



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Análisis de estabilidad a partir de la estimación de
un modelo de desequilibrio keynesiano para la
economía colombiana

José David Pulido Pescador

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias Económicas - Maestría en Ciencias Económicas

Bogotá, D.C., Colombia

2011

Análisis de estabilidad a partir de la estimación de
un modelo de desequilibrio keynesiano para la
economía colombiana

José David Pulido Pescador

Tesis de grado presentada como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Ciencias Económicas

Director:

Luis Lorente Sánchez-Bravo

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias Económicas - Maestría en Ciencias Económicas

Bogotá, D.C., Colombia

2011

Agradecimientos

Al profesor Luis Lorente, no solamente por su gran colaboración y paciencia como director de tesis, sino por haber sido quien me instruyó en el apasionante campo de los sistemas dinámicos no lineales y su conexión con los fenómenos económicos, estando yo desprovisto de cualquier conocimiento sobre el tema. Buena parte de las innovadoras tesis que se defienden en este trabajo son adoptadas cabalmente de su valerosa producción académica.

Resumen

Se emplea un modelo macro-estructural de desequilibrio keynesiano siguiendo los esquemas propuestos en la tradición KMG (Keynes-Metzler-Goodwin). El modelo consta de dos curvas de Phillips separadas, una para precios y otra para salarios, ambas aumentadas por expectativas de tipo híbrido; una IS dinámica; una Regla de Taylor y una Ley de Okun. Se demuestra analíticamente que aunque las relaciones macroeconómicas conserven los signos esperados, pueden existir cambios en las propiedades cualitativas del sistema a través de bifurcaciones de Hopf. Los parámetros del modelo son obtenidos mediante una estimación por GMM con datos de Colombia para el período 1981-2009. Se usa una simulación numérica para explorar el comportamiento del sistema en el largo plazo, acudiendo al cálculo del espectro de exponentes de Lyapunov. El análisis de bifurcación de los parámetros de interés indica que para valores grandes del coeficiente que mide la sensibilidad de las expectativas de inflación a la inflación observada, una bifurcación no simple de Hopf genera un atractor extraño hipercaótico. Y si la sensibilidad de los precios a las presiones de demanda sobrepasa cierto valor crítico, otra bifurcación de Hopf origina un atractor extraño, aunque en este caso el estado asintótico podría aproximarse a un ciclo límite. Los atractores extraños encontrados, que impiden el pronóstico del sistema en el largo plazo, podrían ofrecer una representación totalmente endógena y determinística los ciclos de negocios colombianos.

Palabras claves: Macroeconomía no lineal, estabilidad, bifurcación, atractor extraño.

Clasificación JEL: C62, C65, E12, E32.

Abstract

A macro-structural Keynesian disequilibrium model is used following the scheme proposed in the KMG (Keynes-Metzler-Goodwin) tradition. The model contains two separate expectations-augmented Phillips curves, one for prices and another for wages, with a hybrid specification; a dynamic IS curve; a Taylor rule and an Okun law. It is shown analytically that, even though the macroeconomic relations preserve the expected signs, changes on the qualitative properties of the system can take place through Hopf bifurcations. The parameters of the model are obtained by GMM estimation using data for Colombia for the period 1981 to 2009. Numerical simulation is used to explore the system behavior in the long run by calculating the spectrum of Lyapunov exponents. The bifurcation analysis of the parameters indicates that a non-simple Hopf bifurcation generates an hyperchaotic strange attractor for large values of the parameter that measures the sensitivity of inflation expectations to the observed inflation. Another Hopf bifurcation with strange attractor appears when the sensitivity of prices to demand pressures exceeds a critical value, but in this case the long run state may approach a simple limit cycle. The strange attractors, that do not allow forecasting in the long run, could explain absolutely endogenous and deterministic business cycles for the Colombian economy.

Keywords: Nonlinear macroeconomics, stability, bifurcation, strange attractor.

JEL classification: C62, C65, E12, E32.

Índice general

Introducción	1
1. Estabilidad en un modelo de desequilibrio keynesiano	4
1.1. Dinámica compleja en la teoría económica: una breve revisión de literatura . . .	4
1.1.1. Introducción de no linealidades en la modelación macroeconómica . . .	5
1.1.2. Dinámica compleja no lineal en los modelos macroeconómicos keynesianos	6
1.1.3. La familia de modelos Keynes-Metzler-Goodwin	9
1.2. Formulación de un modelo macroeconómico de desequilibrio keynesiano y análisis de su estabilidad	11
1.2.1. La estructura del modelo de desequilibrio	12
1.2.2. Comparación con modelos neo keynesianos	17
1.2.3. Análisis de estabilidad del modelo de desequilibrio	19
2. Consistencia empírica del análisis de estabilidad	25
2.1. Descripción de la información colombiana.	26
2.1.1. Recolección y tratamiento de las series de la economía colombiana.	26
2.1.2. Pruebas de raíz unitaria.	34
2.2. Estimación econométrica y simulación numérica del modelo de desequilibrio . . .	35
2.2.1. Estimación econométrica mediante el método generalizado de momentos (GMM)	36
2.2.2. Robustez de la estimación econométrica mediante GMM	39
2.2.3. Simulación numérica, cálculo de exponentes de Lyapunov y resultados de estabilidad	41
Conclusiones	47
Bibliografía	49

Apéndice matemático: Estabilidad en sistemas dinámicos	55
I. Sistemas dinámicos y transformación del volumen del espacio de fases	55
I.1. Del concepto de un sistema dinámico y su clasificación	55
I.2. Transformación del volumen del espacio de fases	58
I.3. Sistemas hamiltonianos y teoría económica: las limitaciones de los modelos de optimización intertemporal	59
II. Estabilidad de los estados asintóticos y estabilidad estructural	62
II. 1. Del concepto de estado asintótico y su clasificación	62
II. 2. Dinámica regular y su caracterización cuantitativa: el teorema de Routh Hurwitz	62
II. 3. Dinámica caótica y su caracterización cuantitativa: el espectro de Lyapunov	66
II. 4. Teoría de bifurcaciones y estabilidad estructural	69
 Anexos	 73
Anexo A: Demostración de las proposiciones 2 y 3	73
Anexo B: Datos de la economía colombiana empleados	77
Anexo C: Salidas econométricas detalladas	81

Introducción

Luego de la revolución que suscitaron las expectativas racionales en la teoría macroeconómica, gran parte de la literatura académica de los últimos años acogió la utilización de esquemas de optimización intertemporal como herramienta analítica para representar cómo las conductas óptimas de los agentes podían proporcionar fundamentos explícitos de las relaciones macro estructurales supuestas en la teoría. Inclusive, sin alejarse del mismo aparato conceptual, se han introducido modelos con rigideces de precios y salarios que generan expectativas híbridas para reconocer la posibilidad de desviaciones prolongadas de la actividad económica respecto a su nivel óptimo, aunque garantizando la convergencia al estado de equilibrio en un plazo más amplio. Bajo este contexto metodológico, el estudio de la evolución temporal de los fenómenos económicos, que generalmente es altamente compleja e irregular, se ha caracterizado por suponer que la dinámica generadora de dicha complejidad la producen de manera exógena choques que recibe la economía, y que éstos siguen procesos estocásticos.

Sin embargo, los sistemas dinámicos hamiltonianos involucrados en las soluciones de los esquemas de optimización intertemporal poseen propiedades cualitativas restrictivas. En particular, el hecho que dichos sistemas sean conservativos implica que toda región acotada en el espacio de fases conserva su volumen, así modifique su forma. Esto, junto con los supuestos necesarios que se hacen en economía para garantizar equilibrios óptimos, lleva a la exclusión de soluciones diferentes a los puntos de silla para este tipo de modelos, en las cuales solo unas trayectorias privilegiadas pueden llevar a las variables del sistema al equilibrio. La existencia de este tipo de soluciones – que en otros campos del conocimiento se descartan por considerarlas extremadamente improbables – se justifica por el uso de expectativas racionales, con las que los agentes, dotados de capacidades de cálculo excepcionales, reaccionan instantáneamente ante un shock recalculando perfectamente el futuro y modifican sus decisiones para ajustarlas a la nueva (y única) trayectoria óptima. La evidente circularidad de este argumento y su falta de realismo alertan sobre la debilidad del proceder metodológico, mientras que las restricciones a la dinámica de las variables, junto con el hecho de que las fluctuaciones de corto plazo sean generadas de manera totalmente exógena, llaman a considerar otras posibilidades más interesantes desde el punto de vista cualitativo.

Así las cosas, es necesario encontrar una salida teórica que supere las limitaciones metodológicas y de comportamiento cualitativo que implican los modelos de optimización intertemporal. En esta tesis, se utiliza una de las alternativas contempladas en la literatura económica, un esquema estructural de desequilibrio keynesiano. Su formulación contempla el estudio del crecimiento a partir de fluctuaciones generadas endógenamente por procesos de ajuste de las variables del sistema, que ocurren por estar éstas en desequilibrio. Adicionalmente, permite la identificación de cadenas retroalimentadoras entre los mecanismos de ajuste de las variables que, de acuerdo con su dirección y magnitud, tienen consecuencias tanto para la estabilidad asintótica del sistema como para la estabilidad estructural del mismo, diferentes a las de los sistemas dinámicos hamiltonianos. En lo que respecta a la estabilidad asintótica, pueden

aparecer atractores extraños, regiones acotadas del espacio de fases que poseen dimensión fractal, en donde permanecen “encerradas” las trayectorias del sistema, en muchos casos exhibiendo comportamientos irregulares. Las consecuencias de la presencia de estos atractores para un sistema económico las comenta Lorente (2011): *“Este tipo de atractor hace imposible el pronóstico de largo plazo porque la distancia entre dos trayectorias con condiciones iniciales cercanas crece exponencialmente, hasta superar el diámetro del conjunto contenedor que lo acota. Al mismo tiempo, las trayectorias se pliegan volviendo a pasar cerca de cualquier estado previo, pero sin repetirse jamás. Esto convierte al atractor extraño en un buen candidato para representar un “ciclo de negocios” endógeno y determinístico, prácticamente indistinguible del que generaría un proceso estocástico”*. De esta forma, se considera la posibilidad de que el comportamiento complejo de los fenómenos económicos emerja, de forma endógena, de la propia dinámica del modelo determinista considerado.

Respecto a la estabilidad estructural, o la propiedad del sistema de mantener invariante su comportamiento cualitativo ante variaciones en sus parámetros, el esquema de desequilibrio keynesiano utilizado contempla la existencia de bifurcaciones, esto es, valores de los parámetros para los cuales las propiedades cualitativas del estado estacionario se alteran (por ejemplo, de un equilibrio estable, se pasa a un ciclo limite en el valor exacto de bifurcación del parámetro y luego a un atractor extraño para valores mayores), las cuales lo hacen estructuralmente inestable. Las implicaciones de política de la presencia de bifurcaciones son importantes. El concepto macroeconómico de “política de estabilización” implícitamente asume que la economía es inestable sin la imposición de dicha política. Así, esta puede ser vista como un tipo de instrumento que mueve la economía desde un régimen inestable a otro estable, alterando el conjunto de parámetros de tal manera que el sistema “cruce” la frontera de bifurcación del espacio de parámetros. De aquí que el determinar la existencia y la ubicación de las zonas de bifurcación resulta de gran relevancia para evaluar la efectividad de las distintas políticas de estabilización con las que pueden contar las autoridades económicas.

En esta tesis la exploración de los posibles comportamientos cualitativos de las soluciones del sistema y de la existencia de bifurcaciones al variar los parámetros se realiza utilizando información de la economía colombiana. Para ello, se estima económicamente el modelo propuesto, y los resultados encontrados se utilizan en una simulación numérica en la que se calculan los exponentes de Lyapunov del sistema en función de los parámetros de bifurcación y de política relevantes. Dichos exponentes ayudan a clasificar los comportamientos cualitativos del estado estacionario del sistema, a comprobar la presencia de bifurcaciones en el intervalo de variación de los parámetros y a evaluar la efectividad de la política monetaria como ejemplo de política de estabilización.

Esta tesis la conforman dos capítulos y un apéndice matemático. En el primer capítulo se revisan las alternativas teóricas que la literatura económica ha explorado para contar con esquemas que muestren dinámicas complejas de manera endógena, señalando en particular el programa de investigación que abarca la familia de modelos macroestructurales denominados por sus autores como KMG (por las siglas de Keynes, Metzler y Goodwin), a la cual pertenece el modelo que se presenta en esta tesis. Posteriormente se expone la estructura del modelo y se comprueba como en dicho esquema pueden surgir bifurcaciones de Hopf que transforman las propiedades cualitativas de su estado estacionario una vez los parámetros sobrepasen ciertos valores. En el segundo capítulo se realiza la estimación econométrica del modelo de desequilibrio propuesto, usando el método generalizado de momentos e información de la economía colombiana para el período 1981-2009. Dada la carencia de parte de la información deseable, se describe en detalle el proceso de construcción de las series que no se encontraban disponibles

para el periodo de referencia. A partir de los resultados de dicha estimación, se realiza el ejercicio de simulación numérica donde se calculan los exponentes de Lyapunov en función de los parámetros relevantes, los cuales permiten evaluar el comportamiento cualitativo del estado estacionario del sistema, la posibilidad de que existan bifurcaciones para ciertos valores de los parámetros y la naturaleza estabilizadora de la política monetaria.

Dado que la investigación se soporta en gran medida en la utilización del aparato conceptual derivado del análisis de estabilidad en sistemas dinámicos no lineales, que habitualmente suele ser, a partir de cierto nivel de profundidad, ajeno a la profesión económica, al final se presenta un apéndice matemático con los principales conceptos asociados al análisis de estabilidad en sistemas dinámicos. Los conceptos incluidos abarcan desde los aspectos más generales (el concepto de sistemas dinámicos, su clasificación y la transformación del volumen del espacio de fases), que clarifican la necesidad de emplear sistemas dinámicos que superen las limitaciones cualitativas de los sistemas hamiltonianos, hasta otros más puntuales, que serán utilizados a lo largo de la tesis. Estos últimos incluyen el teorema de Routh-Hurwitz y su utilidad para evaluar la estabilidad de un estado estacionario en modelos de grandes dimensiones, el espectro de exponentes de Lyapunov y su uso para caracterizar cualitativamente un sistema de trayectorias caóticas y la definición y clasificación de algunas bifurcaciones.

En varios aspectos esta tesis presenta aportes originales que pueden contribuir al crecimiento de esta perspectiva para estudiar los fenómenos macroeconómicos. En el campo teórico, si bien el modelo empleado pertenece a una familia amplia de esquemas similares de diferente grado de complejidad, en los que para algunos (inclusive más complejos) se dan demostraciones analíticas de los comportamientos cualitativos de las soluciones del sistema, para el modelo específico acá utilizado no existía una demostración de la estabilidad del estado estacionario y de la aparición de bifurcaciones de Hopf, tal como la que se presenta en esta tesis. Desde el punto de vista metodológico, la reducida utilización en la literatura económica colombiana de los conceptos asociados al análisis de estabilidad en sistemas dinámicos no lineales, capaces de generar trayectorias caóticas, y de la teoría de bifurcación, hace que esta tesis abra una puerta significativa para difundir el uso de estas herramientas metodológicas en la investigación macroeconómica en Colombia, tal como se hace en otras ramas del conocimiento.

Por último, en el campo empírico se realizan dos importantes innovaciones. En primer lugar, los trabajos que han intentado validar empíricamente algún modelo perteneciente a la tradición KMG se limitan a comprobar los signos de los coeficientes del sistema para aceptar las propiedades cualitativas deducidas a nivel analítico. Estas predicen la aparición de bifurcaciones de Hopf con las que el sistema se vuelve inestable si el espacio de parámetros las llegara a cruzar, pero no establecen con claridad qué tipo de bifurcación de Hopf puede darse ni cómo se comporta el estado asintótico una vez los parámetros cruzan sus fronteras de bifurcación. En cambio, el cálculo de los exponentes de Lyapunov a partir de la simulación numérica que se presenta en esta tesis resuelve estos interrogantes. En segundo lugar, el proceso de construcción de las series utilizadas para la estimación econométrica, en particular las que se refieren a la participación de la remuneración al trabajo en el producto, puede contribuir a trabajos posteriores sobre contabilidad del crecimiento económico colombiano.

Capítulo 1

Estabilidad en un modelo de desequilibrio keynesiano

Este capítulo, dividido en dos secciones, presenta la estructura del modelo macroeconómico de desequilibrio keynesiano que se emplea en esta tesis y demuestra cómo dicho esquema posee un estado estacionario con propiedades dinámicas más interesantes desde el punto de vista cualitativo que el de modelos tradicionales de optimización intertemporal. En la primera sección se revisan las alternativas teóricas que la literatura económica ha explorado para contar con esquemas de dinámica compleja y como éstos se han incorporado de distintas maneras en las visiones neo keynesianas y post keynesianas de abordar los problemas de crecimiento y de política económica. En particular, la revisión de literatura señalará, entre otros desarrollos, un completo programa de investigación que abarca una familia de modelos macroestructurales, denominados por sus autores esquemas KMG (siglas de Keynes, Metzler y Goodwin), a la cual pertenece el modelo que se presenta en esta tesis. En la segunda sección se formulan y comentan las ecuaciones del modelo escogido dentro de la tradición KMG y se distingue su estructura de la de los esquemas neo keynesianos tradicionales, basados en su mayoría en modelos de optimización intertemporal. Adicionalmente, se realiza el análisis de estabilidad del modelo, examinando las cadenas de retroalimentación entre las variables del sistema, que, siguiendo la matriz del jacobiano del mismo, determinan el tipo de estabilidad de las soluciones del modelo. En particular, se muestra la viabilidad de que en el modelo planteado surjan bifurcaciones de Hopf para ciertos rangos de valores de los parámetros.

1.1. Dinámica compleja en la teoría económica: una breve revisión de literatura

A continuación se revisa la manera en la que la teoría económica ha incorporado distintos esquemas dinámicos de propiedades complejas desde el punto de vista cualitativo, que se ha dado a la par del desarrollo de técnicas de análisis no lineal capaces de descifrar las dinámicas generadas por ese tipo de modelos. Dada la voluminosa literatura académica que abarca este tema, resulta inevitable centrarse en un conjunto particular de modelos que sean de interés para esta tesis. Sin embargo, se pretende cubrir un rango suficientemente amplio de literatura como para que la revisión que se hace en esta sección presente un diagnóstico general del tema. Quizá uno de los más completos compendios que recopila los desarrollos teóricos en los anteriores sentidos sea la producción bibliográfica de John Barkley Rosser Jr., en especial el texto Rosser Jr. (2000a).

1.1.1. Introducción de no linealidades en la modelación macroeconómica

Probablemente los intentos precursores más sobresalientes de modelar de manera endógena comportamientos complejos de fenómenos económicos fueron aquellos en los que se introducía explícitamente una o varias no linealidades en la estructura del modelo, y corresponden a los trabajos de Kaldor (1940), Goodwin (1967) y Benassy (1986).¹ El modelo de Kaldor, inspirado en el trabajo previo de Kalecki (1937) contempla una función de inversión no lineal capaz de originar fluctuaciones que pueden poseer comportamientos semejantes a los de la teoría de la catástrofe² como posteriormente lo demostró Varian (1979). Inclusive, Dana y Malgrange (1984) mostraron que el modelo de Kaldor es capaz de producir dinámicas caóticas, mientras que Dore (1993), empleando la extensión planteada por Chang y Smyth (1971), mostró que las ecuaciones de Kaldor se pueden reducir a la de Van der Pol, que exhibe oscilaciones auto sostenidas y que posee varias aplicaciones en distintos campos³.

Goodwin planteó un modelo donde las dinámicas de distribución del ingreso entre trabajadores y capitalistas son la explicación de los ciclos en las tasas de crecimiento de la economía, combinando de esta manera elementos de las teorías de crecimiento y de ciclos económicos. El esquema de Goodwin se basa en un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales que fueron planteadas por Lotka y Volterra en biología para explicar las dinámicas entre depredadores y presas, que garantiza la existencia de un ciclo límite. El modelo de Goodwin ha sido ampliado en varios sentidos: Desai (1973) propone una versión en tiempo discreto del modelo, Di Matteo (1984) le incorpora dinero y precios con el fin de hacerlo más realista, Henkin y Polterovich (1991) muestran que puede reformularse en una estructura de ciclos de larga duración y Desai et al (2006) lo restringen para valores apropiados de sus variables. Adicionalmente, otros autores como Pohjola (1981), Lorenz (1992) y el mismo Goodwin (1990) han analizado sus propiedades dinámicas, mostrando cómo este modelo y sus extensiones pueden generar dinámicas caóticas, en especial atractores extraños.

Por su parte, el aporte de Benassy incluye en un contexto IS-LM y con una firma representativa una curva de Phillips no lineal que nunca alcanza el pleno empleo, y en cambio hace que este oscile entre continuas expansiones y contracciones. Dore (1993) muestra, al igual como lo hace con el de Kaldor, que las ecuaciones del modelo de Benassy también pueden ser reducidas a la ecuación de Van der Pol, que como se mencionó anteriormente, exhibe oscilaciones auto sostenidas.

En cualquiera de las tres maneras descritas de incluir no linealidades explícitas en la modelación económica resulta clara la intención de brindar una explicación de las fuerzas desestabilizadoras que explican de manera endógena las fluctuaciones del ciclo económico. En palabras de Rosser Jr. y Dore: “(dichos modelos) *están en la principal tradición de Keynes... son intentos de construir una teoría macro dinámica de las fluctuaciones de los principales agregados macroeconómicos: PIB o producto, proporciones de salarios, proporciones de beneficios, agregados monetarios, tasas de interés y de empleo, precios e inflación*” (Rosser Jr. y Dore 2006, p. 19). Esto abre la posibilidad de considerar en un modelo dinámico los efectos de

¹ Cabe decir que autores como Rosser Jr. y Dore (2006, p. 13) consideran que clásicos como Smith, Veblen, Marx y Schumpeter con frecuencia tenían estructuras no lineales en mente.

² Como lo reseña Jovero y Luyando (2006, p.34) la teoría de la catástrofe es introducida por Rene Thom en 1972. Más adelante se encuentran algunas aplicaciones de dicha teoría en economía.

³ La ecuación de Van der Pol es una ecuación diferencial ordinaria de segundo grado que puede ser derivada de la ecuación de Rayleigh y que describe un tipo de oscilador no conservativo. Tiene múltiples aplicaciones en física, ingeniería (circuitos eléctricos) y biología (mecanismos neuronales). Para su utilización en economía véase Dore (2003).

introducir políticas keynesianas de estabilización, las cuales no tienen cabida en los esquemas convencionales RBC (Real Business Cycles), tal como lo sustenta Rosser Jr.: “(en los RBC) . . . los ciclos económicos son generados si toma tiempo construir un stock de capital y si los choques agregados son percibidos temporalmente de manera errónea como choques específicos a un sector. Así, estos ciclos económicos podrán seguir siendo equilibrios eficientes. Por tanto, las políticas de estabilización sistemáticas son inefectivas (por la “irrelevancia de política”) y las no sistemáticas serán ineficientes” (Rosser Jr. 2000b, p. 265).

Así las cosas, la preocupación por analizar políticas de estabilización llevó a que buena parte del desarrollo de modelos con dinámicas complejas posterior a los trabajos pioneros de Kaldor, Goodwin y Benassy se haya enmarcado dentro de la tradición keynesiana⁴. Al interior de esta, conviene destacar la división existente a partir de la revolución de las expectativas racionales, debido a la distinta posición que los autores keynesianos tomaron frente a esta, y que en ocasiones se refleja en la manera de utilizar la teoría del caos y las aplicaciones no lineales para describir dinámicas complejas. Por un lado se encuentra el post keynesianismo, cuyos autores se apegaron estrictamente a las ideas de Keynes y se distanciaron metodológicamente de los esquemas neoclásicos, y por otro el neo keynesianismo, cuyos autores buscaron introducir aspectos keynesianos en el mismo terreno de los modelos RBC, adoptando la mayoría de veces expectativas racionales y modelos de optimización intertemporal. A continuación se comenta cómo ambas corrientes han incorporado en la teoría económica sistemas que generan dinámicas complejas, junto con los principales autores que han contribuido al desarrollo de este tipo de modelos.

1.1.2. Dinámica compleja no lineal en los modelos macroeconómicos keynesianos

Tanto autores neo keynesianos como post keynesianos han adoptado la dinámica compleja no lineal como una nueva herramienta para ganar terreno a la revolución que suscitaron las expectativas racionales en los modelos RBC⁵. En particular, la modelación no lineal les ha permitido utilizar elementos de las teorías de la catástrofe, cibernética, sistemas de partículas interactuantes, sinergia y, por supuesto, modelos con dinámicas caóticas, entre los cuales existe un grupo en los que dichas dinámicas se generan a partir de bifurcaciones, como sucede en el que se emplea en esta tesis. A continuación se repasan las más sobresalientes contribuciones que utilizan elementos de dichas teorías, siguiendo, parcialmente, las revisiones de literatura que al respecto realizan Rosser Jr. (1998, 2003) y Jovero y Luyando (2006).

En primer lugar, la teoría de la catástrofe, que como ya se menciono, fue desarrollada por el biólogo Rene Thom en la década del 70 e incluida en el análisis económico aplicado por Varian (1979) y Benassy (1986) en sus ampliaciones del modelo de Kaldor y por Zeeman (1974) en su modelo de inestabilidad en el mercado de acciones, explica la rápida pérdida de estabilidad de un sistema dinámico debido a la aparición o desaparición de puntos de equilibrio estables. Autores como Fischer y Jammernegg (1986), que realizan una comprobación empírica de un modelo de estanflación, y Barnett y He (2002), que analizan las consecuencias de introducir

⁴Sin embargo, Jovero y Luyando (2006, p.45) señalan que también pueden existir modelos estrictamente neoclásicos con expectativas racionales que originen dinámicas complejas, ya sea por multiplicidad de equilibrios o irregularidades en forma de indeterminaciones. Por ejemplo, citan en sus referencias el modelo de Scarf (1960) que puede originar ciclos límites simples o los modelos de Saari (1985, 1991, 1995 1996), Day y Pianigiani (1991), Day (1994) o Weddepohl (1995) que generan dinámicas caóticas.

⁵Cabe advertir que en la distinción que hace Rosser Jr. (1998) entre Neo keynesianos débiles y fuertes, comenta que solo son estos últimos los que han utilizado modelos con dinámicas no lineales y complejas.

políticas de estabilización en un esquema macroestructural con presencia de bifurcaciones, son ejemplos de autores keynesianos que aplican en sus modelación la teoría de la catástrofe.

De otro lado, las teorías de la cibernética y de los sistemas de partículas interactuantes han tenido una aplicación relativamente limitada en económica. En caso de la cibernética, que fue desarrollada en la década del 60 por Wiener (1961), se tiene a Forrester (1977) como el más notable precursor de su aplicación en economía, al plantear un modelo en donde las interacciones entre múltiples escalas de tiempo en un esquema no lineal pueden llevar a que se presenten ciclos de crecimiento económico de larga y corta duración. Por su lado, los modelos de sistemas de partículas interactuantes planteados inicialmente por Kac (1968) y Spitzer (1971) se basan en mecanismos estadísticos en los cuales existe un umbral crítico a partir del cual la interacción de partículas puede provocar discontinuidades en los resultados. En economía, esta teoría fue empleada inicialmente por Föllmer (1974) en un modelo de economías aleatorias heterogéneas con multiplicidad de agentes y de equilibrios. Más recientemente la han utilizado Brock (1993), para “*hacer modelos estructurales de valuación de activos que convierten procesos lineales de ganancias en procesos no lineales de rendimientos en equilibrio*” (Brock, 1993 p.3) y Durlauf (1993) para “*explorar el rol de las complementariedades y los mercados incompletos en el crecimiento económico... en una economía compuesta de un conjunto contable de industrias... que exhiben no convexidades*” (Durlauf, 1993 p.349).

Por su parte, la teoría de la sinergia constituye otra área en la que se desarrollaron algunos modelos macroeconómicos de inspiración keynesiana. El concepto, que fue originalmente formalizado por Haken (1977), se refiere a la propiedad de un agregado de ser independiente a la suma de sus partes. En economía, la teoría se aplicó mediante modelos dinámicos no lineales con énfasis en las fases de transición fuera del equilibrio. Los precursores del uso de este tipo de modelos fueron Goodwin (1986) y Arthur (1988), quienes mostraron cómo los mecanismos de retroalimentación entre las variables de sus sistemas podían originar equilibrios múltiples, y cómo las variables de estado y control intercambian sistemáticamente sus roles.

En lo que respecta a la modelación económica de sistemas dinámicos con trayectorias caóticas se tienen numerosos exponentes. Tal como lo reseña Rosser Jr. (2003) la primera demostración de posibles comportamientos caóticos en un modelo económico fue hecha por Strotz, McAnulty y Naines (1953) al estudiar las propiedades dinámicas del esquema propuesto por Goodwin (1951), pero sin entender matemáticamente que era lo que habían descubrieron, describiéndolo únicamente como “comportamiento irregular”. Luego de que Li y York (1975) formalizaran el concepto de caos, probablemente May (1976) fue el primero en sugerir aplicaciones en economía, y Rand (1978) el precursor en tenerlas en cuenta en un modelo económico. A partir de allí numerosos autores tanto neo keynesianos como post keynesianos han modelado dinámicas caóticas en sus esquemas.

Entre las contribuciones neo keynesianas más notables destacan las de Benhabib y Nishimura (1979) quienes muestran cómo aparecen múltiples atractores y por ende dinámicas complejas en un modelo de crecimiento óptimo con estructura multisectorial; Benhabib y Day (1982) quienes señalan que en modelos de generaciones traslapadas las dinámicas caóticas pueden aparecer por medio de burbujas especulativas y pueden incrementar las fluctuaciones endógenas; Carrera y Moran (1993) quienes establecen una nueva manera de originar trayectorias caóticas en un modelo similar al de Benhabib y Day; Sorger (1995) que señala como aparecen en un modelo a la Ramsey con rasgos keynesianos – competencia monopolística y fijación de precios – comportamientos caóticos y Soliman (1996a y 1996b) que muestra cómo se pueden

originar trayectorias caóticas a partir de las dinámicas de la curva de Phillips y cómo éstas son analizables bajo la geometría fractal; entre muchas otras contribuciones.

Por su lado, algunos autores post keynesianos han extendido en las direcciones comentadas en el anterior apartado los modelos de Kaldor, Benassy y Goodwin, demostrando cómo se hacen presentes varios tipos de dinámicas caóticas en dichos modelos ampliados. Otros han mostrado la manera como se originan dinámicas complejas en esquemas que se sustentan en las ideas keynesianas presentes en otros autores clásicos, tal como ocurre con Basile y Salvadori (1984-5) y Carson (1996) quienes utilizan la aproximación de grado de monopolio de Kalecki para mostrar cómo se pueden originar múltiples equilibrios; Bhaduri y Harris (1987) quienes plantean un modelo ricardiano donde un elevado cociente de la máxima productividad marginal del trabajo respecto al salario origina dinámicas caóticas en la transición al estado estacionario; Nusse y Hommes (1990) quienes muestran que se pueden generar dinámicas caóticas en el modelo del multiplicador-acelerador no lineal de Samuelson; Blatt (1983) que señaló que el ciclo de comercio de Hicks podría ser caótico y Silverberg y Lehnert (1993) quienes utilizaron elementos schumpeterianos y evolucionistas para tipificar los ciclos de larga duración de los salarios, entre otras contribuciones.

Adicionalmente, Rosser Jr. (1998) señala que existen otras contribuciones que emplean esquemas no lineales que son identificadas como neo keynesianas por algunos autores y como post keynesianas por otros. Un caso corresponde a las que se refieren a los procesos de histéresis, por ejemplo los modelos de Cross (1987) y Gordon (1989), en donde la economía es influenciada por los choques exógenos pasados y por ende la tasa natural de desempleo es endógena a las anteriores. Cross (1993) argumenta que este tipo de modelos son post keynesianos, pues son no ergódicos, mientras que Davidson (1993) lo refuta diciendo que probablemente ni siquiera son keynesianos, porque las dinámicas dependen de un tipo de choques exógenos reales (tipo modelos RBC) que son generados endógenamente en otros modelos. Otro caso son los modelos de fragilidad financiera desarrollados por Minsky (1972, 1986) en donde las fuentes de fluctuaciones en la economía son los ciclos de sobre confianza de los agentes y las crisis financieras. Delli Gatti et al (1993) argumentan que son modelos neo keynesianos pues se basan en parte en problemas de asimetrías de información, mientras que Semmler y Sieveking (1993) señalan que son post keynesianos ya que reflejan incertidumbre de los agentes, entre otros rasgos comúnmente post keynesianos.

Para finalizar, cabe destacar entre los modelos con posibles comportamientos caóticos aquellos en donde la ruta hacia el caos se origina por una alteración en el conjunto de parámetros del sistema, esto es, en modelos donde se hacen presentes bifurcaciones que vuelven estructuralmente inestable al sistema dinámico considerado (para ver un tratamiento formal de las bifurcaciones e inestabilidad estructural véase el apéndice, sección II.4). Intuitivamente, un sistema dinámico es estructuralmente estable si pequeños cambios en los parámetros o en las formas funcionales de las ecuaciones del sistema no alteran el aspecto de las trayectorias en el espacio de fases, es decir, las propiedades cualitativas de las mismas. Esto es, la estabilidad estructural le permite a un sistema que sus propiedades cualitativas persistan bajo pequeñas variaciones de los parámetros o de las formas funcionales del mismo.

Un aporte que hizo llamar la atención sobre la importancia del estudio de las bifurcaciones y la estabilidad estructural en economía fue el trabajo de Grandmont (1985), que encontró que inclusive en un modelo muy simple y clásico el espacio de parámetros se encuentra estratificado en infinitas regiones de bifurcación, que soporta cada una un comportamiento cualitativo distinto. Este dramático resultado no tuvo mayor trascendencia en la literatura puesto que

las implicaciones de política basadas en este modelo eran pocas, ya que en el modelo testeado todas las políticas cumplían con equivalencia ricardiana, no existían fricciones, había pleno empleo, competencia perfecta y todas las soluciones eran óptimas de Pareto.

Sin embargo, trabajos como los de Barnett y He (1999, 2002) mostraron que en modelos keynesianos estructurales, con fricciones introducidas a través de rezagos en los ajustes, y que además soportan la contrastación empírica, lo que los hace relevantes en términos de política, también se verifican los resultados de Grandmont. Inclusive, los trabajos posteriores de Barnett y Duzhak (2008, 2009) mostraron la existencia de bifurcaciones dentro del espacio de parámetros de modelos nekeynesianos. En adición a estos aportes, Barnett y He (2009) hallaron que también es posible encontrar bifurcaciones en el espacio de parámetros de las ecuaciones de Euler con coeficientes “profundos” (parámetros invariantes a las reglas de política que han sido introducidos en modelos macroestructurales para evitar la crítica de Lucas), lo que vuelve a confirmar la tesis de Grandmont.

En varios otros modelos económicos se ha descubierto y estudiado la presencia de varios tipos de bifurcaciones. Barnett y He (2004) señalan que los tipos de bifurcación que más se han utilizado en economía son las transcriticals, las simétricas o de horquilla (o de pitchfork), las inducidas por singularidades y las de Hopf, siendo estas últimas las más encontradas (en la sección II.4 del apéndice se describe detalladamente en qué consisten). Las bifurcaciones transcriticals han sido descubiertas en sistemas macroeconómicos en tiempo continuo de grandes dimensiones como el de Bergstrom, Nowman y Wymer (1992), cuyas fronteras de bifurcación fueron encontradas en Barnett y He (1999). Por su lado, las bifurcaciones de horquilla han sido halladas en esquemas donde se modelan procesos de *tatonnement*, como en Bala (1997) y Scarf (1959). Las bifurcaciones inducidas por singularidades no habían sido descubiertas en economía hasta el trabajo de He y Barnett (2004), en el que se encuentran en las ecuaciones de Euler del modelo macroeconómico de Leeper y Sims (1994).

Mención aparte merecen las bifurcaciones de Hopf, que han sido las más analizadas en modelos económicos. Por ejemplo, se encuentran en el esquema de crecimiento multisectorial ya reseñado de Benhabib y Nishimura (1979), en el tratamiento de las velocidades de ajuste de las expectativas inflacionarias en un modelo de Tobin que realiza Benhabib y Miyao (1981), en el modelo de intensidad de uso de los factores de Nishimura y Takahashi (1992) o en los esquemas Neo keynesianos con curvas de Phillips híbridas analizados por Barnett y Duzhak (2006), para citar algunos casos. Adicionalmente, es recurrente encontrarlas en una familia de modelos macro estructurales de inspiración keynesiana cuyos autores han bautizado como “modelos KMG” (por la siglas de Keynes, Metzler y Goodwin). Dentro de esta familia de modelos se encuentran los fundamentos del que en esta tesis se estima, y por tanto vale la pena dedicar algunas líneas al origen y a las principales características de estos modelos, a lo que se propone el siguiente apartado.

1.1.3. La familia de modelos Keynes-Metzler-Goodwin

El modelo de desequilibrio keynesiano que en esta tesis se propone estimar tiene en cuenta algunos de los principales postulados de los esquemas KMG, planteados inicialmente por Chiarella y Flaschel (1999, 2000)⁶. Estos autores, en compañía de varios otros⁷, han estruc-

⁶Como afirma John Barkley Rosser Jr. en Chiarella et al. (2005), probablemente desde mediados de los 80 dichos autores ya habrían comenzado a desarrollar modelos parciales en los que se fundamentarían más adelante toda la estructura de modelos KMG.

⁷Además de Carl Chiarella y Peter Flaschel, otros autores que han aportado activamente al desarrollo de los modelos KMG han sido Reiner Franke, Willi Semmler, Toichiro Asada, Pu Chen, Peter Skott, Hans-Martin

turado un completo programa de investigación que cuenta con numerosos artículos en diversas revistas académicas (probablemente más de un centenar) y varios libros publicados. Así las cosas, resumir en detalle las contribuciones de dichos autores sobrepasa el alcance de este espacio. No obstante, a continuación se exponen las principales ideas que se evidencian en el proceso de construcción de los modelos KMG y su posición actual en la teoría económica, a manera de visión global sobre el estado del arte de dichos modelos de desequilibrio.

Como sus siglas lo indican, los modelos KMG integran algunos de los principales elementos de los aportes de Keynes, Metzler y Goodwin a la teoría económica esquematizándolos en una sola formulación macroeconómica estructural. Las ideas de Keynes están presentes en la modelación a través de la incorporación de sistemas IS-LM-PC, que señalan los efectos reales de los mercados financieros en el consumo y la inversión vía tasa de interés, así como de la consideración del desequilibrio en los mercados financiero, laboral y de bienes y servicios como motor endógeno de los ciclos económicos. Por su parte, las contribuciones de Metzler se ven reflejadas en la modelación de los procesos de ajustes en cantidad vía inventarios en el mercado de bienes, que implican la consideración de un desequilibrio permanente en dicho mercado. Asimismo, son incorporados los aportes de Goodwin sobre la interacción entre el crecimiento económico y la distribución del ingreso.

