$ operador variacional	$t_i \rightarrow$ componente del esfuerzo externo aplicado en $\Gamma^e$ (tracciones)
$f_i \rightarrow$ fuerzas de volumen	$ds \rightarrow$ diferencial tomado en $\Gamma^e$
$V^e \rightarrow$ volumen del elemento finito $e$	

Luego de tener la formulación débil en la Ecc. 24, se utilizan las funciones de forma para generar la aproximación discreta propia del método de los elementos finitos, siguiendo la Ecc. 25. Aquí se hace evidente la equivalencia entre la Ecc. 25 y la Ecc. 19. Si bien, en general, no es necesario utilizar las mismas funciones de forma o igual número de grados de libertad para la velocidad  $\mathbf{u}$  y los desplazamientos  $\mathbf{u}_s$ , en este trabajo se decide conservar la misma malla de elementos finitos y, por lo tanto, la interpolación dentro de cada elemento finito es la misma para ambas variables de estado. Así,  $\theta = \psi$  y  $N = M$ .

$$u_{si}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \theta_n(\mathbf{x}) u_{si}^n = \sum_{m=1}^M \psi_m(\mathbf{x}) u_{si}^m = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{u}_{si} \quad \text{Ecc. 25}$$

Consecuentemente, la interpolación planteada en la Ecc. 25 es tal que  $\delta \mathbf{u}_s = \mathbf{\Psi}^T \delta \mathbf{u}_s$ , con lo cual se construye el modelo estructural discreto que se presenta en la Ecc. 26. Aquí,  $\mathbf{K}_s$  es la matriz de rigidez local para cada elemento finito,  $\mathbf{F}_s$  el vector de fuerzas externas ( $\mathbf{f}_s$  las fuerzas de volumen y  $\mathbf{t}_s$  las tracciones aplicadas en la frontera) y  $h^e$  es el espesor del elemento finito  $e$  (que usualmente se asume constante en el análisis bidimensional y por lo tanto puede salir de la integral). Además,  $\mathbf{D}$  es la matriz de constantes de elasticidad que sigue la Ecc. 11. El término  $\mathbf{B}$  es una matriz que relaciona los desplazamientos con las deformaciones, por lo que se traduce en las derivadas de las funciones de forma, según la Ecc. 27.

$$\mathbf{K}_s \mathbf{u}_s = \mathbf{F}_s \quad \text{Ecc. 26}$$

Donde

$$\mathbf{K}_s = \int_{\Omega^e} h^e \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx \quad \mathbf{F}_s = \int_{\Omega^e} h^e \boldsymbol{\Psi} \mathbf{f}_s dx + \oint_{\Gamma^e} h^e \boldsymbol{\Psi} \mathbf{t}_s ds$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \psi_m}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial \psi_m}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial \psi_m}{\partial y} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \psi_m}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{Ecc. 27}$$

## 2.3 Implementación del método de los elementos finitos

La formulación de las ecuaciones de elementos finitos presentadas tanto para el campo de velocidad-presión como para el de desplazamientos, implica la construcción de las componentes matriciales y vectoriales para cada elemento finito (análisis local), para posteriormente crear un sistema de ecuaciones global, en el cual se suman las contribuciones de todos los elementos finitos, para aproximar así las variables de estado en el dominio continuo. Este proceso se conoce como ensamble, y consiste en sumar en cada nodo, las contribuciones de los elementos finitos que lo comparten.

Gracias a la característica iterativa de esta y otras etapas en el análisis mediante elementos finitos (FEA), y en general de los métodos numéricos para solución de este tipo de modelos matemáticos en ingeniería, es necesario implementar una herramienta computacional que permita la programación de estos procesos. En este trabajo se utiliza el software Matlab® (The MathWorks Inc., 2019).

### 2.3.1 Selección del tipo de elemento finito

Así, el siguiente paso consiste en definir específicamente el tipo de elemento finito y consecuentemente hacer explícito el número de grados de libertad y las funciones de forma del modelo numérico. Existen diferentes familias de elementos finitos planos (en dos dimensiones), siendo las más comunes aquellos que parten de cuadriláteros y las triangulares. En algunos tipos de análisis (por ejemplo, en dinámica explícita), los elementos finitos cuadriláteros presentan ciertas ventajas, como es el caso de análisis de

impacto (Cook et al., 2002). No obstante, los modelos de elementos finitos de este trabajo no incluyen este tipo de características, motivo por el cual se elige la familia de los triángulos, gracias a que se facilita la creación de una malla de buena calidad en geometrías complejas (cuando se compara desde la perspectiva de un número fijo de grados de libertad), se amplía la compatibilidad con software externo de simulación computacional y se simplifica la construcción del código al tener un menor número de nodos por elemento finito (aunque no significativamente).

A pesar de que la decisión en la selección de la familia de elementos finitos no tiene un efecto representativo en la calidad de los resultados de este proyecto, el orden del elemento finito (el grado de las funciones de interpolación) sí es determinante para garantizar la estabilidad de la solución del sistema de ecuaciones del fluido. De esta manera, el primer paso consiste en identificar que la formulación, utilizando las funciones de forma descritas por Ecc. 19, Ecc. 20 y Ecc. 25, implica que los elementos finitos modelados corresponden a los de la familia de Lagrange; esto es, aquellos en los que la variable de estado nodal es interpolada mediante las funciones de forma, sin requerirse transformaciones adicionales sobre dichas variables o sus derivadas (Zienkiewicz, Taylor, & Zhu, 2005).

Asimismo, el modelo mixto presión-velocidad se caracteriza porque en la forma débil del modelo matemático se encuentran las derivadas de la velocidad, pero no de la presión, motivo por el cual al realizar la integración por partes no es posible generar expresiones que permitan imponer la presión como una condición de frontera esencial (tipo Dirichlet). Lo anterior, debido a que las condiciones de frontera de presión no pueden imponerse sobre la ecuación de continuidad, sino que deben ser incluidas como condiciones de frontera naturales (tipo Neumann) en la ecuación de momentum. Esta situación lleva a concluir que la presión no es una variable de estado que debe ser continua de un elemento finito a otro, sino su gradiente. Como consecuencia de esto, resulta intuitivo utilizar una malla de elementos finitos de un orden inferior para la presión que para la velocidad (Reddy & Gartling, 2010).

El fundamento teórico para describir la situación anterior parte de que para garantizar convergencia de aproximaciones con FEM se deben garantizar las condiciones de elipticidad y la de Ladyzhenskaya—Babuska—Brezzi (LBB). Si bien la demostración matemática del cumplimiento de estas condiciones para distintas formulaciones de

elementos finitos no es una tarea trivial, la solución de problemas de flujo viscoso mediante FEM usualmente se aborda mediante dos aproximaciones: elementos finitos cuadráticos para la velocidad y lineales para la presión o elementos finitos cuadráticos para la velocidad y discontinuos para la presión. En este trabajo se decide implementar el primero de estos, comúnmente denominados  $P_2P_1$  (o  $Q_2Q_1$  en el caso de elementos finitos cuadriláteros) y son conocidos como elementos finitos de Taylor-Hood, decisión fundamentada en que se simplifica la programación del código (sin deteriorar la precisión), puesto que no se requieren mecanismos adicionales para estabilización de la solución (Taylor & Hood, 1973).

### 2.3.2 Funciones de forma para el modelo FEM

Partiendo de un elemento finito triangular con vértices ubicados en los puntos  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  y  $(x_3, y_3)$ , se definen las coordenadas naturales (o normalizadas)  $(\xi, \eta)$  según el mapeo de Ecc. 28 y Ecc. 29. De este modo, se genera una formulación isoparamétrica, en el que la geometría de cada elemento finito es obtenida mediante las mismas funciones de forma de las variables de estado, siguiendo la Ecc. 30 para los nodos de presión y la Ecc. 31 para los nodos de velocidad (Ganesan & Tobiska, 2017).

$$x = x_1 + (x_2 - x_1) \xi + (x_3 - x_1) \eta \quad \text{Ecc. 28}$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1) \xi + (y_3 - y_1) \eta \quad \text{Ecc. 29}$$

$$x_i = \sum_{l=1}^L \phi_l(\xi, \eta) x_i^l = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{x}_i \quad \text{Ecc. 30}$$

$$x_i = \sum_{m=1}^M \psi_m(\xi, \eta) x_i^l = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{x}_i \quad \text{Ecc. 31}$$

Consecuentemente, las funciones de forma para elementos finitos lagrangianos triangulares lineales y cuadráticas se presentan en Ecc. 32 y Ecc. 33, respectivamente. En este punto se destaca que, debido a que la modelación de la interacción fluido-estructura es uno de los focos del presente trabajo, resulta necesario generar una malla de elementos finitos para cada una de las físicas. No obstante, gracias a que los modelos matemáticos para ambos fenómenos físicos provienen de las mismas ecuaciones de balance de momentum en la mecánica del continuo (ecuación de Cauchy), la forma final de las

ecuaciones discretas presenta gran similitud, por lo que es posible utilizar fragmentos del código de FEM para fluidos en el FEM estructural.

Adicionalmente, si se garantiza una compatibilidad en los grados de libertad y en la ubicación de los nodos de ambas mallas de elementos finitos (la del fluido y la del sólido), la transferencia de cargas mecánicas en la interfaz se puede realizar de manera directa como carga consistente. Por estas razones, se decide utilizar las mismas funciones de forma de la velocidad para los desplazamientos estructurales.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1(\xi, \eta) \\ \phi_2(\xi, \eta) \\ \phi_3(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad \text{Ecc. 32}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1(\xi, \eta) \\ \psi_2(\xi, \eta) \\ \psi_3(\xi, \eta) \\ \psi_4(\xi, \eta) \\ \psi_5(\xi, \eta) \\ \psi_6(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta) \\ \xi(2\xi - 1) \\ \eta(2\eta - 1) \\ 4\xi(1 - \xi - \eta) \\ 4\xi\eta \\ 4\eta(1 - \xi - \eta) \end{bmatrix} \quad \text{Ecc. 33}$$

### 2.3.3 Solución del modelo FEM

Partiendo de las funciones de forma descritas anteriormente, el número total de grados de libertad del modelo es  $2M(n_{nodos})$  para la velocidad,  $L(n_{nodos})$  para la presión y  $2M(n_{nodos})$  para los desplazamientos. Donde  $n_{nodos}$  es el número de nodos de todo el modelo,  $M = 6$  corresponde a los nodos ubicados en los vértices de cada triángulo más los nodos que se encuentran en la mitad del segmento que une cada vértice y  $L = 3$  equivale al número de nodos en los vértices. El factor 2 surge porque se tiene un grado de libertad por cada una de las direcciones  $x$ ,  $y$  (en el caso de la velocidad y los desplazamientos).

Así, el número de grados de libertad equivale al número de ecuaciones algebraicas que deben ser resueltas para encontrar el valor de las variables de estado en cada uno de los nodos de la malla de elementos finitos. De esta manera, se logra convertir un modelo matemático, expresado como un sistema de ecuaciones diferenciales con valores en la frontera (BVP), en un sistema de ecuaciones algebraicas, cuya solución requiere un paso intermedio de integración numérica. Esta necesidad surge debido a que cada sistema de

ecuaciones local (para cada elemento finito) parte de las Ecc. 23 y Ecc. 26, que implican (en dos dimensiones) la solución de integrales de superficie y de línea.

A pesar de que aquí no se presentan los detalles correspondientes a la integración numérica (Cook et al., 2002; Hutton, 2004; Reddy, 2006), se destaca que se utiliza el método de cuadratura de Gauss para obtener la aproximación numérica de cada una de las integrales. En este punto cobra especial importancia la formulación isoparamétrica, puesto que permite conservar el mismo esquema de integración independientemente de las coordenadas nodales en el sistema cartesiano global, pues las coordenadas naturales corresponden a límites de integración que siempre se encuentran entre 0 y 1.

Una vez se tiene el sistema global de ecuaciones algebraicas, es necesario utilizar un método no lineal para el campo de fluidos, debido a que el término advectivo en la Ecc. 22 es no lineal para la velocidad. Así, aunque la familia de los métodos de Newton (fundamentados en la linealización del término advectivo de acuerdo a su expansión en series de Taylor), en este trabajo se implementa el método de Picard o de iteración funcional (Reddy & Gartling, 2010), el cual consiste en realizar la evaluación directa de la velocidad en la iteración anterior ( $\mathbf{u}^n$ ) en el término no lineal y resolver el sistema de ecuaciones resultantes para obtener el nuevo vector solución ( $\mathbf{u}^{n+1}$ ), siguiendo la Ecc. 34. Este método se caracteriza por tener un mayor radio de convergencia (mayor independencia de la solución inicial) que la familia de los métodos de Newton. Aquí se selecciona este método por simplicidad en la implementación y, como se muestra en el capítulo de resultados (Capítulo 4), porque es suficiente para garantizar la convergencia de la solución del campo de fluidos para los problemas abordados (comportamiento monótonico de los residuales, sin oscilación significativa). Así, en cada iteración se evalúa el residual de la ecuación de equilibrio, hasta que se alcanza una tolerancia mínima que debe cumplirse (usualmente, un valor entre  $1e^{-6}$  y  $1e^{-8}$ ).

$$\mathbf{K}_c(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{K}_c(\mathbf{u}^n)\mathbf{u}^{n+1} \quad \text{Ecc. 34}$$

### 2.3.4 Interacción fluido-estructura

El acoplamiento de múltiples físicas (por ejemplo, térmico-estructural, magnético-eléctrico, eléctrico-térmico-estructural o fluido-estructural) en la modelación computacional representa desafíos que implican consideraciones adicionales a las que deben tenerse

cuando se soluciona cada problema por separado, motivo por el que es un campo activo en las investigaciones de vanguardia. Así, existen diversos escenarios que motivan la búsqueda de métodos para acoplar diversos sistemas en un único modelo computacional, de tal manera que se mejore la aproximación del modelo matemático al físico. En particular, la interacción fluido-estructura, por ejemplo, se suele considerar en las siguientes situaciones:

- Problemas en los que el desempeño del sistema depende fuertemente de fenómenos localizados en la capa límite del fluido (como es el caso del coeficiente de sustentación y arrastre en el diseño de perfiles aerodinámicos)
- Propagación de ondas mecánicas entre medios sólidos y fluidos
- Cargas dependientes del diseño

El primero de los casos ha sido ampliamente explorado para aplicaciones relacionadas con el sector transporte (incluyendo la ingeniería aeronáutica, automotriz, aeroespacial), en las cuales las deformaciones elásticas de los componentes estructurales implican un cambio significativo en el campo de presión-velocidad del fluido. La segunda aplicación mencionada resulta de especial interés en el modelamiento de fenómenos vibro-acústicos, en los cuales la distribución de ondas elásticas en un fluido dependen directamente de la respuesta transitoria de una estructura elástica (Akl, 2010; Axisa & Antunes, 2007; Yoon, 2010a). El tercer campo surge en aquellos problemas en los cuales la magnitud y dirección de las cargas ejercidas por un fluido sobre una estructura cambian conforme esta última se deforma (Picelli, Vicente, & Pavanello, 2015; Yoon, 2010b).

En el caso particular de las turbomáquinas es posible encontrar aplicaciones para cada uno de los tres casos mencionados; por ejemplo, respectivamente, en el diseño del perfil de los álabes de turbinas de gas, en el cálculo de la velocidad crítica para compresores de alta velocidad y en la definición de canales de refrigeración de rotores de turbinas, conforme se mostró en la sección 1.1. El presente trabajo hace parte del tercer conjunto de problemas, puesto que se busca definir la sollicitación mecánica de los rotores de turbomáquinas como consecuencia de la distribución de los campos de presión-velocidad en el fluido, estando dicha interacción condicionada por el diseño geométrico del rotor.

La interacción fluido-estructura básica parte de una igualación de las fuerzas en la interfaz entre los dos dominios. Esto es, partiendo de la formulación de elementos finitos de la Ecc.

23 y Ecc. 26, la interacción fluido-estructura se introduce mediante la condición de frontera de la Ecc. 35 (Yoon, 2010b), para cada elemento finito en la interfaz FSI.

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{T})_{fluido} = \mathbf{n} \cdot (h^e \mathbf{t}_s)_{sólido}, \text{ en la frontera } \Gamma_{fsi}^e \quad \text{Ecc. 35}$$

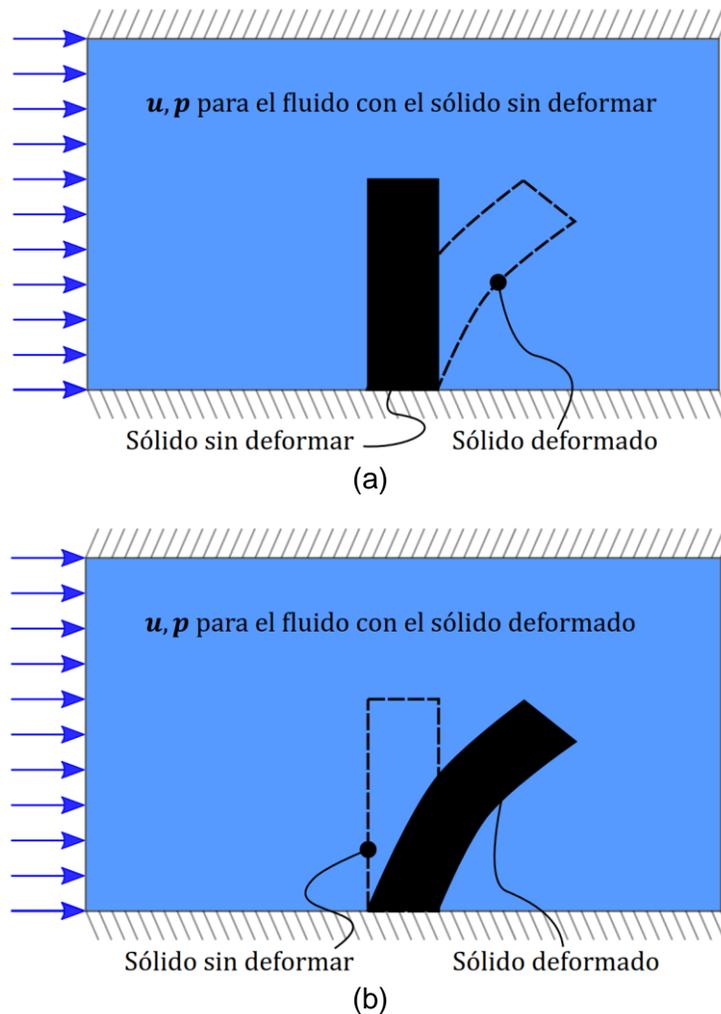
Donde  $\Gamma_{fsi}^e$  es la frontera entre el fluido y la estructura para el elemento finito  $e$  y  $\mathbf{n}$  es un vector normal a  $\Gamma_{fsi}^e$ . Debe tenerse presente que esta ecuación es genérica y su implementación específica depende del método de optimización topológica utilizado (detalles que se presentan en la sección 3.3). Sin embargo, en este trabajo se asume que la deformación de la estructura no implica un cambio significativo en el campo de presión-velocidad (pequeños desplazamientos). Esta simplificación es conocida como interacción fluido-estructura de una vía (one way FSI) e implica que el campo de fluidos es resuelto únicamente para la malla no deformada de la estructura. La interacción fluido-estructura en dos vías puede ser de especial importancia cuando se desea modelar grandes deformaciones o permitir cambios en la topología muy significativos entre cada iteración del algoritmo de optimización (ver Figura 2-2). Esta justificación es ampliada en el capítulo de resultados.

Asimismo, al considerar la interacción fluido-estructura, debido a que lo más común es utilizar una malla lagrangiana para el sólido y euleriana para el fluido, uno de los métodos tradicionales de acoplamiento entre las dos físicas es el Euleriano-Lagrangiano arbitrario (ALE) (Reddy & Gartling, 2010), en el que ambas mallas se acoplan en la interfaz al imponer la condición cinemática de la velocidad como derivada respecto al tiempo de la posición (directamente asociado al campo de desplazamientos). Lo anterior proviene del hecho de que las leyes de conservación para el fluido usualmente se formulan desde una perspectiva Euleriana; sin embargo, es necesario permitir que la interfaz FSI sea actualizada con los desplazamientos de la estructura, lo cual se realiza a través de una malla Lagrangiana.

De esta manera, todo el dominio es discretizado con grados de libertad del fluido, de tal modo que las regiones que corresponden a la estructura tienen una velocidad cero. Posteriormente, se encuentra el campo de deformaciones estructurales para todo el dominio (el fluido es modelado como un sólido con un módulo de Young que tiende a cero, para no aportar rigidez). Finalmente, los desplazamientos del campo estructural son

asignados a la malla del fluido para actualizar la ubicación de los nodos de la malla de fluidos de acuerdo a los desplazamientos estructurales (ver Figura 2-3). En este punto se destaca que este esquema está limitado a pequeñas deformaciones estructurales y por lo tanto no implica un remallado.

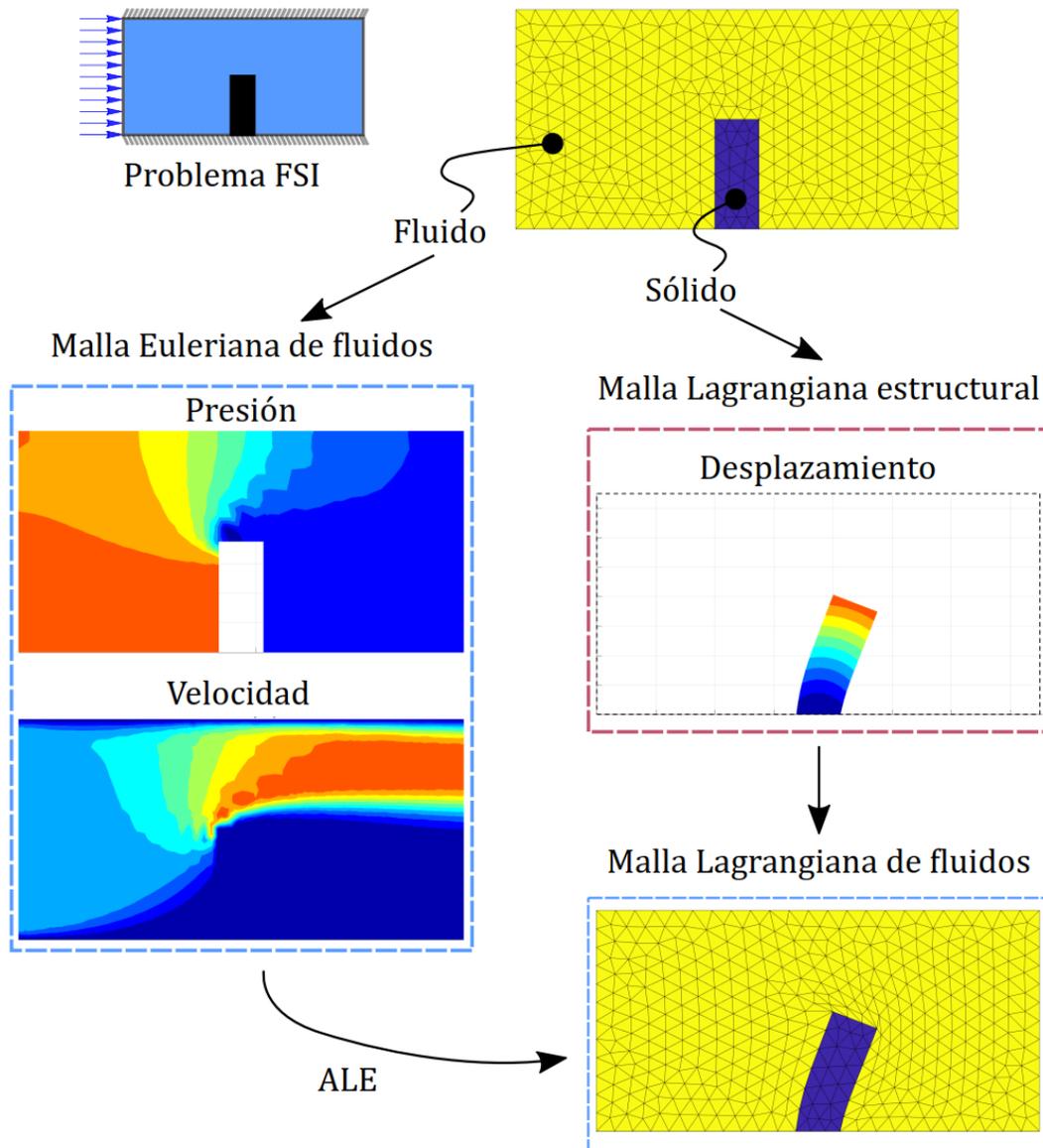
**Figura 2-2.** Interacción fluido estructura. (a) Una vía, (b) Dos vías



El abordaje anterior es conocido como interacción fluido estructura escalonada o secuencial (staggered) y facilita la modularidad del código de elementos finitos; en contraposición al abordaje monolítico, en el que las variables de estado del fluido y del sólido se obtienen de la solución de un único sistema de ecuaciones (Yoon, 2010b). Los detalles de modelación para la transferencia de cargas en la interfaz fluido-estructura se explican en el capítulo de optimización topológica (Sección 3.3), debido a que estos

dependen de si la frontera entre los dos dominios es explícitamente definida o se conserva una representación implícita.

**Figura 2-3.** Malla ALE para el fluido y Lagrangiana para el sólido, en un único dominio de diseño





## **3 Optimización topológica de componentes de turbomáquinas**

El presente trabajo se ha enmarcado dentro del uso de herramientas computacionales en problemas multifísicos para acompañar el proceso de diseño de componentes de turbomáquinas, cuya complejidad operativa impiden la generación de un procedimiento heurístico para la mejora del rendimiento que pueda ser costo-efectivo. Así, se dedica especial atención a introducir los métodos de optimización matemática como una alternativa directa para la generación de diseños óptimos y que frecuentemente resultan ser no intuitivos. Se decide contextualizar el método de optimización topológica (TOM) desde la perspectiva estructural y su posterior transición a la optimización de fluidos. Para posteriormente unificar ambos abordajes en la formulación de un único problema de optimización considerando la interacción fluido-estructura.

### **3.1 La optimización en el proceso de diseño**

El diseño de cualquier producto debe satisfacer las necesidades del usuario final, de tal manera que la dinámica de las sociedades lleva a que dichos requisitos sean cambiantes y los diseñadores deban ajustar constantemente sus diseños. Sin embargo, aunque es evidente que dicho proceso se aleja de ser estático, existe un componente acumulativo, posiblemente fundamentado en la funcionalidad básica del producto o en un paradigma de forma, aceptado convencionalmente por los usuarios, que sirve como punto de partida para los nuevos diseños y se convierte en la respuesta intuitiva a algún problema nuevo.

Así, a pesar de que la creatividad de los diseñadores permite abordar el proceso de diseño a través de diferentes perspectivas, introduciendo mejoras significativas en los productos, las preguntas para encontrar un diseño óptimo (por ejemplo, en términos de la capacidad de carga, la confiabilidad, la precisión y los costos) deben ser respondidas en las primeras etapas de diseño (fase conceptual) (Eschenauer & Olhoff, 2001), condicionando tempranamente las limitaciones del diseño final. Incluso, como lo destaca Sigmund (2000),

existen aplicaciones en las cuales el problema de diseño es tan complejo que el conocimiento empírico y la intuición del diseñador puede no ser suficiente para proponer alternativas de diseño que se traduzcan en una mejora de desempeño, como es el caso, por ejemplo, del diseño de satélites, de materiales con coeficiente de Poisson o de dilatación térmica negativos, de sistemas multifísicos como los Micro-Electro-Mecánicos (MEMS).

Es así como, la búsqueda por mejorar el diseño de componentes estructurales dio origen a la optimización estructural, la cual brinda a los diseñadores las herramientas matemáticas para obtener la mejor estructura que satisface ciertas restricciones de desempeño (usualmente, desplazamientos, deformaciones, esfuerzos y frecuencias naturales de vibración) y de producción (limitaciones en los costos y en los procesos de manufactura). En este punto es necesario destacar que, si bien los métodos de optimización se asocian directamente a algoritmos meramente matemáticos para mejorar la respuesta de un modelo determinado, indiferente de su aplicación, la optimización estructural es un campo consolidado cuyos principios sirven como referencia para los conceptos propios de optimización topológica y de ahí que se resalten sus características particulares para contextualizar el problema de investigación.

De este modo, una vez se tiene un modelo matemático para el problema de diseño, es decir, una función que permita obtener el valor de una variable de respuesta a partir de la relación entre diferentes factores, los algoritmos de optimización se utilizan para encontrar la combinación más adecuada de los valores de dichos factores; esto es, el diseño que optimiza la variable de respuesta. En términos matemáticos, la formulación de un problema de optimización (por convención, se suele escribir para minimización) se representa según la Ecc. 36 (Haftka & Gürdal, 1992, p. 9).

$$\begin{array}{l} \underset{x}{\text{minimizar}} f(x) \\ \text{Sujeto a: } g(x) \leq 0 \quad y \quad h(x) = 0 \end{array} \quad \text{Ecc. 36}$$

Donde

$x$	→	vector de parámetros (factores de diseño)
$f(x)$	→	función objetivo (variable de respuesta)
$g(x)$	→	restricciones de desigualdad
$h(x)$	→	restricciones de igualdad

Es común encontrar en las restricciones de igualdad las leyes físicas propias del problema bajo análisis, lo cual, en el caso de optimización topológica, se traduce en la solución del sistema de ecuaciones de elementos finitos. Por consiguiente, optimizar consiste en encontrar  $x^*$ , tal que se satisface la Ecc. 37 (Boom & Schutter, 2007, p. 4).

$$x^* = \arg \left( \min_x f(x) \right) \quad \text{Ecc. 37}$$

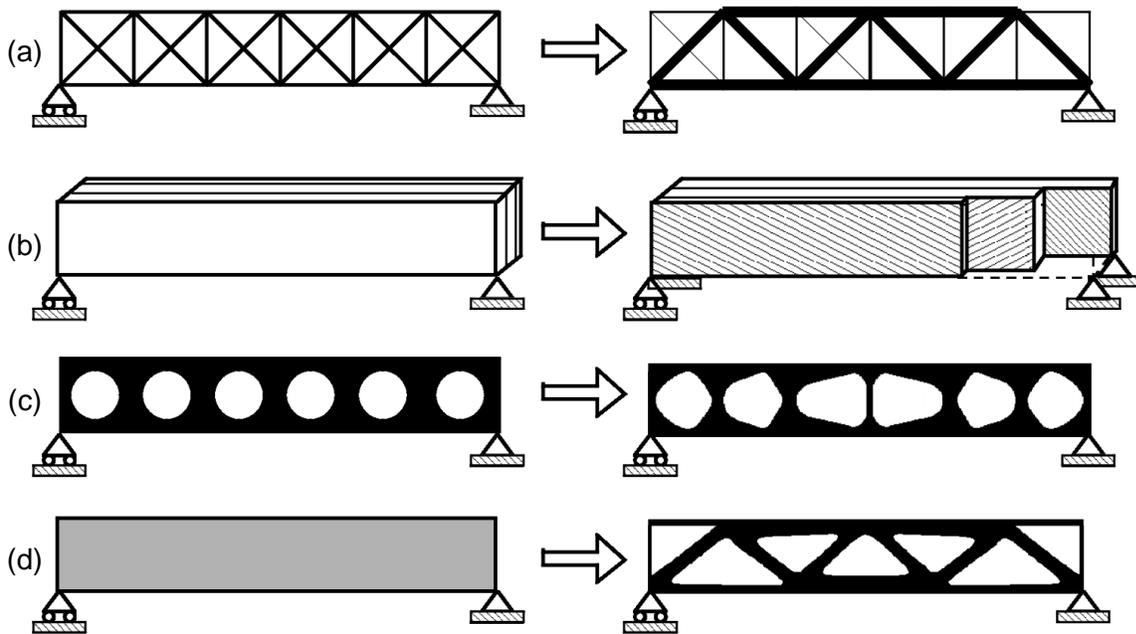
Visto de esta manera, resulta natural asumir que implementar herramientas de optimización en los procesos de diseño es independiente del diseñador, pues la solución encontrada proviene de algoritmos completamente matemáticos. No obstante, la afirmación anterior no es válida en su totalidad y requiere del análisis de dos perspectivas opuestas, pero complementarias: por un lado, una de las grandes ventajas de la optimización es que permite obtener diseños que probablemente no pertenecen a las soluciones encontradas en el estado del arte referente a cierta temática, sirviendo como origen para la creación de soluciones óptimas no intuitivas (Campelo et al., 2010), lo cual representa un gran potencial para el diseño conceptual de un producto. Por otro lado, los modelos matemáticos son una representación aproximada de la realidad, por lo que la participación del diseñador es vital para identificar cuáles factores no pueden ser incluidos en el modelo y utilizar su creatividad para determinar cómo dicha situación afecta el diseño final (Eschenauer & Olhoff, 2001). Incluso, los algoritmos de optimización dependen de parámetros que son establecidos por el diseñador y, por lo tanto, este debe seleccionarlos según su conocimiento del problema a resolver o a las soluciones tradicionales que se encuentran en la industria y en la literatura.

Los métodos de optimización estructural suelen ser clasificados en cuatro categorías (Ole Sigmund, 2000): optimización de tamaño, de material, de forma y topológica. En la primera categoría, la optimización de tamaño, se parte de que se conoce el diseño general de la estructura y se desea definir el valor óptimo de algunas de las características geométricas (por ejemplo, longitud, diámetro, radio de redondeo o área de sección transversal). En la optimización de material se busca la combinación de propiedades que ofrece el mejor desempeño en una condición de carga establecida, en especial, es de utilidad para determinar la orientación y el espesor de las capas de materiales compuestos o la composición de materiales funcionalmente gradados (Miyamoto et al., 1999). La optimización de forma parte de un dominio de diseño inicial y se concentra en la

modificación de sus fronteras. Finalmente, la optimización topológica, foco de la presente investigación, busca la distribución de material óptima en el interior de un dominio de diseño, sin tener restricciones sobre parámetros previamente definidos.

Para ejemplificar la diferenciación anterior, en la Figura 3-1 se considera el problema de reducción del peso de una viga conservando su rigidez, desde cada una de las perspectivas de optimización: la optimización de tamaño conduce a la determinación del área de la sección transversal de cada uno de los elementos estructurales (partiendo de un diseño tipo cercha), la optimización de material podría traducirse en la selección de los laminados para formar una viga de materiales compuestos (espesor y dirección de las capas de cada uno de los materiales), la optimización de forma permitiría definir el contorno de cierto número de agujeros en el interior de la viga y la optimización topológica determina las regiones que deben tener material y aquellas que pueden tener vacíos.

**Figura 3-1.** Cuatro categorías de optimización estructural: (a) optimización de tamaño, (b) optimización de material, (c) optimización de forma y (d) optimización topológica



**Fuente:** Tomado de (Ole Sigmund, 2000, p. 212)

Aunque en el ejemplo anterior es evidente que el diseño resultante depende del método de optimización utilizado, es de gran importancia analizar el dominio de partida en cada uno de los casos, de tal manera que se aprecia que la optimización topológica parte de un dominio mucho más general que los demás: la optimización de tamaño parte de una cercha específica, la de material requiere definir previamente la cantidad de laminados y asume

que toda la superficie está cubierta, la optimización de forma parte de un número de agujeros establecido, mientras que la optimización topológica no impone limitaciones en el dominio de diseño (simplemente que sea finito).

Adicionalmente, se considera necesario mencionar que tanto la optimización de tamaño como la de material se encuentran dentro de un conjunto más amplio denominado optimización paramétrica, la cual incluye técnicas de optimización que se limitan a la determinación del valor que debe ser asignado a ciertos parámetros (geométricos o de material) establecidos a priori. Por otro lado, la optimización no paramétrica (conjunto al cual pertenece la optimización topológica) permite obtener diseños más robustos, pues no requieren una fuerte limitación del dominio de diseño. La optimización de forma puede ser paramétrica o no paramétrica, dependiendo de si la frontera del dominio de diseño debe ajustarse o no a una forma predefinida, incluso la optimización topológica suele considerarse como una optimización de forma generalizada.

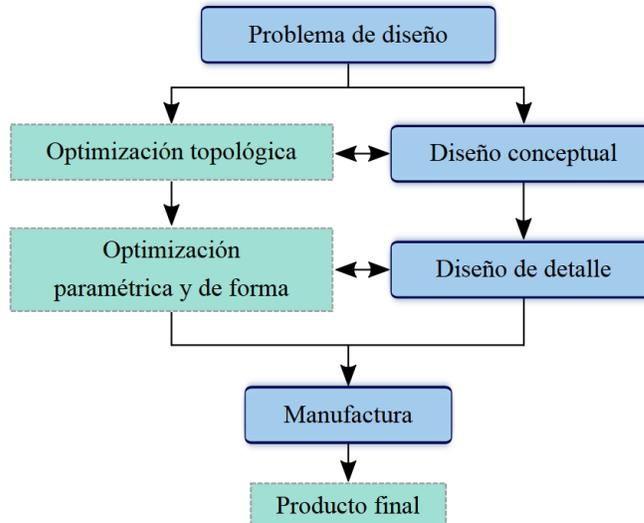
Si bien la clasificación de las técnicas de optimización permite reconocer ciertas ventajas y limitaciones de unas respecto a las otras, su implementación en un proceso de diseño no es exclusiva y es común encontrar que son utilizadas secuencialmente, de tal manera que la optimización topológica permite analizar la distribución óptima del material que se convierte en el diseño conceptual y posteriormente, dicho diseño es refinado mediante optimización de forma o paramétrica (diseño de detalle) (Buckney et al., 2012; Eschenauer & Olhoff, 2001).

En la Figura 3-2 se presenta una de las maneras como puede ser introducida la optimización en un proceso de diseño convencional (considerando solo las etapas básicas y sin tener en cuenta actividades de retroalimentación, como la de evaluación y ajuste de prototipos). Es importante tener presente que, dependiendo del problema específico y de las técnicas de optimización utilizadas, es posible que el resultado de la optimización topológica pueda abarcar todo el ciclo de diseño (tanto el diseño conceptual como de detalle) y su resultado pase directamente a la etapa de manufactura (O. Sigmund & Bendsøe, 2004).

Aunque los ejemplos presentados hasta este momento han sido únicamente estructurales, los mismos principios fundamentales han sido aplicados en el caso de fluidos y por lo tanto, es posible encontrar trabajos para cada uno de los tipos de optimización en los que se busca distribuir un fluido específico en un dominio de diseño, con el objetivo de optimizar

alguna variable de desempeño del flujo. Por ejemplo, Baloni, Pathak, y Channiwala (2015) para optimización paramétrica de las características geométricas de la voluta de una máquina sopladora; Hinterberger y Olesen (2011) para optimización de forma del escape de un automóvil, y Romero y Silva (2014) para optimización topológica del rotor de turbomáquinas de flujo radial.

