



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# Optimización topológica aplicada a problemas de elasticidad bidimensional usando elementos finitos

Ricardo León Parra Arango

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ingeniería  
Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola  
Bogotá, Colombia  
2013



# Optimización topológica aplicada a problemas de elasticidad bidimensional usando elementos finitos

Ricardo León Parra Arango

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:  
**Magister en Ingeniería - Estructuras**

Director:  
Ph.D. Dorian Luis Linero Segrera

Línea de Investigación:  
Técnicas de optimización de estructuras  
Grupo de Investigación GIES

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ingeniería  
Departamento de Ingeniería Civil y Agrícola  
Bogotá, Colombia  
2013



## Abstract

Topology optimization is a relatively new discipline. In a general way topology optimization can be defined as “a mathematical procedure to achieve an objective, whereby the location and removal of the unessential material within a structure without harmed its security is given ”.

This investigation is concerned with mechanical structural problems, which are restricted to the bi-dimensional elasticity theory. The aim of this work is to investigate, to provide a theoretical frame, to implement and validate an algorithm for topology optimization.

The topology optimization algorithm is implemented over the PEFICA-program at the “Universidad Nacional de Colombia”. It is validated by classical applications from theory of elasticity and some practical structural cases. The obtained results from these tests make the process of topology optimization an engineering tool by design. For example, this tool could be help on the reinforcement distribution by applying the ”Strut and Tie Model”.

**Key words:** Topology optimization, theory of elasticity, finite element method, Lagrange function, optimality conditions.

## Resumen

Optimización topológica es una disciplina relativamente nueva. En forma general, la optimización topológica puede definirse como ”el procedimiento matemático para alcanzar un objetivo mediante el cual se localiza y retira el material innecesario en una estructura, sin comprometer su seguridad.”

Esta investigación trata sobre problemas de la mecánica estructural en al campo de la elasticidad bidimensional. El objetivo de este trabajo es investigar, documentar, implementar y validar un algoritmo de optimización topológica.

El algoritmo de optimización topológica fue implementado sobre el programa de elementos finitos PEFICA de la Universidad Nacional de Colombia. El algoritmo fue validado mediante las aplicaciones clásicas de la teoría de la elasticidad y algunos casos de aplicación práctica. A partir de los resultados de estos casos, se puede decir que el proceso de optimización topológica se convierte en una herramienta para los diseñadores. Por ejemplo, esta herramienta puede ayudar en la distribución del refuerzo al utilizar el metodo de la “dovela y el tirante”.

**Palabras clave:** Optimización topológica, teoría de la elasticida, método de los elementos finitos, función de Lagrange, condiciones de optimalidad.



# Índice general

Índice de figuras	iv
Índice de algoritmos	x
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Naturaleza, topología y optimización . . . . .	1
1.2. Optimización topológica, reseña histórica . . . . .	2
1.3. Optimización en la ingeniería estructural . . . . .	10
1.4. Objetivo general . . . . .	11
1.5. Metodología . . . . .	11
1.6. Estructura del trabajo . . . . .	11
<b>2. Teoría de la elasticidad y el método de los elementos finitos en problemas bidimensionales</b>	<b>13</b>
2.1. Conceptos básicos sobre la elasticidad bidimensional . . . . .	13
2.1.1. Desplazamientos . . . . .	13
2.1.2. Deformación infinitesimal . . . . .	14
2.1.3. Esfuerzos . . . . .	16
2.1.4. Ecuaciones de gobierno del problema mecánico . . . . .	17
2.1.5. Energía interna de deformación . . . . .	18
2.1.6. Principio del trabajo virtual . . . . .	18
2.2. Fundamento del Método del Elemento Finito . . . . .	19
2.2.1. Discretización del continuo . . . . .	19
2.2.2. Aproximación de la función . . . . .	20
2.2.3. Matrices de rigidez . . . . .	20
2.2.4. Conformación del sistema general . . . . .	21
2.3. Matrices de rigidez para elementos finitos bidimensionales . . . . .	21
2.3.1. Matriz de rigidez de un elemento finito bidimensional rectangular bilineal . . . . .	21
2.3.2. Matriz de rigidez de un elemento finito bidimensional triangular lineal . . . . .	26
2.4. Solución del sistema . . . . .	30
2.5. Energía interna de deformación . . . . .	31

