

Tesis de Maestría presentada como requisito para
optar al título: Magister en Ciencias - Física

Análisis de la inestabilidad ion-ciclotrón electromagnética en plasmas del viento solar

José Antonio Valencia Aricapa



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
PCM Computational Applications

Directora

Prof. Elisabeth Restrepo Parra

Codirector

Prof. Jaime Humberto Hoyos Barrios

Línea de Investigación

Plasmas Astrofísicos

A mis padres

Agradecimientos

- A la Profesora Elisabeth Restrepo Parra por su gran apoyo e inmenso aporte a mi vida académica, tanto en lo profesional como en lo personal.
- al Profesor Jaime Araneda de la Universidad de Concepción en Chile por su enorme colaboración y hospitalidad en la estadía de investigación realizada en Concepción en Diciembre de 2016 por el co-director de esta tesis Jaime Hoyos y el investigador Edward Villegas. Su orientación durante esta estadía fue el pilar fundamental para el inicio de la línea de investigación en que se fundamenta esta tesis.
- A Edward Villegas por su colaboración con el entendimiento del método numérico usado en esta tesis.
- Al Profesor Jaime Humberto Hoyos por su calidad humana, su incondicional apoyo, motivación constante y pilar fundamental para el desarrollo de esta tesis, además de su influencia y capacidad profesional que motivó mi pasión por la astrofísica.
- A mi compañero Sebastián Ramírez Ramírez por ser la persona que me encaminó en el estudio de la física del plasma y su apoyo en mi crecimiento académico.
- A mis compañeros del grupo de investigación PCM Computational applications, por su ayuda en diversos momentos durante el proceso de la maestría.
- A la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales por mi formación académica.
- A la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales por brindarme su apoyo mediante las Becas, gracias a estas pude permanecer en la ciudad.
- A mi familia por siempre estar a mi lado apoyándome incondicionalmente y brindando valiosos consejos en las diferentes dificultades presentes en el transcurso de la maestría.
- A mi pareja sentimental por estar presente en los diversos momentos y complicaciones durante el proceso de maestría.

Resumen

Título: *Análisis de la inestabilidad ion-ciclotrón electromagnética en plasmas del viento solar.*

Las inestabilidades juegan un papel importante en el plasma, ya sea de laboratorio o espacial. Mediciones in-situ de las funciones de distribución de velocidades de los protones en el viento solar muestran la presencia de una anisotropía en la temperatura (A_p). Esta anisotropía funciona como el mecanismo físico que genera las inestabilidades, siendo éstas las responsables del crecimiento de ondas electromagnéticas, así como de la distribución de las partículas; este proceso tiene un rol crucial en el problema del calentamiento y aceleración del viento solar; en particular, se destaca la absorción resonante de ondas electromagnéticas ion-ciclotrón y por ende la inestabilidad electromagnética ion-ciclotrón. En esta tesis a través de la solución de la ecuaciones de Vlasov-Maxwell linealizada, se ha estudiado el comportamiento de la inestabilidad electromagnética ion-ciclotrón respecto a la variación del parámetro β_{\parallel} y de la anisotropía térmica de los protones para un plasma tipo viento solar. Se encontró que la tasa de crecimiento de la inestabilidad aumenta ; también se evidenció que el ancho de la parte inestable es relativamente independiente del parámetro β_{\parallel} y creciente conforme aumenta la anisotropía térmica; además, que existe un cambio de comportamiento para un valor de $A_p \gtrsim 6$ en la frecuencia real, afectando la resonancia ciclotrónica. Los resultados de esta tesis están enfocados a incrementar nuestro conocimiento para el problema de la aceleración y calentamiento del viento solar.

Palabras clave: *Viento solar, Inestabilidad electromagnética, Teoría Cinética, Método de Müller, Astrofísica.*

Abstract

Title: *Analysis of the ion-cyclotron electromagnetic instability in solar wind plasmas*

The Instabilities play an important role in the plasma, whether laboratory or spatial. In-situ measurements of the speed distribution functions of the protons in the solar wind show the presence of an anisotropy in the temperature (A_p). This anisotropy acts as the physical mechanism that generates the instabilities, being responsible for the growth of electromagnetic waves and the distribution of particles; this process has a crucial role in the problem of heating and acceleration of the solar wind, in particular the resonant absorption of ion-cyclotron electromagnetic waves and therefore the ion-cyclotron electromagnetic instability. In this thesis through the solution of linearized Vlasov-Maxwell equations the behavior of the ion-cyclotron electromagnetic instability regarding the variation of the β_{\parallel} and the thermal anisotropy of the protons for a solar wind type plasma was studied. It was found that the growth rate of instability increases ; furthermore the width of the unstable part is relatively independent of the β_{\parallel} and increasing as the thermal anisotropy increases; in addition, there is a behavior change for a value of $A_p \gtrsim 6$ in the real frequency, affecting the cyclotron resonance. The results of this thesis are focused on increasing our knowledge regarding the problem of the acceleration and heating of the solar wind.

Keywords: *Solar wind, Electromagnetic instability, Kinetic Theory, Müller 's Method, Astrophysics*

Índice general

Nomenclatura	5
1. Introducción	7
1.1. Motivación	9
2. Conceptos básicos de la estructura del Sol	11
2.1. El Sol	11
2.1.1. Estructura del Sol	12
2.1.2. Parámetro β	17
2.2. El viento solar	18
2.2.1. Anisotropía térmica en el viento solar	21
2.3. Ondas e inestabilidades	22
2.3.1. Clasificación de las inestabilidades	23
3. Conceptos básicos de teoría cinética del plasma	25
3.1. Funciones de distribución	25
3.1.1. Ejemplo de funciones de distribución	28
3.2. Conservación del número de partículas	30
4. Análisis cuantitativo de la propagación paralela de ondas del viento solar	33
4.1. Relación de dispersión cinética para un plasma magnetizado	34
4.2. Solución de la ecuación de Vlasov linealizada por el método de las características	39
4.3. Propagación paralela a $B_0\hat{e}_z$	54
4.3.1. Relación de dispersión electrostática	58
4.3.2. Relación de dispersión electromagnética	58
4.4. Inestabilidades para propagación paralela a $B_0\hat{e}_z$	60
4.4.1. Inestabilidad ion ciclotrónica electromagnética	68
5. Solución numérica para la relación de dispersión de la inestabilidad ion-ciclotrón electromagnética	73
5.1. Método de Müller	73
5.2. Relación de dispersión para el método numérico	76
5.3. Ceros de la relación de dispersión	78

5.4.	Pruebas para el código solución de la relación de dispersión	81
5.4.1.	Comportamiento de la frecuencia compleja con $A_p = 2.5$ y $\beta_{\parallel} = 0.25$	81
5.4.2.	Tasa de crecimiento para $A_p = 2, 3, 4, 5, 6$ con valor fijo de $\beta_{\parallel} = 0.5$	83
5.4.3.	Tasa de crecimiento máxima en función de la anisotropía térmica de los protones y beta del plasma	85
6.	Resultados para la solución de la relación de dispersión ion-ciclotrón electromagnética	87
6.1.	Metodología para la obtención de $\gamma, \Delta k_z$ y ω_r	88
6.1.1.	Frecuencia imaginaria o tasa de crecimiento γ	88
6.1.2.	ancho de la población inestable Δk_z	89
6.1.3.	Frecuencia real ω_r	89
6.2.	Presentación de resultados 2D y 3D	90
6.2.1.	Presentación de resultados en plano bidimensional para $\gamma_m, \Delta k_z$ y $\omega_{r_{max}}$	91
6.2.2.	Gráficas 3D para $\gamma_m, \Delta k_z$ y $\omega_{r_{max}}$	94
6.2.3.	Discusión de resultados	96
7.	Conclusiones	101
A.	Apéndice	105
A.1.	Método de las características	105
	Bibliografía	107

Índice de figuras

1.1. Viento solar junto a eyecciones de masa coronal, junio 20 del 2015. Fuente [1]	7
2.1. Llamada solar octubre 24, 2014. Fuente [2]	11
2.2. Estructura general del Sol. Fuente:[3]	13
2.3. Parámetro β del plasma en la atmósfera solar para campos magnéticos fuertes, 100 G y 2500 G. Fuente [4]	18
2.4. Viento solar interactuando con un cometa, julio 2011. Fuente: [1]	19
2.5. Distribución general de las líneas de campo magnético en la corona solar. Fuente [5]	20
2.6. Prominente erupción solar bajo la luz ultravioleta extrema, 30 de marzo 2010. Fuente: [6]	21
2.7. Distribución de velocidades de los protones en el viento solar cerca al perihelio de Helios; la línea puntada transversal indica el campo magnético del Sol [7]	22
3.1. Función de distribución de Maxwell-Boltzmann 1-D. Fuente: Elaboración propia	28
3.2. Funciones de distribución de velocidades Maxwell-Boltzmann. a) Función en equilibrio térmico, b) Función con velocidad inicial de flujo , c) Función con presencia de anisotropía térmica con $T_{pe} > T_{pa}$, c) Función con presencia de anisotropía térmica con $T_{pe} < T_{pa}$. Fuente: Elaboración propia	29
3.3. Función de distribución de un haz mono-energético 1-D. Fuente: Elaboración propia	30
3.4. Función de distribución de dos haces contracorriente 1-D. Fuente: Elaboración propia	30
5.1. Solución de la relación de dispersión para anisotropía térmica $A_p = 4$, $\beta_{\parallel} = 0.3$ y $k_{z0} = 3$, seleccionando seis raíces para el método de Müller.	79

5.2.	Modos para la solución de la relación de dispersión para anisotropía térmica $A_p = 4., \beta_{\parallel} = 0.3$ y $k_{z0} = 3$. Se muestran las ramas pertenecientes a las seis raíces seleccionadas en la Figura 5.1 al lado derecho se muestra el comportamiento de las ramas para la frecuencia real en función del vector de onda k_z ; al lado izquierdo se muestra el comportamiento de las ramas para la frecuencia imaginaria en función del vector de onda k_z	80
5.3.	Solución de la relación de dispersión (Ecuación 4.105) para $A_p = 2.5$ y $\beta_{\parallel} = 0.25$. a) Solución y comportamiento de la frecuencia del modo ion-ciclotrón (línea azul en el primer cuadrante) en función del vector de onda mediante el código de esta tesis, a la derecha se encuentra la parte imaginaria de la frecuencia y a la izquierda la parte real de la frecuencia; . b) Solución y comportamiento de la frecuencia del modo ion-ciclotrón , donde la línea sólida es la parte real de la frecuencia y la línea con puntos es la parte imaginaria de la frecuencia, fuente: [8].	82
5.4.	Tasa de crecimiento máxima normalizada en función de la anisotropía térmica de los protones para un $\beta_{\parallel} = 0.5$. a) Resultados de la tasa de crecimiento máxima para la inestabilidad ion-ciclotrón mediante el código de esta tesis. b) Resultados de tasa de crecimiento máxima para la inestabilidad ion-ciclotrón (puntos), fuente: [9].	83
5.5.	Solución de la relación de dispersión para la inestabilidad ion-ciclotrón (línea naranja) para un valor de $\beta_{\parallel} = 0.5$ en un plasma protón-electrón con electrones isotrópicos. a) Comportamiento de la parte real (izquierda) y parte imaginaria (derecha) de la frecuencia para una anisotropía de $A_p = 2$ presentando una tasa de crecimiento máximo de $\gamma_m = 1.95 \times 10^{-2} \Omega_p$. b) Comportamiento de la parte real e imaginaria de la frecuencia para una anisotropía de $A_p = 6$ presentando una tasa de crecimiento máxima de $\gamma_m = 0.35 \Omega_p$	84
5.6.	Tasa de crecimiento máxima normalizada en función la anisotropía térmica de los protones par un $\beta_{\parallel} = 1$. a) Resultados para la inestabilidad ion-ciclotrón por medio del código de esta tesis. b) Resultados para la inestabilidad ion-ciclotrón (línea sólida) e inestabilidad espejo (línea punteada). Fuente: [10].	85
5.7.	Tasa de crecimiento máxima normalizada en función de beta para un valor de anisotropía térmica de los portones de $A_p = 2.5$. a) Resultados para la inestabilidad ion-ciclotrón por medio del código de esta tesis. b) Resultados para la inestabilidad ion-ciclotrón (línea sólida) e inestabilidad espejo (línea punteada).Fuente: [10]	86
6.1.	Tasa de crecimiento para $A_p = T_{\perp p}/T_{\parallel p} = 3$ y $\beta_{\parallel} = 0.5$, el punto verde representa el valor máximo de la tasa de crecimiento	88

6.2. Tasa de crecimiento para $A_p = T_{\perp p}/T_{\parallel p} = 3$ y $\beta_{\parallel} = 0.5$, los punto verdes representan el vector de onda para el cual inicia la inestabilidad k_{zmin} (izquierda) y el vector de onda para el cual finaliza la inestabilidad $k_{zmáx}$ (derecha)	89
6.3. Comportamiento de la frecuencia real en función del vector de onda k_z , para a) $A_p = T_{\perp p}/T_{\parallel p} = 10$ y $\beta_{\parallel} = 0.2$; b) $A_p = T_{\perp p}/T_{\parallel p} = 10$. y $\beta_{\parallel} = 0.95$. El punto verde representa el valor máximo de la frecuencia real para ambas gráficas.	90
6.4. Comportamiento de la tasa de crecimiento máxima en función de β_{\parallel} y A_p para los valores definidos en la sección 2.	91
6.5. Comportamiento del ancho de la población inestable Δk_z en función de β_{\parallel} y A_p para los valores definidos en la sección 2	92
6.6. Comportamiento del ancho de la frecuencia real ω_{rm} en función de β_{\parallel} y A_p para los valores definidos en la sección 2	93
6.7. Comportamiento de la tasa de crecimiento máxima en función de β_{\parallel} y de A_p a)gráfica tridimensional de $\gamma_m(\beta_{\parallel}, A)$ b) mapa de contorno en un plano $A_p - \beta_{\parallel}$ para los valores de γ_m constante.	98
6.8. Comportamiento del ancho de la población inestable en función de β_{\parallel} y de A_p a)gráfica tridimensional de $\Delta k_z(\beta_{\parallel}, A_p)$ b) mapa de contorno en un plano $A_p - \beta_{\parallel}$ para los valores de Δk_z constante.	99
6.9. Comportamiento de la frecuencia real máxima en función de β_{\parallel} y de A_p a)gráfica tridimensional de $\omega_{rmax}(\beta_{\parallel}, A)$ b) mapa de contorno en un plano $A_p - \beta_{\parallel}$ para los valores de ω_{rmax} constante.	100

Nomenclatura

β	Parámetro beta del plasma.
λ_D	Longitud de Debye.
ω	Frecuencia.
ω_c	Frecuencia ciclotrónica.
ω_p	Frecuencia del plasma.
ρ	Densidad de corriente.
ρ	Densidad másica.
ξ	Función de ionización.
A_p	Anisotropía térmica de los protones.
c	Velocidad de la luz.
e	Carga.
F	Fuerza.
k	número de onda.
K_B	Constante de Boltzman.
M_S	Masa solar.
n	Densidad de partículas.
P_m	Presión magnética.
P_T	Presión térmica.
R_S	Radio solar.
T	Temperatura.
UA	Unidad astronómica.

v_{th}	Velocidad térmica.
B	Campo magnético.
E	Campo eléctrico.
J	Densidad de corriente.

1. Introducción

El espacio entre el Sol y la Tierra no se encuentra vacío; por el contrario, esta región está permeada del plasma del viento solar (VS) (Figura 1.1), el cual, es un flujo de partículas que proviene de la superficie solar, debido principalmente al gradiente de presión que existe entre la corona y el espacio interplanetario. Este plasma está compuesto aproximadamente de 95 % de protones, 4 % de partículas alfa y aproximadamente 1 % de otros iones minoritarios [11].

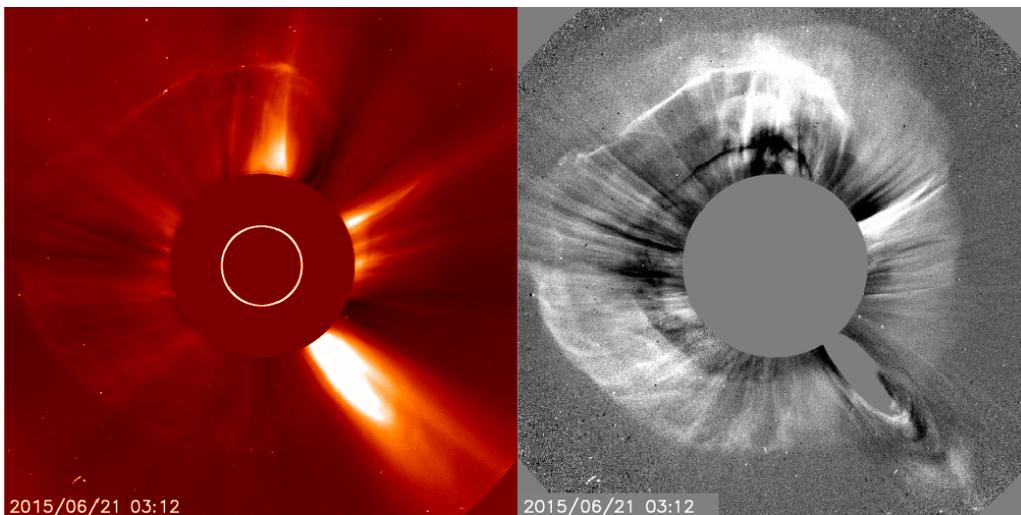


Figura 1.1.: Viento solar junto a eyecciones de masa coronal, junio 20 del 2015.
Fuente [1]

Varias misiones espaciales, por ejemplo la sonda WIND, han llevado a concluir que existen de manera principal tres tipos de VS, denominados VS rápido, VS lento y VS transitorio [12]. el VS lento tiene una velocidad entre 300 km/s y 500 km/s [13], el VS rápido tiene una velocidad entre 600 km/s y 1200 km/s [14]; el VS transitorio es asociado con eventos de las regiones activas del Sol como lo son las eyecciones de masa coronal (EMC). En cuanto a las fuentes de estos tipos de VS, tenemos que en la corona solar existen dos zonas magnéticas, regiones de campo abierto y regiones de campo cerrado. Las regiones de campo abierto son aquellas donde las líneas de campo magnético del Sol se extienden hasta la heliosfera, dando la impresión de que son líneas de campo «abiertas» a pocos radios solares de distancia del Sol. Estas regiones están ubicadas en las regiones polares y en algunas ocasiones se pueden extender hacia el ecuador, esta región es la fuente del VS rápido. En específico,

observaciones de la corona solar a longitudes de onda en el extremo ultravioleta (EUV) hechas por misiones tales como Shylab [15] han dado evidencia directa para la asunción que los agujeros coronales (donde las líneas de campo magnético están abiertas al espacio interplanetario) son las fuentes del viento solar rápido. Estos avistamientos han sido confirmados por la nave espacial ULYSSES sobre los polos del Sol, comprendido a una distancia radial mayor a 1 UA (unidad astronómica) ; las regiones de campo cerrado son aquellas donde las líneas de campo magnético del Sol son cerradas, estas están ubicadas mayormente al rededor del ecuador con tendencias a abrirse en latitudes altas donde eventualmente se conectan con la heliosfera. Estas líneas se extienden en el interior de la corona hasta una distancia del orden del radio solar, en esta región es donde se cree que se genera el VS lento[16].

Otra característica observada del VS es la presencia de ondas de amplitud finita, donde el término finita se refiere a ondas cuya amplitud de campo magnético es apreciable con respecto a la amplitud del campo magnético externo. Para la generación de estas ondas se puede tener diversas fuentes de origen, como lo son las anisotropías térmicas en la función de distribución de velocidades de las partículas o inestabilidades lineales generadas por variadas interacciones dentro del plasma. Dentro de las observaciones hechas mayormente por los satélites HELIOS y ULYSSES se ha encontrado dentro del VS rápido la presencia de un máximo secundario en la función de distribución de velocidades, el cual ha sido interpretado como haces de iones, los cuales fluyen en dirección paralela al campo magnético de fondo. Estos haces de iones pueden funcionar como una fuente alterna para la generación de fluctuaciones dentro del plasma ,es decir, como fuentes de origen para inestabilidades ondulatorias; añadido a esto, entre las mediciones hechas por HELIOS se encontraron haces de partículas alfa que fluyen con velocidades de deriva del orden de la velocidad de Alfvén local [17].

Dentro del VS rápido, observaciones diversas muestran que las partículas que lo conforman son aceleradas en su viaje desde el Sol[18, 19]. Generalmente se supone que esta aceleración y calentamiento de iones ocurre a una distancia de pocos radios solares del Sol y se asume que esto es debido a la absorción resonante de ondas de Alfvén [20, 21]. Añadido a esto, es fuertemente aceptado que el mecanismo más importante para dicha aceleración es la absorción resonante de ondas tipo ion-ciclotrón[21, 22, 23]. Sin embargo, las mediciones in situ a distancias mayores de 0.3 UA muestran un rango de frecuencias de las fluctuaciones electromagnéticas en las cuales no es posible acelerar a los iones a las velocidades registradas [24]; por esta razón, a lo largo de del tiempo se han planteado varios modelos para explicar la generación de ondas de las frecuencias necesarias para esta aceleración y calentamiento (entre 10 Hz y 10^4 Hz) y su posterior disipación antes de alcanzar las 0.3 AU [18, 19, 25, 26, 27, 28, 29]. Entre estos modelos es de interés para este trabajo las cascadas de energía inducidas por los iones [30]. Dentro de este modelo, el mecanismo para la transferencia de energía entre ondas y partículas es a través de una cascada de frecuencias inducida por los iones.

En varios estudios (observaciones) se ha mostrado que la anisotropía térmica de los

iones es el mecanismo físico por el cual se genera la inestabilidad ion-ciclotrón[31, 32, 33] , en un efecto tipo cascada estas inestabilidades de mayor frecuencia pueden ser capaces de calentar y acelerar iones menos masivos, los cuales posteriormente pueden generar inestabilidades con una frecuencia mayor, así sucesivamente hasta llegar a ondas que resuenen con los protones y les cedan energía.

1.1. Motivación

El plasma que conforma el viento solar es, sin duda el plasma astrofísico más accesible para mediciones in situ, donde las mediciones se realizan en un gran rango de escalas [25, 34, 35, 36] . Dentro de los problemas que se tienen actualmente en el estudio del viento solar se encuentra el problema de la aceleración y calentamiento de los iones, para esto, diversas observaciones y resultados teóricos parecen indicar que la mayor parte de los procesos de aceleración y calentamiento del plasma tienen como mecanismo principal la absorción resonante de ondas electromagnéticas tipo ion-ciclotrón por parte de las partículas [22, 23] .

En la mayor parte del medio interplanetario (comprendido entre 10 a 20 radios solares desde el Sol) las colisiones entre las partículas del VS son muy raras y escasas ya que este plasma es poco denso. De esta manera, los procesos físicos solo pueden ser descritos en el contexto del plasma sin colisiones, es decir, los detalles microscópicos de la distribución de las partículas puede resultar en diferencias físicas considerables al derivarla bajo una aproximación clásica de fluido dominada por colisiones[37].

En los sistemas de ondas electromagnéticas ion-ciclotrón, las funciones de distribución se encuentran normalmente fuera del equilibrio termodinámico presentando anisotropía térmica. Esto se corrobora con mediciones in situ de las funciones de distribución de velocidades de los protones en el viento solar, mostrando en efecto, la presencia de una anisotropía en la temperatura paralela y perpendicular al campo magnético promedio de fondo [38, 39, 40] así como una evolución no adiabática del viento solar durante su expansión [41, 42, 43]. Esta anisotropía funciona como el mecanismo físico que genera las inestabilidades, siendo éstas las responsables del crecimiento de ondas electromagnéticas así como de la distribución de las partículas [37, 44, 45].

Para el estudio de las inestabilidades generadas, se requiere entrar en un tipo diferente de escalas, como lo son las escalas microscópicas del plasma. Para esta escala existen diversos mecanismos físicos que gobiernan este sistema, mayormente asociados a interacciones del tipo onda-onda y onda-partícula, los cuales, para ser estudiados, requieren una descripción basada en la teoría cinética regida por la ecuación de Vlasov; Dicha teoría describe el comportamiento del plasma mediante funciones de distribución de velocidades, esto se logra encontrando las soluciones de las ecuaciones acopladas de Vlasov y Maxwell [46, 47].