Igualmente, algunos de los esquemas KMG propuestos también han recogido en su formulación planteamientos de otros economistas destacados. Por ejemplo, algunos modelos han propuesto no linealidad en la función de inversión, que como se mencionó atrás proviene de las ideas de Kalecki y Kaldor, otros han considerado las ideas de Fisher sobre la deflación de la deuda en un contexto de crecimiento, mientras que otros presentan dinámicas de crecimiento sustentadas en la combinación de las teorías opuestas de expansión monetaria de Tobin y de Wicksell, por citar algunos ejemplos.

A diferencia de algunos modelos neo keynesianos micro fundamentados, se podría argumentar que la fundamentación de los modelos KMG es a nivel macro, pues los autores comienzan a desarrollar en una sola estructura de ecuaciones las relaciones macroeconómicas dinámicas más relevantes (curvas de Phillips, ecuaciones IS y LM, ley de Okun, etc.) haciéndolas cada vez más coherentes respecto a los bloques necesarios para una descripción completa de una teoría del crecimiento orientada por el desequilibrio. Sin embargo, cabe decir que tampoco se niega por completo los beneficios que trae la micro fundamentación: por ejemplo, en Chiarella y Flaschel (1999) se reconoce que los micro fundamentos son importantes para controlar analíticamente lo que ha sido especificado y que podrían mejorar los módulos que integran las dinámicas, aunque también se deja claro que se necesita de la perspectiva macro para tener una idea de qué es lo que debe estar micro fundamentado.

Los esquemas KMG tienen en cuenta la relevancia de la solución de estado estacionario como restricción de largo plazo y hacen un énfasis particular en las cadenas fundamentales de retroalimentación que interactúan a nivel de las variables macroeconómicas. Así, en la medida que se han incrementado el número de dimensiones de sus modelos, se ha podido describir y analizar las interdependencias económicas resultantes y las cadenas de retroalimentación entre las variables utilizadas. Este análisis les permite a los autores ir comparando cualitativamente las características dinámicas de los sistemas conformados y el tipo de estabilidad de los estados estacionarios de cada modelo al aumentar el número de variables utilizadas, y por ende el grado de complejidad de la representación.

Krolzig, Hing Hung, Gang Gong, Gangolf Groh y Cristian Proaño, entre muchos otros.

Igualmente, el análisis cualitativo contribuye a evaluar la estabilidad estructural de los sistemas, al confrontar como cambian las propiedades dinámicas de estos ante modificaciones en la magnitud de algún parámetro particular. Esto permite identificar las fronteras de bifurcación, es decir, los valores de los parámetros para los cuales el sistema presenta un comportamiento cualitativo distinto. En particular, la mayoría de modelos KMG confirman que los respectivos estados estacionarios son asintóticamente estables para velocidades de ajuste pequeñas de las variables (precios, salarios, etc.), pero que pierden su estabilidad a manera de bifurcaciones de Hopf cuando las velocidades de ajuste comienzan a incrementarse. Inclusive, esta conclusión ha encontrado respaldo empírico, por ejemplo en los trabajos de Chen et al. (2006), Asada et al. (2007) y Proaño et al. (2006) entre otros, en donde se presentan estimaciones econométricas con datos de Estados Unidos, Reino Unido y la Zona Euro respectivamente, que confirman los signos de los parámetros que el modelo de desequilibrio señala en la teoría. Precisamente esta tesis, además de comprobar si los datos de la economía colombiana sustentan la aparición de bifurcaciones de Hopf como lo hacen dichos trabajos, establece también, a través del cálculo de los exponentes de Lyapunov del modelo, qué tipo de bifurcación de Hopf puede darse y cómo se comporta el estado asintótico una vez los parámetros cruzan sus fronteras de bifurcación.

En cuanto a la posición actual de los modelos KMG en la teoría económica, tal como señala Rosser Jr. en el prólogo de Chiarella et al. (2005), podría ser argumentado que estos constituyen una formulación “muy sofisticada” de ciertos elementos de autores post keynesianos, a pesar de que en sus artículos rara vez se cite a algún autor contemporáneo perteneciente a dicha corriente. Rosser Jr. comenta que autores claramente post keynesianos como Philip Arestis y Peter Skott han desarrollado recientemente esquemas similares en donde se combinan modelos financieros que tienen efectos sobre la actividad real y dinámicas de la distribución del ingreso, para generar ciclos endógenos – esto es, comparten las ideas de Goodwin y de Keynes que se encuentran reflejadas en los modelos KMG –, pero sin contar con el grado de formalismo matemático que haga comparables los dos aportes. Lo que sí es cierto es que si bien los esquemas KMG podrían ser catalogados como una aproximación post keynesiana “altamente sofisticada”, estos modelos parecen representar mucho mejor las ideas originales de Keynes de lo que lo hacen algunos esquemas neo keynesianos. Esta hipótesis se constata en la comparación del modelo que en esta tesis se utiliza con uno de los principales *benchmark* neo keynesianos, la representación de Woodford (2003), paralelo que se hace en la siguiente sección.

1.2. Formulación de un modelo macroeconómico de desequilibrio keynesiano y análisis de su estabilidad

En este apartado se formula y se analiza la estabilidad del modelo macroeconómico de desequilibrio escogido dentro de la tradición KMG para ser comprobado con datos de la economía colombiana. En primer lugar se expone la estructura del modelo, la cual, a pesar de su menor número de dimensiones respecto a la mayoría de esquemas KMG, es capaz de compartir los mismos comportamientos cualitativos que presentan representaciones más complejas. Esto facilita que, por medio de una estimación econométrica relativamente sencilla, se compruebe la presencia de las mismas propiedades dinámicas que ostentan esquemas de mayores dimensiones. En segundo lugar, se distinguen las propiedades del modelo elegido de las de los esquemas neo keynesianos representativos. En particular, se anota que a pesar de que el modelo seleccionado comparte algunos de los rasgos utilizados por las corrientes neo keynesianas,

como el empleo de dos curvas de Phillips de manera separada para las dinámicas de precios y de salarios, también existen notables diferencias, en particular la posibilidad de no vaciamiento tanto en el mercado laboral como en el de bienes y la formación de expectativas de manera híbrida con componentes tipo *myopic perfect foresight* y *backward-looking*, que evita el problema del “sign reversal” común de los modelos neo keynesianos. Por último, se realiza el análisis de estabilidad del modelo, examinando las cadenas de retroalimentación entre las variables del sistema, que, siguiendo la matriz del jacobiano del mismo, determinan el tipo de estabilidad de las soluciones del modelo. En particular, se pretende ilustrar que existe un estado estacionario que se comporta como un equilibrio asintóticamente estable para velocidades de ajuste pequeñas de las variables, pero que debido a la presencia de bifurcaciones de Hopf pierde su estabilidad asintótica y pasa a comportarse de forma cíclica cuando esos ajustes toman exactamente sus valores de bifurcación, y se vuelve inestable cuando dichas velocidades son mayores.

1.2.1. La estructura del modelo de desequilibrio

El modelo a ser discutido en esta tesis es un esquema semi-estructural y keynesiano de economía cerrada, cuya formulación se basa en la propuesta de desequilibrio planteada en Asada *et al* (2006). Como todo esquema keynesiano debería mostrar, el modelo emplea la sub-utilización tanto del trabajo como del capital como medio para describir las fluctuaciones en la demanda agregada. En este contexto, su principal característica es la formulación de las dinámicas de precios y salarios a través de dos curvas de Phillips separadas, tal como lo hacen algunos modelos neo keynesianos y los esquemas KMG, pero, a diferencia de los primeros, haciendo explícita la presión de demanda respectiva en cada mercado. Este aspecto, junto con el tratamiento de las expectativas, evita el problema del “sign-reversal” de los modelos neo keynesianos, que será expuesto en el siguiente apartado. Adicionalmente, tal como lo hacen los trabajos empíricos de Chen *et al* (2006), Franke *et al* (2006), Proaño *et al* (2006) y Asada *et al* (2007), el modelo está desprovisto del módulo metzleriano presente en la mayoría de esquemas KMG, en nuestro caso dada la dificultad de contar con series verídicas de inventarios del total del aparato productivo colombiano. Igualmente, como se hace en los mencionados trabajos empíricos, se reemplaza la ecuación de la LM por una regla de Taylor, siguiendo el espíritu de los denominados por Chiarella *et al* (2005) “modelos KMG-T” (la T por Taylor), ya que este tipo de reglas podrían reflejar de mejor manera la conducción de la política monetaria en los países donde el esquema de inflación objetivo se ha implantado, a pesar de que se haya hecho en un periodo relativamente reciente.

Comencemos la formulación del modelo con la especificación de las dinámicas de los mercados de bienes y laboral. Como ya se comentó, se utilizan dos curvas de Phillips para representar la evolución de los salarios nominales y los precios por separado. Esta idea fue propuesta inicialmente por Barro (1994) y utilizada en un trabajo empírico por primera vez en Fair (2000). Sin embargo, a diferencia del modelo que acá se presenta, en donde cada curva de Phillips contiene su respectiva presión de demanda, Fair estimó ambas curvas con la misma brecha, la del empleo.

Sean pues las presiones de demanda en el mercado laboral representadas por $V^l - \bar{V}^l$, donde V^l es la tasa de empleo en el mercado laboral (que haremos igual a 1 menos la tasa desempleo) y \bar{V}^l el nivel de empleo consistente con la NAIRU⁸ (esto es, 1 menos la NAIRU), mientras que las presiones de demanda en el mercado de bienes serán representadas por $V^c - \bar{V}^c$, donde V^c

⁸Tasa de desempleo que no acelera la inflación.

es la tasa de utilización de la capacidad instalada en el mercado de bienes y \bar{V}^c la NAICU⁹. Dichas presiones influyen en la evolución de las tasas de inflación de los salarios y precios, que denotaremos \hat{w} y \hat{p} respectivamente.

Cada una de las curvas de Phillips es ampliada para incluir las expectativas de inflación de los agentes de una manera híbrida (*myopic perfect foresight* y *backward looking*), de acuerdo a como cada grupo de agentes perciba las presiones de costos y la evolución de la inflación observada. Por un lado, para las firmas, las expectativas de inflación son un promedio ponderado del crecimiento de los salarios pagados, \hat{w} (componente *myopic perfect foresight*, que representa las presiones de costos percibidas por las firmas), y de la perspectiva de inflación en la economía en el mediano plazo, representada por una variable de “clima inflacionario” (π^m), que depende de la inflación antes observada (componente *backward looking*, que se define más adelante). De la misma manera, para los trabajadores, las expectativas de inflación son un promedio ponderado del crecimiento de los precios pagados, \hat{p} (componente *myopic perfect foresight*, que representa las presiones de costos percibidas por los trabajadores), y de la perspectiva de inflación en el mediano plazo, que también será representada por la misma variable de “clima inflacionario” (componente *backward looking*). Así las cosas, la forma estructural de las dos curvas de Phillips es:

$$\hat{w} = \beta_w(V^l - \bar{V}^l) + \kappa_w \hat{p} + (1 - \kappa_w) \pi^m \quad (1.1)$$

$$\hat{p} = \beta_p(V^c - \bar{V}^c) + \kappa_p \hat{w} + (1 - \kappa_p) \pi^m \quad (1.2)$$

En su forma reducida, estas ecuaciones estructurales corresponden a¹⁰:

$$\hat{w} = \kappa \left[\beta_w(V^l - \bar{V}^l) + \kappa_w \beta_p(V^c - \bar{V}^c) \right] + \pi^m \quad (1.3)$$

$$\hat{p} = \kappa \left[\beta_p(V^c - \bar{V}^c) + \kappa_p \beta_w(V^l - \bar{V}^l) \right] + \pi^m \quad (1.4)$$

Con $\kappa = 1/(1 - \kappa_w \kappa_p)$. En términos de Asada *et al* “... (estas formas reducidas) *representan una generalización considerable del punto de vista convencional en el que existe solo una curva de Phillips derivada de un único mercado y una sola medida de presión de demanda, la proveniente del mercado laboral*” (Asada *et al*, 2006 p.102). Estas curvas han sido estimadas para Estados Unidos de distintas maneras en Chen y Flaschel (2005) y Flaschel, Kauermann y Semmler (2005), lo que les proporciona sustento empírico. Adicionalmente, restando (1.4) de (1.3) se obtiene la ecuación que describe el comportamiento del salario real, cuya dinámica no depende de las expectativas de inflación en el mediano plazo o “clima inflacionario” (π^m):

$$\hat{w} = \kappa \left[\beta_w(1 - \kappa_p)(V^l - \bar{V}^l) + \beta_p(1 - \kappa_w)(V^c - \bar{V}^c) \right] \quad (1.5)$$

En cuanto a esta variable de “clima inflacionario”, que representa el componente *backward looking* de las expectativas de inflación de ambos grupos de agentes, puede ser modelada

⁹Tasa de utilización de la capacidad instalada que no acelera la inflación.

¹⁰Las formas reducidas se demuestran reescribiendo (1.1) y (1.2) como: $\hat{w} - \pi^m = \beta_w(V^l - \bar{V}^l) + \kappa_w(\hat{p} - \pi^m)$ $\hat{p} - \pi^m = \beta_p(V^c - \bar{V}^c) + \kappa_p(\hat{w} - \pi^m)$ Resolviendo las anteriores ecuaciones en términos de $\hat{w} - \pi^m$ y $\hat{p} - \pi^m$, se tiene: $\hat{w} = \beta_w(V^l - \bar{V}^l) + \kappa_w(\beta_p(V^c - \bar{V}^c) + \kappa_p(\hat{w} - \pi^m)) + \pi^m$ $\hat{p} = \beta_p(V^c - \bar{V}^c) + \kappa_p(\beta_w(V^l - \bar{V}^l) + \kappa_w(\hat{p} - \pi^m)) + \pi^m$ Despejando \hat{w} y \hat{p} en las anteriores ecuaciones, se tiene: $\hat{w}(1 - \kappa_w \kappa_p) = \beta_w(V^l - \bar{V}^l) + \kappa_w(\beta_p(V^c - \bar{V}^c)) + (1 - \kappa_w \kappa_p)\pi^m$ $\hat{p}(1 - \kappa_w \kappa_p) = \beta_p(V^c - \bar{V}^c) + \kappa_p(\beta_w(V^l - \bar{V}^l)) + (1 - \kappa_w \kappa_p)\pi^m$ Haciendo $\kappa = \frac{1}{1 - \kappa_w \kappa_p}$ las anteriores ecuaciones son (1.3) y (1.4).

bajo cualquier esquema adaptativo, siguiendo la tasa observada de inflación o un promedio ponderado entre la recién observada y las anteriores tasas. Por simplicidad en la exposición, en el análisis de estabilidad que se realiza en la parte teórica de esta tesis se hará uso de un mecanismo convencional de expectativas adaptativas, en donde el crecimiento de las expectativas de inflación de mediano plazo depende de la diferencia entre la inflación observada y la percepción actual del clima inflacionario, esto es:

$$\pi^m = \beta_{\pi^m}(\hat{p} - \pi^m) \quad (1.6)$$

Desde su forma estructural, las anteriores curvas de Phillips se pueden ampliar de dos maneras para recoger distintas particularidades del comportamiento de salarios y precios. En primer lugar, para que la evolución de precios y salarios presente el mecanismo de corrección propuesto por Blanchard y Katz (1999, p.71) que impide que la participación del salario en el producto ($v = wL/Y$)¹¹ diverja de cierto valor de equilibrio v_0 , hecho que tiene respaldo empírico y le proporciona un rol a la distribución del ingreso en las dinámicas de precios y salarios. Así, bajo este mecanismo de corrección, la tasa de crecimiento de los salarios responde de manera inversa a desviaciones positivas de la participación del salario en el producto respecto a su valor de equilibrio, mientras que la tasa de crecimiento de los precios responde de manera directa a dichas desviaciones. Y en segundo lugar, para que las dinámicas de precios y salarios tengan en cuenta la evolución de la productividad del trabajo ($\hat{z} = \hat{Y} - \hat{L}$), que afecta de manera positiva los salarios y de manera negativa a los precios, vía costos de producción. Las curvas de Phillips así ampliadas se pueden reescribir en su forma estructural como:

$$\hat{w} = \beta_w(V^l - \bar{V}^l) - \beta_{wv}(v - v_o) + \kappa_w\hat{p} + (1 - \kappa_w)\pi^m + \gamma_w\hat{z} \quad (1.7)$$

$$\hat{p} = \beta_p(V^c - \bar{V}^c) + \beta_{pv}(v - v_o) + \kappa_p\hat{w} + (1 - \kappa_p)\pi^m + \gamma_p\hat{z} \quad (1.8)$$

Estas ecuaciones estructurales corresponden a las formas reducidas¹²:

$$\hat{w} = \kappa \left[\beta_w(V^l - \bar{V}^l) - \beta_{wv}(v - v_o) + \kappa_w(\beta_p(V^c - \bar{V}^c) + \beta_{pv}(v - v_o)) + (\gamma_w - \kappa_w\gamma_p)\hat{z} \right] + \pi^m \quad (1.9)$$

$$\hat{p} = \kappa \left[\beta_p(V^c - \bar{V}^c) + \beta_{pv}(v - v_o) + \kappa_p(\beta_w(V^l - \bar{V}^l) + \beta_{wv}(v - v_o)) - (\gamma_p - \kappa_p\gamma_w)\hat{z} \right] + \pi^m \quad (1.10)$$

Curvas de Phillips que son análogas a las propuestas en Proaño et al (2006) pero que se diferencian de estas últimas por el tratamiento simétrico de la productividad, una innovación que se introduce en esta tesis y que hace más generales las dinámicas del salario real. A propósito de estas, restando (1.10) de (1.9) se obtiene una nueva ecuación que describe el comportamiento del salario real, cuya dinámica de nuevo no depende de las expectativas de inflación en el mediano plazo:

$$\hat{\omega} = \kappa \left[\begin{aligned} &(1 - \kappa_p)(\beta_w(V^l - \bar{V}^l) - \beta_{wv}(v - v_o)) - (1 - \kappa_w)(\beta_p(V^c - \bar{V}^c) + \beta_{pv}(v - v_o)) \\ &+ [(1 - \kappa_p)\gamma_w + (1 - \kappa_w)\gamma_p]\hat{z} \end{aligned} \right] \quad (1.11)$$

¹¹También pueden usarse indistintamente los costos laborales unitarios, ya que $\frac{wL}{Y} = \frac{w}{Y/L}$

¹²Las formas reducidas se hallan de la misma manera que en el caso de las ecuaciones (1.1) y (1.2)

Con esta ecuación para el crecimiento salario real, y dado que el crecimiento de la participación del salario en el producto ($v = wL/Y$) se puede descomponer en términos del crecimiento del salario real y del de la productividad ($\hat{v} = \hat{\omega} - \hat{z}$), la condición para que dicha participación no diverja de cierto valor de equilibrio, hecho que tiene sustento empírico, requiere que¹³:

$$\kappa[(1 - \kappa_p)\gamma_w + (1 - \kappa_w)\gamma_p] = 1 \quad (1.12)$$

Así las cosas, asumiendo que se cumple la condición (1.12), la evolución de la participación del salario en el producto viene dada por:

$$\hat{v} = \kappa \left[(1 - \kappa_p) (\beta_w (V^l - \bar{V}^l) - \beta_{vw} (v - v_o)) - (1 - \kappa_w) (\beta_p (V^c - \bar{V}^c) + \beta_{pv} (v - v_o)) \right] \quad (1.13)$$

De otro lado, el sector real será descrito por una IS dinámica convencional expresada en términos de la tasa de crecimiento de la utilización de la capacidad instalada, y una ley de Okun, que vincula el mercado de bienes con el laboral. La IS dinámica sigue el esquema propuesto en Rudebusch y Svensson (1999) y posee tres características importantes, a saber: i) refleja la dependencia negativa de los cambios en el producto al ingreso disponible (en este caso del crecimiento de la utilización de la capacidad instalada a su brecha), por lo que se asume un multiplicador negativo de la tasa de crecimiento de la utilización de la capacidad instalada respecto a sus desviaciones sobre la NAICU; ii) muestra que la demanda agregada depende del salario real (o de la participación del salario en el producto), pero no se determina a priori si de manera directa o inversa, puesto que crecimientos en el salario real o la participación del salario en el producto incentivan el consumo pero desincentivan la inversión; iii) muestra la influencia negativa de las desviaciones del tipo de interés real (que hacemos igual a $i - \hat{p}$), respecto a su nivel natural (que hacemos igual a $i_0 - \bar{\pi}$). Así las cosas la ecuación de la IS es:

$$\hat{V}^c = -\alpha_{V^c}(V^c - \bar{V}^c) \pm \alpha_v (\ln v - \ln v_0) - \alpha_r ((i - \hat{p}) - (i_0 - \bar{\pi})) \quad (1.14)$$

La ley de Okun, que vincula el mercado de bienes con el laboral, se expresa de una manera generalizada pero simple. La formulación manejada refleja que la política de empleo de las firmas sigue de manera directa su tasa de crecimiento contemporánea. De esta manera, una ley de Okun muy general se puede escribir en términos de las tasas de crecimiento de la ocupación y la actividad económica como¹⁴:

$$\hat{V}^l = \alpha_{V^l} \hat{V}^c \quad (1.15)$$

Por último, en vez de emplear una ecuación de la LM que determine la evolución de los saldos monetarios reales como lo hacen los primeros modelos KMG – véase Chiarella *et al* (2005) –, se reemplaza dicha relación por una ecuación de movimiento de la tasa de interés nominal, que siga de manera suave una tasa de interés de política fijada por el Banco Central de acuerdo a una regla de Taylor. Este tipo de reglas parecen describir de una manera más apropiada el comportamiento de la política monetaria inclusive en periodos en los que el esquema de inflación objetivo todavía no había sido implementado. Al respecto, Romer dice “*Incluso en Alemania, donde los objetivos monetarios se implantaron desde 1975, y donde dichas metas jugaron un rol principal en las discusiones oficiales de política, desde los 70 hasta los 90 la*

¹³Esta condición es introducida de manera directa en las ecuaciones estructurales de \hat{w} y \hat{p} en el trabajo de Proaño et al (2006).

¹⁴Cabe mencionar que la expresión señalada relaciona los niveles de las tasas mediante la ecuación $\frac{V^l}{\bar{V}^l} = \left(\frac{V^c}{\bar{V}^c}\right)^b$ al desarrollar las diferencias logarítmicas a cada lado de la expresión.

política monetaria ha sido mejor descrita por una regla de tasa de interés guiada por objetivos macroeconómicos que por un modelo de metas monetarias” (Romer, 2000, p.154-55). Así, en este tipo de esquemas la oferta monetaria se acomoda endógenamente a la tasa de interés de política perseguida por el Banco Central, que estará determinada por la siguiente regla de Taylor:

$$i^* = (i_0 - \bar{\pi}) + \hat{p} + \alpha_{ip} (\hat{p} - \bar{\pi}) + \alpha_{V^c} (V^c - \bar{V}^c) \quad (1.16)$$

La ecuación (1.16) expresa que la tasa de intervención de política del Banco Central está determinada por la tasa de interés natural, $i_0 - \bar{\pi}$, la evolución de la inflación observada y la respuesta del Banco Central ante las desviaciones de la brecha de inflación $\hat{p} - \bar{\pi}$ y del producto, esta última representada igual que antes por la desviación de la tasa de utilización de capacidad instalada respecto a la NAICU. El comportamiento de la tasa de interés de mercado se acomoda de una manera suavizada a la evolución de la tasa de interés de política:

$$\dot{i} = \alpha_{ii} (i^* - i) \quad (1.17)$$

Haciendo $\gamma_i = \alpha_{ii}$, $\gamma_{ip} = \alpha_{ii} (1 + \alpha_{ip})$ y $\gamma_{V^c} = \alpha_i \alpha_{V^c}$ e insertando la ecuación (1.17) en (1.16), la evolución de la tasa de interés de mercado se puede reescribir como:

$$\dot{i} = -\gamma_i (i - i_0) + \gamma_{ip} (\hat{p} - \bar{\pi}) + \gamma_{V^c} (V^c - \bar{V}^c) \quad (1.18)$$

En resumen, el modelo macroeconómico de desequilibrio de corte Keynesiano que se aquí se formula esta descrito en forma reducida por un sistema autónomo no lineal de 5 ecuaciones de comportamiento para las variables de estado v , V^c , i , π^m y V^l , que viene dado por las ecuaciones (1.13), (1.14), (1.18), (1.6) y (1.15), que aquí se ordenan respectivamente:

$$\hat{v} = \kappa \left[(1 - \kappa_p) (\beta_w (V^l - \bar{V}^l) - \beta_{wv} (v - v_o)) - (1 - \kappa_w) (\beta_p (V^c - \bar{V}^c) + \beta_{pv} (v - v_o)) \right] \quad (1.19)$$

$$\hat{V}^c = -\alpha_{V^c} (V^c - \bar{V}^c) \pm \alpha_v (v - v_o) - \alpha_r ((i - \hat{p}) - (i_0 - \bar{\pi})) \quad (1.20)$$

$$\dot{i} = -\gamma_i (i - i_0) + \gamma_{ip} (\hat{p} - \bar{\pi}) + \gamma_{V^c} (V^c - \bar{V}^c) \quad (1.21)$$

$$\pi^m = \beta_{\pi^m} (\hat{p} - \pi^m) \quad (1.22)$$

$$\hat{V}^l = \alpha_{V^l} \hat{V}^c \quad (1.23)$$

Este sistema de 5 variables queda determinado al reemplazar \hat{p} por su forma reducida, que viene dada por la ecuación (1.10). Asimismo, el sistema se puede reducir a uno de 4 dimensiones si de la regla de Okun, que vincula la tasa de crecimiento del empleo con el crecimiento de la utilización de la capacidad instalada, se despeja el nivel de la tasa de empleo, y se utiliza dicha expresión en la ecuación (1.19), para prescindir de la tasa de empleo como variable endógena del modelo, lo cual será empleado más adelante en el análisis de estabilidad del modelo.

1.2.2. Comparación con modelos neo keynesianos

La estructura del modelo planteado en el anterior apartado comparte algunos aspectos empleados por autores neo keynesianos en los últimos años. Por un lado, conviene mencionar el tratamiento de las expectativas de manera híbrida, aunque en el caso neo keynesiano reemplazando el componente *myopic perfect foresight* por uno *forward looking*, ya que se hace uso de expectativas racionales, y utilizando una sola curva de Phillips y una sola presión de demanda. De otro lado, comparte con algunos esquemas la modelación de dos curvas de Phillips de manera separada para las dinámicas de precios y de salarios, aunque cuando la corriente neo keynesiana lo hace trata la mayoría de las veces las expectativas de manera *forward looking* únicamente. Quizá el trabajo que compila de mejor manera los principales aportes neo keynesianos en la materia es Woodford (2003), el cual servirá de *benchmark* en la discusión que sigue.

En primer lugar, los aportes neo keynesianos más representativos de inicios de la presente década no contemplaban la posibilidad de estimar dos curvas de Phillips por separado, como en el caso de los trabajos de Galí y Gertler (1999) y Galí, Gertler y López-Salido (2001) entre otros. En estos estudios solo se considera la construcción micro fundamentada de una sola curva de Phillips (la de precios) con una sola presión de demanda, la proveniente del mercado de bienes. Sin embargo, en estos trabajos se reconoce la necesidad de introducir una modelación híbrida de las expectativas, dado que al considerar el mecanismo de fijación de precios a la Calvo clásico¹⁵ (que permite que la curva de Phillips incluya únicamente el término *forward looking* en el componente de expectativas, esto es, que \hat{p}_t dependa, además de la presión de demanda, solo de $E_t \hat{p}_{t+1}$), se encuentra que en la solución del modelo la inflación anticipa los movimientos de la brecha del producto, lo cual es incompatible a nivel empírico. Este resultado, resaltado en Fuhrer y Moore (1995), se debe a que en la solución del modelo, que es encontrada por medio de la técnica de expectativas racionales, la inflación presente equivale a la secuencia descontada de las brechas de producto futuras, lo que enturbia la relación de corto plazo entre el producto y la inflación.

El anterior problema lleva a los mencionados autores neo keynesianos a intentar modelar las expectativas de manera híbrida. Para conseguirlo, incorporan un mecanismo de fijación de precios a la Calvo extendido, que incluye entre la proporción de firmas que alteran su precio en cada periodo de tiempo cierto porcentaje que lo ajustan de manera *forward looking* y el restante porcentaje que lo hace de manera *backward looking*, siguiendo la inflación pasada. Este mecanismo les permite obtener una curva de Phillips híbrida, consiguiendo de esta manera paliar desde la teoría la crítica de Fuhrer y Moore.

Sin embargo, autores dentro de la misma corriente neo keynesiana señalan otro inconveniente de la formulación de dicha curva de Phillips híbrida: el tratamiento de una sola curva de Phillips considera únicamente la posibilidad de rigideces de precios, dejando de lado las posibles rigideces de salarios provenientes de fricciones en el mercado laboral. A pesar de que la estrategia utilizada permite representar de manera relativamente simple las dinámicas conjuntas del producto y la inflación sin necesidad de referirse al mercado laboral, este enfoque simplista deja de lado la observación de Keynes de que las rigideces de salarios pueden también explicar los efectos reales de la política monetaria. Por ejemplo, el estudio de Christiano et al. (1999) critica los modelos de mecanismos de transmisión de política monetaria con precios

¹⁵En la fijación de precios a la Calvo, se asume que en cualquier periodo cada firma tiene una probabilidad θ fija de ajustar su precio, y por ende tiene la probabilidad $1 - \theta$ de dejarlo inalterado. Cabe decir que θ es independiente al tiempo pasado desde la última revisión. Para más detalles véase Calvo (1983).

rígidos (pero salarios flexibles) diciendo que estos implican un descenso del salario real “muy agudo” en respuesta a un endurecimiento de la política monetaria, caída tan fuerte que los beneficios de los productores crecen a pesar de la contracción de sus ventas. Este resultado, que es contrario a la evidencia empírica, se debe a la no consideración de rigidices en los salarios nominales¹⁶.

Para evitar estos problemas Woodford (2003), siguiendo el esquema propuesto por Erceg et al (2000), plantea un modelo de fijación de salarios que es análogo al introducido por Calvo (1983) para la fijación de precios con el fin de derivar una curva de Phillips que dé cuenta de las rigidices de salarios. Esta nueva curva de Phillips, al ser tomada junto a las de los precios, deduce implícitamente la evolución del salario real. Las dos curvas de Phillips que presenta Woodford (2003, p.225), en versión discreta, para salarios y precios respectivamente son:

$$d\ln w_t = \kappa_w \left(\hat{Y}_t - \hat{Y}_t^n \right) + \xi_w (\ln \omega_t^n + \ln p_t - \ln w_t) + \beta E_t [d\ln w_{t+1}] \quad (1.24)$$

$$d\ln p_t = \kappa_p \left(\hat{Y}_t - \hat{Y}_t^n \right) + \xi_p (\ln w_t - \ln p_t - \ln \omega_t^n) + \beta E_t [d\ln p_{t+1}] \quad (1.25)$$

Donde \hat{Y}_t^n corresponde al producto potencial, y por ende $\hat{Y}_t - \hat{Y}_t^n$ a la brecha del producto, y ω_t^n al salario real natural y por tanto $\ln w_t - \ln p_t - \ln \omega_t^n$ a la brecha del salario real¹⁷. Todos los parámetros son positivos, de tal manera que los signos que los acompañan determinan el tipo de relación de cada variable con las inflaciones de precios y salarios. Cabe resaltar que se incluye la misma presión de demanda en ambas curvas, y solo se hace uso de expectativas forward-looking, producto de la utilización del mecanismo “clásico” (es decir, no extendido) de fijación de precios a la Calvo.

A pesar de que las ecuaciones (1.24) y (1.25) configuran una representación del comportamiento conjunto de precios y salarios ausente en el esquema de una sola curva de Phillips de Galí y Gertler (1999) y Galí, Gertler y López-Salido (2001), dicha representación posee una característica cuestionable, que Asada *et al* (2006) denominan como el problema del “*sign reversal*”. Esta dificultad consiste en que en al deducir las ecuaciones reducidas de (1.24) y (1.25) dichas expresiones resultan con signos opuestos a los esperados. Para constatar este problema, obsérvese que la forma determinística de (1.24) y (1.25) se puede expresar como:

$$d\ln w_{t+1} = \frac{1}{\beta} \left[d\ln w_t - \kappa_w \left(\hat{Y}_t - \hat{Y}_t^n \right) - \xi_w (\ln \omega_t^n + \ln p_t - \ln w_t) \right] \quad (1.26)$$

$$d\ln p_{t+1} = \frac{1}{\beta} \left[d\ln p_t - \kappa_p \left(\hat{Y}_t - \hat{Y}_t^n \right) - \xi_p (\ln w_t - \ln p_t - \ln \omega_t^n) \right] \quad (1.27)$$

Si se asume (sin mucha pérdida de generalidad) que el parámetro β no solamente es cercano a uno, sino que efectivamente es uno, (1.26) y (1.27) se pueden reescribir de la siguiente manera:

$$\dot{\pi}_t^w = -\kappa_w \left(\hat{Y}_t - \hat{Y}_t^n \right) - \xi_w (\ln \omega_t^n + \ln p_t - \ln w_t) \quad (1.28)$$

¹⁶ Cabe decir que Woodford (2003, p. 235) opina, sin embargo, que si el propósito es simplemente construir un modelo positivo para describir los comovimientos de la inflación y el producto y como estos pueden ser afectados por la política monetaria, las rigidices de salarios no importan mucho, puesto que lo único que hacen éstas es reducir la pendiente de la curva de Phillips de precios en el corto plazo, lo cual puede ser conseguido escogiendo valores distintos de los parámetros o simulando un choque de costos exógenos en el esquema de salarios flexibles.

¹⁷ Estas dos expresiones son análogas a los términos $V^c - \bar{V}^c$ (brecha de utilización de la capacidad instalada) y $v - v_o$ (desviación de la participación del salario real respecto a su nivel de equilibrio) utilizados en el modelo presentado en el anterior apartado.

$$\dot{\pi}_t^p = -\kappa_p \left(\hat{Y}_t - \hat{Y}_t^n \right) - \xi_p \left(\ln w_t - \ln p_t - \ln \omega_t^n \right) \quad (1.29)$$

Con $\pi_t^w = d \ln w_{t+1}$ y $\pi_t^p = d \ln p$. Las ecuaciones (1.28) y (1.29) muestran como la aceleración de la inflación se comporta, respecto a la brecha del producto y a la del salario real, de manera opuesta a la esperada. Este problema, en palabras de Asada *et al*, “. . . es causado por el hecho de que los valores futuros de las variables de estado consideradas (precios y salarios) son usadas en el lado derecho de las ecuaciones que las determinan, lo que implica que las tasas de cambio de esas variables dependen de las brechas de producto y salarios con el signo contrario” (Asada *et al* 2006, p.100). Para estos autores, el “sign reversal” resulta ser la causa del deficiente ajuste econométrico que dichas curvas exhiben en los trabajos de Mankiw (2001) y Eller y Gordon (2003).

Así las cosas, haciendo a un lado el hecho que en el modelo que esta tesis se plantea se consideran dos excesos de demanda en vez de uno (para distinguir las presiones de demanda provenientes del mercado de bienes de las que se originen el mercado laboral), otra diferencia importante entre la formulación de las curvas de Phillips que se realiza en esta tesis con la de Woodford (2003) resulta ser que en nuestro caso se evita el problema del “sign reversal”. Esto, porque las formas reducidas de dichas ecuaciones – expresiones (1.9) y (1.10) – mantienen los signos esperados, al no tener los valores futuros de las variables de estado consideradas en el lado derecho de las ecuaciones que las determinan, consecuencia de haber utilizado un componente *myopic perfect foresight* en vez de uno *forward looking*. Este hecho tiene importantes implicaciones para la estabilidad del modelo, a lo que se ocupa la siguiente sección.

1.2.3. Análisis de estabilidad del modelo de desequilibrio

En este apartado se ilustra un método para determinar el tipo de estabilidad de las soluciones del modelo siguiendo algunas consideraciones parciales sobre la matriz del jacobiano que caracteriza el sistema, que son hechas de acuerdo a las cadenas de retroalimentación presentes en las dinámicas de desequilibrio del modelo. Posteriormente se utiliza el teorema de Routh-Hurwitz, expuesto en la sección II.3 del apéndice, para determinar finalmente el tipo de estabilidad asintótica local del estado estacionario del modelo y cómo éste puede variar ante cambios en los parámetros. Así las cosas, a continuación se analizan en primera instancia los mecanismos de retroalimentación entre las variables que conforman el sistema.

En primer lugar, el modelo de desequilibrio expuesto preserva las ambiguas características de estabilidad que proporciona el canal de la tasa interés real. Por un lado, la tasa de interés real guiada por la regla de Taylor actúa de manera estabilizadora sobre los precios, puesto que ante presiones inflacionarias el Banco Central eleva la tasa nominal para incrementar la tasa real con el propósito de desestimular la demanda agregada y atenuar los brotes inflacionarios (y viceversa), y por tanto, los movimientos de la tasa de interés real aseguran la estabilidad de la inflación y están relacionados de manera directa con los movimientos de la inflación (relación que los autores de la familia de modelos KMG denominan “efecto Keynes”).

Pero, por otro lado, las presiones inflacionarias pueden elevar las expectativas de inflación ocasionando una disminución de la tasa de interés real y generando por ende una espiral inflacionaria, en la que los movimientos de la tasa de interés real estarían relacionados inversamente con movimientos de la inflación (relación que los autores de dichos modelos denominan “efecto Mundell”). Por supuesto, el efecto estabilizador Keynes es más fuerte en la medida que la política monetaria sea más agresiva, esto es, cuanto mayor sea el parámetro de la regla de

Taylor con el que responde la tasa de interés a desviaciones de la inflación de su nivel objetivo (parámetro α_{ip}), mientras que el efecto desestabilizador Mundell es más fuerte en la medida en que la variable de clima inflacionario, que representa las expectativas de inflación de los agentes, reaccione con mayor fuerza a cambios en la inflación presente.