**Figura 3-2.** Esquema de la implementación de la optimización en un proceso de diseño convencional



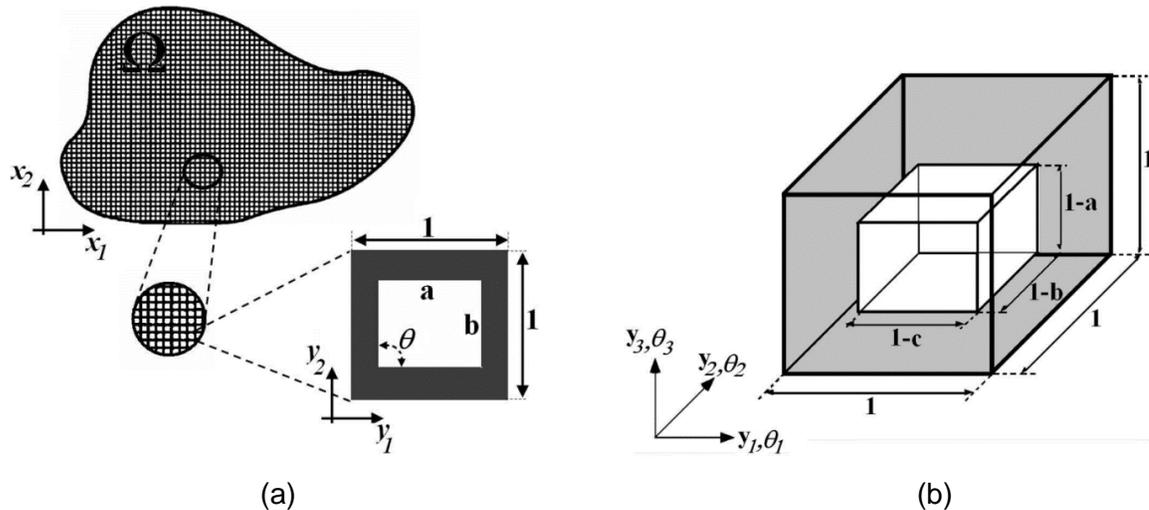
### 3.2 El método de optimización topológica

La introducción de la optimización topológica como un método computacional para el diseño de estructuras óptimas se le atribuye a Bendsøe y Kikuchi (1988), quienes desarrollaron el método conocido como homogenización para la minimización del peso de estructuras sujetas a restricciones de rigidez. Dicho método parte de la representación de un dominio de diseño finito como un cuerpo celular con una microestructura periódica, de tal manera que los parámetros de dicha microestructura son seleccionados para optimizar la respuesta efectiva del cuerpo.

En la Figura 3-3 se presenta un ejemplo de homogenización, en el cual la celda básica de la microestructura es definida a partir de 3 (tres) variables de diseño en el caso 2D (el espesor de la pared superior e inferior y el ángulo de inclinación de los lados) y de 6 (seis) variables de diseño en el caso 3D (el espesor de cada una de las paredes y los ángulos de inclinación). Debido a que el método parte de que un continuo es llevado al dominio discreto (múltiples celdas básicas), el espacio de solución generado, para el caso de  $m$

variables de diseño, es de orden  $\mathbb{R}^{mijk}$ , donde  $i, j$  y  $k$  representan el número de elementos estructurales discretos (celdas básicas) en cada una de las direcciones de un espacio tridimensional. Por lo tanto, asumiendo que el dominio de diseño tiene una malla de 10 elementos en cada dirección, el problema de optimización sería de  $\mathbb{R}^{300}$  (2D) y  $\mathbb{R}^{3000}$  (3D), reflejándose el gran número de variables de diseño como una de sus principales desventajas (Campelo et al., 2010).

**Figura 3-3.** Ejemplo de homogenización en optimización topológica: (a) caso 2D, (b) caso 3D



**Fuente:** Tomado de (Campelo et al., 2010, p. 8)

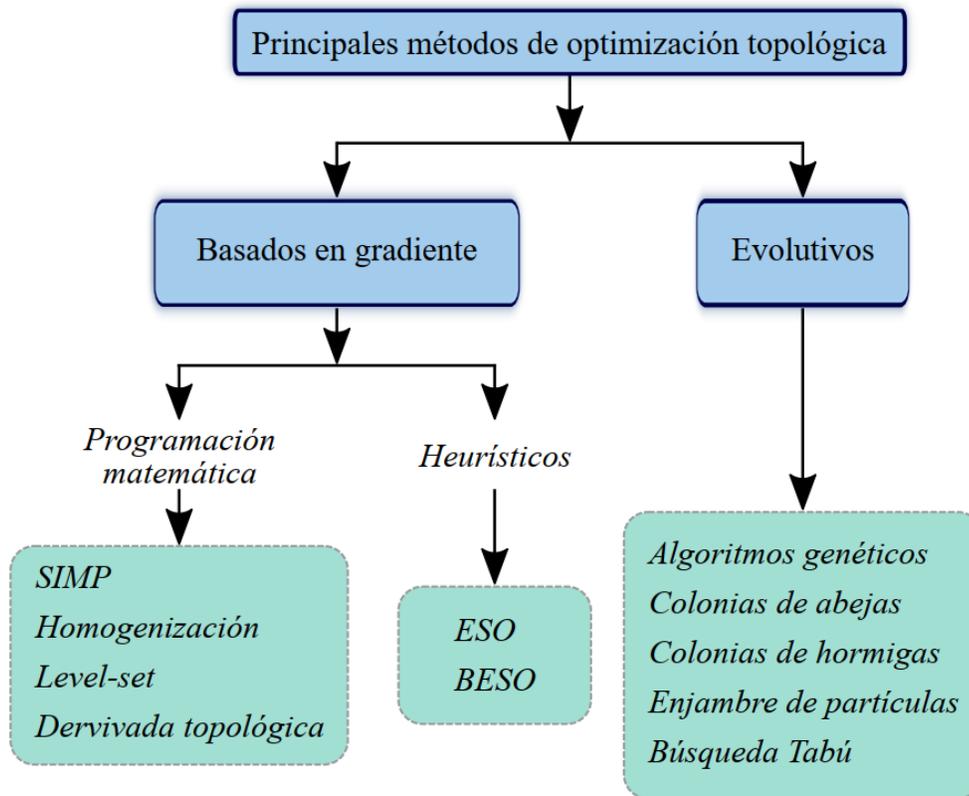
Debido a que Bendsøe y Kikuchi (1988) dejan claro que el éxito del método de optimización topológica utilizando homogenización, requería de ciertos avances tecnológicos en los procesos de manufactura (para generar los agujeros que garanticen la microestructura periódica), la técnica se encontró contra cierto escepticismo en el campo de la optimización estructural; no obstante, gracias a su gran potencial, fue incorporada paulatinamente en la industria automovilística, aeronáutica y espacial, extendiéndose posteriormente a las más diversas aplicaciones (Ole Sigmund, 2000). Otra de las desventajas del método de homogenización es que la determinación y evaluación de las microestructuras óptimas y su orientación es difícil o irresoluble (para problemas diferentes a los de maximización de rigidez); sin embargo, este método es de gran importancia para proveer cotas teóricas para el desempeño de una estructura (O. Sigmund, 2001).

Las propuestas de Bendsøe (1989) y de Rozvany y Zhou (1991a, 1991b) dieron origen a otro de los grandes paradigmas en el campo de la optimización topológica: Material

(originalmente, Microestructura) Sólido Isotrópico con Penalización (SIMP). Este modelo de material se diferenció de la homogenización porque introdujo la posibilidad de utilizar materiales ficticios, con densidades intermedias, las cuales son progresivamente penalizadas hasta que se tiene un diseño únicamente de material sólido y vacíos (Campelo et al., 2010). Esto es, el problema discreto, característico de la homogenización, fue convertido a un dominio continuo en el que solo se tiene una variable de diseño por cada elemento de la malla de discretización espacial, reduciendo significativamente el espacio de las posibles soluciones del problema de optimización.

Ambos métodos anteriores (homogenización y SIMP) hacen parte de la familia de métodos TOM de programación matemática, los cuales son formulados a partir de las condiciones de optimalidad de un problema de optimización tradicional y son adaptados a la formulación discreta del FEM (ver Figura 3-4). Otros métodos dentro de esta familia son el método Level-set (LS) (Jenkins & Maute, 2015) y el de derivada topológica (Sá et al., 2017), siendo el primero de estos de especial atractivo para los problemas TOM en los que se tiene una interfaz explícita (como podría ser el caso, por ejemplo, de problemas FSI).

Asimismo, los métodos de programación matemática hacen parte de un conjunto mayor que son aquellos basados en gradiente, puesto que en cada iteración del algoritmo TOM, utilizan el análisis de sensibilidad para actualizar las variables de diseño en una dirección en la que se maximiza la mejora de la función objetivo. A esta categoría también pertenecen los métodos heurísticos de muerte súbita (sudden death o hard kill), como el de optimización estructural evolutiva (ESO) y el de optimización estructural evolutiva bidireccional (BESO), en los cuales se utiliza un índice de desempeño para eliminar elementos finitos que en la iteración anterior tenían material e introducir otros en regiones que tenían vacíos (Rozvany, 2009). Todos estos métodos son de optimización local, en contraposición a los métodos de búsqueda global, como el de branch and bound, y aquellos netamente heurísticos, usualmente inspirados en algoritmos evolutivos (como los algoritmos genéticos, colonia de abejas, enjambre de partículas, búsqueda tabú, entre otros) (Rozvany & Lewiński, 2014). El abordaje planteado aquí se concentra en el método de densidades, el cual no requiere una definición explícita de la interfaz FSI.

**Figura 3-4.** Clasificación de los métodos más comunes de optimización topológica

Así, al buscar la distribución óptima del material en un dominio de diseño específico, un problema de optimización topológica puede formularse según dos perspectivas: en la primera, se fija la fracción de volumen del espacio de diseño que se desea obtener en el volumen final y se optimiza el valor de cierta función objetivo, sujeto a varias restricciones; la segunda opción consiste en minimizar la fracción de volumen satisfaciendo las restricciones (es decir, el volumen es la función objetivo) (Buckney et al., 2012). Es así como, cuando se tienen problemas multifísicos o con funciones multiobjetivo (situación frecuente en el diseño de turbomaquinaria), es más común emplear el primer abordaje, esto es, considerar el volumen dentro de las restricciones del problema. El método de densidades lleva a obtener como resultado final de la optimización, un conjunto de valores entre 0 (vacío) y 1 (material sólido) que definen la presencia de material en un elemento discreto del espacio de diseño. Como consecuencia de lo anterior, al permitir valores intermedios, las topologías obtenidas a través de los métodos tradicionales originan una escala de grises, es decir, algunos elementos discretos tienen un valor de la propiedad de material que no representa ni aire (vacío) ni material sólido, por lo que es necesario utilizar

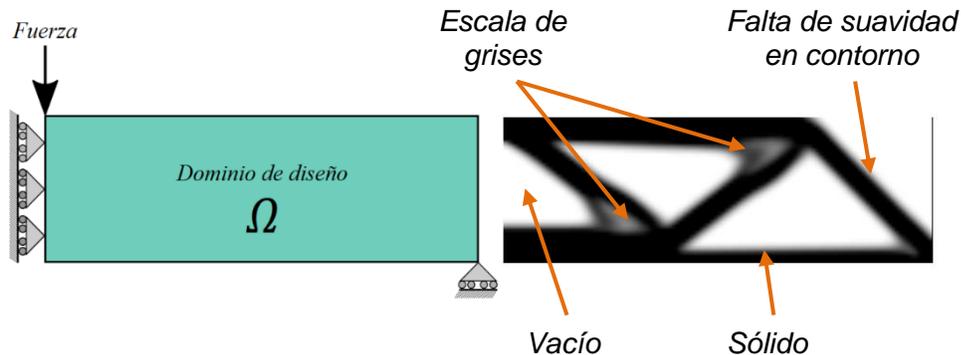
algún criterio de penalización que lleve el diseño final a un resultado estrictamente negro-blanco (O. Sigmund & Bendsøe, 2004).

En términos generales, el método de optimización topológica parte de un dominio de diseño fijo, con unas condiciones de frontera determinadas, con una distribución de material inicial y posiblemente con la ubicación de algunas regiones para las cuales se desea imponer si es sólida o vacía (Bendsøe & Sigmund, 2003, p. 1). Luego, se realizan pequeños cambios en la distribución del material, de tal manera que se obtenga una mejora en la función objetivo (análisis de sensibilidad) y el proceso se repite iterativamente hasta que no se logra encontrar una mejora significativa, momento en el cual se dice que se alcanza la convergencia y por lo tanto dicho resultado corresponde a la distribución óptima del material.

Es importante tener presente que el óptimo encontrado es usualmente un óptimo local (dependiendo de la convexidad del problema) y, aunque puede no ser la solución óptima global, dicho resultado optimizado es completamente útil desde el punto de vista ingenieril, pues representa una mejora respecto a una condición de diseño de referencia. Adicional a esto, es posible cambiar los parámetros de la optimización, buscando otros óptimos locales con un mejor valor en la función objetivo.

A manera de ejemplo, en la Figura 3-5 se presenta la topología obtenida para dar solución al problema de maximización de la rigidez de una viga, partiendo de que el volumen máximo de material a utilizar es del 50% del dominio de diseño. Dicha topología fue obtenida utilizando el código para Matlab desarrollado por Sigmund (2001) para el método SIMP, con una discretización de 120x40 elementos finitos. Adicionalmente, en esta figura se destaca el problema de escala de grises que se observa en la unión entre los elementos estructurales y la falta de suavidad en el contorno de la estructura, situación que suele abordarse mediante la implementación de filtros y técnicas de postprocesamiento.

**Figura 3-5.** Ejemplo de optimización topológica utilizando el método SIMP para el diseño de una viga



**Fuente:** Topología obtenida con el código de Sigmund (2001)

### 3.2.1 Formulación TOM estructural

La formulación de un problema de optimización topológica depende del campo específico del problema de diseño; en particular, a nivel estructural, el problema más común de optimización consiste en la maximización de la rigidez de una estructura sometida a una condición de carga estática, en un régimen elástico de deformación y teniendo como restricción un valor máximo para la fracción de volumen de material respecto al espacio de diseño. Este problema es equivalente al de minimizar la flexibilidad de la estructura, definida como el trabajo de las cargas externas para generar los desplazamientos a partir del estado de equilibrio; esto es, minimizar la energía total elástica (Eschenauer & Olhoff, 2001).

En este punto es necesario destacar la relación directa que existe entre la optimización topológica y el método de los elementos finitos, ya que, en cada iteración del algoritmo de optimización, la evaluación de la función objetivo requiere encontrar el campo de alguna variable física (por ejemplo, desplazamiento, esfuerzo, presión, velocidad, temperatura o voltaje) en el dominio de diseño. Consecuentemente, el método de los elementos finitos permite aproximar el comportamiento global del continuo, a través de ecuaciones cuya formulación se facilita para regiones geoméricamente simples (elementos finitos), mediante la contribución de cada uno de los elementos discretos en los cuales es dividido, asociando las propiedades de los materiales modelados con la sollicitación de carga a la cual es sometido (Bathe, 1996; Chandrupatla & Belegundu, 2002; Cook et al., 2002; Zienkiewicz et al., 2005).

Adicional a esto, la discretización del dominio de diseño se traduce de manera directa al método de optimización topológica, de tal modo que se define si cada elemento finito contribuye o no (o por lo menos, en qué medida) a la respuesta global del continuo, lo cual se convierte en un criterio para definir si dicho elemento debe ser sólido (presencia de material) o vacío.

A modo de ejemplo, siguiendo la nomenclatura de la formulación FEM estructural de la Ecc. 26, si se tiene un dominio de diseño estructural  $\Omega$ , discretizado en una malla de  $N_{el}$  elementos finitos, el problema de optimización para minimizar flexibilidad (maximizar rigidez) es formulado como en la Ecc. 38 (O. Sigmund, 2001).

$$\min_{\alpha} c(\alpha) = \frac{1}{2} \mathbf{U}_s^T \mathbf{K}_s \mathbf{U}_s = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_{el}} (\alpha_e)^q \mathbf{u}_s^T \mathbf{k}_s \mathbf{u}_s$$

Sujeto a restricciones de:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Volumen: } \sum_{e=1}^{N_{el}} \alpha_e V_e - V^* \leq 0 \\ \text{Estabilidad: } 0 < \alpha_{min} \leq \alpha_e \leq 1 \\ \text{Ley física: } \mathbf{K}_s \mathbf{U}_s = \mathbf{F}_s \end{array} \right. \quad \text{Ecc. 38}$$

Donde

$c$	→ flexibilidad (compliance) - escalar	media	$\mathbf{K}_s$	→ matriz global de rigidez
$\alpha$	→ vector de parámetros de diseño		$\mathbf{u}_s$	→ vector de desplazamientos a nivel del elemento finito
$\mathbf{U}_s$	→ vector global de desplazamientos		$\mathbf{k}_s$	→ matriz de rigidez a nivel del elemento finito
			$q$	→ factor de penalización

La restricción de volumen establece una cota superior para el volumen ocupado por la topología final, donde  $V^*$  representa una fracción del dominio de diseño. Aunque desde el punto de vista conceptual  $\alpha_e \in [0,1]$ , es necesario utilizar una cota inferior para el valor de la pseudodensidad ( $\alpha_{min}$ ) para evitar problemas de singularidad en el momento de aplicar el análisis de elementos finitos. Por su parte, la restricción de igualdad es la que introduce el fenómeno físico en el modelo de optimización, de tal manera que se utiliza la formulación propia del método de los elementos finitos para encontrar el vector de desplazamientos

para la distribución de material de cada iteración. En este punto se destaca que es común encontrar en la literatura la representación de  $\rho$  como variable de diseño; no obstante, aquí se decide aplicar la notación con  $\alpha$ , la cual es empleada en la optimización topológica de fluidos, para evitar su confusión con la densidad del fluido como propiedad termodinámica.

Adicionalmente, en la función objetivo se observa que la variable de diseño  $\alpha_e$  hace parte de la función de penalización de grado  $q$ . Así, un valor de  $q = 1$  equivale a modelar el problema de optimización continuo, que genera el problema de la escala de grises; es decir, el diseño final tiene elementos finitos cuyo valor de pseudodensidad origina una propiedad intermedia entre el material sólido y el vacío, lo cual no tiene un significado físico si se asume un diseño con un material homogéneo e isotrópico (por supuesto, la situación cambia si se utilizan materiales compuestos). Paralelamente, entre mayor sea el valor de  $q$ , más se aproxima el problema al de variables discretas ( $\alpha_e \in \{0,1\}$ ), lo cual, si bien refleja la situación deseada, origina los problemas numéricos por los que el modelo discreto es llevado al dominio continuo (como la escala de grises, el tablero de ajedrez y la dependencia de la malla de discretización). Por lo tanto, el valor para el parámetro  $q$  debe ser seleccionado para cada problema específico.

En el campo de la optimización estructural es común utilizar materiales (como el acero) para los cuales el módulo de Poisson es  $\nu = 1/3$ , en cuyo caso Bendsoe y Sigmund (1999) demostraron que la función de penalización tiene factibilidad física si  $q \geq 3$ . Este resultado proviene del hecho de que el tensor de rigidez de las dos fases (sólido-vacío) debe satisfacer la condición de Hashin-Shtrikman y, por lo tanto, el mismo principio puede utilizarse para definir  $q$  para materiales con un coeficiente de Poisson distinto de  $\nu = 1/3$ . Otra de las alternativas sugeridas en la literatura es iniciar con un valor de  $q = 1$  e incrementarlo paulatinamente hasta  $q = 5$ , conforme avanzan las iteraciones de la optimización (Rozvany, 2001).

Los pasos necesarios para resolver un problema de optimización topológica suelen encontrarse con inconvenientes que pueden ser abordados desde la misma formulación. Es por esto que es común encontrar diferentes representaciones matemáticas para cada problema; en particular, la maximización de la rigidez de una estructura con restricciones sobre su peso fue propuesto de una manera alternativa por Sigmund (2007), partiendo de que, entre otras ventajas, dicha formulación facilita la implementación de diferentes

técnicas de filtrado (aplicadas en la solución del problema de optimización para obtener topologías libres de la escala de grises). Esta formulación se encuentra en la Ecc. 39.

$$\begin{aligned} \min_{\alpha} c(\alpha) &= \frac{1}{2} \mathbf{U}_s^T \mathbf{K}_s \mathbf{U}_s = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_{el}} E_e(\alpha_e) \mathbf{u}_s^T \mathbf{k}_s^0 \mathbf{u}_s \\ &= \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_{el}} [E_{min} + (E_0 - E_{min})(\alpha_e)^q] \mathbf{u}_s^T \mathbf{k}_s^0 \mathbf{u}_s \end{aligned} \quad \text{Ecc. 39}$$

$$\text{Sujeto a: } \begin{cases} \sum_{e=1}^{N_{el}} \alpha_e V_e - V^* \leq 0 \\ 0 \leq \alpha_e \leq 1 \\ \mathbf{K}_s \mathbf{U}_s = \mathbf{F}_s \end{cases}$$

Donde  $E_0$  es el módulo de Young del material sólido,  $E_{min}$  es la rigidez del material vacío,  $\mathbf{k}_s^0$  es la matriz de rigidez con módulo de Young unitario del elemento finito  $e$ . A pesar de que la formulación es similar a la presentada en la Ecc. 38, se destaca que en este caso el mínimo valor de rigidez es independiente del factor de penalización  $q$  y que la pseudodensidad no debe restringirse con una cota inferior, esto es,  $\alpha_e \in [0,1]$ .

El problema de maximización de rigidez y minimización de volumen es el más común en optimización topológica estructural; sin embargo, es posible definir funciones objetivo y restricciones que permiten modelar otros fenómenos físicos. En especial, se reconoce el potencial de la introducción de restricciones de esfuerzos (Le, Norato, Bruns, Ha, & Tortorelli, 2010); esto es, garantizar que la topología obtenida tenga una distribución de esfuerzos que no superen el esfuerzo de fluencia del material, resultado que puede asociarse incluso con la vida útil esperada para algún componente mecánico, como por ejemplo, el rotor de una turbomáquina. Adicionalmente, el problema de optimización topológica puede ser complementado con un análisis modal (Yoon, 2010a), bien sea en la definición de la función objetivo o en las restricciones, de tal manera que la frecuencia de vibración natural del componente estructural que se esté analizando se aleje de la frecuencia de operación del sistema, garantizando así que los efectos dinámicos no comprometan la estabilidad en el funcionamiento del equipo, por vibraciones no controladas que pueden generar daños sobre los componentes.

### 3.2.2 Formulación TOM para flujo poroso

Los principios fundamentales de la optimización estructural han sido aplicados en el caso de fluidos y, por lo tanto, es posible encontrar trabajos para cada uno de los tipos de optimización en los que se busca distribuir un fluido específico en un dominio de diseño, con el objetivo de optimizar alguna variable de desempeño del flujo. Por ejemplo, Baloni, Pathak, y Channiwala (2015) para optimización paramétrica de las características geométricas de la voluta de una máquina sopladora, Hinterberger y Olesen (2011) para optimización de forma del escape de un automóvil, y Romero y Silva (2014) para optimización topológica del rotor de turbomáquinas de flujo radial.

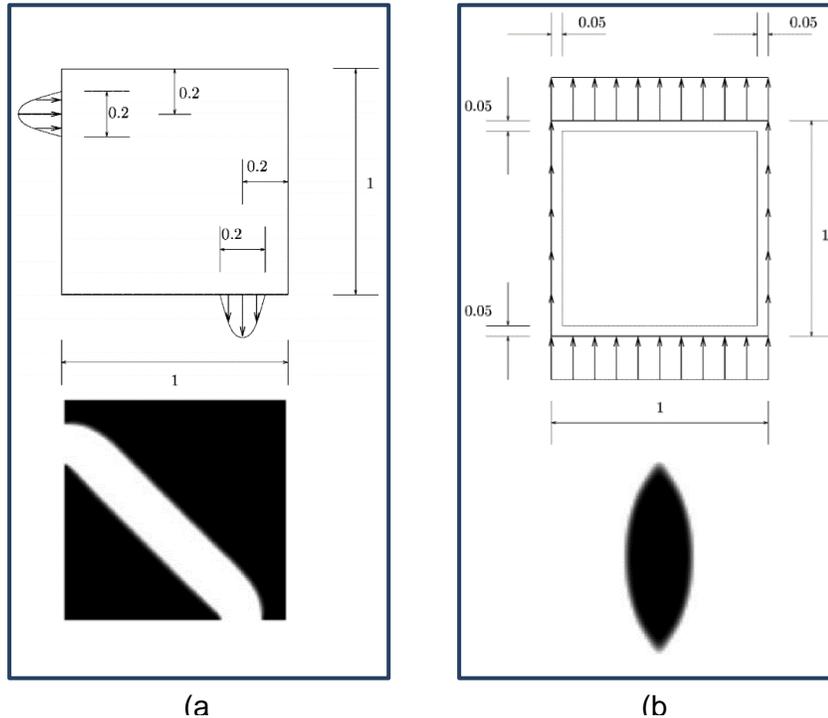
De esta manera, los conceptos propios de la optimización estructural se tradujeron a una representación del dominio de diseño como un medio poroso, usando su permeabilidad como la variable de diseño. Las regiones completamente permeables se pueden interpretar como el fluido y las que son impermeables como el sólido, generando trayectorias eficientes para el flujo a diseñar (Deaton & Grandhi, 2014).

Borrvall y Petersson (2003) son los pioneros en la aplicación de la optimización topológica para el diseño eficiente de flujos, de tal modo que desarrollaron la formulación matemática del problema de optimización considerando el modelo de flujo de Stokes, para fluidos incompresibles, tomando como función objetivo la minimización de la energía disipada y con restricciones de volumen. Así, la optimización fue ejemplificada con flujos en tuberías y en el diseño de la forma de estructuras inmersas en el interior de un flujo (Figura 3-6). En su formulación original, el sólido correspondía a la región con menor permeabilidad (un valor pequeño, distinto de cero), pero dicha situación fue llevada a sus condiciones extremas (esto es, con permeabilidad igual a cero) por Evgrafov (2005).

Bajo este contexto, el interés investigativo se ha concentrado en gran medida en la aplicación de otros modelos de flujo, como el de Navier-Stokes (Gersborg-Hansen, Sigmund, & Haber, 2005) o el de Darcy-Stokes (Wiker, Klarbring, & Borrvall, 2007). Adicionalmente, se han desarrollado diferentes alternativas para modelar la interacción estructura-fluido (como la propuesta por Yoon (2010b)), problema que ha representado un reto para la optimización topológica, no solo porque se deban resolver en conjunto los dos problemas de optimización (el del sólido y el del fluido), sino porque la dirección y ubicación de las cargas ejercidas por el fluido sobre la estructura varían conforme lo hace la topología (son dependientes del diseño). Ejemplos de esta situación se presentan en los problemas

de presión hidrostática en compuertas sumergidas, cilindros a presión o estructuras tipo arco que sostienen el peso de algún fluido (como por ejemplo, el peso de la nieve sobre un techo) (B. C. Chen & Kikuchi, 2001).

**Figura 3-6.** Dominio de diseño y topología óptima de (a) flujo en tuberías y (b) flujo alrededor de un cuerpo



**Fuente:** Tomado de (Borrvall & Petersson, 2003, pp. 99–100)

Es así como, una vez definido el dominio de diseño poroso, se procede con su discretización espacial en elementos finitos (aunque el método más común en la dinámica de fluidos computacional es el de volúmenes finitos, los elementos finitos tienen la relación directa con la optimización topológica y por lo tanto es el método más utilizado). En particular, en este trabajo resulta más conveniente utilizar el método de los elementos finitos, debido a que las funciones de optimización son altamente no lineales y el análisis de sensibilidad se dificulta con el método de los volúmenes finitos. El modelo del fenómeno físico depende de las características específicas del flujo considerado; así, para el caso de fluidos Newtonianos e incompresibles, las ecuaciones de Navier-Stokes (conservación del momento lineal) permiten encontrar el campo de velocidades y de presión (Ecc. 3).

Por otro lado, la optimización topológica en fluidos también requiere de funciones de penalización diferentes para lograr modelar correctamente la permeabilidad del dominio de

diseño mediante el cálculo de un factor de absorción  $\kappa$ . Originalmente, Borrvall y Petersson (2003) propusieron la función de penalización de la Ecc. 40.

$$\kappa(\alpha_e) = \kappa_{max} + (\kappa_{min} - \kappa_{max})\alpha_e \frac{1+q}{\alpha_e+q} \quad \text{Ecc. 40}$$

Donde  $\kappa \in [\kappa_{min}, \kappa_{max}]$ ,  $\alpha_e$  corresponde al valor de la variable de diseño para el elemento finito  $e$  y  $q$  es un parámetro de penalización que define el grado de convexidad de la función  $\kappa(\alpha_e)$ . Así, si  $\alpha_e \approx 1 \rightarrow \kappa(\alpha_e) \approx \kappa_{min}$  y se tiene un flujo viscoso, mientras que si  $\alpha_e \approx 0 \rightarrow \kappa(\alpha_e) \approx \kappa_{max}$ , lo cual representa un flujo muy restringido (región sin flujo que posteriormente es interpretada como sólida). En este punto debe prestarse especial atención debido a que para el modelo de material de la Ecc. 40 se asume que  $\alpha_e = 1$  representa fluido, en contraposición al análisis estructural, en el que sucedía lo contrario. Esta situación es común observarse cuando se aborda el problema de optimización desde la perspectiva de cada física por separado, realizando la asignación del material que favorecen las ecuaciones de FEM mediante  $\alpha_e = 1$ . Sin embargo, más adelante se presenta una formulación unificada en el que se realizan las modificaciones necesarias para que los modelos de material sean compatibles al considerar la interacción fluido-estructura.

Así, el problema de optimización se formula como en la Ecc. 41.

$$\begin{aligned} & \min_{\alpha} f(\mathbf{z}(\alpha), \alpha) \\ \text{Sujeto a: } & \begin{cases} \mathbf{g}(\mathbf{z}(\alpha), \alpha) \leq 0 \\ \mathbf{h}(\mathbf{z}(\alpha), \alpha) = 0 \\ \alpha_{min} \leq \alpha_e \leq \alpha_{max} \end{cases} \end{aligned} \quad \text{Ecc. 41}$$

Donde

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}(\alpha), \alpha) & \rightarrow \text{función objetivo} \\ \mathbf{g}(\mathbf{z}(\alpha), \alpha) & \rightarrow \text{restricciones de desigualdad} \\ \mathbf{h}(\mathbf{z}(\alpha), \alpha) & \rightarrow \text{restricciones de igualdad} \\ \mathbf{z} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{p}]^T & \rightarrow \text{vector con los grados de libertad de fluidos} \end{aligned}$$

Usualmente  $f(\mathbf{z}(\alpha), \alpha)$  corresponde a la energía disipada, aunque también puede plantearse una función multiobjetivo que dependa además de factores como la vorticidad

y la potencia mecánica (Romero & Silva, 2014). Las restricciones de desigualdad  $g(\mathbf{z}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha})$  suelen ser de volumen (equivalente al caso estructural). Finalmente, las restricciones igualdad  $h(\mathbf{z}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha})$  corresponden a las ecuaciones de modelación de los fluidos presentadas en FEM para flujo viscoso en forma de residual (igualadas a cero).

### **3.3 Implementación TOM para interacción fluido-estructura**

Anteriormente se mostró cómo a través del método de optimización topológica es posible formular problemas de optimización cuyo resultado constituye una distribución de material dentro de un dominio predeterminado. Así, en la versión más básica de un análisis estructural (considerando un único material), la variable de diseño permite identificar regiones en las que se asigna material y aquellas en las que se genera un vacío. En el caso de optimización topológica para fluidos, se definen las zonas en las que el flujo es impermeable (lo cual se puede asumir como un sólido que impide el flujo) y aquellas en las que se asigna un material fluido.

Existen diversos abordajes para problemas en los que se incluye la interacción fluido-estructura (FSI) dentro de los algoritmos de optimización topológica, siendo la principal diferencia entre ellos el método de modelación de la interfaz entre el fluido y la estructura, pues es sobre esta que se captura el acoplamiento entre las dos físicas (Jenkins & Maute, 2015). Así, la forma más básica de optimización topológica considerando FSI se conoce como TOM con contorno fijo (dry optimization) y es aquella en la cual la interfaz FSI se mantiene fija y solo se realiza la distribución de material en el interior del dominio sólido. De este modo, el campo de fluidos se utiliza únicamente en la definición de las cargas que son transmitidas a la estructura, pero el dominio fluido no entra dentro del algoritmo de optimización. El segundo método es el de optimización con contorno variable (wet optimization), en la cual la interfaz FSI puede cambiar durante la optimización, por lo que, por ejemplo, algunos elementos finitos en la frontera pueden sufrir una transición de sólido a fluido conforme avanzan las iteraciones TOM. Este tipo de optimización tiene relación directa con la optimización de forma, puesto que el objetivo final consiste en la definición de la geometría de cada uno de los dominios, lo cual se traduce en la definición de la interfaz FSI, mientras se conserva el interior de cada uno de los dominios (no se generan vacíos en el sólido, por ejemplo).

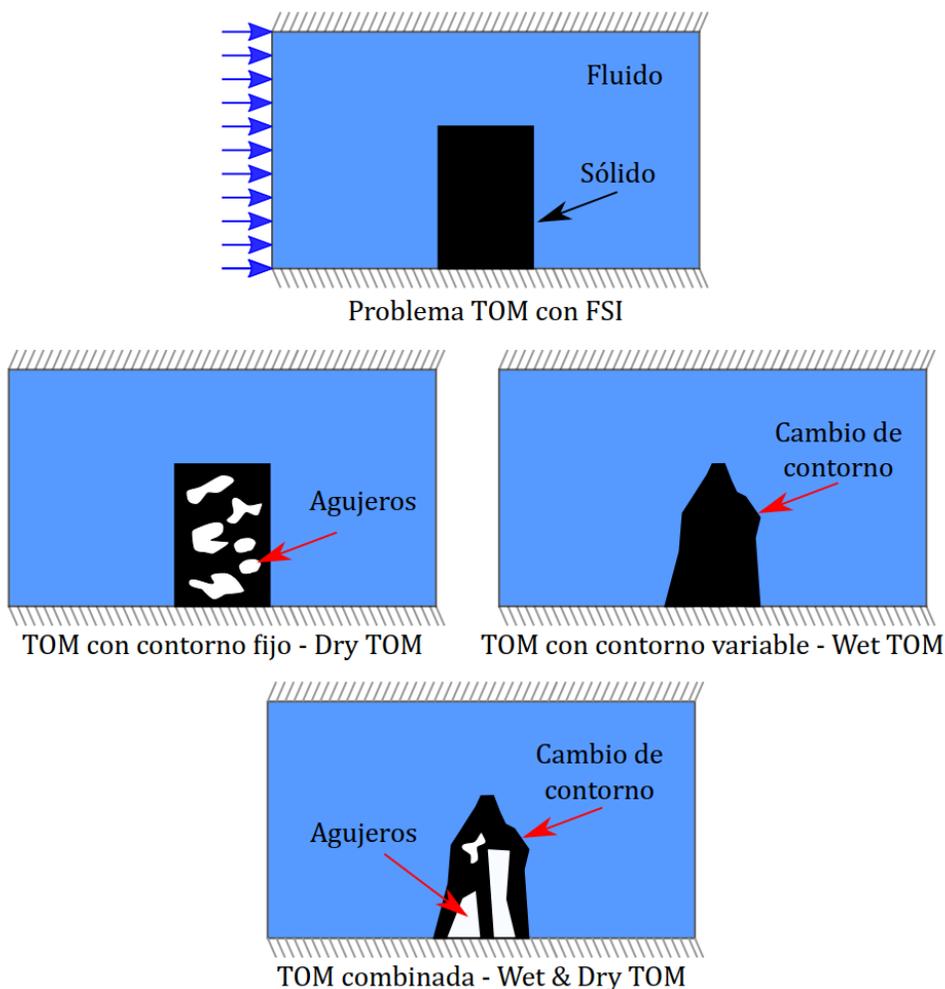
Ambos tipos de optimización topológica considerando FSI pueden combinarse (wet and dry optimization), ampliando aún más el espacio de posibles diseños óptimos, al permitir que tanto el dominio sólido, como el fluido y la interfaz FSI sean consideradas dentro de las variables de diseño del TOM. Para ejemplificar las diferencias entre los métodos mencionados de TOM considerando FSI, en la Figura 3-7 se presenta un problema clásico, comúnmente utilizado como ejemplo “benchmark” y que es conocido como el problema de la pared (the wall). En este problema se tiene una estructura en forma de pared, que se encuentra sumergida en un flujo bidimensional y se busca encontrar la estructura óptima que maximice su rigidez bajo una restricción de volumen. Así, en la optimización con contorno fijo se emplea TOM para diseñar el interior de la estructura (dry optimization), como el abordaje realizado por Jenkins & Maute (2015). Por otro lado, en la optimización con contorno variable se permiten cambios en el contorno de la estructura. Adicionalmente, ambos métodos de optimización pueden combinarse para obtener simultáneamente cambios en el contorno y en el interior de la estructura (wet & dry optimization), como los resultados de los trabajos desarrollados por Picelli, Vicente, & Pavanello (2017) y Lundgaard, Alexandersen, Zhou, Andreasen, & Sigmund (2018).

Debido a que en este trabajo el foco se encuentra en incluir fenómenos de fluidos y estructurales simultáneamente en la función objetivo del TOM, es necesario adoptar un enfoque combinado (wet and dry optimization), en el que se permita obtener tanto la frontera que describe cada uno de los álabes del rotor de la turbomáquina como aquellos agujeros que puedan resultar en el interior. En este punto se destaca que esta decisión se fundamenta en el objetivo de obtener una herramienta de optimización multifísica, compatible con diversas variables de desempeño de turbomáquinas. Así, por ejemplo, la posibilidad de introducir agujeros en el interior del rotor puede no ser muy relevante desde el punto de vista de la minimización de flexibilidad estructural; no obstante, es un requisito en aplicaciones que involucran el diseño considerando las frecuencias naturales de vibración.

El paso siguiente consiste en definir el tratamiento que se le da a la interfaz FSI. Así, cuando se utiliza una interfaz explícita que divide los dominios en sólo dos materiales sólido o fluido (se considera el problema binario en la asignación de material), la transferencia de la carga se puede realizar como una fuerza de superficie (tracción) aplicada en la interfaz FSI. Este método es particularmente compatible con optimización topológica utilizando el método Level-set, en el cual se tiene una función explícita para la ubicación de la interfaz

FSI en cada una de las iteraciones TOM (Jenkins & Maute, 2015). Esta situación también se presenta cuando el algoritmo de optimización es binario ( $\alpha_e \in \{0,1\}$ , sin permitir valores intermedios), por ejemplo, cuando se usan algoritmos heurísticos como el de optimización estructural evolutiva bidireccional (BESO) (Picelli et al., 2015). No obstante, cuando se utiliza el método de densidades para TOM, la interfaz FSI no es explícita en cada iteración (se permite la presencia de valores intermedios para la variable de diseño  $\alpha_e \in [0,1]$ ) y, por lo tanto, la transferencia de la carga en la interfaz FSI no puede realizarse de manera directa como una tracción en la frontera de cada uno de los dominios sólido y fluido.