<b>3. Fundamento matemático de la optimización</b>	<b>33</b>
3.1. Objetivo de la optimización . . . . .	33
3.2. Clasificación de las técnicas de optimización . . . . .	33
3.2.1. Según el número de variables . . . . .	34
3.2.2. Según el tipo de las restricciones . . . . .	34
3.2.3. Según el tipo de la función objetivo . . . . .	35
3.2.4. Según el tipo de las variables de diseño . . . . .	36
3.2.5. Según la metodología de solución . . . . .	36
3.3. Especialización de la optimización en la ingeniería estructural . . . . .	37
3.3.1. Optimización de tamaño . . . . .	37
3.3.2. Optimización de forma . . . . .	37
3.3.3. Optimización topológica . . . . .	38
3.3.4. Optimización topográfica . . . . .	39
3.4. Formulación de un problema de optimización . . . . .	40
3.5. Elementos matemáticos de la optimización . . . . .	44
3.5.1. Vector Gradiente . . . . .	45
3.5.2. Funciones implícitas y paramétricas . . . . .	46
3.5.3. Matriz Jacobiana . . . . .	46
3.5.4. Matriz Hessiana . . . . .	47
3.5.5. Mínimo o Máximo Local . . . . .	48
3.5.6. Mínimo o Máximo Global . . . . .	49
3.5.7. Función Convexa . . . . .	50
3.5.8. Función Cóncava . . . . .	51
3.6. Condiciones de optimalidad . . . . .	52
3.6.1. Condición necesaria de primer orden . . . . .	52
3.6.2. Condición necesaria de segundo orden . . . . .	53
3.6.3. Condición suficiente . . . . .	53
3.7. Multiplicadores de Lagrange . . . . .	54
3.8. Criterios de optimalidad . . . . .	57
3.8.1. Criterio de optimalidad para el diseño de elementos estructu- rales completamente esforzados . . . . .	57
3.8.2. Criterio de optimalidad según las condiciones de Karush - Kuhn - Tucker . . . . .	58
3.8.3. Criterio de optimalidad a partir de los multiplicadores de La- grange . . . . .	59
3.9. Análisis de la sensibilidad . . . . .	60
3.9.1. Objetivo del análisis de sensibilidad . . . . .	60
3.9.2. Deducción de la Matriz de Sensibilidad . . . . .	60
3.9.3. Métodos para el análisis de sensibilidad . . . . .	61
<b>4. Optimización topológica</b>	<b>65</b>
4.1. Objetivo de la optimización topológica . . . . .	65
4.2. Metodologías para resolver problemas de optimización topológica. . . . .	66
4.2.1. Optimización topológica empírica . . . . .	66