En segundo lugar, la formulación del modelo con dos curvas de Phillips permite la existencia de otro posible mecanismo desestabilizador, por medio del canal de los salarios reales. Teniendo en cuenta que la inversión de las firmas depende del margen de rendimiento del capital y por ende inversamente de los salarios reales, mientras que el consumo de los hogares depende del ingreso disponible y por tanto de manera positiva de los salarios reales, se tiene un efecto ambiguo de los salarios reales sobre la demanda agregada (haciendo a un lado por ahora el rol estabilizador del mecanismo de corrección Blanchard-Katz). Por ende, el papel estabilizador o no de los salarios reales puede examinarse dependiendo de cual efecto prime sobre la demanda agregada.

En el caso en que el efecto de los salarios reales sobre la demanda agregada sea adverso (esto es, prima el efecto de la inversión en la demanda agregada), de la ecuación (1.5) se tiene que ante movimientos del salario real una mayor sensibilidad de los precios (representada por β_p) respecto a la de los salarios (representada por β_w) vuelve inestable el sistema, mientras que una mayor sensibilidad de los salarios respecto a la de los precios lo hará estable. Para ver por qué, considérese un aumento de los salarios reales: dado el supuesto de que deprimen la demanda agregada, los precios y los salarios caerán, pero si los precios son relativamente más sensibles éstos lo harán más rápido que los salarios, induciendo nuevos aumentos en el salario real, lo que volverá a deprimir la demanda agregada generando una espiral contraccionista. Estamos ante lo que llaman los autores de la familia de modelos KMG “efecto Rose adverso”, que, de manera análoga al “efecto Mundell” en el canal de tasa de interés real, desestabiliza al sistema. En cambio, si los salarios son más sensibles, ante un aumento de los salarios reales que deprima la demanda agregada y originen caídas en precios y salarios, las caídas relativamente más rápidas de los salarios generaran caídas del salario real, lo cual estimulará la demanda agregada y estabilizará a la economía. Aquí en cambio estamos ante un efecto “Rose normal”, que, de manera análoga al “efecto Keynes” en el canal de tasa de interés real, estabiliza al sistema.

En cambio, en el caso en que el efecto de los salarios reales sobre la demanda agregada sea positivo (esto es, prima el efecto del consumo en la demanda agregada), de la ecuación (1.5) se tiene ahora que una mayor sensibilidad de los salarios respecto a la de los precios vuelve inestable el sistema (efecto “Rose adverso”), mientras que una mayor sensibilidad de los precios respecto a la de los salarios lo hará estable (efecto “Rose normal”). La explicación es completamente análoga a la hecha en el primer caso. Así las cosas, se tienen cuatro escenarios de estabilidad vía el canal del salario real, dependiendo primero de la relación entre el salario real y la demanda agregada y segundo del grado de sensibilidad relativa entre precios y salarios.

Comentados los mecanismos de retroalimentación entre las variables del modelo y sus consecuencias sobre la estabilidad del sistema, procedamos a explorar la matriz del jacobiano del sistema resultante al introducir tanto la ecuación (1.23) en niveles como la forma reducida de \hat{p} dada por la ecuación (1.10) en el sistema de 4 dimensiones conformado por las ecuaciones (1.19) – (1.22). Los signos de la matriz del jacobiano de dicho sistema son:

$$\begin{pmatrix} - & \pm & 0 & 0 \\ \pm & \pm & - & + \\ \pm & + & - & + \\ \pm & + & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

Puesto que vienen determinados por los siguientes coeficientes:

$$\begin{pmatrix} -\kappa(1 - \kappa_p)\beta_{wv} - \kappa(1 - \kappa_w)\beta_{pv} & \kappa(1 - \kappa_p)\beta_w - \kappa(1 - \kappa_w)\beta_p & 0 & 0 \\ \pm\alpha_v + \alpha_i(\kappa\beta_{pv} - \kappa\kappa_p\beta_{wv}) & -\alpha_Vc + \alpha_i(\kappa\beta_p - \kappa\kappa_p\beta_w) & -\alpha_i & \alpha_i \\ \gamma_{ip}(\kappa\beta_{pv} - \kappa\kappa_p\beta_{wv}) & \gamma_{ip}(\kappa\beta_p - \kappa\kappa_p\beta_w) + \gamma_Vc & -\gamma_i & \gamma_{ip} \\ \beta_{\pi^m}(\kappa\beta_{pv} - \kappa\kappa_p\beta_{wv}) & \beta_{\pi^m}\gamma_{ip}(\kappa\beta_p - \kappa\kappa_p\beta_w) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

Obsérvese en primer lugar que a nivel teórico no es posible determinar el tipo de estabilidad de las soluciones del sistema, dados los signos indeterminados en varios elementos de la matriz del jacobiano. Sin embargo, si se puede realizar un análisis de estabilidad explotando las distintas dependencias lineales derivadas de los elementos repetidos que aparezcan en dos o más ecuaciones, con el fin de determinar las condiciones necesarias para la estabilidad local asintótica de la solución del modelo. En particular, se puede proceder a hacer consideraciones parciales sobre los mecanismos de retroalimentación ya comentados, con el fin de explorar el problema de la estabilidad en versiones simplificadas del modelo y posteriormente incorporar la incidencia de dichos encadenamientos en el modelo completo. Siguiendo esta metodología, se formulan, siguiendo a Proaño *et al* (2006), las siguientes proposiciones:

Proposición 1 *Suponga que el efecto del salario real sobre la demanda agregada es negativo¹⁸ y que los dos mecanismos desestabilizadores del modelo (“efecto Mundell” y “efecto Rose adverso”) están ausentes, al igual que el mecanismo de corrección de Blanchard-Katz. Entonces, para valores del parámetro α_i escogidos lo suficientemente pequeños, el modelo es asintóticamente estable.*

Para su demostración, obsérvese que los supuestos enunciados en la proposición hacen referencia a que se cumplan las siguientes condiciones sobre los parámetros, respectivamente:

1. $\alpha_v < 0$ y por tanto el elemento (2,1) de la matriz del jacobiano sea negativo.
2. $\beta_{\pi^m} = 0$, por lo cual se puede prescindir de la ecuación (1.22) y por tanto del “efecto Mundell”.
3. $(1 - \kappa_p)\beta_w > (1 - \kappa_w)\beta_p$, esto es, mayor sensibilidad de los salarios respecto a la de los precios, que dado el primer supuesto se vuelve una condición necesaria para garantizar un “efecto Rose normal”.
4. $\beta_{wv} = \beta_{pv} = 0$, con lo que se obvia el mecanismo de corrección de Blanchard-Katz.
5. $\alpha_i \rightarrow 0$ y por tanto en el elemento (2,2) de la matriz del jacobiano prima el signo de α_Vc volviendo el elemento negativo.

¹⁸O similarmente, que el efecto de la participación de la remuneración al trabajo en el total de la remuneración a los factores sobre el producto sea negativo. Este supuesto lo respalda la distinta evidencia empírica (v.g. Chen et al. (2006), Asada et al. (2007) y Proaño et al. (2006)) y se verifica en la estimación econométrica que se realiza en el siguiente capítulo con datos de la economía colombiana.

Así, la matriz del jacobiano de dicho sistema reducido (prescindiendo de la dinámica de π^m) tiene los siguientes signos:

$$\begin{pmatrix} 0 & + & 0 \\ - & - & - \\ 0 & + & - \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

De acuerdo con las condiciones del Teorema de Routh- Hurwitz, señaladas en la sección II.3 del apéndice, para que todos los valores propios tengan parte real negativa y por ende asegurar que el estado estacionario sea estable, se debe tener que los coeficientes del polinomio característico ($\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$) cumplan:

$$\alpha_2 > 0, \alpha_0 > 0, \alpha_2\alpha_1 - \alpha_0 > 0 \quad (1.33)$$

Dichos coeficientes se expresan a partir de la traza (tr), los menores principales de orden 2 (Pr_2) y el determinante (det) de la matriz del jacobiano (J), de la siguiente manera:

$$\alpha_0 = -det(J), \alpha_2 = -Tr(J), \alpha_1 = \Sigma Pr_2(J) \quad (1.34)$$

De acuerdo con los signos de la matriz del jacobiano analizado, tanto la traza como el determinantes son negativos (por ende $\alpha_2 > 0, \alpha_0 > 0$), mientras que la suma de los menores principales de orden 2 es positiva.¹⁹ Además, se tiene que $\alpha_2\alpha_1 - \alpha_0 > 0$ ²⁰ si el parámetro α_i es escogido lo suficientemente pequeño. Así, se demuestra la proposición.

En conclusión, la proposición 1 hace referencia a que, sin tener en cuenta todavía las características de estabilidad que proporciona el canal de la tasa interés real, si se asegura que el salario real juega un papel estabilizador en la economía (esto es, existe un “efecto Rose normal”), el estado estacionario del sistema es estable. En la siguiente proposición, se incorporan los efectos sobre la estabilidad del sistema del canal de la tasa de interés real.

Proposición 2 *Suponga ahora que el “efecto desestabilizador Mundell” es lo suficientemente pequeño, mientras que el “efecto estabilizador Keynes” es fuerte, lo que implica bajo la presencia de la Regla de Taylor una política monetaria activa. Manteniendo el efecto del salario real sobre la demanda agregada negativo, el “efecto Rose normal” y ausente el mecanismo de corrección de Blanchard-Katz, entonces el modelo es asintóticamente estable para valores del parámetro α_i escogidos lo suficientemente pequeños.*

Para su demostración, obsérvese que los supuestos enunciados en esta proposición hacen referencia a las mismas cuatro condiciones sobre los parámetros de la proposición 1 a excepción de la segunda, la cual se puede reemplazar por:

2. β_{π^m} es lo suficientemente pequeño y $\gamma_{ip} > 1$: El “efecto Mundell” es muy tenue y la tasa de interés de política responde de manera activa a desviaciones en la inflación²¹ (el “efecto Keynes” lo aplica la política monetaria de manera directa).

¹⁹La suma de los menores principales de orden 2 depende de los siguientes signos:

$$\begin{vmatrix} 0 & + \\ - & - \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & - \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} - & - \\ + & - \end{vmatrix} = (+) + 0 + (+) = +$$

²⁰Esto, porque teniendo en cuenta que $\alpha_i \rightarrow 0$, los coeficientes del polinomio característico dependen de los siguientes parámetros: $\alpha_0 = \gamma_i\psi, \alpha_1 = \psi + \gamma_i\alpha_u, \alpha_2 = \gamma_i + \alpha_u$ con $\psi = \alpha_v(\kappa(1 - \kappa_p)\beta_w - \kappa(1 - \kappa_w)\beta_p) > 0$. Por ende $\alpha_2\alpha_1 - \alpha_0 = \gamma_i^2\alpha_u + \alpha_u\psi + \alpha_u^2\gamma_i > 0$.

²¹Cabe recordar que $\gamma_{ip} = \alpha_{ii}(1 + \alpha_{ip})$, siendo α_{ip} el parámetro de la regla de Taylor que muestra cómo responde la autoridad monetaria a cambios en la inflación. Por ende, el hecho que $\gamma_{ip} > 1$ no implica que la autoridad sobre reaccione ante cambios en los precios, sino que $\alpha_{ip} > 0$, esto es, que la política está activa.

Dados los signos planteados para la matriz del jacobiano, las condiciones del Teorema de Routh-Hurwitz para un sistema de cuatro dimensiones también se verifican, lo cual se muestra en el Anexo A haciendo uso de las condiciones de Lienard-Chipart, con lo que queda demostrada la proposición.

En resumen, las dos proposiciones enunciadas se refieren a los ingredientes suficientes para asegurar la estabilidad del estado estacionario del modelo de desequilibrio, basados en las condiciones con las que los salarios reales y la tasa de interés real juegan un rol estabilizador de la economía. En particular, garantizando una mayor flexibilidad de los salarios respecto a los precios cuando el efecto del salario real sobre la demanda es negativo, y permitiendo que la política monetaria neutralice cualquier espiral inflacionaria que pueda originar el canal de las expectativas, las fuerzas estabilizadoras del modelo llevan a que su estado estacionario sea estable. Cabe comentar la posibilidad que existan otras situaciones inclusive más generales que puedan generar dinámicas igualmente convergentes, las cuales se dejan para ser exploradas mediante simulaciones numéricas dada la dificultad de detectarlas analíticamente.

Ahora bien, los parámetros que posibilitan la estabilidad del estado estacionario son β_{π^m} , β_p , β_w y γ_{ip} , los dos primeros al ser lo suficientemente pequeños y los dos últimos al estar activos. Si los parámetros β_{π^m} y β_p empiezan a hacerse más grandes, cruzan un valor a partir del cual las condiciones para la estabilidad del estado estacionario se empiezan a violar y este último se hace inestable. Suponga que $\beta_{\pi^m_0}$ y β_{p_0} son los valores para β_{π^m} y β_p a partir de los cuales el sistema se hace inestable. Para estos valores de los parámetros, denominados puntos de bifurcación, algunos de los valores propios del sistema (las raíces de la ecuación característica) dejan de tener partes reales negativas (caso estable) y en cambio exhiben partes reales iguales a cero (se interceptan con el eje imaginario), mientras que para valores de los parámetros posteriores al punto de bifurcación el estado estacionario se vuelve inestable. En particular, en el modelo contemplado se puede demostrar respecto a sus puntos de bifurcación que:

Proposición 3 *Existen al menos dos puntos de bifurcación (uno para β_{π^m} y otro para β_p) en los cuales un par de raíces de la ecuación característica son imaginarias puras, mientras que las otras dos tienen partes reales distintas a cero. Bajos esas condiciones dichos puntos configuran bifurcaciones de Hopf, que implican que el estado estacionario pierde su estabilidad asintótica y comienza a presentar ciclos.*

La demostración de la proposición se basa en el cumplimiento de los criterios sobre los coeficientes de la ecuación característica para que existan bifurcaciones de Hopf y se hace en el anexo A recurriendo al método de Liu (1994) expuesto en la sección II.3 del apéndice y a las condiciones específicas para sistemas de cuatro dimensiones demostradas en Asada y Yoshida (2003). De acuerdo con la parte de existencia del teorema de la bifurcación de Hopf²², para valores de los parámetros iguales al punto de bifurcación, el sistema tiene soluciones periódicas, las cuales pueden surgir a través de la desaparición de un ciclo inestable, el nacimiento de uno estable o inclusive otras posibilidades. Cabe resaltar que ni la proposición ni su demostración hacen referencia a que tipo de bifurcación de Hopf puede llegar a presentarse. Esta puede ser simple (las otras raíces que no cruzan el intercepto tienen partes reales menores que cero) o no simple (las otras raíces que no cruzan el intercepto tienen partes reales distintas a cero). Esta distinción, que es muy útil para caracterizar como es el comportamiento del estado asintótico

²²Para una exposición del teorema véase Gandolfo (1997, p.223)

luego de que los parámetros cruzan el punto de bifurcación, solo se puede verificar mediante una simulación numérica, como la que se hace en el siguiente capítulo acudiendo a datos de la economía colombiana.

En conclusión, estamos ante un modelo en el cual cambios en los parámetros modifican las propiedades de estabilidad del sistema. El cambio en las propiedades cualitativas del modelo se da de la siguiente manera: si el canal de los salarios reales y el de la tasa de interés real juegan un rol estabilizador de la economía, cabe esperar que el estado estacionario del modelo sea estable. Sin embargo, en la medida en que dichos canales se evidencien fuerzas desestabilizadoras, bien sea porque los precios se vuelven más flexibles respecto a los salarios originando ajustes explosivos del salario real o bien sea porque las expectativas de inflación se ajusten demasiado rápido a la inflación observada y presionen a la baja la tasa de interés real, el estado estacionario perderá su estabilidad asintótica en el momento en el que los parámetros desestabilizadores β_{π^m} y β_p crucen sus respectivos puntos de bifurcación. En ese preciso instante las variables del sistema mostrarán orbitas periódicas sin un atractor definido, y cuando los parámetros crucen las fronteras de bifurcación el estado asintótico se volverá inestable. Esto último no excluye la posibilidad de que la inestabilidad se manifieste a través del surgimiento de comportamientos caóticos, en particular mediante la aparición de un atractor extraño. A este respecto, la demostración analítica no es concluyente, por lo que se vuelve necesario recurrir a otro tipo de instrumento para determinar qué ocurre después de que los parámetros crucen sus fronteras de bifurcación. Por esto, en el siguiente capítulo se realiza una simulación numérica del modelo basada en la información de la economía colombiana para responder, entre otros, este interrogante.

Capítulo 2

Consistencia empírica del análisis de estabilidad

En este segundo capítulo se realiza la estimación econométrica del modelo teórico de desequilibrio Keynesiano propuesto en esta investigación, empleando información de la economía colombiana para el período 1981-2009, tal como lo han hecho Chen et al. (2006), Asada et al. (2007) y Proaño et al. (2006) para Estados Unidos, Reino Unido y la Zona Euro respectivamente. A partir de los resultados de dicha estimación, se realiza un ejercicio de simulación numérica que verifica si la evidencia empírica colombiana puede constatar las dinámicas cualitativas que sugiere el modelo analítico antes expuesto. Esta verificación, que no es recurrente en los trabajos empíricos mencionados, además de determinar si el análisis de estabilidad realizado al final del capítulo anterior se valida con la evidencia empírica, ayuda a establecer qué tipo de comportamiento presenta el estado estacionario del modelo cuando los parámetros cruzan sus fronteras de bifurcación y qué tipo de bifurcación de Hopf se puede presentar, descripción que no se puede realizar únicamente con el ejercicio analítico sobre la estabilidad del equilibrio antes señalado.

El capítulo está dividido en dos secciones. En la primera sección se presentan los datos de la economía colombiana que serán utilizados para la estimación econométrica y las pruebas de raíz unitaria de las mismas. En particular, se describe en detalle el proceso de construcción de las series que no se encontraban disponibles para el periodo de referencia así como las transformaciones que fueron realizadas sobre las series originales. En la segunda sección se muestran los resultados de la estimación econométrica de las ecuaciones del modelo mediante el método generalizado de momentos (GMM por sus siglas en inglés) y se comprueba la robustez de la estimación al confrontar estos resultados con los obtenidos mediante otro método de estimación y con los resultantes de las estimaciones econométricas realizadas para otros países. Asimismo se presenta la simulación numérica del modelo con base en los resultados de la estimación econométrica, y se señalan los exponentes de Lyapunov en función de los parámetros de bifurcación del modelo, con un objetivo triple. En primer lugar verificar si las propiedades cualitativas que el modelo propuesto exhibe a nivel teórico, expuestas en el anterior capítulo, tienen respaldo empírico en la información de la economía colombiana; en segundo lugar determinar el comportamiento que puede presentar el modelo cuando los parámetros crucen sus fronteras de bifurcación, señalando en particular si es posible que aparezcan atractores extraños que generen dinámicas caóticas; y en tercer lugar verificar qué tipo de bifurcación de Hopf se puede llegar a presentar. Por último, se realiza un ejercicio de suma importancia para los hacedores de política: analizar, con los instrumentos mencionados, la relevancia de la política monetaria como instrumento estabilizador de la economía.

2.1. Descripción de la información colombiana.

En esta sección se presentan las series de la economía colombiana que serán utilizadas para la estimación econométrica del modelo de desequilibrio propuesto en esta investigación. Al respecto, se debe anotar que ante la dificultad de contar con series del total nacional para un periodo de referencia amplio, se construyeron algunas de ellas utilizando distintas metodologías con base en varios indicadores disponibles. Por ello, en un primer apartado se detalla la construcción de las series que no se encontraban disponibles para el periodo de referencia así como las transformaciones que se efectuaron sobre las series originales. Posteriormente, en un segundo apartado, se muestran las pruebas de raíz unitaria de las series seleccionadas y se comentan sus resultados.

2.1.1. Recolección y tratamiento de las series de la economía colombiana.

Con el fin de contar con suficientes grados de libertad para la estimación econométrica de las ecuaciones del modelo en su forma reducida – sistema conformado por las ecuaciones (1.19) – (1.23) en tiempo discreto – se decidió recopilar las variables a utilizar en frecuencia trimestral¹, para el periodo más largo posible en el que se encontraran disponibles todas las series. Las variables relevantes para la estimación econométrica resultan ser ocho, de las cuales tres son estrictamente exógenas. Las cinco variables endógenas son las tasas de inflación trimestral de los salarios y de los precios ($dlnw_t$, $dlnp_t$), la tasa de empleo (V_t^l), la tasa de utilización de la capacidad instalada (V_t^c) y el tipo de interés nominal (i_t), mientras que las exógenas estrictas son la participación de la remuneración al factor trabajo en el producto (v_t), el crecimiento de la productividad del trabajo ($dlnz_t$) y la variable de clima inflacionario (π_t^m).

De estas ocho series, tres se encuentran disponibles para el total nacional sin necesidad de realizar ningún tipo de transformación: la tasa de interés nominal del mercado, que corresponde a la tasa de los CDT a 90 días publicada por la Superfinanciera; la tasa de utilización de la capacidad instalada (UCI) en la industria, que proviene de la Encuesta de Opinión Empresarial (EOE) de Fedesarrollo y que suele ser utilizada para los cálculos oficiales de la brecha del producto – al respecto, véase Rodríguez, Torres y Velasco (2006) o Torres (2007) – y finalmente la inflación trimestral de los precios calculada a partir de la diferencia logarítmica del IPC del DANE² (Gráfico 2.1) Dado que la UCI de Fedesarrollo solo está disponible desde el tercer trimestre de 1980, la estimación econométrica se realiza desde el primer trimestre de 1981 hasta el cuarto trimestre de 2009 (116 datos en total).

Para la obtención de las otras cinco series fue necesario realizar algunos cálculos para construir las mismas a partir de indicadores disponibles o aplicar sobre las series originales algunas transformaciones. Por ejemplo, para la variable de clima inflacionario, que refleja cómo evolucionan las expectativas adaptativas de inflación de mediano plazo, se empleó un promedio móvil de la variación de la inflación trimestral desestacionalizada observada, a partir de la diferencia logarítmica del IPC del DANE (Gráfico 2.2).

¹Algunas de las variables cuentan inclusive con frecuencia mensual, pero no todas son mensuales.

²Cabe anotar que en el periodo de referencia el DANE ha actualizado cuatro veces la canasta de referencia que conforma el IPC: en marzo de 1983, en diciembre de 1988, en diciembre de 1998 y en diciembre de 2008. La inflación trimestral corresponde a la variación trimestral de la serie del IPC total mensual con base diciembre de 2008 empalmada con los crecimientos mensuales de los IPC totales anteriores.

Gráfico 2.1. Tasa de interés de mercado (I), utilización de la capacidad instalada (U), inflación trimestral de los precios (P)

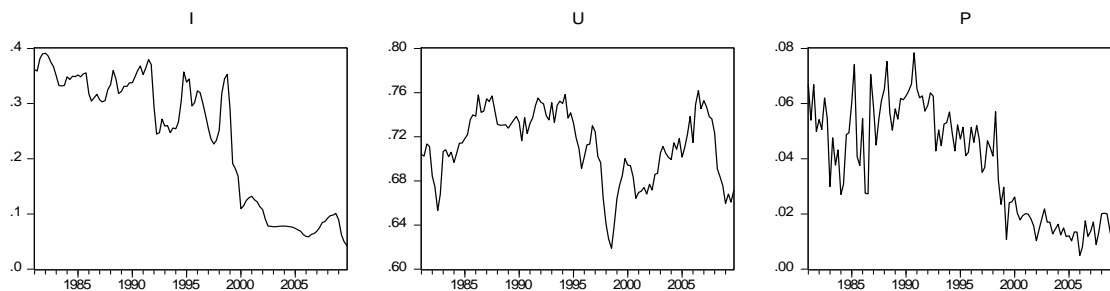
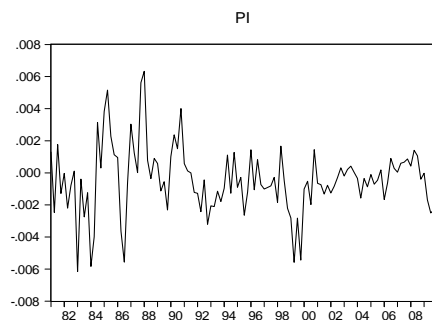


Gráfico 2.2. Aproximación a la variable de clima inflacionario (PI)



En el caso del crecimiento trimestral de la productividad del trabajo, era necesario contar con series del PIB real de la economía en conjunto y de los ocupados totales a nivel nacional que fueran consistentes a través del tiempo. Por el lado de la serie del PIB, como en el periodo de referencia las cuentas nacionales colombianas se encuentran disponibles con tres bases distintas (1975, 1994 y 2000), el PIB se construyó simplemente extrapolando hacia atrás la serie con base 2000 aplicando los crecimientos trimestrales de las bases anteriores. En cambio, por el lado de la serie de empleo, el problema radica en que las actualizaciones de las encuestas de hogares han cambiado definiciones importantes y han modificado su cubrimiento a través del tiempo: mientras que la ENH (1977-2000) solo cuenta con información para 4 y 7 ciudades, la ECH (2000-2006) y la GEIH (2006-act.) sí tienen información para el total nacional³.

Una primera solución para resolver el anterior inconveniente consistiría en empalmar la serie de ocupados del total nacional disponible desde 2000 con los crecimientos anteriores de los ocupados de 7 ciudades, como se hizo con el PIB. Sin embargo, además del distinto dominio en consideración, existe otra dificultad que hace inapropiado un empalme semejante de las series. Esta radica en que las definiciones de la fuerza de trabajo cambiaron de manera importante entre la ENH y la ECH. En particular, en lo que se refiere a los ocupados, la definición de trabajadores familiares sin remuneración se modificó, lo que, junto con el cambio en el sistema de recolección, afectó la estructura serial del agregado, alterando su nivel y su composición. Para solucionar este problema, se utilizó la serie de tasa de ocupación (TO) de 7 ciudades empalmada mediante un modelo logit en Arango, García y Posada (2006), que asegura las mismas definiciones de ocupados en ambos periodos. Para estimar los ocupados del total

³ENH: Encuesta Nacional de Hogares, ECH: Encuesta Continua de Hogares, GEIH: Gran Encuesta Integrada de Hogares; todas ellas efectuadas por el DANE. La ENH cuenta con información trimestral continua de 4 ciudades desde 1976 y de 7 ciudades desde 1984 (entre 1976 y 1984 existía información de 7 ciudades únicamente semestral).

nacional, la población en edad de trabajar (PET) nacional de la GEIH se extrapoló hacia atrás con la estimada en el censo de 2005, las cuales muestran dinámicas similares (Gráfico 2.3). Así, mediante la TO de Arango García y Posada (2006) se dedujo un nivel de ocupados para el total nacional, cuyo comportamiento es distinto al de la serie que se hubiera construido realizando un empalme únicamente con los crecimientos anuales de las series de ocupados anteriores (Gráfico 2.4).

Gráfico 2.3. Variación anual de la PET según CENSO y GEIH

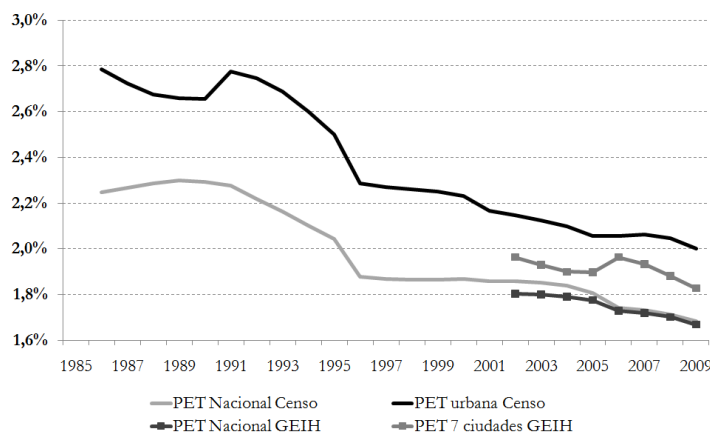
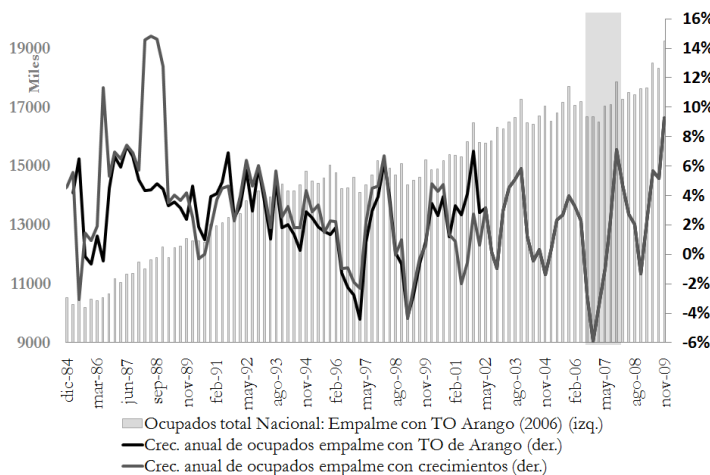


Gráfico 2.4. Ocupados total nacional: empalme empleando la tasa de ocupación de 7 ciudades derivada del modelo logit de Arango et al (2006)



Sin embargo, subsiste otro problema: la introducción de la GEIH a mediados de 2006 distorsionó, durante un año, el nivel de los ocupados, permitiendo que cayeran a tasas mayores a las de la crisis de 1999, a pesar de que la actividad económica se mantuvo en una fase expansiva (área sombreada en el Gráfico 2.4). Esta última distorsión fue provocada en parte por una recomposición temporal entre los empleados no asalariados (en especial cuenta propia) y los inactivos, que se corrigió luego de un año (Gráfico 2.5). Se propone entonces un método simple para limpiar la serie: una regresión lineal sobre los no asalariados con una variable dummy en el periodo en cuestión, para cuantificar la magnitud de la distorsión y corregir por dicha cantidad el empleo no asalariado (Gráfico 2.5) y luego, el del total de ocupados (Gráfico 2.6). Con esta última serie y la del PIB era posible deducir la productividad media del trabajo (Gráfico 2.7).

Gráfico 2.5. *Ocupados total nacional: asalariados y no asalariados*

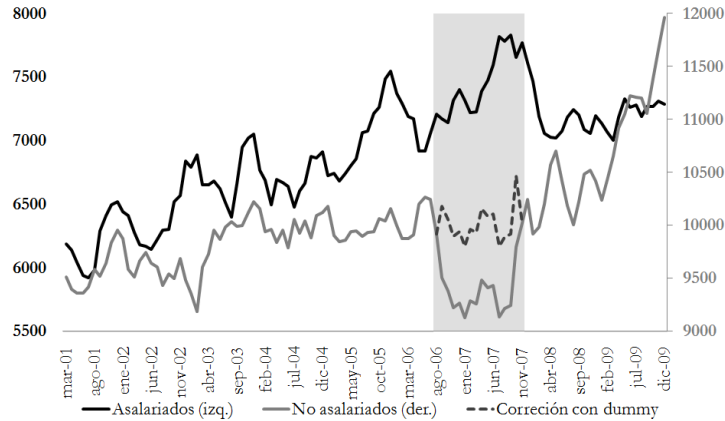


Gráfico 2.6. *Ocupados total nacional: empalme empleando la TO de 7 ciudades derivada del modelo logit de Arango et al (2006) y la corrección con dummy en 2006-2007*

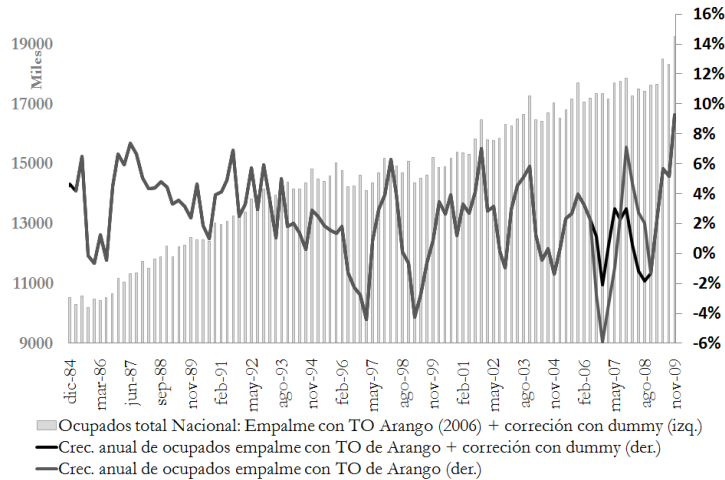
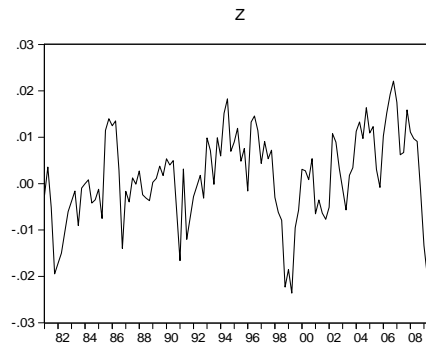


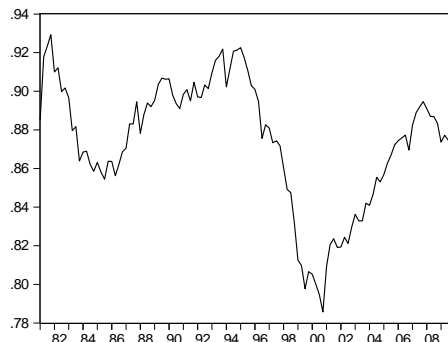
Gráfico 2.7. *Crecimiento trimestral de la productividad media del trabajo (Z)*



Para la tasa de empleo del total nacional, siguiendo los trabajos de Chen et al. (2006), Asada et al. (2007) y Proaño et al. (2006), se utilizó la expresión $[1 - \text{tasa de desempleo (TD) nacional}]$, en vez de hacer uso de la TO. De un lado, la justificación de utilizar la primera aproximación descansa en la posibilidad de incorporar el componente de oferta laboral en la explicación de las presiones sobre los salarios, que no lo tiene en cuenta el uso de la TO. De otro lado, también se tiene que la formulación original de la Ley de Okun se hizo en términos de la TD, por lo que resulta más coherente si dicha relación se estima con ésta última. Ahora bien, la

obtención de la TD nacional enfrenta los mismos problemas que se mencionaron a la hora de construir la serie de ocupados totales: el cambio entre ENH y ECH además de modificar el cubrimiento cambió las definiciones de ocupados y por tanto el nivel de la TD, mientras que la introducción de la GEIH distorsionó al alza la TD. Por consiguiente, se aplicaron en este caso similares soluciones: el uso de la TD estimada en Arango, García y Posada (2006) para extrapolar hacia atrás la serie disponible desde 2000 y la corrección de la serie por medio de una regresión con una dummy en el periodo 2006-2007. La serie resultante de tasa de empleo se muestra en el gráfico 2.8.

Gráfico 2.8. Tasa de empleo (E): $[1 - \text{tasa de desempleo (TD)}]$



Por último, las series de participación de la remuneración al factor trabajo en el producto y de salarios se construyeron como sigue. En primer lugar, se debe tener en cuenta que la remuneración al trabajo asalariado consistente con cuentas nacionales solo está disponible en las cuentas por sectores institucionales, que son anuales y que están calculadas a partir de tres bases distintas: 1975, 1994 y 2005⁴. Adicionalmente, cabe anotar que desde la base 1994 se introduce en cuentas nacionales el ingreso mixto, que agrega el excedente de explotación de las empresas no constituidas en sociedad, en las cuales trabajan los propietarios o familias sin percibir salario, por lo que incluye una parte de remuneración al factor trabajo. Para antes de 1994, este ingreso mixto aparecía sumado al excedente bruto de explotación.

El problema consiste entonces en asignar el ingreso mixto entre capital y trabajo a partir de 1994 para sumar, a la remuneración de los asalariados, la parte del ingreso mixto que le corresponda al factor trabajo, con el fin de obtener la participación total de la remuneración al factor trabajo en el producto desde 1994. Además, a partir de dicha distribución del ingreso mixto, se debe construir la serie de ingreso mixto que le corresponde al factor trabajo para antes de 1994, para que esta sea reasignada del excedente bruto de explotación a la remuneración a los asalariados y obtener de esta manera la participación total de la remuneración al factor trabajo en el producto para dicho periodo.

Para ello, en primer lugar se distribuyó el ingreso mixto entre remuneración a los asalariados y excedente bruto de explotación a partir de 1994 (donde existe la serie) de forma proporcional a la distribución de estos agregados en la suma de ambos. Este supuesto simplificador es confrontado en el trabajo de Zuleta *et al* (2009) con uno más sofisticado en donde se le asigna al ingreso mixto correspondiente al trabajo los ingresos totales de los trabajadores no asalariados, utilizando como proxy el crecimiento del salario mínimo para determinar la evolución de los

⁴En el momento en que se escribe esta tesis las cuentas anuales por sectores institucionales tienen información desde 1970 hasta 2007.

ingresos de este segmento de los ocupados, pero las diferencias no son significativas. En segundo lugar, se confrontó la remuneración de los asalariados desde 1970 (esto es, sin distribuir el ingreso mixto) con una serie de la masa salarial de los asalariados construida a partir de los salarios promedio de las Encuestas de Hogares multiplicada por los ocupados asalariados, y se constató que ambas series tenían comportamientos similares (Gráfico 2.9), por lo que dichos salarios podrían ser una buena proxy de los ingresos salariales de este segmento de los ocupados. Posteriormente, con la serie de ingreso mixto correspondiente al trabajo construida como se mencionó antes (para el periodo 1994-2007), se dedujo, con la serie de ocupados no asalariados, el salario implícito de esta fracción de la fuerza de trabajo. En promedio, desde 1994, el salario implícito de los no asalariados resulto ser el 73 % del salario promedio de los asalariados (Gráfico 2.10). Con este resultado, se construyó hacia atrás (para antes de 1994) la serie de ingreso mixto del factor trabajo, asumiendo que los no asalariados percibían un ingreso correspondiente al 73 % del de los asalariados y multiplicando dichos valores por el total de ocupados no asalariados. Obtenida de esta forma, esta serie fue reasignada del excedente bruto de explotación a la remuneración a los asalariados, para obtener la participación total anual de la remuneración al factor trabajo en el producto para el periodo 1981-2007.