**Figura 3-7.** Problema TOM considerando FSI. Métodos de optimización con contorno fijo y variable (wet-dry optimization)



Cuando se utiliza el método de densidades, es posible definir algún criterio para determinar la interfaz FSI, lo cual es comúnmente utilizado como técnica de postprocesamiento de los resultados de optimización topológica. Esto es, definir como fluido todos los elementos

finitos con un valor en la variable de diseño superior a un valor (por ejemplo,  $\alpha_e \geq 0.5$ ) y sólidos todos los demás. La desventaja de esta técnica es que la solución postprocesada se aleja de la optimizada encontrada en cada iteración del TOM, por lo que sería necesario ajustar los parámetros del optimizador para garantizar los cambios permitidos entre cada una de las iteraciones. Adicionalmente, se podría deteriorar la tasa de convergencia hacia una solución óptima. Es por esto que es común seguir la alternativa presentada por Yoon (2010b) y complementada por Lundgaard et al. (2018), en la cual la fuerza en la interfaz FSI se transfiere como una carga consistente (directamente evaluada en los nodos), que es penalizada de acuerdo al valor de la variable de diseño, de tal manera que la transferencia de fuerza es total para los elementos finitos que son sólidos y es una fracción (penalizada) para aquellos elementos finitos con un valor intermedio en la variable de diseño. Es por esta razón que resulta conveniente hacer coincidir la malla del FEM de fluidos con la del FEM estructural, puesto que no se requiere una interpolación adicional del vector fuerza. Así, en este trabajo se utiliza la misma malla para resolver el campo de fluidos y el estructural, siguiendo un esquema FSI que no tiene una interfaz fluido-estructura explícita, sino que la transferencia de fuerzas se origina en una región “gris”, conforme los elementos finitos tienen la transición de fluidos a sólidos (siguiendo algún esquema de penalización en la variable de diseño).

Consecuentemente, para introducir las variables de diseño en los sistemas de ecuaciones discretos generados con FEM, es necesario generar tres funciones de penalización diferentes: una para el inverso de la permeabilidad (definiendo la porosidad en el análisis de fluidos), otra para el módulo de Young (estableciendo la rigidez en el análisis del sólido) y otra para la transferencia de la fuerza en la interfaz FSI. Así, para un elemento finito  $e$ , cada una de estas funciones se presentan en Ecc. 42, Ecc. 43 y Ecc. 44, respectivamente.

Debe tenerse presente que la formulación anterior para el modelo de material usado en TOM se realiza asumiendo que  $\alpha_e = 1$  para el fluido y  $\alpha_e = 0$  para el sólido (estructura). Así, la penalización de Brinkman (Ecc. 42) es máxima para el sólido. Además, en la Ecc. 43 se asigna un valor muy pequeño ( $E_{min}$ ) para el módulo de Young del fluido, evitando así problemas de singularidad en la solución del sistema de ecuaciones FEM estructural.

Un punto importante en el modelo anterior es que la Ecc. 44 solo aplica para el análisis estructural, pues, de lo contrario, se estarían introduciendo fuerzas adicionales en la ecuación de momentum para el fluido, afectando el campo de presión-velocidad. Esto es

equivalente a introducir la condición de frontera de no deslizamiento en una interfaz FSI explícita ( $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ , en  $\Gamma_{fsi}$ ), por lo que es común utilizar como valores de transferencia de carga  $\vartheta_{max} = 1$  para el sólido y  $\vartheta_{min} = 0$  para el fluido, lo cual no genera problemas de singularidad en las ecuaciones estructurales, pues la fuerza se encuentra en el lado derecho de la ecuación. Así, la carga transferida en la interfaz FSI corresponde al residual de la ecuación de momentum para fluidos, siguiendo la Ecc. 45, la cual se presenta para el sistema global (todo el dominio de diseño), en contraposición a las Ecc. 42, Ecc. 43 y Ecc. 44, que se presentan a nivel de cada elemento finito.

$$\mathbf{k}_\kappa(\alpha_e) = \kappa(\alpha_e) \mathbf{k}_\kappa^0 = \left( \kappa_{max} + (\kappa_{min} - \kappa_{max}) \alpha_e \frac{1 + q_\kappa}{\alpha_e + q_\kappa} \right) \mathbf{k}_\kappa^0 \quad \text{Ecc. 42}$$

$$\mathbf{k}_s(\alpha_e) = [E_{min} + (E_0 - E_{min})(1 - \alpha_e)^{q_E}] \mathbf{k}_s^0 \quad \text{Ecc. 43}$$

$$\mathbf{f}_s(\alpha_e) = \vartheta(\alpha_e) \mathbf{f}_s^0 = [\vartheta_{min} + (\vartheta_{max} - \vartheta_{min})(1 - \alpha_e)^{q_f}] \mathbf{f}_s^0 \quad \text{Ecc. 44}$$

Donde

$\mathbf{k}_\kappa^0$ → matriz de penalización de Brinkman $\kappa$ unitario	$E_{min}$ → $E$ para el fluido
$\kappa_{max}$ → $\kappa$ para la estructura (sólido)	$q_E$ → penalización para la rigidez
$\kappa_{min}$ → $\kappa$ para el fluido	$\mathbf{f}_s^0$ → fuerza FSI sin penalizar
$q_\kappa$ → penalización para la permeabilidad	$\vartheta_{min}$ → factor de fuerza transferida por el fluido
$\mathbf{k}_s^0$ → matriz de rigidez con $E$ unitario	$\vartheta_{max}$ → factor de fuerza transferida por el sólido
$E_0$ → $E$ para el sólido	$q_f$ → penalización para la fuerza FSI

Adicionalmente, una simplificación que suele realizarse es la de utilizar la condición de no deslizamiento, puesto que, a pesar de que el sólido se modela como un fluido viscoso, su impermeabilidad hace que su velocidad tienda a cero ( $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{0}$ ), de tal manera que solo se transfieren cargas originadas por la presión y la fuerza transferida en la interfaz FSI se convierte en la Ecc. 46. Esta simplificación resulta válida incluso cuando se utiliza el método de densidades dependiente de la penalización para la permeabilidad. Esto es, si

la fuerza de penalización de Brinkman es lo suficientemente grande para el sólido ( $\kappa_{max} \gg 0$ ), como suele ser el caso, los valores intermedios para la variable de diseño tendrán una penalización tal que el flujo es casi completamente impermeable (sólido) con velocidad cero o es flujo viscoso casi totalmente permeable (fluido), con lo que los términos que multiplican a la velocidad pueden despreciarse (Yoon, 2010b). Por otro lado, esta simplificación no es sugerida en casos en los que la transferencia de fuerzas viscosas en la capa límite es el foco del análisis (Lundgaard et al., 2018).

Desde el punto de vista de las turbomáquinas, ambos abordajes son posibles, dependiendo de la aplicación. Por ejemplo, en el caso de una bomba de asistencia ventricular, la disipación viscosa es altamente importante como una variable de desempeño y por lo tanto este término no puede ser despreciado. Por otro lado, en el caso de bombas de sistemas industriales la interacción entre el fluido y el rotor se da en su mayoría por cargas de presión (de ahí que sea común una baja caída de temperatura entre la succión y la descarga), por lo que los términos de fuerza viscosa pueden despreciarse. El término advectivo  $\mathbf{K}_c(\mathbf{U})$  debe considerarse cuando se presenta deslizamiento relativo en la interfaz entre los dominios, situación que solo se considera en casos muy particulares de simulación de dinámica de fluidos computacional, por ejemplo, cuando se modelan materiales sólidos hidrofóbicos o la presión operacional es muy baja.

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_{fsi} = \vartheta(\alpha_e)(\mathbf{K}_c(\mathbf{U}) \mathbf{U} + \mathbf{K}_d \mathbf{U} - \mathbf{Q} \mathbf{P}) \quad \text{Ecc. 45}$$

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_{fsi} = \vartheta(\alpha_e)(-\mathbf{Q} \mathbf{P}), \quad \text{bajo condición de no deslizamiento} \quad \text{Ecc. 46}$$

Donde

$\mathbf{F}_s$	→	vector global de fuerzas estructurales
$\mathbf{U}$	→	vector global de velocidad
$\mathbf{P}$	→	vector global de presión
$\mathbf{K}_c, \mathbf{K}_d, \mathbf{Q}$	→	matrices globales FEM fluidos

### 3.3.1 Función multiobjetivo

Con el modelo de material presentado anteriormente, se establecen las condiciones necesarias para que la solución de cada uno de los problemas de FEM (sólido y estructura) constituya parte de las restricciones de igualdad en el problema de optimización topológica,

siguiendo el esquema general de la Ecc. 36. Bajo este contexto, resulta imperativo definir una función objetivo del problema TOM que sea compatible con la formulación FEM planteada. Es por esto que en TOM es común utilizar como función objetivo una variable de respuesta que pueda ser evaluada para cada elemento finito y cuya sumatoria represente el escalar a optimizar.

Así pues, en el capítulo de la Introducción se indicó cómo el desempeño de las turbomáquinas puede ser evaluado desde diversas perspectivas y que, dadas las consideraciones de este trabajo y los avances encontrados en el estado del arte para esta temática (TOM aplicado a turbomáquinas), se decide construir una función objetivo considerando FSI, tanto desde la transferencia de cargas entre las dos físicas, como desde la consideración de diferentes variables de respuesta. En particular, se propone la evaluación del desempeño de cada diseño a partir de una función multiobjetivo que considera, para la estructura, la flexibilidad y, para el fluido, disipación de energía y vorticidad. En este punto se destaca que la potencia mecánica (asociada al torque) transmitida por el rotor de las turbomáquinas tiene una relación directa con la disipación de energía y, por lo tanto, ambos objetivos son tales que las topologías generadas para minimización de disipación de energía son muy similares a las optimizadas considerando la potencia mecánica (Sá, 2016).

Esta situación resulta intuitiva si se considera que los fenómenos físicos modelados son tales que la potencia mecánica suministrada a una turbomáquina (por ejemplo, en el caso de una bomba) solo puede convertirse en cada uno de los términos del balance de momentum de fluidos, de tal modo que la potencia mecánica se define a partir de los términos relacionados con la energía interna del fluido. Así, una minimización (maximización, en el caso de una turbina) en la disipación de energía conduce de forma natural en una minimización de la potencia mecánica. De igual manera, partiendo de que se espera que estas variables de respuesta tengan un comportamiento de Pareto (Romero & Silva, 2014), se considera que el incluir más términos en la función objetivo puede dificultar el análisis de la influencia de los parámetros de la optimización en los diseños finales, objetivo último de este trabajo. Por este motivo se decide no incluir la potencia mecánica dentro de la función objetivo, permitiendo dirigir el foco hacia el estudio de la interfaz FSI en TOM.

Es así como, se propone utilizar una función multiobjetivo tradicional de suma ponderada, en la cual se introducen factores de normalización que unifican el orden de magnitud de cada una de las variables de respuesta, según la Ecc. 47. El cálculo de los factores de normalización ( $H_{dr}$ ,  $H_{ds}$ ) en una iteración  $n$  del algoritmo TOM utiliza la relación entre los valores de cada función objetivo en la iteración anterior  $n - 1$ . De igual modo, los pesos unitarios ( $w_d$ ,  $w_r$ ,  $w_s$ ) son los valores que deben cambiarse para explorar el frente de Pareto; es decir, son valores normalizados que permiten priorizar una variable de respuesta sobre otra.

$$c(\alpha_e) = w_d c_d(\alpha_e) + w_r H_{dr} c_r(\alpha_e) + w_s H_{ds} c_s(\alpha_e) \quad \text{Ecc. 47}$$

Donde

$\alpha_e$	→	vector de variable de diseño por elemento finito
$c$	→	escalar función multiobjetivo
$c_d$	→	escalar disipación de energía
$c_r$	→	escalar vorticidad
$c_s$	→	escalar flexibilidad estructural (compliance)
$w_d$	→	escalar peso asignado a la disipación de energía
$w_r$	→	escalar peso asignado a la vorticidad
$w_s$	→	escalar peso asignado a la flexibilidad
$n$	→	iteración del algoritmo TOM

$$w_d + w_r + w_s = 1$$

$$(H_{dr})_n = \frac{(c_d)_{n-1}}{(c_r)_{n-1}} \quad (H_{ds})_n = \frac{(c_d)_{n-1}}{(c_s)_{n-1}}$$

Como se indicó anteriormente, el cálculo de la función objetivo se realiza al nivel de cada elemento finito y el escalar final es la sumatoria de todas sus contribuciones. De esta manera, dentro del algoritmo TOM se utilizan las matrices locales de FEM para cada una de las físicas (Ecc. 23 y Ecc. 26) y la función objetivo se calcula para cada elemento finito siguiendo la Ecc. 48 para la disipación de energía, la Ecc. 49 para la vorticidad (Romero & Silva, 2014) y la Ecc. 50 para la flexibilidad (Yoon, 2010b). En este punto es importante destacar que la dependencia de cada una de las matrices de las ecuaciones anteriores con la variable de diseño sigue el modelo de material TOM presentado en las Ecc. 42, Ecc. 43 y Ecc. 44. Adicionalmente, la dependencia de las variables de estado respecto a la

variable de diseño no se hizo explícita ( $\mathbf{u}(\alpha_e)$ ,  $\mathbf{u}_s(\alpha_e)$ ) en cada ecuación, para simplificar la representación. Finalmente, la matriz de la vorticidad  $\mathbf{M}_r$  se obtiene mediante las derivadas cruzadas de la velocidad en cada dirección (similar al término difusivo en la ecuación de Navier-Stokes) y sigue la Ecc. 51, donde cada término está definido en la Ecc. 23.

$$c_d(\alpha_e) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T (\mathbf{k}_d + \mathbf{k}_\kappa(\alpha_e)) \mathbf{u} \quad \text{Ecc. 48}$$

$$c_r(\alpha_e) = \mathbf{u}^T \mathbf{M}_r \mathbf{u} \quad \text{Ecc. 49}$$

$$c_s(\alpha_e) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_s^T \mathbf{k}_s(\alpha_e) \mathbf{u}_s \quad \text{Ecc. 50}$$

$$\mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{22} & -\mathbf{K}_{21} \\ -\mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{11} \end{bmatrix} \quad \text{Ecc. 51}$$

### 3.3.2 Solución del problema de optimización

Una vez definidas la función objetivo y las restricciones, se formula el problema de optimización según la Ecc. 52. Esto es, encontrar el valor de la variable de diseño para cada elemento finito  $\alpha_e$ , tal que minimiza la función objetivo  $c(\alpha_e)$ , compuesta por una ponderación entre la disipación de energía, la vorticidad y la flexibilidad estructural (Ecc. 47), sujeto a que el volumen estructural es inferior o igual a un volumen objetivo  $V^*$ . Además, la variable de diseño toma valores  $\alpha_e \in [0,1]$ , donde 0 equivale a sólido y 1 a fluido, permitiéndose valores intermedios mediante la modelación de un flujo poroso y un material elástico con rigidez intermedia. Las variables de estado velocidad  $\mathbf{u}$ , presión  $\mathbf{p}$  y desplazamientos  $\mathbf{u}_s$  siguen las ecuaciones FEM Ecc. 23 y Ecc. 26, cuyas matrices tienen una dependencia de las variables de diseño regida por las Ecc. 42, Ecc. 43 y Ecc. 44, siendo esta última la que captura el mecanismo FSI planteado en la Ecc. 45 y Ecc. 46.

$$\text{Sujeto a: } \begin{cases} \min_{\alpha_e} c(\alpha_e) \\ \sum_{e=1}^{N_{el}} \alpha_e V_e - V^* \leq 0 \\ 0 \leq \alpha_e \leq 1 \\ \mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{u}_s \text{ cumplen FEM} \end{cases} \quad \text{Ecc. 52}$$

Existen diferentes métodos mediante los cuales se puede resolver un problema de optimización topológica, algunos de ellos son el criterio de optimalidad OC (O. Sigmund, 2001), el método de asíntotas móviles MMA (Svanberg, 1987) y la programación lineal secuencial SLP (Haftka & Gürdal, 1992). De esta manera, el OC ha demostrado ser exitoso en problemas de maximización de rigidez (o minimización de disipación de energía) con restricción de volumen, no solo por la facilidad en su implementación, sino por su bajo costo computacional (Andreassen, Clausen, Schevenels, Lazarov, & Sigmund, 2011). Sin embargo, el OC no es adecuado para resolver problemas que tienen una función multiobjetivo, puesto que su formulación parte de un supuesto de convexidad monótonica respecto a la variable de diseño, que suele perderse cuando se tienen múltiples restricciones en el algoritmo TOM, como es el caso de FSI.

El método SLP representa la aproximación más básica a la solución de un problema de optimización, luego del criterio de optimalidad. En particular, siguiendo la notación introducida en la Ecc. 36, el SLP consiste en aproximar la función objetivo  $f(x)$  y sus restricciones  $g(x)$  mediante una linearización alrededor de un punto inicial  $(x_0)$ , según la Ecc. 53. Así, se resuelve un problema de optimización lineal que, si bien puede no representar el óptimo, garantiza que el mínimo local (valor optimizado) aproximado  $x_L$  tiene un mejor valor de la función objetivo que el punto inicial ( $f(x_L) < f(x_0)$ ). Posteriormente, se linealiza el problema de optimización alrededor de este nuevo punto y el proceso se repite iterativamente hasta que se alcanza convergencia. Los límites móviles  $a_{le}$  y  $a_{ue}$  deben ser ajustados para cada problema en particular, de tal manera que se limiten los cambios en la variable de diseño entre iteraciones, procurando así no generar soluciones que violen las restricciones. No obstante, el intervalo de los límites móviles no debe ser restringido tanto como para que el número de iteraciones antes de convergencia sea impráctico.

Tanto el OC como el SLP pueden ser implementados en problemas TOM con sólidos o con fluidos; sin embargo, no se encontraron satisfactorios para resolver los problemas de este trabajo; esto es, en problemas con interacción FSI, función de optimización multiobjetivo y ecuaciones de equilibrio con términos altamente no lineales (todas estas características se encuentran en problemas TOM aplicados a turbomáquinas). Es por esto que en el presente trabajo se decide utilizar OC y SLP como punto de partida para los problemas tipo benchmark para verificación del código desarrollado, pero se implementa el MMA como algoritmo de solución de los problemas TOM.

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimizar}} \quad f(x_0) + \sum_{e=1}^{N_{el}} (x_e - x_{0e}) \left. \frac{\partial f}{\partial x_e} \right|_{x_0} \\ \text{Sujeto a:} \quad & \left\{ \begin{aligned} & g(x_0) + \sum_{e=1}^{N_{el}} (x_e - x_{0e}) \left. \frac{\partial g_j}{\partial x_e} \right|_{x_0} \leq \mathbf{0} \\ & a_{le} \leq x_e - x_{0e} \leq a_{ue} \end{aligned} \right. \quad \text{Ecc. 53} \end{aligned}$$

Donde

$x_0$	→	vector inicial de variables de diseño
$x_e$	→	variable de diseño para el elemento finito $e$
$N_{el}$	→	número de elementos finitos en el dominio
$j = 1, \dots, N_g$	→	$N_g$ número de restricciones
$a_{le}, a_{ue}$	→	límites móviles

La descripción de los detalles del MMA se sale del alcance de esta tesis de maestría, los cuales pueden ser consultados en Svanberg (1987, 2002). En términos generales, el MMA en su versión básica (sin incluir, por ejemplo, un análisis *min(max)*) parte de la Ecc. 36 (en el caso particular de este trabajo, la Ecc. 52) y la aproxima mediante funciones convexas que dependen del gradiente de la función objetivo y unos parámetros conocidos como asíntotas móviles. Luego, se aplican las condiciones de optimalidad de Karush–Kuhn–Tucker (KKT) sobre el nuevo problema de optimización, el cual suele ser resuelto mediante un método primal-dual de punto interior.

En la Figura 3-8 se muestra el algoritmo utilizado para dar solución al problema de optimización topológica multiobjetivo, con restricción en el volumen de la estructura. Es así como, se parte de un dominio de diseño fijo, con unas condiciones de frontera determinadas y con una distribución de material (variable de diseño) inicial (Bendsøe & Sigmund, 2003). Luego, se aplica un filtro (paso alternativo) y se utiliza FEM para calcular el campo de variables de estado en ambas físicas y poder evaluar la función objetivo. En este punto se hace énfasis en que primero se resuelve el campo de presión y velocidad para el fluido y luego los desplazamientos estructurales, los cuales son utilizados para actualizar la ubicación de los nodos de la malla de fluidos. Posteriormente, se realizan pequeños cambios en la variable de diseño (alrededor del 1%), de tal modo que se busca una mejora (maximización/minimización) en la función objetivo (análisis de sensibilidad), actualizando la variable de diseño de cada elemento finito. Este proceso se repite iterativamente hasta que no se logra encontrar una mejora significativa en la función

objetivo sin violar la restricción de volumen, momento en el cual se dice que se alcanza la convergencia y, por lo tanto, dicho resultado corresponde a la distribución óptima del material.

### 3.3.3 Análisis de sensibilidad

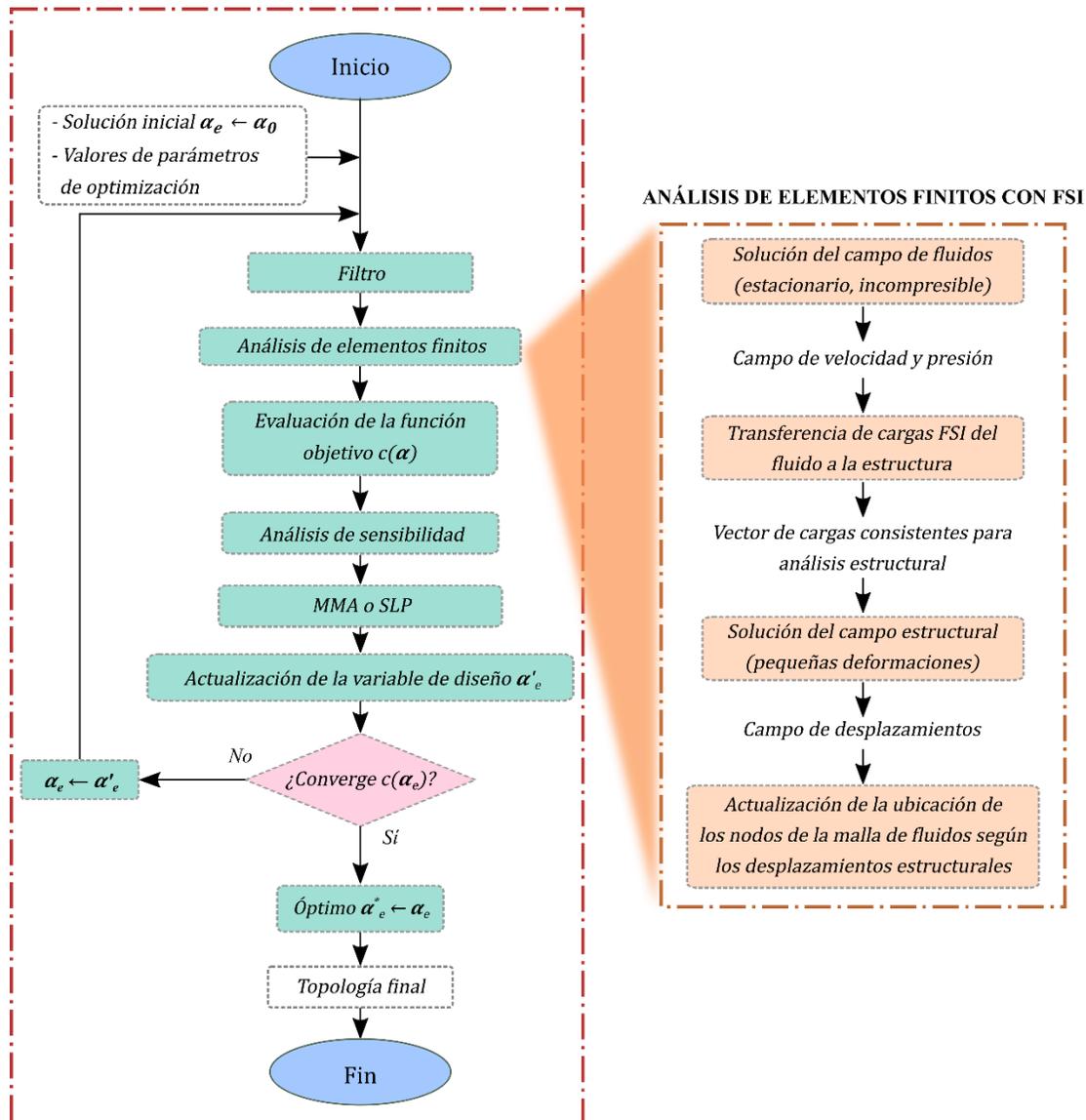
El análisis de sensibilidad consiste en obtener las derivadas de la función objetivo respecto a la variable de diseño, de tal modo que cuando dicha función proviene de una suma ponderada, su derivada equivale a la suma ponderada de las derivadas, según la Ecc. 54, permitiendo el cálculo de la sensibilidad de cada objetivo de manera independiente.

$$\frac{dc(\alpha_e)}{d\alpha_e} = w_d \frac{dc_d(\alpha_e)}{d\alpha_e} + w_r H_{dr} \frac{dc_r(\alpha_e)}{d\alpha_e} + w_s H_{ds} \frac{dc_s(\alpha_e)}{d\alpha_e} \quad \text{Ecc. 54}$$

El análisis de sensibilidad puede realizarse sobre el modelo matemático (ecuaciones continuas) o sobre el numérico (ecuaciones discretas del FEM), siendo este último el más recomendado en problemas de optimización topológica, puesto que se tiene una miles o millones de variables de diseño. En ocasiones, esta decisión suele tener más un carácter práctico, puesto que, dependiendo de la plataforma en la que se esté implementando el código, es posible encontrarse en escenarios en los que la simplicidad de la programación de las sensibilidades en el continuo puede equilibrarse con los tiempos de computación. En este trabajo, las sensibilidades se implementan sobre las ecuaciones discretas, utilizando el código ya generado durante la formulación FEM para el cálculo de las matrices de cada elemento finito.

Cuando la función es multiobjetivo, se tienen múltiples restricciones y/o se presentan no linealidades en el FEM (todas estas condiciones están presentes en el problema aquí abordado), la deducción mediante el método directo (cálculo analítico usando la diferenciación tradicional) suele no ser tan práctica como el método adjunto. Asimismo, el método de diferencias finitas solo es eficiente (bajo costo computacional) cuando se tienen pocas variables de diseño. Un método adicional es conocido como diferenciación automática, el cual suele tener un costo computacional intermedio entre el método adjunto y las diferencias finitas, pero que requiere la implementación de código adicional que se sale del alcance de este trabajo.

Figura 3-8. Algoritmo de optimización topológica



De esta manera, para una función  $c(\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}))$ , el método adjunto sigue la formulación de las Ecu. 55 y Ecu. 56. (Haftka & Gürdal, 1992). En estas ecuaciones se observa que el vector adjunto  $\boldsymbol{\lambda}$  es la solución del sistema de ecuaciones formadas por las derivadas implícitas (respecto a la variable de estado  $\mathbf{u}$ ) del residual  $\mathbf{R}$  de las restricciones de igualdad (ecuaciones FEM igualadas a cero) y la función objetivo  $c$ . De igual manera, se destaca que cuando existen no linealidades en el residual,  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}}$  no se suele calcular de manera directa, sino que representa el jacobiano  $\mathbf{J}$  de las ecuaciones FEM. Esta precisión cobra especial importancia cuando el método de solución del problema no lineal involucra alguna

versión del método de Newton, puesto que el cálculo de  $\mathbf{J}$  está incorporado dentro de dicho algoritmo, por lo que no es necesario implementar código adicional para su evaluación.

$$\frac{dc(\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}))}{d\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial c}{\partial \boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \quad \text{Ecc. 55}$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}^T}{\partial \mathbf{u}} \boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial c^T}{\partial \mathbf{u}} \quad \text{Ecc. 56}$$

Donde

$\frac{dc(\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}))}{d\boldsymbol{\alpha}}$	→	vector de derivadas totales
$\frac{\partial c}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$	→	vector de derivadas explícitas
$\boldsymbol{\alpha}$	→	vector de variables de diseño
$\mathbf{u}$	→	vector de variables de estado
$\boldsymbol{\lambda}$	→	vector adjunto
$\mathbf{R}$	→	vector residual de las ecuaciones FEM

A continuación, se presentan las ecuaciones del método adjunto para el cálculo de sensibilidades de cada variable de respuesta de la función multiobjetivo de la Ecc. 54. Para la disipación de energía, el único término que depende de manera explícita de la variable de diseño es el asociado a la fuerza de penalización de Brinkman (matriz de permeabilidad). Por lo tanto, las sensibilidades siguen las Ecc. 57, Ecc. 58 y Ecc. 59. En este punto se destaca que la función de minimización de energía es expandida a incluir la variable de estado de la presión, mediante  $\mathbf{z} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{p}]^T$ , para lograr la compatibilidad con la ecuación resultante del residual.

$$\frac{dc_d(\boldsymbol{\alpha}_e)}{d\boldsymbol{\alpha}_e} = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \frac{\partial (\mathbf{k}_d + \mathbf{k}_\kappa(\boldsymbol{\alpha}_e))}{\partial \boldsymbol{\alpha}_e} \mathbf{z} - \boldsymbol{\lambda}_d^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_e} \quad \text{Ecc. 57}$$

$$\mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda}_d = [(\mathbf{k}_d + \mathbf{k}_\kappa(\boldsymbol{\alpha}_e)) \mathbf{z}]^T \quad \text{Ecc. 58}$$

$$\frac{\partial (\mathbf{k}_d + \mathbf{k}_\kappa(\boldsymbol{\alpha}_e))}{\partial \boldsymbol{\alpha}_e} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_e} = \frac{\partial \mathbf{k}_\kappa(\boldsymbol{\alpha}_e)}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \left( (\kappa_{min} - \kappa_{max}) \frac{(1 + q_\kappa) q_\kappa}{(\alpha_e + q_\kappa)^2} \right) \mathbf{k}_\kappa^0 \quad \text{Ecc. 59}$$

Para el cálculo de  $\mathbf{J}$  se siguen las ecuaciones explícitas presentadas por Reddy & Gartling (2010, p. 191), las cuales tienen una similitud directa con la Ecc. 23, con la única diferencia de los términos adicionales que surgen gracias a la derivada del término advectivo (no lineal) (Ecc. 60).

$$J = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \mathbf{u}_1} & \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \mathbf{u}_2} & \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial p} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial \mathbf{u}_1} & \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial \mathbf{u}_2} & \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial p} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_3}{\partial \mathbf{u}_1} & \frac{\partial \mathbf{R}_3}{\partial \mathbf{u}_2} & \frac{\partial \mathbf{R}_3}{\partial p} \end{bmatrix} \quad \text{Ecc. 60}$$

Donde

$$\frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \mathbf{u}_1} = \mathbf{K}_{c1}(\mathbf{u}_1) + \mathbf{K}_{c1}(\mathbf{1}) \mathbf{u}_1 + \mathbf{K}_{c2}(\mathbf{u}_2) + 2\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{22} + \mathbf{K}_\kappa$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \mathbf{u}_2} = \mathbf{K}_{c2}(\mathbf{1}) \mathbf{u}_1 + \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_r$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial p} = -\mathbf{Q}_1$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial \mathbf{u}_1} = \mathbf{K}_{c1}(\mathbf{1}) \mathbf{u}_2 + \mathbf{K}_{21} - \mathbf{K}_r$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial \mathbf{u}_2} = \mathbf{K}_{c1}(\mathbf{u}_1) + \mathbf{K}_{c2}(\mathbf{u}_2) + \mathbf{K}_{c2}(\mathbf{1}) \mathbf{u}_2 + \mathbf{K}_{11} + 2\mathbf{K}_{22} + \mathbf{K}_\kappa$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial p} = -\mathbf{Q}_2$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_3}{\partial \mathbf{u}_1} = -\mathbf{Q}_1^T$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_3}{\partial \mathbf{u}_2} = -\mathbf{Q}_2^T$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_3}{\partial p} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{K}_{c_j}(\mathbf{u}_j) = \int_{\Omega^e} \rho \Psi (\Psi^T \mathbf{u}_j) \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} dx$$

Para la vorticidad, la derivada explícita es cero, puesto que únicamente depende de los términos difusivos de la ecuación de Navier-Stokes, los cuales no dependen de la variable de diseño. Así, las sensibilidades siguen las Ecc. 61 y Ecc. 62. Es importante destacar que gracias a que el cálculo de la vorticidad solo depende de las velocidades, es necesario nuevamente garantizar la compatibilidad del lado izquierdo y el lado derecho de la Ecc. 62, mediante selección directa (método implementado en este trabajo) o una matriz de transformación con ceros en las entradas que corresponden a los grados de libertad de la presión. De igual modo,  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha_e}$  ya fue definido en la Ecc. 59.

$$\frac{dc_r(\alpha_e)}{d\alpha_e} = -\lambda_r^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha_e} \quad \text{Ecc. 61}$$

$$\mathbf{J}^T \lambda_r = (\mathbf{M}_r + \mathbf{M}_r^T) [\mathbf{u}, \mathbf{0}]^T \quad \text{Ecc. 62}$$

En el caso de la flexibilidad, el análisis de sensibilidad se simplifica un poco, debido a que al ser el residual del FEM estructural una función lineal en  $\mathbf{u}_s$ , se tiene que  $\lambda_s = \mathbf{u}_s$ . Así, la sensibilidad de la flexibilidad sigue las Ecc. 63, Ecc. 64 y Ecc. 65, donde esta última proviene de tomar la derivada explícita de la Ecc. 46.

$$\frac{dc_s(\alpha_e)}{d\alpha_e} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}_s^T \frac{\partial \mathbf{k}_s(\alpha_e)}{\partial \alpha_e} \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_s^T \frac{\partial \mathbf{F}_{fsi}}{\partial \alpha_e} \quad \text{Ecc. 63}$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_s(\alpha_e)}{\partial \alpha_e} = -(E_0 - E_{min}) q_E (1 - \alpha_e)^{q_E - 1} \mathbf{k}_s^0 \quad \text{Ecc. 64}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{fsi}}{\partial \alpha_e} = -(\vartheta_{max} - \vartheta_{min}) q_f (1 - \alpha_e)^{q_f - 1} (-\mathbf{Q} \mathbf{p}) \quad \text{Ecc. 65}$$

### 3.3.4 Filtros y posprocesamiento del TOM

En su formulación básica, el método de optimización topológica no necesita partir de un diseño predefinido, lo cual brinda mayor libertad en el proceso de optimización, permitiendo explorar soluciones nuevas, con un mejor desempeño y frecuentemente inesperadas (por fuera de los paradigmas tradicionales). La característica anterior, a pesar de ser una de las principales ventajas de la optimización topológica, comúnmente lleva a que los diseños obtenidos tengan geometrías complejas, elevando sus costos de manufactura y requiriendo procesos de fabricación no convencionales. Sin embargo, actualmente existen diferentes abordajes que han demostrado que dicha limitación de la optimización topológica puede ser superada y que es una herramienta que puede adaptarse a las necesidades de cada proceso de diseño.

Bajo este contexto, la primera alternativa utilizada para facilitar la manufactura de las topologías consiste en un posprocesamiento a través de análisis de imagen o de software de modelamiento CAD (Diseño Asistido por Computador), de tal manera que los detalles geométricos que dificultan la manufactura son modificados manualmente, según la intuición y el conocimiento del diseñador. Aunque es una técnica ampliamente utilizada, tiene el inconveniente de que los cambios en la topología pueden generar un detrimento

en el desempeño del componente diseñado, por lo que el producto final se aleja de ser el óptimo. Este proceso puede ser complementado con herramientas de simulación computacional CAE (Ingeniería Asistida por Computador) para evaluar el efecto de las modificaciones implementadas; sin embargo, dicha actividad dista de ser eficiente y no garantiza la adquisición de un resultado óptimo.

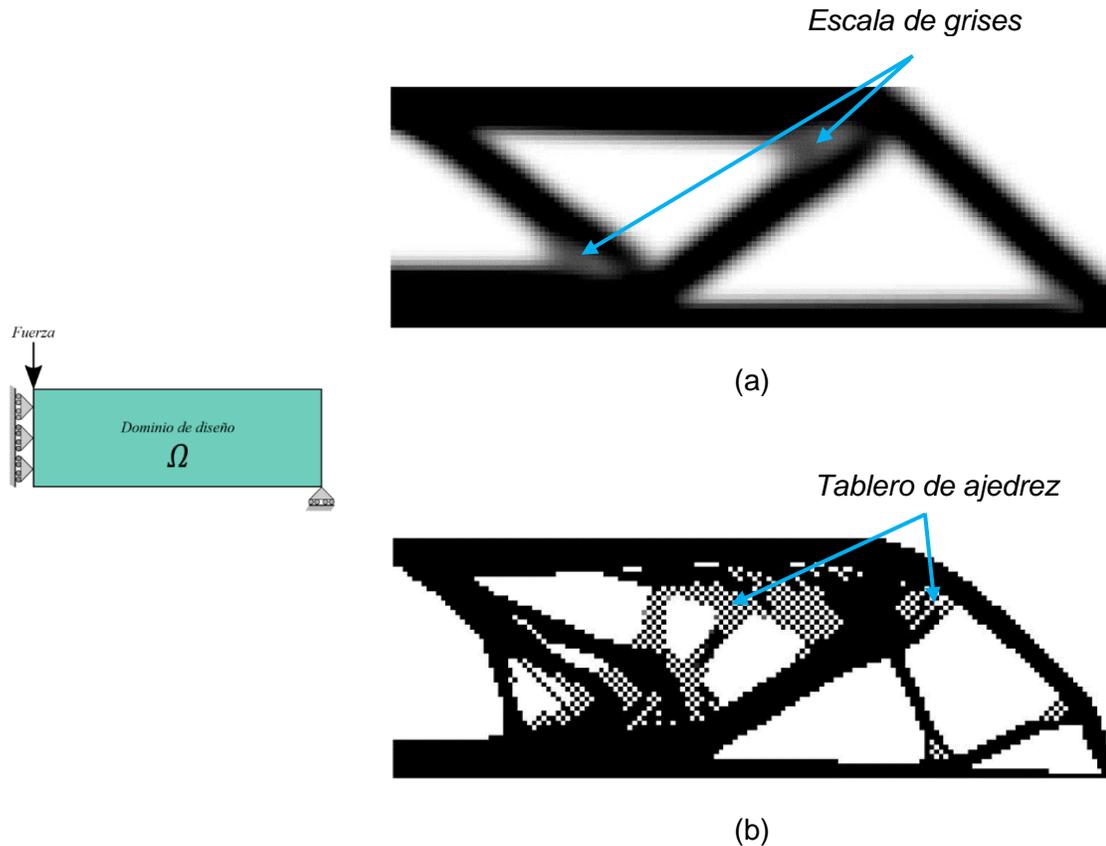
Por otro lado, la evolución de los procesos de manufactura, en particular aquellos de prototipado rápido, han permitido superar las barreras de complejidad geométrica en la fabricación, proporcionando sistemas de producción flexibles para casi cualquier diseño que pueda modelarse en un computador. No obstante, a pesar de la versatilidad de procesos aditivos como el moldeo por deposición fundida (FDM), la estereolitografía (STL) y la sinterización selectiva por láser (SLS); o de remoción, como el torneado y fresado por control numérico computarizado (CNC); existen aplicaciones en las cuales se tienen restricciones (por ejemplo, económicas, de tiempo, de material o de tamaño) que hacen imperativa la simplificación de los diseños que van a ser manufacturados, para poder ser acomodados a procesos de fabricación convencionales.