En este sentido, es de interés estudiar las inestabilidades que pueden surgir en el

plasma del VS debido a la anisotropía térmica, ya que por medio de ellas es posible el crecimiento de las ondas electromagnéticas como se mencionó anteriormente, específicamente se trabajará con la inestabilidad ion-ciclotrón electromagnética debido a que se podría tomar como el detonante inicial para el complejo proceso de calentamiento y aceleración de los iones presentes en el VS.

EL objetivo de esta tesis es contribuir al estudio del calentamiento y aceleración del VS desde el punto de vista teórico, dando una base asimilable para cualquier individuo interesado en el tema, comenzando desde la solución de la ecuación de Vlasov linealizada, hasta llegar a la solución numérica de la relación de dispersión electromagnética de la inestabilidad ion-ciclotrón. Así mismo, estos conocimientos pueden ser empleados en varios temas tales como la predicción del clima espacial, el cual es de suma importancia para la prevención de daños a la tecnología tanto en la Tierra como en los satélites espaciales; y el aprovechamiento del viento solar como fuente de energía renovable mediante su recolección por satélites espaciales y demás técnicas futuras.

Añadido a esto, se estará ampliando el área de trabajo en la física del plasma, más específicamente en física del plasma espacial, como un tema a trabajar en la Universidad Nacional Sede Manizales, con lo que se podrá brindar una nueva línea de trabajo y una mayor competitividad en cuanto a temas astrofísicos y de física espacial de talla nacional e internacional, además de un mayor aprovechamiento de las instalaciones y vínculos astrofísicos con los que cuenta la región y el país. Actualmente estamos en una edad de oro de los descubrimientos científicos con muchas mediciones de VS disponibles a partir de observaciones de naves espaciales internacionales. En la próxima década, estas mediciones y otras que resulten de las nuevas misiones espaciales y en conjunto con las simulaciones computacionales en escalas cinéticas darán luz sobre el misterio de cómo se calientan el viento solar y la corona y así entender la física fundamental de estos procesos, aún desconocidos.

En trabajos recientes en el campo de la energía renovable, se ha estudiado el aprovechamiento del viento solar con el fin de combinar la energía solar fotovoltaica y la eólica, ya que, son las tecnologías de producción energética renovable que más están creciendo. Aprovechar esta energía sólo es posible utilizando satélites; se debe de entender que el viento solar no se comporta igual que el viento común en la tierra, por lo que los satélites no aprovecharán la energía como molinos, sino que tendrán un conductor de cobre puntiagudo orientado al Sol, que captaría los electrones libres dentro del viento solar, que son transportados a una esfera metálica que se cargaría eléctricamente. La parte más complicada del proceso es enviar la energía a la tierra. Esto se consigue mediante rayos infrarrojos que se enviarían a antenas en la tierra, capaces de recoger la energía en este formato.

2. Conceptos básicos de la estructura del Sol

2.1. El Sol

El Sol ([Figura 2.1](#)) es una estrella ordinaria de tipo espectral G2V (G2 estrella enana amarilla; V clase de luminosidad correspondiente a estrellas enanas) con magnitud de 4.8. En la actualidad, el Sol tiene una edad cercana a las 4.5 billones de años, posee una masa de $M_s \approx 2 \times 10^{30}kg$. Esto es unas 330 mil veces la masa de la tierra; el radio solar es de $R_s \approx 7 \times 10^5km$, siendo este unas 109 veces el radio de la tierra. A continuación se mencionarán las características más generales del Sol [\[48\]](#).

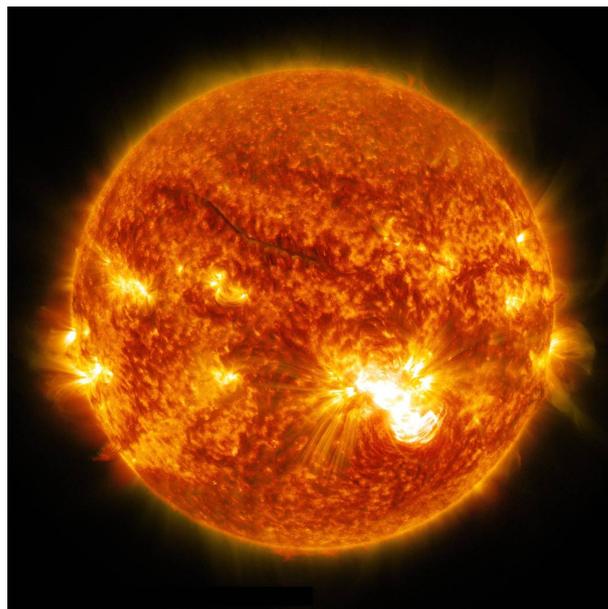


Figura 2.1.: Llamada solar octubre 24, 2014. Fuente [\[2\]](#)

- Densidad media = $1.4 \times 10^3kg/m^3$ ($1.4gr/cm^3$)
- Distancia media de la tierra = $150 \times 10^6km = 1UA$ (unidad astronómica)= $215R_s$
- Gravedad superficial = $274m/s^2$
- Velocidad de escape de la superficie = $618km/s$

- Radiación emitida (luminosidad) = $3.86 \times 10^{26}w$
- Periodo de rotación ecuatorial= 26 días
- Tasa de pérdida de masa = 10^9kg/s
- Temperatura efectiva de cuerpo negro = 5785 K
- Inclinación del ecuador del Sol al plano de la órbita de la tierra = 7°
- Composición = aproximadamente 90 % H, 9.9 % He, 0.1 % otros elementos (C, N, O...)

El Sol está constantemente liberando energía hacia el espacio, alrededor de $3.9 \times 10^{33}\text{erg/s}$. Esta emisión de energía básicamente consiste de tres modos [49], el primer modo es llamado radiación de cuerpo negro, conocida comúnmente como luz solar; el segundo modo es la emisión electromagnética solar que se compone por rayos X y radiación UV. Estas son mayormente absorbidas por la estratosfera terrestre; el tercer modo de emisión de energía es en forma de partículas, donde se tiene un amplio rango de energías que van desde 1KeV hasta más de 1GeV . Es conveniente agrupar estas partículas en partículas de menor energía y partículas de mayor energía, las cuales son el viento solar y los rayos cósmicos solares, respectivamente.

2.1.1. Estructura del Sol

El Sol tiene una estructura que puede ser dividida en capas concéntricas de diferentes propiedades. De forma general estas capas pueden dividirse en dos grupos, las capas internas (capas no visibles directamente) y las capas externas (capas que pueden ser visibles directamente) o también conocidas como la atmósfera del Sol. Comenzaremos por el centro del Sol, e iremos avanzando de forma radial hacia afuera como se muestra en la Figura 2.2, dando algunos datos relevantes de cada una de sus capas. Como tal, el Sol no posee una frontera definida de forma exacta, tanto entre sus capas como en su superficie. La densidad disminuye continuamente desde su centro hasta la capa más externa. Aunque no se sabe con exactitud donde termina su última capa, se ha llegado a detectar ésta hasta una distancia de $12R_s$ [50].

2.1.1.1. Capas internas

En cuanto a la estructura del Sol, se puede comenzar, a grandes rasgos, desde el interior. Cabe destacar que que la estructura interna no puede ser observada en forma directa y solo puede deducirse mediante consideraciones teóricas a partir de sus características superficiales. Partiendo de esto, el interior del Sol puede ser diferenciado por tres capas o zonas [50, 49]:

- **núcleo:** Es la zona más interna, que va desde el centro hasta una distancia de aproximadamente dos décimas del radio del Sol, el cual posee una temperatura aproximada de $15 \times 10^6 K$ y una densidad de 150gr/cm^3 . En esta región se

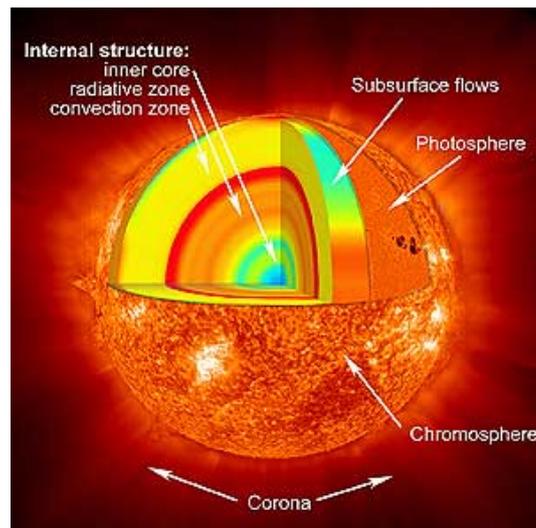


Figura 2.2.: Estructura general del Sol. Fuente:[3]

producen reacciones de fusión, donde se transforma el hidrógeno en helio, produciendo una gran cantidad de energía.

- **zona radiativa o zona de radiación:** La energía producida desde el núcleo es transportada hacia afuera del Sol en forma de radiación electromagnética como fotones, más específicamente como rayos gamma, llegando así a la segunda zona interna, la zona radiativa, donde los fotones viajan sufriendo fenómenos como absorción y dispersión. A pesar de la alta velocidad de luz, la radiación no se mueve con rapidez desde el centro del Sol a su superficie visible. la energía producida está al lado del núcleo presurizado del Sol, que se escabulle lentamente para finalmente escapar como la luz que vemos. El núcleo solar es tan denso que un solo rayo gamma producido por una fusión nuclear en el centro del Sol no puede moverse ni siquiera una fracción de milímetro antes de golpear una partícula sub-atómica. En esta zona, la radiación choca rápidamente con otra partícula en la zona radiativa, y eventualmente es re-irradiada a una energía aún más baja. el proceso continúa una y otra vez, sin complicaciones, a medida que la radiación se desplaza hacia afuera en un camino zigzag al azar, perdiendo energía constantemente en cada encuentro. Como resultado de este continuo rebote e innumerables colisiones en la zona radiativa, en promedio, toma alrededor de 170 mil años para que la radiación salga del núcleo del Sol al fondo de la zona convectiva. Esta zona se extiende desde $0.2 R_s$ hasta $0.71 R_s$. Dentro de esta amplia parte del Sol, la densidad cae de 20 gr/cm^3 a 0.2 gr/cm^3 , desde la parte baja hasta la parte superior de la zona de radiación. Del mismo modo, la temperatura cae desde su base $7 \times 10^6 K$ a $2 \times 10^6 K$, en su parte más lejana . La radiación que sale de esta parte del Sol se absorbe más fácilmente, reduciendo la cantidad que realmente sale del Sol [51].

- **Zona convectiva:** La zona de convección es la capa más externa del interior solar. Esta abarca un 15 % de radio solar. En la base de la Zona de convección, la temperatura es de unos $2 \times 10^6 K$ y la energía es transportada por convección en lugar de radiación; de este modo, se lleva el calor bastante rápido a la superficie. El fluido se expande y se enfría a medida que sale, En la superficie visible, la temperatura ha bajado a $5,700 K$, y la densidad es de solo $0.0000002 \text{ gr/cm}^3$. A temperaturas más frías, más iones pueden bloquear el flujo de radiación de fotones hacia el exterior de manera más efectiva, por lo que la naturaleza se activa por convección para ayudar al transporte de energía desde el interior más caliente al espacio frío. Esta es el área que consideramos para formar la capa exterior del Sol. Los átomos en esta capa del Sol tienen electrones, porque la temperatura no es lo suficientemente caliente como para separarlos como en el núcleo ($15 \times 10^6 K$ en comparación con $2 \times 10^6 K$). Los átomos con electrones pueden absorber y emitir radiación, lo que hace que esta región sea más opaca, como una niebla espesa. El plasma más caliente que proviene de la zona de radiación se expande y se eleva a través de la zona de convección. Puede hacer esto porque la zona convectiva es más fría que la zona radiativa y, por lo tanto, menos densa. Cuando el plasma sube, se enfría y comienza a hundirse nuevamente. A medida que cae hacia la parte superior de la zona de radiación, se calienta y comienza a elevarse. Este proceso se repite, creando corrientes de convección y el efecto visual de hervir en la superficie del Sol. Esto se llama granulación. ¿Cómo se transfiere esta energía? El calor se libera al exterior cuando el material llega a la parte superior de la zona de convección y se enfría. De esta manera, la energía se transfiere a la siguiente capa del Sol, la fotosfera [51].

2.1.1.2. Capas externas

Sobre la zona convectiva se encuentra la denominada atmósfera del Sol, la cual puede ser diferenciada por tres capas:

- **Fotosfera:** Es la capa inmediatamente siguiente de la zona convectiva, la cual está cubierta con un patrón granular que describe las celdas de convección turbulenta. El nombre fotosfera significa «esfera de luz». Se le conoce como la "superficie" del Sol porque en la parte superior de ella, los fotones finalmente pueden escapar al espacio; como tal ésta es una capa muy delgada en comparación con el resto del Sol y es la única parte del Sol que realmente podemos ver cuando la miramos desde la tierra, siendo ésta la que emite la mayor parte de la luz solar. La fotosfera tiene unos 500 km de espesor. Varios métodos para medir la temperatura han determinado que la fotosfera tiene una temperatura de aproximadamente 5,840 K. El campo magnético de esta zona es del orden de 1 Gauss o menos, pero en las regiones conocidas como manchas solares este campo aumenta drásticamente estando entre 3000 a 4000 Gauss, y su densidad es de aproximadamente 10^{15} partículas por centímetro cúbico. En la fotosfera,

se puede observa granulaci3n, s3per granulaci3n, f3culas y manchas solares [51, 50].

- **Cromosfera:** La siguiente capa en orden radial hacia afuera del Sol es la cromosfera. En tiempos anteriores al coron3grafo, esta zona solo pod3a ser observada durante un eclipse total de Sol; es entonces cuando el Sol se ve rodeado de un estrecho anillo de luz rojiza, de ah3 su nombre que significa «esfera de color». La cromosfera alberga un grosor variable, con una altura que var3a entre los 100 a 10000 km desde la superficie del Sol. En general, de las observaciones 3pticas se desprende que la concentraci3n de electrones disminuye y la temperatura cin3tica aumenta con la altitud, a partir de los valores de $N \sim 10^{12}$ electrones/cm³ y $T \sim 4400K$ en el l3mite con la fotosfera. Dado que en las capas de la fotosfera, las cuales son responsables de la radiaci3n 3ptica en el espectro continuo, la temperatura es de aproximadamente 6000 ° K, est3 claro que en el l3mite entre la fotosfera y la cromosfera hay un m3nimo de temperatura cin3tica. Al mismo tiempo, el grado de ionizaci3n del material de la cromosfera, que es en gran medida hidr3geno, aumenta r3pidamente con el aumento de la temperatura a medida que nos alejamos de la fotosfera, comenzando en $T \sim 10^{-4}$ en el nivel $h = 0$ y acerc3ndonos a la unidad en altitudes de $h \gtrsim 6 \times 10^4 km$. El aumento comparativamente lento de la temperatura en la cromosfera inferior cambia a un aumento muy r3pido en sus capas superiores. En altitudes de $h \sim 2 \times 10^4 km$, la temperatura se puede comparar con $10^6 K$ y la concentraci3n de electrones con 5×10^8 electrones/cm³, es decir, con los valores caracter3sticos de la corona inferior [50].
- **Corona:** La 3ltima capa del Sol es la corona solar, siendo 3sta la capa m3s externa del Sol. La corona se extiende en el espacio m3s all3 de 12 radios solares en forma de flujo de part3culas cargadas conocido como viento solar. Al pasar de la cromosfera a la corona, la densidad de part3culas baja r3pidamente llegando hasta los 10^6 electrones/cm³ y la temperatura puede llegar hasta los $2 \times 10^6 K$, siendo substancialmente mayor que la superficie del Sol. Al igual que la cromosfera, se puede ver a simple vista durante un eclipse solar, ya que es la 3nica vez que la luz de la fotosfera se bloquea lo suficiente como para que se pueda ver cualquier otra cosa. Tamb3en se puede observar con un coron3grafo, que es un instrumento que puede producir un eclipse artificial que bloquea la luz de la fotosfera. La luz coronal es solo la luz dispersada de la fotosfera, por lo que su color es el mismo que el de la fotosfera. La mayor parte de la corona est3 atrapada cerca del Sol por bucles de l3neas de campo magn3tico (llamados bucles coronales). En im3genes de rayos X, la corona aparece brillante [52]. El entendimiento de esta alta temperatura en la corona solar es un problema fundamental en astrof3sica, ya que aparenta violar la segunda ley de la termodin3mica, dadas la temperatura de la fotosfera y la cromosfera inferior. A causa de su alt3sima temperatura, el gas coronal es un intenso emisor de rayos X, y observando en esas longitudes de onda, se pueden ver las concentraciones y estructura de la corona en todo el disco solar. Usando esta caracter3stica se

pueden apreciar en ella tres tipos principales de regiones:

- **Regiones activas:** las regiones activas en la superficie solar albergan la mayor parte de la actividad, pero constituyen solo una pequeña fracción de la superficie total. Las regiones activas están ubicadas en áreas con fuertes concentraciones de campo magnético, visibles como grupos de manchas solares en longitudes de onda ópticas o magnetogramas. Los grupos de manchas solares exhiben típicamente una polaridad magnética principal fuertemente concentrada, seguida por un grupo posterior más fragmentado de polaridad opuesta. Debido a esta naturaleza bipolar, las regiones activas se componen principalmente de líneas de campo magnético cerrado. Debido a la actividad magnética permanente en términos de la emergencia del flujo magnético, la cancelación del flujo, las re-configuraciones magnéticas y los procesos de reconexión magnética. En las regiones activas ocurren una serie de procesos dinámicos como el calentamiento de plasma, las erupciones y las eyecciones de masa coronal. [4].
- **Agujeros coronales:** Son regiones con temperaturas levemente más bajas de por lo menos $6000K$ menor que en el resto de la corona, y densidades significativamente más baja que pueden ser hasta un tercio del valor normal. En general, se ha encontrado que las zonas polares norte y sur del Sol son más oscuras que las zonas ecuatoriales durante los eclipses solares; de ahí surgió el nombre de «agujeros coronales». Estas zonas están dominadas por líneas de campo magnético abierto, que actúan como conductos eficientes para la expulsión de plasma calentado de la corona al viento solar, si hay flujos cromosféricos en sus bases. Debido a este mecanismo de transporte eficiente, los agujeros coronales están libres de plasma la mayor parte del tiempo, y por lo tanto aparecen mucho más oscuros que el Sol tranquilo (será descrito a continuación), donde el plasma que fluye caliente desde la cromosfera permanece atrapado hasta que se enfría y precipita de nuevo a la cromosfera. [4].
- **Sol silencioso o Sol tranquilo (quiet Sun):** Históricamente, las áreas restantes fuera de las regiones activas se denominaron regiones tranquilas del Sol. Hoy, sin embargo, se han descubierto muchos procesos dinámicos en toda la superficie solar, por lo que el término Sol tranquilo o Sol silencioso, se considera un nombre inapropiado, y solo se justifica en términos relativos. Los procesos dinámicos en la zona tranquila del Sol van desde fenómenos a pequeña escala, como eventos de calentamiento de red, nano-llamaradas, eventos explosivos, puntos brillantes y chorros de rayos X blandos (soft x ray), hasta estructuras a gran escala, tales como lazos trans-equatoriales o arcos coronales. La distinción entre regiones activas y regiones silenciosas o tranquilas del Sol se vuelve cada vez más borrosa debido a que la mayoría de las estructuras a gran escala que dominan las regiones del Sol tranquilo están enraizadas en regiones activas. Una

buena definición de éste, es que las regiones tranquilas del Sol abarcan todas las regiones cerradas del campo magnético (excluyendo las regiones activas), demarcando claramente el territorio tranquilo del Sol de los agujeros coronales, que abarcan las regiones abiertas del campo magnético [4].

2.1.2. Parámetro β

La dinámica de las partículas de la corona solar se ven influenciadas por la fuerza de Lorentz ejercida por el campo magnético de fondo. En particular, las partículas cargadas tienden a exhibir trayectorias ciclotrónicas siguiendo las líneas de campo magnético. Solamente cuando la energía cinética es mayor que la energía magnética las partículas pueden escapar de sus giro-órbitas y difundir a través de las líneas de campo. El parámetro que relaciona estos dos regímenes de confinamiento es denominado parámetro β del plasma, definido como la razón de la presión térmica p_T del plasma a la presión magnética p_m

$$\beta = \frac{p_T}{p_m} = \frac{2\xi n_j k_B T_j}{B^2/8\pi} \quad (2.1)$$

donde $\xi = 1$ es la fracción de ionización para la corona, $k_B = 1.38 \times 10^{-16} \text{ergK}^{-1}$ es la constante de Boltzmann, B es la intensidad de campo magnético, n_j es la densidad de las partículas de especie j , T_j es la temperatura de las especies j . En la corona generalmente $\beta < 1$, existiendo algunas regiones intermedias con $\beta > 1$. En la [Figura 2.3](#) se presenta un gráfico de los valores de β en función de la distancia a la superficie solar. Se observa que el valor del parámetro es $\beta < 1$ en la corona y en las regiones de aceleración del viento solar, en donde la intensidad de campo magnético es más baja, como es el caso de los agujeros coronales. Esto será de vital importancia para el desarrollo de la tesis y del rango de valores que podrá tomar dicho parámetro [4].

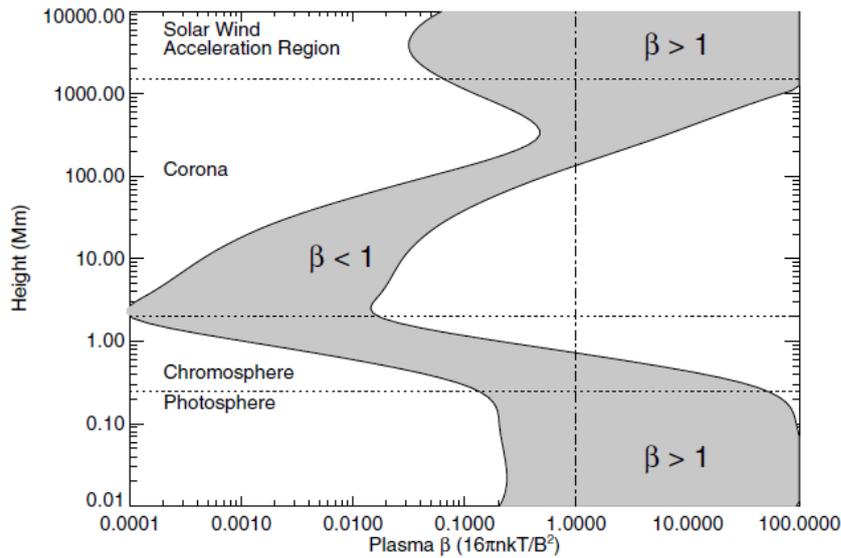


Figura 2.3.: Parámetro β del plasma en la atmósfera solar para campos magnéticos fuertes, 100 G y 2500 G. Fuente [4]

2.2. El viento solar

La existencia del VS fue supuesta en principio por el físico noruego Kristian Birkeland en 1916, quien en sus estudios del fenómeno de las auroras explicó que estas son rayos de corpúsculos emitidos por el Sol. Tiempo después, el astrónomo alemán L. Biermann en 1951 estudió las colas de los cometas, observando que cuando se aproximan al Sol, la evaporación de sus materiales se ve aumentada; a grandes rasgos mostró que los cometas poseen un núcleo de material denso y una parte menos densa de material que está dirigido en sentido opuesto de la dirección solar, asemejando su forma a una cola. Según Biermann, las teorías de los cometas explicaban la existencia de dichas colas en términos de la presión de radiación; sin embargo, dichas colas eran observadas a estar siempre, sin importar la dirección de procedencia del cometa, dirigidas radialmente contrarias de la dirección solar, por lo que argumentó que la presión de radiación solar por si sola no podía ser considerada, y sugirió que la existencia de este fenómeno puede solo ser considerado por flujos corpusculares solares radiales que empujarían los elementos de la cola. [53, 11]; fue hasta 1958 que Eugene Parker estudió y desarrolló la primera teoría sobre el VS [54]. Parker formuló un modelo dinámico con corrientes de partículas en la base de la corona. En este modelo, Parker asume que el gradiente de presión de los componentes atmosféricos solares acelera continuamente las partículas que fluyen hacia el exterior, y la velocidad con la que fluyen incrementa en la misma dirección. Las corrientes sufren una suave transición a velocidades supersónicas y el «viento solar» llega a la tierra con una velocidad de varios cientos de kilómetros por segundo. Finalmente, evidencia

experimental de su existencia fue provista y comprobada por primera vez en 1959 por K.I. Gringauz, quien estudió los datos obtenidos por las sondas soviéticas Luna 1 y Luna 2 [55].