4.2.2.	Optimización topológica matemática . . . . .	66
4.2.3.	Optimización topológica basada en principios de crecimiento biológico . . . . .	67
4.2.4.	Optimización topológica basada en principios evolutivos . . . . .	68
4.2.5.	Optimización topológica basada en la homogenización del material . . . . .	69
4.2.6.	Optimización topológica basada en el concepto de microcelda sólida isótropa con penalización SIMP . . . . .	72
4.3.	Métodos para la solución de problemas de optimización topológica . . . . .	74
<b>5.</b>	<b>Formulación del modelo de optimización topológica</b>	<b>75</b>
5.1.	Identificación y esquema del problema . . . . .	75
5.1.1.	Fracción de volumen requerida . . . . .	76
5.2.	Variables de diseño . . . . .	76
5.3.	Función objetivo . . . . .	77
5.4.	Restricciones . . . . .	79
5.4.1.	Restricciones de igualdad . . . . .	79
5.4.2.	Restricciones de desigualdad . . . . .	80
5.5.	Análisis de la sensibilidad . . . . .	80
5.6.	Criterio de optimalidad . . . . .	81
5.7.	Solución de la Ecuación de la condición estacionaria . . . . .	84
<b>6.</b>	<b>Implementación</b>	<b>87</b>
6.1.	Criterios para la selección de una aplicación de elementos finitos . . . . .	87
6.2.	Criterios para el diseño de los algoritmos . . . . .	88
6.3.	Esquema general de una aplicación de optimización topológica. . . . .	89
6.4.	Método de los elementos finitos . . . . .	90
6.5.	Procedimiento de optimización . . . . .	92
6.6.	Criterio de optimalidad y movimiento de límites . . . . .	93
<b>7.</b>	<b>Validación y ejercicios de aplicación</b>	<b>95</b>
7.1.	Verificación y validación . . . . .	96
7.1.1.	Cercha de mínimo peso de Michell . . . . .	97
7.1.2.	Viga aperaltada en voladizo . . . . .	100
7.1.3.	Vigas de gran peralte . . . . .	108
7.1.4.	Vigas de peralte moderado . . . . .	116
7.2.	Ejercicios de aplicación . . . . .	121
7.2.1.	Viga aperaltada con carga distribuida . . . . .	121
7.2.2.	Ménsula de sección constante . . . . .	127
7.2.3.	Muro de carga con abertura . . . . .	135
7.3.	Comportamiento con elementos triangulares . . . . .	142
7.3.1.	Voladizo con malla triangular estructurada . . . . .	142

<b>8. Conclusiones</b>	<b>147</b>
8.1. Observaciones generales . . . . .	147
8.2. Conclusiones generales . . . . .	147
<b>9. Futura línea de investigación</b>	<b>151</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>157</b>

# Índice de figuras

1.1.	Optimización natural de la estructura de un árbol, como resultado de la evolución. Concepción estructural de elementos de apoyo, de mínimo peso, inspirada en la optimización de la naturaleza. Nuevo aeropuerto Stuttgart. [Fotos R. Parra] . . . . .	1
1.2.	Version original y optimizada del voladizo estudiado por Galileo 1638. Adaptado de la referencia [20] . . . . .	3
1.3.	Diferentes formas de las armaduras de mínimo peso presentadas por Michell en 1904. Elementos en línea delgada indican solicitaciones a compresión, en línea gruesa solicitaciones a tensión. Tomado de la referencia [40] . . . . .	4
1.4.	Ejemplos de estructuras espaciales de mínimo peso. Hiperboloide de 350 metros de altura, concebido como antena de transmisión para la radio rusa, diseñado por V. Shukhov en 1919. Domo geodésico de 76 metros de luz, diseñado por R. Buckminster Fuller para la feria internacional de Montreal en 1967. Tomado de las referencias [23] y [36] . . . . .	5
1.5.	Optimización topológica intuitiva de elementos continuos en concreto. Vigas curvas de sección variable para el Palacio de los deportes en Florencia. Apoyos en forma de “Y” para el Estadio de Roma. Obras concebidas y construidas bajo la dirección de Pier Luigi Nervi en la década de 1940 a 1950. Tomado de la referencia [43] . . . . .	6
1.6.	Punto de partida y resultado de una optimización topológica obtenida a partir del método “Ground Structure”. Tomado de la referencia [29]	7
1.7.	Estados en la optimización topológica de una viga simplemente apoyada con cargas puntuales aplicadas en los extremos y el centro de la viga. Adaptado de la referencia [10] . . . . .	8
1.8.	a.) Líneas de esfuerzos obtenidas a partir del método de las dovelas ... compresión, -- tensión. b.) Líneas de esfuerzos obtenidas a partir de una optimización topológica. Adaptado de las referencias [14] y [50]	9
1.9.	Gancho para grua. a.) Forma convencional obtenida a partir del concepto de concentración de esfuerzos. b.) Forma mejorada luego de una optimización topológica. Adaptado de la referencia [15] . . . . .	9
2.1.	Cambio de posición o desplazamiento de una partícula $P_o$ de una estructura bidimensional. . . . .	14