Gráfico 2.9. Remuneración a los asalariados (RA) de cuentas nacionales y masa salarial (del trabajo asalariado) construida a partir de Encuestas de Hogares (EH)

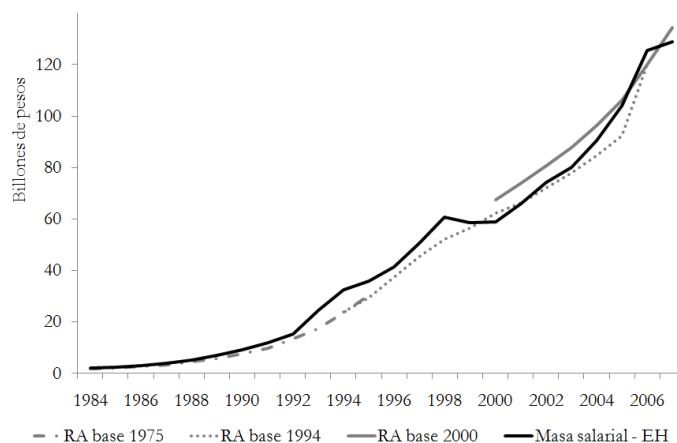


Gráfico 2.10. Salario implícito en el ingreso mixto como proporción del salario implícito en la remuneración a los asalariados



Por último, había que trimestralizar la serie anual construida. Para ello, se empleó el método de Chow y Lin (1971)⁵ que permite aumentar la frecuencia de una serie a partir de otra serie de referencia con la frecuencia requerida. La serie que se utilizó como referencia fue la masa salarial trimestral sobre PIB construida a partir de la serie de ocupados totales antes empleada, el PIB nominal de cuentas trimestrales y los salarios trimestralizados implícitos en cuentas nacionales. Para trimestralizar estos últimos se utilizó como serie de referencia los salarios industriales, cuyo comportamiento anual sigue de cerca el de los salarios implícitos en cuentas nacionales anuales (Gráfico 2.11), y que trimestralmente parecen ser más fiables que los salarios derivados de Encuesta de Hogares. El salario resultante de esta trimestralización se muestra en el Gráfico 2.12 y su inflación trimestral en el Gráfico 2.13. Esta serie trimestralizada de salarios permitió extrapolar para los años 2008 y 2009 la serie de remuneración al factor trabajo en el producto, para así tenerla para todo el periodo en estudio (Gráfico 2.13).

Gráfico 2.11. *Masa salarial de la Encuesta Anual Manufacturera (EAM) y remuneración al factor trabajo de Cuentas Nacionales*

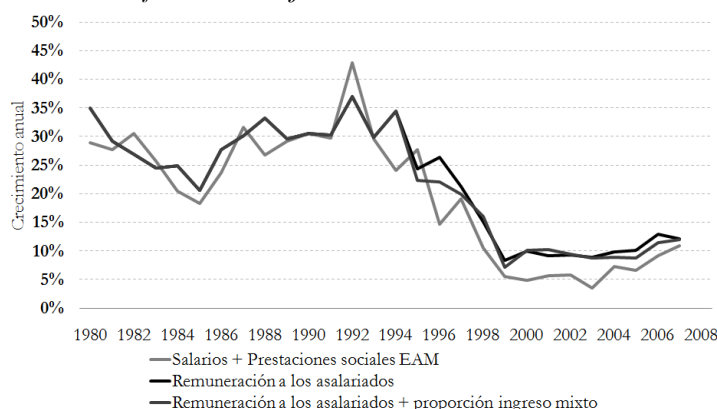
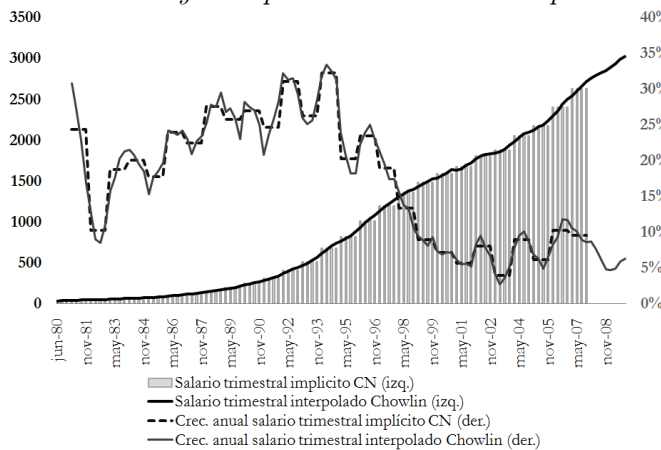
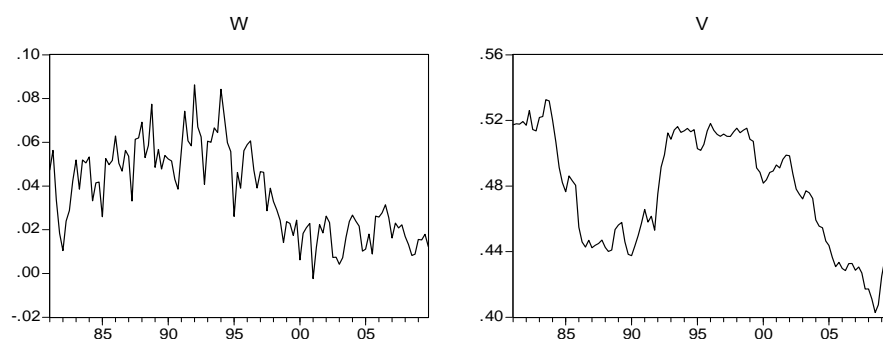


Gráfico 2.12. *Trimestralización y extrapolación del salario implícito en Cuentas Nacionales*



⁵Se siguió la rutina CHOWLIN.src en RATS.

Gráfico 2.13. *Inflación trimestral de los salarios (W), remuneración al factor trabajo en el producto (V).*



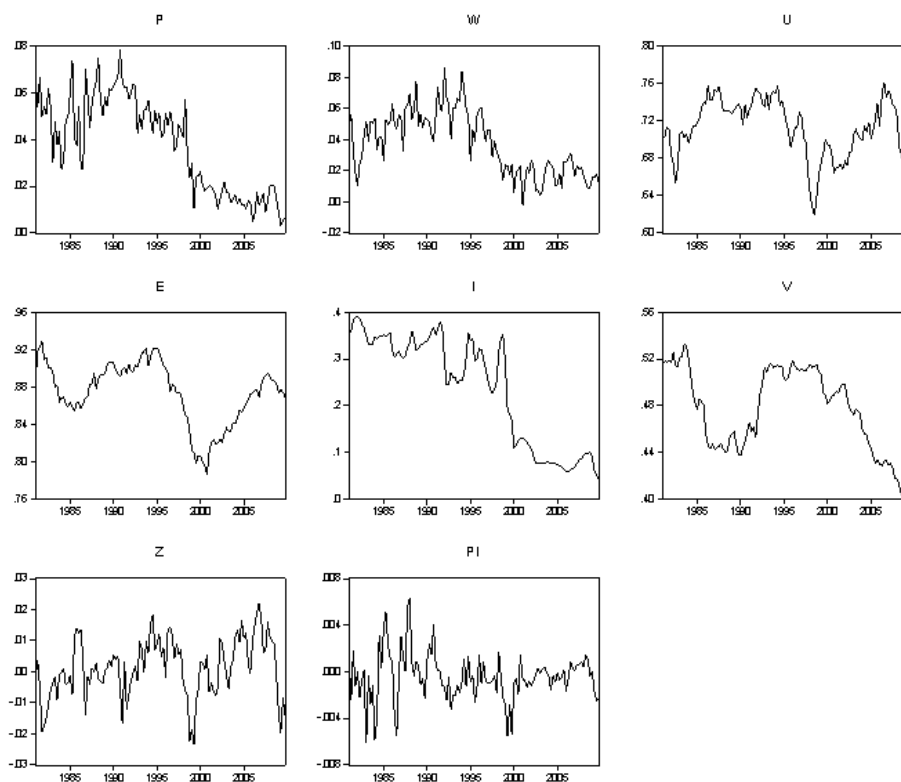
En síntesis, en el cuadro 2.1 se muestra un resumen de las series utilizadas, sus siglas (que serán utilizadas en la estimación econométrica) y sus fuentes, mientras que en el gráfico 2.14 se presentan las gráficas de cada una de las series del modelo, las cuales fueron desestacionalizadas previamente de acuerdo a los test de presencia de estacionalidad de X12⁶. Adicionalmente, en el Anexo B se encuentran los valores originales y finales de las series utilizadas para el periodo considerado, así como los cálculos intermedios más importantes.

Cuadro 2.1: *Descripción de los datos usados para la investigación empírica*

DESCRIPCIÓN DE LOS DATOS USADOS PARA LA INVESTIGACIÓN EMPÍRICA			
Variable	Sigla	Descripción	Fuente
$dlnw_t$	W	Tasa de inflación trimestral de los salarios nominales	Cálculos propios, a partir de salarios industriales (MMM DANE) consistentes con remuneración a los asalariados de Cuentas Nacionales (DANE)
$dlnp_t$	P	Tasa de inflación trimestral de los precios	IPC-DANE
V_t^l	E	Tasa de empleo (1 - Tasa de desempleo)	Cálculos propios, a partir de ENH-ECH-GEIH-DANE
V_t^c	U	Tasa de utilización de la capacidad instalada	Fedesarrollo
i_t	I	Tasa de interés de los CDT a 90 días	Superfinanciera
v_t	V	Participación de la remuneración al factor trabajo en el producto	Cálculos propios, a partir de remuneración a los asalariados e ingreso mixto de Cuentas Nacionales (DANE)
$dlnz_t$	Z	Crecimiento trimestral de la productividad	Cálculos propios, a partir de PIB y ocupados totales (DANE)
π_t	PI	Clima inflacionario	Cálculos propios, promedio móvil de orden 6 de la variación de la inflación trimestral desestacionalizada (IPC - DANE)

⁶La única serie que no presentó indicio de estacionalidad fue la tasa de interés de los CDT a 90 días.

Gráfico 2.14. *Series empleadas en la estimación del modelo econométrico*



2.1.2. Pruebas de raíz unitaria.

Se aplicaron pruebas de raíz unitaria a cada una de las cinco series endógenas que serán empleadas en la estimación econométrica del modelo (ver ecuaciones (2.1)-(2.5) más adelante). Se utilizaron pruebas de Phillips – Perron para tener en cuenta, además de la posible auto correlación de los residuales (como lo hace la prueba de Dickey-Fuller aumentada), problemas de heteroscedasticidad en éstos. Los resultados de dichas pruebas se muestran en el cuadro 2.2. De las salidas resultantes se podría afirmar que las series de las inflaciones trimestrales de los precios y de los salarios y la variación de la tasa de empleo no evidencian raíz unitaria⁷. Esto era de esperarse dado que dichas series se construyen a partir de las primeras diferencias de las originales en niveles; y en el caso de las dos primeras se da a pesar del persistente proceso desinflacionario durante la mayor parte del periodo estudiado, que bien le habrían podido originar a las series de precios y salarios en niveles órdenes de integración superiores a la unidad.

⁷Conviene mencionar que la prueba no parece concluyente para la serie de la inflación trimestral de precios, ya que el P-valor es ligeramente mayor al 5%, punto desde el que generalmente se empieza a aceptar la hipótesis nula (existencia de raíz unitaria). Adicionalmente, la serie de la inflación trimestral de precios presenta significativa la tendencia como componente determinístico, por lo que ésta debe ser extraída de la serie.

Cuadro 2.2. *Resultados de las pruebas de raíz unitaria Phillips-Perron a las variables endógenas del modelo econométrico*

RESULTADOS DE LAS PRUEBAS DE RAIZ UNITARIA PHILLIPS-PERRON A LAS VARIABLES ENDÓGENAS DEL MODELO ECONOMÉTRICO					
Variable	Sigla	Amplitud del kernel*	Comp. determinísticos	Estadístico	P-Valor
$dlnw_t$	W	1	constante	-2.817	0.0589
$dlnp_t$	P	4	constante y tendencia	-4.557	0.0019
\hat{V}_t^i	d(E)**	5	---	-3.909	0.0001
V_t^c	U	1	constante	-2.157	0.2232
i_t	I	7	---	-1.492	0.1264

*La estimación del espectro de residuales para la frecuencia cero se basó en el estimador kernel con función de Bartlett, y la amplitud del kernel se determinó de manera automática siguiendo el procedimiento de Newey-West, utilizando E-Views 6.0

**Se utiliza la diferencia anual de la tasa de empleo en la estimación de la Ley de Okun.

De otro lado, la prueba indica que hay evidencia para no descartar una raíz unitaria en las series de la tasas de utilización de la capacidad instalada y de interés nominal. Sin embargo, la intuición económica nos sugiere que estas series deben estar restringidas a un determinado rango de valores, esto es, no pueden crecer ni decrecer indefinidamente, por lo que no hay razón para esperar una raíz unitaria en su proceso generador de datos. Esto es especialmente cierto en el caso de la tasa de utilización de la capacidad instalada, cuya gráfica (Gráfico 2.1) parece mostrar una media constante en el tiempo y estar acotada en un intervalo dado⁸. Para Chen et al. (2006) y Proaño et al. (2006) estos resultados contradictorios de la pruebas de raíz unitaria pueden estar asociados a la baja potencia de las mismas, que podrían estar reflejando que los residuales exhibían una fuerte auto correlación.

2.2. Estimación econométrica y simulación numérica del modelo de desequilibrio

En esta sección se señalan y comentan los resultados de las estimaciones econométricas del modelo de desequilibrio propuesto empleando las series de la economía colombiana descritas y se hacen algunas pruebas y comparaciones que validan la robustez de las estimaciones. Posteriormente, con base en estos resultados, se realiza la simulación numérica del modelo, de la cual se extraen los exponentes de Lyapunov en función de los parámetros de bifurcación que en la teoría predice el modelo para constatar la validez del análisis de estabilidad propuesto en el anterior capítulo.

Respecto a la estimación econométrica vale la pena señalar que algunos autores advierten que si bien esta es una herramienta útil en la determinación del valor de los parámetros de un modelo de ecuaciones simultáneas, puede presentar debilidades debido, entre otras razones, a la escasez de datos, a la presencia de cambios estructurales y la existencia de

⁸Por el contrario, en el caso de la tasa de interés nominal, el gráfico muestra que ésta ha tendido a decrecer a lo largo el tiempo, hecho que indudablemente está atado al proceso desinflacionario vigente en el periodo de estudio. Sin embargo, esto no puede seguir observándose, ya que la tasa tenderá a mantenerse acotada en cierto intervalo numérico. Para fines de la estimación econométrica, se trabaja la serie sin su tendencia lineal.

problemas de identificación, y por tanto recomiendan hacer uso de otros métodos como la calibración (Coats *et al*, 2003, p.76) Sin embargo, puesto que el objetivo que se persigue en este capítulo es encontrar el soporte empírico del análisis analítico de estabilidad del modelo antes realizado, lo más importante en esta sección es conocer si los signos teóricos de los parámetros son coherentes con la evidencia empírica, más allá de estimar la magnitud exacta de dichas relaciones, por lo que la estimación econométrica resulta ser una herramienta valiosa para este propósito. Así las cosas, a continuación se estima econométricamente el modelo teórico para testear los signos de los parámetros estimados y como ejercicio guía para la simulación numérica del modelo, reconociendo y advirtiendo las limitaciones de este enfoque en lo que respecta a una determinación precisa del valor de los parámetros.

2.2.1. Estimación econométrica mediante el método generalizado de momentos (GMM)

El modelo de desequilibrio a estimar está conformado por las ecuaciones en tiempo continuo (1.19) – (1.23). En su forma estructural, dichas ecuaciones se pueden reescribir en tiempo discreto como:

$$\hat{w}_t = c_w + \beta_w V^l_{t-1} - \beta_{ww} v_{t-1} + \kappa_w \hat{w}_t + (1 - \kappa_w) \pi_t^m + \gamma_w \hat{z}_t + \varepsilon_{wt} \quad (2.1)$$

$$\hat{p}_t = c_p + \beta_p V^c_{t-1} + \beta_{pv} v_{t-1} + \kappa_p \hat{p}_t + (1 - \kappa_p) \pi_t^m - \gamma_p \hat{z}_t + \varepsilon_{pt} \quad (2.2)$$

$$V_t^c = c_{V^c} + \varphi_{V^c} V_{t-1}^c \pm \alpha_v v_{t-1} - \alpha_i (i_{t-1} - \hat{p}_{t-1}) + \varepsilon_{V^c t} \quad (2.3)$$

$$\hat{V}_t^l = \alpha_{V^l} \hat{V}_{t-1}^c + \varepsilon_{V^l t} \quad (2.4)$$

$$i_t = c_i + \varphi_i i_{t-1} + \gamma_{ip} \hat{p}_t + \gamma_{iV^c} V_{t-1}^c + \varepsilon_{it} \quad (2.5)$$

Con $\varphi_{V^c} = 1 - \alpha_{V^c}$ y $\varphi_i = 1 - \gamma_i$. Nótese que las dos primeras expresiones, las ecuaciones estructurales de la inflación de precios y de salarios, representan conjuntamente la ecuación de movimiento del salario real, dada por la ecuación (1.19). Obsérvese también que se ha obviado la ecuación del clima inflacionario, ya que se ha supuesto viene dada por el promedio móvil de las aceleraciones de la inflación pasadas como proxy para reflejar cómo evolucionan las expectativas adaptativas de inflación de mediano plazo. Adicionalmente se debe tener en cuenta que las constantes reúnen los valores de estado estacionario, que por facilidad se han supuesto constantes⁹.

Para tener en cuenta la posible endogeneidad entre los regresores, se estima el sistema de ecuaciones simultáneas mediante GMM con variables instrumentales. Los estimadores de GMM tienen la ventaja de que son, bajo homoscedasticidad, asintóticamente no menos eficientes que los de mínimos cuadrados ordinarios, pero bajo heteroscedasticidad, asintóticamente más eficientes que estos últimos (Wooldridge, 2001, p.90). En la estimación mediante GMM se utilizó como matriz ponderadora en la función objetivo la inversa de una matriz de covarianzas robusta ante problemas de heteroscedasticidad y autocorrelación (matriz HAC¹⁰) y se emplearon como instrumentos las variables estrictamente exógenas y rezagos de distinto

⁹Bajo ese supuesto, las constantes vienen dadas por: $c_w = -\beta_w \bar{V}^l + \beta_{ww} v_0$, $c_p = -\beta_p \bar{V}^c + \beta_{pv} v_0$, $c_{V^c} = -\alpha_{V^c} \bar{V}^c + \alpha_v v_0 + \alpha_i (i - \bar{\pi})$, $c_i = \gamma_i i_0 - \gamma_{ip} \bar{\pi} - \gamma_{V^c} \bar{V}^c$

¹⁰Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistence Covariance Matrix. Para su estimación, se utilizó un Kernel dado por la formula de Bartlett y la amplitud del kernel se determinó de manera automática siguiendo el procedimiento de Newey-West.

orden de las variables exógenas a cada ecuación, como es usual en la literatura. Los principales resultados de la estimación econométrica se muestran en el cuadro 2.3¹¹, y las salidas completas así como algunas pruebas de diagnóstico sobre los residuales en el Anexo C. De estos resultados se desprenden varios comentarios para resaltar.

Cuadro 2.3

RESULTADOS DE LA ESTIMACIÓN ECONOMÉTRICA MEDIANTE GMM									
Muestra: 1982Q1 2009Q4		Observaciones incluidas: 111						Observaciones del sistema totales (no balanceadas): 545	
Identity matrix estimation weights - 2SLS coefs with GMM standard errors									
Kernel: Bartlett, Bandwidth: Fixed (6), Prewhitening									
\hat{W}_t	c_w	β_w	β_{ww}	κ_w	γ_w	R cuadrado	Estad. D-W		
Coef	-0.109	0.137	--	0.726	--	0.629	1.18		
[Desv. Est.]	[0.045]	[0.054]		[0.098]					
(P-value)	(0.015)	(0.012)		(0.000)					
\hat{P}_t	c_p	β_p	β_{pv}	κ_p	γ_p	R cuadrado	Estad. D-W		
Coef	--	0.009	--	0.832	-0.405	0.628	1.13		
[Desv. Est.]		[0.005]		[0.076]	[0.200]				
(P-value)		(0.079)		(0.000)	(0.043)				
V_t^c	c_{v^c}	φ_{v^c}	α_v	α_i		R cuadrado	Estad. D-W		
Coef	0.072	0.897	-0.133	-0.369		0.809	1.79		
[Desv. Est.]	[0.026]	[0.036]	[0.070]	[0.170]					
(P-value)	(0.005)	(0.000)	(0.051)	[0.035]					
\hat{V}_t^i	α_{v^i}					R cuadrado	Estad. D-W		
Coef	0.094					0.594	2.30		
[Desv. Est.]	[0.027]								
(P-value)	(0.005)								
i_t	c_i	φ_i	γ_{ip}	γ_{iv^c}		R cuadrado	Estad. D-W		
Coef	--	0.863	0.250	--		0.838	1.24		
[Desv. Est.]		[0.055]	[0.138]						
(P-value)		(0.000)	(0.055)						

Determinante de la matriz de covarianzas de los residuales: 5.27 E-20

Estadístico J: 1.23E -06

En términos generales, el aspecto más sobresaliente de la estimación es que todos los parámetros que resultaron significativos (los señalados en el cuadro 2.3) tienen el signo esperado por el modelo teórico. En principio, esto debería garantizar la consistencia empírica del análisis de estabilidad propuesto en el anterior capítulo, a menos que los parámetros que no resultaron significativos sean indispensables para las dinámicas del modelo. Por otro lado, el valor del estadístico J del sistema indica que se satisfacen las restricciones de sobreidentificación impuestas a las ecuaciones del modelo, esto es, asegura la validez de la exogeneidad de los instrumentos utilizados¹², mientras que el valor del determinante de la matriz de covarianzas de los residuales sugiere que los estimadores son eficientes¹³.

Respecto a los valores de los parámetros estimados que condicionan la estabilidad del modelo vale la pena mencionar dos puntos. En primer lugar, los valores encontrados para los coeficientes que miden el grado de ajuste de los precios y salarios a sus respectivas presiones de

¹¹En el cuadro se muestran los valores estimados de los parámetros que permanecieron luego de omitir los que en una primera corrida con todas las variables del modelo resultaban no significativos.

¹²Bajo la hipótesis nula del cumplimiento de las restricciones de sobreidentificación, el estadístico J por las observaciones de cada regresión se distribuye χ^2 con grados de libertad igual al número de instrumentos.

¹³Respecto a los estadísticos DW, si bien en las dos primeras ecuaciones podría haber indicios de autocorrelación de primer orden, dichas ecuaciones podrían ser estimadas con rezagos de las variables endógenas, lo cual no afecta los signos de los coeficientes de interés, pero si modifica la estructura del sistema estimado.

demanda confirman una mayor sensibilidad de los salarios respecto a la de los precios, esto es, $(1 - \kappa_p) \beta_w > (1 - \kappa_w) \beta_p$, condición necesaria para que no se presenten espirales explosivas en el ajuste del salario real cuando la demanda agregada responde de manera negativa a variaciones en éste ($\alpha_v < 0$). Esto descartaría la presencia de un efecto Rose adverso y garantizaría que el canal del salario real cumpla un papel estabilizador sobre las dinámicas del modelo. En segundo lugar, se encuentra evidencia de que la tasa de interés nominal parece responder de manera no despreciable a la inflación pasada. Esto sugiere que en el periodo considerado la tasa de interés nominal posiblemente ha jugado un rol estabilizador en el control de la inflación, a pesar de que como instrumento de política solo se haya utilizado en la última década. Sin embargo, se debe advertir que con la estimación econométrica no es posible determinar si el papel estabilizador de la tasa de interés nominal fue suficiente para compensar el canal explosivo que podría originar un rápido ajuste en las expectativas de inflación de los individuos respecto a las inflaciones observadas, puesto que no se está cuantificando este grado de ajuste. Solo los exponentes de Lyapunov en la simulación numérica del modelo podrán determinar para qué valores de este último ajuste la respuesta encontrada de la tasa de interés nominal a la inflación pasada alcanza a asegurar la estabilidad del canal de la tasa de interés real.

De otro lado, caben dos anotaciones acerca de los parámetros que no resultaron significativos. En primer lugar, tanto en la ecuación de precios como en la de salarios resultó no significativo el componente de corrección de Blanchard-Katz, esto es, no parece haber evidencia de que las dinámicas de los precios y salarios respondan a las desviaciones de la participación del salario en el producto respecto a su valor de estado estacionario. Esto puede sugerir o bien que dicha participación no converge a un valor de equilibrio (en el periodo considerado por lo menos), lo cual puede tener algún asidero de acuerdo al gráfico 2.13, o bien de que si sí lo hace dicho proceso no está relacionado con las dinámicas de corto plazo de salarios y precios, lo cual también es probable. En principio, la ausencia del mecanismo de corrección de Blanchard-Katz no altera las cadenas de retroalimentación presentes en el modelo¹⁴ (canales de tasa de interés real y de salario real), y por tanto el análisis de estabilidad seguiría siendo válido. De otra parte, las correcciones por productividad en los precios y salarios sólo funcionaron para el caso de los precios. Al igual que con el mecanismo de Blanchard-Katz, se debe decir que dicha corrección no altera las principales cadenas de retroalimentación, al ser la productividad una variable estrictamente exógena del sistema, por lo que el análisis de estabilidad seguiría siendo válido.

En segundo lugar, la tasa de interés nominal no parece responder a la utilización de la capacidad instalada. Se debe recordar que el modelo plantea esta relación bajo el supuesto de que la autoridad monetaria ajusta la tasa de interés de intervención de acuerdo a una regla de política en la que dicha tasa responde tanto a las desviaciones de la inflación de su meta como a las desviaciones de la tasa de utilización de la capacidad instalada de su nivel potencial. Sin embargo, el problema con el periodo considerado es que la tasa de interés no ha sido siempre el instrumento, y por tanto la regla de política, que pareció funcionar respecto a la inflación observada, no aplicaría para todo el periodo considerado. Una solución consistió en estimar el sistema únicamente para el periodo desde donde comenzó a operar la tasa de interés como instrumento de política (desde 2000) aún con la pérdida de grados de libertad que esto implica, pero el coeficiente, aunque con el signo esperado, sigue siendo no significativo al 5%. Así las cosas, se podría concluir que existe evidencia de que la autoridad monetaria ha respondido con celeridad a los cambios manifiestos en los precios pero que ha sido miope ante presiones

¹⁴Inclusive, en las tres proposiciones que sustentan el análisis de estabilidad propuesto en el capítulo 2, se obviaba la presencia del mecanismo de Blanchard-Katz.

alcistas o bajistas de demanda. A pesar de esto, nótese que, en el análisis de estabilidad, el rol estabilizador de la política monetaria lo brinda la respuesta de política a la inflación observada, que es la que resulta significativa, mientras que la respuesta a las presiones de demanda juega un papel pasivo en la demostración. Solo la simulación numérica del modelo podrá determinar si la ausencia de la respuesta de política monetaria frente a presiones de demanda desfigura el análisis de la estabilidad del estado estacionario propuesto anteriormente.

En síntesis, aunque todos los parámetros que resultaron significativos tienen el signo esperado, hecho que le brinda al modelo teórico propuesto un respaldo empírico valioso, todavía queda por conocer si del conjunto de valores encontrado se desprenden los cambios esperados en los exponentes de Lyapunov al variar los parámetros de bifurcación que predice el análisis de estabilidad realizado, comprobación que se hace más adelante mediante una simulación numérica a partir de los coeficientes estimados. Esto servirá además para verificar si es posible la aparición de atractores extraños luego de que los parámetros crucen las fronteras de bifurcación y esclarecer el tipo de bifurcación de Hopf resultante. Antes de ello, el siguiente apartado muestra cuán robustos son los parámetros estimados al usar otro método de estimación y cuánto se asemejan a los encontrados en otros trabajos empíricos para modelos KMG.

2.2.2. Robustez de la estimación econométrica mediante GMM

Para probar la robustez de la estimación realizada por GMM se contrastan los resultados obtenidos mediante dicha metodología con los deducidos con el método de mínimos cuadrados ordinarios en tres etapas (3OLS), empleando las mismas variables instrumentales. Los valores estimados utilizando 3OLS se señalan en el cuadro 2.4.

Cuadro 2.4

RESULTADOS DE LA ESTIMACIÓN ECONOMÉTRICA MEDIANTE 3OLS

Muestra: 1982Q1 2009Q4
 Observaciones incluidas: 111 Observaciones del sistema totales (no balanceadas): 545
 Identity matrix estimation weights - 2SLS coefs with GMM standard errors
 Kernel: Bartlett, Bandwidth: Fixed (6), Prewhitening

\hat{w}_τ	c_w	β_w	β_{ww}	κ_w	γ_w	R cuadrado	Estad. D-W
Coef	-0.095	0.114	--	0.850	--	0.600	1.19
[Desv. Est.]	[0.030]	[0.037]		[0.074]			
(P-value)	(0.002)	(0.002)		(0.000)			

\hat{p}_τ	c_p	β_p	β_{pv}	κ_p	γ_p	R cuadrado	Estad. D-W
Coef	--	0.008	--	0.845	-0.369	0.626	1.13
[Desv. Est.]		[0.004]		[0.070]	[0.125]		
(P-value)		(0.042)		(0.000)	(0.003)		

V_τ^c	c_{v^c}	φ_{v^c}	α_v	α_i	R cuadrado	Estad. D-W
Coef	0.072	0.898	-0.116	-0.382	0.806	1.79
[Desv. Est.]	[0.030]	[0.042]	[0.087]	[0.015]		
(P-value)	(0.017)	(0.000)	(0.018)	(0.015)		

\hat{V}_τ^i	α_{v^i}	R cuadrado	Estad. D-W
Coef	0.094	0.591	2.30
[Desv. Est.]	[0.038]		
(P-value)	(0.015)		

\hat{i}_τ	c_i	φ_i	γ_{ip}	γ_{iv^c}	R cuadrado	Estad. D-W
Coef	--	0.868	0.204	--	0.838	1.23
[Desv. Est.]		[0.020]	[0.114]			
(P-value)		(0.000)	(0.074)			

Determinante de la matriz de covarianzas de los residuales: 3.48 E-20

nota con el relativamente importante coeficiente κ_w , que es el segundo en magnitud) como la tasa de interés nominal a los ajustes de precios pasados, al ser requerido un mayor esfuerzo de política monetaria.

2.2.3. Simulación numérica, cálculo de exponentes de Lyapunov y resultados de estabilidad

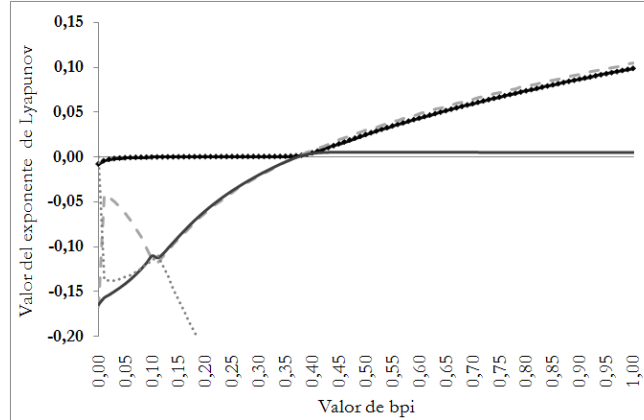
A partir de la estimación econométrica realizada en el anterior numeral, en este último apartado se exponen los resultados de la simulación numérica del modelo cuyo propósito es el de determinar el espectro de exponentes de Lyapunov del sistema en función de los parámetros de bifurcación que predice el análisis de estabilidad (para una descripción detallada del significado y uso de los exponentes de Lyapunov véase la sección II.3 del apéndice). Dichos exponentes permitirán verificar la posibilidad de que aparezcan bifurcaciones de Hopf al variar los parámetros que predice el modelo y determinar cuál es el comportamiento cualitativo que presenta el estado asintótico una vez los parámetros crucen sus fronteras de bifurcación. Asimismo, se analiza el espectro de exponentes en función del parámetro que mide cómo responde la tasa de interés nominal a cambios en la inflación observada, para revisar la relevancia de la política monetaria como instrumento estabilizador de la economía, a manera de ejemplo de aplicación del análisis de estabilidad aquí realizado.

En primer lugar debe recordarse que tanto la exposición de las cadenas de retroalimentación entre las variables del modelo como la demostración analítica realizada señalaron la existencia de dos potenciales fuentes de desestabilización en el modelo, las cuales operan por medio de los canales de tasa de interés real y de salario real y que llevan a que dos parámetros del modelo (β_{π^m} y β_p respectivamente) puedan generar bifurcaciones de Hopf. Para evaluar el potencial canal desestabilizador de la tasa de interés real (vía “efecto Mundell”), el Gráfico 2.15 muestra los exponentes de Lyapunov¹⁵ en función del parámetro que mide la sensibilidad de las expectativas de inflación (variable de clima inflacionario) a la inflación pasada (β_{π^m} , bpi en la gráfica), utilizando para los demás parámetros los valores estimados econométricamente con base en la información colombiana. En dicho gráfico se observa que para un valor de β_{π^m} entre 0.3 y 0.4 aparece una bifurcación: dos exponentes de Lyapunov, que para guarismos de β_{π^m} menores al valor de bifurcación eran cero y negativo, se vuelven positivos, mientras que otro, que al lado izquierdo del punto de bifurcación era negativo, se queda en un valor aproximadamente igual a cero.

En las anteriores consideraciones, se debe tener en cuenta que es difícil diferenciar numéricamente un exponente que toma un valor muy cercano a cero de uno que es cero ya que no hay un test estadístico que haga distinguibles un par de exponentes con dichas características. Aunque Sprott (2010, p. 23) propone que si el valor absoluto del exponente cercano a cero es mayor a 0.001 se puede decir que éste es diferente a cero, acá se considera que dada la importante incertidumbre sobre los valores del conjunto de parámetros utilizado esta condición debe ser mucho más rígida, por lo que valores absolutos menores a 0.01 son en la práctica iguales a cero. Hecha esta advertencia, el cuadro 2.6 muestra los valores del espectro de exponentes de Lyapunov entre 0.3 y 0.5 que reafirman lo comentado.

¹⁵Para el cálculo de los exponentes de Lyapunov en función de los parámetros, se modificó el programa Lyapunov.m del toolbox MATDS provisto por Vasiliy Govorukhin que genera una gráfica de los exponentes de Lyapunov respecto al tiempo, basándose en el algoritmo de Wolf et al (1985). La modificación consistió en promediar el valor de los exponentes de Lyapunov entre el periodo $T = 100$ al periodo $T = 200$ (cuando ya se han estabilizado) para el conjunto de parámetros de la economía colombiana, guardar dichos valores e iterar el ejercicio variando el parámetro deseado para generar las gráficas que se presentan.

Gráfico 2.15. Exponentes de Lyapunov en función del parámetro β_{π^m}



Cuadro 2.6
EXONENTES DE LYAPUNOV EN FUNCION DE β_{π^m}

bpi	Exponentes de Lyapunov			
0.30	0.00032	-0.02086	-0.01975	-0.29945
0.31	0.00034	-0.01759	-0.01661	-0.30588
0.32	0.00036	-0.01442	-0.01359	-0.31209
0.33	0.00039	-0.01136	-0.01067	-0.31811
0.34	0.00044	-0.00839	-0.00785	-0.32394
0.35	0.00053	-0.00552	-0.00516	-0.32960
0.36	0.00072	-0.00275	-0.00262	-0.33510
0.37	0.00110	-0.00007	-0.00032	-0.34045
0.38	0.00180	0.00251	0.00161	-0.34566
0.39	0.00291	0.00502	0.00307	-0.35075
0.40	0.00444	0.00746	0.00406	-0.35570
0.41	0.00627	0.00986	0.00468	-0.36055
0.42	0.00828	0.01222	0.00504	-0.36528
0.43	0.01037	0.01454	0.00525	-0.36991
0.44	0.01250	0.01684	0.00536	-0.37445
0.45	0.01463	0.01909	0.00542	-0.37889
0.46	0.01675	0.02129	0.00545	-0.38324
0.47	0.01885	0.02345	0.00546	-0.38751
0.48	0.02092	0.02557	0.00546	-0.39170
0.49	0.02296	0.02765	0.00545	-0.39581
0.50	0.02497	0.02969	0.00544	-0.39985

Los resultados encontrados señalan en primer lugar que estamos ante un sistema dinámico disipativo, pues la suma de los exponentes de Lyapunov siempre es negativa (ver sección I.2 y II.3 del apéndice). Dado que en la zona de bifurcación dos exponentes de Lyapunov se vuelven positivos, tenemos para el parámetro β_{π^m} una bifurcación no simple de Hopf que lleva a un estado asintótico que pierde su estabilidad mediante ciclos límite cuando el parámetro toma exactamente el valor de bifurcación, y que se vuelve inestable para valores mayores. Adicionalmente, la generación de inestabilidad para el estado asintótico se caracteriza por la aparición de un atractor extraño hipercaótico¹⁶, ya que se generan dos exponentes de Lyapunov positivos en un sistema disipativo. De acuerdo a la conjetura de Kaplan-Yorke (ver sección II. 3 del apéndice), la dimensión fractal de dicho atractor será mayor a tres, dado que la suma de los tres primeros exponentes de Lyapunov es positiva. Así las cosas, se tiene que en la medida que la expectativas de inflación de los agentes respondan de manera más fuerte a la inflación observada, es decir, si los agentes vuelven su expectativas más adaptativas, se puede originar de manera endógena un atractor extraño hipercaótico en el cual el cambio rápido en las expectativas neutraliza cualquier intento de la política monetaria por controlar de manera

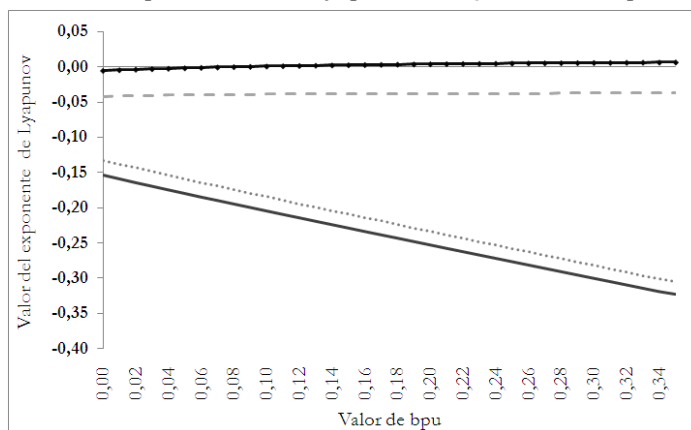
¹⁶Se habla de hipercaos cuando más de un exponente de Lyapunov es positivo. En el caso de que únicamente un exponente de Lyapunov sea positivo solo se habla de caos.

asintótica la inflación, inestabilidad creada vía oscilaciones persistentes de la tasa de interés real.

Como se menciona en la introducción y en el apéndice, el atractor extraño tiene la particularidad de hacer imposible el pronóstico de largo plazo, pues a pesar de ser éste una región acotada en el espacio de fases en donde permanecen las trayectorias del sistema, la distancia entre estas crece a un ritmo exponencial, como lo confirma la presencia de exponentes de Lyapunov positivos. Adicionalmente, debido al carácter disipativo del sistema y a la dimensión fractal del atractor las trayectorias se pliegan volviendo a pasar cerca de cualquier estado previo pero sin repetirse jamás. De esta manera, el atractor extraño puede representar un “ciclo de negocios”, en el que las variables permanecen dentro de un intervalo acotado de valores interactuando entre sí mediante sus cadenas de retroalimentación, y en donde es imposible conocer qué valores pueden tomar en un tiempo más lejano que el corto plazo. Obsérvese que a diferencia de los modelos convencionales, este ciclo de negocios se genera de manera totalmente endógena y determinística, pues no se recurre a choques estocásticos para crear fluctuaciones en las variables.