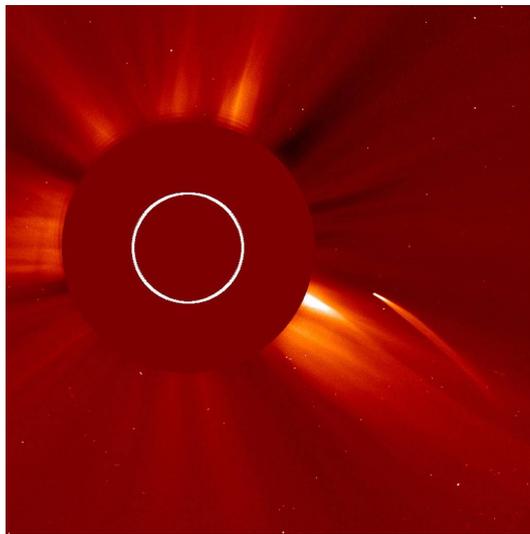


Figura 2.4.: Viento solar interactuando con un cometa, julio 2011. Fuente: [1]

El viento solar (Figura 2.4) en la actualidad es definido como el resultado de la expansión de la atmósfera solar formando un flujo supersónico, de plasma ionizado y campo magnético, que permea el medio interplanetario. Esta corriente es la consecuencia de la diferencia de presión entre la corona solar y el espacio interplanetario, el cual, conduce el plasma solar radialmente hacia el exterior, escapando de la influencia de la gravedad solar [53]. Debido a la alta conductividad del plasma del VS, este tiene la capacidad de transportar las líneas de campo magnético provenientes del Sol, dispersándolas en todas las direcciones, llegando hasta varios miles de kilómetros de Plutón (llegando hasta el límite de nuestro sistema solar) generando así la heliosfera; a este fenómeno se le conoce como *congelamiento de líneas de campo magnético* [49].

El VS consiste principalmente de electrones y protones, además, de una pequeña población de partículas alfa y otras especies iónicas pesadas. A una distancia de 1 U.A., es decir, en la Tierra, la densidad promedio de protones es de $\rho_p \approx 8,7 \text{cm}^{-3}$, las velocidades de flujo están alrededor de $v_{fl} \approx 468 \text{km/s}$, su temperatura es de $T \approx 1,2 \times 10^5 \text{K}$ y el campo magnético presente en el VS posee una intensidad promedio de $6,2 \text{nT}$ [52].

Misiones espaciales han revelado que hay mayormente 3 tipos de flujo de viento solar: VS rápido, VS lento y VS transitorio

- viento solar rápido: El viento solar rápido se origina en los agujeros coronales, las partes oscuras de la corona dominadas por líneas de campo abierto

(Figura 2.5). Las corrientes rápidas de viento solar a menudo son estables durante un largo período de tiempo (algunas rotaciones solares) y las variaciones de una corriente a otra son pequeñas. El viento solar rápido tiene velocidades de flujo entre 400km/s y 800km/s , la densidad promedio es baja, aproximadamente 3 iones $/\text{cm}^3$ a 1 U.A. Alrededor del 4% de los iones son helio. Esta relación es muy estable en diferentes flujos rápidos. El flujo de partículas promedio es de aproximadamente $2 \times 10^{12}/\text{m}^2\text{s}$, lo que implica una pérdida total de partículas del Sol de aproximadamente $1,3 \times 10^{31}/\text{s}$. La temperatura de los protones es de aproximadamente $2 \times 10^5\text{K}$ y la temperatura de los electrones es de aproximadamente $1 \times 10^5\text{K}$. Es relativamente poco turbulento y está permeado por una gran cantidad de ondas coherentes de gran amplitud (ondas de Alfvén) y su composición se asemeja mucho a la de la fotosfera solar[56].

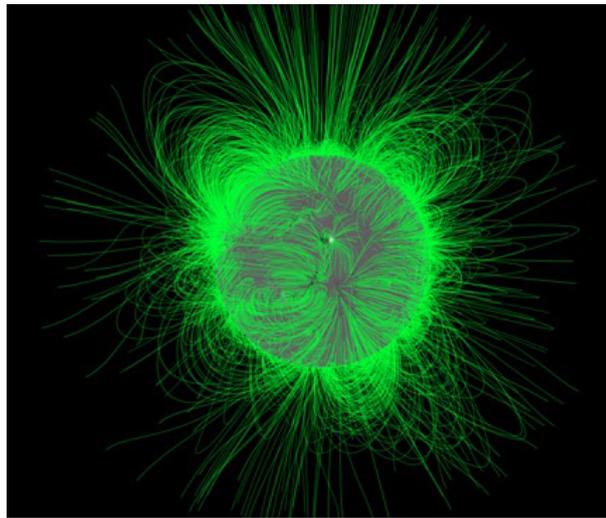


Figura 2.5.: Distribución general de las líneas de campo magnético en la corona solar. Fuente [5]

- Viento solar lento: El viento solar lento tiene velocidades más bajas entre 250km/s y 400km/s . Su densidad es de aproximadamente 8 iones $/\text{cm}^3$ a 1 U.A., y la densidad de flujo es aproximadamente el doble que la del viento solar rápido. Durante el mínimo solar, el viento solar lento se origina en regiones cercanas al ecuador heliomagnético (Figura 2.5). La cantidad relativa de helio es altamente variable, su promedio es de alrededor del 2%. Durante el máximo solar, el viento solar lento se origina por encima de las regiones activas en el cinturón de transmisión, y su contenido de helio es aproximadamente del 4%. En comparación con el viento solar rápido, es muy variable y turbulento, ya que a menudo contiene estructuras a gran escala, como nubes magnéticas o choques. Las temperaturas de los protones son notablemente más bajas, aproximadamente $3 \times 10^4\text{K}$, mientras que las temperaturas de los iones son similares. Al igual que en el viento rápido, la temperatura es siempre más alta paralela al campo magnético que perpendicular a él. En promedio es

$T_{\parallel} \approx 2T_{\perp}$. Su composición se asemeja mucho a la corona.

- Viento solar transitorio: Las perturbaciones transitorias generadas por el Sol o flujo de viento solar transitorio es asociado a eventos característicos de las regiones activas del Sol durante los periodos de máxima actividad, tales como las eyecciones de masa coronal (CME) como se muestra en la [Figura 2.6](#). Están generalmente embebidos en el viento solar lento y, de este modo, contribuyen en parte a su variabilidad [[12](#), [57](#)]

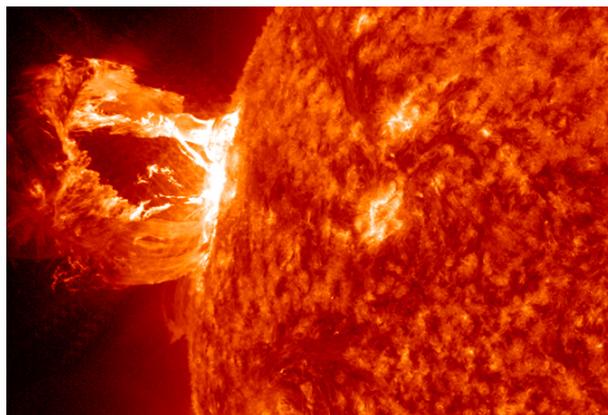


Figura 2.6.: Prominente erupción solar bajo la luz ultravioleta extrema, 30 de marzo 2010. Fuente: [[6](#)]

2.2.1. Anisotropía térmica en el viento solar

Medidas in-situ del viento solar rápido han mostrado que las distribuciones de velocidad de los protones se desvía del equilibrio térmico [[58](#), [59](#), [60](#), [12](#), [44](#), [61](#)][[58](#), [59](#), [60](#), [12](#), [44](#), [61](#)], además de presentar forma de una función de distribución Maxwelliana en el núcleo de la distribución (el núcleo representa un 96 % de la distribución, el 4 % restante se conoce como halo no térmico). Estas distribuciones presentan una notable diferencia entre la velocidad perpendicular y la velocidad paralela al campo magnético de fondo como se muestra en la [Figura 2.7](#), por ende, se encuentra una diferencia entre las temperaturas paralelas y perpendiculares dando lugar a una anisotropía térmica, la cual se expresa como $A_p = T_{\perp}/T_{\parallel}$ donde $T_{\perp} \neq T_{\parallel}$.

La anisotropía térmica persiste para distintas distancias heliocéntricas del Sol siendo $T_{\perp} > T_{\parallel}$ para distancias entre 0.3 U.A y aproximadamente 0.7 U.A, y $T_{\perp} < T_{\parallel}$ para distancias mayores a 0.7 U.A [[38](#)]. Dicha anisotropía funciona como el fuente de energía libre para perturbaciones de ondas presentes en el viento solar y para las inestabilidades (ion-ciclotrón para $T_{\perp} > T_{\parallel}$)

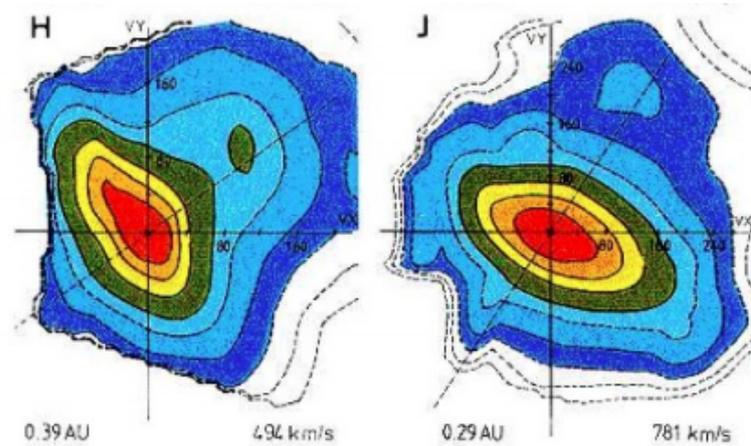


Figura 2.7.: Distribución de velocidades de los protones en el viento solar cerca al perihelio de Helios; la línea puntada transversal indica el campo magnético del Sol [7] .

2.3. Ondas e inestabilidades

Las ondas presentes en el plasma pueden ser generadas por el movimiento de las partículas del mismo, de forma auto-consistente, o también mediante fuentes oscilatorias externas. Debido a su existencia dentro del plasma, éstas están inevitablemente en interacción constante. En el plasma, se pueden presentar tres tipos de interacción: partícula-partícula, onda-partícula y onda-onda; cuando el plasma es dominado por efectos colisionales, las interacciones partícula-partícula guían al plasma de regreso a condiciones de equilibrio tal y como en un fluido ordinario; por otra parte, en plasmas poco colisionales, es decir en aquellos plasmas donde el camino libre medio de una partícula puede ser del orden del sistema, las ondas tienen un rol similar al de las colisiones en un fluido.

Bajo la ausencia de colisiones, las desviaciones de la función de distribución de una situación de equilibrio crecen hasta el punto en que las inestabilidades en el plasma comienzan a ocurrir, donde la energía libre acumulada en estas inestabilidades puede inducir al crecimiento de las ondas. Cuando estas ondas crecen hasta amplitudes finitas, las interacciones dentro del plasma tienden a eliminar las causas de estas inestabilidades, de tal manera que la distribución de velocidades tiende a relajarse hacia un estado de equilibrio, es decir, la anisotropía disminuye; por ende, las ondas e inestabilidades juegan un papel clave al momento de prevenir grandes desviaciones del equilibrio termodinámico del plasma. Teniendo esto en cuenta, se puede decir que las inestabilidades pueden ser tomadas como procesos mediante el cual el plasma puede regresar (evolucionar) al equilibrio termodinámico

En esta tesis se estudia en específico la inestabilidad ion-ciclotrón electromagnética la cual es generada dentro de la propagación de ondas en el plasma en dirección paralela al campo magnético de fondo. En los sistemas de ondas electromagnéticas

ion-ciclotrón, las funciones de distribución de velocidades se encuentran normalmente fuera del equilibrio termodinámico presentando anisotropía térmica, esto se corrobora con mediciones in situ de las funciones de distribución de velocidades de los protones en el viento solar, realizadas a una distancia entre 0.3 UA y 4 UA llevadas a cabo por varios satélites entre los cuales se encuentran HELIOS I, CLUSTER II Y ULYSSES, mostrando en efecto, la presencia de una anisotropía en la temperatura paralela y perpendicular al campo magnético promedio de fondo[39, 40].

2.3.1. Clasificación de las inestabilidades

La terminología de las inestabilidades es a menudo confusa, presentando en varias ocasiones problemas al momento de identificar una inestabilidad. Ejemplo de esto, se tiene que algunos autores dan el nombre a las inestabilidades de acuerdo al mecanismo que las produce (inestabilidad inducida por colisiones, inestabilidad por ionización, inestabilidad inducida por rotación, entre otras.). Otros autores las nombran de acuerdo con la apariencia fenomenológica. En otros casos, los autores las clasifican de forma general, donde se nombran macro-inestabilidades y micro-inestabilidades.

Las macro-inestabilidades (inestabilidades magnetohidrodinámicas) son definidas como aquellos fenómenos que pueden ser descritos por un simple modelo macroscópico de fluido, el cual considera el plasma como un todo; estas inestabilidades tienen distribución Maxwelliana isotrópica y la dinámica es restringida a movimientos únicamente en el espacio de coordenadas. Las micro-inestabilidades (inestabilidades cinéticas) son un fenómeno local en la velocidad y en el espacio de coordenadas. Este tipo de inestabilidades no puede ser descrito por un modelo de fluido; en su lugar, se debe emplear un modelo estadístico conocido como teoría cinética; en contraste a esto, las macro-inestabilidades si pueden ser descritas por la teoría cinética [62].

Otro criterio muy común de clasificación utilizado por diversos autores, se basa en la cualidad espacial de la inestabilidad. Estos se pueden listar como:

1. Convectivo o absoluto
2. Disipativo
3. Alta o baja frecuencia.
4. longitudinal o transversal.
5. Electroestático o electromagnético.
6. Lineal o no-lineal.
7. De acuerdo con el comportamiento en el tiempo
8. De acuerdo con el movimiento
 - a) Convectivo

- b) Laminar
- c) Turbulento

9. Involucrando una especie de partícula (ej. inestabilidad electrónica)

Cabe destacar que otras inestabilidades han sido nombradas de acuerdo con su descubridor, al dispositivo donde fueron encontradas o también se encuentran nombradas por su fuente de energía. Es importante mencionar otro tipo de inestabilidades conocidas como inestabilidades numéricas. Estas son producidas en los códigos matemáticos al momento de resolver las ecuaciones diferenciales por medio de ordenadores; es decir, dichas inestabilidades no son de naturaleza física si no matemática.

3. Conceptos básicos de teoría cinética del plasma

En la actualidad, la dinámica de un plasma es un tema extenso y aún está lejos de ser comprendido en muchos aspectos relevantes y de gran importancia. Para entender una cantidad considerable de estos efectos y características, usualmente se emplea la descripción del plasma como un fluido (conocida como la descripción más simple de un plasma). En esta descripción se toman en cuenta solamente aspectos macroscópicos tales como la densidad y velocidad media de las partículas; sin embargo, existen fenómenos para los cuales no es suficiente, o bien resulta inadecuado, dicha descripción [37]. Se puede tomar como ejemplo, una situación en la cual la velocidad de un considerable número de partículas cargadas (velocidad térmica) es cercana a la velocidad de fase de las ondas; así, la interacción onda-partícula es significativamente diferente de las descritas por las ecuaciones de fluido. Para solventar este inconveniente, es necesario estudiar de manera detallada el comportamiento de las partículas individuales que conforman el plasma, es decir, tomar en cuenta la distribución de velocidades microscópicas. Por definición si se quiere considerar la dinámica de una simple partícula, está involucrada su velocidad al igual que su posición, por lo tanto se busca describir la evolución e interacción de las partículas presentes; sin embargo, es substancialmente difícil ya que en un plasma existe una cantidad cuantiosa de partículas (ejemplo de esto, en un experimento de fusión existen cerca de 10^{21} partículas).

En este sentido, es necesaria una aproximación diferente a la numérica o analítica. Con este fin, se tiene en cuenta una aproximación estadística; de esta forma se introduce la función de distribución, la cual expresa la forma como están distribuidas las partículas en el espacio de fases (espacio de seis dimensiones). En esta función de dispersión, la velocidad y la posición de las partículas son variables independientes. Esta descripción es conocida como descripción cinética del plasma o teoría cinética. Este capítulo se basa en las referencias [63, 64]

3.1. Funciones de distribución

Un plasma es un ensamble de partículas cargadas con electrones, iones y partículas neutras, las cuales poseen posiciones y velocidades diferentes bajo la influencia de fuerzas externas (campos electromagnéticos, presión, gravedad, entre otras.) y procesos de colisión interna (ionización, Coulomb entre otras.). Para el estudio cinético

se tiene en cuenta la distribución de velocidades microscópicas; una condición de suma importancia en esta descripción es que el número total de partículas permanece constantes [se profundizará más adelante sección 3.2] independiente del camino en el espacio de fases. Esta condición es la propiedad de continuidad básica del sistema. Esta condición es análoga a la propiedad de continuidad básica en magnetohidrodinámica MHD, la conservación de la masa total en el fluido:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.1)$$

donde ρ es la densidad másica del plasma y \mathbf{v} es la velocidad del fluido.

Si consideramos que el plasma está formado por varias especies α , las partículas pertenecientes a estas especies estarán caracterizadas por un valor de carga q_α y de su masa m_α y serán indistinguibles. Si tomamos que N_α es el número total de partículas de las especies α , el número total de partículas del plasma será

$$N = \sum_{\alpha} N_{\alpha} \quad (3.2)$$

Además, tendremos que la condición de cuasi-neutralidad será

$$\sum_{\alpha} q_{\alpha} N_{\alpha} = 0 \quad (3.3)$$

Una partícula simple de especie α , puede describirse por un vector de posición

$$\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (3.4)$$

en la configuración espacial, y un vector de velocidad

$$\mathbf{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \quad (3.5)$$

en el espacio de velocidades. Las coordenadas (\mathbf{r}, \mathbf{v}) define la posición de la partícula en el espacio de fases. Ahora si se tiene un sistema con múltiples partículas, debemos introducir la función de distribución $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ para especies α .

definiendo $dN_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ como el número de partículas cuya posición está dentro del elemento de volumen $d\mathbf{r}$ en la posición r y cuya velocidad \mathbf{v} está dentro del elemento

del espacio de velocidades $d\mathbf{v}$ en un tiempo t , tendremos que, $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ está definida por :

$$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d\mathbf{r}d\mathbf{v} = dN_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (3.6)$$

donde $d\mathbf{r} \equiv d^3r \equiv dx dy dz$ y $d\mathbf{v} \equiv d^3v \equiv dv_x dv_y dv_z$. Escrito de esta forma, el término de la izquierda es la probabilidad de que en el instante t una de las partículas de especie α esté situada en el elemento de volumen $d\mathbf{r}d\mathbf{v}$, centrado al rededor del punto de posición r y velocidad v .

Evidentemente, $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ debe ser simétrica en las coordenadas de posición y velocidad de todas las partículas al mismo tiempo; además, para que $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ se presente eficientemente como una densidad de probabilidad, debe permanecer no negativa en todo el espacio de definición y estar normalizada a la unidad

$$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \geq 0 \quad (3.7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d\mathbf{r}d\mathbf{v} = 1 \quad (3.8)$$

algunas definiciones que pueden ser de interés son las siguientes:

- Si f_α depende de \mathbf{r} , la distribución es in-homogénea
- Si f_α es independiente de \mathbf{r} , la distribución es homogénea
- Si f_α depende de la dirección de \mathbf{v} , la distribución es anisotrópica
- Si f_α es independiente de la dirección de \mathbf{v} , la distribución es isotrópica
- Un plasma en equilibrio térmico está caracterizado por una función de distribución homogénea, isotrópica e independiente del tiempo

A continuación se mostrarán 3 expresiones que son comunes e importantes dentro del marco de la teoría cinética utilizando la función de distribución

- número total de partículas

$$N_\alpha = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (3.9)$$

- densidad numérica: esta representa la densidad de partículas en la configuración espacial, independientemente de su distribución en el espacio de velocidades

$$n_s(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (3.10)$$

- velocidad promedio

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n_s} \int d\mathbf{v} \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (3.11)$$

3.1.1. Ejemplo de funciones de distribución

Teniendo en cuenta la definición de la función de distribución, a continuación se mostrarán algunos de los ejemplos más comunes de éstas.

- Función de distribución de Maxwell-Boltzmann

$$f_0(\mathbf{v}) = n_0 \left(\frac{1}{2\pi v_{th}} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right) \quad (3.12)$$

donde n_0 es la densidad numérica total de las partículas, v es la velocidad de las partículas y $v_{th} = \sqrt{2T/m}$ es la velocidad térmica, con T como la temperatura del gas o del plasma y m como la masa de las partículas. Esta función de probabilidad es muy conocida y aplicada para la velocidad de las partículas en un gas. Si tomamos esta distribución en una dimensión tendremos que

$$F_0(v) = n_0 \left(\frac{1}{2\pi v_{th}} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right) \quad (3.13)$$

También podemos observar otro tipo de distribuciones a partir de la distribución Maxwelliana en 2D por medio de contornos de f_α como se muestra en la [Figura 3.2](#)

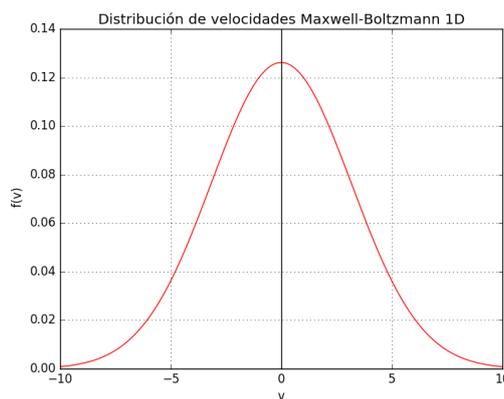


Figura 3.1.: Función de distribución de Maxwell-Boltzmann 1-D. Fuente: Elaboración propia

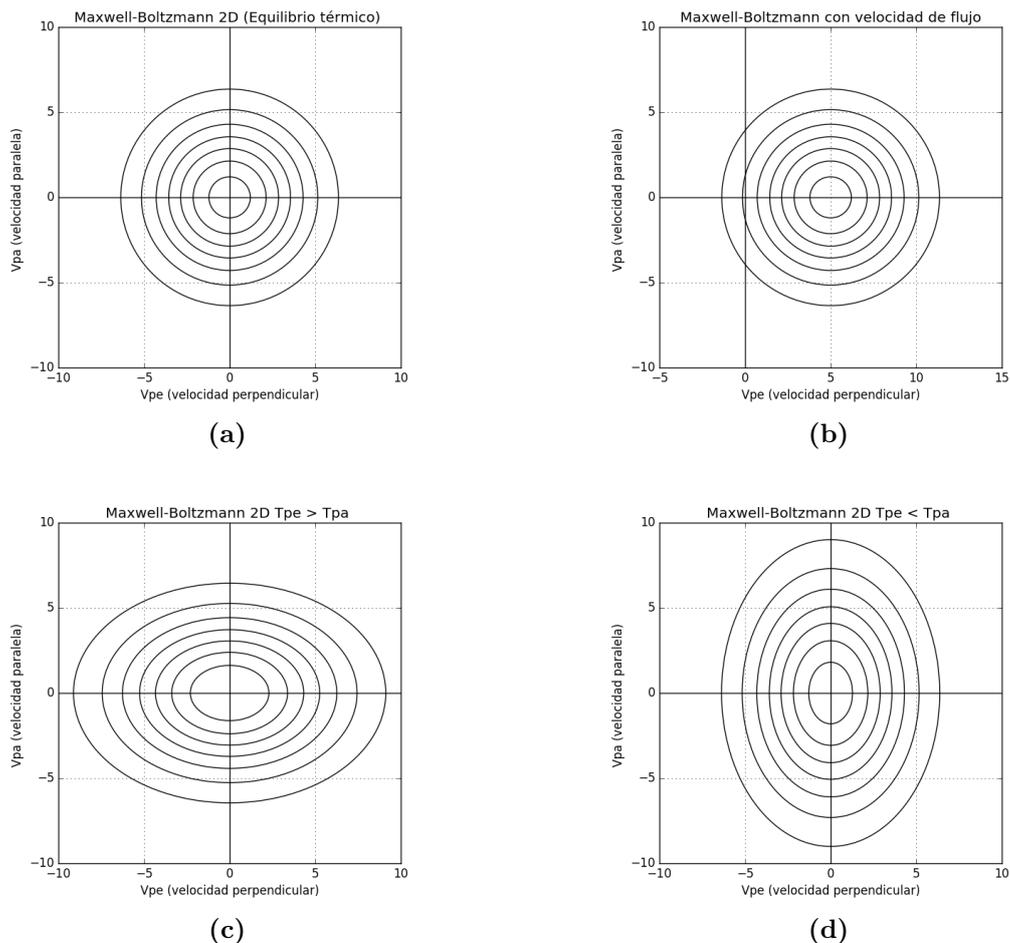


Figura 3.2.: Funciones de distribución de velocidades Maxwell-Boltzmann. a) Función en equilibrio térmico, b) Función con velocidad inicial de flujo, c) Función con presencia de anisotropía térmica con $T_{pe} > T_{pa}$, d) Función con presencia de anisotropía térmica con $T_{pe} < T_{pa}$. Fuente: Elaboración propia

- Haz mono-energético 1D (Figura 3.3):

$$f_0(v) = n_0 \delta(v - v_0) \quad (3.14)$$

donde v_0 es la velocidad del haz y n_0 es la densidad total numérica de las partículas. Básicamente todas las partículas del haz tienen una velocidad que es igual a v_0 y no hay otras partículas con velocidad diferente, por tal razón se representa con la función delta de Dirac. Esta función es usualmente utilizada cuando se trabaja con fuentes mono-direccionales como por ejemplo un láser u otro tipo de fuentes en forma de rayos.