En este sentido, una solución más robusta para el problema planteado consiste en introducir las limitaciones de los procesos de manufactura en el problema de optimización topológica; de tal manera que mediante condiciones como el tamaño mínimo de los agujeros y de los miembros estructurares, la simetría y la identificación de patrones geométricos, es posible generar topologías que pueden ser fabricadas directamente con procesos como fresado, torneado, extrusión, fundición y forja (Vatanabe, Lippi, Lima, Paulino, & Silva, 2016). Así, las técnicas de filtrado no solo permiten cumplir con el objetivo de manufactura sino que ayudan a garantizar la independencia de malla (que la topología global de la solución no cambie si se incrementa el número de elementos finitos) y a evitar problemas comunes como la escala de grises y el tablero de ajedrez (Figura 3-9).

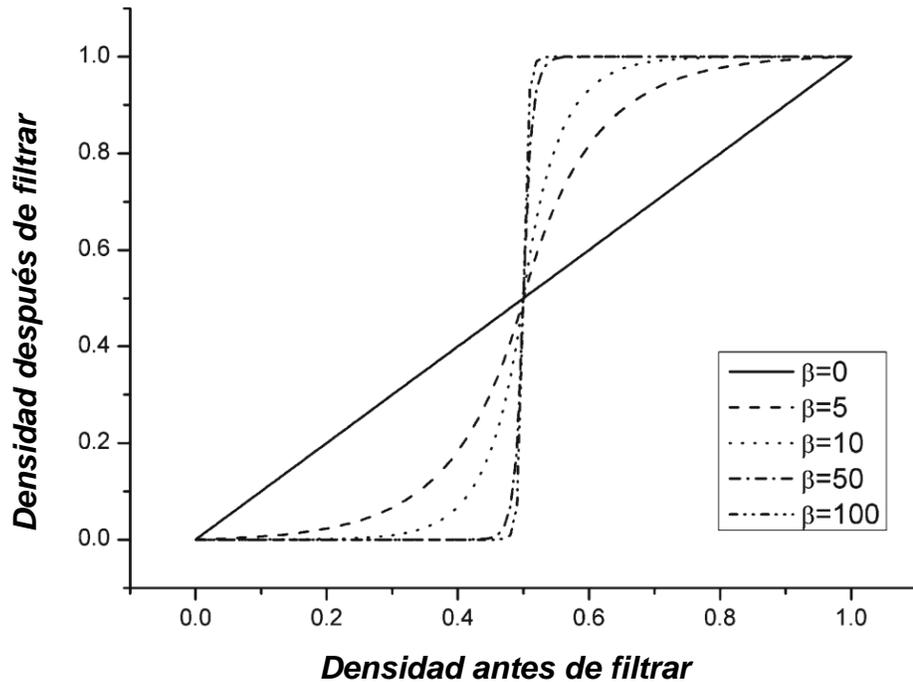
De esta manera, se han desarrollado múltiples filtros para incluir en los algoritmos de optimización topológica, como por ejemplo, los filtros sobre las variables de diseño (comúnmente conocido como filtro de densidades), sobre las sensibilidades o los filtros de proyección (J. Liu & Ma, 2016). Los problemas más simples abordados en este trabajo pueden obtener topologías claramente definidas utilizando un filtro lineal sobre las variables de diseño; no obstante, la escala de grises tiende a ser más persistente en la interfaz fluido-estructura, conforme se incrementa la complejidad del modelo. Es por esta

razón que se decide implementar un filtro de proyección que permita obtener una interfaz más definida sin implicar un detrimento en el desempeño del diseño final.

**Figura 3-9.** Problemas del TOM con el método de densidades cuando no se utilizan filtros. (a) Escala de grises, (b) Tablero de ajedrez



En este trabajo se implementa el filtro de proyección propuesto por Xu, Cai y Cheng (2010), quienes combinaron la versión original del filtro de proyección de Guest, Prévost y Belytschko (2004) con la versión modificada por Sigmund (2007). Este filtro permite controlar simultáneamente el tamaño mínimo de los espacios vacíos y el espesor mínimo de los elementos estructurales, por lo que es ideal para imponer restricciones de manufactura. Además, su característica más relevante es que permite conservar el volumen de la distribución de material una vez que se filtran las pseudodensidades; esto es, el volumen de la topología antes de filtrarse es igual al de la topología filtrada (ver Figura 3-10).

**Figura 3-10.** Filtro de proyección con preservación de volumen

**Fuente:** Tomado de (S. Xu et al., 2010, p. 5)

En general, los filtros de proyección se fundamentan en la disminución del espacio de búsqueda de las soluciones del problema de optimización topológica. De esta manera, las pseudodensidades  $\alpha_e$  se obtienen mediante la proyección de una nueva variable  $d_e$ , utilizando algún tipo de función que lleve a la reducción de la escala de grises. Así, se crea un nuevo problema de optimización en el que  $d_e$  se convierte en la variable de diseño, tal que  $\alpha_e = \alpha_e(d_e)$ . La relación entre  $\alpha_e$  y  $d_e$  se define mediante dos etapas: primero, un filtro lineal y posteriormente uno no lineal. Así, como el objetivo del filtro es reducir la dispersión en la variable de diseño para elementos finitos consecutivos, inicialmente se aplica un filtro de interpolación lineal, en el cual  $d_e$  se transforma en la variable intermedia  $\bar{d}_e$ , que representa el promedio de la variable de diseño de los elementos finitos vecinos a  $e$ . Para definir los elementos finitos que tienen influencia sobre  $\bar{d}_e$ , se crea el conjunto  $N_e$  con aquellos cuya distancia al elemento finito  $e$  es inferior al parámetro  $r_{min}$ . El filtro lineal sobre las variables de diseño se presenta en la Ecc. 66. Donde  $H_{ei}$  es un factor de peso que se calcula según la distancia espacial entre los elementos finitos  $e, i$  como  $H_{ei} = \max(0, r_{min} - distancia(e, i))$ . La  $distancia(e, i)$  es calculada como la distancia Euclidiana entre el centroide de dos pares de elementos finitos.

$$\bar{d}_e = \sum_{i \in N_e} H_{ei} d_i / \sum_{i \in N_e} H_{ei} \quad \text{Ecc. 66}$$

La segunda etapa consiste en convertir la variable intermedia  $\bar{d}_e$  en la pseudodensidad  $\alpha_e$ , la cual es conocida como densidad física porque representa la distribución de material real para el dominio de diseño. Este paso se logra llevando la variable  $\bar{d}_e$  a un valor binario, esto es, utilizando una función que permita obtener  $\alpha_e \in \{0,1\}$ , evitando así el problema de escala de grises. En este estudio se utiliza la versión continua de las funciones Heaviside propuesta por Xu et al. (2010), que se encuentran por elemento finito en la Ecc. 67.

$$\alpha_e = \begin{cases} \eta \left[ e^{-\beta \left(1 - \frac{\bar{d}_e}{\eta}\right)} - \left(1 - \frac{\bar{d}_e}{\eta}\right) e^{-\beta} \right] & , \quad \text{si } 0 \leq \bar{d}_e \leq \eta \\ (1 - \eta) \left[ 1 - e^{-\beta \left(\frac{\bar{d}_e - \eta}{1 - \eta}\right)} + \frac{\bar{d}_e - \eta}{1 - \eta} e^{-\beta} \right] + \eta & , \quad \text{si } \eta < \bar{d}_e \leq 1 \end{cases} \quad \text{Ecc. 67}$$

Donde

$\alpha_e$	→	pseudodensidad física
$\bar{d}_e$	→	pseudodensidad intermedia
$\beta$	→	parámetro de control de la pendiente del filtro
$\eta$	→	parámetro para conservar el volumen

El parámetro  $\beta$  permite realizar un control gradual de la función Heaviside, evitando así el estancamiento prematuro en mínimos locales como consecuencia de una pendiente muy alta en el filtro de proyección. Es por esta razón que el parámetro  $\beta$  es actualizado con un método de continuación. Xu et al. (2010) recomiendan en su trabajo, partir de un  $\beta = 0.1$  y duplicarlo cada cierto número de iteraciones TOM. El valor máximo para  $\beta$  debe ajustarse para cada problema, puesto que depende de la penalización del modelo de material sobre las variables de diseño. Por su parte, el parámetro  $\eta$  se encuentra iterativamente (por ejemplo, con el método de bisección) para conservar el volumen durante el filtrado y satisfacer la Ecc. 68.

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i V_i = \sum_{i=1}^N \bar{d}_i V_i \quad \text{Ecc. 68}$$

En cada iteración del algoritmo de optimización, las variables de diseño  $d_e$  son utilizadas en la búsqueda de la solución óptima mediante MMA; sin embargo, su actualización se realiza empleando la sensibilidad de las densidades físicas  $\alpha_e$ , lo cual limita los cambios sobre la variable de diseño y, por lo tanto, reduce el espacio de búsqueda de las posibles soluciones. Consecuentemente, la definición de la nueva variable de diseño lleva a replantear el análisis de sensibilidad siguiendo la Ecc. 69, donde  $\frac{dc(\alpha_e)}{d\alpha_e}$  corresponde a la sensibilidad calculada en la sección 3.3.3 mediante el método adjunto (Ecc. 54). Así, la sensibilidad de la función objetivo  $c$  respecto a la variable de diseño  $d_e$ , se puede observar como la suma ponderada de la sensibilidad de  $c$  respecto a la pseudodensidad de los elementos finitos vecinos a  $e$ .

$$\frac{dc(\alpha_e(\mathbf{d}_e))}{d\mathbf{d}_e} = \frac{\partial c(\alpha_e)}{\partial \alpha_e} \frac{\partial \alpha_e}{\partial \bar{\mathbf{d}}_e} \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}_e}{\partial \mathbf{d}_e} \quad \text{Ecc. 69}$$

Donde

$$\frac{\partial \alpha_e}{\partial \bar{\mathbf{d}}_e} = \begin{cases} \beta e^{-\beta \left(1 - \frac{\bar{d}_i}{\eta}\right)} + e^{-\beta} & , \quad \text{si } 0 \leq \bar{d}_i \leq \eta \\ \beta e^{-\beta \left(\frac{\bar{d}_i - \eta}{1 - \eta}\right)} + e^{-\beta} & , \quad \text{si } \eta < \bar{d}_i \leq 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{d}}_e}{\partial \mathbf{d}_e} = H_{ei} / \sum_{j \in N_i} H_{ij}$$

## 4 Resultados

Continuando con la formulación presentada en los capítulos anteriores, los resultados siguen una secuencia natural de implementación desde el FEM para fluidos hasta su posterior extensión a problemas con modelamiento de la interacción fluido-estructura. Este mismo esquema se sigue para los resultados TOM. De igual forma, antes de presentar los resultados correspondientes al diseño de turbomáquinas de flujo radial, se muestran algunos resultados de problemas tomados de la literatura, que permiten realizar una verificación de la correcta implementación del código. Asimismo, se destaca que las simulaciones usando software comercial corresponden a modelos construidos en Ansys® (Ansys Inc., 2017), mientras que el código propio de esta tesis de maestría sigue el lenguaje de Matlab® (The MathWorks Inc., 2019).

### 4.1 Influencia del acoplamiento FSI en dos direcciones (two-way coupling)

La formulación para la interacción fluido-estructura aquí considerada parte del supuesto de pequeñas deformaciones estructurales; esto es, se soluciona el campo de presión-velocidad sobre la malla inicial y luego se resuelve el campo de desplazamientos estructurales en el sólido. El desplazamiento en la interfaz fluido-estructura sigue el del sólido (comportamiento de un sólido elástico). Así, la interacción fluido-estructura se presenta en una sola vía (one-way coupling), puesto que el campo de fluidos se calcula solo para la malla no deformada. Con el propósito de tener un mayor entendimiento de la influencia de esta simplificación sobre los problemas abordados, se decide realizar simulaciones considerando la interacción fluido-estructura de dos vías (two-way coupling), partiendo del problema utilizado por Romero y Silva (2014) para verificación de su código de elementos finitos. Así, se tiene un volumen de un fluido genérico rotando a cierta velocidad angular, que interactúa con un sólido en una de sus paredes (ver Figura 4-1). Los parámetros de esta simulación se presentan en la Tabla 4-1.

Figura 4-1. Esquema de la simulación con interacción fluido-estructura en dos vías

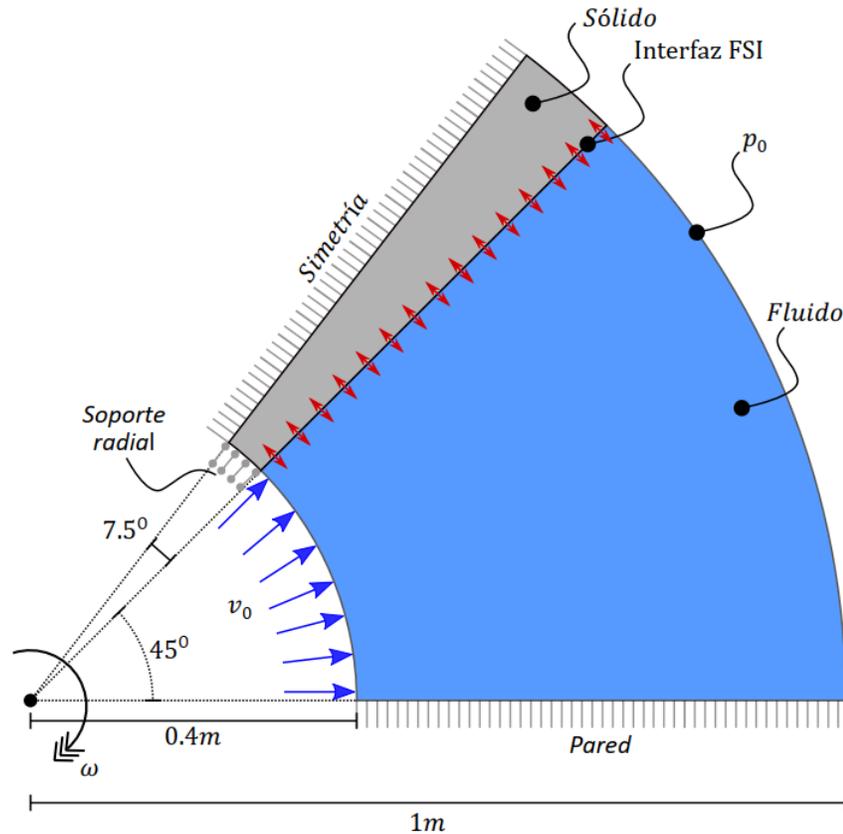


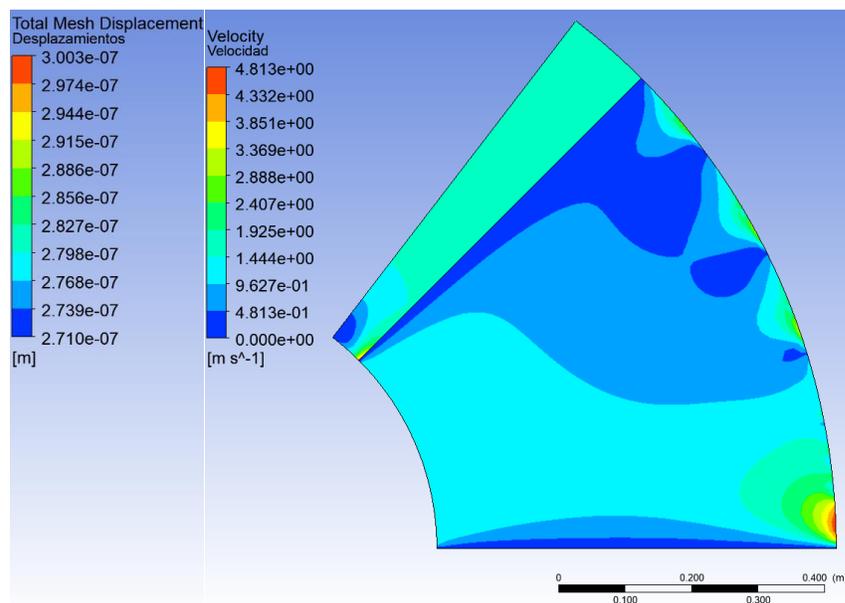
Tabla 4-1. Parámetros de la simulación con interacción fluido-estructura en dos vías

Parámetro	Valor
<b>Campo de fluidos:</b>	
Fluido	Genérico
Viscosidad cinemática $\mu$	$0.1 \text{ kg/m}\cdot\text{s}$
Densidad fluido $\rho_f$	$1 \text{ kg/m}^3$
Velocidad entrada $v_0$	$1 \text{ m/s}$
Presión salida $p_0$	$0 \text{ Pa}$
Velocidad angular $\omega$	$1000 \text{ rpm}$
<b>Campo estructural:</b>	
Sólido	Acero
Módulo de Young $E_0$	$2 \times 10^{11} \text{ Pa}$
Coefficiente de Poisson $\nu$	0.3
Densidad sólido $\rho_s$	$7850 \text{ kg/m}^3$
<b>Interacción fluido-estructura:</b>	
No deslizamiento en la pared	$v_{fsi} = 0 \text{ m/s}$

Posteriormente, se construyen 100 puntos de diseño realizando pequeños cambios en la geometría y evaluando su influencia sobre las variables de desempeño: vorticidad, torque, mínima presión y máxima velocidad. La interacción fluido-estructura es modelada empleando el módulo de acoplamiento multifísico de Ansys Workbench® (Ansys Inc., 2017), en el cual las soluciones de un problema de fluidos y de uno estructural son obtenidas iterativamente hasta alcanzar convergencia. Este esquema constituye una aproximación mediante la cual se analiza el efecto de las deformaciones sobre el campo de fluidos; esto es, se evalúa la influencia de no considerar el acoplamiento en dos vías para la interacción fluido-estructura en un problema con condiciones similares a las correspondientes a los resultados de optimización.

Los cambios sobre la geometría provienen de variaciones en el ángulo de cada uno de los dominios (sectores circulares, con  $45^\circ \pm 1^\circ$  para el fluido y  $7.5^\circ \pm 0.75^\circ$  para el sólido), el radio interno ( $0.4m \pm 0.01m$ ) y el radio externo ( $1m \pm 0.01m$ ). En la Figura 4-2 se presentan diagramas de contornos simultáneos para la velocidad del fluido y los desplazamientos estructurales.

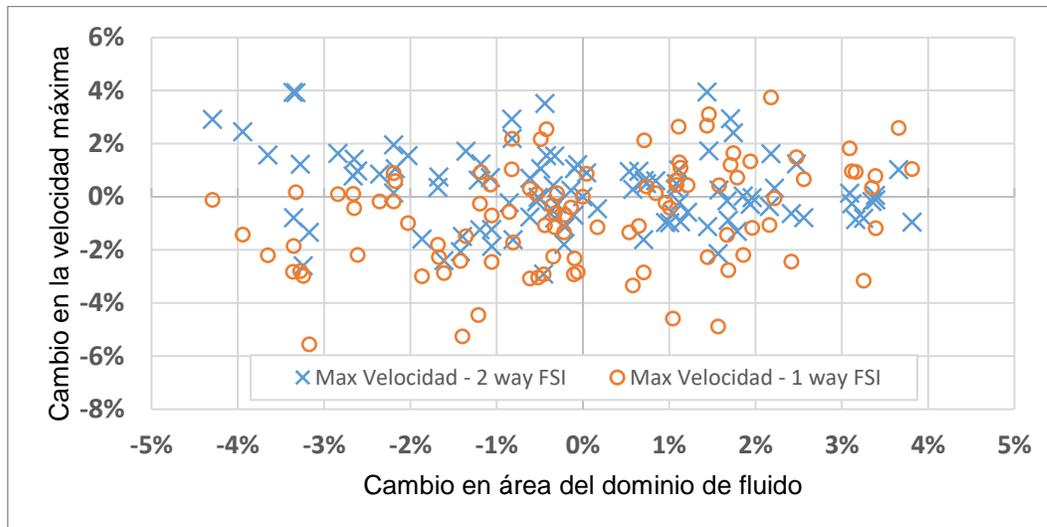
**Figura 4-2.** Campo de velocidad para el fluido y campo de desplazamientos para el sólido, considerando FSI en dos vías



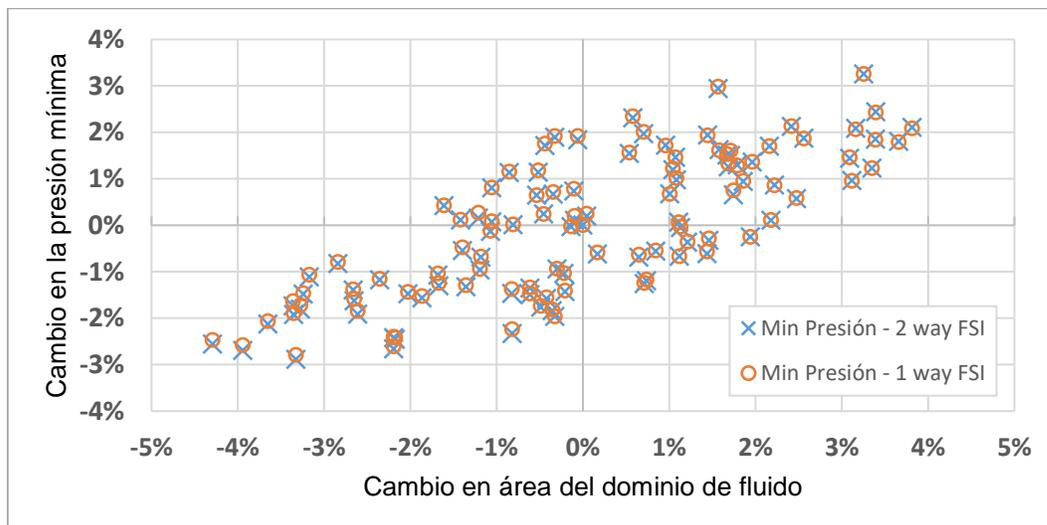
Una vez calculadas las variables de estado para cada uno de los dominios, se generan métricas de desempeño a partir de las cuales se compara el escenario en el que solo se considera el fluido (one-way FSI) con aquel en el que la deformación del sólido influye

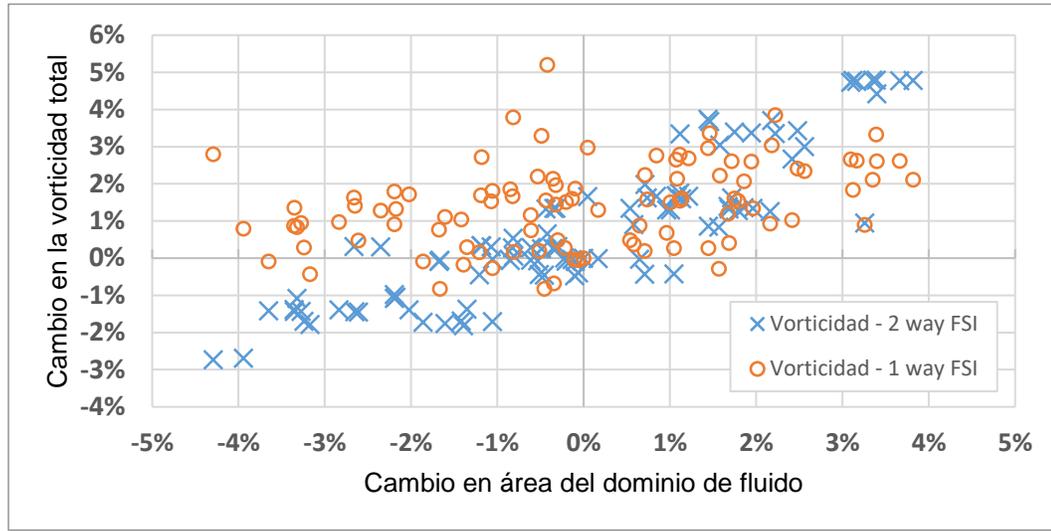
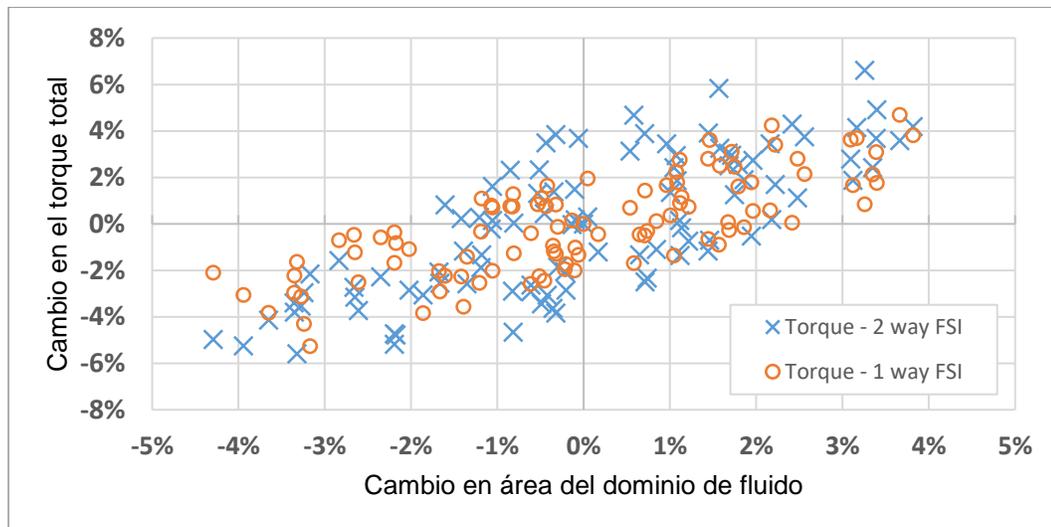
sobre el fluido (two-way FSI). Para facilitar este análisis, los resultados son presentados en función del cambio porcentual del área de cada punto de diseño. En las Figura 4-3, Figura 4-4, Figura 4-5 y Figura 4-6 se encuentran los resultados para el cambio en la máxima velocidad, la mínima presión, la vorticidad total y el torque total, respectivamente, todos ellos medidos a partir del punto de diseño de referencia de la Figura 4-1.

**Figura 4-3.** Influencia de la interacción FSI de dos vías sobre la velocidad máxima



**Figura 4-4.** Influencia de la interacción FSI de dos vías sobre la presión mínima



**Figura 4-5.** Influencia de la interacción FSI de dos vías sobre la vorticidad total**Figura 4-6.** Influencia de la interacción FSI de dos vías sobre el torque total

Es necesario reconocer que este análisis es totalmente dependiente de las condiciones de flujo y estructurales; sin embargo, se considera que desde un punto de vista cualitativo permite obtener cotas para posibles desviaciones al no considerar FSI en dos vías. De esta manera, se puede apreciar que, con excepción del cambio en la presión mínima, existen diferencias en los resultados (locales, como máxima velocidad y globales, como la vorticidad o torque total) al considerar FSI en dos vías. No obstante, estos cambios se encuentran dentro de un valor aceptable, mucho más cuando las deformaciones elásticas se encuentran para materiales convencionales e isotrópicos dentro de valores muy

inferiores al rango considerado para la variación en el área del dominio de fluido. Así, se concluye que el abordaje aquí propuesto y más común en la literatura, esto es, considerando FSI en una sola vía (one-way FSI), es apropiado desde el punto de vista de la optimización topológica. Asimismo, se concluye que una verificación de los modelos resultantes puede ser implementada en la etapa de posprocesamiento para evaluar la respuesta del diseño final al incluir FSI de dos vías (two-way FSI).

## **4.2 Verificación del código implementado**

Cada iteración del algoritmo TOM requiere la solución de los campos de presión-velocidad y de desplazamientos, mediante FEM. Por lo tanto, se considera necesario garantizar que la implementación FEM es adecuada, inicialmente para el problema de fluidos y luego incluyendo la interacción FSI. Así, se replican distintas simulaciones tomadas de la literatura, en las cuales se modelan los fenómenos característicos de los problemas mencionados. Posteriormente, se verifica la implementación del cálculo de sensibilidades y del optimizador TOM, utilizando un problema tipo benchmark.

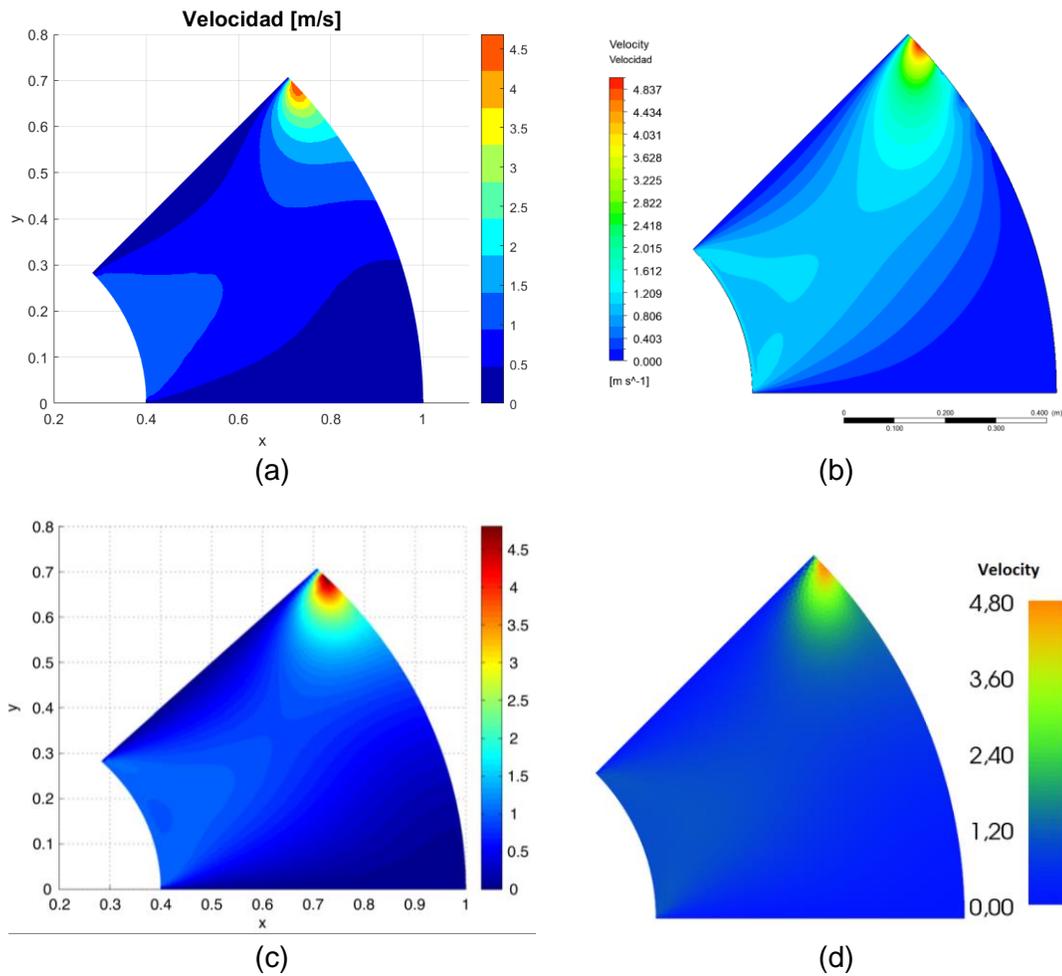
### **4.2.1 Verificación del código FEM: flujo viscoso**

Debido a la cercanía de los problemas de diseño aquí abordados con los desarrollados por Romero y Silva (2014) y posteriormente por Sá (2016), resulta natural utilizar dichas simulaciones para verificar el código de elementos finitos para flujo viscoso estacionario, laminar, incompresible y en un marco no inercial de referencia. Lo anterior, debido a que dichas simulaciones son referentes en el campo de la optimización topológica aplicada al diseño de turbomáquinas e incluyen verificación con software comercial y validación experimental. De esta manera, el problema tomado para verificación del código FEM para flujo viscoso corresponde al dominio de fluido presentado en la Figura 4-1 y cuyos parámetros se resumen en la Tabla 4-1.

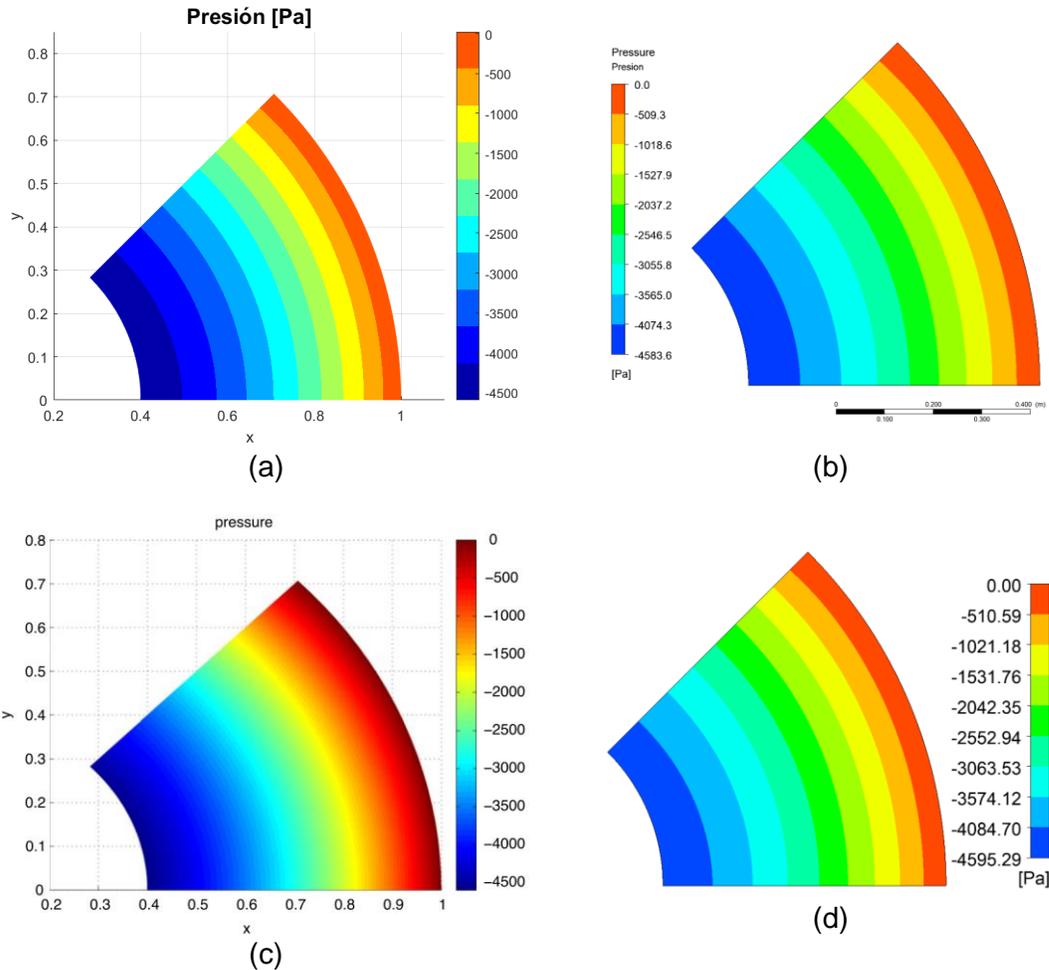
En las Figura 4-7 y Figura 4-8 se presenta el resultado obtenido para flujo viscoso utilizando el código implementado para resolver el sistema de ecuaciones descrito en la Ecc. 23, al igual que su contraparte en software comercial y los provenientes de la literatura. Así, se considera que el campo de fluidos es modelado globalmente de manera adecuada, con variaciones localizadas que pueden ser originadas por diferencias en los criterios de convergencia, algoritmo de solución del problema numérico, tipo de elemento finito y, en

el caso del software comercial, diferencias en la formulación (uso de FVM, en lugar de FEM). De igual modo, a pesar de que es posible construir métricas cuantitativas para esta comparación, analizando la influencia de cada uno de los factores mencionados, se considera que dicha exploración no es necesaria y se acepta la solución del código de elementos finitos como verificada.

**Figura 4-7.** Campo de velocidad para el problema de flujo viscoso utilizado para verificación del código FEM, según la Tabla 4-1. (a) Código implementado, (b) Software comercial, (c) Romero y Silva (2014), (d) Sá (2016)



**Figura 4-8.** Campo de presión para el problema de flujo viscoso utilizado para verificación del código FEM. (a) Código implementado, (b) Software comercial, (c) Romero y Silva (2014), (d) Sá (2016)



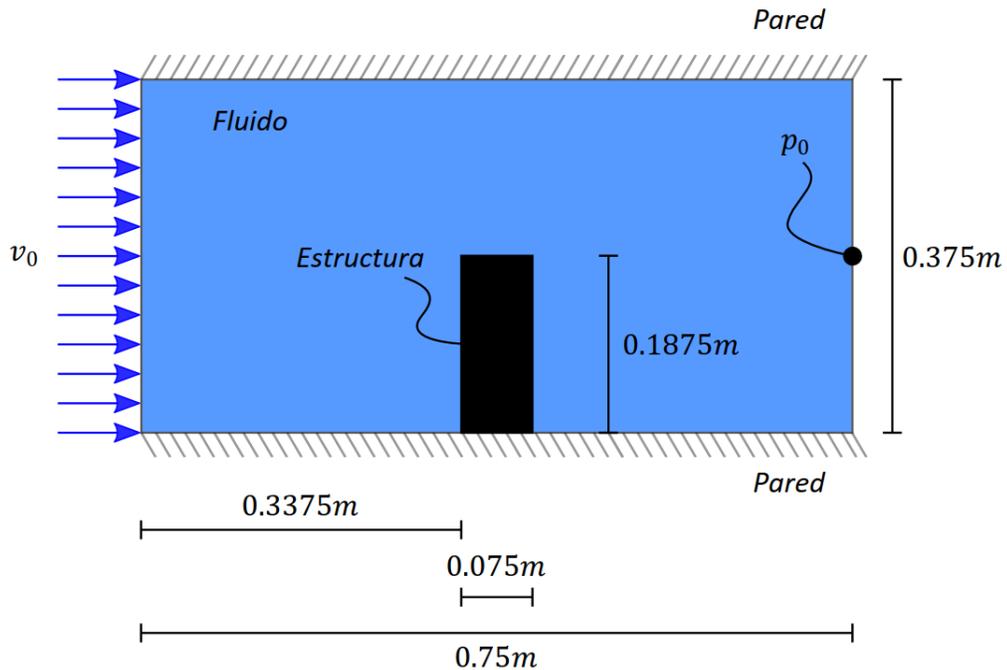
#### 4.2.2 Verificación del código FEM: interacción fluido-estructura

Una vez verificado el código FEM para flujo viscoso, se introduce un fenómeno adicional en el modelo: la interacción fluido-estructura. Para esto, se resuelven las ecuaciones de fluidos (Ecc. 23) y estructurales (Ecc. 26), teniendo un acoplamiento intermedio en la interfaz FSI (Ecc. 35). Para verificar este código se implementa un problema benchmark para FSI, conocido como el problema de la pared (the wall), el cual ha sido exhaustivamente evaluado con diferentes métodos FSI (Jenkins & Maute, 2015; Lundgaard et al., 2018; Picelli et al., 2017; Yoon, 2010b).