Por otro lado, para evaluar el potencial canal desestabilizador del salario real (vía “efecto Rose adverso”), el Gráfico 2.16 muestra los exponentes de Lyapunov en función del parámetro que mide la sensibilidad de los precios a las presiones de demanda en el mercado de bienes, entendidas como la desviación de la tasa de utilización de la capacidad instalada respecto a su nivel natural (β_p , bpu en la gráfica), utilizando para los demás parámetros los valores estimados econométricamente con base en la información colombiana. En dicho gráfico se observa que aunque existe un valor de β_p (entre 0.05 y 0.10) para el que un exponente de Lyapunov se vuelve ligeramente positivo, este no parece ser significativamente mayor a cero. Esto lo confirma el cuadro 2.7, que muestra los valores del espectro de exponentes de Lyapunov para registros de β_p entre 0.0 y 0.2.

Gráfico 2.16. *Exponentes de Lyapunov en función del parámetro β_p*



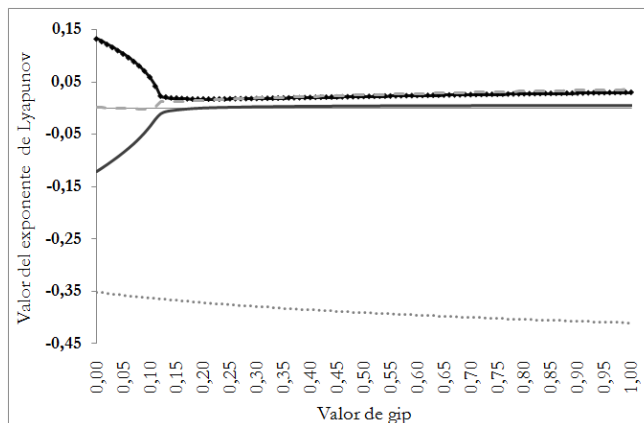
Cuadro 2.7
EXPONENTES DE LYAPUNOV EN FUNCION DE β_p

bpi	Exponentes de Lyapunov			
0.00	-0.00500	-0.04203	-0.15370	-0.13249
0.01	-0.00414	-0.04138	-0.15910	-0.13792
0.02	-0.00335	-0.04085	-0.16450	-0.14317
0.03	-0.00262	-0.04040	-0.16955	-0.14861
0.04	-0.00195	-0.04003	-0.17467	-0.15385
0.05	-0.00132	-0.03971	-0.17975	-0.15903
0.06	-0.00075	-0.03944	-0.18489	-0.16406
0.07	-0.00021	-0.03920	-0.18977	-0.16927
0.08	0.00029	-0.03900	-0.19472	-0.17435
0.09	0.00075	-0.03882	-0.19965	-0.17937
0.10	0.00119	-0.03866	-0.20462	-0.18432
0.11	0.00160	-0.03851	-0.20952	-0.18929
0.12	0.00198	-0.03839	-0.21429	-0.19435
0.13	0.00234	-0.03827	-0.21916	-0.19927
0.14	0.00268	-0.03817	-0.22400	-0.20420
0.15	0.00299	-0.03807	-0.22886	-0.20906
0.16	0.00330	-0.03799	-0.23369	-0.21394
0.17	0.00358	-0.03791	-0.23842	-0.21890
0.18	0.00385	-0.03783	-0.24320	-0.22378
0.19	0.00410	-0.03776	-0.24799	-0.22863
0.20	0.00435	-0.03770	-0.25276	-0.23348

El cuadro 2.7 muestra nuevamente que estamos ante un sistema disipativo, pues la suma de exponentes de Lyapunov es negativa. Se evidencia una bifurcación simple de Hopf, en donde un exponente de Lyapunov sobrepasa levemente el cero, lo que, debido al carácter disipativo del sistema, originaría una inestabilidad caracterizada por la presencia de un atractor extraño con dimensión fractal mayor a dos, dada la conjetura de Kaplan-Yorke. Sin embargo, se considera que esta bifurcación no resulta significativa al ser el exponente de Lyapunov positivo muy cercano a cero, y como comentamos antes, completamente indistinguible de cero. Se debe recordar que esta bifurcación se origina en el momento en el que la condición de mayor flexibilidad de los salarios respecto a la de los precios deja de verificarse, esto es, cuando se viola la desigualdad $(1 - \kappa_p) \beta_w > (1 - \kappa_w) \beta_p$. Por tanto, su aparición e intensidad depende no solo de los valores que pueda tomar β_p sino también de los valores que sean utilizados para los parámetros κ_w , β_{we} y κ_p . Así, dados los valores que se hallaron para estos tres coeficientes, parece menos probable que el canal desestabilizador del salario real genere un atractor extraño, y podría ocurrir que el comportamiento del estado asintótico sea el de un ciclo límite, caracterizado por un exponente de Lyapunov igual a cero.

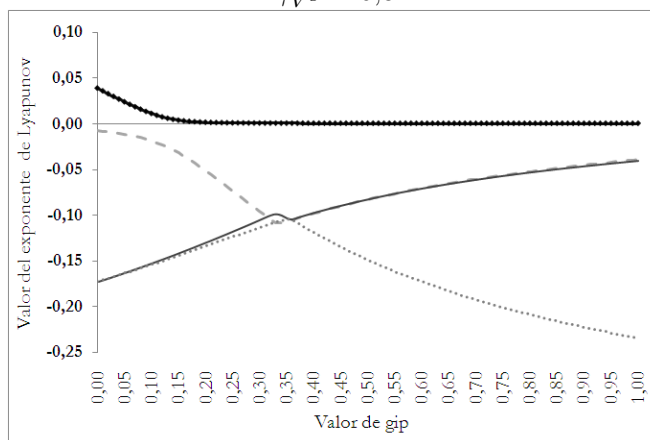
Por último, a manera de ejemplo para señalar una posible aplicación de la metodología aquí utilizada, el Gráfico 2.17 muestra el espectro de exponentes de Lyapunov en función del parámetro que mide la respuesta de la tasa de interés a la inflación observada (γ_{ip} , gip en la gráfica). Este ejercicio se desarrolló suponiendo que el estado asintótico es inestable, esto es, con un valor del parámetro que mide la respuesta de las expectativas a la inflación observada mayor al de su punto de bifurcación (concretamente $\beta_{\pi^m} = 0,5$), puesto que se quiere evaluar si la política monetaria logra un efecto estabilizador cuando se mantiene activa y como se comporta dicho efecto cuando varía la intensidad en que la tasa de interés responde a desviaciones en la inflación observada.

Gráfico 2.17 Exponentes de Lyapunov en función del parámetro γ_{ip}



Del gráfico 2.17 se desprende que una política monetaria activa logra reducir uno de los exponentes de Lyapunov positivos para valores pequeños de γ_{ip} . Esto significa que la política monetaria consigue que las trayectorias de las variables se alejen entre sí a un menor ritmo, lo que vuelve menos frecuente la necesidad de ajustar la política. Sin embargo, para valores mayores de ese parámetro, la política monetaria no consigue una estabilidad asintótica (es decir, gradual y progresiva), ya que los exponentes se mantienen positivos y por tanto persistirán las oscilaciones dentro de un atractor extraño. Cabe recordar que estos resultados se obtienen con una tasa de interés que no responde a presiones de demanda, entendidas estas como desviaciones de la utilización de la capacidad instalada respecto a su nivel natural, ya que en la estimación econométrica este parámetro no resultó significativo ($\gamma_{Vc} = 0$). Si este efecto se incluyera, como se hace en el Gráfico 2.18, asumiendo que $\gamma_{Vc} = 0,3$, la política monetaria podría estabilizar el sistema para valores mayores a 0,15, pues convierte el exponente de Lyapunov positivo en uno negativo. Sin embargo, la evidencia empírica colombiana, por lo menos con las herramientas econométricas utilizadas en esta tesis, no parece respaldar que γ_{Vc} sea distinto de cero, es decir, que las acciones de política monetaria hayan respondido a desviaciones de la utilización de la capacidad instalada de su nivel natural.

Gráfico 2.18 Exponentes de Lyapunov en función del parámetro γ_{ip} , cuando se incluye $\gamma_{Vc} = 0,3$



En conclusión, los resultados encontrados a partir de la simulación numérica confirman la existencia de dos bifurcaciones de Hopf, una no simple y otra simple, que son generadas por los parámetros β_{π^m} y β_p respectivamente y que posibilitarían la aparición endógena de dos

atractores extraños, hipercaótico en el primer caso y caótico en el segundo. Sin embargo, la imposibilidad de distinguir un exponente de Lyapunov muy cercano a cero de otro igual cero, debido a la incertidumbre sobre los valores de los parámetros del sistema, hace que la segunda de las bifurcaciones sea menos probable que la primera, y que más bien en dicho caso pueda aparecer un ciclo límite. Por otra parte, el ejercicio de evaluar la naturaleza de la política monetaria como política de estabilización muestra la utilidad de este tipo de análisis, y abre un posible campo de investigación para trabajos posteriores.

Conclusiones

En esta tesis se emplea un modelo estructural de desequilibrio keynesiano que muestra propiedades dinámicas más interesantes desde el punto de vista cualitativo que las de los esquemas basados en optimización intertemporal. Se demuestra analíticamente que si las principales relaciones macroestructurales conservan los signos esperados en la teoría, la posible presencia de efectos desestabilizadores lleva a que el modelo escogido sea estructuralmente inestable, puesto que cambios en algunos de sus parámetros pueden modificar sus propiedades de estabilidad. Los valores de los parámetros para los que se modifican dichas propiedades reciben el nombre de bifurcaciones, y en el caso particular del modelo empleado resultan ser bifurcaciones de Hopf. Para este tipo específico de bifurcaciones, cuando el espacio de parámetros cruza la frontera de bifurcación, el modelo pasa de ser estable a inestable, apareciendo comportamientos cíclicos cuando los parámetros toman exactamente el valor de bifurcación.

Los efectos desestabilizadores que se pueden encontrar en el modelo simplificado que se presenta en este trabajo operan mediante dos canales, el de salario real y el de tasa de interés real. En el primer canal, si la demanda agregada responde de manera inversa al salario real, una creciente sensibilidad de los precios respecto a la de los salarios podría originar ajustes explosivos del salario real. En el segundo canal si las expectativas de inflación se ajustan demasiado rápido a la inflación observada estas neutralizan cualquier intento estabilizador de la política monetaria por controlar la inflación y originan ajustes sistemáticos en los precios vía variaciones indefinidas de la tasa de interés real. Estos dos canales desestabilizadores se traducen en la presencia de dos bifurcaciones de Hopf, una para el parámetro que mide la sensibilidad de los precios a las presiones de demanda y otra para el que cuantifica la respuesta de las expectativas de inflación a la inflación observada.

Sin embargo, la demostración analítica sobre el comportamiento cualitativo del modelo no predice el tipo de bifurcación de Hopf que se presenta, ni qué tipo de inestabilidad asintótica muestra el sistema una vez los parámetros cruzan sus fronteras de bifurcación. Para responder estos interrogantes se recurre a un ejercicio de simulación numérica, con base en la información de la economía colombiana. El ejercicio busca extraer el espectro de exponentes de Lyapunov en función de los parámetros de bifurcación, que miden la divergencia o convergencia exponencial entre trayectorias que arrancan desde condiciones iniciales muy cercanas entre sí, calibrando dicha divergencia en cada dimensión del espacio de fases, lo que proporciona una forma de caracterizar cualitativamente la dinámica de las variables del modelo.

El conjunto de parámetros para la simulación numérica se extrae de una estimación econométrica del modelo usando el método generalizado de momentos e información de la economía colombiana para el período 1981-2009, cuyo principal resultado es que todos los parámetros que son significativos tienen el signo esperado por el modelo teórico, lo que garantiza la consistencia empírica del análisis de estabilidad propuesto. Por su parte, la simulación muestra que para el parámetro que mide la sensibilidad de las expectativas de inflación a la

inflación observada se registra una bifurcación no simple de Hopf, en la que dos exponentes de Lyapunov se vuelven positivos. Este resultado, conjugado con la consideración de que el sistema es disipativo, lleva a determinar que la inestabilidad que se alcanza una vez se cruza la frontera de bifurcación se caracteriza por la presencia de un atractor extraño hipercaótico, con dimensión fractal mayor a tres. Mientras tanto, para el parámetro que mide la sensibilidad de los precios a las presiones de demanda si bien numéricamente se registra una bifurcación simple de Hopf, en la que un exponente de Lyapunov se vuelve ligeramente positivo, (lo que, dado el carácter disipativo del sistema, originaría que la inestabilidad se caracterice por la presencia de un atractor extraño con dimensión fractal mayor a dos), se considera no significativa al ser el exponente de Lyapunov positivo muy cercano a cero. De acá se deduce menos probable que el canal desestabilizador del salario real pueda generar un atractor extraño, y que en cambio el comportamiento del sistema podría asemejarse al de un ciclo límite.

Respecto a los hallazgos realizados sobre atractores extraños, cabe decir que estos son regiones acotadas del espacio de fases en donde permanecen las trayectorias del sistema. En este tipo de atractor, dado que uno o más exponentes de Lyapunov son positivos, la distancia entre dos trayectorias con condiciones iniciales cercanas crece exponencialmente hasta superar el diámetro del conjunto contenedor que lo acota. Sin embargo, debido al carácter disipativo del sistema y a la dimensión fractal del atractor las trayectorias se pliegan volviendo a pasar cerca de cualquier estado previo, pero sin repetirse jamás. Estas dos características vuelven imposible el pronóstico de la ubicación de las variables en el largo plazo, y hacen del atractor extraño un buen candidato para representar un “ciclo de negocios” endógeno y determinístico. En esta manera de ver el ciclo, las variables interactuarían entre sí mediante sus cadenas de retroalimentación pero permanecerían en un intervalo de valores acotado, y no se podría conocer qué valores podrían tomar en un tiempo más lejano al corto plazo.

Por último, se realiza un ejercicio para analizar la efectividad de la política monetaria como política de estabilización que ejemplifica una posible aplicación de este tipo de esquemas. Una política de estabilización puede ser vista como un tipo de instrumento que mueve la economía desde un régimen inestable a otro estable, alterando el espacio de parámetros. En la simulación numérica realizada se encontró que la política monetaria logra reducir uno de los exponentes de Lyapunov positivos para valores pequeños del parámetro que mide la respuesta de la tasa de interés de política a la inflación observada. Esto significa que con una política monetaria activa las trayectorias de las variables se alejan entre sí a un menor ritmo, lo que vuelve menos frecuente la necesidad de ajustar la política. Sin embargo, para valores mayores de ese parámetro, la política monetaria no consigue convertir al sistema en uno con estabilidad asintótica, sino que éste sigue presentando fluctuaciones persistentes. Cabe decir que estos resultados se obtienen con una regla de política que en el pasado no parece haber respondido a presiones de demanda, ya que en la estimación econométrica este parámetro no resultó significativo. Si este efecto se incluyera, la política monetaria podría estabilizar el sistema, pues convertiría entonces el exponente de Lyapunov positivo en uno negativo.

Así las cosas, la consistencia empírica del modelo empleado y la importancia de los resultados encontrados permiten que este trabajo contribuya a la difusión y el crecimiento de la perspectiva propuesta para estudiar los fenómenos macroeconómicos. Dada la simplificación del modelo empleado (economía cerrada, exclusión de restricciones financieras, ausencia de efectos riqueza, etc.) el esquema puede ser ampliado en varios frentes, aunque siempre a costa de aumentar el número de sus dimensiones. Esto lo haría más complejo de tratar analíticamente y solo dejaría a la simulación numérica como la única herramienta válida para verificar las propiedades cualitativas de su estado asintótico.

Bibliografía

Arango, L., A. García, y C. Posada (2006), “La metodología de la Encuesta Continua de Hogares y el empalme de las series del mercado laboral urbano de Colombia”, Borradores de Economía, No. 410. Banco de la República.

Arthur, W. (1988), “Self-reinforcing mechanics in economics” en Anderson, W., K. Arroe y D. Pines (Eds.), *The economy as an evolving complex system*, Addison-Wesley, pp. 9-31.

Asada, T., P. Chen, C. Chiarella y P. Flaschel (2006), “Keynesian dynamics and the wage-price spiral: A baseline disequilibrium model” *Journal of macroeconomics*, No. 151, pp. 90-130.

Asada, T., C. Chiarella, P. Flaschel, P. y C. Proaño (2007), “Keynesian AD-AS Quo Vadis?” Working Paper 151, School of Finance and Economics, University of Technology, Sydney.

Asada, T. y H. Yoshida (2003), “Coefficient criterion for four-dimensional Hopf bifurcations: a complete mathematical characterization and applications to economic dynamics” *Chaos, solitons and fractals*, No. 18, pp. 525 - 536.

Bahaduri, A. y D. Harris (1987), “The complex dynamics of the simple ricardian system”, *Quarterly Journal of Economics*, No. 102, pp. 893-902.

Bala, V. (1997), “A pitchfork bifurcation in the tatonnement process”, *Economic Theory*, No. 10, pp. 521-530.

Barnett, W. y E. Duzhak (2008), “Non-robust dynamic inferences from macroeconomic models: bifurcation of confidence regions”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol 387, No. 15. pp. 3817-3825.

Barnett, W. y E. Duzhak (2009), “Empirical assessment of bifurcation regions within new Keynesian models?”, *Economic Theory: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 387, No. 15. pp. 3817-3825.

Barnett, W. y S. He (2009), “Existence of Singularity Bifurcation in an Euler-Equations Model of the United States Economy: Grandmont was Right?”, MPRA Paper, No. 12803.

Barnett, W. y Y. He (1999), “Stability analysis of continuous time macroeconomic systems”, *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, No. 3. pp. 169-188.

Barnett, W. y Y. He (2002), “Stabilization policy as bifurcation selection: would stabilization policy work if the economy really were unstable?”, *Macroeconomic Dynamics*, No. 6. pp. 713-747.

Barnett, W. y Y. He (2004), “Bifurcations in macroeconomic models” en Dowrick, S, P. Rohan y S. Turnovsky (Eds), *Economic growth and macroeconomic dynamics: recent developments in economic theory*. Cambridge University Press: Cambridge. pp. 95-112.

Barro, R (1994), “The aggregate supply / aggregate demand model”, *Eastern Economic Journal*, No. 20, pp. 1-6.

Basile, L. y N. Salvadori (1984-85), “Kalecki’s pricing theory”, *Journal of Post Keynesian Economy*, No. 7, pp. 249-62.

Bergstrom, A., K. Nowman y C. Wymer (1992), “Gaussian estimation of a second order

continuous time macroeconometric model of the United Kingdom.” *Economic Modeling*, No. 9, pp. 313–352.

Benhabib, J. y R. Day (1982), “A characterization of erratic dynamics in the overlapping generations model”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, No. 4, pp. 37-55.

Benhabib, J. y T. Miyao (1981), “Some new results on the dynamics of the generalized Tobin model”, *International Economic Review*, No. 22, pp. 589-596.

Benhabib, J. y K. Nishimura (1979), “The Hopf bifurcation and the existence and stability of closed orbits in multisector models of optimal economic growth”, *Journal of Economic Theory*, No. 21, pp. 421-444.

Benassy, J. (1986), “On Competitive Market Mechanisms”, *Econometrica*, Vol. 54 No.1, pp. 95-108 y 173-185.

Blanchard, O. y Katz, L. (1999), “Wage Dynamics: Reconciling Theory and Evidence”, NBER Working Papers 6924, National Bureau of Economic Research.

Blatt, J. (1983), “Dynamic economic systems: A Post Keynesian approach”, Armonk, New York.

Brock, W. (1993), “Pathways to randomness in the economy: emergent nonlinearity in economics and finance”, *Estudios Económicos* No. 8, pp. 3-55.

Calvo, G. (1983), “Staggered prices in a Utility Maximizing Framework”, *Journal of Monetary Economics*, No. 12, pp. 383-398 .

Campos, D. y J. Isaza (2002), “Prolegómenos a los sistemas dinámicos” Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá.

Carrera, C. y M. Moran (1993), “General dynamics in overlapping generations models”, UBC Departmental Archives, No. 93-04.

Carson, J. (1996), “Kalecki’s pricing theory: marginalist to the end?”, *History of Political Economy*, No. 28, pp. 663-690.

Chang, W y D. Smyth (1971), “The existence and persistence of cycles in a nonlinear model: Kaldor’s 1940 model re-examined”, *Review of Economic Studies*, No. 38, pp. 37-44.

Chen, P., C. Chiarella, P. Flaschel y W. Semmler W (2006), “Keynesian macrodynamics and the Phillips curve an estimated baseline macromodel for the US economy”, Working Paper 147, School of Finance and Economics, University of Technology, Sydney.

Chen, P. y P. Flaschel (2005), “Testing the dynamics of wages and prices for the US economy” Discussion Paper, Center for Empirical Macroeconomics, Bielefeld University.

Chiarella, C. y P. Flaschel (1999), “Disequilibrium growth theory: foundations, synthesis, perspectives”, Working Paper No. 85, School of Finance and Economics, University of Technology, Sydney.

Chiarella, C. y P. Flaschel (2000), “The dynamics of Keynesian monetary growth: macro-foundations”. Cambridge University Press, Cambridge.

Chiarella, C., P. Flaschel y R. Franke (2005), “Foundations for a disequilibrium theory of the business cycle: Qualitative analysis and quantitative assessment”, Cambridge University Press, Cambridge.

Chow, G. y Lin, A. (1971), “Best Linear Unbiased Distribution and Extrapolation of Economic Time Series by Related Series”, *The Review of Economics and Statistics*, No. 53, pp. 471-476

Christiano, L., M. Eichenbaum y C. Evans (1999), “Monetary policy shocks: What have we learned and to what end?”, en Taylor, J. y M. Woodford (ed.) “*Handbook of Macroeconomics*”, Vol. 1, Cap. 2, pp. 65-148.

Coats, W., D. Laxton y D. Rose (eds.) (2003), “The Czech National Bank’s Forecasting and Policy Analysis System” Czech National Bank, Praga.

- Cross, R. (1987), "Hysteresis and instability in the natural rate of unemployment", *Scandinavian Journal of Economics*, No. 89, pp. 71-89.
- Cross, R. (1993), "Hysteresis and Post Keynesian Economics", *Journal of Post Keynesian Economics*, No. 15, pp. 305-308.
- Dana, R. y P. Malgrange (1984), "The dynamics of a discrete version of a growth model," en Ancot, J. (Ed.), *Analyzing the Structure of Economic Models*. Boston: Martinus Nijhoff, pp. 115-142.
- Davidson, P. (1993), "The elephant and the butterfly". *Journal of Post Keynesian Economics*, No. 15, pp. 309-322.
- Delli Gatti, D., M. Gallegati y L. Gardini (1993), "Investment confidence, corporate debt and income fluctuations", *Journal of Economic Behavior and Organization*, No. 22, pp. 161-187.
- Desai, M. (1973), "Growth cycles and inflation in a model of class struggle", *Journal of Economic Theory*, No. 6, pp. 527-545.
- Desai, M., B. Henry, A. Mosley y M. Pemberton (2006), "A clarification of the Goodwin model of the growth cycle", *Journal of Economic Dynamics and Control*, No. 30, pp. 2661-2670.
- Devaney, R. (2003), "An introduction to chaotic dynamical systems" Addison-Wesley Publishing Company. Segunda edición.
- Di Matteo, M. (1984), "Alternative monetary policies in a classical growth cycle," en R. Goodwin, M. Kruger y A. Vercelli, A. (Eds.) *Nonlinear models of fluctuating growth*. Springer-Verlag.
- Dore, M. (1993), "The macrodynamics of business cycles", Cambridge: Basil Blackwell.
- Durlauf, S. (1993), "Nonergodic economic growth", *The Review of Economic Studies*, No. 60, pp. 349-366.
- Eckmann, J. P. y D. Ruelle (1985) "Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors", *Reviews of Modern Physics*, 57. Pag. 617
- Eller, J. y R. Gordon (2003), "Nesting the New Keynesian Phillips Curve within the mainstream model of U.S. inflation dynamics" presentado en la conferencia de la CEPR "The Phillips Curve Revised", Berlin, Alemania, Junio.
- Escot, L. (2000), "Dinámica económica caótica: una aplicación al estudio del ciclo y del crecimiento económico" Tesis doctoral – Universidad Complutense de Madrid.
- Fair, R. (2000), "Testing the NAIRU model for the United States", *The Review of Economics and Statistics*, No. 82, pp. 64-71.
- Fischer, E. y W. Jammernegg (1986), "Empirical investigation of a catastrophe theory extension of the Phillips curve", *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 68, No. 1, pp. 9-17.
- Flaschel, P., G. Kauermann y W. Semmler (2005), "Testing wage and price Phillips curves for the United States", Discussion Paper, Center for Empirical Macroeconomics, Bielefeld University.
- Flaschel, P. y C. Proaño (2007), "AS-AD Disequilibrium dynamics and the Taylor interest rate policy rule: Euro Area based estimation and simulation" en Arestis, P., Hein E. y Le Heron, E. (eds.) "Aspects of modern monetary policy and macroeconomic policies" Palgrave Macmillan, Hampshire.
- Föllmer, H. (1974), "Random economies with many interacting agents", *Journal of Mathematical Economics*, No. 1, pp. 51-62.
- Forrester, J. (1977), "Growth cycles," *The Economist*, No. 125, pp. 525-543.
- Franke, R., P. Flaschel, P y C. Proaño (2006), "Wage-price dynamics and income distribution in a semi-structural Keynes-Goodwin model", *Structural change and economic dynamics*,

No. 17, pp. 452-465.

Galí, J. y M. Gertler (1999), "Inflation dynamics: A structural econometric analysis", *Journal of Monetary Economics*, No. 44, pp. 195-222.

Galí, J., M. Gertler y J. López-Salido (2001), "European inflation dynamics", *European Economic Review*, No. 45, pp. 1237-1270.

Gandolfo, G. (1997), "Economic dynamics", Springer, Berlin.

Goodwin, R. (1951), "The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles" *Econometrica*, No. 19, pp. 1-17.

Goodwin, R. (1967), "A growth cycle", en C. Feinstein (Ed.), *Socialism, Capitalism and Economic Growth*. Cambridge University Press, Cambridge.

Goodwin, R. (1986), "The economy as an evolutionary pulsator", *Journal of economic behavior and organizations*, No. 7, pp 341-349.

Goodwin, R. (1990), "Chaotic economic dynamics", Oxford: Oxford University Press.

Gordon, R. (1989), "Hysteresis in history: Was there ever a Phillips curve", *American Economic Review*, Papers and Proceedings, No. 79, pp. 220-225

Grandmont, J.M. (1985), "On endogenous competitive business cycles", *Econométrica*, No. 53, pp. 995-1045.

Grassberger, P. e I. Procaccia (1983) "Measuring the Strangeness of Strange Attractors" *Physica*, D 9, pp. 189-208.

Haken, H. (1977), "Synergetics", *Physics Bulletin*, Londres.

He, Y. y W. Barnett (2004), "New phenomena identified in a stochastic dynamic macro-econometric model: a bifurcation perspective," *Computing in Economics and Finance* No. 145.

Henkin, G y V. Polterovich (1991), "Schumpeterian dynamics as a nonlinear wave model" *Journal of Mathematical Economics*, No. 20, pp. 551-590.

Jovero, E y J. Luyando (2006), "La dinámica compleja no lineal en los modelos keynesianos", *Análisis Económico – Universidad Autónoma Metropolitana de México*, No.48, pp.31-55.

Kac, M. (1968), "Mathematical mechanisms of phase transitions" en, Chrétien, M., E. Gross y S. Deser (Eds), *Statistical Physics: Transitions and Superfluidity*, Vol. 1. Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics, pp. 241-305.

Kaldor, N. (1940), "A model of the trade cycle", *Economic Journal*, No. 50, pp. 78-92.

Kalecki, N. (1937), "A theory of the business cycle", *The Review of Economic Studies*, Vol. 4, No. 2 pp. 77-97

Kaplan, J. y J. Yorke (1979) en "Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points: Proceedings", Berlin: Springer-Verlag, Bonn, p. 204.

Leeper, E. y C. Sims (1994), "Toward a modern macro model usable for policy analysis", *NBER Macroeconomics Annual*, pp. 81-117.

Li, T. y J. Yorke (1975), "Period three implies chaos", *American Mathematics Monthly*, No. 19, pp 985-992.

Liu, W-M (1994), "Criterion of Hopf Bifurcations without using eigenvalues", *Journal of mathematical analysis and applications*, no. 182, pp. 250-256

Lorente, L. (2009), "Crecimiento óptimo" en *Notas de Clase: Teoría del Crecimiento I*. Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Colombia. Por publicar.

Lorente, L. (2011), Ideas de conversaciones informales y de correcciones a versiones anteriores del presente documento

Lorenz, H. (1992), "Multiple attractors, complex basin boundaries, and transient motion in deterministic economic systems". En G. Feichtinger (Ed.) *Dynamic economic models and optimal control*, pp. 411-430, Amsterdam: North-Holland.

- May, R. (1976), "Simple mathematical models with very complicated dynamics," *Nature*, No. 261, pp. 459-467.
- Mankiw, G. (2001), "The inexorable and mysterious tradeoff between inflation and unemployment", *Economic Journal*, No. 111, pp. 45 - 61.
- Minsky, H. (1972) "Financial Instability Revisited: The Economics of Disaster" en *Reappraisal of the Federal Reserve Discount Mechanism*, Washington, D.C.
- Minsky, H. (1986) "Stabilizing an Unstable Economy", Londres, Yale University Press.
- Nishimura, K. y H. Takahashi (1992), "Factor intensity and Hopf bifurcations" en Feichtinger, G. (Ed.), *Dynamic Economic Models and Optimal Control*, pp. 135-149.
- Nusse, H y C. Hommes (1990), "Resolution of chaos with application to a modified Samuelson model", *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 14, No. 1, pp. 1-20.
- Pecha, A. (2007), "Optimización estática y dinámica en economía" Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá.
- Pohjola, M. (1981), "Stable, cyclic, and chaotic growth: The dynamics of a discrete time version of Goodwin's growth cycle". *Zeitschrift für Nationalökonomie*, No. 41, pp. 27-38.
- Proaño, C., E. Ernst, P. Flaschel y W. Semmler W (2006), "Gradual wage-price adjustments and Keynesian macrodynamics: Evidence from the U.S. and the Euro area". Schwartz CEPA working paper, New School University, New York.
- Rand, D. (1978), "Exotic phenomena in games and duopoly models," *Journal of Mathematical Economics*, No. 5, pp. 173-184.
- Reichl, L. (1998), "A modern course in statistical physics", Segunda edición, John Wiley & Sons, Inc.
- Rodríguez, N., J. Torres y A. Velasco (2006), "La estimación de un indicador de brecha del producto a partir de encuestas y datos reales", *Borradores de Economía*, No. 392, Banco de la Republica.
- Romer, D. (2000), "Keynesian macroeconomics without the LM curve", *The Journal of Economic Perspectives*, No. 14, pp. 149-169.
- Rosser Jr, J.B. (1998), "Complex dynamics in New Keynesian and Post Keynesian models", en Rotheim (Ed.) *New Keynesian Economics, Post Keynesian Alternatives*, UK, Routledge, pp. 288-302.
- Rosser Jr, J.B. (2000a), "From catastrophe to chaos: a general theory of economic discontinuities", Segunda edición, Kluwer Academic Publishers.
- Rosser Jr, J.B. (2000b), "Chaos theory and the new Keynesian economics", *The Manchester School LVIII*, No. 3. Pp. 265-291
- Rosser Jr, J.B. (2003), "Complexity in economics", memo, James Madison University.
- Rosser Jr, J.B. y M. Dore (2006), "Do nonlinear dynamics in economics amount to a kuhnian paradigm shift?", memo, James Madison University.
- Rudebusch, G. y L. Svensson (1999), "Policy rules for inflation targeting", Chicago University Press.
- Scarf, H. (1959), "Some examples of global instability of competitive equilibrium", *Cowles Foundation Discussion Papers*, No. 79.
- Semmler, W. y M. Sieveking (1993), "Nonlinear Liquidity-Growth Dynamics with Corridor-Stability" *Journal of Economic Behavior and Organization*, No. 22, pp. 189-208.
- Sigler, L. (1981), "Algebra". Springer-Verlag, Nueva York.
- Silverberg, G. y D. Lehnert (1993), "Long waves and 'evolutionary chaos' in a simple Schumpeterian model of embodied technical change", *Structural Change and Economic Dynamics*, No. 4, pp. 9-37.
- Soliman, A. (1996a) ,"Transitions from stable equilibrium points to periodic cycles to chaos in a Phillips curve system", *Journal of Macroeconomics*, No. 18, pp. 139-153.

- Soliman, A. (1996b), "Fractals in nonlinear economic dynamics", *Chaos, solutions and fractals*, No. 7, pp. 247-256.
- Sorger, G. (1995), "Chaotic Ramsey equilibrium", *International Journal of Bifurcations and Chaos*, No. 5, pp 373-380.
- Spitzer, F. (1971), "Random fields and interacting particle systems", American Mathematical Society, Providence.
- Sprott, J.C. (2010), "Elegant chaos. Algebraically simple chaotic flows" World Scientific Publishing Co, Singapur.
- Strang, G. (2007), "Álgebra lineal y sus aplicaciones", Cuarta edición, Cengage Learning Editores.
- Strotz, R., J. McAnulty y J. Naines Jr. (1953), "Goodwin's nonlinear theory of the business cycle: an electro-analog solution," *Econometrica*, No. 21, pp. 390-411.
- Torres, J. (2007), "La estimación de la brecha del producto en Colombia", *Borradores de Economía*, No. 462, Banco de la Republica.
- Varian, H. (1979), "Catastrophe theory and the business cycle", *Economic Inquiry*, 17, 14-28.
- Wiener, N. (1961), "Cybernetics: or control and communication in the animal and the machine", Segunda edición, Cambridge: MIT Press.
- Wolf, A., J. Swift, H. Swinney y J. Vastano (1983), "Determining Lyapunov exponents from a time series" *Physica, D* 16, pp. 285-317.
- Woodford, M. (2003), *Interest and Prices. Foundations of a Theory of Monetary Policy*, Princeton University Press, Princeton.
- Wooldridge, J. (2001), "Applications of generalized method of moments estimation", *Journal of Economic Perspectives*, No. 15(4), pp. 87-100.
- Zeeman, E. (1974), "On the unstable behavior of the stock exchanges," *Journal of Mathematical Economics*, No. 1, pp. 39-44.
- Zuleta, H., Parada, J., Campo, J. y García, A. (2009), "Capital Natural, Capital Humano y Participación de los Factores. Una Revisión de los Métodos de Medición del Crecimiento Económico", *Documentos de trabajo No. 4713*, Facultad de Economía, Universidad del Rosario.

Apéndice matemático:

Estabilidad en sistemas dinámicos

Este apéndice, que se divide en dos secciones, presenta brevemente los principales conceptos asociados al análisis de estabilidad en sistemas dinámicos, y comenta su utilidad en la teoría económica. La primera sección repasa los aspectos más generales de los sistemas dinámicos: el propio concepto y su clasificación. Posteriormente, muestra las limitaciones de las dinámicas subyacentes a los modelos que emplean optimización intertemporal (estrategia de investigación dominante en macroeconomía), al estudiar cómo es la evolución temporal del volumen de una región finita del espacio de fases en dichos esquemas, frente a la manera como puede cambiar en representaciones alternativas. Estas dificultades justifican la utilización de otro tipo de sistemas dinámicos, que superen las limitaciones de los modelos basados en los principios de optimización intertemporal, tal como lo hace el esquema de desequilibrio que en esta tesis se presenta. La segunda sección describe la manera de caracterizar el comportamiento asintótico que presentan los estados de los sistemas descritos, y el tipo de estabilidad estructural que puede mostrar un sistema dinámico. En particular, se señala el teorema de Routh-Hurwitz y su uso para evaluar la estabilidad de un estado estacionario en modelos de grandes dimensiones, el espectro de exponentes de Lyapunov que caracteriza cualitativamente un sistema de trayectorias caóticas, y la clasificación de las bifurcaciones que vuelven estructuralmente inestable un sistema. La exposición de este apéndice se basará principalmente en las lecturas de Campos e Isaza (2002), Escot (2000), Lorente (2009) y Pecha (1997), por lo que, en lo que resta de este, se omiten las fechas para referirse a dichos textos.

I. Sistemas dinámicos y transformación del volumen del espacio de fases

I.1. Del concepto de un sistema dinámico y su clasificación

En esta tesis se entiende a un sistema dinámico como aquel en el que una o más de sus variables dependen en forma continua del tiempo¹⁷. Así, solo se consideran sistemas dinámicos ordinarios, dejando de lado el estudio de los sistemas en diferencias o derivadas parciales¹⁸ ya que el principal propósito es el estudio de la evolución temporal de los fenómenos económicos. Siguiendo a Campos e Isaza (p.32) los sistemas dinámicos están constituidos por el siguiente conjunto de elementos:

¹⁷En términos generales un sistema es dinámico si está sometido a cambio respecto a una o varias variables. Sin embargo, la definición que acá se acoge se hace con el objetivo de acotar la exposición a las características relevantes para esta tesis de los sistemas dinámicos.

¹⁸En estos esquemas el sistema puede cambiar respecto a dos o más variables del mismo.

1. Una variable independiente denominada tiempo “ t ”. Con relación a t , los sistemas dinámicos se pueden clasificar como continuos (t puede tomar cualquier valor en un intervalo) o discretos (t solo puede tomar valores para un conjunto discreto de tiempos), siendo los primeros sobre los que se centrara esta exposición. Junto con ésta, otras categorizaciones se harán explícitas más adelante.
2. Un conjunto μ de parámetros del sistema, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\sigma)$, donde σ es el número total de parámetros. Estos, que pueden ser dependientes o no del tiempo, se pueden representar en un espacio de dimensión σ euclidiano, denominado espacio de parámetros.
3. Un conjunto x de variables del sistema, $x = (x_1, x_2, \dots, x_g)$, donde g designa el número total de variables. Un estado del sistema x_t se determina por el valor que tomen dichas variables en determinado instante del tiempo. Los estados del sistema se pueden representar en una variedad¹⁹ de g dimensiones, con ejes ortogonales entre sí, denominada espacio de fase.
4. Un conjunto de ecuaciones de movimiento:

$$\frac{d}{dt}x = F(x, t; \mu) \quad (\text{A.1})$$

donde F es una función vectorial bien comportada. Adicionalmente, la trayectoria, solución o línea de flujo del sistema, $x(t)$, se define como la secuencia de estados que se generan debido la evolución temporal del sistema dadas las ecuaciones de comportamiento, a partir de uno inicial.