- Dos haces contracorriente en 1D (Figura 3.4):

$$f_0(v) = \frac{n_0}{2} [\delta(v - v_0) + \delta(v + v_0)] \quad (3.15)$$

donde v_0 es la velocidad del haz y n_0 es la densidad total numérica de las partículas. Esta función es similar a la expresada en la parte superior, con la diferencia en que en esta se toman dos fuentes de haz con dirección contraria; ejemplo, un haz propagándose de izquierda a derecha ($-v_0$) y el segundo haz de derecha a izquierda (v_0). Esta función de distribución es utilizada en estudios relacionados con interacción haz-haz en un plasma, mayormente para la identificación de inestabilidades.

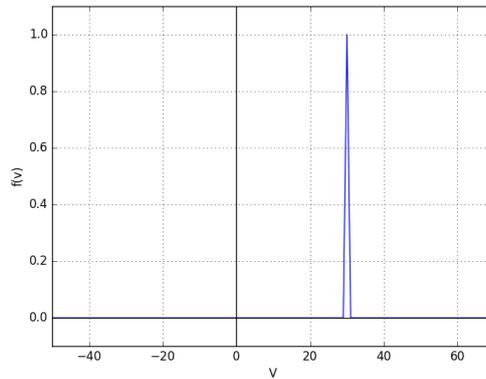


Figura 3.3.: Función de distribución de un Haz mono-energético 1-D. Fuente: Elaboración propia

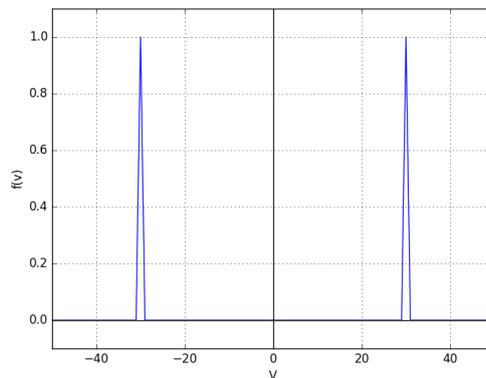


Figura 3.4.: Función de distribución de dos haces contracorriente 1-D. Fuente: Elaboración propia

3.2. Conservación del número de partículas

EL paso a seguir es derivar una expresión que pueda mostrar como evoluciona la función de distribución en función del tiempo. Comenzaremos por observar que las partículas no son creadas ni destruidas en el espacio de fases, es decir, que las

partículas se conservan en dicho espacio. Primero, colocaremos las partículas en nuestro espacio de fases, si no existen fuentes de partículas ni sumideros de las mismas en este espacio, podemos colocar un pequeño elemento de volumen. Lo que observamos después de esto es que la variación de las partículas contenidas en dicho volumen son debidas al flujo de partículas que entran y salen del mismo. En forma matemática lo podemos expresar como

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = -\nabla_{6D} \cdot (\mathbf{u} \cdot f_\alpha) \quad (3.16)$$

donde \mathbf{u} es la velocidad a la cual las partículas se mueven en el espacio de fases. Por simplicidad, ahora denotaremos la función de distribución como f_α ; el operador nabla en 6 dimensiones puede ser expresado como

$$\nabla_{6D} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial v_x}, \frac{\partial}{\partial v_y}, \frac{\partial}{\partial v_z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \quad (3.17)$$

para \mathbf{u} tenemos que

$$\mathbf{u} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = \left(\mathbf{v}, \frac{\mathbf{F}}{m_\alpha} \right) = \left(\mathbf{v}, \frac{\mathbf{F}_{LR} + \mathbf{F}_{SR}}{m_\alpha} \right) \quad (3.18)$$

donde \mathbf{F}_{LR} son las fuerzas de largo alcance y \mathbf{F}_{SR} son las fuerza de corto alcance. En la [Ecuación 3.18](#) podemos observar que la derivada de la velocidad con respecto al tiempo es la aceleración de las partículas en el espacio de fases. Esta aceleración es expresada como dicta la ley de Newton ; las fuerza que actúan dentro del plasma se pueden dividir en dos, una donde están las fuerza de largo alcance y la otra parte en fuerzas de corto alcance. Las fuerzas de largo alcance son aquellas fuerzas debidas a efectos colectivos que ocurren en la evolución global del sistema; y las de fuerza de corto alcance son aquellas fuerzas que son debidas a colisiones, básicamente por interacciones partícula-partícula (1-1).

Ahora introducimos las [Ecuación 3.17](#) y [Ecuación 3.18](#) en la ecuación de continuidad ([Ecuación 3.16](#))

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \cdot \left[\left(\mathbf{v}, \frac{\mathbf{F}_{LR} + \mathbf{F}_{SR}}{m_\alpha} \right) \cdot f_\alpha \right] \\ \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} &= - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v} f_\alpha) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[\left(\frac{\mathbf{F}_{LR} + \mathbf{F}_{SR}}{m_\alpha} \right) \cdot f_\alpha \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

Analizaremos un poco los términos de la [Ecuación 3.19](#). En el primer término del lado derecho tenemos que \mathbf{v} y \mathbf{r} son variables independientes en el espacio de fases, por lo tanto se puede expresar como

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v} f_\alpha) = \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} \quad (3.20)$$

En el segundo término de la derecha de [Ecuación 3.19](#), se puede afirmar que las fuerzas que actúan a largo alcance en nuestro caso son fuerza eléctricas y magnéticas,

es decir, la fuerza de Lorentz $\mathbf{F}_{LR} = q_\alpha (\mathbf{E}_{LR} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{LR})$ donde \mathbf{E}_{LR} y \mathbf{B}_{LR} son los campos eléctrico y magnético respectivamente; de esta podemos observar que \mathbf{E}_{LR} es independiente de \mathbf{v} y que el vector resultante del término $\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{LR}$ es perpendicular a \mathbf{v} , por lo tanto :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[\left(\frac{\mathbf{F}_{LR}}{m_\alpha} \right) f_\alpha \right] = \frac{\mathbf{F}_{LR}}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} \quad (3.21)$$

Teniendo la [Ecuación 3.20](#) y la [Ecuación 3.21](#) en cuenta, se puede escribir la [Ecuación 3.19](#) como

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} &= -\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\mathbf{F}_{LR}}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left(\frac{\mathbf{F}_{SR}}{m_\alpha} f_\alpha \right) \\ \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_{LR}}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left(\frac{\mathbf{F}_{SR}}{m_\alpha} f_\alpha \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

el término del lado derecho de la [Ecuación 3.22](#) provee la evolución de la función de distribución debido a colisiones. Este es usualmente llamado el operador colisión denotado como $\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_c$; de esta forma e introduciendo la fuerza de Lorentz en la [Ecuación 3.22](#) obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E}_{LR} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{LR}) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_c \quad (3.23)$$

la [Ecuación 3.22](#) es conocida como la ecuación de Boltzmann. Para plasmas poco densos, las colisiones típicamente juegan un rol de menor importancia en la determinación de la dinámica del plasma en comparación a las fuerza de largo alcance, de esta forma si las colisiones fueran ignoradas, es decir, dado el caso cuando el número de partículas en un cubo de Debye es muy grande ($n\lambda_D^3 \gg 1$), el término de colisiones es igual a cero $\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_c = 0$. así podemos escribir la [Ecuación 3.23](#) como:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E}_{LR} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{LR}) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (3.24)$$

donde la [Ecuación 3.24](#) es conocida como la ecuación de Vlasov, la cual es una de las ecuaciones fundamentales en física del plasma.

4. Análisis cuantitativo de la propagación paralela de ondas del viento solar

El presente capítulo se basa en el capítulo 3.3 del libro «Basic Plasma Physics III» [47], ampliando el análisis numérico omitido en dicho capítulo. Se estudia la teoría de ondas cinéticas e inestabilidades características de un plasma espacialmente uniforme, inmerso en un campo magnético aplicado $B_0 = B_0 \hat{e}_z$. Los equilibrios isotrópicos $F_j(v^2)$ que son funciones monótonas decrecientes de v^2 son estables ante perturbaciones electromagnéticas con polarización arbitraria. La energía libre para la inestabilidad es asociada con las características no-termales de la función de distribución de equilibrio $F_j(v)$, que van desde el movimiento relativo de los componentes del plasma a la anisotropía en la energía cinética del plasma. El análisis de la inestabilidad es basado en la aproximación de linealización, la cual es intrínsecamente clásica ya que no incluye la influencia de los efectos turbulentos sobre resonancia onda-partícula, tampoco se incluye la influencia del movimiento estocástico de la partícula en el comportamiento de la estabilidad. El modelo físico a utilizar en este trabajo es basado en las ecuaciones de Vlasov-Maxwell sin colisiones en el cual la función de distribución de una partícula $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ evoluciona de acuerdo a la ecuación de Vlasov,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e_j}{m_j} \left(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{c} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right] f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0, \quad (4.1)$$

Donde $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ son los campos eléctrico y magnético, y e_j y m_j son la carga y la masa, respectivamente de una partícula de especie j . Aquí, $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ es la densidad de las partículas de especies j en el espacio de fases de seis dimensiones (\mathbf{x}, \mathbf{v}) . Además, los campos eléctrico y magnético son determinados auto-consistentemente de las ecuaciones de Maxwell en términos de la densidad de corriente del plasma,

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \sum_j e_j \int d^3v \mathbf{v} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (4.2)$$

y la densidad de carga,

$$\rho(x, t) = \sum_j e_j \int d^3v f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (4.3)$$

En este trabajo se asume que el plasma está inmerso en un campo magnético uniforme externamente aplicado $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$, además, que el estado de equilibrio del plasma ($\partial/\partial t = 0$) es caracterizado por la neutralidad de carga, $\sum_j \hat{n}_j \hat{e}_j = 0$, y campo eléctrico cero \mathbf{E}_0 . También se asume que la corriente de equilibrio del plasma es suficientemente débil, tal que el correspondiente equilibrio del campo magnético auto-generado tiene efectos pequeños despreciables en el comportamiento de la estabilidad en comparación con el campo magnético aplicado $B_0 \hat{e}_z$.

4.1. Relación de dispersión cinética para un plasma magnetizado

Las perturbaciones son consideradas sobre un equilibrio ($\partial/\partial t = 0$) caracterizado por un campo eléctrico cero y un campo magnético uniforme externamente aplicado $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$, donde $B_0 = \text{constante}$. También se asume que la función de distribución en equilibrio $f_j^0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ para especies j es espacialmente uniforme con :

$$f_j^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \hat{n}_j F_j(v_\perp^2, v_z) \quad (4.4)$$

donde $v_\perp = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}$ es la velocidad perpendicular, y v_z es la velocidad axial. En la [Ecuación 4.4](#) $\hat{n}_j = \text{constante}$ es la densidad ambiente de especies j , y $F_j(v_\perp^2, v_z)$ está normalizado de acuerdo a

$$2\pi \int_0^\infty dv_\perp v_\perp \int_{-\infty}^\infty dv_z F_j(v_\perp^2, v_z) = 1 \quad (4.5)$$

En este análisis, las perturbaciones de onda electromagnética, $\delta \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ y $\delta \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$, son representadas como transformadas de Fourier-Laplace

$$\delta \mathbf{E}(x, t) = \int d^3\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \exp(-i\omega t) \widehat{\delta \mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) \quad (4.6)$$

$$\delta \mathbf{B}(x, t) = \int d^3\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \exp(-i\omega t) \widehat{\delta \mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) \quad (4.7)$$

donde \mathbf{k} es el vector de onda, ω es la frecuencia y el subíndice c de la integral denota la integral de contorno; se escoge $Im(\omega) > 0$ suficientemente grande y positivo tal que, las integrales de la transformada de Laplace $\widehat{\delta\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = \int_0^\infty dt \exp(i\omega t) \delta\mathbf{E}(\mathbf{k}, t)$ etc. converjan.

Utilizando la [Ecuación 4.6](#) y [Ecuación 4.7](#) se pueden expresar las ecuaciones de Maxwell de otra manera

Ley de Faraday : $\nabla \times \delta\mathbf{E}(x, t) = -(1/c) \partial/\partial t \delta\mathbf{B}(x, t)$

$$\nabla \times \delta\mathbf{E}(x, t) = \int d^3\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \exp(-i\omega t) (i\mathbf{k}) \times \widehat{\delta\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega)$$

y

$$\partial/\partial t \delta\mathbf{B}(x, t) = \int d^3\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \exp(-i\omega t) (-i\omega) \widehat{\delta\mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} & \int d^3\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \exp(-i\omega t) (i\mathbf{k}) \times \widehat{\delta\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = \\ & -\frac{1}{c} \int d^3\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \exp(-i\omega t) (-i\omega) \widehat{\delta\mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) \end{aligned}$$

por propiedad de las integrales

$$(i\mathbf{k}) \times \widehat{\delta\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{c} (-i\omega) \widehat{\delta\mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega)$$

$$\mathbf{k} \times \widehat{\delta\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{c} (\omega) \widehat{\delta\mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) \tag{4.8}$$

Ley de Ampere-Maxwell: $\nabla \times \delta\mathbf{B}(x, t) = 4\pi/c \widehat{\delta\mathbf{J}} + (1/c) \partial/\partial t \delta\mathbf{E}(x, t)$

Aplicando las transformada de Fourier-Laplace a cada uno de los términos perturbados tenemos que

■

$$\nabla \times \delta\mathbf{B}(x, t) = \int d^3\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \exp(-i\omega t) (i\mathbf{k}) \times \widehat{\delta\mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega)$$

■

$$\partial/\partial t \delta\mathbf{E}(x, t) = \int d^3\mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \exp(-i\omega t) (-i\omega) \widehat{\delta\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega)$$

■

$$\delta \mathbf{J}(x, t) = \int d^3 \mathbf{k} \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \exp(-i\omega t) \widehat{\delta \mathbf{J}}(\mathbf{k}, \omega)$$

reemplazando estas expresiones en la ecuación de Ampere-Maxwell

$$\begin{aligned} & \int d^3 \mathbf{k} \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \exp(-i\omega t) (i \mathbf{k}) \times \widehat{\delta \mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) = \\ & \frac{4\pi}{c} \int d^3 \mathbf{k} \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \exp(-i\omega t) \widehat{\delta \mathbf{J}}(\mathbf{k}, \omega) \\ & + \frac{1}{c} \int d^3 \mathbf{k} \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \exp(-i\omega t) (-i\omega) \widehat{\delta \mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) \end{aligned}$$

por propiedad de las integrales llegamos a

$$(i \mathbf{k}) \times \widehat{\delta \mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \widehat{\delta \mathbf{J}}(\mathbf{k}, \omega) + \frac{1}{c} (-i\omega) \widehat{\delta \mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega)$$

$$i \mathbf{k} \times \widehat{\delta \mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \widehat{\delta \mathbf{J}}(\mathbf{k}, \omega) - i \left(\frac{\omega}{c} \right) \widehat{\delta \mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) \quad (4.9)$$

Flujo del campo magnético: $\nabla \cdot \delta \mathbf{B} = 0$

aplicando la transformada de Fourier-Laplace

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{B}(x, t) = \int d^3 \mathbf{k} \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \exp(-i\omega t) (i \mathbf{k}) \cdot \widehat{\delta \mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega)$$

por propiedad de las integrales

$$(i \mathbf{k}) \cdot \widehat{\delta \mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) = 0$$

$$\mathbf{k} \cdot \widehat{\delta \mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) = 0 \quad (4.10)$$

Ley de Gauss: $\nabla \cdot \delta \mathbf{E} = 4\pi \delta \rho$

aplicando la transformada de Fourier-Laplace

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{E}(x, t) = \int d^3 \mathbf{k} \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \exp(-i\omega t) (i \mathbf{k}) \cdot \widehat{\delta \mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega)$$

$$\delta \rho(x, t) = \int d^3 \mathbf{k} \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \exp(-i\omega t) \widehat{\delta \rho}(\mathbf{k}, \omega)$$

reemplazando los términos tenemos que

$$\begin{aligned} \int d^3 \mathbf{k} \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \exp(-i\omega t) (i \mathbf{k}) \cdot \widehat{\delta \mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = \\ 4\pi \int d^3 \mathbf{k} \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \exp(-i\omega t) \widehat{\delta \rho}(\mathbf{k}, \omega) \end{aligned}$$

por propiedades de las integrales

$$(i \mathbf{k}) \cdot \widehat{\delta \mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = 4\pi \widehat{\delta \rho}(\mathbf{k}, \omega) \quad (4.11)$$

En la [Ecuación 4.9](#) y [Ecuación 4.11](#), la densidad de corriente perturbada $\delta \mathbf{J}(x, t)$ y la densidad de carga perturbada $\delta \rho(x, t)$ están relacionadas auto-consistentemente con la función de distribución perturbada $\delta f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ de la siguiente manera

$$\delta \mathbf{J}(x, t) = \sum_j e_j \int d^3 \mathbf{v} \mathbf{v} \delta f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (4.12)$$

$$\delta \rho(x, t) = \sum_j e_j \int d^3 \mathbf{v} \delta f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (4.13)$$

Utilizando el método de las pequeñas perturbaciones podemos linealizar la ecuación de Vlasov

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e_j}{m_j} \left(\left(\mathbf{E}_0^0 + \delta \mathbf{E}(x, t) \right) + \frac{\mathbf{v} \times (B_0 \hat{e}_z + \delta \mathbf{B}(x, t))}{c} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right] (\delta f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \hat{n}_j F_j(v_\perp^2, v_z)) = 0$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e_j}{m_j} \left(\delta \mathbf{E}(x, t) + \frac{\mathbf{v} \times (B_0 \hat{e}_z + \delta \mathbf{B}(x, t))}{c} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right] (\delta f_j(x, v, t))$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e_j}{m_j} \left(\delta \mathbf{E}(x, t) + \frac{\mathbf{v} \times (B_0 \hat{e}_z + \delta \mathbf{B}(x, t))}{c} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right] (\hat{n}_j F_j(v_{\perp}^2, v_z)) = 0$$

Observamos que la función en equilibrio no varía en el tiempo y el espacio, por lo tanto

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \delta f_j(x, v, t) + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta f_j(x, v, t) + \frac{e_j}{m_j} \left(\delta \mathbf{E}(x, t) + \frac{\mathbf{v} \times (B_0 \hat{e}_z + \delta \mathbf{B}(x, t))}{c} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \delta f_j(x, v, t) \right]$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial t} \hat{n}_j F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \hat{n}_j F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \frac{e_j}{m_j} \left(\delta \mathbf{E}(x, t) + \frac{\mathbf{v} \times (B_0 \hat{e}_z + \delta \mathbf{B}(x, t))}{c} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \hat{n}_j F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right] = 0$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \delta f_j(x, v, t) + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta f_j(x, v, t) + \frac{e_j}{m_j} \left(\delta \mathbf{E}(x, t) + \frac{(\mathbf{v} \times B_0 \hat{e}_z) + (\mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}(x, t))}{c} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \delta f_j(x, v, t) \right]$$

$$+ \left[\frac{e_j}{m_j} \left(\delta \mathbf{E}(x, t) + \frac{(\mathbf{v} \times B_0 \hat{e}_z) + (\mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}(x, t))}{c} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \hat{n}_j F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right] = 0$$

Encontramos algunos términos donde se encuentran dos variables con perturbaciones estos son términos de segundo orden pueden ser ignorados llegando a

$$+ \frac{e_j}{m_j} \left(\delta \mathbf{E}(x, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \delta f_j(x, v, t) + \frac{(\mathbf{v} \times B_0 \hat{e}_z)}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \delta f_j(x, v, t) + \frac{(\mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}(x, t))}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \delta f_j(x, v, t) \right)$$

$$+ \left[\frac{\hat{n}_j e_j}{m_j} \left(\delta \mathbf{E}(x, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \frac{(\mathbf{v} \times B_0 \hat{e}_z)}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \frac{(\mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}(x, t))}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right] = 0$$

organizando la expresión

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \delta f_j(x, v, t) + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta f_j(x, v, t) + \frac{e_j}{m_j} \left(\frac{(\mathbf{v} \times B_0 \hat{e}_z)}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \delta f_j(x, v, t) \right) \right]$$

$$+ \left[\frac{\hat{n}_j e_j}{m_j} \left(\delta \mathbf{E}(x, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \frac{(\mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}(x, t))}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right] = 0$$

sacando las funciones

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e_j}{m_j} \left(\frac{(\mathbf{v} \times B_0 \hat{e}_z)}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \right] \delta f_j(x, v, t)$$

$$+ \left[\frac{\hat{n}_j e_j}{m_j} \left(\delta \mathbf{E}(x, t) + \frac{(\mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}(x, t))}{c} \right) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) = 0$$

igualando tenemos que

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e_j}{m_j} \left(\frac{(\mathbf{v} \times B_0 \hat{e}_z)}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \right] \delta f_j(x, v, t) = - \left[\frac{\hat{n}_j e_j}{m_j} \left(\delta \mathbf{E}(x, t) + \frac{(\mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}(x, t))}{c} \right) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \quad (4.14)$$

Donde e_j y m_j , son la carga y la masa de una partícula de especie j , y c es la velocidad de la luz en el vacío; los términos que poseen dos variables perturbadas se consideran muy pequeños, ya que se consideran pequeñas perturbaciones, estos se denominan términos de segundo orden (S.O) y pueden ser ignorados. Ahora, substituyendo la [Ecuación 4.8](#) y [Ecuación 4.12](#) en [Ecuación 4.9](#)

$$\widehat{\delta \mathbf{B}} = \frac{\mathbf{k} \times \widehat{\delta \mathbf{E}}}{\omega} c$$

$$i \mathbf{k} \times \left(\frac{\mathbf{k} \times \widehat{\delta \mathbf{E}}}{\omega} c \right) = \frac{4\pi}{c} \sum_j e_j \int d^3 \mathbf{v} v \delta f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) - i \left(\frac{\omega}{c} \right) \widehat{\delta \mathbf{E}}$$

multiplicando la anterior expresión por $i\omega/c$

$$\left(\frac{i\omega}{c} \right) \mathbf{k} \times \left(\frac{\mathbf{k} \times \widehat{\delta \mathbf{E}}}{\omega} c \right) = \left(\frac{i\omega}{c} \right) \frac{4\pi}{c} \sum_j e_j \int d^3 \mathbf{v} v \delta f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) - \left(\frac{i\omega}{c} \right) \left(\frac{\omega}{c} \right) \widehat{\delta \mathbf{E}}$$

$$-\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \widehat{\delta \mathbf{E}}) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sum_j e_j \int d^3 \mathbf{v} v \delta f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \frac{\omega^2}{c^2} \widehat{\delta \mathbf{E}}$$

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \widehat{\delta \mathbf{E}}) + \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sum_j e_j \int d^3 \mathbf{v} v \delta f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \frac{\omega^2}{c^2} \widehat{\delta \mathbf{E}} = 0 \quad (4.15)$$

4.2. Solución de la ecuación de Vlasov linealizada por el método de las características

Antes de aplicar el método de las características, se hará un pequeño análisis de la función de distribución de una partícula $f_j(x, v, t)$. En primer lugar, trabajaremos

con el cambio temporal de la función de distribución utilizando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{df_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{dt} &= \frac{\partial f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &+ \frac{\partial f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial v_x} \frac{dv_x}{dt} + \frac{\partial f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial v_y} \frac{dv_y}{dt} + \frac{\partial f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial v_z} \frac{dv_z}{dt} + \frac{\partial f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.16)$$

definiendo las velocidades y aceleraciones de la partícula como

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z, \quad \frac{dv_x}{dt} = a_x, \quad \frac{dv_y}{dt} = a_y, \quad \frac{dv_z}{dt} = a_z$$

podemos reorganizar la **Ecuación 4.16** utilizando el operador nabla para la posición $\nabla_{\mathbf{x}} = \partial/\partial x \hat{e}_x + \partial/\partial y \hat{e}_y + \partial/\partial z \hat{e}_z$ y el operador nabla para la velocidad $\nabla_{\mathbf{v}} = \partial/\partial v_x \hat{e}_x + \partial/\partial v_y \hat{e}_y + \partial/\partial v_z \hat{e}_z$, la velocidad como vector $\mathbf{v} = v_x \hat{e}_x + v_y \hat{e}_y + v_z \hat{e}_z$ y la aceleración como vector $\mathbf{a} = a_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y + a_z \hat{e}_z$

$$\frac{df_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{dt} = \frac{\partial f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (4.17)$$

aplicando la pequeña perturbación tenemos que

$$\frac{df_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{dt} = \frac{d\delta f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{dt} + \frac{df_j^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{dt}$$

donde f_j^0 es la función en equilibrio y δf_j es la función perturbada.