2.2.	Posibles desplazamientos que experimenta un elemento diferencial en un estado plano de esfuerzos. a.) Elongación en la dirección $x$ , b.) Elongación en la dirección $y$ y c.) Distorsión en el plano $x - y$ . . . . .	15
2.3.	Representación gráfica del vector de esfuerzos sobre un elemento infinitesimal en el plano $x - y$ . . . . .	16
2.4.	Discretización del dominio de una viga de peralte alto mediante elementos finitos o subdominios. . . . .	20
2.5.	Elemento finito de forma rectangular de dimensiones $2a$ y $2b$ con ocho grados de libertad, referido al sistema $x - y$ . . . . .	22
2.6.	Elemento finito de forma triangular con seis grados de libertad, referido al sistema $x - y$ . . . . .	26
3.1.	Optimización de Tamaño . . . . .	38
3.2.	Optimización de Forma . . . . .	38
3.3.	Optimización Topológica . . . . .	39
3.4.	Optimización Topográfica . . . . .	40
3.5.	Definición del dominio admisible a partir de las limitaciones que imponen las funciones de restricción tanto de igualdad $h_1(x)$ como de desigualdad $g_1(x), g_2(x)$ y $g_3(x)$ . . . . .	44
3.6.	Representación gráfica del vector gradiente en un espacio de tres dimensiones. . . . .	45
3.7.	Representación gráfica de la matriz Hessiana en un espacio de tres dimensiones. . . . .	48
3.8.	Representación gráfica de los máximos y mínimos relativos o locales de una función. . . . .	49
3.9.	Representación gráfica del máximo y mínimo absoluto o global de una función. . . . .	50
3.10.	Dominio de una función convexa . . . . .	51
3.11.	Dominio de una función cóncava . . . . .	51
4.1.	Ejemplo de una microcelda en 2D con orificio rectangular rotado con respecto al eje vertical $\phi$ . . . . .	69
4.2.	Comportamiento periódico de una variable de propiedades físicas del material $F(x)$ y su comportamiento homogeneizado $F^H(x)$ . . . . .	70
4.3.	Influencia del exponente de penalización $p$ sobre la relación de material a asignar. $E/E_o = \rho^{(e)p}$ . . . . .	73
5.1.	Comportamiento de la Ecuación de condición estacionaria $C$ vs. la variable de diseño $\rho$ , para los dos casos posibles $C < 1$ o $C > 1$ . . . .	85
7.1.	Representación gráfica del valor de la densidad en los elementos finitos, resultado de la optimización topológica. Tono blanco equivale a la "ausencia de material" o densidad mínima y el tono negro equivale a un elemento "completamente sólido" o de densidad máxima. . . . .	96