En esencia, se parte de que se tiene un flujo bidimensional, con un perfil de velocidad constante en la entrada (inlet velocity), una condición de presión en la salida (outflow) y

una columna estructural (la pared) que se encuentra en la mitad del dominio (ver Figura 4-9). Así, las fuerzas del fluido sobre la estructura originan su deformación. Los parámetros de esta simulación se presentan en la Tabla 4-2, los cuales son equivalentes a los del problema propuesto por Yoon (2010b). De esta manera, en la Figura 4-10 se encuentran los campos de velocidad y presión para el fluido, los cuales son coherentes con los encontrados en la literatura mencionada anteriormente. Adicionalmente, en la Figura 4-11 se presenta el campo de desplazamientos estructurales, el cual sirve para verificar el código de FEM incluyendo FSI, puesto que el valor obtenido para el punto de la esquina superior izquierda de la estructura ( $6.5 \times 10^{-14} \text{ m}$ ), es muy cercano al reportado por Yoon cuando analiza la dependencia del número de Darcy, según la Figura 4-11(b). En este punto se destaca que la gran cantidad de parámetros de los que depende el algoritmo TOM con FSI, dificulta replicar exactamente los resultados del problema tipo benchmark, en el que el desplazamiento en el punto de la esquina superior converge aproximadamente a  $6.9 \times 10^{-14} \text{ m}$ . Asimismo, el número de Darcy tiene una relación inversa con la máxima penalización Brinkman, con lo que se confirma que el valor utilizado para  $\kappa_{max} = 1 \times 10^7$  (Tabla 4-2) es lo suficientemente grande para transferir correctamente las cargas del fluido a la estructura en la interfaz FSI (genera un número de Darcy en la zona de convergencia).

**Figura 4-9.** Esquema de la simulación FSI para el problema de la pared (the wall)



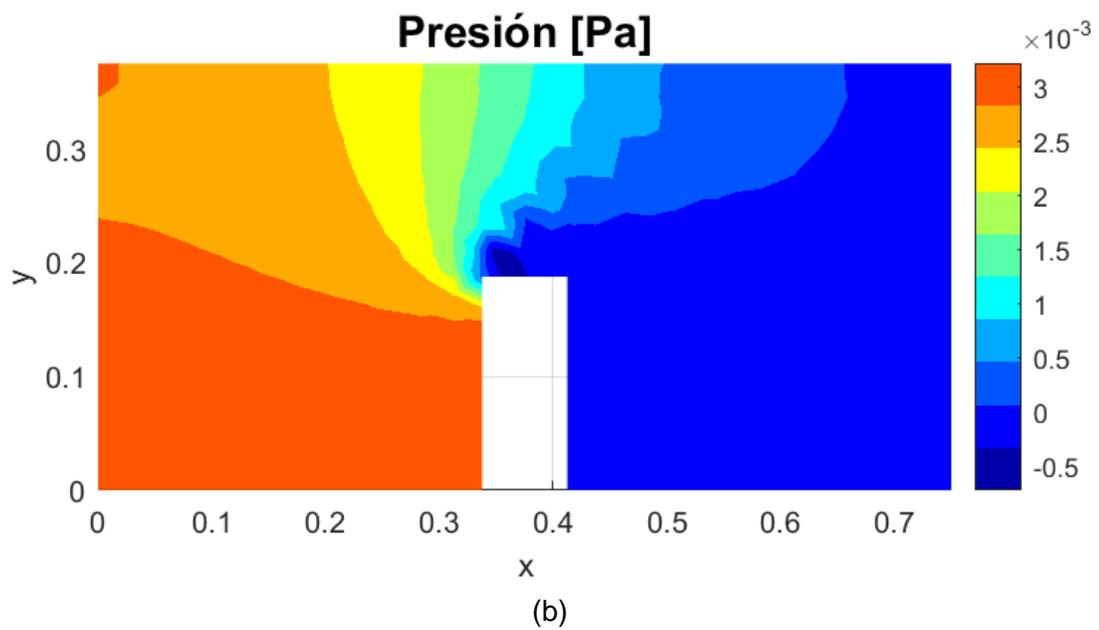
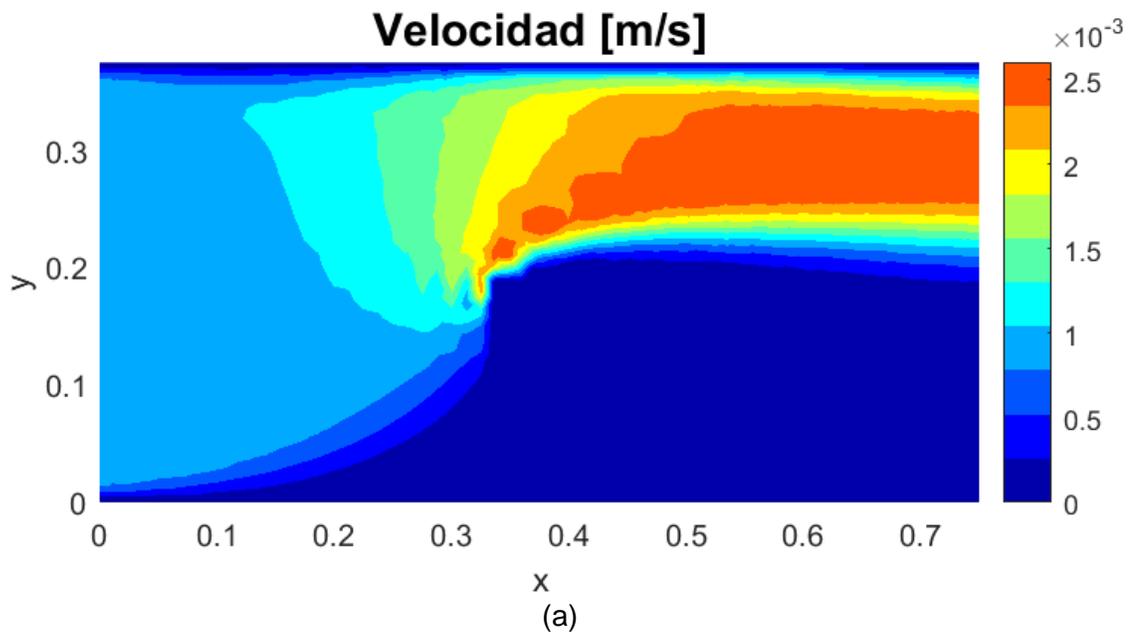
**Fuente:** Con base en Yoon (2010b)

**Tabla 4-2.** Parámetros de la simulación FSI para el problema de la pared (the wall)

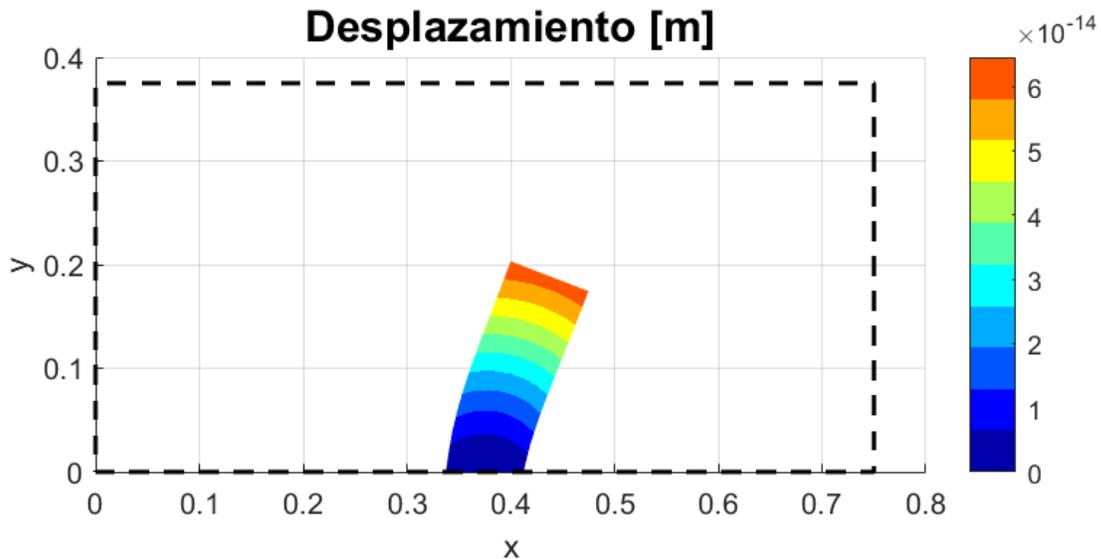
Parámetro	Valor
<b>Campo de fluidos:</b>	
Fluido	<i>Agua</i>
Viscosidad cinemática $\mu$	0.001 kg/m.s
Densidad fluido $\rho_f$	1000 kg/m <sup>3</sup>
Velocidad entrada $v_0$	8.85x10 <sup>-4</sup> m/s
Presión salida $p_0$	0 Pa
Penalización permeabilidad $q_\kappa$	0.01
Máxima penalización Brinkman $\kappa_{max}$	1x10 <sup>7</sup>
Mínima penalización Brinkman $\kappa_{min}$	0
<b>Campo estructural:</b>	
Sólido	<i>Acero</i>
Módulo de Young sólido $E_0$	2x10 <sup>11</sup> Pa
Módulo de Young fluido $E_{min}$	0.1 Pa
Penalización rigidez $q_E$	3
Coefficiente de Poisson $\nu$	0.3
Densidad sólido $\rho_s$	7850 kg/m <sup>3</sup>
Espesor $h$	1 m
<b>Interacción fluido-estructura:</b>	
Penalización fuerza FSI $q_f$	1
Factor de fuerza FSI fluido $\vartheta_{max}$	1
Factor de fuerza FSI fluido $\vartheta_{min}$	0

**Fuente:** Parámetros de la simulación con base en Yoon (2010b)

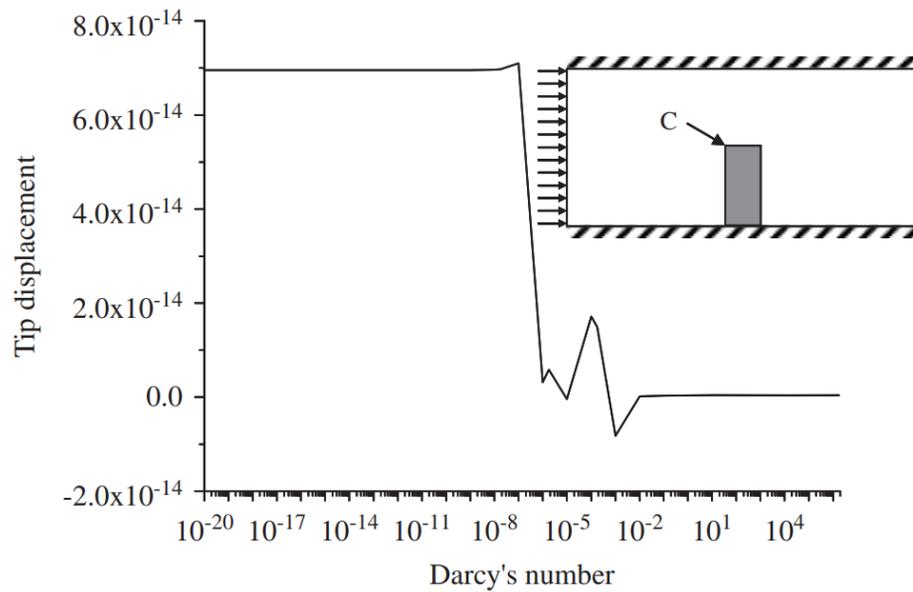
**Figura 4-10.** Resultados del fluido para el problema benchmark de FEM con FSI. (a) Campo de velocidades, (b) Campo de presiones



**Figura 4-11.** Campo de desplazamientos estructurales para el problema benchmark de FEM con FSI. (a) Código implementado, (b) Yoon (2010b)



(a)



(b)

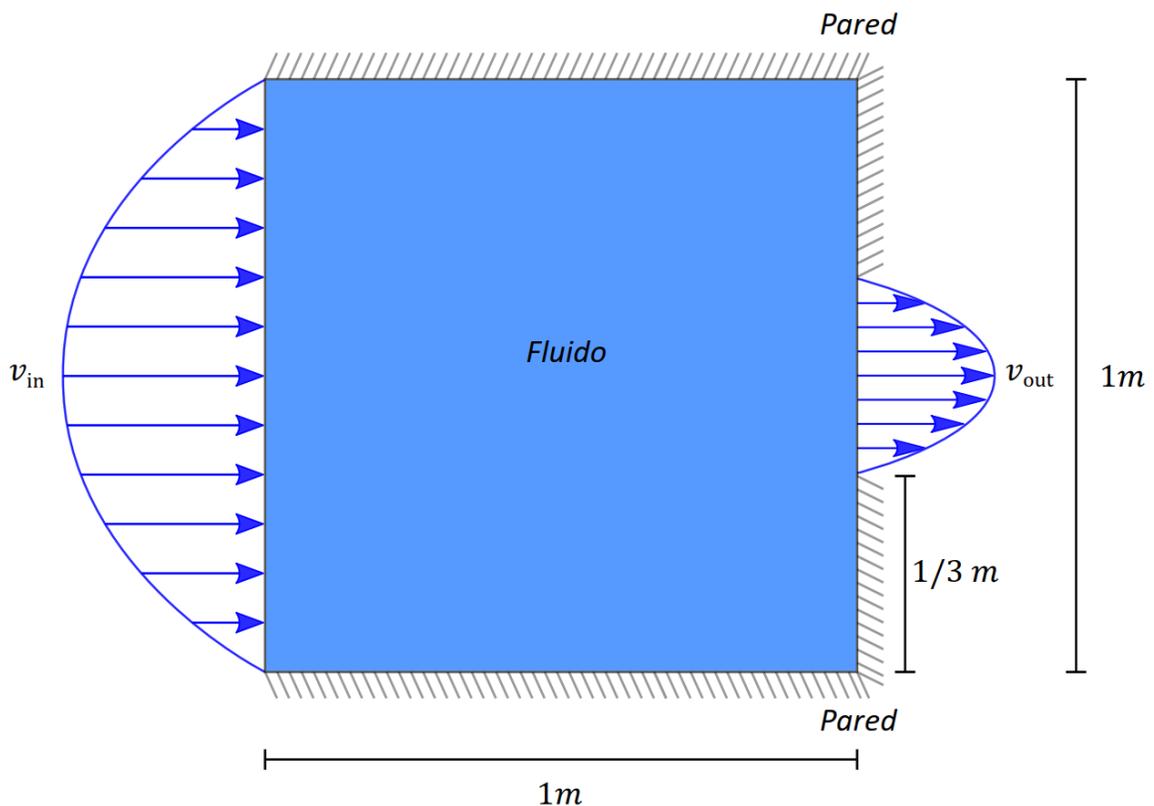
### 4.2.3 Verificación del código TOM: flujo viscoso

Desde la introducción del TOM para fluidos utilizando el método de penalización de Brinkman (aproximación de medio poroso, en el que se trata el sólido como un fluido impermeable), el problema de diseño conocido como el difusor ha servido como ejemplo

benchmark para verificación de estos códigos, siguiendo la configuración propuesta por Borrvall y Petersson (2003).

Así, partiendo de un flujo bidimensional parabólico, estacionario e incompresible, se busca generar la distribución óptima de material que conduzca el fluido desde su entrada hasta la salida, minimizando la disipación de energía (solucionando el problema de optimización TOM de la Ecc. 52); esto es, teniendo como función objetivo la Ecc. 48 (ver Figura 4-12).

**Figura 4-12.** Problema tipo benchmark conocido como el difusor utilizado para verificación del código TOM para flujo viscoso



**Fuente:** Construido con base en Borrvall y Petersson (2003)

En la Tabla 4-3 se presentan los parámetros del problema conocido como el difusor. Las propiedades del fluido se conservaron según la versión original del problema; sin embargo, los parámetros propios del optimizador dependen de su implementación, por lo que los valores mostrados corresponden a los resultados finales.

A pesar de que la complejidad del problema del difusor es inferior al de los propios del diseño de rotores de turbomáquinas (principalmente, por las condiciones de flujo y los

términos del marco no inercial de referencia), los resultados obtenidos durante esta verificación permiten identificar aspectos característicos de TOM que deben ser tenidos en cuenta para garantizar la estabilidad del código. En particular, debido a que el modelo de material implementado representa una penalización exponencial sobre el flujo, es necesario tener un balance entre el factor de penalización de la permeabilidad  $q_\kappa$ , la máxima penalización de Brinkman  $\kappa_{max}$  y la técnica de filtro implementada. Así, por ejemplo, para configuraciones con un  $q_\kappa = 0.01$  se favorece la escala de grises, situación que puede ser compensada incrementando el valor de  $\kappa_{max}$  o utilizando un filtro de proyección con una pendiente de penalización fuerte sobre pseudodensidades intermedias.

**Tabla 4-3.** Parámetros del problema TOM benchmark conocido como el difusor

Parámetro	Valor
<b>Campo de fluidos:</b>	
Fluido	<i>Genérico</i>
Viscosidad cinemática $\mu$	$1 \text{ kg/m.s}$
Densidad fluido $\rho_f$	$1 \text{ kg/m}^3$
Velocidad entrada centro $v_{in}$	$1 \text{ m/s}$
Velocidad salida centro $v_{out}$	$2.69 \text{ m/s}$
Penalización permeabilidad $q_\kappa$	1
Máxima penalización Brinkman $\kappa_{max}$	$1 \times 10^4$
Mínima penalización Brinkman $\kappa_{min}$	0
<b>TOM:</b>	
Función a minimizar	<i>Disipación de energía</i>
Fracción de volumen objetivo	0.5
Método de optimización	<i>OC, SLP y MMA</i>
Número de iteraciones	77
Número de elementos finitos	3557

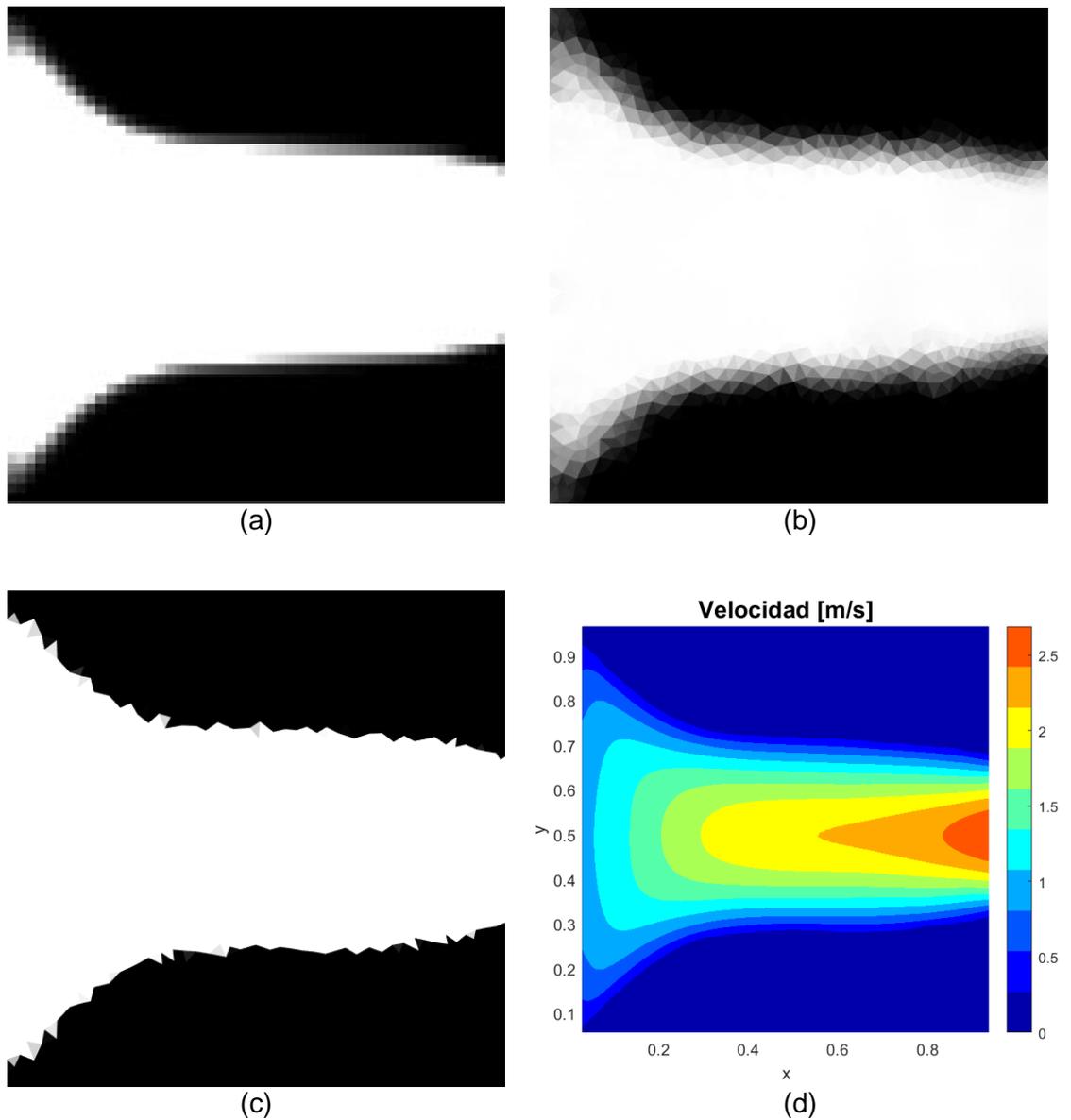
**Fuente:** Parámetros del problema Benchmark propuesto por Borrvall y Petersson (2003)

Por otro lado, este problema fue resuelto utilizando OC, SLP y MMA, con lo cual se corroboraron las ventajas y limitaciones de cada uno de los métodos de optimización. Aunque el OC y el MMA tienen un comportamiento estable conforme avanzan las iteraciones, el OC solo fue implementado para tener un punto de referencia, puesto que no es viable cuando se tienen funciones multiobjetivo no monotónicas respecto a la variable de diseño. Por su parte, no se logró estabilidad en el algoritmo empleando SLP,

lo cual impidió tener convergencia en el valor de la función objetivo. Esta situación se atribuye a la no linealidad propia de las ecuaciones modeladas.

De esta manera, en la Figura 4-13 se presentan los resultados del difusor, con lo cual se aprecia que el código implementado converge a la topología esperada para este problema.

**Figura 4-13.** Resultado de la topología obtenida para el problema conocido como el difusor. (a) Resultado de Borrvall y Petersson (2003), (b) Código implementado de MMA con filtro lineal en variables de diseño, (c) Con filtro de proyección, (d) Campo de velocidad



En la Figura 4-13 se incluyen tanto los resultados únicamente con un filtro lineal sobre las variables de diseño (Ecc. 66) como aquellos en los que se implementa el filtro de proyección de la Ecc. 67 (Figura 4-13(b) y Figura 4-13(c), respectivamente). Así, no solo se verifica la correcta implementación del filtro de proyección, logrando llevar a un diseño que tiende a unos y ceros (eliminando la escala de grises), sino que se identifica que este filtro acelera significativamente la tasa de convergencia del algoritmo TOM. Este comportamiento puede explicarse a partir del campo de velocidad representado en la Figura 4-13(d), en el que es claro que la topología asigna un material sólido a aquellos elementos finitos en los que la velocidad tiende a cero, de tal modo que el filtro de proyección contribuye a incrementar dicha penalización en las regiones en las que se encuentra la interfaz fluido-estructura.

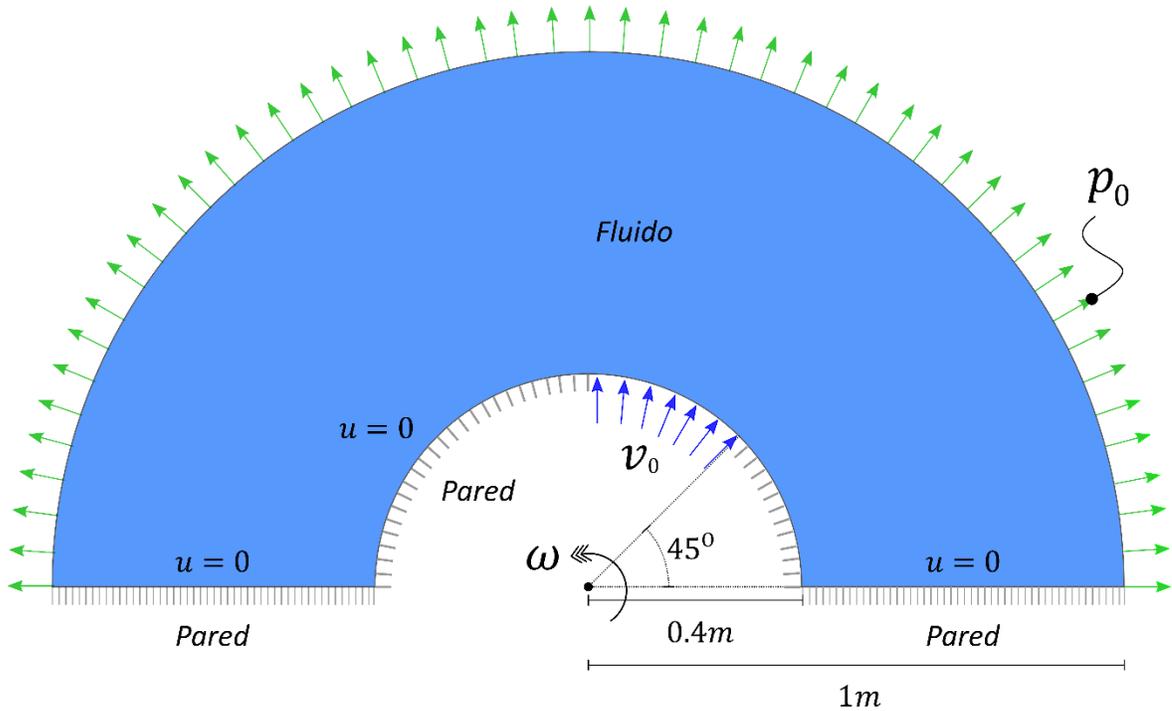
### **4.3 Resultados TOM para turbomáquinas**

Tomando como referencia el trabajo de Romero y Silva (2014) para el uso de TOM en el diseño de rotores de turbomáquinas, se decide abordar el problema de la presente tesis mediante la construcción de un modelo equivalente, en el cual, además, se incorpore el campo de desplazamientos estructurales y su efecto en la función objetivo del problema de optimización. En la Figura 4-14 se encuentra un esquema del problema de diseño considerado en esta tesis, con los parámetros sintetizados en la Tabla 4-4. Así, se observa que se tiene un modelo bidimensional en el que se tiene un fluido con una velocidad en la entrada y una presión en la salida (outflow). La velocidad en la entrada es normal a la curva del radio interno, debido a que corresponde a la velocidad en el marco no inercial de referencia (considerando la rotación de todo el conjunto). El modelo incluye la simplificación de una sola región de entrada del fluido, lo cual equivale a asumir el flujo entre dos álabes consecutivos del rotor de una bomba, resultado que puede extrapolarse a un mayor número de álabes para conformar el rotor completo.

Asimismo, con el propósito de tener los resultados tan cercanos al modelo de referencia y así identificar el efecto de incluir FSI en el modelo (sin introducir modificaciones adicionales en los parámetros del problema de optimización), se decide tomar la parte sólida de la media circunferencia mostrada para evaluar el desempeño estructural del punto de diseño en cada iteración TOM. Esto es, se reconoce que la parte estructural del rotor completo (luego de construir la configuración con el número total de álabes) difiere de la del modelo

simplificado, pero se decide utilizar el sólido mencionado como primera aproximación al problema de diseño de rotores de turbomáquinas usando TOM y considerando FSI.

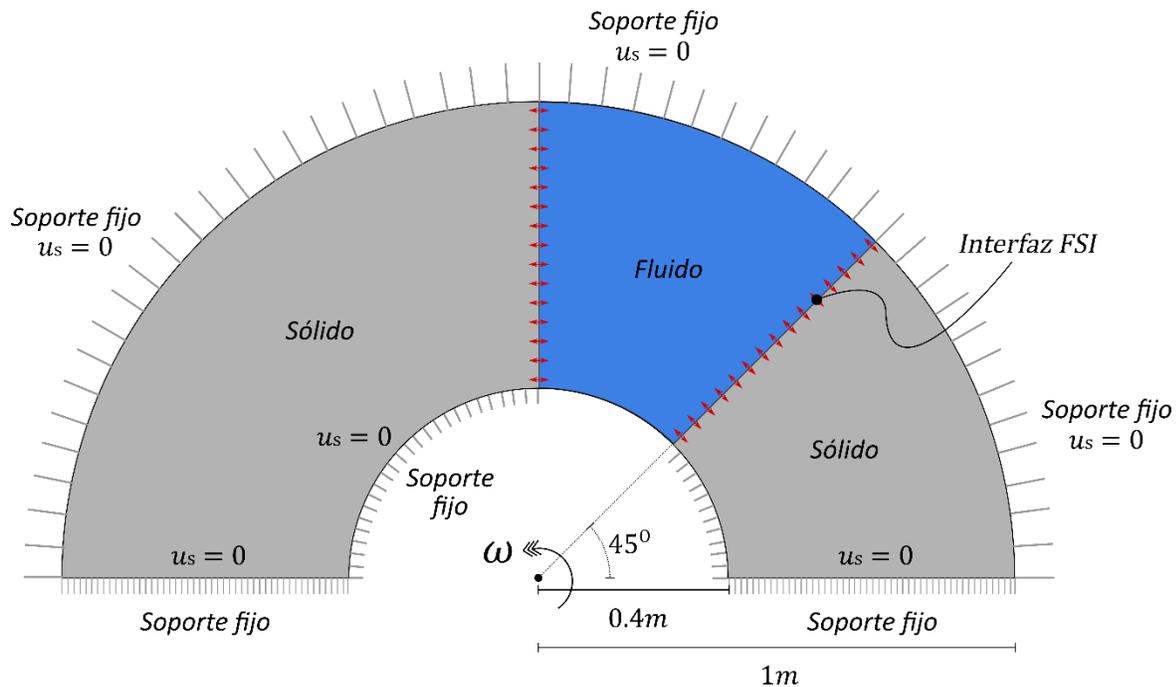
**Figura 4-14.** Esquema del problema de diseño de rotores de turbomáquinas usando TOM – Campo de fluidos para una bomba centrífuga



**Fuente:** Construido con base en Romero y Silva (2014)

Los parámetros presentados en la Tabla 4-4 corresponden a la configuración de referencia, puesto que en las próximas se muestran resultados en los que algunos de ellos son modificados para evaluar su efecto sobre las topologías finales. Las propiedades de los materiales en el campo estructural corresponden a un acero al carbono común, conservando características como el espesor unitarios para eliminar su influencia sobre los resultados. Debido a que el problema abordado en este trabajo corresponde a una primera aproximación TOM incluyendo FSI en turbomáquinas, se decide simplificar las condiciones de frontera del problema estructural, restringiendo los desplazamientos de todos los nodos en la frontera del dominio, excepto aquellos en los que se tiene la entrada del fluido. Si bien esta simplificación no refleja exactamente la física operativa de los rotores de turbomáquinas, permite llevar la atención hacia las fuerzas que surgen en la interfaz fluido-estructura, foco de este trabajo (ver Figura 4-15).

**Figura 4-15.** Esquema del problema de diseño de rotores de turbomáquinas usando TOM y FSI – Campo estructural y FSI para el rotor de una bomba centrífuga



Asimismo, anteriormente se describió el proceso de verificación del código implementado, por un lado, el código FEM para flujo viscoso y para FSI y, por otro lado, TOM para flujo viscoso. Al considerar TOM para turbomáquinas, surge el código del análisis de sensibilidad para la función multiobjetivo, el cual fue verificado mediante diferencias finitas progresivas con  $\Delta(\alpha_e) = 1 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-6}$ . En este punto se destaca que la verificación mediante diferencia finitas solo pudo realizarse satisfactoriamente para los objetivos del campo de fluidos (disipación de energía y vorticidad). En el caso de la flexibilidad estructural, no fue posible encontrar un  $\Delta(\alpha_e)$  adecuado para que el error por diferencias finitas fuese aceptable, situación que puede atribuirse a la alta penalización que debe ser utilizada para la transferencia de cargas FSI. No obstante, cómo se mostrará más adelante, el algoritmo de optimización topológica aquí implementado tiene una curva de convergencia en la que es evidente la minimización de la flexibilidad estructural conforme avanzan las iteraciones, lo cual se considera como fuente suficiente de verificación para el alcance de este trabajo.

**Tabla 4-4.** Parámetros del problema de diseño de rotores de turbomáquinas usando TOM y modelando FSI

Parámetro	Valor
<b>Campo de fluidos:</b>	
Fluido	<i>Genérico</i>
Viscosidad cinemática $\mu$	$0.1 \text{ kg/m.s}$
Densidad fluido $\rho_f$	$1 \text{ kg/m}^3$
Velocidad entrada $v_0$	$1 \text{ m/s}$
Presión salida $p_0$	$0 \text{ Pa}$
Penalización permeabilidad $q_\kappa$	0.1
Máxima penalización Brinkman $\kappa_{max}$	$1 \times 10^5$
Mínima penalización Brinkman $\kappa_{min}$	0
<b>Campo estructural:</b>	
Sólido	<i>Acero</i>
Módulo de Young sólido $E_0$	$2 \times 10^9 \text{ Pa}$
Módulo de Young fluido $E_{min}$	$0.1 \text{ Pa}$
Penalización rigidez $q_E$	3
Coeficiente de Poisson $\nu$	0.3
Densidad sólido $\rho_s$	$7850 \text{ kg/m}^3$
Espesor $h$	$1 \text{ m}$
<b>Interacción fluido-estructura:</b>	
Penalización fuerza FSI $q_f$	1
Factor de fuerza FSI fluido $\vartheta_{max}$	1
Factor de fuerza FSI fluido $\vartheta_{min}$	0
<b>TOM:</b>	
Fracción de volumen objetivo	0.25
Método de optimización	<i>MMA</i>
Número de elementos finitos	1480

#### 4.3.1 TOM mono-objetivo: Minimización de energía disipada

A pesar de que el problema TOM aquí considerado tiene una formulación con una función multiobjetivo (siguiendo la Ecc. 47), se decide presentar los resultados de manera escalonada, iniciando con una función mono-objetivo. Así, en la Figura 4-16 se encuentra la topología obtenida cuando se tiene como único objetivo la minimización de la disipación de energía; esto es, cuando  $w_d = 1$  y  $w_r = w_s = 0$  en la Ecc. 47 y por lo tanto no se considera el efecto de la estructura y de la introducción FSI. El problema cuyo resultado se muestra en la Figura 4-16 se toma como punto de referencia a partir del cual se evalúa el efecto de las variaciones en los parámetros de algoritmo de optimización, con las características particulares de esta configuración en la Tabla 4-5.

**Tabla 4-5.** Parámetros TOM mono-objetivo ( $w_d = 1$ ). Configuración de referencia

Parámetro	Valor
<b>TOM:</b>	
Fracción de volumen objetivo	< 0.25
Pseudodensidad inicial $(\alpha_e)_0$	0.25
Máxima penalización Brinkman $\kappa_{max}$	$1 \times 10^5$
Penalización permeabilidad $q_\kappa$	0.1
Máxima pendiente filtro proyección $\beta_{max}$	12.8
Número máximo de iteraciones	215
<b>Desempeño:</b>	
Fracción de volumen final	0.234
Energía disipada	5.10 W

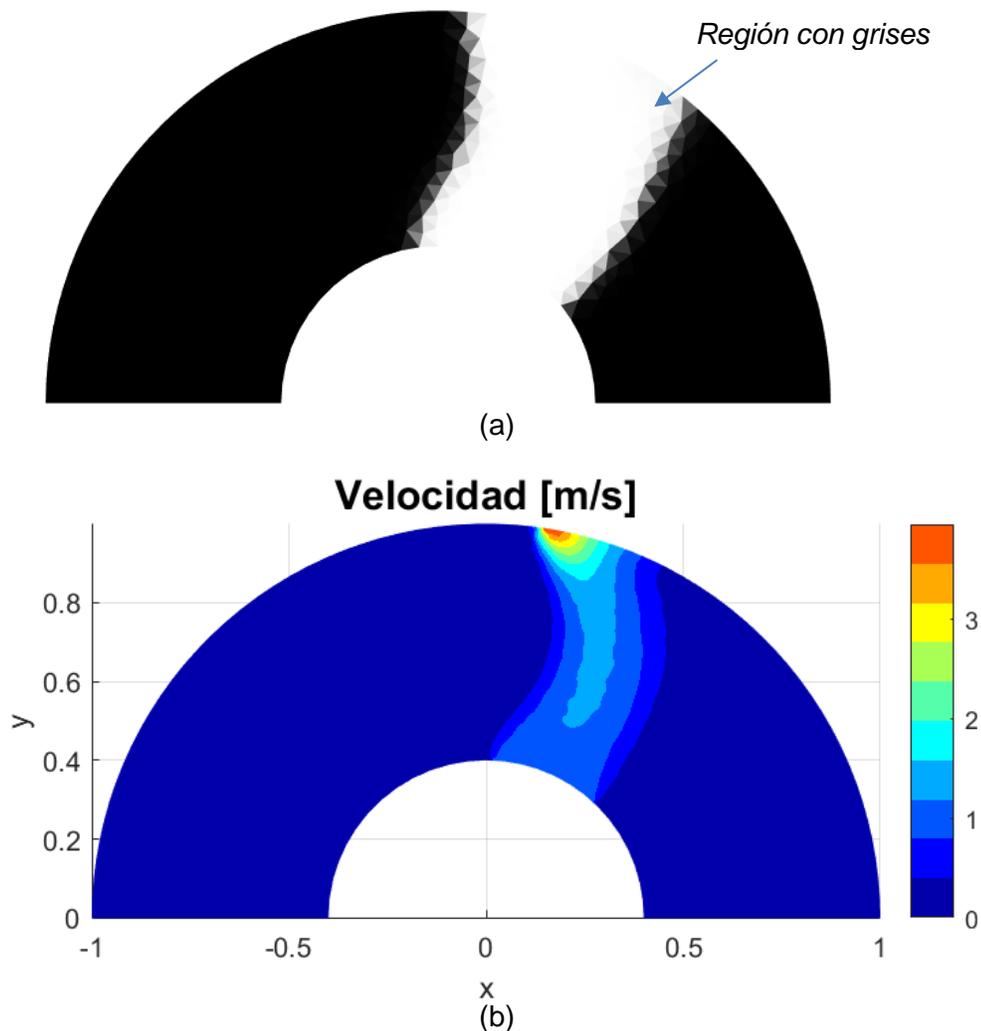
De esta manera, se observa que el resultado corresponde a la geometría estándar de los rotores de las bombas centrífugas en condiciones de trabajo tradicionales; esto es, se minimiza el trayecto del fluido entre la entrada y la salida, con un perfil hidrodinámico que favorece la transferencia de momentum en la región de salida del fluido, puesto que en esta zona el radio es mayor y, consecuentemente, se incrementa la contribución de los términos propios de la rotación de la turbomáquina.

Al comparar la topología obtenida Figura 4-16(a) con el perfil de velocidad de la Figura 4-16(b), resulta evidente que la penalización del modelo de material implementado es lo suficientemente fuerte para representar adecuadamente el sólido como un fluido impermeable. Se destaca la zona en la salida del fluido en el lado derecho, en la que se observan algunos grises en la variable de diseño (pseudodensidades intermedias), por lo que da la impresión de que la topología no copia la curvatura exagerada del perfil de velocidad. Sin embargo, este fenómeno se atribuye al uso de una pendiente baja en el filtro de proyección (permitiendo los grises) como primera aproximación, por lo que dicha región corresponde a fluido, pero con una velocidad mucho menor en comparación con la máxima velocidad.