Vamos a aplicar el método de las características tomando como función solución $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, y aplicando el concepto de las curvas características, la función solución de la ecuación diferencial parcial es constante en el tiempo

$$\frac{df_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{dt} = 0$$

teniendo esto en cuenta llegamos a

$$\frac{d\delta f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{dt} = -\frac{df_j^0(\mathbf{v})}{dt} \quad (4.18)$$

Analizaremos el comportamiento del termino de la derecha de la **Ecuación 4.18** reemplazando solo la función en equilibrio en la **Ecuación 4.17**

$$\frac{df_j^0(\mathbf{v})}{dt} = \frac{\partial f_j^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_j^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

4.2 Solución de la ecuación de Vlasov linealizada por el método de las características

como la función en equilibrio $f_j^0(\mathbf{v})$ no depende de la posición ni del tiempo, la anterior expresión se reduce a

$$\frac{df_j^0(\mathbf{v})}{dt} = \frac{\partial f_j^0(\mathbf{x})}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_j^0(\mathbf{v}) + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_j^0(\mathbf{v})$$

$$\frac{df_j^0(\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_j^0(\mathbf{v}) \quad (4.19)$$

de esta forma la **Ecuación 4.18** son las ecuaciones características, las variables de estas funciones se denotarán con una comilla en el supra-índice con el fin de no confundir las variables.

$$\frac{d\delta f_j(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t')}{dt'} = \frac{df_j^0(\mathbf{v}')}{dt'} \quad (4.20)$$

se agregan las ecuaciones de órbita y las condiciones iniciales

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt'} = \mathbf{v}', \quad \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = \frac{e_j}{c} (\mathbf{v}' \times B_0 \hat{e}_z)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t' = t) &= \mathbf{x} \\ \mathbf{v}'(t' = t) &= \mathbf{v} \end{aligned} \quad (4.21)$$

reemplazando la **Ecuación 4.19** en la **Ecuación 4.20** encontramos que

$$\frac{d\delta f_j(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t')}{dt'} = -\mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}'} f_j^0(\mathbf{v}') \quad (4.22)$$

Podemos notar que la **Ecuación 4.22** es similar a la ecuación de Vlasov linealizada, siendo el término de aceleración las fuerzas electromagnéticas. Teniendo esto en cuenta, podemos aplicar esta forma a la ecuación de Vlasov linealizada, obteniendo la siguiente ecuación

$$\frac{d\delta f_j(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t')}{dt'} = - \left[\frac{\hat{n}_j e_j}{m_j} \left(\delta E(\mathbf{x}', t') + \frac{(\mathbf{v}' \times \delta \mathbf{B}(\mathbf{x}', t'))}{c} \right) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} F_j(v_{\perp}^2, v_z') \quad (4.23)$$

A continuación, vamos a resolver la [Ecuación 4.23](#) para $\widehat{\delta f_j}(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t')$, para esto, haremos el análisis de modos de Fourier utilizando la [Ecuación 4.6](#), y la [Ecuación 4.8](#) para el campo eléctrico perturbado, además de la transformada de la función perturbada

$$\delta f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \int d^3 \mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \exp(-i\omega t) \widehat{\delta f_j}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) \quad (4.24)$$

ahora integramos a ambos lados de la [Ecuación 4.23](#)

$$\int_{t'=-\infty}^{t'=t} \frac{d\delta f_j(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t')}{dt'} = - \int_{t'=-\infty}^{t'=t} \left[\frac{\hat{n}_j e_j}{m_j} \left(\delta E(\mathbf{x}', t') + \frac{(\mathbf{v}' \times \delta \mathbf{B}(\mathbf{x}', t'))}{c} \right) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} F_j(v'_\perp, v'_z) dt'$$

$$\delta f_j(\mathbf{x}'(t), \mathbf{v}'(t), t) - \delta f_j(\mathbf{x}'(-\infty), \mathbf{v}'(-\infty), -\infty) = - \int_{t'=-\infty}^{t'=t} \left[\frac{\hat{n}_j e_j}{m_j} \left(\delta E(\mathbf{x}', t') + \frac{(\mathbf{v}' \times \delta \mathbf{B}(\mathbf{x}', t'))}{c} \right) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} F_j(v'_\perp, v'_z) dt'$$

utilizando las condiciones iniciales descritas en la [Ecuación 4.21](#)

$$\delta f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = - \int_{t'=-\infty}^{t'=t} \left[\frac{\hat{n}_j e_j}{m_j} \left(\delta E(\mathbf{x}', t') + \frac{(\mathbf{v}' \times \delta \mathbf{B}(\mathbf{x}', t'))}{c} \right) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} F_j(v'_\perp, v'_z) dt'$$

Seguimos con el análisis de los modos de Fourier aplicando la transformada según la [Ecuación 4.6](#), [Ecuación 4.7](#), [Ecuación 4.8](#) y [Ecuación 4.24](#)

$$\int d^3 \mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \exp(-i\omega t) \widehat{\delta f_j}(\mathbf{k}, \omega) = - \int_{t'=-\infty}^{t'=t} \left[\frac{\hat{n}_j e_j}{m_j} \left(\int d^3 k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}') \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \exp(-i\omega t') \widehat{\delta \mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) + \frac{(\mathbf{v}' \times \int d^3 k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}') \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \exp(-i\omega t') \widehat{\delta \mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega))}{c} \right) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} F_j(v'_\perp, v'_z) dt'$$

Como \mathbf{v} es independiente de \mathbf{x} en el espacio de las fases podemos escribir la anterior expresión como

$$\begin{aligned} & \int d^3 \mathbf{k} \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \exp(-i\omega t) \widehat{\delta f}_j(\mathbf{k}, \omega) = \\ & - \int d^3 \mathbf{k} \int_c \frac{d\omega}{2\pi i} \int_{t'=-\infty}^{t'=t} \left[\frac{\hat{n}_j e_j}{m_j} \left(\exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}') \exp(-i\omega t') \widehat{\delta \mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(\mathbf{v}' \times \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}') \exp(-i\omega t') \widehat{\delta \mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega))}{c} \right) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} F_j(v'_\perp, v'_z) dt \end{aligned}$$

Por propiedad de las integrales, reorganizando los exponenciales y utilizando la [Ecuación 4.8](#) para $\widehat{\delta \mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega)$ obtenemos

$$\begin{aligned} & \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \widehat{\delta f}_j(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) = \\ & - \int_{t'=-\infty}^{t'=t} \left[\frac{\hat{n}_j e_j}{m_j} \left(\exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t') \widehat{\delta \mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) + \frac{(\mathbf{v}' \times \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}' - \omega t') \frac{\mathbf{k} \times \widehat{\delta \mathbf{E}}}{\omega})}{\phi} \right) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} F_j(v'_\perp, v'_z) dt' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \widehat{\delta f}_j(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) = \\ & - \int_{t'=-\infty}^{t'=t} \left[\frac{\hat{n}_j e_j}{m_j} \left(\widehat{\delta \mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) + \frac{\mathbf{v}' \times (\mathbf{k} \times \widehat{\delta \mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega))}{\omega} \right) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} F_j(v'_\perp, v'_z) \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}' - \omega t') dt' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta f_j(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) = \\ & - \int_{t'=-\infty}^{t'=t} \left[\frac{\hat{n}_j e_j}{m_j} \left(\widehat{\delta \mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) + \frac{\mathbf{v}' \times (\mathbf{k} \times \widehat{\delta \mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega))}{\omega} \right) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} F_j(v'_\perp, v'_z) \frac{\exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}' - \omega t')}{\exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} dt' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta f_j(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) = \\ & - \frac{\hat{n}_j e_j}{m_j} \int_{t'=-\infty}^{t'=t} \left(\widehat{\delta \mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) + \frac{\mathbf{v}' \times (\mathbf{k} \times \widehat{\delta \mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega))}{\omega} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} F_j(v'_\perp, v'_z) \\ & \times \exp i(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) - \omega(t' - t)) dt' \end{aligned} \tag{4.25}$$

De la [Ecuación 4.25](#) se asume que $Im(\omega) > 0$ y las perturbaciones iniciales son ignoradas. Prosiguiendo, ahora haremos uso del hecho que v'_\perp y v'_z son constantes (independientes de t') a lo largo de la trayectoria de una partícula en la configuración de campo de equilibrio, de esta manera podemos re-exresar el primer integrando de la [Ecuación 4.25](#) como

$$\begin{aligned}
& \left(\widehat{\delta \mathbf{E}} + \frac{\mathbf{v}' \times (\mathbf{k} \times \widehat{\delta \mathbf{E}})}{\omega} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \\
&= \left(\widehat{\delta \mathbf{E}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) + \left(\frac{\mathbf{v}' \times (\mathbf{k} \times \widehat{\delta \mathbf{E}})}{\omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \\
&= \left(\widehat{\delta \mathbf{E}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \delta \hat{E}_z \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) + \left(\frac{\mathbf{v}' \times (\mathbf{k} \times \widehat{\delta \mathbf{E}})}{\omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Ahora nos centraremos en el término del lado de derecho de la **Ecuación 4.26**. Utilizando propiedades del producto vectorial ($\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$) tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}' \times (\mathbf{k} \times \widehat{\delta \mathbf{E}}) &= \mathbf{k}(\mathbf{v}' \cdot \widehat{\delta \mathbf{E}}) - \widehat{\delta \mathbf{E}}(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{k}) \\
&= \mathbf{k}(\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \widehat{\delta \mathbf{E}} + v'_z \cdot \delta \hat{E}_z) - \widehat{\delta \mathbf{E}}(\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \mathbf{k} + v'_z \cdot k_z)
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\mathbf{k}(\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \widehat{\delta \mathbf{E}} + v'_z \cdot \delta \hat{E}_z) - \widehat{\delta \mathbf{E}}(\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \mathbf{k} + v'_z \cdot k_z)}{\omega} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \\
&= \left(\frac{\mathbf{k}(\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \widehat{\delta \mathbf{E}} + v'_z \delta \hat{E}_z)}{\omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) - \left(\frac{\widehat{\delta \mathbf{E}}(\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \mathbf{k} + v'_z k_z)}{\omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \\
&= \left(\frac{\mathbf{k}(\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \widehat{\delta \mathbf{E}} + v'_z \delta \hat{E}_z)}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \left(\frac{k_z(\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \widehat{\delta \mathbf{E}} + v'_z \delta \hat{E}_z)}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right) \\
&\quad - \left(\frac{\widehat{\delta \mathbf{E}}(\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \mathbf{k} + v'_z k_z)}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \left(\frac{\delta \hat{E}_z(\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \mathbf{k} + v'_z k_z)}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Reemplazando la **Ecuación 4.27** en la **Ecuación 4.26**

$$\begin{aligned} & \left(\widehat{\delta \mathbf{E}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \delta \widehat{E}_z \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \\ & + \left(\frac{\mathbf{k}(\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \widehat{\delta \mathbf{E}} + v'_z \delta \widehat{E}_z)}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \left(\frac{k_z(\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \widehat{\delta \mathbf{E}} + v'_z \delta \widehat{E}_z)}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right) \\ & - \left(\frac{\widehat{\delta \mathbf{E}}(\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \mathbf{k} + v'_z k_z)}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \left(\frac{\delta \widehat{E}_z(\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \mathbf{k} + v'_z k_z)}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right) \end{aligned}$$

Posteriormente desarrollamos los paréntesis y reorganizaremos la expresión en términos del campo eléctrico perturbado

$$\begin{aligned} & \widehat{\delta \mathbf{E}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \delta \widehat{E}_z \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \frac{\mathbf{k}(\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \widehat{\delta \mathbf{E}})}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \\ & + \frac{\mathbf{k}(v'_z \delta \widehat{E}_z)}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \frac{k_z(\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \widehat{\delta \mathbf{E}})}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \\ & + \frac{k_z(v'_z \delta \widehat{E}_z)}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{\widehat{\delta \mathbf{E}}(\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \mathbf{k})}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \\ & - \frac{\widehat{\delta \mathbf{E}}(v'_z k_z)}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{\delta \widehat{E}_z(\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \mathbf{k})}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \\ & - \frac{\delta \widehat{E}_z(v'_z k_z)}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) = \left(\widehat{\delta \mathbf{E}} + \frac{\mathbf{v}' \times (\mathbf{k} \times \widehat{\delta \mathbf{E}})}{\omega} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \end{aligned}$$

organizando la expresión, tenemos que

$$\begin{aligned} & \widehat{\delta \mathbf{E}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \delta \widehat{E}_z \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \frac{\mathbf{k}(v'_z \delta \widehat{E}_z)}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \\ & + \frac{k_z(\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \widehat{\delta \mathbf{E}})}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{\widehat{\delta \mathbf{E}}(v'_z k_z)}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \\ & - \frac{\delta \widehat{E}_z(\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \mathbf{k})}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) = \left(\widehat{\delta \mathbf{E}} + \frac{\mathbf{v}' \times (\mathbf{k} \times \widehat{\delta \mathbf{E}})}{\omega} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \end{aligned}$$

Sacamos factor común $\delta \widehat{E}_z$ y $\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \widehat{\delta \mathbf{E}}$

$$\begin{aligned}
& \left(\widehat{\delta \mathbf{E}} + \frac{\mathbf{v}' \times (\mathbf{k} \times \widehat{\delta \mathbf{E}})}{\omega} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) = \\
& \left(\widehat{\delta \mathbf{E}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \frac{k_z (\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \widehat{\delta \mathbf{E}})}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{\widehat{\delta \mathbf{E}}(v'_z k_z)}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \\
& + \delta \hat{E}_z \left(\frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \frac{\mathbf{k}(v'_z)}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'_{\perp})}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right)
\end{aligned}$$

llegamos a

$$\begin{aligned}
& \left(\widehat{\delta \mathbf{E}} + \frac{\mathbf{v}' \times (\mathbf{k} \times \widehat{\delta \mathbf{E}})}{\omega} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) = \\
& \frac{(\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \widehat{\delta \mathbf{E}})}{v_{\perp}} \left[\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{v_{\perp}}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right] \\
& + \delta \hat{E}_z \left[\frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'_{\perp})}{\omega} \left(\frac{v_z}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.28}$$

En la ecuación anterior podemos ver que la única dependencia explícita de t' ocurre en los factores $\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \widehat{\delta \mathbf{E}}$ y $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'_{\perp}$. Ahora, introduciendo la frecuencia ciclotrónica

$$\omega_{cj} = \frac{e_j B_0}{m_j c} \tag{4.29}$$

y definiendo la velocidad de fase perpendicular ϕ en $t' = t$ como $(v_x, v_y) = (v_{\perp} \cos \phi, v_{\perp} \sin \phi)$, las soluciones a las ecuaciones de órbita se pueden expresar como

$$v'_x = v_{\perp} \cos(\phi - \omega_{cj} \tau), \quad v'_y = v_{\perp} \sin(\phi - \omega_{cj} \tau), \quad v'_z = v_z \tag{4.30}$$

donde $\tau = t' - t$. Integrando a ambos lados de las tres expresiones de la [Ecuación 4.30](#) tendremos que

■

$$\int_0^{\tau} v'_x d\tau = v_{\perp} \int_0^{\tau} \cos(\phi - \omega_{cj} \tau) d\tau$$

$$x'(\tau) - \cancel{x'(0)}^x = v_{\perp} \left(\frac{1}{\omega_{cj}} \sin(\phi - \omega_{cj}\tau) - \frac{1}{\omega_{cj}} \sin(\phi - \cancel{\omega_{cj}(0)}^0) \right)$$

llegamos a

$$x'(\tau) = x - \frac{v_{\perp}}{\omega_{cj}} (\sin(\phi - \omega_{cj}\tau) - \sin(\phi)) \quad (4.31)$$

■

$$\int_0^{\tau} v'_y d\tau = v_{\perp} \int_0^{\tau} \sin(\phi - \omega_{cj}\tau) d\tau$$

$$y'(\tau) - \cancel{y'(0)}^y = v_{\perp} \left(-\frac{1}{\omega_{cj}} \cos(\phi - \omega_{cj}\tau) + \frac{1}{\omega_{cj}} \cos(\phi - \cancel{\omega_{cj}(0)}^0) \right)$$

llegamos a

$$y'(\tau) = y + \frac{v_{\perp}}{\omega_{cj}} (\cos(\phi - \omega_{cj}\tau) - \cos(\phi)) \quad (4.32)$$

■

$$\int_0^{\tau} v'_z = v_{\perp} \int_0^{\tau} v_z d\tau$$

llegamos a

$$z' = z + v_z \tau \quad (4.33)$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que el vector de onda \mathbf{k} está sobre el plano $x - z$

$$\mathbf{k} = k_{\perp} \hat{e}_x + k_z \hat{e}_z \quad (4.34)$$

El factor exponencial en la integral de la [Ecuación 4.25](#) puede ser re-escrito utilizando la [Ecuación 4.30](#), [Ecuación 4.31](#) y [Ecuación 4.32](#), y con las funciones de Bessel de primer tipo de orden n

$$\begin{aligned} \exp i(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) - \omega(t - t')) &= \exp i(k_{\perp} \hat{e}_x + k_z \hat{e}_z \cdot ((x', y', z') - (x, y, z)) - \omega(t' - t)) \\ &= \exp i(k_{\perp} x' + k_z z' - k_{\perp} x - k_z z - \omega(\tau)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp i \left(k_{\perp} \left(x - \frac{v_{\perp}}{\omega_{cj}} (\sin(\phi - \omega_{cj}\tau) - \sin(\phi)) \right) + k_z (z + v_z\tau) - k_{\perp}x - k_z z - \omega(\tau) \right) \\
&= \exp i \left(\cancel{k_{\perp}x} - k_{\perp} \frac{v_{\perp}}{\omega_{cj}} (\sin(\phi - \omega_{cj}\tau) - \sin(\phi)) + \cancel{k_z z} + k_z v_z\tau - \cancel{k_{\perp}x} - \cancel{k_z z} - \omega(\tau) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\exp i (\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) - \omega(t - t')) = \\
&\exp \left(ik_{\perp} \frac{v_{\perp}}{\omega_{cj}} [\sin(\phi) - \sin(\phi - \omega_{cj}\tau)] + ik_z v_z\tau - i\omega(\tau) \right) \tag{4.35}
\end{aligned}$$

Ahora haremos uso de la siguiente identidad en la [Ecuación 4.35](#)

$$\exp(iz \sin \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(im\phi) J_m(z)$$

donde $J_n(z)$ es la función de Bessel de primer tipo de orden n

$$\begin{aligned}
&\exp \left(i \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{cj}} \sin(\phi) \right) \exp \left(-i \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{cj}} \sin(\phi - \omega_{cj}\tau) \right) \exp(ik_z v_z\tau - i\omega\tau) \\
&= \exp(ik_z v_z\tau - i\omega\tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(im\phi) J_m \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{cj}} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-in(\phi - \omega_{cj}\tau)) J_n \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{cj}} \right) \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{cj}} \right) J_n \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{cj}} \right) \exp[i(k_z v_z - \omega)\tau] \exp(im\phi) \exp(-in\phi) \exp[i(n\omega_{cj})\tau] \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m(b_j) J_n(b_j) \exp[i(m-n)\phi] \exp[i(k_z v_z - \omega + n\omega_{cj})\tau] \tag{4.36}
\end{aligned}$$

donde $b_j = k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{cj}$. Substituyendo la [Ecuación 4.13](#), [Ecuación 4.30](#), [Ecuación 4.34](#) y [Ecuación 4.36](#) en [Ecuación 4.25](#) y definiendo los límites de la integral en τ , encontramos que la función de distribución $\widehat{\delta f_j}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega)$ puede ser expresada como

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta f_j}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) = & -\frac{i\hat{n}_j e_j}{m_j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_m(b_j) \exp i(m-n)\phi}{(\omega - n\omega_{cj} - k_z v_z)} \\
& \left\{ \frac{nJ_n(b_j)}{b_j} \left[\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{v_{\perp}}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right] \delta \hat{E}_x \right. \\
& + iJ'_n(b_j) \left[\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{v_{\perp}}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right] \delta \hat{E}_y \\
& \left. + J_n(b_j) \left[\frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \frac{n\omega_{cj}}{\omega} \left(\frac{v_z}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right] \delta \hat{E}_z \right\} \quad (4.37)
\end{aligned}$$

Donde $J'_n(b_j)$ se denota como $(d/db_j) J_n(b_j)$, y se usan las identidades $J_{n-1}(b_j) - J_{n+1}(b_j) = 2J'_n(b_j)$ y $J_{n-1}(b_j) + J_{n+1}(b_j) = (2n/b_j) J_n(b_j)$. Con el fin de determinar un auto-consistente desarrollo de los campos perturbados vamos a substituir la **Ecuación 4.37** en la ecuación de Maxwell (**Ecuación 4.15**) donde tendremos en cuenta que

$$\int d^3v = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dv_{\perp} v_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \quad (4.38)$$

Además, haremos uso de la identidad

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(b_j) \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \exp[i(m-n)\phi] (v_{\perp} \cos \phi, v_{\perp} \sin \phi, v_z) \\
& = \left[\left(\frac{nv_{\perp}}{b_j} \right) J_n(b_j), iv_{\perp} J'_n(b_j), v_z J_n(b_j) \right] \quad (4.39)
\end{aligned}$$

tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
& \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \widehat{\delta \mathbf{E}}) + \frac{\omega^2}{c^2} \widehat{\delta \mathbf{E}} \\
& + \frac{4\pi i\omega}{c^2} \sum_j e_j \int d^3v \mathbf{v} \left(-\frac{i\hat{n}_j e_j}{m_j} \right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_m(b_j) \exp i(m-n)\phi}{(\omega - n\omega_{cj} - k_z v_z)} \\
& * \left\{ \frac{nJ_n(b_j)}{b_j} \left[\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{v_{\perp}}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right] \delta \hat{E}_x \right. \\
& + iJ'_n(b_j) \left[\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{v_{\perp}}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right] \delta \hat{E}_y \\
& \left. + J_n(b_j) \left[\frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \frac{n\omega_{cj}}{\omega} \left(\frac{v_z}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right] \delta \hat{E}_z \right\} = 0
\end{aligned}$$

introduciendo la [Ecuación 4.39](#) y definiendo la frecuencia del plasma como $\omega_{pj}^2 = 4\pi n_j e_j^2 / m_j$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \widehat{\delta\mathbf{E}}) + \frac{\omega^2}{c^2} \widehat{\delta\mathbf{E}} + \sum_j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{pj}^2 \omega}{c^2} \int d^3v \frac{\left[\left(\frac{nv_{\perp}}{b_j} \right) J_n(b_j), iv_{\perp} J'_n(b_j), v_z J_n(b_j) \right]}{(\omega - n\omega_{cj} - k_z v_z)} \\
 & * \left\{ \frac{nJ_n(b_j)}{b_j} \left[\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{v_{\perp}}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right] \delta \hat{E}_x \right. \\
 & + iJ'_n(b_j) \left[\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{v_{\perp}}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right] \delta \hat{E}_y \\
 & \left. + J_n(b_j) \left[\frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \frac{n\omega_{cj}}{\omega} \left(\frac{v_z}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right] \delta \hat{E}_z \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

donde ahora tenemos que

$$\int d^3v = 2\pi \int_0^{\infty} dv_{\perp} v_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \tag{4.41}$$

Como podemos observar, tenemos expresiones vectoriales aplicadas al campo eléctrico perturbado por lo tanto podemos expresarlo en forma de un operador de la siguiente forma

$$\mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \widehat{\delta\mathbf{E}} = 0 \tag{4.42}$$

donde $D_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ es una matriz de nueve elementos los cuales son evaluados directamente de la [Ecuación 4.40](#). La condición para una solución no-trivial a la [Ecuación 4.42](#) es que el determinante de la matriz (3×3) sea igual cero, dando como resultado la relación de dispersión buscada

$$\det \{D_{ij}(\mathbf{k}, \omega)\} = 0 \tag{4.43}$$

Para encontrar los elementos del tensor de dispersión $D_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$, primero realizaremos el doble producto vectorial de la [Ecuación 4.40](#) teniendo en cuenta la [Ecuación 4.34](#)

$$\mathbf{k} \times \widehat{\delta\mathbf{E}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ k_{\perp} & 0 & k_z \\ \delta \hat{E}_x & \delta \hat{E}_y & \delta \hat{E}_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{k} \times \widehat{\delta \mathbf{E}} = (-k_z \delta \hat{E}_y) \hat{i} - (k_\perp \delta E_z - k_z \delta \hat{E}_x) \hat{j} + (k_\perp \delta \hat{E}_z) \hat{k}$$

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \widehat{\delta \mathbf{E}}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ k_\perp & 0 & k_z \\ (-k_z \delta \hat{E}_y) & (k_z \delta \hat{E}_x - k_\perp \delta E_z) & (k_\perp \delta \hat{E}_z) \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \widehat{\delta \mathbf{E}}) = -k_z (k_z \delta \hat{E}_x - k_\perp \delta E_z) \hat{i} - (k_\perp (k_\perp \delta \hat{E}_z) - k_z (k_z \delta \hat{E}_x - k_\perp \delta E_z)) \hat{j} + k_\perp (k_z \delta \hat{E}_x - k_\perp \delta E_z) \hat{k}$$

Ahora organizaremos la **Ecuación 4.40** como tres ecuaciones con respecto a los vectores unitarios $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$.