7.2.	Modelo para simular una estructura de mínimo peso según Michell. a.) Esquema del modelo. b.) Discretización mediante una malla de 1600 elementos. . . . .	97
7.3.	Convergencia del proceso de optimización. Relación de energías de deformación $U_i/U_o$ vs. iteración. . . . .	98
7.4.	Estructura de mínimo peso de Michell, obtenida a partir de la opti- mización topológica de una viga de gran peralte, solicitada por carga puntual en el centro de la viga y apoyada a la altura media de los dos lados. Malla 40x40, $\rho=7\%$ . . . . .	99
7.5.	Esquema del modelo para una viga aperaltada en voladizo solicitada por una carga puntual: a.) en la fibra superior, b.) en la fibra media y c.) en la fibra inferior del costado lateral derecho. . . . .	100
7.6.	Optimización topológica de una viga aperaltada en voladizo, solici- tada por una carga puntual en la fibra superior del costado lateral derecho. Malla 20x20. $\rho=50\%$ . . . . .	102
7.7.	Optimización topológica de una viga aperaltada en voladizo, solici- tada por una carga puntual en la fibra media del costado lateral derecho. Malla 20x20. $\rho=50\%$ . . . . .	103
7.8.	Optimización topológica de una viga aperaltada en voladizo, solici- tada por una carga puntual en la fibra inferior del costado lateral derecho. Malla 20x20. $\rho=50\%$ . . . . .	104
7.9.	Optimización topológica de una viga aperaltada en voladizo, solici- tada por una carga puntual en la fibra superior del costado lateral derecho. Malla 20x20. $\rho=30\%$ . . . . .	105
7.10.	Optimización topológica de una viga aperaltada en voladizo, solici- tada por una carga puntual en la fibra media del costado lateral derecho. Malla 20x20. $\rho=30\%$ . . . . .	106
7.11.	Optimización topológica de una viga aperaltada en voladizo, solici- tada por una carga puntual en la fibra inferior del costado lateral derecho. Malla 20x20. $\rho=30\%$ . . . . .	107
7.12.	Vigas aperaltadas simplemente apoyadas y solicitadas por una carga puntual en el centro de la luz: a.) fibra superior, b.) fibra media y c.) fibra inferior. . . . .	108
7.13.	Discretización del modelo de viga aperaltada simplemente apoyada: a.) Malla de 30 x10 elementos y b.) Malla de 60 x 20 elementos. . . . .	108
7.14.	Optimización topológica de una viga aperaltada simplemente apoyada y cargada en el centro de la luz de la fibra superior. Malla 30 x 10. $\rho=50\%$ . . . . .	110
7.15.	Optimización topológica de una viga aperaltada simplemente apoya- da, cargada en el centro de la luz de la fibra media. Malla 30 x 10. $\rho=50\%$ . . . . .	111
7.16.	Optimización topológica de una viga aperaltada simplemente apoya- da, cargada en el centro de la luz de la fibra inferior. Malla 30 x 10. $\rho=50\%$ . . . . .	112

7.17. Optimización topológica de una viga aperaltada simplemente apoyada, cargada en el centro de la luz de la fibra superior. Malla 60 x 20. $\rho = 50\%$ . . . . .	113
7.18. Optimización topológica de una viga aperaltada simplemente apoyada, cargada en el centro de la luz de la fibra media. Malla 60 x 20. $\rho = 50\%$ . . . . .	114
7.19. Optimización topológica de una viga aperaltada simplemente apoyada, cargada en el centro de la luz de la fibra inferior. Malla 60 x 20. $\rho = 50\%$ . . . . .	115
7.20. Esquema del modelo para una viga de peralte moderado solicitada por una carga puntual en centro de la fibra superior con la siguiente condición de apoyo: a.) simplemente apoyada, b.) doblemente apoyada y c.) empotrada en sus dos extremos. . . . .	116
7.21. Discretización del modelo para una viga de peralte moderado solicitada por una carga puntual en centro de la fibra superior. . . . .	117
7.22. Optimización topológica de una viga de peralte moderado simplemente apoyada, cargada en el centro de la luz de la fibra superior. Malla 60 x 10. $\rho = 50\%$ . . . . .	118
7.23. Optimización topológica de una viga de peralte moderado doblemente apoyada, cargada en el centro de la luz de la fibra superior. Malla 60 x 10. $\rho = 50\%$ . . . . .	119
7.24. Optimización topológica de una viga de peralte moderado empotrada en sus dos extremos, cargada en el centro de la luz de la fibra superior. Malla 60 x 10. $\rho = 50\%$ . . . . .	120
7.25. Esquema de modelos para vigas aperaltadas solicitadas por cargas uniformemente distribuida: a.) Apoyo continuo y carga distribuida sobre la fibra superior, b.) Apoyo continuo y carga distribuida a la altura media y c. Apoyos dobles en los extremos de la base y restricción lateral a la altura media solicitada por carga distribuida a la altura media. . . . .	121
7.26. Discretización del modelo para vigas altas solicitadas por carga uniformemente distribuida, y bajo diferentes condiciones de apoyo mediante una malla de 60 x 20 elementos. . . . .	122
7.27. Optimización topológica de una viga aperaltada sobre un apoyo continuo solicitada por una carga uniformemente distribuida en la fibra superior. Malla 60 x 20. $\rho = 50\%$ . . . . .	124
7.28. Optimización topológica de una viga aperaltada sobre un apoyo continuo y restricción lateral a la altura media de los dos costados solicitada por una carga distribuida en la fibra media. Malla 60 x 20. $\rho = 50\%$ . . . . .	125
7.29. Optimización topológica de una viga aperaltada doblemente apoyada con restricción lateral a la altura media de los dos costados solicitada por una carga distribuida en la fibra media. Malla 60 x 20. $\rho = 50\%$ . . . . .	126