Agrupando las clasificaciones de los sistemas dinámicos sugeridas por Escot (p. 2-3 a 2-8) y Campos e Isaza (p.72-78), es posible hacer un listado de las distintas categorizaciones no excluyentes de dichos esquemas (**cuadro 1**). Una primera clasificación es la ya comentada entre sistemas dinámicos en tiempo continuo y discreto, según los valores que pueda tomar la variable tiempo. De acuerdo con Lorente *"Los sistemas en tiempo discreto pueden tener un comportamiento dinámico más complicado porque sus variables cambian a saltos, pero tienen el inconveniente de que ninguna variable puede cambiar dentro del intervalo escogido. Pero en una economía real, cualquiera que sea el período de tiempo escogido, tendremos siempre variables que cambian dentro de ese lapso... (por ende) es preferible usar modelos de tiempo continuo, aunque sólo podamos observar su estado en momentos discretos del tiempo"* (Lorente, p.4-5). Así las cosas, en esta tesis se trata el estudio de la estabilidad de los sistemas dinámicos únicamente bajo la perspectiva de tiempo continuo; aunque, a la hora de presentar el ajuste econométrico del modelo propuesto, se recurre a tiempo discreto.

Cuadro 1. *Clasificación de los sistemas dinámicos*

Criterio	Tipo de sistema
Valores que puede tomar la variable tiempo	En tiempo continuo, en tiempo discreto
Presencia de la variable tiempo	Autónomo, no autónomo
Forma funcional de las ecuaciones de movimiento	Lineal, no lineal
Presencia de variables aleatorias	Determinístico, estocástico
Transformación del volumen del espacio de fases	Disipativo, conservativo, expansivo

¹⁹Una variedad es un espacio geométrico suave. Esto garantiza que el espacio de fases no tenga discontinuidades que impidan recubrirlo con una secuencia de “mapas”. Ejemplos son una recta de longitud infinita o un círculo (unidimensionales), un plano de dimensión infinita o la superficie de un cilindro (bidimensionales), o el espacio euclideo \mathbb{R}^n (n-dimensional). Véase Campos e Isaza (p.36).

La segunda tipificación, que se efectúa generalmente para sistemas en tiempo continuo, puede hacerse respecto a si la variable tiempo aparece o no de manera explícita en las ecuaciones de movimiento del sistema. En el primer caso, se habla de sistemas dinámicos no autónomos y en el segundo, de autónomos²⁰. Cabe mencionar que cualquier sistema dinámico no autónomo se puede volver autónomo a expensas de ampliar el espacio de fases en una dimensión²¹. Esto permite referirse únicamente a sistemas dinámicos autónomos en lo que resta de este apéndice, sin perder ningún tipo de generalidad.

Una tercera categorización es la que distingue entre los sistemas dinámicos lineales y los no lineales. En principio, un sistema dinámico es lineal cuando la forma funcional de todas las ecuaciones de movimiento es lineal, esto es, si la función vectorial F en (A.1) es lineal en la variable de estado²². En caso contrario se habla de sistemas dinámicos no lineales. La principal propiedad de los sistemas dinámicos lineales es el principio de superposición, el cual establece que si $x(t)$ y $y(t)$ son soluciones del sistema dinámico linealmente independientes entre sí, entonces $ax(t) + by(t)$ es también solución, para a, b reales o complejos. Cabe comentar que la aplicación del principio de superposición en economía tiene importantes implicaciones metodológicas, que limitan la capacidad explicativa de los modelos y crean hábitos de pensamiento peligrosos²³. Por último, mientras que en los sistemas lineales de coeficientes constantes siempre es posible obtener soluciones explícitas para sus soluciones²⁴, en sistemas no lineales solo para casos excepcionales podrán obtenerse.

El cuarto criterio de clasificación tiene en cuenta si las ecuaciones de movimiento del sistema incluyen o no una variable aleatoria. En caso de que así sea, el sistema dinámico se denomina estocástico y en caso contrario determinista. Las soluciones de los primeros constituyen procesos estocásticos, esto es, sucesiones de variables aleatorias de las que se conoce su función de probabilidad. Por tanto, siguiendo a Escot, “*la condición inicial de la que parte un sistema dinámico estocástico debe considerarse como una realización concreta de un proceso estocástico, determinando el sistema en este caso, únicamente una distribución de probabilidad de estados posibles para instantes futuros.*” (Escot, p. 2-7, énfasis mío). Por tanto, dos realizaciones idénticas del sistema en determinado momento, podrán seguir evoluciones distintas en el futuro. En cambio, un sistema determinista siempre establecerá su evolución de manera única desde un estado de tiempo inicial, de forma que dos soluciones que arranquen de un mismo estado, serán idénticas²⁵.

²⁰ Así, en los sistemas autónomos las ecuaciones de movimiento son de la forma $\frac{d}{dt}x = F(x, t; \mu)$ mientras que en los autónomos se pueden representar como $\frac{d}{dt}x = F(x; \mu)$.

²¹ Basta introducir una nueva variable independiente $\tau = t - t_0$ y considerar que la variable original t es una función de la nueva variable independiente τ (esto es, $t = t(\tau)$) con la propiedad $\frac{dt}{d\tau} = 1$.

²² Una función vectorial $F(x; \mu)$ es lineal si cumple con las siguientes propiedades: i) $F(ax; \mu) = aF(x; \mu)$, ii) $F(x + y; \mu) = F(x; \mu) + F(y; \mu)$

²³ En particular, Lorente (2008) argumenta que la linealidad implica tanto proporcionalidad de causa a efecto, lo que excluye dar explicación a fenómenos auto-catalizados (como pánicos y crisis financieras), así como reversibilidad, que olvida que en la realidad existen procesos irreversibles (v.g. invertir y quebrar).

²⁴ Si las ecuaciones tienen coeficientes constantes, las soluciones pueden expresarse mediante funciones exponenciales. En el caso general de coeficientes variables, suele ser posible obtenerlas como series convergentes.

²⁵ En particular, a partir del estado inicial x_0 del sistema, se puede determinar el estado de un sistema dinámico determinista en cualquier momento t , a partir de la relación: $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t F(x(t'); \mu) dt'$. Cabe decir que los sistemas no lineales pueden presentar una extrema sensibilidad a las condiciones iniciales, divergiendo exponencialmente a partir de estados iniciales muy próximos. En tal caso, el sistema sigue siendo determinista pero necesitaríamos conocer el estado inicial con precisión infinita para proyectarlo en un futuro lejano.

El último criterio de clasificación responde a la manera como se transforma el volumen del espacio de fases en los sistemas dinámicos²⁶. Para entenderlo, se debe definir un elemento de volumen en el espacio de fases y estudiar cómo puede variar bajo la acción de las ecuaciones de movimiento del sistema, lo que es objeto del siguiente apartado.

I.2. Transformación del volumen del espacio de fases

Considérese un estado inicial del sistema en el instante t_0 arbitrario, $x_0 = (x_{10}, x_{20} \dots x_{g0})$ que, como consecuencia de la evolución temporal del sistema dinámico, resulta en el instante t en el estado $x = (x_1, x_2 \dots, x_g)^{27}$. Este proceso se puede interpretar como una transformación $x_0 \rightarrow x$, de coordenadas con componentes $x_n = x(x_0, \mu)$ para cada una de las g variables del sistema, que necesariamente depende del campo vectorial F .

Ahora consideremos la región finita del espacio de fase que ocupa el conjunto de condiciones iniciales x_0 (en el instante t_0), y denominémosla $\Omega(t_0)$. Con la transformación $x_0 \rightarrow x$ la región $\Omega(t_0)$ también se debe transformar en una nueva región $\Omega(t)$. Un elemento de volumen²⁸ $dV(t_0) = dx_{10}dx_{20} \dots dx_{g0}$ en $\Omega(t_0)$ y el correspondiente elemento de volumen $dV(t) = dx_1dx_2 \dots dx_g$ en $\Omega(t)$ estarán relacionados mediante la fórmula:

$$dV(t) = \det(J)dV(t_0) \quad (\text{A.2})$$

Donde $\det(J)$ es el jacobiano de la transformación $x_0 \rightarrow x$ ²⁹. Siguiendo a Reichl, “(este) jacobiano es una medida de cuanto cambia el volumen de un conjunto de partículas en función del tiempo. El cambio en el jacobiano con el tiempo, como pueda ser visto por un observador que se mueva con el elemento de volumen, es $\frac{d \det(J)}{dt}$ cuya expresión corresponde a:” (Reichl, 1998 p.770)³⁰

²⁶Campos e Isaza (p. 72), presentan otra clasificación, que proviene del hecho de que se incluya o no la constante de Planck (\hbar , una constante física usada para describir los tamaños de los cuantos o partículas en mecánica cuántica) en las ecuaciones de movimiento del sistema. Así, si esta es incluida, se habla de sistemas dinámicos cuánticos, y si no lo es, de clásicos. Pero dado que en esta tesis se restringe el estudio de los sistemas dinámicos a las aplicaciones en la teoría económica, no se hace mención de esta clasificación.

²⁷Como se mencionó anteriormente, la exposición se centrará, sin pérdida de generalidad, en sistemas dinámicos clásicos, deterministas, autónomos y en tipo continuo.

²⁸Un elemento de volumen es el elemento diferencial dV cuya integral de volumen (la integral que devuelve el volumen de una región) sobre algún rango en un sistema de coordenadas dado, resulta en el volumen V de un sólido. Por ejemplo, para tres dimensiones, el elemento de volumen dV esta conformado por $dx dy dz$ tal que: $V = \iiint dx dy dz$

²⁹Esto es, el determinante de la matriz jacobiana que tiene elementos $J_{nm} = \frac{\partial x_n}{\partial x_{m0}}$ para $n, m = 1, 2, \dots, g$. Esta ecuación se deduce de aplicar la relación del determinante con el volumen de un paralelepípedo en un espacio n -dimensional, ya que el jacobiano resulta ser el factor de alargamiento del paralelepípedo para cada una de las dimensiones de las que consta; véase Strang (2007, p.201). Esta interpretación tiene amplia aplicación en varias ramas de la física y la ingeniería, véase por ejemplo Reichl (1998) para mecánica de fluidos

³⁰La derivada respecto al tiempo del determinante de la matriz del jacobiano viene dada por: $\frac{d \det(J)}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} & \dots & J_{1g} \\ J_{21} & J_{22} & \dots & J_{2g} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ J_{g1} & J_{g2} & \dots & J_{gg} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dJ_{11}/dt & dJ_{12}/dt & \dots & dJ_{1g}/dt \\ J_{21} & J_{22} & \dots & J_{2g} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ J_{g1} & J_{g2} & \dots & J_{gg} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} & \dots & J_{1g} \\ dJ_{21}/dt & dJ_{22}/dt & \dots & dJ_{2g}/dt \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ J_{g1} & J_{g2} & \dots & J_{gg} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} & \dots & J_{1g} \\ J_{21} & J_{22} & \dots & J_{2g} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ dJ_{g1}/dt & dJ_{g2}/dt & \dots & dJ_{gg}/dt \end{vmatrix}$. Ahora, cada $\frac{dJ_{nm}}{dt}$ es igual a $\frac{d}{dt} \frac{\partial x_n}{\partial x_{m0}}$ por la definición de la matriz

del Jacobiano de la transformación. Dicha expresión es igual a $\frac{\partial}{\partial x_{m0}} \frac{dx_n}{dt}$, esto es, $\frac{\partial F_n}{\partial x_{m0}}$. Aplicando regla de la cadena, la anterior expresión es igual $\sum_{l=1}^g \frac{\partial F_n}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial x_{m0}}$, sumatoria que se puede expresar como $\sum_{l=1}^g \frac{\partial F_n}{\partial x_l} J_{lm0}$. Así las cosas, en el primer determinante que se calcula (el que incluye elementos dJ_{1k}/dt), en $\sum_{l=1}^g \frac{\partial F_n}{\partial x_l} J_{lm0}$

$$\frac{1}{\det(J)} \frac{d \det(J)}{dt} = \text{Tr}(J) \quad (\text{A.3})$$

Donde $\text{Tr}(J)$, la traza de la matriz del jacobiano, se denomina la divergencia del campo vectorial F . Así las cosas, dado un sistema dinámico autónomo de la forma (A.1), el signo de (A.3) determina como se transforman en volumen las regiones del espacio de fases que ocupan los estados de dicho sistema, de la siguiente manera:

1. Si $\text{Tr}(J) < 0$ el sistema dinámico es disipativo, esto es, toda región de volumen finito en el espacio de fases se contrae de manera progresiva.
2. Si $\text{Tr}(J) = 0$ el sistema dinámico es conservativo, esto es, toda región de volumen finito en el espacio de fases conserva su volumen, así modifique su forma.
3. Si $\text{Tr}(J) > 0$ el sistema dinámico es expansivo, esto es, toda región de volumen finito en el espacio de fases se expande de manera progresiva³¹

Los únicos sistemas dinámicos que pueden poseer atractores, o puntos hacia donde convergen las trayectorias de determinadas regiones del espacio de fases (o de todas, en el caso global), son entonces sistemas disipativos, puesto que en ellos dichas regiones contraen su volumen hasta volverse, asintóticamente, regiones con volumen cero. Siguiendo a Lorente, los sistemas disipativos “no son estrictamente reversibles en el tiempo porque, en la práctica, no es posible medir una posición con precisión infinita; así, un punto muy cercano al atractor podría corresponder a una infinidad de orígenes porque sus trayectorias están tan próximas entre sí que el error de medida impide discriminar entre ellas” (Lorente p. 8). En cambio, los sistemas conservativos conservan el volumen de cualquier región finita arbitraria, aunque la región puede modificar su forma de manera significativa. Según Lorente, “un sistema conservativo es, en principio, reversible, aunque también en este caso pueden aparecer dificultades, no tanto por la precisión de las medidas, sino por el número de ellas que sería necesario reunir” (Lorente p. 9).

I.3. Sistemas hamiltonianos y teoría económica: las limitaciones de los modelos de optimización intertemporal

Un tipo especial de sistemas conservativos lo constituyen los sistemas hamiltonianos. De acuerdo a Campos e Isaza (p. 110), “Un sistema hamiltoniano de f grados de libertad es un sistema dinámico con las siguientes propiedades:

1. El estado del sistema se especifica por $g=2f$ variables que se organizan en dos subconjuntos³²:

$$(x_1, x_2 \dots, x_f) = q = (q_1, q_2 \dots, q_f)$$

únicamente el término para $l = 1$ es no cero, porque para $l \neq 1$ las demás filas del determinante J_{lm0} son idénticas y por ende el determinante se anula. Similarmente, en el segundo determinante, únicamente el término en la sumatoria cuando $l = 2$ es no cero, y así sucesivamente. Por ende, en la suma de los determinantes solo importa el elemento correspondiente de la diagonal principal. De aquí se tiene que $\frac{d \det(J)}{dt}$ termina siendo $\sum_{l=1}^g \frac{\partial F_n}{\partial x_l} J_{lm0} = \text{Tr}(J) \det(J)$

³¹Cabe decir que el comportamiento de $\text{Tr}(J)$ es local, ya que depende de x , lo que quiere decir que su valor puede variar de una región a otra en el espacio de fases. Por tanto se puede hablar de sistemas dinámicos disipativos, conservativos y expansivos localmente, o, si se tiene para todo x y para todo t , de sistemas dinámicos disipativos, conservativos y expansivos globalmente.

³²En física e ingeniería los conjuntos q y p de variables del sistema se denominan coordenadas y momentos generalizados respectivamente.

$$(x_{f+1}, x_{f+2} \dots, x_{2f}) = p = (p_1, p_2 \dots, p_f)$$

2. Existe una función real $H(x, \mu) = H(q, p, \mu)$, denominada hamiltoniano que describe la evolución del sistema por medio de las ecuaciones de Hamilton³³:

$$\frac{dq_n}{dt} = \frac{\partial H(q, p, \mu)}{\partial p_n} \quad \frac{dp_n}{dt} = -\frac{\partial H(q, p, \mu)}{\partial q_n} \quad n = 1, 2 \dots f \quad (A.4)$$

Los sistemas hamiltonianos son conservativos en virtud del teorema de Liouville, que garantiza que la divergencia del campo vectorial F (la traza de la matriz del jacobiano) de un sistema hamiltoniano es cero³⁴. Dado que un sistema conservativo excluye la posibilidad de que existan atractores, los equilibrios de los sistemas hamiltonianos solo pueden ser periódicos o de carácter inestable (v.g. conformados por puntos de silla).

Todo modelo económico que haga uso de un mecanismo de optimización intertemporal, involucra en su solución el planteamiento de un sistema hamiltoniano. Para ver por qué, recuérdese que cualquier esquema de optimización intertemporal en tiempo continuo se puede plantear en términos de un problema de control óptimo. De acuerdo con Pecha, “Los problemas de control (óptimo) son aquellos que se pueden llevar a la forma

$$\begin{aligned} & \text{Optimizar } \int_a^T F(x, u; \mu) dt \\ & \text{sujeto a } \frac{dx}{dt} = G(x, u; \mu), \quad x(a) = x_a \quad x(T) = x_T \end{aligned} \quad (A.5)$$

(donde) las variables x se denominan variables de estado (son las variables que aparecen como derivadas en la restricción) y u son variables de control” (Pecha, p. 286). En economía, las variables de control son flujos que les permiten a los agentes regular las relaciones económicas, afectando las variables de estado que generalmente son stocks³⁵. La restricción del anterior problema se puede expresar como:

$$\lambda(G(x, u; \mu) - \frac{dx}{dt}) = 0 \quad (A.6)$$

Donde λ , que depende de t , es una función de coestado que cumple el mismo papel del multiplicador de Lagrange en problemas de optimización estática. Siguiendo a Pecha, el problema de control óptimo se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} & \text{Optimizar } \int_a^T \left[H(x, u, \lambda; \mu) - \lambda \frac{dx}{dt} \right] dt \\ & \text{sujeto a } x(a) = x_a \quad x(T) = x_T \end{aligned} \quad (A.7)$$

³³Nótese que estas ecuaciones pueden escribirse de la forma: $\frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial H(x, \mu)}{\partial x_{f+n}} = F_n(x, \mu)$; $\frac{dx_{f+n}}{dt} = -\frac{\partial H(x, \mu)}{\partial x_n} = F_{f+n}(x, \mu)$; $n = 1, 2 \dots f$

³⁴Este teorema, también conocido como el segundo de la mecánica hamiltoniana, se basa en el hecho que la traza de la matriz del jacobiano de un sistema hamiltoniano es: $\frac{\partial H(q, p, \mu)}{\partial p_n \partial q_n} - \frac{\partial H(q, p, \mu)}{\partial q_n \partial p_n} = 0$

³⁵Sin embargo, puede darse el caso de que las variables de estado sean flujos, siendo derivadas de otras variables de estado. En este caso las variables de control pueden interpretarse como tasas de aceleración. Una distinción más general entre las variables de estado y de control la brinda Lorente: “La definición general de variables de estado es el conjunto mínimo de cantidades que describen la situación del sistema estudiado y su dinámica en un momento determinado. Variables de control son las que pueden usarse para modificar dicha dinámica en períodos sucesivos” (Lorente p. 38)

Donde $H(x, u, \lambda; \mu) = F(x, u; \mu) + \lambda G(x, u; \mu)$ es llamada la función hamiltoniana o hamiltoniano del problema. Las condiciones necesarias que solucionan el problema de optimización se conocen con las condiciones de Pontryagin y, con n variables de estado y m variables control, vienen dadas por el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial H(x^*, u^*, \lambda; \mu)}{\partial x_i} = -\frac{d\lambda_i}{dt} \quad i = 1, 2 \dots n \quad \frac{\partial H(x^*, u^*, \lambda; \mu)}{\partial u_j} = 0 \quad j = 1, 2 \dots m \quad (\text{A.8})$$

Estas condiciones, junto con la restricción, se acostumbra a escribir en el sistema dinámico:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(x^*, u^*, \lambda; \mu)}{\partial x_i} = -\frac{d\lambda_i}{dt} \quad i = 1, \dots n \quad \frac{\partial H(x^*, u^*, \lambda; \mu)}{\partial u_j} = 0 \quad j = 1, 2 \dots m \\ \frac{\partial H(x^*, u^*, \lambda; \mu)}{\partial \lambda_i} = \frac{dx_i}{dt} \quad i = 1, 2 \dots n \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Nótese que el primer y el tercer conjunto de ecuaciones de (A.9) conforman un sistema de la forma (A.4), con $x = q$, $\lambda = p$, $i = n$ y $n = f$ (esto es, un sistema hamiltoniano). Paralelamente, cabe decir que cuando existen restricciones sobre las variables de control (esto es, $u \in A$) las condiciones de Pontryagin siguen configurando un sistema hamiltoniano³⁶. Así las cosas, las soluciones de un modelo económico que emplee optimización intertemporal se circunscriben a los comportamientos cualitativos factibles en los sistemas hamiltonianos (bien periodicidad, o bien inestabilidad de las soluciones).

Adicionalmente, Lorente hace énfasis en que en economía es usual introducir en los modelos de optimización intertemporal el caso más simple en el cual se cumplen las condiciones suficientes de Mangasarian para la existencia de una solución óptima³⁷, lo cual excluye la periodicidad como posible comportamiento cualitativo de las soluciones en un sistema hamiltoniano³⁸. Esto deja solamente al punto de silla (solución inestable) como el único tipo factible de solución del sistema (Lorente, p.14 y 37). Aunque en el siguiente apartado se dará la definición exacta de inestabilidad de las soluciones y se categorizará qué tipos de estados asintóticos del sistema podrán llegar a presentarse, cabe decir por ahora que este hecho implica limitar de manera muy fuerte las dinámicas que pueda exhibir el sistema. En particular, lleva a aceptar una sola trayectoria del sistema como la única que puede conducir a su equilibrio, y a reconocer que la única manera de converger a este es que las variables del sistema se encuentren en dicha trayectoria o que exista un mecanismo que, tan pronto las variables no se encuentren en ella, garantice el retorno de estas.

Al respecto, Lorente precisa que este mecanismo lo brindan las expectativas racionales de los agentes, ya que, bajo este esquema, se justifica la posibilidad de que los individuos reaccionen

³⁶En este caso las condiciones de Pontryagin se convierten en: $\frac{\partial H(x^*, u^*, \lambda; \mu)}{\partial x_i} = -\frac{d\lambda_i}{dt}$; $\frac{\partial H(x^*, u^*, \lambda; \mu)}{\partial \lambda_i} = \frac{dx_i}{dt}$ $i = 1, \dots n$; $\max_{u \in A} H(x^*, u^*, \lambda; \mu)$ Las cuales configuran también un sistema hamiltoniano. La última condición coincide con $\frac{\partial H(x^*, u^*, \lambda; \mu)}{\partial u_j} = 0$ para $j = 1, 2 \dots m$ cuando la solución es interior o u no está restringida. Al respecto, véase Pecha (p.308).

³⁷Estas condiciones garantizan una solución óptima al problema de optimización si la función objetivo y las ecuaciones de restricción son cóncavas en todas las variables. Al respecto, véase Mangasarian (1966), citado en Lorente (p. 37).

³⁸Mientras que la función objetivo y las ecuaciones de restricción sean cóncavas, la función hamiltoniana también lo será, lo cual excluye soluciones de tipo periódico y garantiza que sean puntos de silla.

instantáneamente ante un shock recalculando el futuro y saltando a la nueva trayectoria óptima. Los inconvenientes son claros: *“no sólo estamos ante un argumento circular, sino ante un supuesto de conducta que exige a los agentes una capacidad de cálculo infinita para reaccionar frente a un imprevisto en forma instantánea, antes de que operen las fuerzas desestabilizadoras del sistema, o bien una capacidad de predicción perfecta, tanto de las perturbaciones que deben anticipar como de la conducta de los demás agentes, es decir, de las ecuaciones que regulan la operación del sistema económico real”* (Lorente p. 14).

Así las cosas, se vuelve necesario encontrar una salida teórica que supere las limitaciones metodológicas y de comportamiento cualitativo que implican los modelos que utilizan optimización intertemporal. Por eso en esta tesis se utiliza un esquema estructural de desequilibrio keynesiano al ser una de las posibles alternativas contempladas en la literatura económica para superar dichas limitaciones.

II. Estabilidad de los estados asintóticos y estabilidad estructural

II. 1. Del concepto de estado asintótico y su clasificación

Sea $x(t_0)$ un estado inicial de un sistema dinámico. Supóngase que la dinámica del sistema se encuentra definida en el intervalo $t_0 \leq t < \infty$ y que la trayectoria del sistema permanece en cierta región acotada del espacio de fases Υ . Un estado asintótico del sistema dinámico se define como la zona del espacio de fases a la cual tiende $x(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Siguiendo a Campos e Isaza (p.128) los estados asintóticos en el espacio de fase Υ se clasifican así:

1. Estado de equilibrio o punto fijo en Υ : Es una solución x_e que es constante e independiente del tiempo, esto es, $\frac{d}{dt}x_e = F(x_e; \mu) = 0$.
2. Trayectoria periódica o ciclo limite en Υ : Es una trayectoria $x(t)$ que depende del tiempo y regresa a sí misma en un tiempo T , denominado período, esto es, $\frac{d}{dt}x = F(x; \mu) = 0$, $x(t + T) = x$.
3. Trayectoria cuasiperiódica o toroide en Υ : Es una trayectoria $x(t)$ que se forma como una suma de trayectoria periódicas cuyos periodos son inconmensurables, esto es, la relación entre los periodos son números irracionales.
4. Trayectoria caótica o atractor extraño: Es una trayectoria $x(t)$ que permanece dentro del espacio de fase en una región de volumen finito (trayectoria acotada) y presenta sensibilidad ante pequeños cambios de las condiciones iniciales.

En adelante, se estudia cómo se comporta la dinámica de un sistema alrededor de un estado asintótico cuando $t \rightarrow \infty$. Así, la exposición se centra en determinar el tipo de estabilidad asintótica ($t \rightarrow \infty$) que posea dicho estado (esto es, si las trayectorias del sistema tienden con el transcurso del tiempo a acercarse o alejarse del estado asintótico dado) entendiéndose que si un equilibrio es asintóticamente estable, también lo es en el sentido de Lyapunov³⁹.

³⁹Si para un sistema dinámico se cumple que dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $\|x(t_0) - x_e\| < \delta$ entonces $\|x(t) - x_e\| < \epsilon$ para $\forall t$, se tiene que x_e es estable según Liapunov, o simplemente estable. x_e es asintóticamente estable si además de ser estable, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x(t_0) - x_e\| < \delta$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$. Para más detalles, véase Campos e Isaza (p.174-184) o Pecha (192-193)

II. 2. Dinámica regular y su caracterización cuantitativa: el teorema de Routh Hurwitz

Considérense dos soluciones $x(t)$ y $y(t)$ de un sistema dinámico autónomo en tiempo continuo de la forma (A.1), que se diferencian por sus condiciones iniciales, e introdúzcase el vector $u(t) = y(t) - x(t)$ que “mide” la distancia entre las dos trayectorias⁴⁰. La idea es examinar cómo evoluciona $u(t)$ en una vecindad de un estado de equilibrio x_e cuando $t \rightarrow \infty$, para evaluar si dos trayectorias tienden con el tiempo a acercarse o alejarse alrededor de x_e . Obsérvese que si $y(t)$ es solución del sistema, entonces:

$$\frac{d}{dt}y = F(y; \mu) \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{d}{dt}x + \frac{d}{dt}u = F(x + u; \mu) \quad (\text{A.11})$$

Aplicando la expansión de Taylor para cada una de las funciones que conforman el campo vectorial F , la expresión (A.11) admite el desarrollo:

$$\frac{d}{dt}x + \frac{d}{dt}u = F(x + u; \mu) = F(x; \mu) + J(x; \mu)u + \frac{1}{2}u^T M u + \dots \quad (\text{A.12})$$

Donde J es la matriz del jacobiano del campo vectorial F y M es una matriz de segundas derivadas parciales de F que varia dependiendo sobre qué función F_n de F se esté calculando⁴¹. Dado que $x(t)$ es solución del sistema, la expresión (A.12) se puede simplificar:

$$\frac{d}{dt}u = J(x; \mu)u + \frac{1}{2}u^T M u + \dots \quad (\text{A.13})$$

Y si la expansión de Taylor es de primer orden (aproximación útil para estudiar el comportamiento de las trayectorias únicamente en la vecindad de un estado de equilibrio), el primer termino ($J(x; \mu)u$) domina la evolución de u , por lo que (A.13) se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt}u = J(x; \mu)u \quad (\text{A.14})$$

Expresión que corresponde entonces a una linealización del sistema dinámico considerado, que da cuenta de la evolución de u cuando transcurre el tiempo, que es lo que acá nos ocupa. Puesto que J no depende del tiempo (estamos considerando de manera general sistemas autónomos) la solución de (A.14) será de la forma:

$$u = e^{\lambda t}V \quad (\text{A.15})$$

⁴⁰En términos estrictos, la distancia entre las dos trayectorias se mide por medio de la norma euclidea. Al respecto, véase la ecuación (27).

⁴¹Al aplicar la expansión de Taylor para cada una de las funciones ($F_1, F_2 \dots F_n \dots F_g$) que conforman el campo vectorial F se obtiene: $F_n(x + u; \mu) = F_n(x_1 + u_1, x_2 + u_2, \dots, x_g + u_g; \mu) = F_n(x_1, x_2, \dots, x_g; \mu) + \sum_{m=1}^g J_{nm}u_m + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^g \sum_{l=1}^g u_m M_{n,ml}u_l + \dots$ Acá, $J_{nm}(x; \mu) = \frac{\partial F_n(x; \mu)}{\partial x_m}$ y $M_{n,ml}(x; \mu) = \frac{\partial^2 F_n(x; \mu)}{\partial x_m \partial x_l} = \frac{\partial J_{nm}}{\partial x_l}$. Nótese que los distintos $J_{nm}(x; \mu)$ conforman los elementos de la matriz del jacobiano del campo vectorial (J), mientras que los $M_{n,ml}(x; \mu)$ corresponden a las primeras derivadas parciales de cada elemento de las filas de la matriz del jacobiano. Dada la relación $\sum_{m=1}^g \sum_{l=1}^g u_m A_{ml}v_l = u^T A v$, la anterior expresión puede ser desarrollada como: $F_n(x + u; \mu) = F_n(x; \mu) + J_n(x; \mu)u + \frac{1}{2}u^T M_n u$ Donde J_n es la n -ésima fila de la matriz del jacobiano del campo vectorial y M_n la matriz de todas las primeras derivadas parciales de dicha fila. Por tanto, reuniendo los resultados para cada una de las funciones ($F_1, F_2 \dots F_n \dots F_g$) que conforman a F , es evidente que: $F(x + u; \mu) = F(x; \mu) + J(x; \mu)u + \frac{1}{2}u^T M u$. Acá M debe variar de acuerdo sobre qué fila J_n se haya calculado.

Que, en el caso específico de la ecuación (A.14), se vuelve⁴²:

$$u(t) = \exp [J(x; \mu)(t - t_0)] u(t_0) \quad (\text{A.16})$$

En la solución general (A.15), ya que u tiene por derivada un múltiplo del mismo vector, esto es, $\frac{d}{dt}u = \lambda e^{\lambda t}V$, el reemplazo de las expresiones de u y de $\frac{d}{dt}u$ en (A.14) con el fin de conocer λ y V arrojan la expresión:

$$\lambda V = J(x; \mu) V \quad (\text{A.17})$$

De la que es evidente que λ y V resultan ser los valores propios de $J(x; \mu)$ y sus correspondientes vectores propios, respectivamente. Así, dado que la manera cómo evoluciona u alrededor de x_e queda determinado por el signo de λ – el exponente de la forma exponencial presente en la solución de (A.14) – se tiene que el signo de los valores propios de la matriz jacobiana $J(x; \mu)$ evaluados en x_e , ($J(x_e; \mu)$) disponen el comportamiento de u alrededor de x_e ⁴³. En particular, el signo del valor propio n , λ_n , determina, en la dirección n , como se comporta u , de la siguiente manera⁴⁴:

1. Si λ_n tiene parte real negativa, entonces, en la dirección n , u tiende a cero, esto es, las trayectorias tienden a acercarse a x_e .
2. Si λ_n tiene parte real positiva, entonces, en la dirección n , u tiende a aumentar indefinidamente, esto es, las trayectorias tienden a alejarse de x_e .
3. Si λ_n tiene parte imaginaria no nula, entonces, en la dirección n , u presenta un comportamiento oscilatorio, esto es, en algunos momentos las trayectorias $x(t)$ y $y(t)$ tienden a acercarse entre sí y en otros momentos tienden a alejarse.

Así las cosas, conociendo el comportamiento de las soluciones en cada dirección del espacio de fases, se puede realizar una clasificación de algunos estados de equilibrio. Si uno o más valores propios tienen partes reales iguales a cero se habla de puntos de equilibrio no hiperbólicos, los cuales son, en general, difíciles de clasificar. Entre estos, solo aquel que tiene todos los valores propios puramente imaginarios recibe el nombre de centro o punto elíptico (en todas las direcciones del espacio de fases las trayectorias se acercan y se alejan continuamente). Si todos los valores propios tienen partes reales no nulas, se denominan puntos hiperbólicos, cuyo comportamiento depende del signo de la parte real y de la presencia o no de parte imaginaria, de la siguiente manera: respecto al signo de la parte real, si todos los valores propios tienen parte real negativa, se llaman puntos atractores, nodos estables o sumideros (en todas las direcciones del espacio de fases las trayectorias se acercan al punto de equilibrio); si todos los valores propios tienen parte real positiva, se denominan puntos repulsivos, nodos inestables o fuentes (en todas las direcciones del espacio de fases las trayectorias se alejan del punto de equilibrio); y si algunas de las partes reales son positivas y otras negativas (tiene que existir

⁴²La solución se encuentra al resolver la ecuación diferencial (15) en el intervalo $t_0 \leq t < \infty$: $\frac{du}{u} = J(x; \mu) \rightarrow \int_{t_0}^t \frac{du}{u} dt = \int_{t_0}^t J(x; \mu) dt \rightarrow \ln u(t) - \ln u(t_0) = J(x; \mu)t - J(x; \mu)t_0 \rightarrow \ln \left(\frac{u(t)}{u(t_0)} \right) = J(x; \mu)(t - t_0) \rightarrow u(t) = \exp [J(x; \mu)(t - t_0)] u(t_0)$

⁴³La matriz exponencial presente en la solución específica (A.16) evaluada en x_e , $\exp[J(x_e; \mu)(t - t_0)]$, se puede también escribir en términos de los valores propios de J como $\sum_{n=1}^g \exp[(t - t_0)\lambda_n] P_n$ donde $P_n = \prod_{m \neq n} \frac{J - \lambda_m I}{\lambda_n - \lambda_m}$ es el proyector asociado al valor propio λ_n (Véase Campos e Isaza, p.130). Así, la solución (A.16) puede ser expresada en términos de los valores propios como $u(t) = \sum_{n=1}^g \exp[(t - t_0)\lambda_n] P_n u(t_0)$, lo que hace aplicables a dicha solución todas las conclusiones que se expresan a continuación.

⁴⁴En el caso de valores propios complejos se combinan los dos comportamientos, el de la parte real, acercándolo al equilibrio o alejándolo de este, y el de la imaginaria, que determina si es linealmente o cíclicamente.

por lo menos una positiva y una negativa), se llaman puntos de silla (en algunas direcciones del espacio de fases las trayectorias se alejan del punto de equilibrio y en otras se acercan a este). Respecto a la presencia o no de parte imaginaria, cada uno de los tres posibles puntos hiperbólicos mencionados (atractores, repulsores y puntos de silla) pueden ser ordinarios, si no existen en todos los valores propios partes imaginarias, o en espiral, si en uno o más valores propios existe parte imaginaria. Un resumen de esta clasificación se muestra en el **cuadro 2**.

Cuadro 2. *Clasificación de los puntos de equilibrio de acuerdo a los valores propios de la matriz jacobiana*

Existencia de partes reales en los valores propios		Signos de las partes reales de los valores propios		Existencia de partes imaginarias en los valores propios	
Algunas son nulas	No hiperbólico	Todos nulos	Centro o punto elíptico		
		Todos negativos	Punto atractor, nodo estable o sumidero	Todas nulas	Ordinario
Todas son no nulas	Hipérbólico	Todos positivos	Puntos repulsivo, nodo inestable o fuente	Al menos una no nula	En espiral
		Por lo menos uno positivo y uno negativo	Punto de silla	Todas nulas	Ordinario
				Al menos una no nula	En espiral

En la práctica, si solo se desea verificar que un punto de equilibrio dado corresponde a un atractor ordinario, se puede omitir la determinación de los valores propios, pues resulta suficiente aplicar el teorema de Routh-Hurwitz para saber si todas las partes reales de los valores propios del jacobiano evaluado en el punto de equilibrio son negativas. Este teorema establece las condiciones que deben cumplir los coeficientes del polinomio característico – aquel que se resuelve para encontrar los valores propios de la matriz jacobiana, esto es $\det(J - \lambda I) = 0$ en el caso de la ecuación (A.17) – para que todos los valores propios tengan partes reales negativas, y por ende garantizar que el punto de equilibrio encontrado sea un atractor. Sea entonces:

$$P(\lambda) = \det(J - \lambda I) = \lambda^g + \alpha_{g-1}\lambda^{g-1} + \alpha_{g-2}\lambda^{g-2} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0 \quad (\text{A.18})$$

la ecuación característica que determina los g valores propios de la matriz J de dimensión $g \times g$. Todos los valores propios tienen parte real negativa si y solo si todos los menores principales de la matriz (de Hurwitz)⁴⁵:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{g-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{g-3} & \alpha_{g-2} & \alpha_{g-1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{g-5} & \alpha_{g-4} & \alpha_{g-3} & \alpha_{g-2} & \alpha_{g-1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{g-(2g-1)} & \alpha_{g-(2g-1)+1} & \alpha_{g-(2g-1)+2} & \alpha_{g-(2g-1)+3} & \alpha_{g-(2g-1)+4} & \dots & \dots & \alpha_{g-g} \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

⁴⁵Dicha matriz se construye hasta la fila en que el último elemento es α_0 . Cualquier elemento de la matriz que resulte de la forma α_{-i} es cero para todo $i > 0$.

sean mayores que cero. Por ejemplo, para $g = 2$, la ecuación característica es $\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$ y las condiciones para que todos los valores propios tengan parte real negativa son $\alpha_1 > 0$, $\alpha_0 > 0$; para $g = 3$, la ecuación característica es $\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$ y las condiciones son $\alpha_2 > 0$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_2\alpha_1 - \alpha_0 > 0$; para $g = 4$, la ecuación característica es $\lambda^4 + \alpha_3\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$ y las condiciones son $\alpha_3 > 0$, $\alpha_3\alpha_2 - \alpha_1 > 0$, $\alpha_3\alpha_2\alpha_1 - \alpha_3^2\alpha_0 - \alpha_1^2 > 0$, $\alpha_0 > 0$, etcétera. Este teorema es de suma utilidad al determinar analíticamente el tipo de estabilidad que presenta el equilibrio de un sistema de grandes dimensiones como el considerado en el primer capítulo.