1.

$$\begin{aligned} & -k_z (k_z \delta \hat{E}_x - k_\perp \delta E_z) + \frac{\omega^2}{c^2} \delta \hat{E}_x + \sum_j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{pj}^2 \omega}{c^2} \int d^3 v \frac{\left(\frac{nv_\perp}{b_j}\right) J_n(b_j)}{(\omega - n\omega_{cj} - k_z v_z)} \\ & * \left\{ \frac{nJ_n(b_j)}{b_j} \left[\frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{v_\perp}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z) \right) \right] \delta \hat{E}_x \right. \\ & + iJ'_n(b_j) \left[\frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{v_\perp}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z) \right) \right] \delta \hat{E}_y \\ & \left. + J_n(b_j) \left[\frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z) + \frac{n\omega_{cj}}{\omega} \left(\frac{v_z}{v_\perp} \frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z) \right) \right] \delta \hat{E}_z \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

2.

$$\begin{aligned} & - (k_\perp (k_\perp \delta \hat{E}_z) - k_z (k_z \delta \hat{E}_x - k_\perp \delta E_z)) \\ & + \frac{\omega^2}{c^2} \delta \hat{E}_y + \sum_j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{pj}^2 \omega}{c^2} \int d^3 v \frac{iv_\perp J'_n(b_j)}{(\omega - n\omega_{cj} - k_z v_z)} \\ & * \left\{ \frac{nJ_n(b_j)}{b_j} \left[\frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{v_\perp}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z) \right) \right] \delta \hat{E}_x \right. \\ & + iJ'_n(b_j) \left[\frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{v_\perp}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z) \right) \right] \delta \hat{E}_y \\ & \left. + J_n(b_j) \left[\frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z) + \frac{n\omega_{cj}}{\omega} \left(\frac{v_z}{v_\perp} \frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z) \right) \right] \delta \hat{E}_z \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

3.

$$\begin{aligned}
 & k_{\perp} \left(k_z \delta \hat{E}_x - k_{\perp} \delta E_z \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \delta \hat{E}_z + \sum_j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{pj}^2 \omega}{c^2} \int d^3 v \frac{v_z J_n(b_j)}{(\omega - n\omega_{cj} - k_z v_z)} \\
 & * \left\{ \frac{n J_n(b_j)}{b_j} \left[\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{v_{\perp}}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right] \delta \hat{E}_x \right. \\
 & + i J'_n(b_j) \left[\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{v_{\perp}}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right] \delta \hat{E}_y \\
 & \left. + J_n(b_j) \left[\frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \frac{n\omega_{cj}}{\omega} \left(\frac{v_z}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right] \delta \hat{E}_z \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

De esta forma es sencillo escribir los elementos del tensor de dispersión siguiendo la forma

$$\begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \hat{E}_x \\ \delta \hat{E}_y \\ \delta \hat{E}_z \end{pmatrix} = 0 \tag{4.47}$$

donde cada uno de los elementos son

$$\begin{aligned}
 D_{xx}(\mathbf{k}, \omega) &= 1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2} + \sum_j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3 v v_{\perp} \frac{(n^2/b_j^2) J_n^2(b_j)}{(\omega - n\omega_{cj} - k_z v_z)} \\
 & * \left[\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{v_{\perp}}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
 D_{xy}(\mathbf{k}, \omega) &= i \sum_j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3 v v_{\perp} \frac{(n/b_j) J_n(b_j) J'_n(b_j)}{(\omega - n\omega_{cj} - k_z v_z)} \\
 & * \left[\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{v_{\perp}}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right] = -D_{yx}
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}
 D_{xz}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{c^2 k_z k_{\perp}}{\omega^2} + \sum_j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3 v v_{\perp} \frac{(n/b_j) J_n^2(b_j)}{(\omega - n\omega_{cj} - k_z v_z)} \\
 & * \left[\frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \frac{n\omega_{cj}}{\omega} \left(\frac{v_z}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

$$D_{yy}(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \frac{c^2(k_z^2 + k_\perp^2)}{\omega^2} + \sum_j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3v v_\perp \frac{[J'_n(b_j)]^2}{(\omega - n\omega_{cj} - k_z v_z)} \\ * \left[\frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{v_\perp}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z) \right) \right] \quad (4.51)$$

$$D_{yz}(\mathbf{k}, \omega) = -i \sum_j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3v v_\perp \frac{J_n(b_j) J'_n(b_j)}{(\omega - n\omega_{cj} - k_z v_z)} \\ * \left[\frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z) + \frac{n\omega_{cj}}{\omega} \left(\frac{v_z}{v_\perp} \frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z) \right) \right] \quad (4.52)$$

$$D_{zx}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{c^2 k_z k_\perp}{\omega^2} + \sum_j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3v v_z \frac{(n/b_j) J_n^2(b_j)}{(\omega - n\omega_{cj} - k_z v_z)} \\ * \left[\frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{v_\perp}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z) \right) \right] \quad (4.53)$$

$$D_{zy}(\mathbf{k}, \omega) = i \sum_j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3v v_z \frac{J_n(b_j) J'_n(b_j)}{(\omega - n\omega_{cj} - k_z v_z)} \\ * \left[\frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{v_\perp}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z) \right) \right] \quad (4.54)$$

$$D_{zz}(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \frac{c^2 k_\perp^2}{\omega^2} \sum_j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3v v_z \frac{J_n^2(b_j)}{(\omega - n\omega_{cj} - k_z v_z)} \\ * \left[\frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z) + \frac{n\omega_{cj}}{\omega} \left(\frac{v_z}{v_\perp} \frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z) \right) \right] \quad (4.55)$$

Hasta este punto podemos decir que la relación de dispersión (Ecuación 4.43) junto con los términos de $D_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$, definidos en la Ecuación 4.48 hasta la Ecuación 4.55 pueden ser usados en las áreas de investigación, con respecto a las propiedades detalladas de la estabilidad en un plasma uniforme inmerso en un campo magnético uniforme $B_0 \hat{e}_z$ para un amplio rango de funciones de distribución en equilibrio $F_j(v_\perp^2, v_z)$. Para la Ecuación 4.48 hasta la Ecuación 4.55, se pueden simplificar considerablemente los términos de la matriz $D_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ cuando ocurren varios casos límite, como lo son la propagación de onda paralela a $B_0 \hat{e}_z$; es decir, cuando $k_\perp = 0$; $\mathbf{k} = k_z \hat{e}_z$, la propagación de onda perpendicular a $B_0 \hat{e}_z$, es decir, cuando $k_z = 0$; $\mathbf{k} = k_\perp \hat{e}_x$, y en un plasma isotrópico con $F_j = F_j(v_\perp^2 + v_z^2)$ y $\partial F_j / \partial v_\perp - (v_\perp / v_z) \partial F_j / \partial v_z = 0$.

4.3. Propagación paralela a $B_0 \hat{e}_z$

En este apartado se usarán las ecuaciones [Ecuación 4.48](#) a [Ecuación 4.55](#) para simplificar la relación de dispersión para la propagación de onda paralela a $B_0 \hat{e}_z$ con

$$k_{\perp} = 0, \quad \mathbf{k} = k_z \hat{e}_z \quad (4.56)$$

Para este fin, haremos uso de algunas aproximaciones como lo son $J_0(0) = 1$, $J_n(0) = 0$ para $|n| > 1$, $J_1(b_j) \simeq b_j/2$ para $|b_j| \ll 1$ y $J_{-n}(b_j) = (-1)^n J_n(b_j)$ para $n \in \mathbb{Z}$. Teniendo en cuenta esto, analizando la [Ecuación 4.50](#) y [Ecuación 4.52](#), podemos encontrar que

$$D_{xz}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{c^2 k_z k_{\perp}}{\omega^2} + \sum_j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3 v v_{\perp} \frac{(n/b_j) J_n^2(b_j)}{(\omega - n\omega_{cj} - k_z v_z)} \\ * \left[\frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \frac{n\omega_{cj}}{\omega} \left(\frac{v_z}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right] \quad (4.57)$$

Ahora solo nos centraremos en los términos dependientes de n y de b_j

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(n/b_j) J_n^2(b_j)}{(\omega - n\omega_{cj} - k_z v_z)} \quad (4.58)$$

Recordemos que $b_j = k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{cj}$ por ende, cuando $k_{\perp} = 0$ $b_j \rightarrow 0$. Analizando la segunda aproximación, tenemos que todos los elementos de la sumatoria se vuelven 0 excepto $n = -1, 0, 1$ por lo que los límites de la sumatoria cambian como

$$\sum_{n=-1}^1 \frac{(n/b_j) J_n^2(b_j)}{(\omega - n\omega_{cj} - k_z v_z)}$$

expandiendo la sumatoria anterior tendremos que

$$= \frac{(-1/b_j) J_{-1}^2(b_j)}{(\omega - (-1)\omega_{cj} - k_z v_z)} + \frac{(0/b_j) J_0^2(b_j)}{(\omega - 0\omega_{cj} - k_z v_z)} + \frac{(1/b_j) J_1^2(b_j)}{(\omega - (1)\omega_{cj} - k_z v_z)} \\ = \frac{(-1/b_j) [(-1)^1 J_1(b_j) * (-1)^1 J_1(b_j)]}{(\omega + \omega_{cj} - k_z v_z)} + \frac{(1/b_j) [J_1(b_j) * J_1(b_j)]}{(\omega - \omega_{cj} - k_z v_z)} \\ = \frac{(-1/b_j) [J_1(b_j) * J_1(b_j)]}{(\omega + \omega_{cj} - k_z v_z)} + \frac{(1/b_j) [J_1(b_j) * J_1(b_j)]}{(\omega - \omega_{cj} - k_z v_z)}$$

Aplicando la aproximación para cuando $b_j \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} &= \frac{(-1/b_j) [b_j/2 * b_j/2]}{(\omega + \omega_{cj} - k_z v_z)} + \frac{(1/b_j) [b_j/2 * b_j/2]}{(\omega - \omega_{cj} - k_z v_z)} \\ &= \frac{(-1/b_j) b_j^2}{4(\omega + \omega_{cj} - k_z v_z)} + \frac{(1/b_j) b_j^2}{(\omega - \omega_{cj} - k_z v_z)} \end{aligned}$$

encontramos que

$$\sum_{n=-1}^1 \frac{(n/b_j) J_n^2(b_j)}{(\omega - n\omega_{cj} - k_z v_z)} = \frac{-b_j}{4(\omega + \omega_{cj} - k_z v_z)} + \frac{b_j}{(\omega - \omega_{cj} - k_z v_z)} = 0 \quad (4.59)$$

Con la [Ecuación 4.59](#) encontramos que cuando $b_j \rightarrow 0$ la [Ecuación 4.58](#) tiende a cero. Reemplazando esto en la [Ecuación 4.57](#) tenemos que

$$\begin{aligned} D_{xz}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{c^2 k_z k_\perp}{\omega^2} + \sum_j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3 v v_\perp \frac{(n/b_j) J_n^2(b_j)}{(\omega - n\omega_{cj} - k_z v_z)} \\ &* \left[\frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z) + \frac{n\omega_{cj}}{\omega} \left(\frac{v_z}{v_\perp} \frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z) \right) \right] \\ D_{xz}(\mathbf{k}, \omega) &= \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3 v v_\perp(0) \end{aligned}$$

Por definición tenemos que la integral definida de cero es cero, por lo tanto encontramos que

$$D_{xz}(\mathbf{k}, \omega) = 0$$

Observando la [Ecuación 4.53](#) encontramos que tiene una forma similar a la [Ecuación 4.50](#) en sus términos dependientes de n y b_j , por lo tanto podemos decir que

$$D_{xz}(\mathbf{k}, \omega) = D_{zx}(\mathbf{k}, \omega) = 0 \quad (4.60)$$

Proseguimos haciendo el mismo análisis para la **Ecuación 4.52**

$$D_{yz}(\mathbf{k}, \omega) = -i \sum_j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3v v_{\perp} \frac{J_n(b_j) J'_n(b_j)}{(\omega - n\omega_{cj} - k_z v_z)} \\ * \left[\frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) + \frac{n\omega_{cj}}{\omega} \left(\frac{v_z}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right]$$

sacamos el término de interés como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(b_j) J'_n(b_j)}{(\omega - n\omega_{cj} - k_z v_z)} \quad (4.61)$$

expandimos la sumatoria y aplicando las definición de $J'_n(b_j)$

$$= \sum_{n=-1}^1 \frac{J_n(b_j) [J_{n-1}(b_j) - J_{n+1}(b_j)]}{2(\omega - n\omega_{cj} - k_z v_z)} \\ = \frac{J_{-1}(b_j) [J_{-2}(b_j) - J_0(b_j)]}{2(\omega + \omega_{cj} - k_z v_z)} + \frac{J_0(b_j) [J_{-1}(b_j) - J_1(b_j)]}{2(\omega - n\omega_{cj} - k_z v_z)} + \frac{J_1(b_j) [J_0(b_j) - J_2(b_j)]}{2(\omega - n\omega_{cj} - k_z v_z)}$$

Aplicando la aproximación para cuando $b_j \rightarrow 0$

$$\frac{J_{-1}(b_j) \left[\overset{0}{\cancel{J_{-2}(b_j)}} \overset{1}{\cancel{J_0(b_j)}} \right]}{2(\omega + \omega_{cj} - k_z v_z)} + \frac{\overset{1}{\cancel{J_0(b_j)}} [J_{-1}(b_j) - J_1(b_j)]}{2(\omega - (0)\omega_{cj} - k_z v_z)} + \frac{J_1(b_j) \left[\overset{1}{\cancel{J_0(b_j)}} \overset{0}{\cancel{J_2(b_j)}} \right]}{2(\omega - \omega_{cj} - k_z v_z)} \\ = \frac{J_{-1}(b_j) \left[\overset{0}{\cancel{J_{-2}(b_j)}} \overset{1}{\cancel{J_0(b_j)}} \right]}{2(\omega + \omega_{cj} - k_z v_z)} + \frac{\overset{1}{\cancel{J_0(b_j)}} [J_{-1}(b_j) - J_1(b_j)]}{2(\omega - k_z v_z)} + \frac{J_1(b_j) \left[\overset{1}{\cancel{J_0(b_j)}} \overset{0}{\cancel{J_2(b_j)}} \right]}{2(\omega - \omega_{cj} - k_z v_z)} \\ = \frac{-(-1)^1 J_1(b_j)}{2(\omega + \omega_{cj} - k_z v_z)} + \frac{[(-1)^1 J_1(b_j) - J_1(b_j)]}{2(\omega - k_z v_z)} + \frac{J_1(b_j)}{2(\omega - \omega_{cj} - k_z v_z)}$$

$$\frac{\overset{0}{\cancel{b_j}}}{4(\omega + \omega_{cj} - k_z v_z)} + \frac{\overset{0}{\cancel{b_j}}}{2(\omega - k_z v_z)} + \frac{\overset{0}{\cancel{b_j}}}{4(\omega - \omega_{cj} - k_z v_z)} = 0 \quad (4.62)$$

con la [Ecuación 4.61](#) y [Ecuación 4.62](#) encontramos que la [Ecuación 4.52](#) queda como

$$D_{yz}(\mathbf{k}, \omega) = 0$$

Observando la [Ecuación 4.54](#) encontramos que tiene una forma similar a la [Ecuación 4.52](#) en sus términos dependientes de n y b_j , por lo tanto podemos decir que

$$D_{yz}(\mathbf{k}, \omega) = D_{zy}(\mathbf{k}, \omega) = 0 \quad (4.63)$$

De esta manera podemos afirma que

$$D_{xz}(\mathbf{k}, \omega) = D_{zx}(\mathbf{k}, \omega) = D_{yz}(\mathbf{k}, \omega) = D_{zy}(\mathbf{k}, \omega) = 0 \quad (4.64)$$

Haciendo uso del mismo análisis encontramos que las expresiones para las ecuaciones restantes son

$$D_{xx} = D_{yy} = 1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2} + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3v \frac{v_\perp}{4} \left[\frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{k_z v_z}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{v_\perp}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z) \right) \right] * \left(\frac{1}{\omega - \omega_{cj} - k_z v_z} + \frac{1}{\omega + \omega_{cj} - k_z v_z} \right) \quad (4.65)$$

$$D_{xy} = -D_{yx} = +i \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3v \frac{v_\perp}{4} \left[\frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{k_z v_z}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{v_\perp}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z) \right) \right] * \left(\frac{1}{\omega - \omega_{cj} - k_z v_z} - \frac{1}{\omega + \omega_{cj} - k_z v_z} \right) \quad (4.66)$$

$$D_{zz} = 1 + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3v v_z \frac{\partial F_j}{\partial v_z} \left(\frac{1}{\omega - k_z v_z} \right) \quad (4.67)$$

Reemplazando la [Ecuación 4.64](#) en la [Ecuación 4.43](#) encontramos la relación de dispersión para la propagación de onda paralela $B_0\hat{e}_z$

$$\det \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & 0 \\ D_{yx} & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{pmatrix} = D_{xx}D_{yy}D_{zz} - D_{xy}D_{yx}D_{zz} = 0$$

$$(D_{xx}D_{yy} - D_{xy}D_{yx})D_{zz} = 0 \quad (4.68)$$

En la **Ecuación 4.68** podemos observar dos clases de soluciones, la primera clase es cuando $D_{zz} = 0$, la cual corresponde a perturbaciones **electrostáticas longitudinales** donde $\delta\hat{E}_x = \delta\hat{E}_y = 0$ y el campo eléctrico perturbado $\widehat{\delta\mathbf{E}} = \delta\hat{E}_z\hat{e}_z$ es paralelo a la dirección de propagación $\mathbf{k} = k_z\hat{e}_z$, y la segunda clase es cuando $D_{xx}D_{yy} - D_{xy}D_{yx} = 0$ la cual corresponde a perturbaciones **electromagnéticas transversales** donde $\delta\hat{E}_z = 0$ y el campo eléctrico perturbado $\widehat{\delta\mathbf{E}} = \delta\hat{E}_x\hat{e}_x + \delta\hat{E}_y\hat{e}_y$ es perpendicular a la dirección de propagación $\mathbf{k} = k_z\hat{e}_z$

4.3.1. Relación de dispersión electrostática

La polarización de la onda para perturbaciones electrostáticas, la cual, se propaga paralelamente a $B_0\hat{e}_z$ está dada por

$$\mathbf{k} = (0, 0, k_z), \quad \widehat{\delta\mathbf{E}} = (0, 0, \delta\hat{E}_z), \quad (4.69)$$

y la relación de dispersión $D_{zz} = 0$ se puede expresar como

$$D_{zz}(k_z, \omega) = 1 + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3v v_z \frac{\partial F_j}{\partial v_z} \left(\frac{1}{\omega - k_z v_z} \right) = 0 \quad (4.70)$$

donde $Im(\omega) > 0$. Para diferentes formas de $F_j(v_\perp^2, v_z)$ y las regiones de los espacios de frecuencia y vector de onda que se quieran estudiar, la **Ecuación 4.70** puede ser utilizada como la relación de dispersión electrostática para ondas iónicas longitudinales, oscilaciones de plasma de electrones, inestabilidad de dos-corrientes, entre otras., esto para una onda que se propaga paralela a $B_0\hat{e}_z$.

4.3.2. Relación de dispersión electromagnética

La polarización de la onda para perturbaciones electromagnéticas transversales que se propagan paralelamente a $B_0\hat{e}_z$ esta dada por

$$\mathbf{k} = (0, 0, k_z), \quad \widehat{\delta\mathbf{E}} = (\delta\hat{E}_x, \delta\hat{E}_y, 0), \quad (4.71)$$

para su relación de dispersión $D_{xx}D_{yy} - D_{xy}D_{yx}$ tendremos en cuenta lo encontrado en la [Ecuación 4.65](#) y [Ecuación 4.66](#) por lo que tendremos que

$$D_{xx}D_{yy} - D_{xy}D_{yx} = D_{xx}^2 + D_{xy}^2 = (D_{xx} + iD_{xy})(D_{xx} - iD_{xy}) = 0 \quad (4.72)$$

por lo que podemos reducir la expresión. Comenzamos con $D_{xx} + iD_{xy} = 0$

$$D_{xx} = 1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2} + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3 v \frac{v_{\perp}}{4} \left[\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{v_{\perp}}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right] * \left(\frac{1}{\omega - \omega_{cj} - k_z v_z} + \frac{1}{\omega + \omega_{cj} - k_z v_z} \right)$$

$$iD_{xy} = i \sum_j^{-1} \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3 v \frac{v_{\perp}}{4} \left[\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{v_{\perp}}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right] * \left(\frac{1}{\omega - \omega_{cj} - k_z v_z} - \frac{1}{\omega + \omega_{cj} - k_z v_z} \right)$$

tendremos entonces que

$$D_{xx} + iD_{xy} = 1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2} + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3 v \frac{v_{\perp}}{4} \left[\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{v_{\perp}}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right] * \left[\left(\frac{1}{\omega - \omega_{cj} - k_z v_z} + \frac{1}{\omega + \omega_{cj} - k_z v_z} \right) - \left(\frac{1}{\omega - \omega_{cj} - k_z v_z} - \frac{1}{\omega + \omega_{cj} - k_z v_z} \right) \right]$$

$$1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2} + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3 v \frac{v_{\perp}}{2} \left[\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{v_{\perp}}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right] * \left(\frac{1}{\omega + \omega_{cj} - k_z v_z} \right) = 0 \quad (4.73)$$

utilizando el mismo análisis para $D_{xx} - iD_{xy} = 0$, podemos encontrar que solo varía el signo de ω_{cj} de la [Ecuación 4.73](#), con esto podemos expresar la relación de dispersión como

$$D^{\pm}(k_z, \omega) = 1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2} + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3 v \frac{v_{\perp}}{2} \left[\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) - \frac{v_{\perp}}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \right) \right] * \left(\frac{1}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z} \right) = 0 \quad (4.74)$$

donde se asume que $Im(\omega) > 0$ y $D^+(k_z, \omega) = D_{xx} + iD_{xy}$ y $D^-(k_z, \omega) = D_{xx} - iD_{xy}$, las cuales corresponden a la polarización circular de ondas electromagnéticas con polarización en sentido horario (mano-derecha) con $\delta\hat{E}_x = i\delta\hat{E}_y$ y polarización en sentido anti-horario (mano-izquierda) con $\delta\hat{E}_x = -i\delta\hat{E}_y$. De igual forma como se describió en la relación de dispersión electrostática, dependiendo de las regiones del espacio de frecuencias y de k_z que se quieran estudiar y la forma funcional de $F_j(v_{\perp}^2, v_z)$, la [Ecuación 4.73](#) es la relación de dispersión para ondas electromagnéticas que se propagan paralelamente a $B_0\hat{e}_z$ entre las cuales se incluyen ondas de Álfven, inestabilidad firehose, ondas ión-ciclotrónicas entre otros tipos de inestabilidades.