7.30. Esquemas del modelo de una ménsula de sección constante. a.) Modelo original, b.) Modelo considerando infinitamente rígida la columna y c.) Modelo reemplazando el efecto de la carga y su excentricidad por fuerzas equivalentes. . . . .	127
7.31. Discretización de los modelos para la mensula de sección rectangular. a.) Malla de 708 elementos rectangulares y b.) Malla de 2832 elementos rectangulares. . . . .	128
7.32. Solución conceptual a partir del método de las dovelas o " <i>Strut-Tie Model</i> " . . . . .	130
7.33. Optimización topológica de una mensula de sección constante. Malla de 708 elementos. $\rho = 98\%$ . . . . .	131
7.34. Optimización topológica del voladizo de una mensula de sección constante, considerando la columna infinitamente rígida. Malla de 708 elementos. $\rho = 98\%$ . . . . .	132
7.35. Optimización topológica de la columna de una mensula de sección constante, reemplazando el efecto de la carga por las fuerzas equivalentes sobre la cara de la columna. Malla de 708 elementos. $\rho = 98\%$ . . . . .	133
7.36. Optimización topológica de una mensula de sección constante. Malla de 2.832 elementos. $\rho = 50\%$ . . . . .	134
7.37. Equema de los modelos para un muro de carga simplemente apoyado, solicitado por carga puntual en la fibra superior a.) Forma rectangular o inicial, b.) forma irregular y c.) forma irregular con abertura interior	135
7.38. Discretización para el modelo del muro de forma irregular con abertura interior a.) Forma rectangular 1200 elementos, b.) forma irregular 984 elementos y c.) forma irregular con abertura interior 856 elementos	136
7.39. Posibles modelos para identificar el flujo de esfuerzos, en un muro irregular con abertura interior. Tomado de la referencia [50] . . . . .	137
7.40. Optimización topológica de un muro de carga de forma rectangular simplemente apoyado y solicitado por una carga puntual en la fibra superior. Malla de 1200 elementos. $\rho = 30\%$ . . . . .	139
7.41. Optimización topológica de un muro de carga de forma irregular simplemente apoyado y solicitado por una carga puntual en la fibra superior. Malla de 984 elementos. $\rho = 30\%$ . . . . .	140
7.42. Optimización topológica de un muro de carga de forma irregular y abertura interior simplemente apoyado y solicitado por una carga puntual en la fibra superior. Malla de 856 elementos. $\rho = 30\%$ . . . . .	141
7.43. Esquema para el modelo de voladizo, a.) carga en la fibra superior, b.) carga en la fibra media y c. carga en la fibra inferior del costado derecho. d.) Discretización del modelo mediante una malla triangular estructurada de 400 elementos. . . . .	142
7.44. Optimización topológica de una viga aperaltada en voladizo, solicitada por una carga puntual en la fibra superior del costado lateral derecho. Malla triangular estructurada 20 x 20. $\rho = 30\%$ . . . . .	144

7.45. Optimización topológica de una viga aperaltada en voladizo, solicitada por una carga puntual en la fibra media del costado lateral derecho. Malla triangular estructurada 20 x 20. $\rho = 30\%$ . . . . .	145
7.46. Optimización topológica de una viga aperaltada en voladizo, solicitada por una carga puntual en la fibra inferior del costado lateral derecho. Malla triangular estructurada 20 x 20. $\rho = 30\%$ . . . . .	146

# Índice de algoritmos

6.1. Esquema general del proceso de optimización topológica . . . . .	89
6.2. Método de los elementos finitos . . . . .	90
6.3. Procedimiento de optimización . . . . .	92
6.4. Criterio de optimalidad: Método de la bisección . . . . .	93