En la Figura 4-17 se muestra la curva de convergencia para el algoritmo de MMA teniendo como función objetivo únicamente la disipación de energía. Los picos que se presentan en las primeras iteraciones son producto de tomar como punto inicial una distribución homogénea en la variable de diseño, por lo que todo el dominio se comporta como un

material poroso y, por lo tanto, se restringe el flujo, dando lugar a una excesiva disipación de energía. Este fenómeno empieza a eliminarse conforme avanzan las iteraciones y se forma el canal de flujo que une la entrada del fluido con la salida. Los picos intermedios corresponden a los puntos en los que se realiza una actualización de la pendiente del filtro de proyección. Los picos en la fracción de volumen tienen mayor magnitud en las últimas iteraciones porque es más difícil lograr que el filtro de proyección satisfaga la conservación de volumen cuando la pendiente es muy alta.

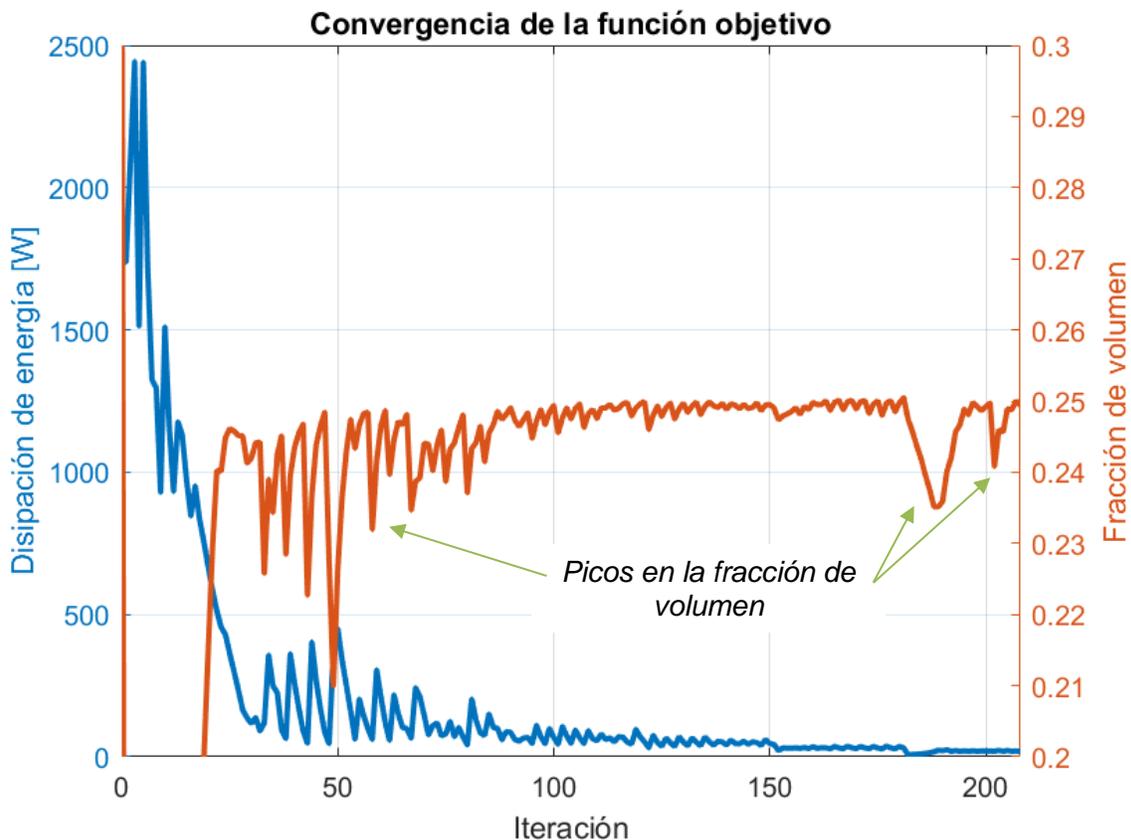
**Figura 4-16.** Resultados TOM para el diseño de rotores de turbomáquinas minimizando la disipación de energía. (a) Topología final, (b) Campo de velocidad



Por otro lado, un fenómeno observado durante la solución de este problema es que el campo de fluidos no puede ser resuelto adecuadamente cuando se tiene una distribución inicial homogénea de la variable de diseño, puesto que el dominio de diseño corresponde

a un medio poroso que restringe completamente el flujo, generando una elevada disipación de energía y originando una violación de la fracción de volumen en las iteraciones siguientes. Luego de alrededor de 25 iteraciones, se logra obtener una topología que garantiza la unión de fluido entre la succión y la descarga de la bomba, permitiendo el flujo no restringido y una estabilización del algoritmo de optimización. Es así como, se observa que el MMA logra alcanzar una convergencia al valor de la función objetivo, incluso cuando en un principio se incumple la restricción de volumen, comportamiento que no se logró con SLP (el SLP diverge si se tienen topologías que violan significativamente la restricción de volumen). Finalmente, se resalta que solo se utilizó un esquema de continuación para el filtro de proyección, no para las demás funciones de penalización.

**Figura 4-17.** Curva de convergencia. TOM para el diseño de rotores de turbomáquinas minimizando la disipación de energía. Configuración de referencia



Tomando como referencia este resultado, el paso siguiente consiste en evaluar el efecto de modificar los parámetros del algoritmo TOM sobre las topologías resultantes. En

particular, se analiza la influencia de la no-linealidad del Jacobiano de la función objetivo, el punto de diseño inicial, la velocidad de actualización del filtro de proyección, y algunos de los parámetros del modelo de material.

- *No-linealidad del Jacobiano del residual*

Como parte del cálculo de sensibilidad de la función objetivo del algoritmo TOM es necesario obtener el Jacobiano del residual de las ecuaciones de Navier-Stokes (Ecc. 60), el cual incluye términos no lineales (que dependen del valor de la velocidad) pero que usualmente son reducidos a una cuantificación lineal. Esta decisión depende mucho de los fenómenos modelados en cada problema en particular. Sin embargo, se considera que las ecuaciones desarrolladas para los problemas con turbomáquinas tienen términos altamente no-lineales, por lo que es de esperarse que tenga un impacto significativo en los diseños finales.

En la Figura 4-18 se presenta el resultado obtenido al correr el mismo problema de la Tabla 4-5 con la única modificación de linealizar el Jacobiano del residual de la ecuación de Navier-Stokes. En este caso, luego de 245 iteraciones, se alcanza la convergencia a una topología con una disipación de energía de  $5.42 W$  y una fracción de volumen de 0.28. A pesar de que no se aprecia un cambio significativo en el desempeño de la topología final, se evidencia un incremento significativo en el área de la salida del fluido, reafirmando así la importancia de los términos no lineales en este tipo de problemas.

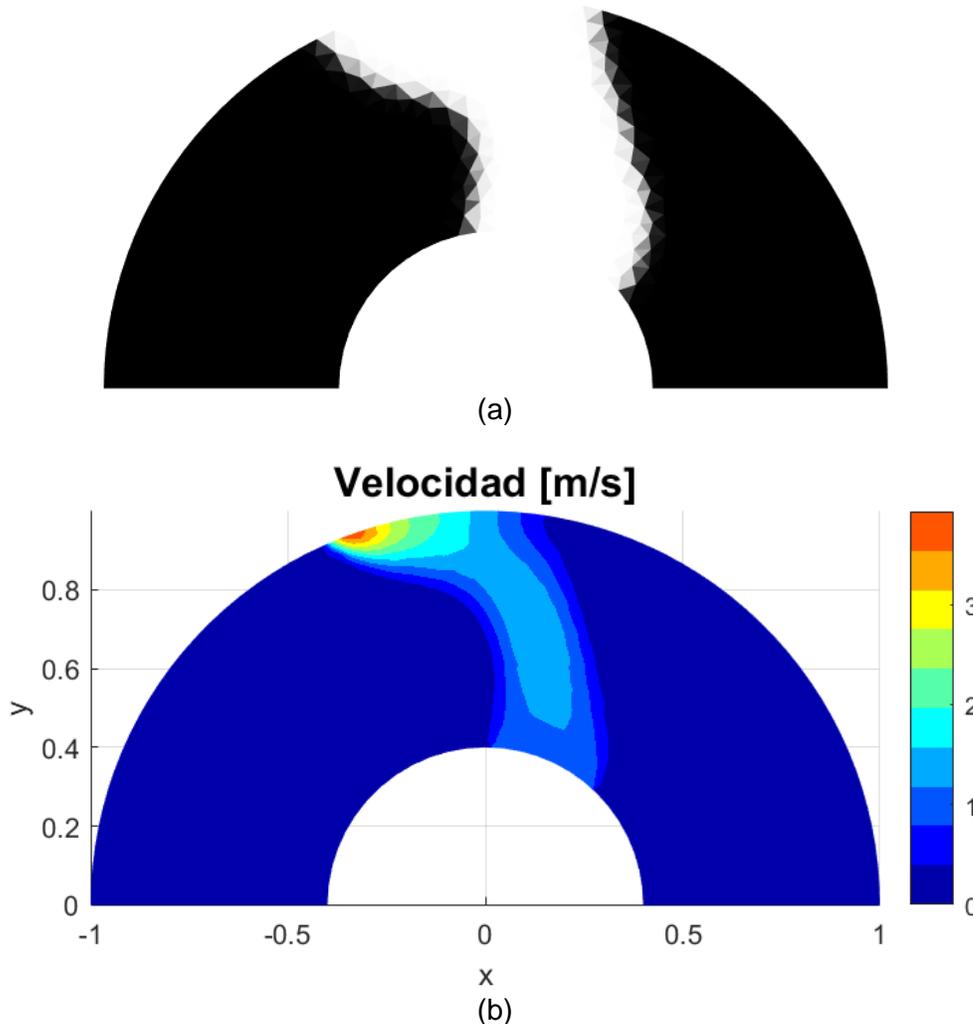
- *Punto de diseño inicial*

La dependencia de las topologías finales para los rotores respecto al punto de diseño inicial fue demostrada por Romero y Silva (2014) y Sá (2016), quienes consideraron puntos iniciales con distribución homogénea de pseudodensidad, perfiles rectos y curvos. Es por esto que en este trabajo se decide evaluar el efecto de dicha variable, al cambiar el valor de la variable de diseño inicial para todos los elementos finitos (distribución homogénea).

En la Tabla 4-6 se resume el desempeño de las topologías obtenidas para la disipación de energía, en función del punto de diseño inicial, las cuales se muestran en las Figura 4-19 y Figura 4-20. Así, se evidencia que, a pesar de que el desempeño final de las topologías resultantes es muy similar, la curvatura cambia notablemente, lo cual indica que el problema que se está resolviendo es propenso a tener múltiples mínimos locales, por lo

que la evaluación de diversas configuraciones debe ser realizada para identificar patrones que no son intuitivos desde el punto de vista conceptual. Adicionalmente, partiendo de la existencia de múltiples mínimos locales para la disipación de energía, se resalta que es necesario realizar una exploración de la frontera de Pareto cuando se considera la función multiobjetivo.

**Figura 4-18.** Resultados TOM para el diseño de rotores de turbomáquinas minimizando la disipación de energía. Linealización del Jacobiano. (a) Topología final, (b) Campo de velocidad



Un aspecto relevante es que cuando el algoritmo TOM parte de una distribución homogénea en la pseudodensidad con un valor de  $(\alpha_e)_0 = 0.50$  (totalmente gris), se dificulta el hallazgo de una dirección de optimización para valores pequeños de la pendiente del filtro de proyección, quedando la geometría completamente definida únicamente cuando se incrementa dicha pendiente (el filtro es más fuerte). De igual modo, cuando el punto

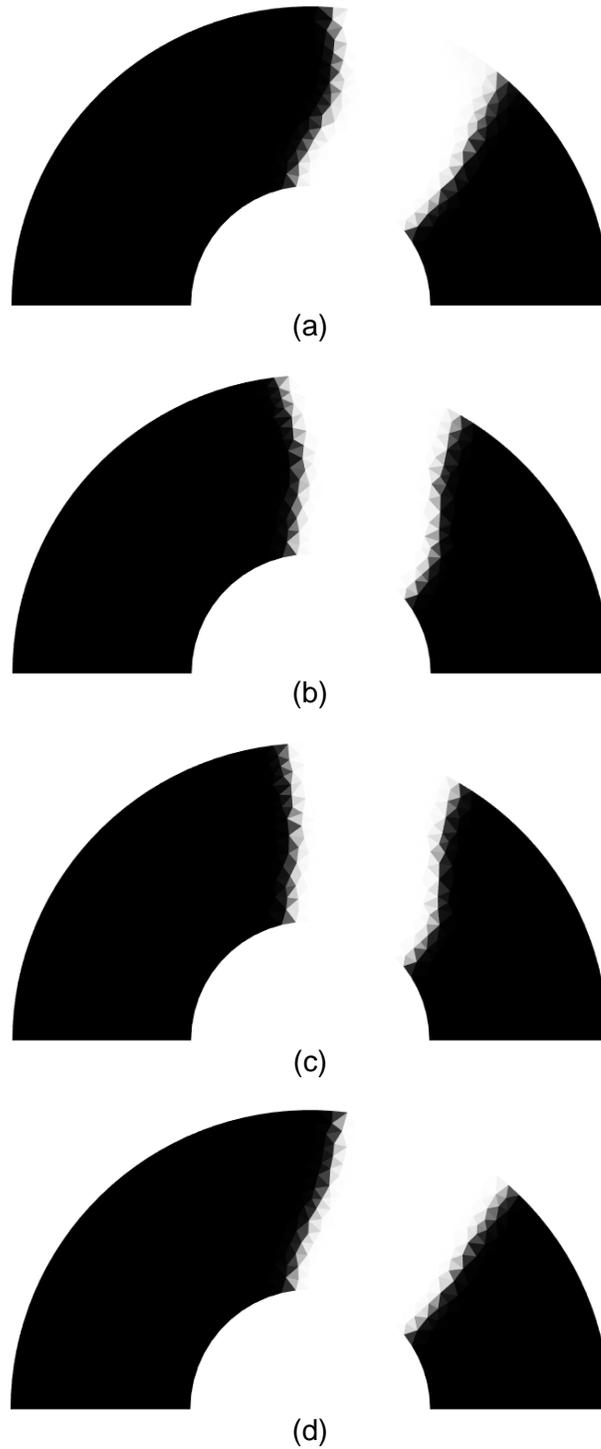
inicial coincide o es cercano a la fracción de volumen, se favorece cierta curvatura en el perfil del álabe, siendo este más recto en los casos en los que el punto inicial se toma en una topología muy permeable ( $(\alpha_e)_0 = 0.95$ ) o muy impermeable ( $(\alpha_e)_0 = 0.05$ ).

**Tabla 4-6.** Desempeño de las topologías finales en función del punto de diseño inicial. Disipación de energía

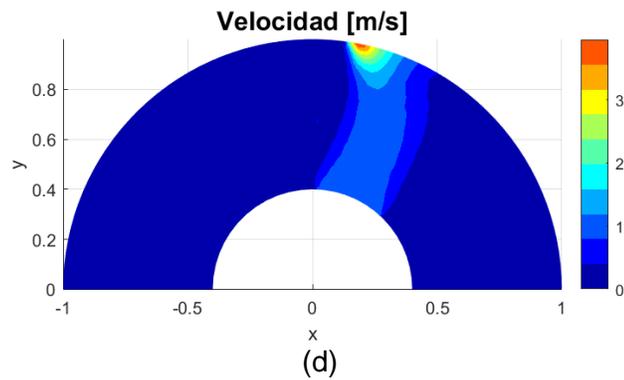
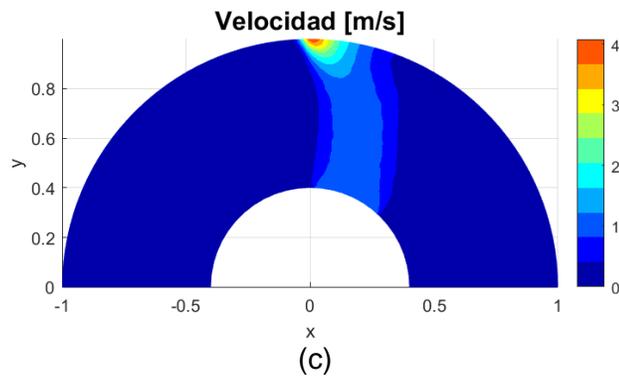
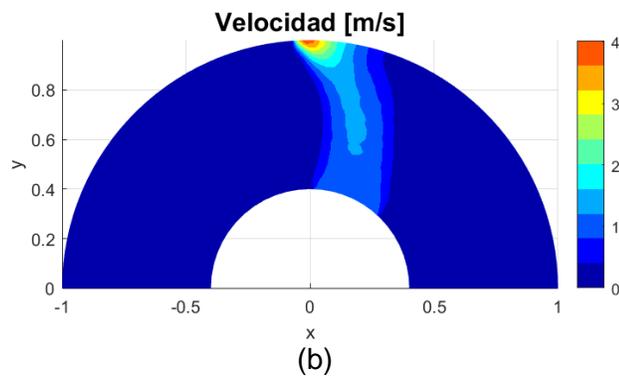
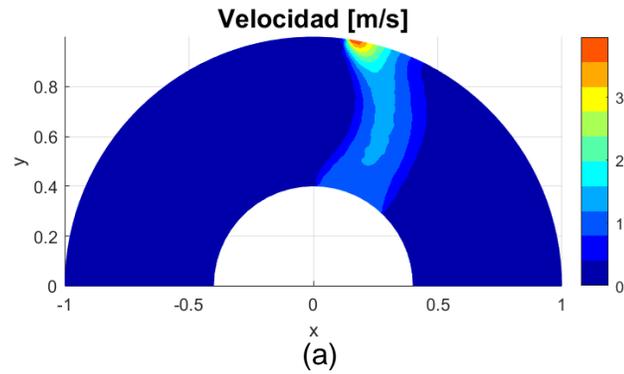
Parámetro	Pseudodensidad inicial $(\alpha_e)_0$			
	0.25	0.05	0.50	0.95
<b>Desempeño:</b>				
Fracción de volumen final	0.234	0.234	0.240	0.234
Energía disipada	5.10 W	4.83 W	4.59 W	4.68 W

El análisis anterior permite concluir que, si bien el punto inicial de la variable de diseño sí influye en la topología final, cuando se parte de una distribución homogénea el resultado final es equivalente, por lo que se sugiere utilizar puntos de diseño iniciales que estén cercanos a cumplir la restricción de volumen, pues acelera la tasa de convergencia del algoritmo de optimización.

**Figura 4-19.** Topologías finales en función del punto de diseño inicial. Disipación de energía en función de  $(\alpha_e)_0$ : (a) 0.25, (b) 0.05, (c) 0.50, (d) 0.95



**Figura 4-20.** Campo de velocidad de las topologías finales en función del punto de diseño inicial. Disipación de energía en función de  $(\alpha_e)_0$ : (a) 0.25, (b) 0.05, (c) 0.50, (d) 0.95



- *Velocidad de actualización del filtro de proyección*

Los problemas anteriores se resolvieron con el esquema de actualización de la pendiente del filtro de proyección sugerida por Xu et al. (2010); esto es, iniciando con  $\beta = 0.1$  y duplicando su valor cada 30 iteraciones, hasta alcanzar convergencia y garantizando que el  $\beta_{max} = 12.8$  no genera inestabilidad en el código TOM, por dificultad para conservar el volumen entre la topología sin filtrar y la filtrada, característica que depende del refinamiento de la malla. En ocasiones, es necesario incrementar el número de iteraciones entre actualizaciones del parámetro  $\beta$  para evitar la convergencia prematura en óptimos locales. Este fenómeno no se presentó cuando se mantuvo una actualización cada 30 iteraciones y la correcta selección de este parámetro se verificó al evaluar esquemas de actualización con una mayor frecuencia. Luego de implementar otros esquemas de actualización, incrementando la frecuencia (cada 5, 10 y 15 iteraciones) y el salto entre  $\beta$  consecutivos (duplicando y cuadruplicando), no se identificaron comportamientos que llevaran al algoritmo TOM hacia otros mínimos alejados de los ya mostrados, solo se afectó la suavidad en la curva de convergencia.

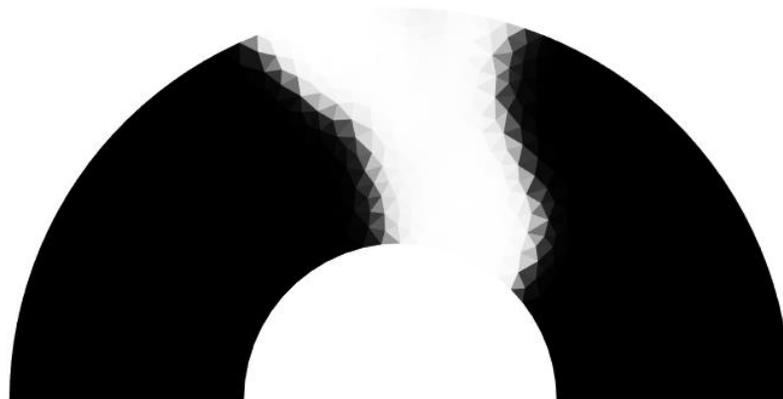
- *Máxima penalización Brinkman  $\kappa_{max}$*

La estabilidad del algoritmo TOM, a pesar de los diferentes esquemas de actualización del filtro de proyección, se atribuye a la selección de un modelo de material que penaliza las pseudodensidades intermedias de un modo suficiente a pesar de que no se tiene una pendiente muy alta en el filtro de proyección, favoreciendo así la asignación de material estructural en aquellas regiones con un valor muy bajo en la variable de diseño. El modelo de material para el campo de fluidos descrito en la Ecc. 42 depende principalmente de dos parámetros: la máxima penalización de Brinkman  $\kappa_{max}$  y el factor de penalización de la permeabilidad  $q_\kappa$ . Como se presentó en los problemas tipo benchmark, el primero de estos debe seleccionarse tan grande como sea posible para representar adecuadamente las fuerzas transferidas en la interfaz FSI. No obstante, si el valor se toma muy grande, el TOM para flujo viscoso puede sufrir inestabilidades, divergir o encontrarse restringido en un espacio de búsqueda menor (producto de la alta penalización). El segundo factor,  $q_\kappa$ , suele elegirse entre 0.01 y 1, pero se encontró que su elección solo afecta la tasa de convergencia, más no el diseño final. Esta situación parte del hecho que el filtro de proyección implementado ejerce un mayor efecto sobre el control de la escala de grises que  $q_\kappa$ .

En los problemas abordados en este trabajo (TOM considerando turbomáquinas y FSI), la selección de  $\kappa_{max} = 1 \times 10^5$  es necesaria para modelar adecuadamente las fuerzas transferidas en la interfaz FSI. Un valor superior origina la divergencia del TOM para fluidos. No obstante, un punto importante a destacar es que un valor menor de  $\kappa_{max}$  puede favorecer la convergencia a topologías adicionales a las ya mostradas cuando únicamente se implementa TOM para flujo viscoso. Esto es, al considerar la interfaz FSI y, por lo tanto, el problema estructural, dentro de la función objetivo, el espacio de búsqueda de soluciones se puede reducir significativamente, permitiendo acotar los posibles diseños que deben ser llevados a una etapa posterior del diseño. Asimismo, esta situación lleva a concluir que la consideración FSI con la metodología propuesta en este trabajo, solo debe incluirse si se identifica su potencial contribución en el proceso de diseño; es decir, el diseño final requiere el cumplimiento estricto de condiciones estructurales, ya que, de lo contrario, se podrían estar descartando soluciones que son válidas conceptualmente y que tienen un buen desempeño en el campo de los fluidos.

A modo de ejemplo, en la Figura 4-21 se presenta una topología obtenida cuando se amplía el espacio de búsqueda al relajar la penalización del modelo de material de Brinkman, con  $\kappa_{max} = 1 \times 10^4$ , en la cual se observa una curvatura mucho mayor a la obtenida en los ejemplos anteriores, diseño que con una energía disipada de 6.11 W y una fracción volumétrica de 0.22, puede ser deseable de ser llevado a una etapa posterior del proceso de diseño.

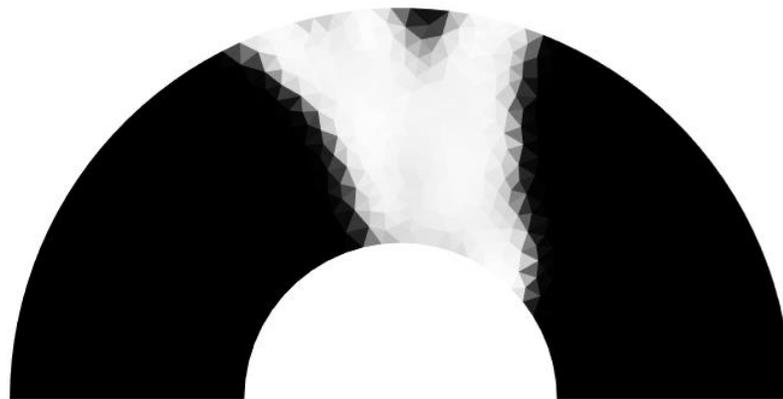
**Figura 4-21.** Topología final considerando  $\kappa_{max} = 1 \times 10^4$  y  $\beta_{max} = 12.8$ . Función objetivo: disipación de energía



De igual manera, la relajación en  $\kappa_{max}$  permite incrementar la pendiente máxima del filtro de proyección hasta  $\beta_{max} = 25.6$ , sin perder estabilidad en el código FEM para flujo

viscoso, dando lugar a la topología de la Figura 4-22, la cual tiene una energía disipada de  $20.56 W$  y una fracción volumétrica de  $0.23$ . Este resultado llama bastante la atención porque da origen a una característica que no se había observado en las configuraciones anteriores: aparecen sólidos flotantes. Este fenómeno puede representar inconvenientes en la modelación de FSI estructural, cuando los sólidos que surgen no están unidos a alguna condición de frontera (por posibilidad de movimiento de cuerpo rígido), lo cual no sucede en este caso, porque la salida del fluido tiene una condición de frontera estructural. Además, los impulsores de las bombas tienen usualmente un soporte circunferencial o en la cara posterior que garantiza que la geometría obtenida con el elemento estructural divisor (splitter) en la descarga sea manufacturable. Se destaca que esta topología proviene de un  $\beta_{max}$  que es elevado en comparación con el valor en el que usualmente se observó estabilidad del algoritmo de solución ( $\beta_{max} = 12.8$ ), región en la que el código TOM empieza a ser inestable debido a la discretización, dando origen a un mayor número de elementos finitos con variables de diseño intermedias, que a su vez restringen el flujo e incrementan la energía disipada. No obstante, desde el punto de vista del diseño conceptual este resultado es muy valioso, porque puede indicar que, si se considera una fracción volumétrica objetivo mayor, es posible favorecer este tipo de diseños, característica que depende directamente del número de álabes que se elijan para el impulsor, de acuerdo al caudal operativo de la turbomáquina.

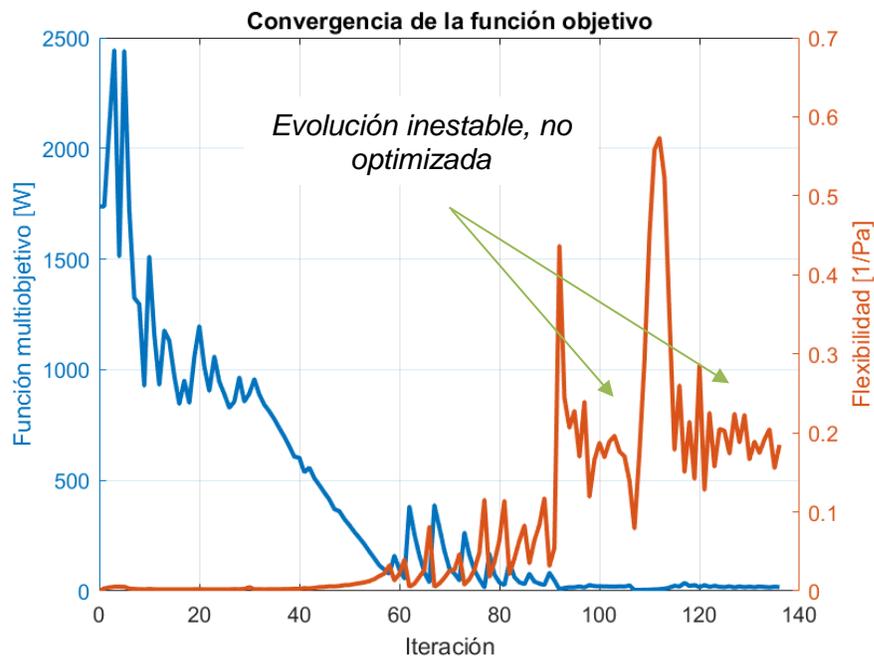
**Figura 4-22.** Topología final considerando  $\kappa_{max} = 1 \times 10^4$  y  $\beta_{max} = 25.6$ . Función objetivo: disipación de energía



### 4.3.2 TOM multi-objetivo considerando FSI

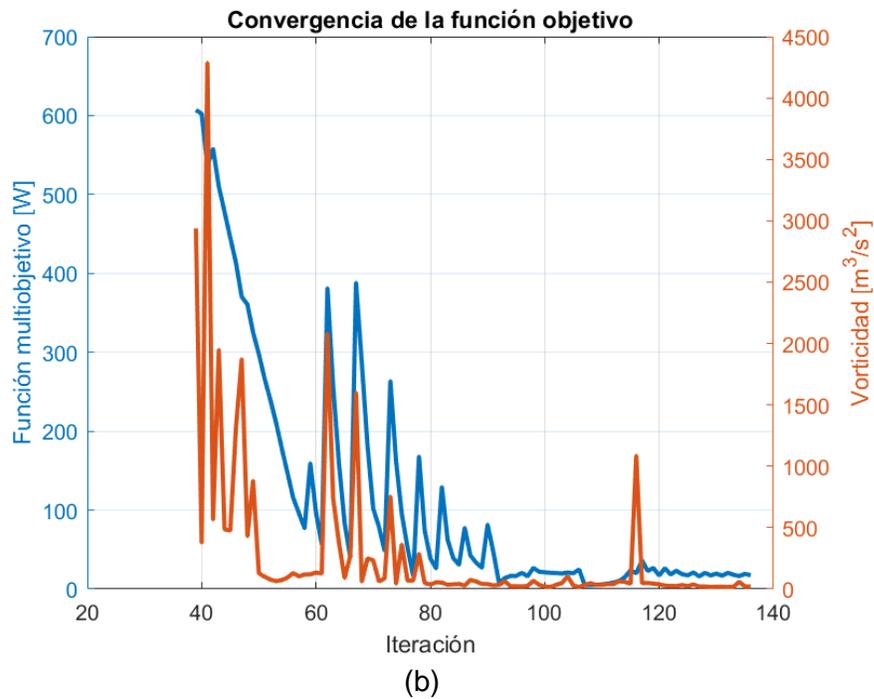
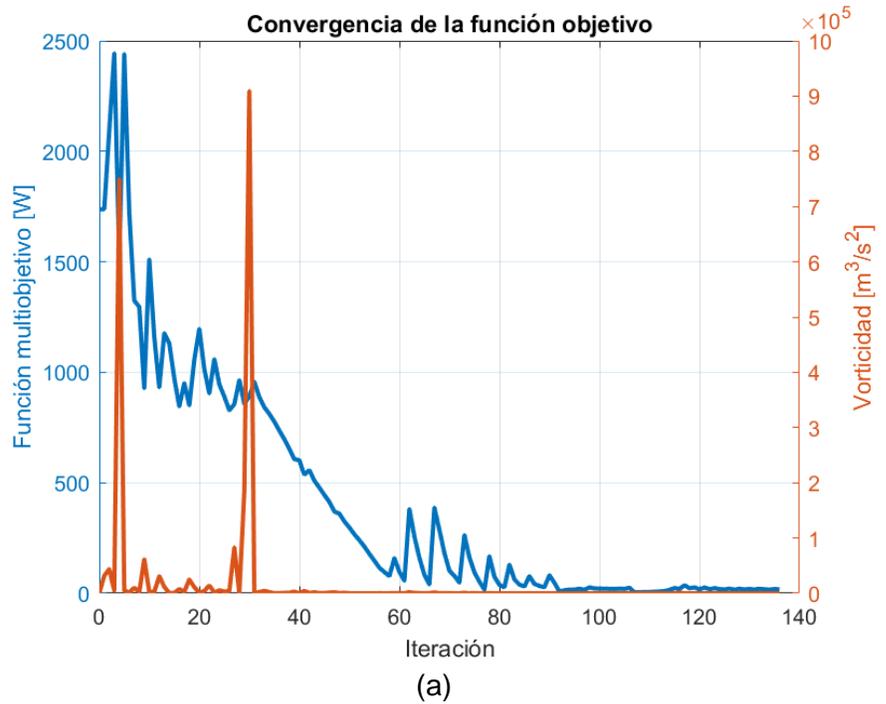
En el numeral anterior se presentaron diferentes resultados para el problema de TOM aplicado a turbomáquinas considerando únicamente la disipación de energía como función objetivo. En esta sección dicho análisis es complementado incorporando la flexibilidad y la vorticidad en una función multiobjetivo, que a su vez requiere la modelación FSI para la transferencia de cargas entre el fluido y la estructura. De esta manera, en la Figura 4-23 se presenta la evolución de la flexibilidad en el problema de referencia en el que solo se minimiza la disipación de energía. En este caso se tiene una mayor tasa de convergencia que la de la Figura 4-17 porque la pendiente del filtro de proyección se actualizó cada 15 iteraciones (en lugar de cada 30 iteraciones) sin observar influencia en la topología final, para compensar un poco el tiempo que implica calcular el campo de desplazamientos estructurales. Así, resulta evidente el comportamiento de la flexibilidad no es monotónico respecto a la disipación de energía; esto es, la optimización de una variable no implica necesariamente la optimización de la otra, para el problema planteado. Igualmente, se observan picos elevados en la curva de flexibilidad, los cuales se deben a la fuerte penalización en la transferencia de fuerzas FSI a medida que se incrementa la pendiente del filtro de proyección (la topología tiende cada vez más a blanco-negro).

**Figura 4-23.** Evolución de la flexibilidad en TOM para minimización de energía ( $w_d = 1$  y  $w_r = w_s = 0$ )



Del mismo modo, en la Figura 4-24 se presenta la evolución de la vorticidad en el problema TOM con minimización de la disipación de energía como único objetivo. A diferencia del caso de la flexibilidad, logra observarse una tendencia global a una mejora de la vorticidad conforme avanza el algoritmo de optimización de la disipación de energía. Este fenómeno puede deberse a la excesiva vorticidad que se origina cuando el flujo es poroso y no se ha alcanzado la completa definición del canal entre los álabes que conecta la entrada y la salida del fluido. De igual manera, físicamente la minimización de la disipación de energía implica la reducción en los gradientes de velocidad en el dominio del fluido, términos que igualmente surgen durante la definición de la vorticidad. Esto es, la minimización de cada uno de los gradientes cruzados de la velocidad puede implicar la reducción en su diferencia, directamente asociado a la vorticidad, situación altamente probable debido a que, al utilizar el modelo en un sistema no inercial de referencia, el problema se aproxima al de flujo en un canal.

**Figura 4-24.** Evolución de la vorticidad en TOM para minimización de energía ( $w_d = 1$  y  $w_r = w_s = 0$ ). (a) Total de iteraciones, (b) A partir de la iteración 40 (mejor escala)

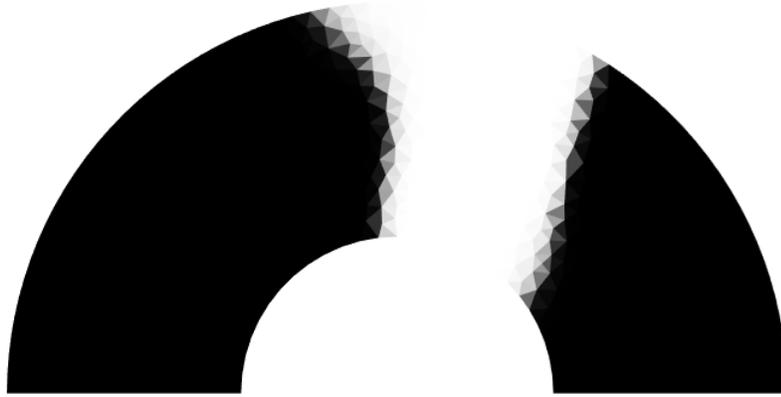


Inicialmente, se explora el efecto de incluir la flexibilidad en la función objetivo, siguiendo la ponderación  $w_d = 0.7$ ,  $w_r = 0$ ,  $w_s = 0.3$ , obteniéndose la topología de la Figura 4-25.

Este diseño es similar al obtenido mediante minimización de la disipación de energía (Figura 4-16), con la variación más destacada en que el canal de flujo tiene una mayor inclinación, al igual que una mayor área en la región de salida del fluido.

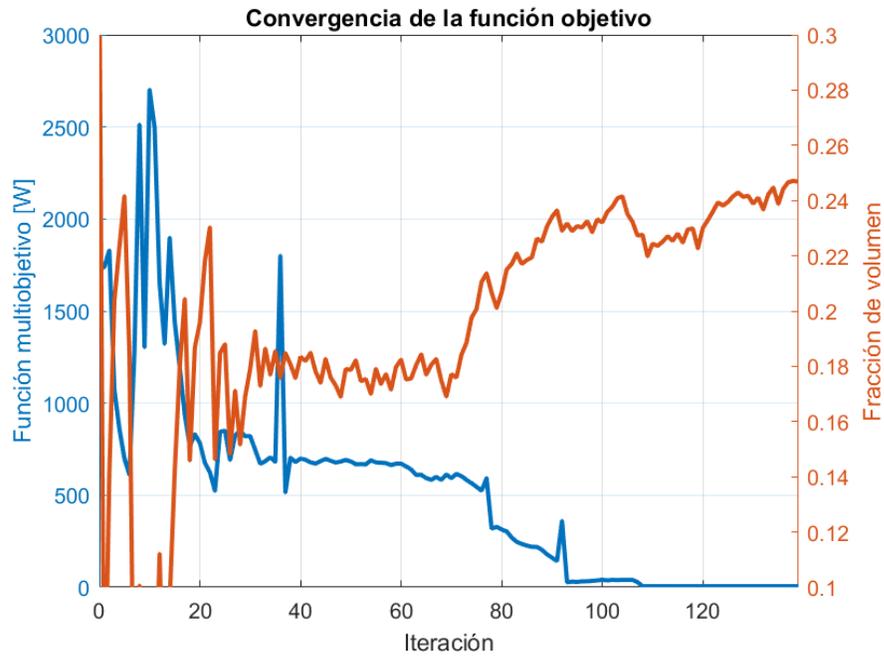
La curva de convergencia de la función multiobjetivo para este problema se presenta en la Figura 4-26, con valor final en la función objetivo de 5.98  $W$  y una fracción volumétrica de 0.241. En este punto se destaca el efecto de incluir la flexibilidad en la función objetivo, de tal manera que la fracción de volumen es incrementada conforme lo hace la penalización del filtro de proyección, el cual actúa directamente sobre las fuerzas transmitidas en la interfaz FSI. El comportamiento de la disipación de energía y la vorticidad se mantienen de acuerdo a los resultados ya presentados. Esto es, debido a que la ponderación es predominante para la disipación de energía, su evolución sigue la de la función multiobjetivo (ver Figura 4-27). Por su parte, la vorticidad sigue describiendo su comportamiento de mejora global (aunque no monótono) a pesar de no incluirse como término explícito en la función de optimización (ver Figura 4-28).