4.4. Inestabilidades para propagación paralela a $B_0\hat{e}_z$

Para esta sección haremos uso de la [Ecuación 4.74](#) para estudiar las propiedades de la inestabilidad de ondas que se propagan paralelas a $B_0\hat{e}_z$, para este fin, tomaremos como primer paso integrar por partes con respecto v_\perp en la relación de dispersión electromagnética ([Ecuación 4.74](#))

$$D^\pm(k_z, \omega) = 1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2} + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int d^3v \frac{v_\perp}{2} \left[\frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{v_\perp}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z) \right) \right] * \left(\frac{1}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z} \right) = 0$$

recordando la definición de la [Ecuación 4.41](#)

$$D^\pm(k_z, \omega) = 1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2} + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dv_\perp dv_z \frac{v_\perp^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{v_\perp}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z) \right) \right] * \left(\frac{1}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z} \right) = 0$$

ahora nos centraremos solo en la integral

$$I = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dv_\perp dv_z \frac{v_\perp^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) - \frac{v_\perp}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z) \right) \right] \left(\frac{1}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z} \right)$$

partiendo la integral tenemos que

$$I = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dv_\perp dv_z \frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) \frac{v_\perp^2}{2} \left[1 - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \right] \left(\frac{1}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z} \right) + 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dv_\perp dv_z \frac{k_z v_z}{\omega} \frac{v_\perp^3}{2v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z) \left(\frac{1}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z} \right) \quad (4.75)$$

nombraremos a la primera integral como I_1 y la segunda integral I_2 de modo que $I = I_1 + I_2$. Ahora, desarrollaremos las integrales por partes con respecto a v_\perp , para la I_1 tendremos que

$$U = \frac{v_\perp^2}{2(\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z)} \left[1 - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \right], \quad dV = \frac{\partial}{\partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) dv_\perp \\ dU = \frac{v_\perp}{(\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z)} \left[1 - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \right] dv_\perp, \quad V = F_j(v_\perp^2, v_z) \quad (4.76)$$

para I_2 tendremos que

$$\begin{aligned} U &= \frac{k_z}{2\omega} \left(\frac{1}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z} \right) \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z), & dV &= v_\perp^3 dv_\perp \\ dU &= \frac{k_z}{2\omega} \left(\frac{1}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z} \right) \frac{\partial^2}{\partial v_z \partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) dv_\perp, & V &= \frac{v_\perp^4}{4} \end{aligned} \quad (4.77)$$

aplicando la [Ecuación 4.76](#) y [Ecuación 4.77](#) a la [Ecuación 4.75](#)

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{v_\perp^2}{2(\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z)} \left[1 - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \right] F_j(v_\perp^2, v_z) \Big|_0^\infty \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty F_j(v_\perp^2, v_z) \frac{v_\perp}{(\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z)} \left[1 - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \right] dv_\perp \right\} dv_z \\ &+ 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{k_z}{2\omega} \left(\frac{1}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z} \right) \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z) \frac{v_\perp^4}{4} \Big|_0^\infty \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty \frac{v_\perp^4}{4} \frac{k_z}{2\omega} \left(\frac{1}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z} \right) \frac{\partial^2}{\partial v_z \partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) dv_\perp \right\} dv_z \end{aligned}$$

por definición tenemos que

$$\lim_{v_\perp \rightarrow \infty} F_j(v_\perp^2, v_z) = 0, \quad \lim_{v_\perp \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial v_z} F_j(v_\perp^2, v_z) = 0 \quad (4.78)$$

teniendo en cuenta la [Ecuación 4.78](#) y evaluando el primer término de las integrales I_1 e I_2 observamos que se vuelven cero por tanto quedaría solo el segundo término de ambas integrales

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ - \int_0^\infty F_j(v_\perp^2, v_z) \frac{v_\perp}{(\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z)} \left[1 - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \right] dv_\perp \right\} dv_z \\ &+ 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ - \int_0^\infty \frac{v_\perp^4}{4} \frac{k_z}{2\omega} \left(\frac{1}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z} \right) \frac{\partial^2}{\partial v_z \partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) dv_\perp \right\} dv_z \end{aligned} \quad (4.79)$$

Ahora tomaremos a la primera integral de la [Ecuación 4.79](#) como I_3 y la segunda integral como I_4 . Podemos encontrar que en I_3 $F_j(v_\perp^2, v_z)$ no se encuentra operada por $\partial/\partial v_\perp$ por lo que podremos dejarla así por el momento, caso contrario en I_4 si encontramos esta dependencia, por lo tanto trabajaremos un poco más esta integral

$$I_4 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ - \int_0^\infty \frac{v_\perp^4}{4} \frac{k_z}{2\omega} \left(\frac{1}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z} \right) \frac{\partial^2}{\partial v_z \partial v_\perp} F_j(v_\perp^2, v_z) dv_\perp \right\} dv_z$$

podemos sacar la derivada parcial con respecto a la velocidad en z fuera de la integral ya que está definida para la velocidad perpendicular

$$I_4 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{k_z}{\omega} \left(\frac{1}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z} \right) \frac{\partial}{\partial v_z} \int_0^{\infty} v_{\perp}^4 \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) dv_{\perp} \right\} dv_z$$

aplicamos integral por partes sobre v_{\perp}

$$\begin{aligned} U &= v_{\perp}^4 & dV &= \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} F_j(v_{\perp}^2, v_z) dv_{\perp} \\ dU &= 4v_{\perp}^3 dv_{\perp} & V &= F_j(v_{\perp}^2, v_z) \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$I_4 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{k_z}{8\omega} \left(\frac{1}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z} \right) \frac{\partial}{\partial v_z} \left[\cancel{v_{\perp}^4 F_j(v_{\perp}^2, v_z)} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 4v_{\perp}^3 F_j(v_{\perp}^2, v_z) dv_{\perp} \right] \right\} dv_z$$

$$I_4 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{k_z}{2\omega} \left(\frac{1}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z} \right) \int_0^{\infty} v_{\perp}^3 \frac{\partial F_j(v_{\perp}^2, v_z)}{\partial v_z} dv_{\perp} \right\} dv_z \quad (4.81)$$

reemplazando la [Ecuación 4.81](#) en la [Ecuación 4.74](#) tenemos que

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\int_0^{\infty} F_j(v_{\perp}^2, v_z) \frac{v_{\perp}}{(\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z)} \left[1 - \frac{(k_z v_z)}{\omega} \right] dv_{\perp} \right\} dv_z \\ &+ 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{k_z}{2\omega} \left(\frac{1}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z} \right) \int_0^{\infty} v_{\perp}^3 \frac{\partial F_j(v_{\perp}^2, v_z)}{\partial v_z} dv_{\perp} \right\} dv_z \end{aligned}$$

retomando la definición de la [Ecuación 4.41](#) llegamos a

$$I = \int d^3v \left[-\frac{F_j(v_{\perp}^2, v_z)}{(\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z)} \left(\frac{\omega - k_z v_z}{\omega} \right) + \frac{k_z}{2\omega} \left(\frac{v_{\perp}^2}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z} \right) \frac{\partial F_j(v_{\perp}^2, v_z)}{\partial v_z} \right] \quad (4.82)$$

reemplazando la [Ecuación 4.82](#) en la [Ecuación 4.74](#) nos da la nueva expresión para la relación de dispersión

$$\begin{aligned} D^{\pm}(k_z, \omega) &= 1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2} \\ &- \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2} \int d^3v \left[\frac{F_j(v_{\perp}^2, v_z) (\omega - k_z v_z)}{(\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z)} - \frac{k_z}{2} \left(\frac{v_{\perp}^2}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z} \right) \frac{\partial F_j(v_{\perp}^2, v_z)}{\partial v_z} \right] \end{aligned} \quad (4.83)$$

donde

$$\int d^3v = 2\pi \int_0^\infty dv_\perp v_\perp \int_{-\infty}^\infty dv_z$$

$\omega = \omega_r + i\gamma$ es la frecuencia de oscilación compleja, $\omega_{cj} = \frac{e_j B_0}{m_j c}$ es la frecuencia ciclotrónica y se asume que $Im(\omega) > 0$. La polarización asociada a la [Ecuación 4.83](#) está dada por

$$\mathbf{k} = (0, 0, k_z), \quad \widehat{\delta\mathbf{E}} = (\mp i\delta\hat{E}_x, \delta\hat{E}_y, 0) \quad (4.84)$$

donde $D^+ = 0$ y $D^- = 0$ corresponden a las ondas electromagnéticas polarizadas circularmente con polarización en sentido horario (mano derecha) con $\delta\hat{E}_x = -i\delta\hat{E}_y$, y polarización en sentido anti-horario (mano izquierda) con $\delta\hat{E}_x = +i\delta\hat{E}_y$. Para el análisis de la relación de dispersión ([Ecuación 4.83](#)) vamos a asumir que $F_j(v_\perp^2, v_z)$ es de la forma

$$F_j(v_\perp^2, v_z) = \left(\frac{m_j}{2\pi T_{j\parallel}}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m_j v_z^2}{2T_{j\parallel}}\right) G_j(v_\perp^2) \quad (4.85)$$

donde

$$2\pi \int_0^\infty dv_\perp v_\perp G_j(v_\perp^2) = 1$$

ya que el momento v_\perp^2 de $F_j(v_\perp^2, v_z)$ ocurre, la temperatura efectiva perpendicular $T_{j\perp}$ es definida por

$$T_{j\perp} = 2\pi \int_0^\infty dv_\perp v_\perp \left(\frac{m_j}{2} v_\perp^2\right) G_j(v_\perp^2) \quad (4.86)$$

reemplazamos la [Ecuación 4.85](#) y [Ecuación 4.86](#) en la [Ecuación 4.83](#)

$$D^\pm(k_z, \omega) = 1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2} - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2} \int d^3v \left[\frac{F_j(v_\perp^2, v_z) (\omega - k_z v_z)}{(\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z)} - \frac{k_z}{2} \left(\frac{v_\perp^2}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z} \right) \frac{\partial F_j(v_\perp^2, v_z)}{\partial v_z} \right]$$

nos centraremos solo en la integral ya que es donde se encuentra $F_j(v_\perp^2, v_z)$

$$I = \int d^3v \left[\frac{F_j(v_\perp^2, v_z)(\omega - k_z v_z)}{(\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z)} - \frac{k_z}{2} \left(\frac{v_\perp^2}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z} \right) \frac{\partial F_j(v_\perp^2, v_z)}{\partial v_z} \right]$$

recordamos la definición para d^3v

$$I = 2\pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty dv_\perp v_\perp dv_z \left[\frac{F_j(v_\perp^2, v_z)(\omega - k_z v_z)}{(\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z)} - \frac{k_z}{2} \left(\frac{v_\perp^2}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z} \right) \frac{\partial F_j(v_\perp^2, v_z)}{\partial v_z} \right]$$

partimos la integral

$$I = 2\pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty dv_\perp v_\perp dv_z \frac{F_j(v_\perp^2, v_z)(\omega - k_z v_z)}{(\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z)} - 2\pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty dv_\perp v_\perp dv_z \frac{k_z}{2} \left(\frac{v_\perp^2}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z} \right) \frac{\partial F_j(v_\perp^2, v_z)}{\partial v_z}$$

reemplazamos la definición de $F_j(v_\perp^2, v_z)$

$$I = 2\pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty dv_\perp v_\perp dv_z \frac{(\omega - k_z v_z)}{(\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z)} \left(\frac{m_j}{2\pi T_{j\parallel}} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m_j v_z^2}{2T_{j\parallel}}\right) G_j(v_\perp^2) - 2\pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty dv_\perp v_\perp dv_z \frac{k_z}{2} \left(\frac{v_\perp^2}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z} \right) \frac{\partial}{\partial v_z} \left[\left(\frac{m_j}{2\pi T_{j\parallel}} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m_j v_z^2}{2T_{j\parallel}}\right) G_j(v_\perp^2) \right]$$

desarrollamos la derivada parcial de la segunda integral llegando a

$$I = 2\pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty dv_\perp v_\perp dv_z \frac{(\omega - k_z v_z)}{(\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z)} \left(\frac{m_j}{2\pi T_{j\parallel}} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m_j v_z^2}{2T_{j\parallel}}\right) G_j(v_\perp^2) - 2\pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty dv_\perp v_\perp dv_z \frac{k_z}{2} \left(\frac{v_\perp^2}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z} \right) \left(\frac{m_j}{2\pi T_{j\parallel}} \right)^{1/2} \frac{m_j}{2T_{j\parallel}} (-2v_z) \exp\left(-\frac{m_j v_z^2}{2T_{j\parallel}}\right) G_j(v_\perp^2) \quad (4.87)$$

Podemos notar que en la **Ecuación 4.87** en la primera integral está la forma normalizada de $G_j(v_\perp^2)$ y en la segunda integral se encuentra la temperatura efectiva perpendicular $T_{j\perp}$, por lo tanto podemos escribir la **Ecuación 4.87** como

$$I = \int_{-\infty}^\infty dv_z \frac{(\omega - k_z v_z)}{(\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z)} \left(\frac{m_j}{2\pi T_{j\parallel}} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m_j v_z^2}{2T_{j\parallel}}\right) + \int_{-\infty}^\infty dv_z \left(\frac{k_z}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z} \right) \left(\frac{m_j}{2\pi T_{j\parallel}} \right)^{1/2} \frac{T_{j\perp}}{T_{j\parallel}}(v_z) \exp\left(-\frac{m_j v_z^2}{2T_{j\parallel}}\right)$$

ahora definiendo la rapidez termal paralela como $v_{Tj} = (2T_{j\parallel}/m_j)^{1/2}$, tendremos que

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \frac{(\omega - k_z v_z)}{(\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z) v_{Tj} \sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(\frac{v_z}{v_{Tj}}\right)^2\right) \\ + \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \left(\frac{k_z v_z}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z}\right) \frac{1}{v_{Tj}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{T_{j\perp}}{T_{j\parallel}} \exp\left(-\left(\frac{v_z}{v_{Tj}}\right)^2\right)$$

organizando la integral para ω y $k_z v_z$ tendemos que

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \frac{\omega}{(\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z) v_{Tj}} \exp\left(-\left(\frac{v_z}{v_{Tj}}\right)^2\right) \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \left[\left(\frac{k_z v_z}{\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z}\right) \frac{1}{v_{Tj}} \frac{T_{j\perp}}{T_{j\parallel}} \exp\left(-\frac{m_j v_z^2}{2T_{j\parallel}}\right) - \frac{k_z v_z}{(\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z) v_{Tj}} \exp\left(-\left(\frac{v_z}{v_{Tj}}\right)^2\right) \right]$$

sacando factor común $k_z v_z$ en la segunda integral llegamos a

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \frac{\omega}{(\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z) v_{Tj}} \exp\left(-\left(\frac{v_z}{v_{Tj}}\right)^2\right) \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \frac{k_z v_z}{(\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z) v_{Tj}} \exp\left(-\left(\frac{v_z}{v_{Tj}}\right)^2\right) \left(\frac{T_{j\perp}}{T_{j\parallel}} - 1\right) \quad (4.88)$$

Para seguir desarrollando la **Ecuación 4.88** nombraremos a la primera integral como I_1 y la segunda integral como I_2 , además vamos a definir la función de dispersión del plasma como

$$Z(\xi_j^\pm) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx \exp(-x^2)}{x - \xi_j^\pm} \quad (4.89)$$

donde

$$\xi_j^\pm = \frac{\omega \pm \omega_{cj}}{k_z v_{Tj}} \quad (4.90)$$

ahora trabajaremos las dos integrales por separado

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \frac{\omega}{(\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z) v_{Tj}} \exp\left(-\left(\frac{v_z}{v_{Tj}}\right)^2\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_z}{v_{Tj}} \frac{\omega/k_z v_{Tj}}{(\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z)/k_z v_{Tj}} \exp\left(-\left(\frac{v_z}{v_{Tj}}\right)^2\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_z}{v_{Tj}} \frac{\omega/k_z v_{Tj}}{(\omega \pm \omega_{cj}/k_z v_{Tj} - \cancel{k_z v_z}/\cancel{k_z v_{Tj}})} \exp\left(-\left(\frac{v_z}{v_{Tj}}\right)^2\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_z}{v_{Tj}} \frac{\omega/k_z v_{Tj}}{(\xi_j^\pm - v_z/v_{Tj})} \exp\left(-\left(\frac{v_z}{v_{Tj}}\right)^2\right)
 \end{aligned}$$

si tomamos $x = v_z/v_{Tj}$ y $dx = dv_z/v_{Tj}$ tendremos que

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\omega/k_z v_{Tj}}{(\xi_j^\pm - x)} \exp(-x^2) \\
 I_1 &= -\frac{\omega}{k_z v_{Tj}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx \exp(-x^2)}{(x - \xi_j^\pm)} \\
 I_1 &= -\frac{\omega}{k_z v_{Tj}} Z(\xi_j^\pm) \tag{4.91}
 \end{aligned}$$

del mismo modo desarrollamos I_2

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \frac{k_z v_z}{(\omega \pm \omega_{cj} - k_z v_z) v_{Tj}} \exp\left(-\left(\frac{v_z}{v_{Tj}}\right)^2\right) \left(\frac{T_{j\perp}}{T_{j\parallel}} - 1\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_z}{v_{Tj}} \frac{\cancel{k_z v_z}/\cancel{k_z v_{Tj}}}{(\omega \pm \omega_{cj}/k_z v_{Tj} - \cancel{k_z v_z}/\cancel{k_z v_{Tj}})} \exp\left(-\left(\frac{v_z}{v_{Tj}}\right)^2\right) \left(\frac{T_{j\perp}}{T_{j\parallel}} - 1\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_z}{v_{Tj}} \frac{v_z/v_{Tj}}{(\xi_j^\pm - v_z/v_{Tj})} \exp\left(-\left(\frac{v_z}{v_{Tj}}\right)^2\right) \left(\frac{T_{j\perp}}{T_{j\parallel}} - 1\right)
 \end{aligned}$$

tomamos $x = v_z/v_{Tj}$ y $dx = dv_z/v_{Tj}$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x}{(\xi_j^\pm - x)} \exp(-x^2) \left(\frac{T_{j\perp}}{T_{j\parallel}} - 1\right)$$

haremos uso de la expansión en fracciones parciales de la siguiente forma

$$\frac{x}{a-x} = -\frac{a}{x-a} - 1$$

$$\frac{x}{(\xi_j^\pm - x)} = -\frac{\xi_j^\pm}{x - \xi_j^\pm} - 1$$

utilizando la **Ecuación 4.89** tendremos que

$$I_2 = \left(\frac{T_{j\perp}}{T_{j\parallel}} - 1 \right) \left[-\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\xi_j^\pm}{(x - \xi_j^\pm)} \exp(-x^2) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \right]$$

$$I_2 = \left(\frac{T_{j\perp}}{T_{j\parallel}} - 1 \right) [-\xi_j^\pm Z(\xi_j^\pm) - 1] \quad (4.92)$$

reemplazando la **Ecuación 4.91** y **Ecuación 4.92** en la **Ecuación 4.88**, y seguidamente la **Ecuación 4.88** en **Ecuación 4.83**

$$I = -\frac{\omega}{k_z v_{Tj}} Z(\xi_j^\pm) + \left(\frac{T_{j\perp}}{T_{j\parallel}} - 1 \right) [-\xi_j^\pm Z(\xi_j^\pm) - 1]$$

$$= -\frac{\omega}{k_z v_{Tj}} Z(\xi_j^\pm) + (-1) \left(1 - \frac{T_{j\perp}}{T_{j\parallel}} \right) (-1) [1 + \xi_j^\pm Z(\xi_j^\pm)]$$

$$- \left[\frac{\omega}{k_z v_{Tj}} Z(\xi_j^\pm) - \left(1 - \frac{T_{j\perp}}{T_{j\parallel}} \right) (1 + \xi_j^\pm Z(\xi_j^\pm)) \right]$$

reemplazamos esto en **Ecuación 4.83**

$$D^\pm(k_z, \omega) = 1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2} - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2} \left\{ - \left[\frac{\omega}{k_z v_{Tj}} Z(\xi_j^\pm) - \left(1 - \frac{T_{j\perp}}{T_{j\parallel}} \right) (1 + \xi_j^\pm Z(\xi_j^\pm)) \right] \right\}$$

organizamos los signos

$$D^\pm(k_z, \omega) = 1 - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2} + \sum \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega}{k_z v_{Tj}} Z(\xi_j^\pm) - \left(1 - \frac{T_{j\perp}}{T_{j\parallel}} \right) (1 + \xi_j^\pm Z(\xi_j^\pm)) \right]$$

expresemos la frecuencia en su parte real e imaginaria llegando a

$$D^\pm(k_z, \omega) = 1 - \frac{c^2 k_z^2}{(\omega_r + i\gamma)^2} + \sum \frac{\omega_{pj}^2}{(\omega_r + i\gamma)^2} \left[\frac{(\omega_r + i\gamma)}{k_z v_{Tj}} Z(\xi_j^\pm) - \left(1 - \frac{T_{j\perp}}{T_{j\parallel}} \right) (1 + \xi_j^\pm Z(\xi_j^\pm)) \right] = 0$$

$$(4.93)$$

donde $\omega = \omega_r + i\gamma$ es la frecuencia de oscilación compleja, $Z(\xi_j^\pm)$ es la función de distribución del plasma y $v_{Tj} = (2T_{j\parallel}/m_j)^{1/2}$ es la rapidez termal paralela.

Dependiendo de la región del espacio de las frecuencias y de k_z que se desee investigar, y la naturaleza y grado de la temperatura de anisotropía (ya sea cuando $T_{j\parallel} > T_{j\perp}$ o cuando $T_{j\parallel} < T_{j\perp}$), la relación de dispersión electromagnética (Ecuación 4.93) puede soportar una amplia variedad de ondas e inestabilidades como los son la inestabilidad firehose, la inestabilidad ión-ciclotrónica electromagnética, y la inestabilidad electrónica de Whistler.