Así, la resolución de las condiciones del Teorema de Routh Hurwitz depende en buena medida del conocimiento de los coeficientes del polinomio característico. Para encontrarlos, se suele emplear para α_{g-i} la expresión $(-1)^g$ por la suma de los menores principales de orden i de la matriz jacobiana⁴⁶. Por tanto, notese que α_{g-1} y α_0 pueden expresarse en términos de la traza y el determinante de la matriz J : α_0 resulta ser $(-1)^g$ por el determinante de J (al ser este el único menor principal de orden g), y α_{g-1} el negativo de la traza de J (ya que los menores principales de orden uno son los elementos de la diagonal)⁴⁷.

Cabe resaltar que la importancia de detectar nodos estables radica en que estos integran, junto a los puntos de sillan, los puntos de equilibrio más comunes de los sistemas dinámicos estudiados en economía. En palabras de Escot, “*constituyen los equilibrios típicamente considerados en los modelos tradicionales de dinámica económica en los que el equilibrio de largo plazo implica alcanzar un estado estacionario*” (Escot, p. 2-16)

En el caso de trayectorias periódicas, los exponentes de Floquet o números característicos del sistema tienen un papel análogo al que desempeñan los valores propios de la jacobiana $J(x; \mu)$ para un estado de equilibrio (ver Campos e Isaza p. 84-86). Cabe decir que a diferencia de los nodos estables y los puntos de silla, las soluciones exactamente periódicas tienen poca relevancia en teoría económica, ya que exigen que los ciclos económicos sean completamente regulares en el tiempo, lo cual no tiene sustento empírico.

II. 3. Dinámica caótica y su caracterización cuantitativa: el espectro de Lya-punov

Campos e Isaza mencionan que un sistema dinámico cuyas soluciones se comporten como trayectorias caóticas se caracteriza principalmente por dos propiedades: “i) (las) *trayectorias permanecen acotadas dentro de una región finita del espacio de fase* (atractor extraño) y ii) *el sistema presenta sensibilidad a pequeños cambios de las condiciones iniciales; esto es, trayectorias vecinas se separan exponencialmente*” (Campos e Isaza p.164). Conviene precisar que en los atractores extraños las soluciones presentan una elevada irregularidad y aperiodicidad (Escot 2-23), consecuencia de su dimensión fractal (no entera), que ocasiona infinidad de pliegues en el espacio de fases y que lleva a que las trayectorias que se encuentran en la zona tengan longitud infinita a pesar de encontrarse acotadas (Escot p.3-20, Lorente p.9). Ahora bien, cabe mencionar que existen otras definiciones más rigurosas de caos determinístico: Devaney (2003) por ejemplo, recurre a tres propiedades topológicas para identificar comportamientos

⁴⁶Para esta demostración, véase Sigler (1981, p. 448).

⁴⁷Nótese además que las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ del polinomio característico (A.18) cumplen con: $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = 0$. Por tanto el término constante α_0 se puede escribir como $(-1)^g \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$, esto es, $(-1)^g$ por el producto de todos los valores propios de la matriz J (el determinante de J). Además el término α_{g-1} resulta igual a $-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$, esto es, el negativo de la suma de todos los valores propios de la matriz J (la traza de J).

caóticos: transitividad topológica o mezclado, dependencia sensitiva respecto a condiciones iniciales y puntos periódicos densos en el interior del atractor extraño⁴⁸.

De cualquier manera, la implicación inmediata de la dependencia a las condiciones iniciales en un sistema con dinámica caótica es, en palabras de Escot “... *la incapacidad practica de realizar cualquier tipo de predicción ajustada en la evolución futura mas allá del corto plazo*” (Escot, p 2-25). Esto, porque a pesar de que un sistema caótico es determinístico, cualquier error de medida en las condiciones iniciales tenderá a crecer exponencialmente con el tiempo, de forma que aunque inicialmente el comportamiento real del sistema se encuentre próximo al de nuestra predicción, aquél irá alejándose de ésta a medida que transcurra el tiempo. En palabras de Lorente, “*el atractor extraño es importante porque hace imposible el pronóstico del sistema: podemos conocer en qué región del espacio de fases permanece y encerrarla dentro de una hiper-esfera de diámetro j , pero no podemos calcular en qué punto específico de esa región estará al cabo de un tiempo relativamente corto. La razón es que el más mínimo error de medida de las condiciones iniciales crece exponencialmente en el tiempo y puede superar muy pronto el diámetro de la hiper-esfera que encierra al atractor extraño*” (Lorente, p. 8)

Para caracterizar cuantitativamente la presencia de trayectorias caóticas, se utiliza el espectro de exponentes de Lyapunov. Intuitivamente, cada uno de los exponentes que conforma el espectro cuantifica la divergencia exponencial de órbitas que inicialmente eran infinitesimalmente cercanas entre sí para cada una de las dimensiones del espacio de fases. En términos formales, y de acuerdo con las condiciones del teorema de Odelesec que garantiza la existencia de los exponentes de Lyapunov en el sistema dinámico y que éstos son invariantes a la evolución de este⁴⁹, existe una base ortonormal⁵⁰ $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_g\}$, en la cual, para tiempos lo suficientemente grandes (t muy alejado de t_0), la diferencia $u(t)$ entre trayectorias evoluciona de la forma exponencial:

$$u(t) = \sum_{l=1}^g \mathcal{E}_l c_l \exp(\lambda_l(t - t_0)) \quad (\text{A.20})$$

Donde los coeficientes c_l dependen de las condiciones iniciales y λ_l designa el exponente de Lyapunov en la dirección l del espacio de fases, cuya definición se da a continuación (por ahora, se puede comparar (A.20) con (A.16) y notar que los exponentes de Lyapunov se asimilan aquí a los valores propios de la jacobiana en el caso de un estado de equilibrio). La norma euclidiana $d(t)$, que se calcula a partir de $u(t)$, mide en el instante de tiempo t la distancia de la trayectoria $y(t)$ a la trayectoria de referencia $x(t)$:

$$d(t) = \sqrt{u(t)' u(t)} = \sqrt{d_1^2(t) + d_2^2(t) + \dots + d_g^2(t)} \quad (\text{A.21})$$

En $d(t)$ la cantidad $d_l(t)$ mide la distancia a lo largo del eje coordenado \mathcal{E}_l . Así las cosas, el exponente de Lyapunov λ_l se define como:

$$\lambda_l(x(t_0)) = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ d(t_0) \rightarrow 0}} \frac{1}{t - t_0} \ln\left(\frac{d_l(t)}{d(t_0)}\right) \quad (\text{A.22})$$

⁴⁸ Véase Escot (p. 2-27) para las definiciones. Cabe decir que bajo ciertas condiciones, la propiedad de transitividad o mezclado topológico implica las otras dos propiedades. Al respecto, véase Escot (p. 2-28)

⁴⁹ En particular, se necesita que los valores propios de la matriz Λ definida en (A.23) sean una medida de probabilidad ergódica (invariante) del sistema dinámico.

⁵⁰ Una base ortonormal de un espacio vectorial es un conjunto de éste con elementos que son mutuamente ortogonales y normales, es decir de magnitud unitaria.

En palabras de Campos e Isaza: “Este número caracteriza, en el futuro distante ($t \rightarrow \infty$), el comportamiento exponencial de la distancia $d_l(t)$ entre trayectorias que estaban, inicialmente, infinitesimalmente cercanas ($d(t_0) \rightarrow 0$). En general, el exponente de Lyapunov depende de la condición inicial $x(t_0)$ de la trayectoria de referencia” (Campos e Isaza, p. 167). Por convención, el espectro de exponentes de Lyapunov se ordena, con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_g$, y λ_1 se denomina el mayor exponente de Lyapunov.

Una manera análoga de hallar los exponentes de Lyapunov consiste en deducir una matriz $\Lambda(t, t_0)$ simétrica y definida positiva que resulta, de manera similar a los exponentes de Floquet (ver Campos e Isaza p. 84-86), del cálculo del operador evolución asociado al sistema dinámico:

$$\Lambda(t, t_0) = U(t, t_0)' U(t, t_0) \quad (\text{A.23})$$

Hallar sus g valores propios reales ($\mu_1^2(t) \geq \mu_2^2(t) \geq \dots \geq \mu_g^2(t)$) que dependen de la condición inicial $x(t_0)$ de la trayectoria de referencia, y calcular el límite:

$$\lambda_l(x(t_0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \ln(\mu_l(t)) \quad (\text{A.24})$$

La utilidad de los exponentes de Lyapunov para clasificar el comportamiento de los estados asintóticos de los sistemas dinámicos no se circunscribe para el caso de trayectorias caóticas, sino que también se extiende para cualquier otro estado asintótico posible, al ser éstos compatibles con los criterios mencionados para estados de equilibrio y órbitas periódicas o cuasiperiódicas (valores propios del jacobiano y exponentes de Floquet). Por ejemplo, para el caso de estados de equilibrio, se puede demostrar que los exponentes de Lyapunov coinciden con las partes reales de los valores propios de la matriz jacobiana⁵¹, y por tanto, la trayectoria solución del sistema en una vecindad del estado de equilibrio se acerca a este en la dirección n si λ_n es negativo, y se aleja si λ_n es positivo. En adición a esto, la sumatoria de los exponentes de Lyapunov señala la razón de cambio relativo del volumen de una región del espacio de fase bajo la acción de las ecuaciones de movimiento del sistema⁵², y así, por ejemplo, en sistemas conservativos (v.g. sistemas hamiltonianos) la suma de los exponentes de Lyapunov se hace igual a cero, mientras en que en sistemas disipativos, es menor a cero.

Así las cosas, el **cuadro 3** define un esquema de clasificación del comportamiento dinámico de un sistema para un t muy alejado de t_0 , que, con base en los signos de los exponentes de Lyapunov, determina qué tipo de estado asintótico puede presentar el sistema en consideración. Para su lectura, se debe tener en cuenta que el espectro de exponentes de Lyapunov está ordenado, esto es, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_g$. La clasificación se basa en el principio de que si los exponentes de Lyapunov son no positivos, el sistema presentará comportamiento regular (puntos de equilibrio u órbitas periódicas, este último caso cuando el exponente de Lyapunov es cero), mientras que si el sistema tiene por lo menos un exponente de Lyapunov positivo, las trayectorias presentarán comportamiento caótico, es decir sensibilidad a las condiciones iniciales y, por ende, divergencia exponencial entre éstas a medida que transcurre el tiempo. Adicionalmente, para que una trayectoria caótica sea clasificada como tal, debe además el sistema dinámico ser disipativo (condición que cumplen per se los otros estados de equilibrio) para que este pueda estar provisto de una región acotada – el atractor extraño, con dimensión fractal – a la que converjan las trayectorias del sistema (respecto a los sistemas disipativos y su relación con la presencia de atractores, véase el anterior apartado).

⁵¹ Véase Campos e Isaza p. 168 para su demostración.

⁵² Véase Eckmann y Ruelle (1985).

Cuadro 3. Clasificación de trayectorias de acuerdo a exponentes de Lyapunov

Tipo de trayectoria	Exponentes de Lyapunov
Estado de equilibrio	$0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_g$
Orbita periódica	$\lambda_1 = 0, \quad 0 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_g$
Orbita K-periódica	$\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_k = 0; \quad 0 > \lambda_{k+1} \geq \dots \geq \lambda_g$
Trayectoria caótica	$\lambda_1 > 0, \quad \sum_{n=1}^g \lambda_n < 0$

Asimismo, de acuerdo a una conjetura propuesta por Kaplan y Yorke (1978), existe una relación entre los exponentes de Lyapunov y la dimensión fractal del atractor extraño. Si el espectro de exponentes de Lyapunov nuevamente esta ordenado, esto es, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_g$ y M es el mayor entero tal que $\sum_{j=1}^M \lambda_j < 0$, entonces la dimensión fractal (DF) del atractor vendría dada por:

$$DF = M + \frac{\sum_{j=1}^M \lambda_j}{|\lambda_{M+1}|} \quad (\text{A.25})$$

Aunque esta conjetura es cierta para muchos casos, se han encontrado algunas excepciones (ver por ejemplo Grassberger y Procaccia (1983)).

II. 4. Teoría de bifurcaciones y estabilidad estructural

En todo el análisis anterior se han asumido “dados” los parametros μ del sistema dinámico. Sin embargo, en palabras de Campos e Isaza, “Bajo ciertas circunstancias, el número y la naturaleza de los estados asintóticos (punto fijo, ciclo límite, atractor extraño) al igual que sus características (atractivo, repulsivo) pueden modificarse de manera significativa cuando se cambia uno o más parámetros del conjunto μ . Un evento de esta naturaleza se denomina una bifurcación” (Campos e Isaza, p.186). Cabe decir que, en adelante, solo se tendrán en cuenta las bifurcaciones a nivel local, ya que las bifurcaciones globales, originadas por cambios en la topología de las trayectorias del sistema en el espacio de la fase, no se puede confinar a una vecindad pequeña de los estados asintóticos, sino que se extienden hacia fuera a una distancia arbitrariamente grande y por tanto no pueden ser detectadas únicamente mediante un análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio, como el que aquí se realiza mediante las herramientas de los anteriores apartados.

Entonces, supongamos que todos los parametros μ del sistema dinámico permanecen fijos a excepción de uno, por ejemplo μ_b . Un valor μ_{b0} para el parámetro μ_b se denomina punto de bifurcación si los estados asintóticos y la dinámica del sistema son distintos para valores de μ_b mayores y menores que μ_{b0} (la distinción incluye cambio en el número de estados asintóticos presentes o en la naturaleza o la clasificación según su estabilidad de los ya existentes). Así las cosas, pueden existir diversos tipos de bifurcaciones locales dependiendo de cómo se transforman los estados asintóticos en el momento en el que el parámetro μ_b “cruza” por su punto de bifurcación, μ_{b0} . Entre las bifurcaciones locales más conocidas en sistemas dinámicos en tiempo continuo se encuentran:

1. Bifurcación transcítica: Es aquella en la que dos estados de equilibrio intercambian su estabilidad (el atractor pasar a ser repulsor y viceversa), pero no hay destrucción de los estados de equilibrio ya existentes o creación de nuevos estados de equilibrio. Así las cosas, la parte real de los valores propios de los estados de equilibrio pasa de negativa a positiva en el caso del que era inicialmente un atractor y de positiva a negativa en el caso del que era inicialmente un repulsor, tan pronto el parámetro μ_b “cruza” por su punto de bifurcación, μ_{b0} .

2. Bifurcación nodo – silla: Es aquella en la que un punto de equilibrio desaparece (no existen puntos de equilibrio) para valores de μ_b menores a los del punto de bifurcación μ_{b0} y se convierte en dos puntos de equilibrio, un punto de silla y un nodo estable, para valores de μ_b mayores a los del punto de bifurcación μ_{b0} .
3. Bifurcación simétrica o de horquilla (o de pitchfork): Es aquella en la que se pasa de un punto fijo estable a dos cuando el parámetro μ_b “cruza” por su punto de bifurcación μ_{b0} . Este tipo de bifurcaciones ocurre porque el punto fijo estable se vuelve inestable y aparecen, al mismo tiempo, dos nuevos puntos fijos estables. Estas bifurcaciones pueden clasificarse en dos grupos importantes: subcríticas y supercríticas. En la bifurcación supercrítica, un punto fijo estable se bifurca en dos puntos fijos estables y uno inestable. En la subcrítica dos puntos fijos inestables y uno estable colapsan en un punto fijo inestable.
4. Bifurcación de Hopf: Es aquella en la que un punto fijo estable se convierte en una órbita periódica (ciclo límite) en el punto de bifurcación. Ocurre en sistemas de dos o más variables de estado cuando, al cruzar μ_b por su punto de bifurcación μ_{b0} , un par de valores propios complejos conjugados ($\lambda = a + ib$, $\lambda^* = a - ib$; $b \neq 0$) “pasan” a través del eje imaginario (es decir, existe un par de raíces de la ecuación característica imaginarias puras). Esto significa que en el punto de bifurcación el signo de a , la parte real de los valores propios complejos conjugados cambia, de negativo (punto hiperbólico estable) a cero (punto no hiperbólico: centro o ciclo límite) y luego, para valores mayores al de bifurcación, pasa de cero a positivo (punto hiperbólico inestable mientras todos los otros valores propios se quedan a la izquierda del eje, es decir, mantienen sus partes reales negativas). Se dice que es una bifurcación de Hopf simple si todos los demás valores propios se quedan a la izquierda del eje imaginario, es decir, mantienen sus partes reales negativas, mientras que en las no simples los otros valores propios pueden tener partes reales positivas, pero siempre distintas de cero.

Por ser la bifurcación de Hopf la que acá más nos interesa, ya que es el tipo de bifurcación más común en los modelos económicos⁵³, cabe comentar el método planteado por Liu (1994) para detectar bifurcaciones de Hopf simples sin necesidad de calcular los valores propios de la matriz Jacobiana. Este método se basa en el teorema de Routh-Hurwitz ya descrito, por lo que se refiere a la manera de verificar la presencia de una bifurcación de Hopf simple a partir de los coeficientes del polinomio característico de la matriz jacobiana.

Sea entonces X_e un punto de equilibrio del sistema dinámico cuando el parámetro μ toma el valor μ_e . Suponga una “curva suave de puntos de equilibrio”, esto es, una relación entre los puntos de equilibrio del sistema y los valores del parámetro $\mu : x_e(\mu)$. Por supuesto, en μ_e la curva toma el valor $X_e : x_e(\mu_e) = X_e$. En una bifurcación de Hopf, en el par de valores propios conjugados que dependen de μ , esto es, en $\lambda(\mu) = a \pm ib$, la parte real a cambia de signo de manera suave cuando μ cruza por μ_e (y en particular es cero cuando $\mu = \mu_e$), es decir:

$$\frac{d}{d\mu} Re(\lambda(\mu))|_{\mu=\mu_e} \neq 0, Im(\lambda(\mu_e)) \neq 0 \quad (\text{A.26})$$

Por otro lado, los coeficientes del polinomio característico (A.18) también se pueden ver como funciones suaves del valor que tome el parámetro μ , esto es, como $\alpha_i(\mu)$. Con ello, el teore-

⁵³Al respecto, véase Barnett y Duzhak (2009)

ma Routh-Hurwitz se puede reformular para el caso del polinomio característico (A.18) con $\alpha_0(\mu) > 0$ expresando la matriz de Hurwitz como⁵⁴:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(\mu) & \alpha_0(\mu) & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_3(\mu) & \alpha_2(\mu) & \alpha_1(\mu) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{2k-1}(\mu) & \alpha_{2k-2}(\mu) & \alpha_{2k-3}(\mu) & \cdots & \alpha_k(\mu) \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

Y enunciado que todos los valores propios tienen parte real negativa si y solo si los $k-1$ menores principales de la matriz (llamémoslos $D_1(\mu), D_2(\mu) \dots D_{k-1}(\mu)$, con $k=1, 2, \dots, g$) son positivos. Así las cosas, Liu (1994) demuestra que en $\mu = \mu_e$ se presenta una bifurcación de Hopf simple si $\alpha_0(\mu_e) > 0$, los $k-2$ menores principales de la matriz (A.27) son negativos y el menor principal $k-1$ es cero, y además, el valor de este menor principal cambia de manera suave cuando μ cruza el punto de bifurcación μ_e . En síntesis, las condiciones de Liu para que exista una bifurcación de Hopf simple se resumen en:

$$\alpha_0(\mu_e) > 0, D_1(\mu_e) > 0, D_2(\mu_e) > 0, \dots, D_{g-2}(\mu_e) > 0, D_{g-1}(\mu_e) > 0, \frac{d}{d\mu} D_{g-1}(\mu)|_{\mu=\mu_e} \neq 0 \quad (\text{A.28})$$

Por ejemplo, para $g=2$, las condiciones para que en μ_e exista una bifurcación de Hopf simple son $\alpha_0(\mu_e) > 0, \alpha_1(\mu_e) = 0, \frac{d}{d\mu} \alpha_1(\mu) \neq 0$; para $g=3$ las condiciones son $\alpha_0(\mu_e) > 0, \alpha_1(\mu_e) > 0, \alpha_1(\mu_e) \alpha_2(\mu_e) - \alpha_0(\mu_e) = 0, \frac{d}{d\mu} (\alpha_1(\mu_e) \alpha_2(\mu_e) - \alpha_0(\mu_e)) \neq 0$, etcétera.

Por último, un sistema dinámico es estructuralmente estable si pequeñas perturbaciones del sistema no cambian el aspecto de las órbitas en el espacio de fases, es decir, la estructura topológica de las órbitas del sistema. Esto es, la estabilidad estructural le permite a un sistema que sus propiedades cualitativas persistan bajo pequeñas variaciones de los parámetros o de las formas funcionales del mismo⁵⁵. Así las cosas, un sistema cuyos valores de los parámetros estén cercanos a regiones de bifurcación como las antes descritas resulta estructuralmente inestable.

Como se vio en la introducción las implicaciones de política de la presencia de bifurcaciones son importantes. El concepto macroeconómico de “política de estabilización” implícitamente asume que la economía es inestable sin la imposición de dicha política. De aquí, que puede ser vista como un tipo de instrumento que mueve la economía desde un régimen inestable a otro estable. En términos de los conceptos expuestos, una política de estabilización se interpretaría como una política que bifurca el sistema moviendo los parámetros desde un punto en donde las soluciones son inestables a uno donde sean estables, por lo que hace que el sistema “cruce” la frontera de bifurcación que separa el espacio de parámetros de la parte inestable a la estable. Y esto es posible debido a que cuando se impone una regla de política se incrementa la dimensión del espacio de parámetros, ya que los nuevos coeficientes de la regla se añaden a los parámetros del sistema inicial. El resultado es un cambio en las zonas de bifurcación del espacio de parámetros, incluyendo la de aquel conjunto que soportaba las soluciones estables, incluso si los parámetros estimados en el sistema inicial permanecen fijos.

⁵⁴Dicha matriz se construye hasta la fila en la que su primer elemento es $\alpha_{2g-1}(\mu)$. Cualquier elemento de la matriz que resulte de la forma α_{-i} es cero para todo $i > 0$, y, asimismo, por la definición de (19) $\alpha_g = 1$.

⁵⁵Cabe decir que algunos trabajos han llegado a la conclusión de que la estabilidad estructural es una propiedad bastante compleja y demasiado fina para ser genérica, por lo que fueron definidas propiedades más gruesas dando lugar a la introducción de los llamados sistemas dinámicos de Morse-Smale que son estructuralmente estables.

Por tanto, ante la presencia de inestabilidad estructural en un modelo dinámico aplicado en economía se hace relevante el análisis de las políticas de estabilización, que claramente son en espíritu keynesianas. Esto, por cuanto en un modelo neoclásico opera la “irrelevancia de la política”, ya que la estabilidad estructural del sistema, junto con la unicidad y la estabilidad del equilibrio, son propiedades inherentes a este tipo de esquemas. Así, la introducción de modelos estructuralmente inestables se ha dado cuenta desde una perspectiva keynesiana, como se comenta en el primer capítulo. El estudio de dichos modelos y de los efectos de las políticas estabilizadoras plantea pues un desafío a los análisis efectuados bajo esquemas neoclásicos convencionales.

Anexo A: Demostración de las proposiciones 2 y 3

Proposición 2

Dados los supuestos enunciados en la proposición 2, los signos de la matriz del jacobiano vienen dados por:

$$\begin{pmatrix} - & + & 0 & 0 \\ - & - & - & + \\ 0 & + & - & + \\ 0 & + & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De acuerdo con las condiciones necesarias y suficientes del Teorema de Routh- Hurwitz (TRH en adelante) para que todos los valores propios de la matriz tengan parte real negativa y por ende el estado estacionario sea estable, se debe tener que los coeficientes del polinomio característico ($\lambda^4 + \alpha_3\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$) cumplan las siguientes cuatro condiciones:

$$\Delta_1 = \alpha_3 > 0$$

$$\Delta_2 = \alpha_3\alpha_2 - \alpha_1 > 0$$

$$\Delta_3 = \alpha_3\alpha_2\alpha_1 - \alpha_3^2\alpha_0 - \alpha_1^2 > 0$$

$$\Delta_4 = \alpha_0 > 0$$

Dichos coeficientes se expresan a partir de la traza (tr), los menores principales de orden 2 (Pr2) y de orden 3 (Pr3) y el determinante (det) de la matriz del jacobiano (J), de la siguiente manera:

$$\alpha_0 = \det(J), \quad \alpha_1 = - \sum \text{Pr}_3(J), \quad \alpha_2 = \sum \text{Pr}_2(J), \quad \alpha_3 = -\text{Tr}(J),$$

Nótese que para sistemas de orden igual o superior a cuatro el cálculo de las condiciones TRH puede llegar a ser algebraicamente complejo. No obstante, estas se pueden simplificar haciendo uso de alguno de los siguientes cuatro conjuntos de condiciones, denominadas de Lienard-Chiepart, que implican casi la mitad de operaciones y que aseguran el cumplimiento de las condiciones TRH; las cuales, para el caso de la ecuación característica de cuarto grado, son⁵⁶:

$$i) \alpha_0 > 0, \alpha_2 > 0, \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0$$

$$ii) \alpha_0 > 0, \alpha_2 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0$$

$$iii) \alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_3 > 0, \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0$$

$$iv) \alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_3 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0$$

Haciendo uso del cuarto conjunto de restricciones, las condiciones necesarias y suficientes para que el estado estacionario sea estable se pueden re expresar como:

⁵⁶Para una exposición detallada de las condiciones de Lienard-Chiepart, véase Gandolfo (1997, p.223)

$$\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_3 > 0, \alpha_3\alpha_2 - \alpha_1 > 0,$$

Nótese que la cuarta desigualdad implica a su vez que $\alpha_2 > 0$, por lo que una condición necesaria (pero no suficiente) para la estabilidad asintótica local del equilibrio consiste en:

$$\alpha_i > 0 \text{ para todo } i \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Esta condición necesaria se demuestra a continuación:

$$\alpha_0 = \det(J) = (+)^{4+2} (+) \begin{vmatrix} - & 0 & 0 \\ - & - & + \\ 0 & - & + \end{vmatrix} = (+)(+)[(+)+(-)]$$

El signo del último determinante depende exclusivamente de γ_{ip} y γ_i (elementos (3,3) y (3,4) de la jacobiana). Como $\gamma_{ip} = \gamma_i(1 + \alpha_{ip})$, entonces $\gamma_{ip} > \gamma_i$ si $\alpha_{ip} > 0$ que es lo que se ha supuesto en el enunciado. Por tanto, $\alpha_0 > 0$.

$$\alpha_1 = - \sum \text{Pr}_3(J)$$

Los signos de los menores principales de orden 3 vienen dados por los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} - & + & 0 \\ - & - & - \\ 0 & + & - \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} - & + & 0 \\ - & - & + \\ 0 & + & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} - & 0 & 0 \\ 0 & - & + \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} - & - & + \\ + & - & + \\ + & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(-) + (-) + (-) (+) 0 (-) + (+)

Nótese que los únicos menores que implican signos positivos son el segundo y el cuarto. En el segundo, el signo positivo es resultado de multiplicar $\beta_{\pi^m} \gamma_{ip}(\kappa\beta_p + \kappa\kappa_p\beta_w)$ y α_i . Sin embargo, se asumió que β_{π^m} y α_i son lo suficientemente pequeños, por lo que este producto es pequeño. Igual sucede con el cuarto menor. En consecuencia estos pequeños valores positivos terminan siendo dominados por los restantes términos negativos en la sumatoria, por lo que $\sum \text{Pr}_3(J) < 0$ y de ahí $\alpha_1 > 0$.

$$\alpha_2 = \sum \text{Pr}_2(J)$$

Los signos de los menores principales de orden 2 vienen dados por los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} - & + \\ - & - \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} - & 0 \\ 0 & - \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} - & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} - & - \\ + & - \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} - & + \\ + & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} - & + \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(+) (+) 0 (+) (-) 0

Nótese que el único menor que resulta en un signo negativo es el cuarto, producto de la multiplicación entre $\beta_{\pi^m} \gamma_{ip}(\kappa\beta_p + \kappa\kappa_p\beta_w)$ y α_i . De nuevo, como se asumió que β_{π^m} y α_i son lo suficientemente pequeños, este producto es pequeño. En consecuencia este pequeño valor negativo termina siendo dominado por los restantes términos positivos en la sumatoria, por lo que $\sum \text{Pr}_2(J) > 0$ y de ahí $\alpha_2 > 0$.

$$\alpha_3 = -\text{Tr}(J)$$

Como $\text{Tr}(J) < 0$ entonces $\alpha_3 > 0$

Ahora, se procede a demostrar la condición restante: $\alpha_3\alpha_2 - \alpha_1 > 0$ asumiendo que α_i es lo suficientemente pequeño y por tanto $\alpha_i \rightarrow 0$. Sea: $\varphi = \kappa(1 - \kappa_p)\beta_w - \kappa(1 - \kappa_w)\beta_p$, $\psi = \kappa(1 - \kappa_p)\beta_{wv} + \kappa(1 - \kappa_w)\beta_{pv}$ y $\phi = \kappa\beta_p + \kappa\kappa_p\beta_w$. Nótese que $\varphi, \psi, \phi > 0$. Con $\alpha_i \rightarrow 0$, los coeficientes de la ecuación característica se pueden escribir como:

$$\alpha_3 = -\text{Tr}(J) = -[-\psi - \alpha_{Vc} - \gamma_i] = \psi + \alpha_{Vc} + \gamma_i$$

$$\alpha_2 = \sum \text{Pr}_2(J) =$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} -\psi & \varphi \\ -\alpha_v & -\alpha_{Vc} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\psi & 0 \\ 0 & -\gamma_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\psi & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\alpha_{Vc} & 0 \\ \gamma_{ip}\phi + \gamma_{Vc} & -\gamma_i \end{vmatrix} \\ & \quad (\psi\alpha_{Vc} + \varphi\alpha_v) \quad (\psi\gamma_i) \quad 0 \quad (\alpha_{Vc} + \gamma_i) \\ & + \begin{vmatrix} -\alpha_{Vc} & 0 \\ \beta_{\pi^m}\gamma_{ip}\phi & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\gamma_i & \gamma_{ip} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ & \quad 0 \quad 0 \end{aligned}$$

$$\alpha_2 = \psi\alpha_{Vc} + \varphi\alpha_v + \psi\gamma_i + \alpha_{Vc} + \gamma_i$$

$$\alpha_1 = -\sum \text{Pr}_3(J) =$$

$$\begin{aligned} & - \left\{ \begin{vmatrix} -\psi & \varphi & 0 \\ -\alpha_v & -\alpha_{Vc} & 0 \\ 0 & \gamma_{ip}\phi + \gamma_{Vc} & -\gamma_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\psi & \varphi & 0 \\ -\alpha_v & -\alpha_{Vc} & 0 \\ 0 & \beta_{\pi^m}\gamma_{ip}\phi & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\psi & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_i & \gamma_{ip} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right\} \\ & - \left\{ \begin{vmatrix} -\alpha_{Vc} & 0 & 0 \\ \gamma_{ip}\phi + \gamma_{Vc} & -\gamma_i & \gamma_{ip} \\ \beta_{\pi^m}\gamma_{ip}\phi & 0 & 0 \end{vmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = \gamma_i(\alpha_{Vc}\psi + \varphi\alpha_v)$$

Ahora, $\alpha_3\alpha_2 - \alpha_1$ es igual a :

$$\begin{aligned} \alpha_3\alpha_2 - \alpha_1 &= (\psi + \alpha_{Vc} + \gamma_i)(\psi\alpha_{Vc} + \varphi\alpha_v + \psi\gamma_i + \alpha_{Vc} + \gamma_i) - \gamma_i(\alpha_{Vc}\psi + \varphi\alpha_v) \\ \alpha_3\alpha_2 - \alpha_1 &= \psi^2\alpha_{Vc} + \psi\varphi\alpha_v + \psi^2\gamma_i + \psi\alpha_{Vc} + \psi\gamma_i + \psi\alpha_{Vc}^2 + \varphi\alpha_v\alpha_{Vc} + \psi\gamma_i\alpha_{Vc} + \alpha_{Vc}^2 + \gamma_i\alpha_{Vc} + \\ & \quad \psi\gamma_i\alpha_{Vc} \\ & \quad + \varphi\gamma_i\alpha_v + \psi\gamma_i^2 + \gamma_i\alpha_{Vc} + \gamma_i^2 - \gamma_i\alpha_{Vc}\psi - \gamma_i\varphi\alpha_v \\ \alpha_3\alpha_2 - \alpha_1 &= \psi^2\alpha_{Vc} + \psi\varphi\alpha_v + \psi^2\gamma_i + \psi\alpha_{Vc} + \psi\gamma_i + \psi\alpha_{Vc}^2 + \varphi\alpha_v\alpha_{Vc} + \alpha_{Vc}^2 + \gamma_i\alpha_{Vc} + \psi\gamma_i\alpha_{Vc} + \psi\gamma_i^2 \\ & \quad + \gamma_i\alpha_{Vc} + \gamma_i^2 > 0 \end{aligned}$$

Con lo que queda mostrada la estabilidad asintótica local del estado estacionario.

Proposición 3

Asada y Yoshida (2003) muestran que cualquiera de los siguientes conjuntos de condiciones sobre los coeficientes del polinomio característico ($\lambda^4 + \alpha_3\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$) aseguran que un par de raíces de la ecuación sean imaginarias puras, mientras que las otras dos tengan partes reales distintas a cero (requerimientos para una bifurcación de Hopf):

$$i) \alpha_3 > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_0 > 0, \alpha_3\alpha_2\alpha_1 - \alpha_3^2\alpha_0 - \alpha_1^2 = 0$$

$$ii) \alpha_3\alpha_1 > 0, \alpha_0 \neq 0, \alpha_3\alpha_2\alpha_1 - \alpha_3^2\alpha_0 - \alpha_1^2 = 0$$

$$iii) \alpha_3 = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_0 < 0$$

La primera condición corresponde al caso de de una bifurcación de Hopf simple (las otras dos raíces tienen partes reales menores que cero), y configura al mismo conjunto de desigualdades al que se llegaría aplicando el método de Liu (1994) expuesto en el apéndice matemático. Entre tanto, las restantes dos corresponden al caso de una bifurcación de Hopf no simple (las otras dos raíces tienen partes reales distintas a cero).

Para probar la existencia de bifurcaciones de Hopf para los parámetros β_{π^m} y β_p nótese que en la demostración de la proposición 2 se llegó a que $\alpha_i > 0$ para todo $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ suponiendo que el valor de β_{π^m} era cercano a cero, y que β_p era tan pequeño respecto a β_w tal que $(1 - \kappa_p)\beta_w > (1 - \kappa_w)\beta_p$. En particular, estas condiciones eran necesarias solo para que $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, ya que α_0 y α_3 no dependían de ellas. Así, se mantiene $\alpha_3 > 0$ y $\alpha_0 > 0$ independientemente el valor que tomen β_{π^m} y β_p , lo que descarta el tercer conjunto de condiciones para bifurcaciones no simples de Hopf.

Ahora, tanto el primer como el segundo conjunto de condiciones exigen que $\alpha_3\alpha_2\alpha_1 - \alpha_3^2\alpha_0 - \alpha_1^2 = 0$. Nótese que esta condición se puede expresar como $\Lambda = \alpha_1(\alpha_3\alpha_2 - \alpha_1) - \alpha_3^2\alpha_0 = 0$. Asumiendo de nuevo las definiciones de φ, ψ, ϕ de la demostración anterior (por tanto $\alpha_i \rightarrow 0$), está condición puede ser expresada como:

$$\Lambda = \gamma_i (\alpha_{V^c}\psi + \varphi\alpha_v) \left(\begin{array}{c} \psi^2\alpha_{V^c} + \psi\varphi\alpha_v + \psi^2\gamma_i + \psi\alpha_{V^c} + \psi\gamma_i + \psi\alpha_{V^c}^2 \\ + \varphi\alpha_v\alpha_{V^c} + \alpha_{V^c}^2 + \gamma_i\alpha_{V^c} + \psi\gamma_i\alpha_{V^c} + \psi\gamma_i^2 + \gamma_i\alpha_{V^c} + \gamma_i^2 \end{array} \right) - (\psi + \alpha_{V^c} + \gamma_i)^2 \beta_{\pi^m} \psi \alpha_{ip} = 0$$

Dado que todos los coeficientes son positivos, el primer término es positivo mientras que el segundo, que también es positivo pero de menor magnitud, le resta al anterior. Del segundo término de Λ es claro que la única variación positiva de un parámetro que puede aumentar el segundo término sin que lo haga el primero es respecto a β_{π^m} . Por tanto solo para β_{π^m} existirá un valor (un punto de bifurcación) para el cual al aumentar β_{π^m} hasta dicho valor se tenga $\Lambda = 0$, y por ende sea una bifurcación de Hopf. Ahora bien, la siguiente posibilidad consiste en un aumento en β_p tal que no se cumpla $(1 - \kappa_p)\beta_w > (1 - \kappa_w)\beta_p$. Al aumentar β_p al punto en que $(1 - \kappa_p)\beta_w < (1 - \kappa_w)\beta_p$ se tiene que $\varphi < 0$ y por tanto habrá algún valor para φ en el que $\Lambda = 0$. Así, puede existir un valor para β_p (un punto de bifurcación) para el cual al aumentar β_p hasta dicho valor se tenga $\Lambda = 0$, y por ende este sea una bifurcación de Hopf.

Anexo B: Datos de la economía colombiana empleados

Cuadro B.1. Valores originales y finales de las series de utilización de la capacidad instalada, tasa de empleo, inflación trimestral de los precios, clima inflacionario y tasa de interés y cálculos intermedios más importantes.