**Figura 4-25.** Topología final TOM multiobjetivo y FSI, con  $w_d = 0.7$ ,  $w_r = 0$ ,  $w_s = 0.3$

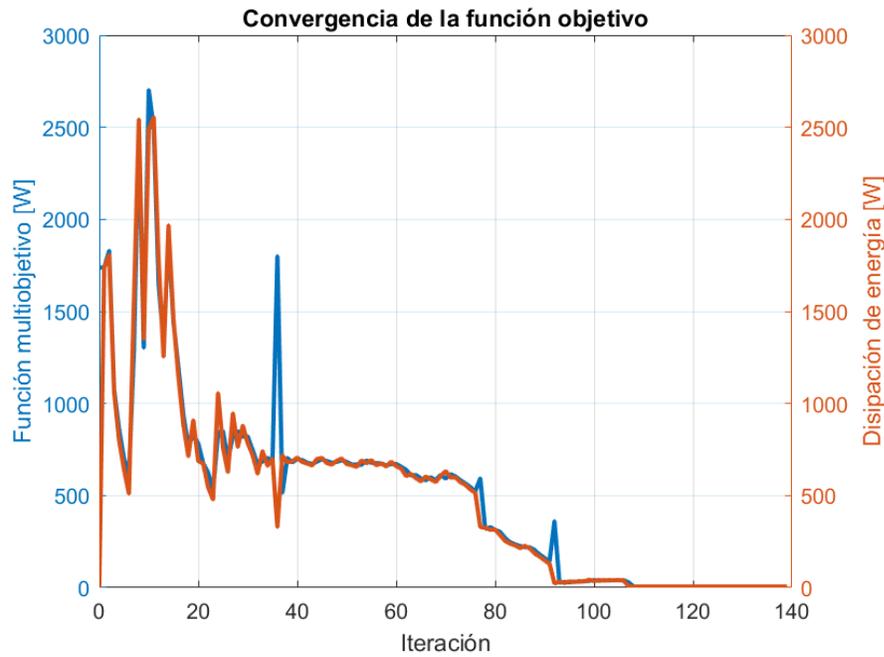


La evolución de la flexibilidad en función de las iteraciones se presenta en la Figura 4-29. Este es el resultado más relevante de todos, puesto que se evidencia claramente el efecto de la interacción FSI, llevando a que la flexibilidad sea menor no solo para la topología final, sino que reduce los valores intermedios hasta en un orden de magnitud (comparando respecto a la Figura 4-23).

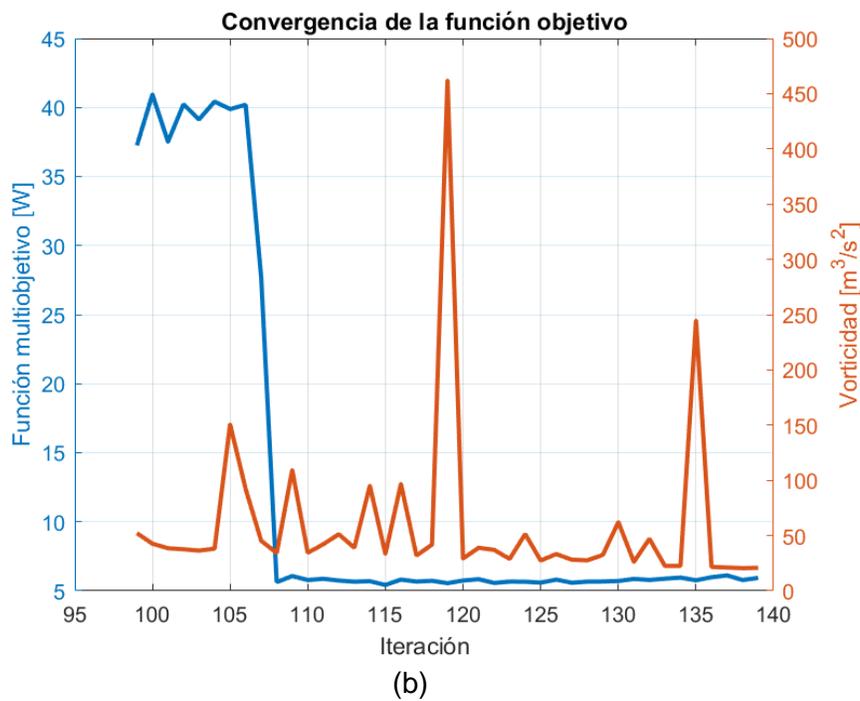
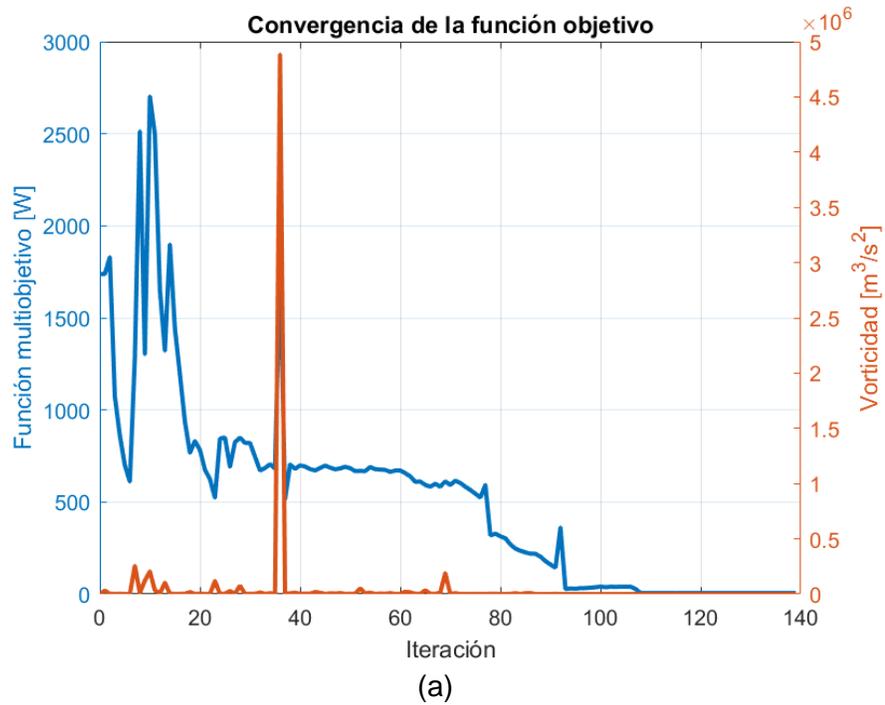
**Figura 4-26.** Curva de convergencia para TOM multiobjetivo y FSI, con  $w_d = 0.7$ ,  $w_r = 0$ ,  $w_s = 0.3$



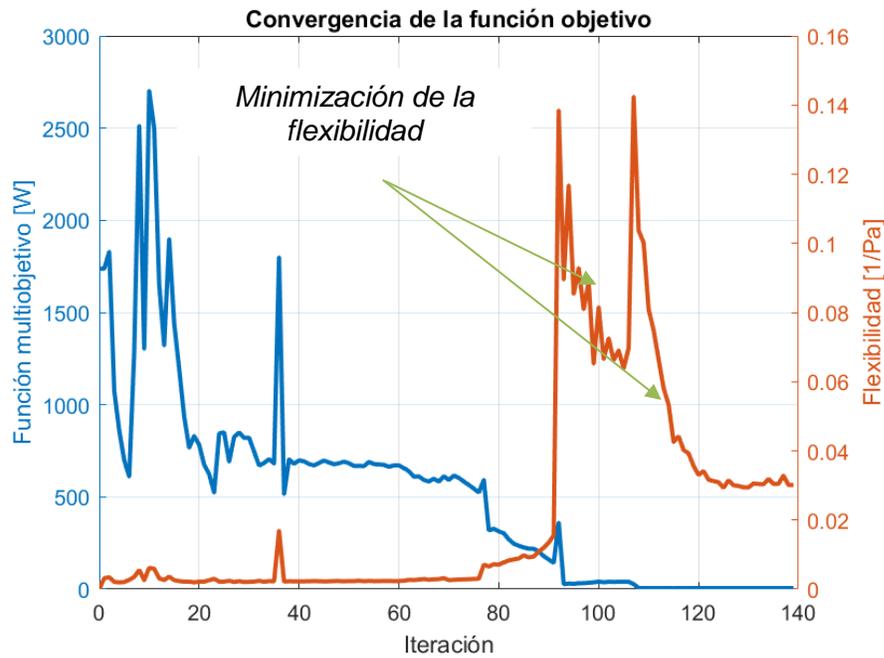
**Figura 4-27.** Evolución de la disipación de energía para TOM multiobjetivo y FSI, con ponderación  $w_d = 0.7$ ,  $w_r = 0$ ,  $w_s = 0.3$



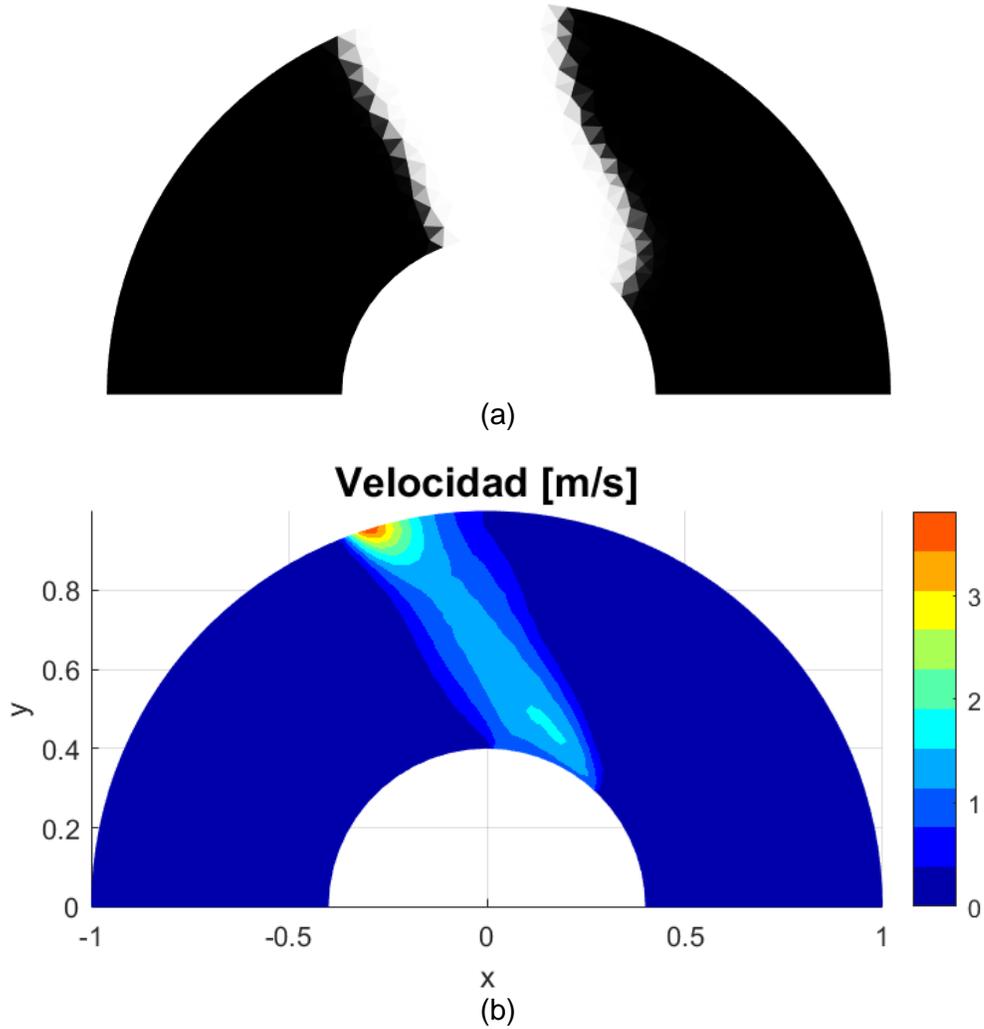
**Figura 4-28.** Evolución de la vorticidad para TOM multiobjetivo y FSI, con ponderación  $w_d = 0.7$ ,  $w_r = 0$ ,  $w_s = 0.3$ . (a) Total de iteraciones, (b) A partir de la iteración 100 (mejor escala)



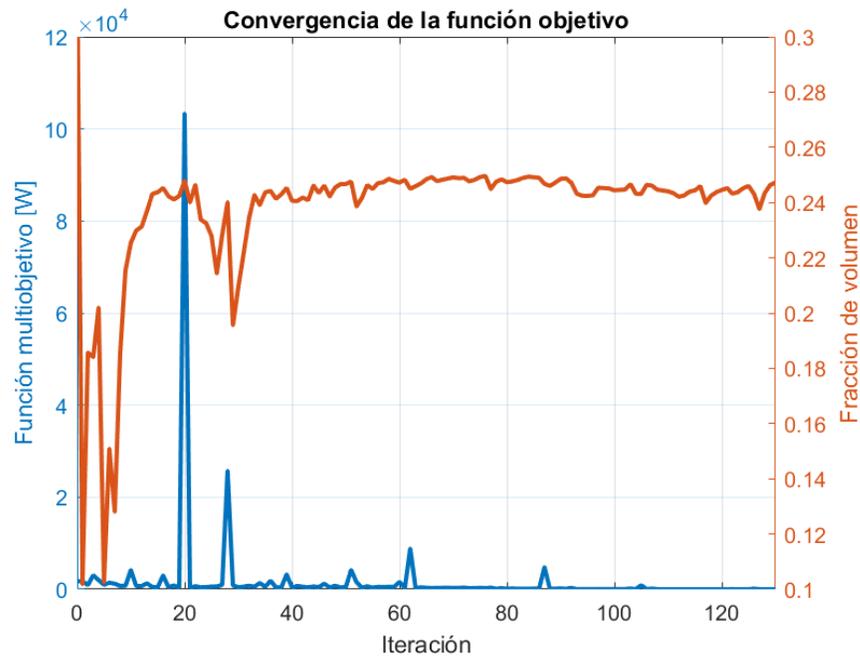
**Figura 4-29.** Evolución de la flexibilidad para TOM multiobjetivo y FSI, con ponderación  $w_d = 0.7$ ,  $w_r = 0$ ,  $w_s = 0.3$



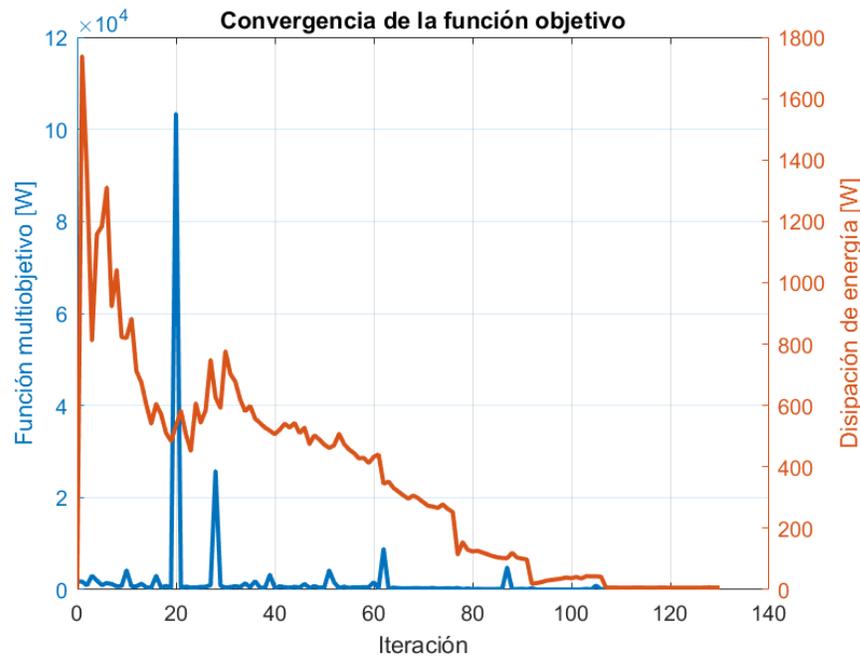
De manera similar al problema descrito considerando la función a optimizar con dos objetivos, se implementa el algoritmo completo para optimizar la función multiobjetivo incluyendo simultáneamente la disipación de energía, la vorticidad y la flexibilidad. En la Figura 4-30 se presenta la topología obtenida para la ponderación  $w_d = 0.4$ ,  $w_r = 0.3$ ,  $w_s = 0.3$ , la cual converge a un valor de en la función multiobjetivo de 6.25 W y una fracción volumétrica de 0.248 y con la característica más relevante de la inclinación en dirección contraria a las topologías anteriores. Asimismo, al observar la curva de convergencia de la función multiobjetivo (ver Figura 4-31) y la evolución de cada uno de las variables de respuesta (ver Figura 4-32, Figura 4-33 y Figura 4-34), resulta evidente que la vorticidad empieza a ser predominante, gracias a que la ponderación es muy similar para todos los términos y la normalización de la función objetivo se realiza respecto a la disipación de energía, variable con un menor valor que la vorticidad.

**Figura 4-30.** Topología final TOM multiobjetivo y FSI, con  $w_d = 0.4$ ,  $w_r = 0.3$ ,  $w_s = 0.3$ 

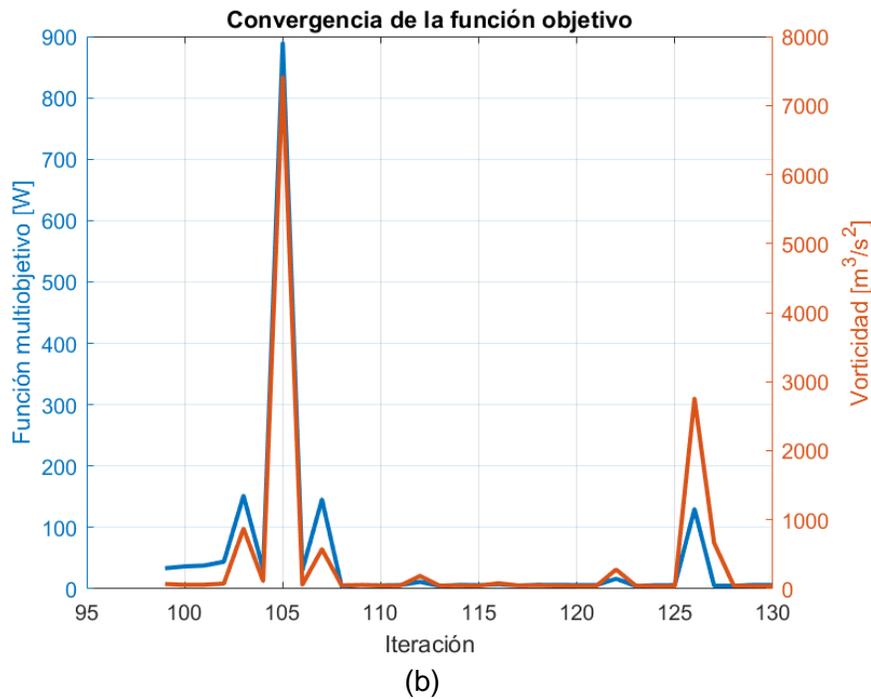
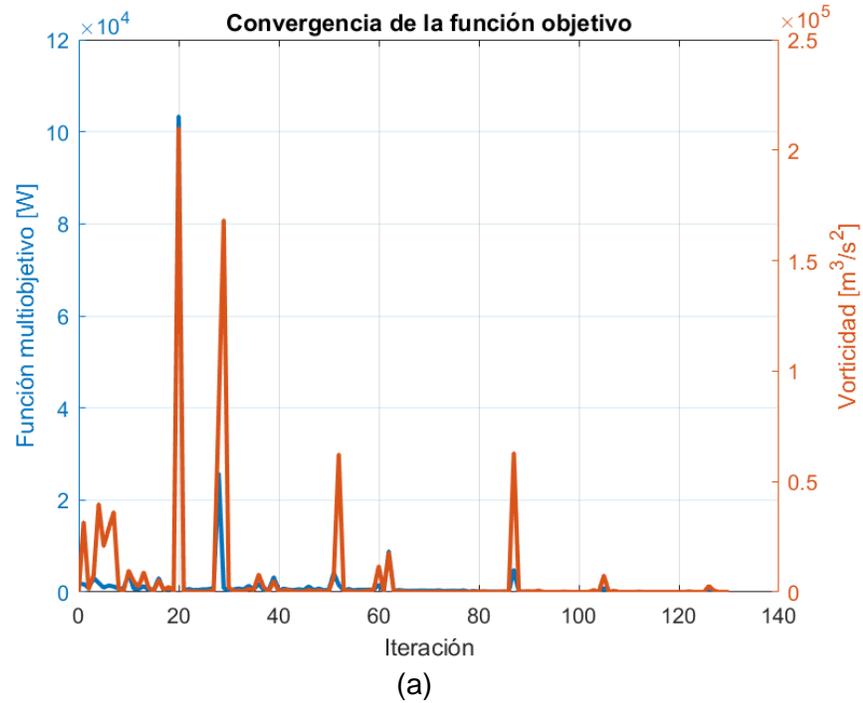
**Figura 4-31.** Curva de convergencia para TOM multiobjetivo y FSI, con  $w_d = 0.4$ ,  $w_r = 0.3$ ,  $w_s = 0.3$



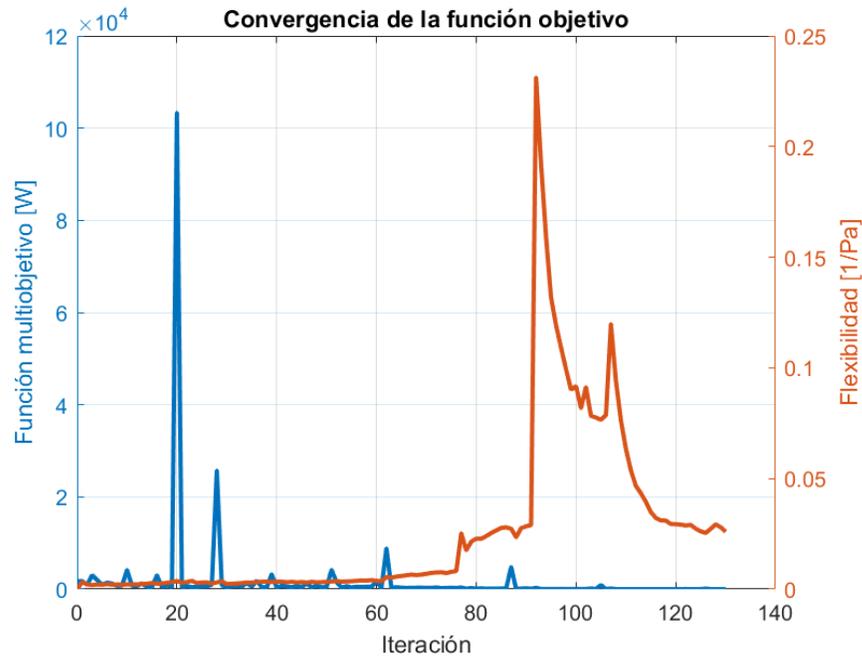
**Figura 4-32.** Evolución de la disipación de energía para TOM multiobjetivo y FSI, con ponderación  $w_d = 0.4$ ,  $w_r = 0.3$ ,  $w_s = 0.3$



**Figura 4-33.** Evolución de la vorticidad para TOM multiobjetivo y FSI, con ponderación  $w_d = 0.4$ ,  $w_r = 0.3$ ,  $w_s = 0.3$ . (a) Total de iteraciones, (b) A partir de la iteración 100 (mejor escala)



**Figura 4-34.** Evolución de la flexibilidad para TOM multiobjetivo y FSI, con ponderación  $w_d = 0.4$ ,  $w_r = 0.3$ ,  $w_s = 0.3$



En la Tabla 4-7 se resumen los resultados de desempeño para las topologías correspondientes a cada una de las ponderaciones multiobjetivo evaluadas. Así, es evidente que el algoritmo TOM integra correctamente cada una de las variables de respuesta y las optimiza de acuerdo a su ponderación. En este punto se destaca que no fue posible obtener resultados adecuados al favorecer la ponderación de la flexibilidad por encima de la disipación de energía (por ejemplo, con  $w_d = 0.3$ ,  $w_r = 0$ ,  $w_s = 0.7$ ) debido a que el modelo implementado en el presente trabajo parte de una formulación de flujo en un canal; de tal manera que la topología fundamental de los álabes se origina a partir del campo de velocidad, teniendo gran influencia sobre la disipación de energía. Por su parte, la minimización de flexibilidad no favorece necesariamente la construcción de un canal que une la entrada y la salida del fluido, situación que implica una restricción casi que total en el flujo y que impide la minimización de la función objetivo. Este resultado es producto de las simplificaciones adoptadas en este trabajo para la modelación del campo estructural. Quizás estas limitaciones podrían reducirse si se imponen regiones del dominio que no entran en el algoritmo de optimización (pseudodensidad predefinida) o utilizando métodos de transferencia de las fuerzas FSI que impliquen una interfaz explícita, de tal manera que el dominio estructural y el de fluidos no se superpongan.

**Tabla 4-7.** Desempeño de las topologías finales para TOM multiobjetivo considerando FSI

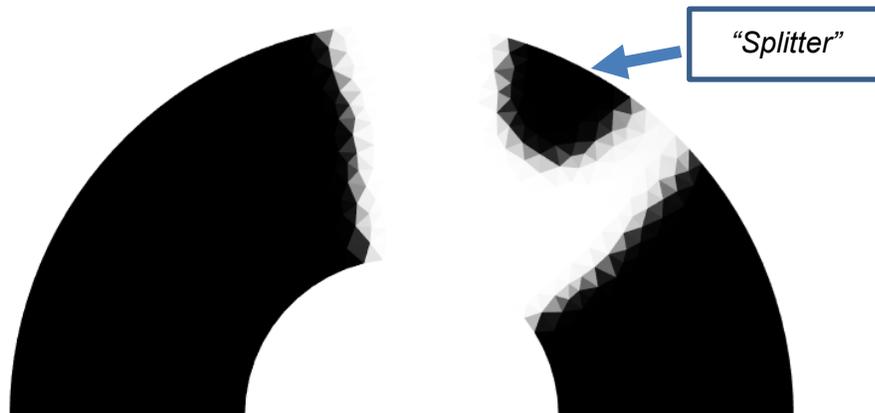
Desempeño topología final	Ponderación		
	$w_d$	$w_r$	$w_s$
<i>Función multiobjetivo [W]:</i>			
4.64	1.0	0.0	0.0
5.98	0.7	0.0	0.3
8.51	0.7	0.3	0.0
5.37	0.5	0.0	0.5
9.01	0.5	0.5	0.0
6.25	0.4	0.3	0.3
<i>Energía disipada [W]:</i>			
4.64	1.0	0.0	0.0
5.99	0.7	0.0	0.3
12.02	0.7	0.3	0.0
5.17	0.5	0.0	0.5
18.02	0.5	0.5	0.0
6.33	0.4	0.3	0.3
<i>Vorticidad [<math>m^3/s^2</math>]:</i>			
20.75	1.0	0.0	0.0
57.13	0.7	0.0	0.3
38.12	0.7	0.3	0.0
44.85	0.5	0.0	0.5
28.39	0.5	0.5	0.0
40.78	0.4	0.3	0.3
<i>Flexibilidad [<math>1/Pa</math>]:</i>			
$1.85 \times 10^{-1}$	1.0	0.0	0.0
$3.02 \times 10^{-2}$	0.7	0.0	0.3
$4.15 \times 10^{-1}$	0.7	0.3	0.0
$2.42 \times 10^{-2}$	0.5	0.0	0.5
$1.63 \times 10^{-1}$	0.5	0.5	0.0
$2.45 \times 10^{-2}$	0.4	0.3	0.3

Finalmente, en la Figura 4-35 se presenta la topología obtenida para la función TOM multiobjetivo con ponderación  $w_d = 0.4$ ,  $w_r = 0.3$ ,  $w_s = 0.3$ , cuando se utiliza como fracción volumétrica objetivo 0.3. De esta manera, se verifica la hipótesis planteada durante el análisis de los resultados para disipación de energía, en los cuales se aprecia una tendencia al surgimiento de un miembro estructural que divide el flujo en la salida (splitter), conforme se tienen fracciones volumétricas objetivo mayores (Figura 4-22). Asimismo, es necesario mencionar que la metodología utilizada en este trabajo para modelar la

interacción FSI es tal que depende directamente del modelo de penalización de Brinkman, motivo por el que no se encontró un efecto relevante del modelo de penalización estructural sobre las topologías obtenidas. Incluso, esta situación también se presentó para los parámetros de penalización de la fuerza en la interfaz FSI, puesto que el filtro de proyección ayuda a garantizar la correcta transferencia de cargas entre el sólido y el fluido.

Asimismo, el resultado presentado en la Figura 4-35 resalta una posible aplicación a la cual puede ser extendida la metodología FSI implementada en este trabajo: eliminación de sólidos flotantes. Esto es, en problemas en los que las condiciones de frontera promueven la aparición de sólidos en el interior del fluido, no unidos a los soportes estructurales, una medición de la fuerza FSI diferente a cero puede utilizarse como criterio para eliminar dichos sólidos flotantes.

**Figura 4-35.** Topología final TOM multiobjetivo y FSI, con  $w_d = 0.4$ ,  $w_r = 0.3$ ,  $w_s = 0.3$ , con fracción volumétrica objetivo de 0.3

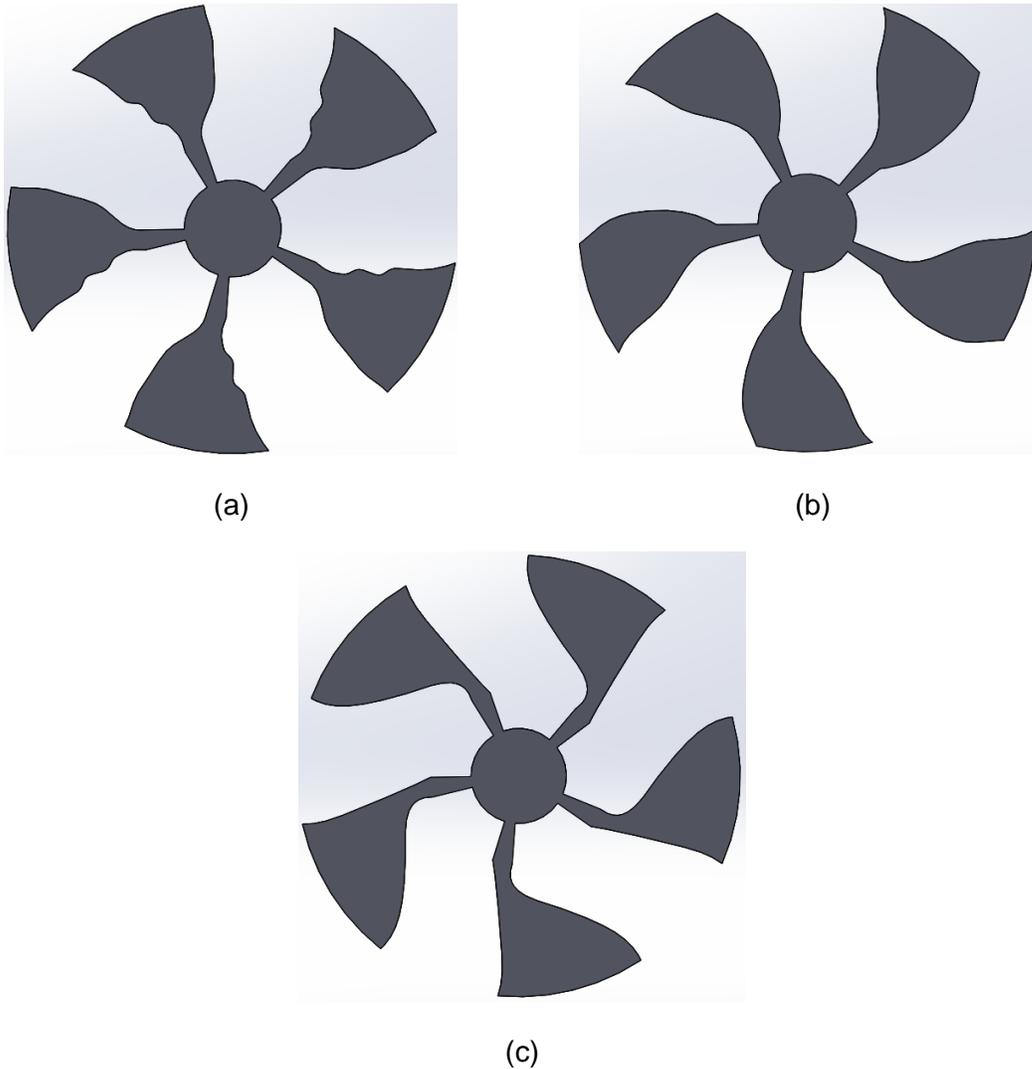


### 4.3.3 Posprocesamiento de rotores de turbomáquinas

Los resultados anteriores constituyen la geometría base del canal que conduce el fluido en el interior de una turbomáquina (específicamente, una bomba) y a su vez definen la forma de los álabes del rotor. De esta manera, las topologías obtenidas mediante TOM deben ser posprocesadas en operaciones en las que se construye el diseño completo del rotor, incluyendo el número de álabes seleccionado para cumplir cierta solicitud de caudal nominal. Es así como en la Figura 4-36 se presentan los rotores abiertos construidos con un diseño de cinco álabes, para las topologías de los resultados de cada uno de los siguientes casos: Caso 1: función mono-objetivo de disipación de energía (Figura 4-16);

Caso 2: función bi-objetivo de disipación de energía y flexibilidad (Figura 4-25); Caso 3: función multi-objetivo de disipación de energía, flexibilidad y vorticidad (Figura 4-30).

**Figura 4-36.** Diseños finales de rotores de bombas considerando cinco álabes. (a) Caso 1: Mono-objetivo, (b) Caso 2: Bi-objetivo, (c) Caso 3: Multi-objetivo

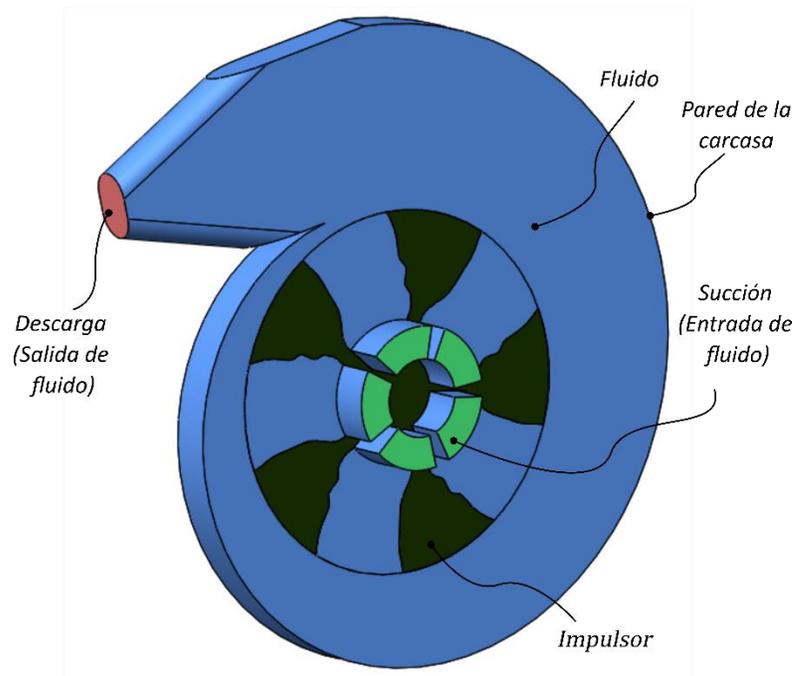


Una vez se tiene definida la sección transversal del rotor, es posible ajustar el diseño a otras características constructivas, como lo son las conexiones de ensamblaje con el eje de rotación, la ubicación relativa respecto a la carcasa de la bomba o los platos correspondientes a rotores semiabiertos y cerrados, de acuerdo a la altura de los álabes en la dirección perpendicular al plano. Dichos ajustes deben implementarse hasta tener un modelo con los detalles suficientes para realizar una evaluación final de desempeño, de acuerdo a las métricas definidas para cada aplicación. A manera de ejemplo, se toma el problema de diseño del rotor (impulsor) de una bomba de pequeña escala (el diámetro

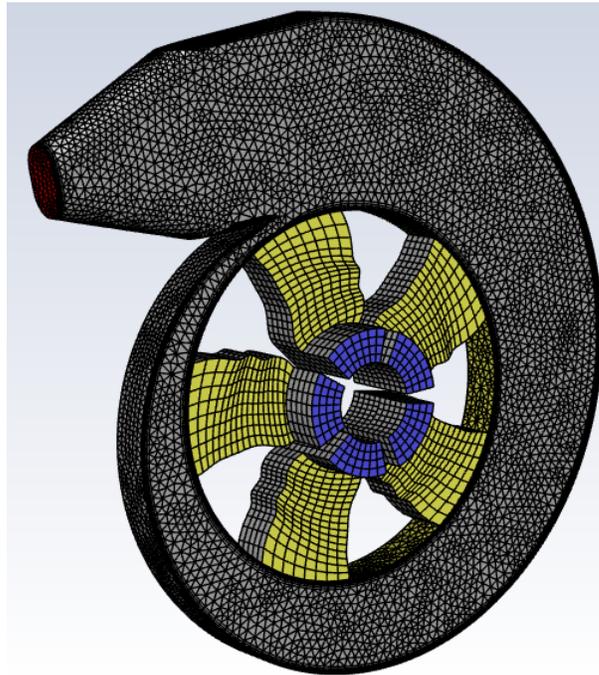
externo del rotor es de  $4\text{cm}$ ), similar a la del trabajo desarrollado por Sá (2016), en el campo de bombas para asistencia ventricular.

De este modo, el diseño del rotor es complementado con las porciones de fluido que corresponden al interior de la bomba, tanto en la zona del rotor como en la succión, la voluta y la descarga, según se muestra en la Figura 4-37 para el Caso 1. Para este ejemplo se utiliza agua como fluido, se aplica una velocidad angular en el rotor de  $1815\text{ rpm}$ , una velocidad en la succión de  $1\text{ m/s}$  (equivalente a un flujo másico en la entrada de  $0.12\text{ kg/s}$ ) y una presión atmosférica en la descarga ( $0\text{ Pa}$ ). En la Figura 4-38 se muestra la malla de discretización para el problema descrito en la Figura 4-37, la cual está construida por 101171 celdas y es utilizada para realizar un análisis propio de dinámica de fluidos computacional (CFD) en software comercial. Debe tenerse presente que estos resultados están dirigidos a ejemplificar las posibilidades de posprocesamiento de las topologías, por lo que se decide que no es necesario presentar los criterios de verificación estrictos de solución de un problema numérico.

**Figura 4-37.** Modelo de bomba de pequeña escala para posprocesamiento del diseño del rotor optimizado mediante TOM



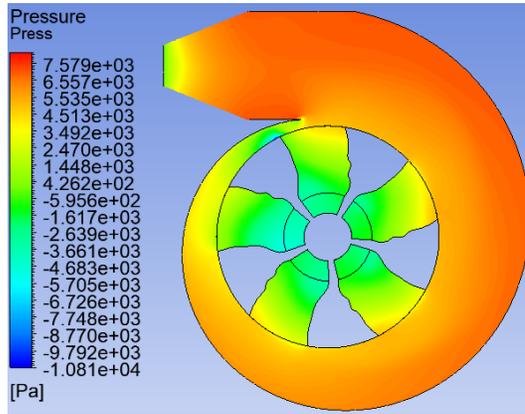
**Figura 4-38.** Malla de volúmenes finitos para análisis CFD de la bomba de pequeña escala para posprocesamiento del diseño del rotor optimizado mediante TOM



Con la simulación anterior es posible obtener el campo de presión (Figura 4-39) y velocidad (Figura 4-40) para cada uno de los diseños propuestos. Se destaca que se decide no utilizar una misma escala de colores en las figuras anteriores, puesto que puede resultar importante, realizar una evaluación del desempeño en función de la homogeneidad de las condiciones de flujo. Consecuentemente, se pueden definir diferentes métricas de desempeño para comparar los diseños finales desde la perspectiva del fluido. Por ejemplo, en la Figura 4-39 se presentan los valores correspondientes a la presión en la succión de la bomba y la suma total de la presión relativa en el fluido, resultando evidente que este parámetro es inferior para el diseño en el que se prestó mayor atención en la optimización de la flexibilidad estructural (Caso 2).

Asimismo, en la Figura 4-40 se comparan los diseños en términos de la vorticidad total y el número de Reynolds máximo. En este punto se destaca que, si bien estos resultados son simplificados, resulta claro el efecto del algoritmo de optimización para minimización de la vorticidad en el Caso 3, teniendo valores notablemente inferiores a aquellos en los que solo se minimizó la disipación de energía y la flexibilidad.

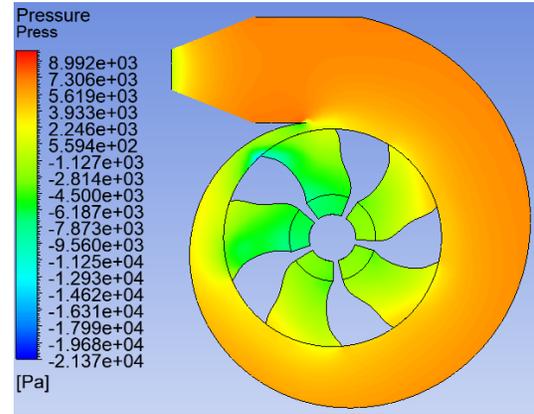
**Figura 4-39.** Perfil de presión para el problema de diseño del rotor de una bomba de pequeña escala. (a) Caso 1: Mono-objetivo, (b) Caso 2: Bi-objetivo, (c) Caso 3: Multi-objetivo



*Presión succión =  $-2018 Pa$*

*Presión total =  $3.57 GPa$*

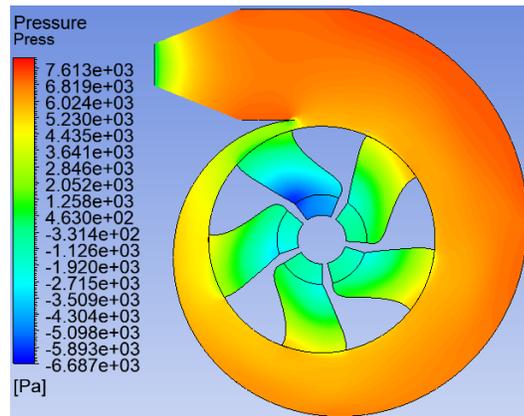
(a)



*Presión succión =  $-3925 Pa$*

*Presión total =  $3.11 GPa$*

(b)



*Presión succión =  $-1412 Pa$*

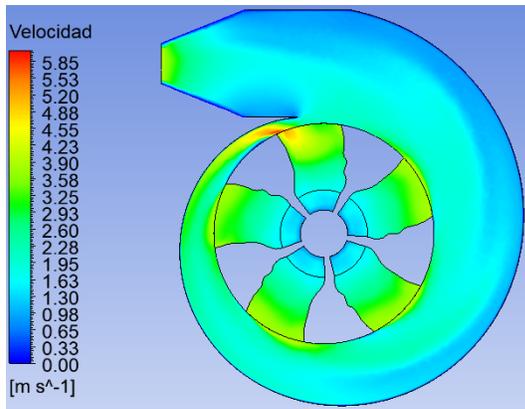
*Presión total =  $3.83 GPa$*

(c)

Una estrategia homóloga a la presentada para la comparación en desempeño de los diseños de rotores finales desde la perspectiva del fluido puede ser desarrollada utilizando métricas estructurales. A manera de ejemplo, en la Figura 4-41 se presenta el campo de desplazamientos para cada uno de los rotores al ser sometido a una carga de presión homogénea ( $8000 Pa$ ) en una de las aristas laterales de cada álabe, teniendo una condición de frontera de soporte fijo en las caras curvas de la manzana del rotor y utilizando

acero estructural para el material base. Así, en esta figura se observa que, como era de esperarse, la deformación del rotor es inferior para el diseño obtenido prestando un mayor foco en la minimización de la flexibilidad estructural (Caso 2).

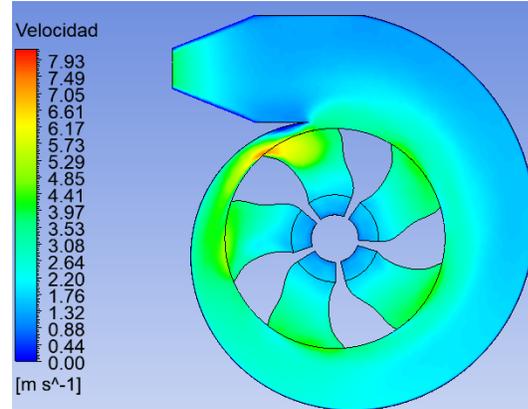
**Figura 4-40.** Perfil de velocidad para el problema de diseño del rotor de una bomba de pequeña escala. (a) Caso 1: Mono-objetivo, (b) Caso 2: Bi-objetivo, (c) Caso 3: Multi-objetivo



$$\text{Vorticidad total} = -7.2 \times 10^7 \text{ (1/s)}$$

$$\text{Máximo Reynolds} = 390$$

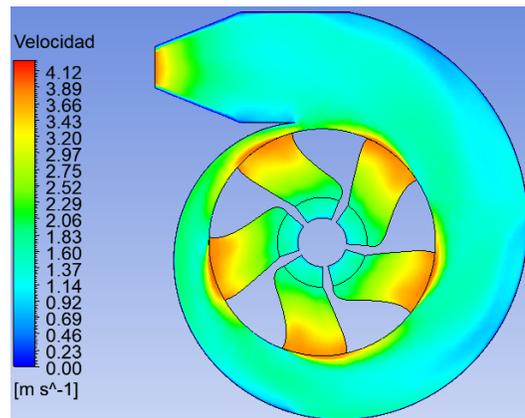
(a)



$$\text{Vorticidad total} = -9.0 \times 10^7 \text{ (1/s)}$$

$$\text{Máximo Reynolds} = 592$$

(b)



$$\text{Vorticidad total} = -4.1 \times 10^7 \text{ (1/s)}$$

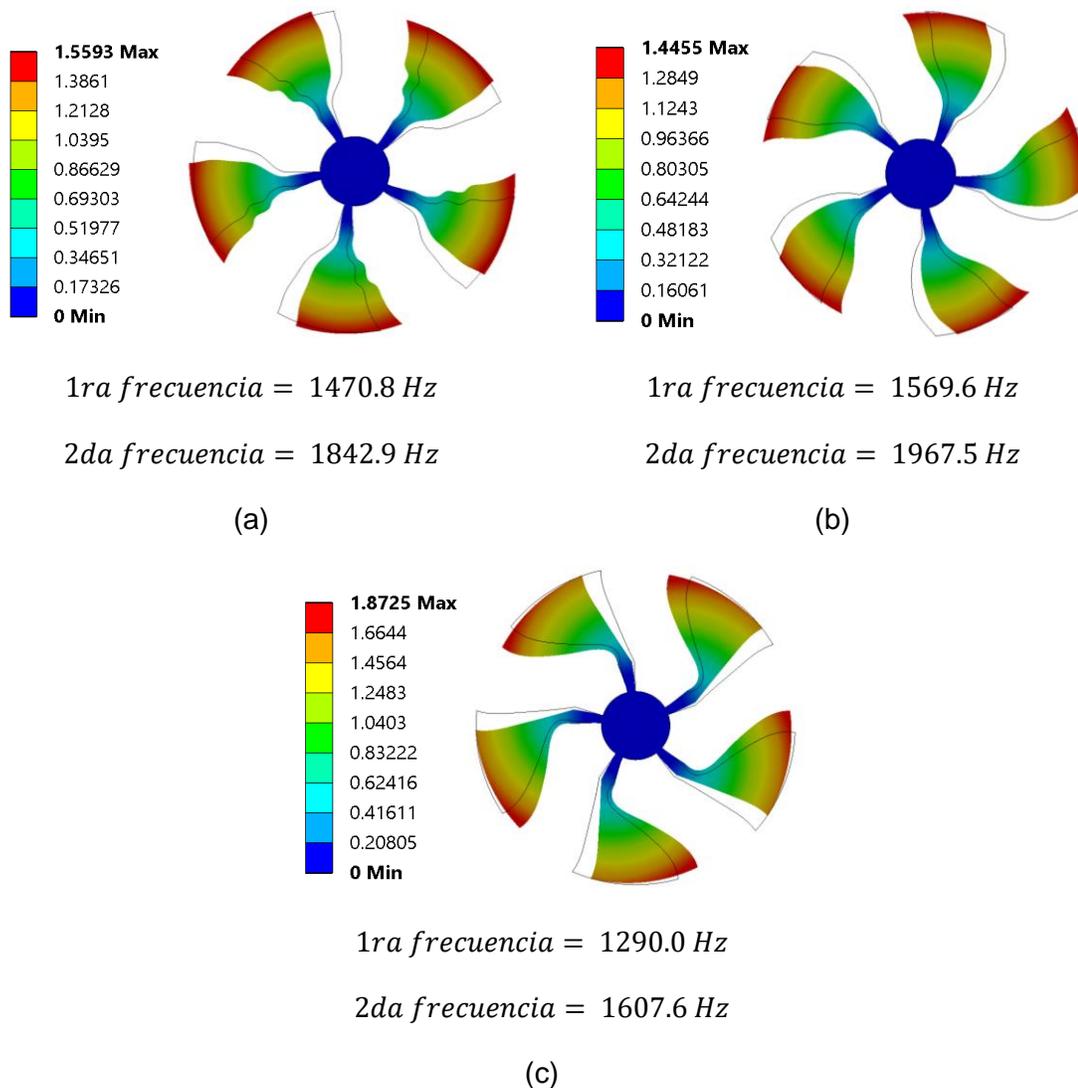
$$\text{Máximo Reynolds} = 364$$

(c)

Finalmente, también es posible complementar el análisis estructural con criterios como el cálculo de esfuerzos. Asimismo, el análisis de frecuencias naturales de vibración es un

tema especialmente importante en el campo de las turbomáquinas, buscando siempre que estas no se encuentren cerca de las frecuencias nominales de operación. Es por esto que este criterio puede considerarse como un objetivo adicional en la función de optimización o realizarse una verificación posterior del diseño, como se muestra en la Figura 4-41 para los dos primeros modos de vibrar de cada diseño. Así, se finaliza el ciclo completo del diseño de un rotor para una turbomáquina con requerimientos de desempeño estructurales y del fluido.

**Figura 4-41.** Campo de desplazamientos [mm] y frecuencias naturales de vibración [Hz] para el problema de diseño del rotor de una bomba de pequeña escala. (a) Caso 1: Mono-objetivo, (b) Caso 2: Bi-objetivo, (c) Caso 3: Multi-objetivo





## 5 Conclusiones y trabajos futuros

El diseño de turbomáquinas involucra el modelamiento de fenómenos multifísicos que incluyen numerosos parámetros que deben ser ajustados para obtener el desempeño esperado de un sistema. En particular, el rotor de las turbomáquinas representa diversos desafíos cuando se busca optimizar la respuesta operativa involucrando una función con múltiples objetivos. Bajo este contexto, la optimización topológica ha demostrado ser un método exitoso en el diseño de rotores de máquinas de flujo radial, situación que fue verificada en este trabajo.

Así, mediante la implementación de un código de optimización topológica, se abordó el diseño de rotores de turbomáquinas incluyendo la interacción fluido-estructura, permitiendo la creación de una función objetivo que incluye factores del campo de fluidos (la disipación de energía y la vorticidad) y estructurales (la rigidez). De esta manera, se obtuvieron unos diseños que representan un balance entre ambas físicas y, otros, que priorizan una de ellas, para adaptarse a las necesidades específicas de cada aplicación. En este punto cabe resaltar que el diseño de los rotores de turbomáquinas parte fundamentalmente de las variables de respuesta del campo de fluidos, motivo por el que son estos objetivos los que deben ser priorizados para obtener un diseño de alto desempeño.

De igual modo, se considera exitosa la modelación de la interacción fluido-estructura utilizando el método de optimización topológica de densidades, identificándose la necesidad de adaptar los parámetros del modelo de material y del optimizador (principalmente, el inverso de la permeabilidad máxima, la topología inicial y los filtros sobre la variable de diseño), de acuerdo a las condiciones de flujo de cada problema analizado. Adicionalmente, se aprecia la simplificación que representa el modelo de penalización de Brinkman, en el cual el comportamiento de los sólidos es aproximado a un fluido impermeable, evitando así los grandes desafíos asociados a la interacción fluido-estructura cuando se decide separar ambos dominios y resolverlo independientemente.

Se reconoce también que la metodología empleada ofrece la ventaja de permitir incorporar simultáneamente múltiples objetivos del problema de diseño de turbomáquinas, garantizando el acoplamiento entre varias físicas y, por lo tanto, constituyendo una herramienta de optimización pensada para disminuir los tiempos y costos del diseño de estos sistemas.

Igualmente, la mecánica computacional continúa ofreciendo alternativas de modelamiento y optimización que pueden ser integradas para incrementar aún más la eficiencia de los procesos de diseño y brindar mayor flexibilidad en el análisis de diseños novedosos y exploración de ideas poco convencionales. Es por esto que a continuación se presentan algunos campos hacia los cuales los resultados de este trabajo pueden ser extendidos en trabajos futuros:

- Incorporación de modelos constitutivos para fluidos con características más complejas, como puede ser el caso de fluidos no-Newtonianos, que despiertan gran interés en aplicaciones biomédicas. Igualmente, aquí aplica la extensión a fluidos compresibles, con amplios problemas de aplicación, por ejemplo, en la industria aeronáutica y turbomáquinas que operan con gas natural o vapor.
- Extensión de las ecuaciones del campo de fluidos a otros regímenes de flujo, incluyendo comportamientos transitorios y turbulentos. Así, al considerar la dependencia del tiempo, la formulación para el acoplamiento mediante el abordaje ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) es tal que favorece los métodos monolíticos para solución de ambas físicas.
- Implementación de condiciones de frontera estructurales que reflejen más fielmente la sollicitación mecánica de los rotores de turbomáquinas. En este punto aplica adicionalmente la creación de dominios en los que se imponen restricciones (por ejemplo, de manufactura o ensamble) que llevan a predefinir el valor de la pseudodensidad en dichas regiones y no entran dentro del algoritmo de optimización.
- Ampliación de la función multiobjetivo para incluir variables de diseño adicionales. En particular, en el diseño de turbomáquinas resulta natural la extensión a análisis de esfuerzos, frecuencias naturales de vibración y vida a la fatiga.

- 
- Introducción de físicas adicionales para incrementar la robustez de la metodología de optimización. Aquí resultan de especial interés la modelación de fenómenos térmicos y electromagnéticos.
  - Modelación explícita de la interfaz fluido-estructura, utilizando métodos de optimización topológica como el Level-set. Esta variación permite representar con mayor precisión los fenómenos altamente dependientes del comportamiento del fluido en la capa límite. Adicionalmente, este método de optimización es directamente compatible con métodos de elementos finitos que no requieren remallado, como es el caso del Método de los Elementos Finitos Generalizado (GFEM), lo cual implica la posibilidad de construir modelos con menor costo computacional.



## Bibliografía

- Akl, W. (2010). Topology optimization of fluid-loaded shells by minimizing the acoustic coupling to the fluid domain. *International Journal of Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 11(6), 337–353. <https://doi.org/10.1080/15502287.2010.516791>
- Alnæs, M. S., Blechta, J., Hake, J., Johansson, A., Kehlet, B., Logg, A., ... Wells, G. N. (2015). The FEniCS Project Version 1.5. *Archive of Numerical Software*, 3(100), 9–23. <https://doi.org/10.11588/ans.2015.100.20553>
- Alonso, D. H., Sá, L. F. N., Saenz, J. S. R., & Silva, E. C. N. (2018). Topology optimization applied to the design of 2D swirl flow devices. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 58(6), 2341–2364. <https://doi.org/10.1007/s00158-018-2078-0>
- Alonso, D. H., Sá, L. F. N., Saenz, J. S. R., & Silva, E. C. N. (2019). Topology optimization based on a two-dimensional swirl flow model of Tesla-type pump devices. *Computers and Mathematics with Applications*, 77(9), 2499–2533. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.12.035>
- Andreasen, C. S. (2017). Topology optimization of inertia driven dosing units. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 55(4), 1301–1309. <https://doi.org/10.1007/s00158-016-1573-4>
- Andreassen, E., Clausen, A., Schevenels, M., Lazarov, B. S., & Sigmund, O. (2011). Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 43(1), 1–16. <https://doi.org/10.1007/s00158-010-0594-7>
- Ansys Inc. (2017). *Ansys Release 17.2 [computer program]*.
- Antonios, F., Avenue, I., Nikolaos, V., & Vassilios, V. (2015). A Novel Methodology to Predict Centrifugal Pump Characteristics Through Navier-Stokes Exact Solutions. *International Journal of Engineering Research & Technology IJERT*, 4(02), 1110–1116.
- Axisa, F., & Antunes, J. (2007). *Modelling of mechanical systems: Fluid-Structure Interaction*. Elsevier Ltd.

- Baklacioglu, T., Turan, O., & Aydin, H. (2015). Dynamic modeling of exergy efficiency of turboprop engine components using hybrid genetic algorithm-artificial neural networks. *Energy*, 86, 709–721. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2015.04.025>
- Baloni, B. D., Pathak, Y., & Channiwala, S. A. (2015). Centrifugal blower volute optimization based on Taguchi method. *Computers and Fluids*, 112, 72–78. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2015.02.007>
- Bathe, K. J. (1996). *Finite Element Procedures*. New Jersey: Prentice Hall.
- Bendsøe, M. P. (1989). Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization*, 1(4), 193–202. <https://doi.org/10.1007/BF01650949>
- Bendsøe, M. P., & Kikuchi, N. (1988). Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71(2), 197–224. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(88\)90086-2](https://doi.org/10.1016/0045-7825(88)90086-2)
- Bendsøe, M. P., & Sigmund, O. (1999). Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of Applied Mechanics*, 69(9), 635–654. <https://doi.org/10.1007/s004190050248>
- Bendsøe, M. P., & Sigmund, O. (2003). Topology optimization: theory, methods and applications. In *Engineering*. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-05086-6>
- Boccini, E., Meli, E., Rindi, A., Corbò, S., & Iurisci, G. (2017). Innovative structural topology optimization approach for rotordynamics components using innovative materials and new manufacturing techniques. *Proceedings of ASME 2017 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. <https://doi.org/10.1115/detc2017-67061>
- Boccini, E., Meli, E., Rindi, A., Falomi, S., Iurisci, G., & Corb, S. (2017). Structural topology optimization of turbomachinery components using new manufacturing techniques and innovative materials. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2017: Turbomachinery Technical Conference and Exposition*, 1–13. Charlotte, NC.
- Boccini, E., Meli, E., Rindi, A., Pinelli, L., Peruzzi, L., & Arnone, A. (2018). Towards structural topology optimization of rotor blisks. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2018: Turbomachinery Technical Conference and Exposition*, 1–10. <https://doi.org/10.1115/gt2018-76482>
- Boom, T. Van Den, & Schutter, B. De. (2007). *Optimization in Systems and Control*. Delft Center for Systems and Control.
- Borrvall, T., & Petersson, J. (2003). Topology optimization of fluids in Stokes flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 41(1), 77–107.

- <https://doi.org/10.1002/flid.426>
- Buckney, N., Green, S., Pirrera, A., & Weaver, P. M. (2012). On the structural topology of wind turbine blades. *Wind Energy*, 16(4), 545–560. <https://doi.org/10.1002/we.1504>
- Campelo, F., Ram, J. A., & Igarashi, H. (2010). A survey of topology optimization in electromagnetics: considerations and current trends. Retrieved from <http://www.cpdee.ufmg.br/~fcampelo/files/TR/Campelo2010-NME.pdf>
- Chandrupatla, T. R., & Belegundu, A. (2002). *Introduction to Finite Elements in Engineering* (3rd ed.). New Jersey: Prentice Hall.
- Chang, J. W., & Lee, Y. S. (2008). Topology optimization of compressor bracket. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 22(9), 1668–1676. <https://doi.org/10.1007/s12206-008-0428-3>
- Cheah, K. W., Lee, T. S., Winoto, S. H., & Zhao, Z. M. (2007). Numerical flow simulation in a centrifugal pump at design and off-design conditions. *International Journal of Rotating Machinery*, 2007(Article ID 83641), 8. <https://doi.org/10.1155/2007/83641>
- Chen, B. C., & Kikuchi, N. (2001). Topology optimization with design-dependent loads. *Finite Elements in Analysis and Design*, 37(1), 57–70. [https://doi.org/10.1016/S0168-874X\(00\)00021-4](https://doi.org/10.1016/S0168-874X(00)00021-4)
- Chen, X. M., Lai, X. De, Zhang, X., & Zhou, X. (2013). Evolutionary Topology Optimization Design of Rotary Lobe of Roots Vacuum Pumps. *Advanced Materials Research*, 798–799, 365–368. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amr.798-799.365>
- Cho, J., Choi, M., Baik, Y., Lee, G., Ra, H., Kim, B., & Kim, M. (2016). Development of the turbomachinery for the supercritical carbon dioxide power cycle. *International Journal of Energy Research*, 40, 587–599. <https://doi.org/10.1002/er.3453>
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., & Witt, R. J. W. (2002). *Concept and Applications of Finite Element Analysis* (4th ed.). John Wiley & Sons, Inc.
- Deaton, J. D., & Grandhi, R. V. (2014). A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 49(1), 1–38. <https://doi.org/10.1007/s00158-013-0956-z>
- Dick, E. (2015). Fundamentals of Turbomachines. In *Fluid Mechanics and Its Applications* (Vol. 109). [https://doi.org/10.1016/0300-9467\(86\)85009-2](https://doi.org/10.1016/0300-9467(86)85009-2)
- Dixon, J. a, Verdicchio, J. a, Benito, D., Karl, A., & Tham, K. M. (2004). Recent developments in gas turbine component temperature prediction methods, using computational fluid dynamics and optimization tools, in conjunction with more conventional finite element analysis techniques. *Proceedings of the Institution of*

- Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy*, 218, 241–255.  
<https://doi.org/10.1243/0957650041200641>
- Dixon, S. L., & Hall, C. A. (2014). *Fluid Mechanics and Thermodynamics of Turbomachinery* (7th ed.). Elsevier Inc.
- Dubrovskaya, A., Dongauzer, K., & Faskhutdinov, R. (2017). The design of lightweight gas turbine engine parts using topology optimization. *MATEC Web of Conferences*, 129.  
<https://doi.org/10.1051/mateconf/201712901067>
- Elsevier. (2019). Scopus. Retrieved May 20, 2016, from <http://www.scopus.com/>
- Eschenauer, H. A., & Olhoff, N. (2001). Topology Optimization of Continuum Structures: A review. *Applied Mechanics Reviews*, 54(4), 331–390.  
<https://doi.org/10.1115/1.1388075>
- Evgrafov, A. (2005). The Limits of Porous Materials in the Topology Optimization of Stokes Flows. *Applied Mathematics & Optimization*, 52(3), 263–277.  
<https://doi.org/10.1007/s00245-005-0828-z>
- Faskhutdinov, R. N., Dubrovskaya, A. S., Dongauzer, K. A., Maksimov, P. V., & Trufanov, N. A. (2017). Topology optimization of a gas-turbine engine part. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 177. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/177/1/012077>
- Ganesan, S., & Tobiska, L. (2017). *Finite Elements: Theory and Algorithms*. Cambridge University Press.
- Gersborg-Hansen, A., Sigmund, O., & Haber, R. B. (2005). Topology optimization of channel flow problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 30(3), 181–192.  
<https://doi.org/10.1007/s00158-004-0508-7>
- Guest, J. K., Prévost, J. H., & Belytschko, T. (2004). Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(2), 238–254.  
<https://doi.org/10.1002/nme.1064>
- Gülich, J. F. (2014). Centrifugal Pumps. In *Springer* (3rd ed.). <https://doi.org/10.1007/978-3-642-40114-5>
- Haftka, R. T., & Gürdal, Z. (1992). *Elements of Structural Optimization* (Vol. 11).  
<https://doi.org/10.1002/nme.2403>
- Hahn, Y., & Cofer, J. I. (2014). Study of Parametric and Non-Parametric Optimization of a Rotor-Bearing System. *ASME Turbo Expo 2014: Turbine Technical Conference and Exposition*, 1–7. Düsseldorf.

- Hermann, A. N. A., Mijatovic, N., & Henriksen, M. L. (2016). Topology optimisation of PMSM rotor for pump application. *Proceedings - 2016 22nd International Conference on Electrical Machines, ICEM 2016*, 2119–2125. <https://doi.org/10.1109/ICELMACH.2016.7732815>
- Hibbeler, R. C. (2014). *Mechanics of materials* (9th ed.).
- Hinterberger, C., & Olesen, M. (2011). Industrial application of continuous adjoint flow solvers for the optimization of automotive exhaust systems. *ECCOMAS Thematic Conference*, (069), 1–17. Antalya, Turkey: CFD & Optimization: Methods and Applications.
- Hutton, D. V. (2004). *Fundamentals of Finite Element Analysis*. McGraw-Hill.
- Iseles, J., & Martin, T. J. (2017). Flow Topology Optimization of a Cooling Passage for a High Pressure Turbine Blade. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2017: Turbomachinery Technical Conference and Exposition*. <https://doi.org/10.1115/gt2017-63618>
- Ishikawa, T., Mizuno, S., & Krita, N. (2017). Topology Optimization Method for Asymmetrical Rotor Using Cluster and Cleaning Procedure. *IEEE Transactions on Magnetics*, 53(6). <https://doi.org/10.1109/TMAG.2017.2665441>
- Jafarzadeh, B., Hajari, A., Alishahi, M. M., & Akbari, M. H. (2011). The flow simulation of a low-specific-speed high-speed centrifugal pump. *Applied Mathematical Modelling*, 35(2011), 242–249. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.05.021>
- Jenkins, N., & Maute, K. (2015). Level set topology optimization of stationary fluid-structure interaction problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 52(1), 179–195. <https://doi.org/10.1007/s00158-015-1229-9>
- Jiang, L., & Wu, C. W. (2017). Topology optimization of energy storage flywheel. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 55(5). <https://doi.org/10.1007/s00158-016-1576-1>
- Kilchyk, V., Senay, E., & Abdelwahab, A. (2017). Selection of the Optimum Control Parameters for Compressor Design Optimization Algorithm. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2017: Turbomachinery Technical Conference and Exposition*. <https://doi.org/10.1115/gt2017-63009>
- Kundu, P. K., Cohen, I. M., & Dowling, D. R. (2016). *Fluid Mechanics* (6th ed.). Elsevier Inc.
- Le, C., Norato, J., Bruns, T., Ha, C., & Tortorelli, D. (2010). Stress-based topology optimization for continua. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 41(4), 605–620. <https://doi.org/10.1007/s00158-009-0440-y>
- Lee, Y. S., González, J. A., Lee, J. H., Kim, Y. Il, Park, K. C., & Han, S. (2016). Structural

- topology optimization of the transition piece for an offshore wind turbine with jacket foundation. *Renewable Energy*, 85, 1214–1225. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2015.07.052>
- Liu, J. H., & Wei, Z. Z. (2014). Optimization design of uncertainty fluid topology in the parallel connection of double pump. *World Journal of Engineering*, 11(3), 311–316.
- Liu, J., & Ma, Y. (2016). A survey of manufacturing oriented topology optimization methods. *Advances in Engineering Software*, 100, 161–175. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2016.07.017>
- Logan, D. L. (2012). *A first course in the Finite Element Method* (5th ed.). CENGAGE Learning.
- Lundgaard, C., Alexandersen, J., Zhou, M., Andreasen, C. S., & Sigmund, O. (2018). Revisiting density-based topology optimization for fluid-structure-interaction problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 58(3), 969–995. <https://doi.org/10.1007/s00158-018-1940-4>
- McClanahan, D. R., Liu, G. R., Turner, M. G., & Anantharaman, D. (2018). Topology Optimization of the Interior Structure of Blades With an Outer Surface Determined Through Aerodynamic Design. *International Journal of Computational Methods*, 15(3), 1–11. <https://doi.org/10.1142/s0219876218400273>
- Miyamoto, Y., Kaysser, W. A., Rabin, B. H., Kawasaki, A., & Ford, R. G. (1999). Functionally Graded Materials. Design, Processing and Applications. In *Springer Science + Business Media* (1st ed.). <https://doi.org/10.1201/9781420092578>
- Neethu, S., Shinoy, K. S., & Shajilal, A. S. (2010). Novel design, optimization and realization of axial flux motor for implantable blood pump. *2010 Joint International Conference on Power Electronics, Drives and Energy Systems, PEDES 2010 and 2010 Power India*, 1–6. <https://doi.org/10.1109/PEDES.2010.5712458>
- Oh, S., Wang, S., & Cho, S. (2016). Topology optimization of a suction muffler in a fluid machine to maximize energy efficiency and minimize broadband noise. *Journal of Sound and Vibration*, 366, 27–43. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.10.022>
- Picelli, R., Vicente, W. M., & Pavanello, R. (2015). Bi-directional evolutionary structural optimization for design-dependent fluid pressure loading problems. *Engineering Optimization*, 47(10), 1324–1342. <https://doi.org/10.1080/0305215x.2014.963069>
- Picelli, R., Vicente, W. M., & Pavanello, R. (2017). Evolutionary topology optimization for structural compliance minimization considering design-dependent FSI loads. *Finite Elements in Analysis and Design*, 135(January), 44–55.

- <https://doi.org/10.1016/j.finel.2017.07.005>
- Pietropaoli, M., Montomoli, F., & Gaymann, A. (2018). Structural and Multidisciplinary Optimization Three-dimensional fluid topology optimization for heat transfer. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 59(3), 801–812. <https://doi.org/10.1007/s00158-018-2102-4>
- Qian, K. (1990). Haemodynamic approach to reducing thrombosis and haemolysis in an impeller pump. *Journal of Biomedical Engineering*, 12(6), 533–535. [https://doi.org/10.1016/0141-5425\(90\)90066-V](https://doi.org/10.1016/0141-5425(90)90066-V)
- Reddy, J. N. (2006). *An Introduction to the Finite Element Method* (3rd ed.). McGraw-Hill.
- Reddy, J. N., & Gartling, D. K. (2010). The finite element method in heat transfer and fluid dynamics third edition. In *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics, Third Edition* (3rd ed.). <https://doi.org/10.1201/9781439882573>
- Rindi, A., Meli, E., Boccini, E., Iurisci, G., Corbò, S., & Falomi, S. (2016). Static and Modal Topology Optimization of Turbomachinery Components. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 138(11). <https://doi.org/10.1115/1.4033512>
- Romero, J. S., & Silva, E. C. N. (2014). A topology optimization approach applied to laminar flow machine rotor design. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 279, 268–300. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.06.029>
- Romero, J. S., & Silva, E. C. N. (2016). Non-newtonian laminar flow machine rotor design by using topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 55(5), 1711–1732. <https://doi.org/10.1007/s00158-016-1599-7>
- Rozvany, G. I. N. (2001, April). Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 21, pp. 90–108. <https://doi.org/10.1007/s001580050174>
- Rozvany, G. I. N. (2009). A critical review of established methods of structural topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 37(3), 217–237. <https://doi.org/10.1007/s00158-007-0217-0>
- Rozvany, G. I. N., & Lewiński, T. (2014). Topology Optimization in Structural and Continuum Mechanics. In *CISM International Centre for Mechanical Sciences* (Vol. 549). <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1643-2>
- Rozvany, G. I. N., & Zhou, M. (1991a). The COC algorithm, Part I: Cross-section optimization or sizing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 89(1–3), 281–308. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(91\)90045-8](https://doi.org/10.1016/0045-7825(91)90045-8)

- Rozvany, G. I. N., & Zhou, M. (1991b). The COC algorithm, Part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 89(1–3), 309–336. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(91\)90046-9](https://doi.org/10.1016/0045-7825(91)90046-9)
- Sá, L. F. N. (2016). *Topology optimization method applied to laminar flow machine rotor design (master's thesis)*. University of São Paulo.
- Sá, L. F. N., Novotny, A. A., Romero, J. S., & Silva, E. C. N. (2017). Design optimization of laminar flow machine rotors based on the topological derivative concept. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 56(5), 1013–1026. <https://doi.org/10.1007/s00158-017-1698-0>
- Sá, L. F. N., Romero, J. S., Horikawa, O., & Silva, E. C. N. (2018). Topology optimization applied to the development of small scale pump. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 57(5), 2045–2059. <https://doi.org/10.1007/s00158-018-1966-7>
- Sá, L. F. N., Romero, J. S., Silva, E. C. N., & Horikawa, O. (2015). Design, Optimization, Manufacturing, and Characterization of an Ventricle Assist Pump. *Proceedings of the 23rd ABCM International Congress of Mechanical Engineering*, 4–11. <https://doi.org/10.20906/cps/cob-2015-0712>
- Schobeiri, M. T. (2012). *Turbomachinery Flow Physics and Dynamic Performance* (2nd ed.). <https://doi.org/10.1007/978-3-642-24675-3>
- Seppälä, J., & Hupfer, A. (2014). Topology Optimization in Structural Design of a LP Turbine Guide Vane: Potential of Additive Manufacturing for Weight Reduction. *ASME Turbo Expo 2014: Turbine Technical Conference and Exposition*, 1–10. Düsseldorf.
- Shah, S. R., Jain, S. V., Patel, R. N., & Lakhera, V. J. (2013). CFD for centrifugal pumps: A review of the state-of-the-art. *Procedia Engineering*, 51, 715–720. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.01.102>
- Shen, X., Dong, S., & Chen, Z. (2014). Research of an Advanced Turbine Disk for High Thrust-Weight Ratio Engine. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2014: Turbine Technical Conference and Exposition*, 1–7. Düsseldorf.
- Shojaeefard, M. H., Tahani, M., Ehghaghi, M. B., Fallahian, M. A., & Beglari, M. (2012). Numerical study of the effects of some geometric characteristics of a centrifugal pump impeller that pumps a viscous fluid. *Computers and Fluids*, 60, 61–70. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2012.02.028>
- Sigmund, O. (2001). A 99 line topology optimization code written in matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21(2), 120–127. <https://doi.org/10.1007/s001580050176>

- Sigmund, O. (2007). Morphology-based black and white filters for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 33(4–5), 401–424. <https://doi.org/10.1007/s00158-006-0087-x>
- Sigmund, O., & Bendsoe, M. P. (2004). Topology optimization: from airplanes to nano-optics. In K. Stubbjær & T. Kortenbach (Eds.), *Bridging From Technology To Society* (pp. 40–51). Lyngby: Technical University of Denmark.
- Sigmund, Ole. (2000). Topology optimization: a tool for the tailoring of structures and materials. *Philosophical Transactions. Series A, Mathematical, Physical, and Engineering Sciences*, 358, 211–227.
- Svanberg, K. (1987). The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(2), 359–373. <https://doi.org/10.1002/nme.1620240207>
- Svanberg, K. (2002). A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations. *SIAM Journal on Optimization*, 12(2), 555–573. <https://doi.org/https://doi.org/10.1137/S1052623499362822>
- Taylor, C., & Hood, P. (1973). A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique. *Computers and Fluids*, 1(1), 73–100. [https://doi.org/10.1016/0045-7930\(73\)90027-3](https://doi.org/10.1016/0045-7930(73)90027-3)
- The MathWorks Inc. (2019). *Matlab R2019b [computer program]*. Natick, Massachusetts.
- Tsai, T. D., & Cheng, C. C. (2012). Topology Optimization of Flywheel Rotors Using SIMP Method: A Preliminary Study. *Advanced Materials Research*, 579, 427–434. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.579.427>
- Vatanabe, S. L., Lippi, T. N., Lima, C. R. de, Paulino, G. H., & Silva, E. C. N. (2016). Topology optimization with manufacturing constraints: A unified projection-based approach. *Advances in Engineering Software*, 100, 97–112. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2016.07.002>
- White, F. M. (2011). *Fluid Mechanics*. New York: McGraw-Hill Education.
- Wiker, N., Klarbring, A., & Borrvall, T. (2007). Topology optimization of regions of Darcy and Stokes flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(7), 1374–1404. <https://doi.org/10.1002/nme.1811>
- Wu, D., Zhu, Z., Ren, Y., Gu, Y., Mou, J., & Zheng, S. (2019). Integrated topology optimization for vibration suppression in a vertical pump. *Advances in Mechanical Engineering*, 11(3), 1–13. <https://doi.org/10.1177/1687814019832689>
- Xie, G., Liu, J., Zhang, W., Lorenzini, G., & Biserni, C. (2014). Numerical Prediction of

- Turbulent Flow and Heat Transfer Enhancement in a Square Passage With Various Truncated Ribs on One Wall. *Journal of Heat Transfer*, 136(January), 1–11. <https://doi.org/10.1115/1.4024989>
- Xu, B., Ye, S., & Zhang, J. (2016). Numerical and experimental studies on housing optimization for noise reduction of an axial piston pump. *Applied Acoustics*, 110, 43–52. <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2016.03.022>
- Xu, S., Cai, Y., & Cheng, G. (2010). Volume preserving nonlinear density filter based on heaviside functions. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 41(4), 495–505. <https://doi.org/10.1007/s00158-009-0452-7>
- Yoon, G. H. (2010a). Structural topology optimization for frequency response problem using model reduction schemes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(25–28), 1744–1763. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.02.002>
- Yoon, G. H. (2010b). Topology optimization for stationary fluid-structure interaction problems using a new monolithic formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 82(5), 591–616. <https://doi.org/10.1002/nme.2777>
- Zhang, Y., Duda, T., Scobie, J. A., Sangan, C. M., Copeland, C. D., & Redwood, A. (2018). Design of an air-cooled radial turbine: Part 1 — Computational modelling. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2018: Turbomachinery Technical Conference and Exposition*, 1–13. <https://doi.org/10.1115/gt2018-76378>
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., & Zhu, J. Z. (2005). *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals* (6th ed.). McGraw-Hill.