Descripción	Utilización de la capacidad instalada (UCI)	UCI desest.	Tasa de desempleo	Tasa de desempleo desest.	Tasa de empleo desest.	Índice de precios al consumidor (IPC)	IPC desest.	Inflación trimestral de precios	Variación de la inflación trimestral	Variable de clima inflacionario	Tasa de interés de los CDT a 90 días
Acónimo	UCI	V	TD	TD_SA	E	IPC	IPC_SA	P	DP	PI	I
Cálculo		Se utilizó X12 sobre UCI	Se utilizó X12 sobre TD		1-TD_SA	Se utilizó X12 sobre IPC		$\frac{\ln(\text{IPC_SA}_t)}{\ln(\text{IPC_SA}_{t-1})}$	$(P_t)-(P_{t-1})$	PM orden 6 de DP	
Fuente	Fedesarrollo		DANE y cálculos propios*			DANE					Superfinanciera
mar-81	0.726	0.704	0.126	0.115	0.885	1.39	1.367	0.067	0.003	0.001	0.362
jun-81	0.691	0.702	0.084	0.082	0.918	1.50	1.443	0.054	-0.013	-0.002	0.359
sep-81	0.702	0.713	0.074	0.077	0.923	1.59	1.543	0.067	0.013	0.002	0.382
dic-81	0.712	0.711	0.065	0.071	0.929	1.64	1.622	0.050	-0.017	-0.001	0.390
mar-82	0.705	0.684	0.098	0.090	0.910	1.73	1.712	0.054	0.004	0.000	0.391
jun-82	0.664	0.675	0.090	0.088	0.912	1.87	1.801	0.051	-0.004	-0.002	0.387
sep-82	0.643	0.653	0.097	0.100	0.900	1.96	1.916	0.062	0.011	-0.001	0.375
dic-82	0.669	0.668	0.091	0.098	0.902	2.05	2.024	0.055	-0.007	0.000	0.367
mar-83	0.727	0.707	0.111	0.103	0.897	2.11	2.086	0.030	-0.025	-0.006	0.350
jun-83	0.697	0.708	0.124	0.120	0.880	2.28	2.187	0.048	0.018	0.000	0.333
sep-83	0.692	0.702	0.115	0.118	0.882	2.32	2.271	0.038	-0.010	-0.003	0.332
dic-83	0.707	0.706	0.127	0.136	0.864	2.40	2.371	0.043	0.006	-0.001	0.333
mar-84	0.716	0.697	0.139	0.132	0.868	2.48	2.436	0.027	-0.016	-0.006	0.348
jun-84	0.693	0.705	0.136	0.131	0.869	2.61	2.512	0.031	0.004	-0.004	0.344
sep-84	0.706	0.714	0.134	0.138	0.862	2.69	2.638	0.049	0.018	0.003	0.350
dic-84	0.715	0.714	0.133	0.141	0.859	2.79	2.772	0.049	0.001	0.000	0.349
mar-85	0.737	0.718	0.143	0.137	0.863	3.00	2.945	0.061	0.011	0.004	0.352
jun-85	0.709	0.722	0.148	0.142	0.858	3.33	3.171	0.074	0.014	0.005	0.349
sep-85	0.730	0.736	0.141	0.146	0.854	3.36	3.303	0.041	-0.033	0.002	0.354
dic-85	0.740	0.740	0.129	0.136	0.864	3.45	3.430	0.038	-0.003	0.001	0.356
mar-86	0.757	0.739	0.142	0.136	0.864	3.72	3.622	0.054	0.017	0.001	0.318
jun-86	0.743	0.758	0.150	0.144	0.856	3.87	3.723	0.027	-0.027	-0.004	0.305
sep-86	0.739	0.742	0.133	0.138	0.862	3.90	3.825	0.027	0.000	-0.006	0.311
dic-86	0.743	0.743	0.125	0.131	0.869	4.12	4.105	0.071	0.045	-0.001	0.317
mar-87	0.772	0.754	0.135	0.130	0.870	4.45	4.354	0.059	-0.012	0.003	0.307
jun-87	0.737	0.752	0.122	0.117	0.883	4.75	4.555	0.045	-0.014	0.001	0.303
sep-87	0.755	0.757	0.112	0.117	0.883	4.88	4.810	0.055	0.010	0.000	0.306
dic-87	0.744	0.745	0.101	0.105	0.895	5.14	5.114	0.061	0.007	0.006	0.325
mar-88	0.748	0.731	0.127	0.122	0.878	5.61	5.458	0.065	0.004	0.006	0.334
jun-88	0.716	0.730	0.117	0.112	0.888	6.11	5.885	0.075	0.010	0.001	0.360
sep-88	0.729	0.731	0.101	0.106	0.894	6.33	6.229	0.057	-0.018	0.000	0.344
dic-88	0.730	0.731	0.104	0.108	0.892	6.57	6.550	0.050	-0.006	0.001	0.318
mar-89	0.744	0.728	0.109	0.105	0.895	7.15	6.942	0.058	0.008	0.001	0.322
jun-89	0.718	0.731	0.101	0.096	0.904	7.56	7.330	0.054	-0.004	-0.001	0.331
sep-89	0.733	0.735	0.088	0.093	0.907	7.89	7.798	0.062	0.008	-0.001	0.331
dic-89	0.737	0.738	0.091	0.094	0.906	8.28	8.291	0.061	-0.001	-0.002	0.338
mar-90	0.750	0.733	0.097	0.094	0.906	9.12	8.829	0.063	0.001	0.001	0.338
jun-90	0.704	0.716	0.107	0.102	0.898	9.75	9.418	0.065	0.002	0.002	0.348
sep-90	0.734	0.737	0.100	0.106	0.894	10.28	10.071	0.067	0.002	0.002	0.360
dic-90	0.721	0.723	0.106	0.109	0.891	10.96	10.892	0.078	0.011	0.004	0.368
mar-91	0.750	0.732	0.105	0.102	0.898	11.97	11.628	0.065	-0.013	0.001	0.353
jun-91	0.726	0.737	0.105	0.099	0.901	12.78	12.373	0.062	-0.003	0.000	0.364
sep-91	0.743	0.748	0.098	0.105	0.895	13.37	13.175	0.063	0.001	0.000	0.380
dic-91	0.752	0.755	0.093	0.095	0.905	13.90	13.951	0.057	-0.006	-0.001	0.371
mar-92	0.771	0.751	0.106	0.103	0.897	15.21	14.805	0.059	0.002	-0.001	0.294
jun-92	0.740	0.750	0.110	0.103	0.897	16.37	15.782	0.064	0.004	-0.002	0.245
sep-92	0.732	0.739	0.090	0.097	0.903	16.96	16.803	0.063	-0.001	0.000	0.247
dic-92	0.731	0.735	0.096	0.099	0.901	17.39	17.539	0.043	-0.020	-0.003	0.272
mar-93	0.772	0.751	0.093	0.091	0.909	18.89	18.447	0.050	0.008	-0.002	0.259
jun-93	0.725	0.733	0.090	0.084	0.916	19.87	19.289	0.045	-0.006	-0.002	0.260
sep-93	0.739	0.748	0.076	0.082	0.918	20.60	20.330	0.053	0.008	-0.001	0.247
dic-93	0.747	0.752	0.076	0.078	0.922	21.33	21.439	0.053	0.001	-0.002	0.256
mar-94	0.773	0.750	0.100	0.098	0.902	23.32	22.696	0.057	0.004	-0.001	0.254
jun-94	0.751	0.758	0.095	0.088	0.912	24.46	23.848	0.049	-0.007	0.001	0.266
sep-94	0.726	0.737	0.074	0.079	0.921	25.20	24.890	0.043	-0.007	-0.001	0.303
dic-94	0.736	0.742	0.076	0.079	0.921	26.15	26.226	0.052	0.009	0.001	0.357

Corresponde a una serie utilizada en la estimación econométrica

*Los cálculos propios corresponden a los procedimientos que se detallan en el texto.

Cuadro B.1. (continuación)

Descripción	Utilización de la capacidad instalada (UCI)	UCI desest.	Tasa de desempleo	Tasa de desempleo desest.	Tasa de empleo desest.	Índice de precios al consumidor (IPC)	IPC desest.	Inflación trimestral de precios	Variación de la inflación trimestral	Variable de dima inflacionario	Tasa de interés de los CDT a 90 días
Acrónimo	UCI	V	TD	TD_SA	E	IPC	IPC_SA	P	DP	PI	I
Cálculo		Se utilizó X12 sobre UCI	Se utilizó X12 sobre TD		1-TD_SA	Se utilizó X12 sobre IPC		LN(IPC_SA)-LN(IPC_SA)-	(Pt)-(Pt-1)	PM orden 6 de DP	
Fuente	Fedesarrollo		DANE y cálculos propios*			DANE					Superfinanciera
mar-95	0.756	0.732	0.079	0.077	0.923	28.29	27.492	0.047	-0.005	-0.001	0.339
jun-95	0.713	0.719	0.089	0.083	0.917	29.76	28.942	0.051	0.004	0.000	0.345
sep-95	0.697	0.709	0.084	0.089	0.911	30.44	30.158	0.041	-0.010	-0.003	0.296
dic-95	0.686	0.691	0.093	0.097	0.903	31.24	31.461	0.042	0.001	-0.001	0.302
mar-96	0.726	0.702	0.101	0.099	0.901	34.01	33.120	0.051	0.009	0.001	0.323
jun-96	0.706	0.713	0.113	0.105	0.895	35.62	34.676	0.046	-0.005	-0.001	0.320
sep-96	0.700	0.713	0.119	0.124	0.876	37.00	36.529	0.052	0.006	0.001	0.300
dic-96	0.725	0.730	0.111	0.117	0.883	38.00	38.287	0.047	-0.005	-0.001	0.280
mar-97	0.750	0.725	0.122	0.119	0.881	40.45	39.654	0.035	-0.012	-0.001	0.255
jun-97	0.695	0.702	0.135	0.127	0.873	42.28	41.141	0.037	0.002	-0.001	0.236
sep-97	0.683	0.696	0.122	0.126	0.874	43.66	43.101	0.047	0.010	-0.001	0.227
dic-97	0.660	0.663	0.120	0.128	0.872	44.72	45.049	0.044	-0.002	0.000	0.233
mar-98	0.663	0.641	0.144	0.140	0.860	48.24	46.934	0.041	-0.003	-0.002	0.252
jun-98	0.620	0.627	0.159	0.151	0.849	51.03	49.687	0.057	0.016	0.002	0.318
sep-98	0.608	0.619	0.150	0.152	0.848	51.44	51.315	0.032	-0.025	0.000	0.345
dic-98	0.636	0.639	0.156	0.168	0.832	52.18	52.535	0.024	-0.009	-0.002	0.353
mar-99	0.686	0.664	0.195	0.187	0.813	54.75	54.117	0.030	0.006	-0.003	0.291
jun-99	0.667	0.676	0.198	0.190	0.810	55.60	54.701	0.011	-0.019	-0.006	0.192
sep-99	0.675	0.685	0.201	0.202	0.798	56.23	56.034	0.024	0.013	-0.003	0.182
dic-99	0.698	0.700	0.179	0.193	0.807	57.00	57.416	0.024	0.000	-0.005	0.168
mar-00	0.715	0.694	0.204	0.195	0.805	60.08	58.938	0.026	0.002	-0.001	0.109
jun-00	0.684	0.694	0.205	0.200	0.800	60.98	60.151	0.020	-0.006	-0.001	0.114
sep-00	0.676	0.683	0.206	0.205	0.795	61.41	61.232	0.018	-0.003	-0.002	0.124
dic-00	0.663	0.664	0.198	0.214	0.786	61.99	62.429	0.019	0.002	0.001	0.129
mar-01	0.686	0.669	0.201	0.191	0.809	64.77	63.698	0.020	0.001	-0.001	0.132
jun-01	0.661	0.671	0.182	0.179	0.821	65.82	64.981	0.020	0.000	-0.001	0.126
sep-01	0.669	0.674	0.178	0.176	0.824	66.30	66.175	0.018	-0.002	-0.001	0.122
dic-01	0.669	0.668	0.167	0.181	0.819	66.73	67.226	0.016	-0.002	-0.001	0.113
mar-02	0.689	0.677	0.191	0.181	0.819	68.59	67.921	0.010	-0.005	-0.001	0.108
jun-02	0.662	0.672	0.177	0.176	0.824	69.93	68.902	0.014	0.004	-0.001	0.091
sep-02	0.683	0.686	0.181	0.179	0.821	70.26	70.174	0.018	0.004	0.000	0.078
dic-02	0.691	0.687	0.157	0.171	0.829	71.39	71.723	0.022	0.004	0.000	0.078
mar-03	0.712	0.705	0.174	0.164	0.836	73.80	72.955	0.017	-0.005	0.000	0.077
jun-03	0.701	0.711	0.168	0.167	0.833	74.97	74.209	0.017	0.000	0.000	0.077
sep-03	0.704	0.705	0.169	0.167	0.833	75.26	75.163	0.013	-0.004	0.000	0.077
dic-03	0.709	0.701	0.145	0.158	0.842	76.03	76.259	0.014	0.002	0.000	0.078
mar-04	0.701	0.699	0.170	0.159	0.841	78.39	77.508	0.016	0.002	0.000	0.078
jun-04	0.704	0.715	0.154	0.153	0.847	79.52	78.472	0.012	-0.004	-0.002	0.077
sep-04	0.709	0.709	0.146	0.145	0.855	79.76	79.651	0.015	0.003	0.000	0.077
dic-04	0.730	0.718	0.134	0.147	0.853	80.21	80.597	0.012	-0.003	-0.001	0.076
mar-05	0.699	0.701	0.154	0.143	0.857	82.33	81.580	0.012	0.000	0.000	0.074
jun-05	0.699	0.710	0.138	0.137	0.863	83.36	82.417	0.010	-0.002	-0.001	0.071
sep-05	0.724	0.722	0.134	0.133	0.867	83.76	83.537	0.014	0.003	0.000	0.069
dic-05	0.754	0.738	0.116	0.128	0.872	84.10	84.668	0.013	0.000	0.000	0.063
mar-06	0.709	0.715	0.136	0.126	0.874	85.71	85.087	0.005	-0.009	-0.002	0.059
jun-06	0.736	0.749	0.125	0.124	0.876	86.64	85.774	0.008	0.003	-0.001	0.059
sep-06	0.764	0.762	0.123	0.123	0.877	87.59	87.289	0.018	0.009	0.001	0.063
dic-06	0.764	0.745	0.118	0.130	0.870	87.87	88.332	0.012	-0.006	0.000	0.065
mar-07	0.745	0.753	0.128	0.118	0.882	90.67	89.555	0.014	0.002	0.000	0.069
jun-07	0.733	0.747	0.112	0.111	0.889	91.87	91.095	0.017	0.003	0.001	0.075
sep-07	0.741	0.738	0.108	0.108	0.892	91.97	91.910	0.009	-0.008	0.001	0.085
dic-07	0.756	0.736	0.095	0.105	0.895	92.87	93.131	0.013	0.004	0.001	0.086
mar-08	0.715	0.723	0.119	0.109	0.891	96.04	95.015	0.020	0.007	0.000	0.093
jun-08	0.677	0.691	0.114	0.113	0.887	98.47	96.965	0.020	0.000	0.001	0.097
sep-08	0.686	0.683	0.113	0.113	0.887	98.94	98.931	0.020	0.000	0.001	0.098
dic-08	0.695	0.676	0.105	0.117	0.883	100.00	100.392	0.015	-0.005	0.000	0.101
mar-09	0.652	0.659	0.138	0.126	0.874	101.94	101.275	0.009	-0.006	0.000	0.089
jun-09	0.654	0.668	0.124	0.123	0.877	102.22	101.586	0.003	-0.006	-0.002	0.062
sep-09	0.663	0.661	0.125	0.125	0.875	102.11	102.096	0.005	0.002	-0.003	0.050
dic-09	0.693	0.671	0.118	0.131	0.869	102.00	102.774	0.007	0.002	-0.002	0.043

Corresponde a una serie utilizada en la estimación econométrica

*Los cálculos propios corresponden a los procedimientos que se detallan en el texto.

Cuadro B.2. Valores originales y finales de las series de productividad, participación de la remuneración al factor trabajo en el producto e inflación trimestral de los salarios, y cálculos intermedios más importantes

Descripción	Producto interno bruto (PIB)	Ocupados	Productividad	Productividad promedio móvil decreciente	Crecimiento de la productividad	Participación de la remuneración al factor trabajo en el producto	Participación de la remuneración al factor trabajo en el producto	Índice de salarios a partir de la remuneración trimestral al factor trabajo en el producto	Inflación trimestral de salarios
Acronimo	Y	L	PM	PM_D	Z	ParL	V	SAL	W
Cálculo			Y/L	PM de orden 4 con pond. decrec.	$\frac{\ln(\text{PM}_D)}{\ln(\text{PM}_{D-1})}$		Trimestralización de ParL con variab. de ref. Y/L.		$\frac{\ln(\text{SAL}_t)}{\ln(\text{SAL}_{t-1})}$
Fuente	DANE y cálculos propios*	DANE y cálculos propios*				DANE y cálculos propios*		DANE y cálculos propios*	
mar-81	28333337	8009	3537	3555	-0.002		0.517	40.8	0.047
jun-81	28158921	7849	3588	3568	0.004		0.518	43.1	0.056
sep-81	28313686	8041	3521	3549	-0.005		0.518	44.6	0.034
dic-81	28573456	8445	3383	3481	-0.019	0.515	0.519	45.4	0.018
mar-82	28649071	8830	3245	3376	-0.017		0.517	45.9	0.010
jun-82	28737723	9533	3015	3208	-0.015		0.526	47.0	0.024
sep-82	28649613	9421	3041	3108	-0.011		0.514	48.4	0.029
dic-82	28440995	9438	3014	3045	-0.006	0.518	0.514	50.5	0.042
mar-83	28621678	9566	2992	3011	-0.004		0.522	53.2	0.052
jun-83	29043437	9670	3003	3006	-0.002		0.522	55.3	0.039
sep-83	28983872	9843	2945	2979	-0.009		0.533	58.2	0.052
dic-83	29618997	9935	2981	2976	-0.001	0.526	0.532	61.2	0.051
mar-84	29682802	9960	2980	2976	0.000		0.520	64.6	0.053
jun-84	29725053	9963	2983	2978	0.001		0.507	66.8	0.033
sep-84	30150146	10250	2941	2966	-0.004		0.491	69.6	0.041
dic-84	30606683	10390	2946	2955	-0.003	0.520	0.482	72.6	0.042
mar-85	30652670	10378	2954	2952	-0.001		0.476	74.5	0.026
jun-85	30763081	10605	2901	2930	-0.008		0.486	78.5	0.053
sep-85	30926765	10241	3020	2964	0.011		0.483	82.5	0.050
dic-85	31567418	10318	3059	3005	0.014	0.483	0.480	86.9	0.052
mar-86	32327100	10504	3078	3043	0.012		0.455	92.5	0.063
jun-86	32927657	10560	3118	3084	0.014		0.446	97.3	0.050
sep-86	33078020	10702	3091	3093	0.003		0.443	102.0	0.047
dic-86	32784790	11004	2979	3050	-0.014	0.448	0.447	107.9	0.056
mar-87	33973334	11124	3054	3045	-0.002		0.442	113.8	0.054
jun-87	34358711	11338	3030	3033	-0.004		0.444	117.7	0.033
sep-87	34801851	11418	3048	3037	0.001		0.445	125.1	0.061
dic-87	34986958	11558	3027	3037	0.000	0.444	0.447	133.1	0.062
mar-88	35514757	11604	3061	3045	0.003		0.443	142.7	0.069
jun-88	35795020	11840	3023	3038	-0.002		0.440	150.4	0.053
sep-88	36087263	11965	3016	3028	-0.003		0.441	159.5	0.059
dic-88	36269045	12074	3004	3017	-0.004	0.445	0.453	172.3	0.077
mar-89	36283075	11983	3028	3018	0.000		0.456	180.9	0.049
jun-89	37119235	12266	3026	3021	0.001		0.458	191.5	0.057
sep-89	37601086	12340	3047	3033	0.004		0.446	200.8	0.048
dic-89	37559084	12357	3040	3038	0.002	0.453	0.438	212.0	0.054
mar-90	38561419	12536	3076	3054	0.005		0.437	232.0	0.052
jun-90	38481962	12502	3078	3067	0.004		0.443	244.2	0.051
sep-90	38591933	12456	3098	3082	0.005		0.450	254.9	0.043
dic-90	38879563	12836	3029	3064	-0.006	0.440	0.457	265.0	0.039
mar-91	38415768	13049	2944	3014	-0.017		0.466	280.3	0.056
jun-91	40187896	13129	3061	3023	0.003		0.458	301.9	0.074
sep-91	38979774	13315	2928	2981	-0.012		0.462	320.7	0.061
dic-91	40694933	13146	3096	3023	-0.007	0.458	0.453	340.0	0.058
mar-92	40566551	13480	3009	3024	-0.003		0.475	370.6	0.086
jun-92	41021179	13897	2952	2995	-0.001		0.492	396.3	0.067
sep-92	41232467	13700	3010	3001	0.002		0.499	421.9	0.062
dic-92	41658825	13918	2993	2991	-0.003	0.489	0.512	439.4	0.041
mar-93	42761682	13952	3065	3021	0.010		0.509	466.8	0.061
jun-93	42987619	14053	3059	3043	0.007		0.514	495.7	0.060
sep-93	43604059	14389	3030	3042	0.000		0.516	529.8	0.067
dic-93	44055959	14154	3113	3072	0.010	0.512	0.513	565.1	0.064
mar-94	44311118	14236	3113	3091	0.006		0.514	614.7	0.084
jun-94	45568984	14255	3197	3138	0.015		0.515	661.0	0.073
sep-94	46998137	14426	3258	3196	0.018		0.513	701.8	0.060
dic-94	46949308	14555	3226	3218	0.007	0.514	0.514	742.0	0.056

Corresponde a una serie utilizada en la estimación econométrica

*Los cálculos propios corresponden a los procedimientos que se detallan en el texto.

Cuadro B.2. (continuación)

Descripción	Producto interno bruto (PIB)	Ocupados	Productividad	Productividad promedio móvil decreciente	Crecimiento de la productividad	Participación de la remuneración al factor trabajo en el producto	Participación de la remuneración al factor trabajo en el producto	Índice de salarios a partir de la remuneración trimestral al factor trabajo en el producto	Inflación trimestral de salarios
Acrónimo	Y	L	PM	PM_D	Z	Parl.	V	SAL	W
Cálculo			Y/L	PM de óden 4 con pond. decrec.	LN(PM_Dt)-LN(PM_Dt-1)		Trimestralización de Parl _t con variab. de ref. Y/L		LN(SALt)-LN(SALt-1)
Fuente	DANE y cálculos propios*		DANE y cálculos propios*			DANE y cálculos propios*		DANE y cálculos propios*	
mar-95	47724745	14591	3271	3247	0.009		0.503	761.6	0.026
jun-95	48460533	14529	3335	3286	0.012		0.502	797.7	0.046
sep-95	48525208	14650	3312	3302	0.005		0.505	829.4	0.039
dic-95	49335234	14732	3349	3327	0.008	0.503	0.514	877.2	0.056
mar-96	49122534	14870	3304	3322	-0.002		0.518	930.5	0.059
jun-96	49347208	14362	3436	3366	0.013		0.514	988.7	0.061
sep-96	49718236	14312	3474	3416	0.015		0.511	1036.6	0.047
dic-96	49927143	14311	3489	3455	0.011	0.515	0.510	1077.9	0.039
mar-97	49236470	14217	3463	3470	0.004		0.512	1129.2	0.047
jun-97	51384152	14496	3545	3502	0.009		0.510	1182.7	0.046
sep-97	52166782	14738	3540	3521	0.005		0.510	1217.2	0.029
dic-97	53087773	14859	3573	3546	0.007	0.511	0.513	1265.5	0.039
mar-98	52980907	15121	3504	3536	-0.003		0.515	1307.9	0.033
jun-98	52561360	15080	3486	3514	-0.006		0.512	1346.4	0.029
sep-98	51004684	14757	3456	3486	-0.008		0.514	1379.5	0.024
dic-98	48840188	14745	3312	3409	-0.022	0.514	0.515	1399.2	0.014
mar-99	47567022	14489	3283	3347	-0.019		0.508	1432.7	0.024
jun-99	46771160	14666	3189	3269	-0.024		0.507	1466.0	0.023
sep-99	47421806	14670	3233	3238	-0.010		0.491	1491.7	0.017
dic-99	47702135	14869	3208	3219	-0.006	0.510	0.488	1528.6	0.024
mar-00	48813706	15005	3253	3229	0.003		0.482	1538.1	0.006
jun-00	48808151	15050	3243	3238	0.003		0.484	1566.5	0.018
sep-00	49397867	15241	3241	3241	0.001		0.488	1599.8	0.021
dic-00	49354127	15046	3280	3258	0.005	0.487	0.489	1636.9	0.023
mar-01	49674718	15516	3201	3237	-0.007		0.493	1632.9	-0.002
jun-01	49653774	15454	3213	3226	-0.004		0.491	1652.7	0.012
sep-01	50470598	15857	3183	3205	-0.006		0.496	1690.1	0.022
dic-01	50858019	16104	3158	3181	-0.008	0.493	0.499	1721.7	0.019
mar-02	50285495	15972	3148	3165	-0.005		0.498	1767.5	0.026
jun-02	51955757	15931	3261	3199	0.011		0.487	1809.2	0.023
sep-02	51738251	15873	3260	3228	0.009		0.478	1822.5	0.007
dic-02	51611778	15964	3233	3238	0.003	0.495	0.475	1836.2	0.007
mar-03	52922925	16455	3216	3234	-0.001		0.472	1843.9	0.004
jun-03	53177371	16635	3197	3216	-0.006		0.477	1857.2	0.007
sep-03	54000539	16663	3241	3222	0.002		0.476	1888.2	0.017
dic-03	54972820	16918	3249	3233	0.003	0.475	0.472	1933.7	0.024
mar-04	55301987	16671	3317	3270	0.011		0.459	1986.0	0.027
jun-04	55591825	16542	3361	3313	0.013		0.456	2034.0	0.024
sep-04	56340620	16703	3373	3346	0.010		0.454	2078.5	0.022
dic-04	57869725	16710	3463	3401	0.016	0.456	0.446	2099.8	0.010
mar-05	58155148	16750	3472	3438	0.011		0.444	2123.2	0.011
jun-05	59537527	16897	3523	3481	0.012		0.437	2161.9	0.018
sep-05	59749327	17146	3485	3492	0.003		0.431	2181.2	0.009
dic-05	60540295	17403	3479	3489	-0.001	0.442	0.433	2239.1	0.026
mar-06	61930830	17300	3580	3525	0.010		0.430	2297.5	0.026
jun-06	62996605	17251	3652	3579	0.015		0.428	2362.2	0.028
sep-06	64549410	17340	3723	3648	0.019		0.433	2437.6	0.031
dic-06	65028753	17058	3812	3730	0.022	0.431	0.433	2500.7	0.026
mar-07	67132290	17408	3856	3796	0.018		0.429	2541.6	0.016
jun-07	67794199	17747	3820	3820	0.006		0.431	2600.8	0.023
sep-07	68546014	17725	3867	3845	0.007		0.427	2655.5	0.021
dic-07	70237754	17591	3993	3907	0.016	0.429	0.417	2715.2	0.022
mar-08	69933521	17514	3993	3951	0.011		0.417	2761.6	0.017
jun-08	70316529	17516	4014	3989	0.010		0.411	2798.3	0.013
sep-08	70587944	17394	4058	4026	0.009		0.403	2821.3	0.008
dic-08	69531039	17382	4000	4020	-0.001	0.410	0.408	2846.2	0.009
mar-09	69574086	17916	3883	3967	-0.013		0.425	2890.9	0.016
jun-09	70127434	18489	3793	3888	-0.020		0.436	2935.6	0.015
sep-09	70429818	18287	3851	3855	-0.009		0.439	2988.6	0.018
dic-09	71235972	19020	3745	3801	-0.014	0.438	0.453	3025.4	0.012

Corresponde a una serie utilizada en la estimación econométrica

*Los cálculos propios corresponden a los procedimientos que se detallan en el texto.

Anexo C: Salidas econométricas detalladas

Sistema estimado

$$\begin{aligned}
 w &= c(11) + c(12) * e(-1) + c(14) * p + (1 - c(14)) * pi \\
 p &= c(22) * u(-1) + c(24) * w + (1 - c(24)) * pi + c(26) * z \\
 u &= c(31) + c(32) * u(-1) + c(33) * d(dtf(-1)) + c(34) * d(log(v(-1))) \\
 d(e, 0, 4) &= c(42) * d(u(-1), 0, 4) + c(43) * d(e(-1), 0, 4) \\
 i &= c(52) * i(-1) + c(53) * p(-1) + c(54) * u(-1)
 \end{aligned}$$

1. Estimación mediante GMM

Salida de la estimación

Estimation Method: Generalized Method of Moments
 Sample: 1982Q2 2009Q4
 Included observations: 111
 Total system (unbalanced) observations 545
 Identity matrix estimation weights - 2SLS coefs with GMM standard errors
 Kernel: Bartlett, Bandwidth: Fixed (6), Prewhitening

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(11)	-0.10918	0.04515	-2.41774	0.0159
C(12)	0.13778	0.05493	2.50824	0.0124
C(14)	0.72610	0.09858	7.36565	0.0000
C(22)	0.00892	0.00508	1.75735	0.0794
C(24)	0.83227	0.07678	10.8384	0.0000
C(26)	-0.40499	0.20000	-2.02496	0.0434
C(31)	0.07190	0.02584	2.78233	0.0056
C(32)	0.89829	0.03586	25.0482	0.0000
C(33)	-0.36965	0.17570	-2.10380	0.0359
C(34)	-0.13350	0.07029	-1.89924	0.0581
C(42)	0.09412	0.02666	3.53023	0.0005
C(43)	0.97769	0.03302	29.6066	0.0000
C(52)	0.86361	0.05474	15.7623	0.0000
C(53)	0.25013	0.25013	1.920435	0.0553
C(54)	-0.01158	0.00779	-1.48664	0.1377
Determinant residual covariance		5.70E-20		
J-statistic	1.23E-06			

Equation: $W = C(11) + C(12) * E(-1) + C(14) * P + (1 - C(14)) * PI$

Instruments: P(-1) E(-1 TO -6) C

Observations: 110

R-squared	0.629310	Mean dependent var	0.037510
Adjusted R-squared	0.622381	S.D. dependent var	0.020349
S.E. of regression	0.012504	Sum squared resid	0.016730
Durbin-Watson stat	1.174769		

Equation: $P = C(22) * U(-1) + C(24) * W + (1 - C(24)) * PI + C(26) * Z$

Instruments: W(-1) U(-1 TO -6) Z PI PI(-1 TO-6) C

Observations: 110

R-squared	0.628533	Mean dependent var	0.036765
Adjusted R-squared	0.621590	S.D. dependent var	0.020405
S.E. of regression	0.012552	Sum squared resid	0.016858
Durbin-Watson stat	1.117548		

Equation: $U = C(31) + C(32) * U(-1) + C(33) * D(DTFR(-1)) + C(34) * D(LOG(V(-1)))$

Instruments: P(-1) U(-1 TO -6) LOG(V(-1)) LOG(V(-2)) LOG(V(-3)) C

Observations: 110

R-squared	0.809104	Mean dependent var	0.712381
Adjusted R-squared	0.803702	S.D. dependent var	0.032247
S.E. of regression	0.014287	Sum squared resid	0.021637
Durbin-Watson stat	1.798806		

Equation: $D(E, 0, 4) = C(42) * D(U(-1), 0, 4) + C(43) * D(E(-1), 0, 4)$

Instruments: E(-1 TO -4) U(-1 TO -4) C

Observations: 111

R-squared	0.594521	Mean dependent var	0.001677
Adjusted R-squared	0.590801	S.D. dependent var	0.001677
S.E. of regression	0.011243	Sum squared resid	0.013778
Durbin-Watson stat	2.309954		

Equation: $I = C(52) * I(-1) + C(53) * P(-1) + C(54) * U(-1)$

Instruments: P(-1 TO -12) U(-1 TO -4) I(-1 to -4) C

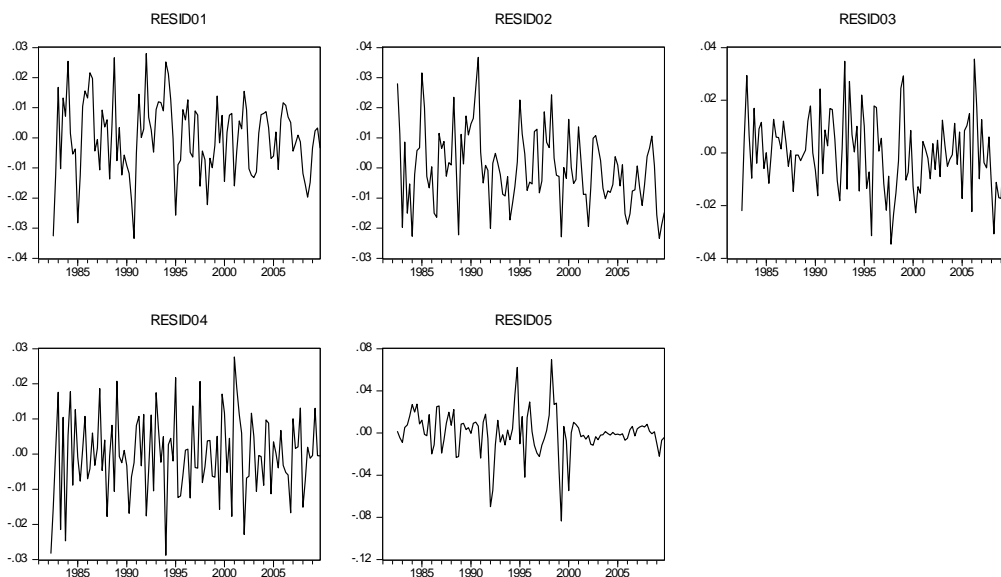
Observations: 110

R-squared	0.838949	Mean dependent var	0.004396
Adjusted R-squared	0.835760	S.D. dependent var	0.051661
S.E. of regression	0.020936	Sum squared resid	0.044271
Durbin-Watson stat	1.242960		

Estadísticas de normalidad de los residuales

	RESID01	RESID02	RESID03	RESID04	RESID05
Mean	1.74E-17	-7.87E-06	-2.13E-17	-0.000243	4.98E-05
Median	0.001194	0.000162	6.69E-05	-0.000532	0.000329
Std.Dev.	0.012389	0.012436	0.014058	0.011189	0.020732
Skewness	-0.189208	0.413799	0.18276	-0.033763	-0.666006
Kurtosis	3.017625	3.098955	2.923333	2.888416	7.385480
Jarque-Bera	0.657751	3.184084	0.281297	0.233156	89.50483
Probability	0.719733	0.203510	0.868795	0.88961	0.000000

Gráficos de los residuales



2. Estimación mediante 3OLS

Salida de la estimación

Estimation Method: Three-Stage Least Squares

Sample: 1982Q2 2009Q4

Included observations: 111

Total system (unbalanced) observations 551

Linear estimation after one-step weighting matrix

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(11)	-0.0959	0.0305	-3.1387	0.0018
C(12)	0.1172	0.0366	3.1957	0.0015
C(14)	0.8501	0.074	11.459	0.0000
C(22)	0.0084	0.0041	2.0408	0.0418
C(24)	0.8400	0.0705	11.910	0.0000
C(26)	-0.3697	0.1215	-3.0414	0.0025
C(31)	0.0719	0.0300	2.3907	0.0172
C(32)	0.8983	0.0422	21.280	0.0000
C(33)	-0.3821	0.1573	-2.4283	0.0155
C(34)	-0.1166	0.0871	-1.3387	0.1812
C(42)	0.0937	0.0385	2.4301	0.0154
C(43)	0.9862	0.0666	14.803	0.0000
C(52)	0.8650	0.0433	19.952	0.0000
C(53)	0.2045	0.114	1.7918	0.0737
C(54)	-0.0091	0.0064	-1.4231	0.1553

Determinant residual covariance 3.48E-20

Equation: $W = C(11) + C(12) * E(-1) + C(14) * P + (1 - C(14)) * PI$

Instruments: P(-1) E(-1 TO -6) C

Observations: 110

R-squared	0.600378	Mean dependent var	0.037510
Adjusted R-squared	0.592908	S.D. dependent var	0.020349
S.E. of regression	0.012983	Sum squared resid	0.018256
Durbin-Watson stat	1.188074		

Equation: $P = C(22) * U(-1) + C(24) * W + (1 - C(24)) * PI + C(26) * Z$

Instruments: W(-1) U(-1 TO -6) Z PI PI(-1 TO-6) C

Observations: 110

R-squared	0.626856	Mean dependent var	0.036765
Adjusted R-squared	0.619881	S.D. dependent var	0.020405
S.E. of regression	0.012580	Sum squared resid	0.016934
Durbin-Watson stat	1.122452		

Equation: $U = C(31) + C(32) * U(-1) + C(33) * D(DTFR(-1)) + C(34) * D(LOG(V(-1)))$

Instruments: P(-1) U(-1 TO -6) LOG(V(-1)) LOG(V(-2)) LOG(V(-3)) C

Observations: 110

R-squared	0.800106	Mean dependent var	0.712381
Adjusted R-squared	0.800619	S.D. dependent var	0.032247
S.E. of regression	0.014396	Sum squared resid	0.021977
Durbin-Watson stat	1.785167		

Equation: $D(E, 0, 4) = C(42) * D(U(-1), 0, 4) + C(43) * D(E(-1), 0, 4)$

Instruments: E(-1 TO -4) U(-1 TO -4) C

Observations: 111

R-squared	0.591047	Mean dependent var	0.001677
Adjusted R-squared	0.587295	S.D. dependent var	0.017576
S.E. of regression	0.011290	Sum squared resid	0.013895
Durbin-Watson stat	2.309871		

Equation: $I = C(52) * I(-1) + C(53) * P(-1) + C(54) * U(-1)$

Instruments: P(-1 TO -12) U(-1 TO -4) I(-1 to -4) C

Observations: 110

R-squared	0.838661	Mean dependent var	0.004396
Adjusted R-squared	0.835467	S.D. dependent var	0.051661
S.E. of regression	0.020955	Sum squared resid	0.044350
Durbin-Watson stat	1.233292		

Estadísticas de normalidad de los residuales

	RESID01	RESID02	RESID03	RESID04	RESID05
Mean	4.62E-05	-4.67E-05	-2.76E-05	-0.000233	3.45E-06
Median	0.001251	3.00E-05	0.000301	-0.000479	-0.000168
Std. Dev.	0.025867	0.012464	0.014199	0.011237	0.020751
Skewness	-0.36978	0.437074	0.112790	-0.107420	-0.466638
Kurtosis	3.117766	3.097939	2.89953	2.952102	7.449190
Jarque-Bera	2.559668	3.546240	0.279106	0.224110	89.55394
Probability	0.278083	0.169802	0.869747	0.894039	0.000000

Gráficos de los residuales