4.4.1. Inestabilidad ion ciclotrónica electromagnética

La relación de dispersión mencionada en la parte anterior, será ahora considerada en el rango de bajas frecuencias, es de decir, frecuencias cercanas la frecuencia ciclotrónica de los iones, ya que para estas frecuencias es donde existe la inestabilidad ión-ciclotrón. Para llevarlo a cabo, se asume que los electrones son isotrópicos con $T_{e\perp} = T_{e\parallel} \equiv T_e$ (condición 1), y fuertemente magnetizado con $|\omega_r + i\gamma| \ll |\omega_{ce}|$ (condición 2) y $|k_z v_{Te}| \ll |\omega_r \pm \omega_{ce} + i\gamma|$ (condición 3), dichas condiciones son necesarias para la persistencia de la inestabilidad. Para la energía anisotrópica de los iones tenemos que esta sigue como

$$T_{i\perp} > T_{i\parallel} \tag{4.94}$$

Para esta relación solo tomaremos dos especies, iones y electrones. Haciendo uso de las condición 1 antes mencionada podemos reescribir la Ecuación 4.93 como

$$D^\pm(k_z, \omega) = 1 - \frac{c^2 k_z^2}{(\omega_r + i\gamma)^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega_r + i\gamma)^2} \left[\frac{(\omega_r + i\gamma)}{k_z v_{Te}} Z(\xi_e^\pm) - \left(1 - \frac{T_{e\perp}}{T_{e\parallel}}\right) (1 + \xi_e^\pm Z(\xi_e^\pm)) \right] + \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega_r + i\gamma)^2} \left[\frac{(\omega_r + i\gamma)}{k_z v_{Ti}} Z(\xi_i^\pm) - \left(1 - \frac{T_{i\perp}}{T_{i\parallel}}\right) (1 + \xi_i^\pm Z(\xi_i^\pm)) \right] = 0$$

$$D^\pm(k_z, \omega) = 1 - \frac{c^2 k_z^2}{(\omega_r + i\gamma)^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega_r + i\gamma)^2} \left[\frac{(\omega_r + i\gamma)}{k_z v_{Te}} Z(\xi_e^\pm) \right] + \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega_r + i\gamma)^2} \left[\frac{(\omega_r + i\gamma)}{k_z v_{Ti}} Z(\xi_i^\pm) - \left(1 - \frac{T_{i\perp}}{T_{i\parallel}}\right) (1 + \xi_i^\pm Z(\xi_i^\pm)) \right] = 0 \tag{4.95}$$

Antes de proseguir, haremos un pequeño análisis de las condiciones 2 y 3, de las cuales, podemos encontrar que

$$|\omega_r + i\gamma| \ll |\omega_{ce}|, \quad \frac{|\omega_r + i\gamma|}{|\omega_{ce}|} \ll 1 \quad (4.96)$$

además

$$|k_z v_{Te}| \ll |\omega_r \pm \omega_{ce} + i\gamma|, \quad 1 \ll \frac{|\omega_r \pm \omega_{ce} + i\gamma|}{|k_z v_{Te}|} \quad (4.97)$$

Utilizando la **Ecuación 4.97** y la definición de ξ_j^\pm de la **Ecuación 4.90**, podemos encontrar que $|\xi_j^\pm| \gg 1$ por lo que podremos utilizar la aproximación asintótica de $Z(\xi_j^\pm)$ cuando $|\xi_j^\pm| \gg 1$, definida como

$$Z(\xi_j^\pm) \simeq -\frac{1}{\xi_j^\pm} - \frac{1}{2(\xi_j^\pm)^3} - \frac{3}{4(\xi_j^\pm)^5} - \dots \quad (4.98)$$

Truncando la aproximación a orden 2 podemos decir que

$$Z(\xi_e^\pm) \simeq -\frac{1}{\xi_e^\pm} \simeq -\frac{1}{\frac{\omega_r \pm \omega_{ce} + i\gamma}{k_z v_{Te}}} \simeq -\frac{k_z v_{Te}}{\omega_r \pm \omega_{ce} + i\gamma} \quad (4.99)$$

reemplazando la **Ecuación 4.99** en **Ecuación 4.95**

$$\begin{aligned} D^\pm(k_z, \omega) &= 1 - \frac{c^2 k_z^2}{(\omega_r + i\gamma)^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega_r + i\gamma)^2} \left[\frac{(\omega_r + i\gamma)}{k_z v_{Te}} \left(-\frac{k_z v_{Te}}{\omega_r \pm \omega_{ce} + i\gamma} \right) \right] \\ &+ \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega_r + i\gamma)^2} \left[\frac{(\omega_r + i\gamma)}{k_z v_{Ti}} Z(\xi_i^\pm) - \left(1 - \frac{T_{i\perp}}{T_{i\parallel}} \right) (1 + \xi_i^\pm Z(\xi_i^\pm)) \right] = 0 \\ \\ D^\pm(k_z, \omega) &= 1 - \frac{c^2 k_z^2}{(\omega_r + i\gamma)^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega_r + i\gamma)} \left(\frac{1}{\omega_r \pm \omega_{ce} + i\gamma} \right) \\ &+ \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega_r + i\gamma)^2} \left[\frac{(\omega_r + i\gamma)}{k_z v_{Ti}} Z(\xi_i^\pm) - \left(1 - \frac{T_{i\perp}}{T_{i\parallel}} \right) (1 + \xi_i^\pm Z(\xi_i^\pm)) \right] = 0 \quad (4.100) \end{aligned}$$

En la **Ecuación 4.100** nos centraremos un momento en el término $1/(\omega_r \pm \omega_{ce} + i\gamma)$, podemos reorganizar esta expresión de la siguiente manera

$$\frac{1}{\omega_r \pm \omega_{ce} + i\gamma} = \frac{1}{\omega_{ce} \left(\frac{\omega_r + i\gamma}{\omega_{ce}} \pm 1 \right)}, \quad \text{si } x = \frac{\omega_r + i\gamma}{\omega_{ce}}, \quad \frac{1}{\omega_r \pm \omega_{ce} + i\gamma} = \frac{1}{\omega_{ce}(x \pm 1)}$$

para la expresión de la parte de arriba haremos una expansión en series de Taylor, para esto es necesario que $x \ll 1$ condición que se cumple gracias a la **Ecuación 4.96**, por lo que tenemos que

$$\frac{1}{x \pm a} = \pm \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} \pm \frac{x^2}{a^3} - \dots \quad (4.101)$$

truncando la serie a orden 2 tenemos que

$$\frac{1}{\omega_{ce}(x \pm 1)} \simeq \frac{1}{\omega_{ce}} \left(\pm 1 - \frac{x}{1^2} \right) = \frac{1}{\omega_{ce}} \left(\pm 1 - \frac{\omega_r + i\gamma}{\omega_{ce}} \right) = \pm \frac{1}{\omega_{ce}} - \frac{\omega_r + i\gamma}{\omega_{ce}^2} \quad (4.102)$$

reemplazando la **Ecuación 4.102** en **Ecuación 4.100** tenemos que

$$D^\pm(k_z, \omega) = 1 - \frac{c^2 k_z^2}{(\omega_r + i\gamma)^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega_r + i\gamma)} \left(\pm \frac{1}{\omega_{ce}} - \frac{\omega_r + i\gamma}{\omega_{ce}^2} \right) + \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega_r + i\gamma)^2} \left[\frac{(\omega_r + i\gamma)}{k_z v_{Ti}} Z(\xi_i^\pm) - \left(1 - \frac{T_{i\perp}}{T_{i\parallel}} \right) (1 + \xi_i^\pm Z(\xi_i^\pm)) \right] = 0$$

simplificamos

$$D^\pm(k_z, \omega) = 1 - \frac{c^2 k_z^2}{(\omega_r + i\gamma)^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega_r + i\gamma)(\pm \omega_{ce})} + \frac{\omega_{pe}^2 (\omega_r + i\gamma)}{(\omega_r + i\gamma) \omega_{ce}^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega_r + i\gamma)^2} \left[\frac{(\omega_r + i\gamma)}{k_z v_{Ti}} Z(\xi_i^\pm) - \left(1 - \frac{T_{i\perp}}{T_{i\parallel}} \right) (1 + \xi_i^\pm Z(\xi_i^\pm)) \right] = 0$$

llegamos a

$$D^\pm(k_z, \omega) = 1 - \frac{c^2 k_z^2}{(\omega_r + i\gamma)^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega_r + i\gamma)(\pm \omega_{ce})} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega_r + i\gamma)^2} \left[\frac{(\omega_r + i\gamma)}{k_z v_{Ti}} Z(\xi_i^\pm) - \left(1 - \frac{T_{i\perp}}{T_{i\parallel}} \right) (1 + \xi_i^\pm Z(\xi_i^\pm)) \right] = 0 \quad (4.103)$$

donde $v_{Ti} = (2T_{i\parallel}/m_i)^{1/2}$ y $\xi_i^\pm = (\omega_r \pm \omega_{ci} + i\gamma)/k_z v_{Ti}$. Haciendo uso de la condición de cuasi-neutralidad del plasma tenemos que $\omega_{pe}^2/(\pm \omega_{ce}) = -\omega_{pi}^2/(\pm \omega_{ci})$. Bajo la región

del espacio $\omega - k_z$ que se está investigando podemos asumir que $|c^2k_z^2/(\omega_r+i\gamma)^2| \gg 1 + \omega_{pe}^2/\omega_{ce}^2$ teniendo que la contribución de los electrones es despreciable ; tomando estas condiciones podemos reescribir la **Ecuación 4.103** como

$$D^\pm(k_z, \omega) = -\frac{c^2k_z^2}{(\omega_r + i\gamma)^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega_r + i\gamma)(\pm\omega_{ci})} + \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega_r + i\gamma)^2} \left[\frac{(\omega_r + i\gamma)}{k_z v_{Ti}} Z(\xi_i^\pm) - \left(1 - \frac{T_{i\perp}}{T_{i\parallel}}\right) (1 + \xi_i^\pm Z(\xi_i^\pm)) \right] = 0 \quad (4.104)$$

$$D^\pm(k_z, \omega) (\omega_r + i\gamma)^2 = -c^2k_z^2 + \frac{\omega_{pi}^2 (\omega_r + i\gamma)}{(\pm\omega_{ci})} + \omega_{pi}^2 \left[\frac{(\omega_r + i\gamma)}{k_z v_{Ti}} Z(\xi_i^\pm) - \left(1 - \frac{T_{i\perp}}{T_{i\parallel}}\right) (1 + \xi_i^\pm Z(\xi_i^\pm)) \right] = 0 \quad (4.105)$$

Donde la (**Ecuación 4.105**) es la relación de dispersión para la inestabilidad ionociclitrón electromagnética. Esta ecuación relaciona la frecuencia compleja $\omega = (\omega_r + i\gamma)$ y el vector de onda k_z , sin embargo no es una expresión ordinaria, esta es conocida como una ecuación trascendental para la frecuencia, por tal razón, encontrar su solución por el medio analítico no es posible. Por ende, su solución debe ser encontrada utilizando métodos numéricos; para esta tesis se encontrarán las raíces de la ecuación (**Ecuación 4.105**) mediante la parte real y compleja de la misma, para posteriormente ser refinada con el Método de Müller, del que se hablará en el siguiente capítulo.

5. Solución numérica para la relación de dispersión de la inestabilidad ion-ciclotrón electromagnética

En este capítulo se trabajará la solución numérica de la relación de dispersión descrita por la [Ecuación 4.105](#) del capítulo anterior, encontrando los ceros de la relación y refinando estas raíces, haciendo uso del método de Müller. Este capítulo se presenta en el siguiente orden: 1) Conceptos básicos del método de Müller, donde cabe resaltar que su explicación es extraída de la referencia [\[65\]](#), con el fin de dar a conocer el método; sin embargo, la forma general que se utilizará en el código solución es la expresión general del método de Müller para raíces complejas. 2) Relación de dispersión para el método numérico, donde se expresa la relación de dispersión electromagnética en forma cuadrática para la aplicación del método de Müller, 3) Ceros de la relación de dispersión, donde se explicará de forma general la metodología a trabajar para la solución y posterior obtención de resultados, los cuales se expondrán y analizarán en el siguiente capítulo, 4) pruebas del código solución de la relación de dispersión, donde se compararán los resultados obtenidos mediante el código escrito para esta tesis con resultados publicados [\[9, 8, 10\]](#) bajo las mismas condiciones planteadas a lo largo del capítulo 2.

5.1. Método de Müller

El método de Müller es similar al conocido método de la secante, el cual, obtiene una aproximación de la raíz dirigiendo una línea recta hasta el eje x con dos valores de la función; la diferencia radica en que el método de Müller aproxima la raíz mediante una parábola con tres puntos [\[65\]](#).

El método consiste en obtener los coeficientes de la parábola que pasa por los tres puntos. Dichos coeficientes se sustituyen en la fórmula cuadrática para obtener el valor donde la parábola intersecta al eje x ; es decir, la raíz estimada. La aproximación se facilita al escribir la ecuación de la parábola en una forma conveniente,

$$f(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c \tag{5.1}$$

Lo que se quiere, es que esta parábola pase por tres puntos $[x_0, f(x_0)]$, $[x_1, f(x_1)]$ y

$[x_2, f(x_2)]$. Los coeficientes de la [Ecuación 5.1](#) se evalúan sustituyendo cada uno de esos tres puntos para dar

$$f(x_0) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c \quad (5.2)$$

$$f(x_1) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c \quad (5.3)$$

$$f(x_2) = a(x_2 - x_2)^2 + b(x_2 - x_2) + c \quad (5.4)$$

De esta forma contamos con 3 ecuaciones, por lo que es posible encontrar los coeficientes a , b , y c . Debido a que dos términos de la [Ecuación 5.4](#) son cero, tenemos que $c = f(x_2)$. Este resultado se sustituye en la [Ecuación 5.2](#) y [Ecuación 5.3](#) para tener dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$f(x_0) - f(x_2) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) \quad (5.5)$$

$$f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) \quad (5.6)$$

De esta manera podemos encontrar los coeficientes restantes a y b . La manera de hacer esto de la forma más conveniente es definir las diferencias como:

$$\begin{aligned} h_0 &= x_1 - x_0 & h_1 &= x_2 - x_1 \\ \delta_0 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} & \delta_1 &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Éstas se sustituyen en la [Ecuación 5.5](#) y [Ecuación 5.6](#) para dar

$$\begin{aligned} (h_0 + h_1)b - (h_0 + h_1)^2 a &= h_0\delta_0 + h_1\delta_0 \\ h_1b - h_1^2 a &= h_1\delta_1 \end{aligned}$$

de donde se despejan a y b . El resultado es expresado entonces como

$$a = \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 - h_0} \quad (5.8)$$

$$b = ah_1 + \delta_1 \tag{5.9}$$

$$c = f(x_2) \tag{5.10}$$

para encontrar la raíz se aplica la fórmula cuadrática a la **Ecuación 5.1**, si embargo, debido al error de redondeo potencial, en lugar de usar la forma convencional, se usa la expresión alternativa:

$$x_3 - x_2 = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \tag{5.11}$$

donde x_3 es la raíz solución de la **Ecuación 5.1**. Ya que se usa la fórmula cuadrática, es posible localizar raíces reales como complejas, siendo esto, la mayor ventaja del método.

La **Ecuación 5.11** proporciona una forma directa para determinar el error de aproximación. Debido a que el lado izquierdo representa la diferencia entre a raíz estimada actual (x_3) y la raíz estimada anterior (x_2), el error se calcula como:

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| 100\% \tag{5.12}$$

Se puede notar un problema en la **Ecuación 5.11**, esta produce dos raíces, correspondientes a los términos \pm del denominador. En el método de Müller, se escoge el signo que coincida con el signo de b . Esta elección proporciona como resultado el denominador más grande y, por lo tanto, dará la raíz estimada más cercana a x_2 .

Una vez que se determina x_3 , el proceso se repite. Esto trae el problema de que un valor es descartado. En general, dos estrategias son comúnmente usadas.

1. Si sólo se localizan raíces reales, elegimos los dos valores originales más cercanos a la nueva raíz estimada, x_3 .
2. Si se localizan raíces reales y complejas, se emplea un método secuencial. Es decir, como en el método de la secante, x_1 , x_2 y x_3 toman el lugar de x_0 , x_1 y x_2 .

5.2. Relación de dispersión para el método numérico

Como vimos en la sección anterior, para la aplicación del método de Müller, la función a resolver debe estar escrita de forma cuadrática; por lo tanto, debemos re-escribir la [Ecuación 4.105](#). Para este fin, se definirán las siguientes variables por conveniencia:

$$\pm\omega_{ci} = \Omega_{ci} \quad (5.13)$$

$$\frac{v_{Ti}\omega_{pi}}{\Omega_{ci}c} = V_{Ti} \quad (5.14)$$

$$X = \frac{\omega}{\Omega_{ci}}, \quad Y = \frac{cK_z}{\omega_{pi}}, \quad A_p = \frac{T_{i\perp}}{T_{i\parallel}} \quad (5.15)$$

$$\xi_i^\pm = \frac{\omega + \Omega_{ci}}{k_z v_{Ti}} \quad (5.16)$$

Donde Ω_{ci} es la frecuencia ciclotrónica, X es la frecuencia normalizada, Y es el vector de onda normalizado y A_p es la anisotropía térmica. Podemos reemplazar la [Ecuación 5.14](#) y [Ecuación 5.15](#) en la [Ecuación 5.16](#)

$$\begin{aligned} \xi_i^\pm &= \frac{\Omega_{ci}X + \Omega_{ci}}{\frac{\omega_{pi}Y}{c}v_{Ti}} = \frac{\Omega_{ci}(1+X)}{\Omega_{ci}V_{Ti}Y} \\ \xi_i^\pm &= \frac{1+X}{V_{Ti}Y} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Ahora, reemplazando las [Ecuación 5.13](#), [Ecuación 5.14](#), [Ecuación 5.15](#) y [Ecuación 5.17](#) en la [Ecuación 4.105](#) tendremos que:

$$-c^2k_z^2 + \frac{\omega_{pi}^2(\omega_r + i\gamma)}{(\pm\omega_{ci})} + \omega_{pi}^2 \left[\frac{(\omega_r + i\gamma)}{k_z v_{Ti}} Z(\xi_i^\pm) - \left(1 - \frac{T_{i\perp}}{T_{i\parallel}}\right) (1 + \xi_i^\pm Z(\xi_i^\pm)) \right] = 0$$

$$\frac{c^2k_z^2}{\omega_{pi}^2} - \frac{(\omega_r + i\gamma)}{(\pm\omega_{ci})} - \left[\frac{(\omega_r + i\gamma)}{k_z v_{Ti}} Z(\xi_i^\pm) - (1 - A_p) (1 + \xi_i^\pm Z(\xi_i^\pm)) \right] = 0$$

$$\begin{aligned}
 Y^2 - X - \left[\frac{\Omega_{ci} X c}{v_{Ti} Y \omega_{pi}} Z(\xi_i^\pm) - (1 - A_p) (1 + \xi_i^\pm Z(\xi_i^\pm)) \right] &= 0 \\
 Y^2 - X - \left[\frac{\cancel{\Omega_{ci} X} \cancel{\omega_{pi}}}{Y \cancel{\omega_{pi}} \cancel{\Omega_{ci}} \cancel{V_{Ti}}} Z(\xi_i^\pm) - (1 - A_p) (1 + \xi_i^\pm Z(\xi_i^\pm)) \right] &= 0 \\
 Y^2 - X - \frac{X}{Y V_{Ti}} Z(\xi_i^\pm) + (1 - A_p) (1 + \xi_i^\pm Z(\xi_i^\pm)) &= 0 \\
 Y^2 - X - \frac{X}{Y V_{Ti}} Z(\xi_i^\pm) + 1 + \xi_i^\pm Z(\xi_i^\pm) - A_p - A_p \xi_i^\pm Z(\xi_i^\pm) &= 0 \\
 Y^2 - X + Z(\xi_i^\pm) \left[\xi_i^\pm - A_p \xi_i^\pm - \frac{X}{Y V_{Ti}} \right] - A_p + 1 &= 0 \\
 Y^2 - X + Z(\xi_i^\pm) \left[\xi_i^\pm - A_p \xi_i^\pm - \frac{X}{Y V_{Ti}} \right] - A_p + 1 &= 0 \\
 Y^2 - X + Z(\xi_i^\pm) \left[\frac{1 + X}{V_{Ti} Y} - A_p \xi_i^\pm - \frac{X}{Y V_{Ti}} \right] - A_p + 1 &= 0 \\
 Y^2 - X + Z(\xi_i^\pm) \left[\frac{1}{V_{Ti} Y} - A_p \xi_i^\pm \right] - A_p + 1 &= 0 \tag{5.18}
 \end{aligned}$$

Haciendo uso de las expresiones para ω_{ci} y ω_{pi} el parámetro beta del plasma puede ser expresado como $\beta_{\parallel} = 8\pi n_i T_{\parallel} / B_0^2 = (\omega_{pi}^2 / \omega_{ci}^2) (2T_{i\parallel} / m_i c^2)$; además, aplicando la definición de v_{Ti} y la [Ecuación 5.14](#) podemos encontrar que $\beta_{\parallel} = V_{Ti}^2$ o de otra forma $V_{Ti} = \sqrt{\beta_{\parallel}}$, reemplazando esto en la ecuación anterior tenemos que

$$Y^2 - X + Z(\xi_i^\pm) \left[\frac{1}{\sqrt{\beta_{\parallel}} Y} - A_p \xi_i^\pm \right] - A_p + 1 = 0 \tag{5.19}$$

Donde la [Ecuación 5.19](#) será la utilizada en el código computacional. Podemos observar entonces que la [Ecuación 5.19](#) tiene como variables la frecuencia compleja $\omega = (\omega_r + i\gamma)$ y el vector de onda k_z , y como parámetros la anisotropía térmica de los protones A_p y el beta paralelo del plasma β_{\parallel} ; estos dos últimos serán de gran importancia para los resultados de esta tesis.

5.3. Ceros de la relación de dispersión

Ya comprendido el método de Müller y escrita la relación de dispersión en forma cuadrática, se dará a continuación la forma en que será resulta la relación de dispersión (Ecuación 4.105).

Para comenzar, podemos inferir que la ecuación (105) comprende una parte real y una parte compleja, esto debido a la forma compleja de la frecuencia; de esta manera, la relación de dispersión puede ser expresada como:

$$D^\pm(k_z, \omega_r + i\gamma) = \text{Re}(D^\pm) + i\text{Im}(D^\pm) = 0 \quad (5.20)$$

Teniendo esto en cuenta, las raíces de la relación de dispersión serán aquellos valores que satisfagan tanto la parte real como la parte imaginaria, es decir, valores de (k_z, ω) que hagan simultáneamente que

$$\text{Re}(D^\pm(k_z, \omega_r + i\gamma)) = 0 \quad (5.21)$$

$$\text{Im}(D^\pm(k_z, \omega_r + i\gamma)) = 0 \quad (5.22)$$

Estos valores estarán delimitados dentro de la región establecida en un plano $\gamma - \omega_r$.

Para encontrar estos valores, se hace uso de las curvas de nivel para cada parte de la relación de dispersión en un mismo plano $\gamma - \omega_r$, siendo entonces las intersecciones entre ambas las posibles soluciones o raíces de la ecuación, como se muestra en el **Figura 5.1**; en esta, $\text{Im}(D^\pm)$ y $\text{Re}(D^\pm)$ son representadas con líneas rojas y líneas azules respectivamente para un valor de k_{z0} fijo. Con la **Figura 5.1** podemos notar que existen múltiples soluciones. El paso siguiente, es el de refinar estos valores utilizando para ello el método de Müller previamente explicado.

Una vez refinadas las soluciones, es de interés observar su comportamiento para otros valores del vector de onda establecido $k_z \neq k_{z0}$. Para esto, se varía con pasos pequeños de k_z de la forma $k_z = k_{z0} + \Delta k_z$ (con $|\Delta k_z|$); además, se supondrá que las soluciones para la frecuencia son las mismas que para $k_z = k_{z0}$, es decir, se variará k_z en la función optima final obtenida por el método de Müller para la solución refinada.

A continuación, para la interpretación de dicho comportamiento de la frecuencia compleja, se mostrarán algunas soluciones de la relación de dispersión para un valor de $\beta_{\parallel} = 0.3$ y valor fijo de vector de onda $k_z = 3$; para esta tesis se tiene como sistema un plasma protón-electrón, por lo que la frecuencia compleja será normalizada a la

frecuencia ciclotrónica de los protones Ω_p y se trabajará con la frecuencia del plasma para los protones $\omega_{pp}^2 = 4\pi\hat{n}_p e_p^2 / m_p$ abreviada por comodidad como ω_p al momento de utilizar el vector de onda k_z . además, se asume que los electrones son isotrópicos. Para presentar estos resultados, se mostrará el comportamiento para seis raíces de la función de distribución, es decir, seis semillas para el método de Müller, esto con el fin de observar que ramas persisten dentro de la solución e identificar su naturaleza y aporte dentro del sistema. Estos puntos serán mostrados en la [Figura 5.1](#), además de presentar el comportamiento de la frecuencia tanto de su parte real como imaginaria en la [Figura 5.2](#).

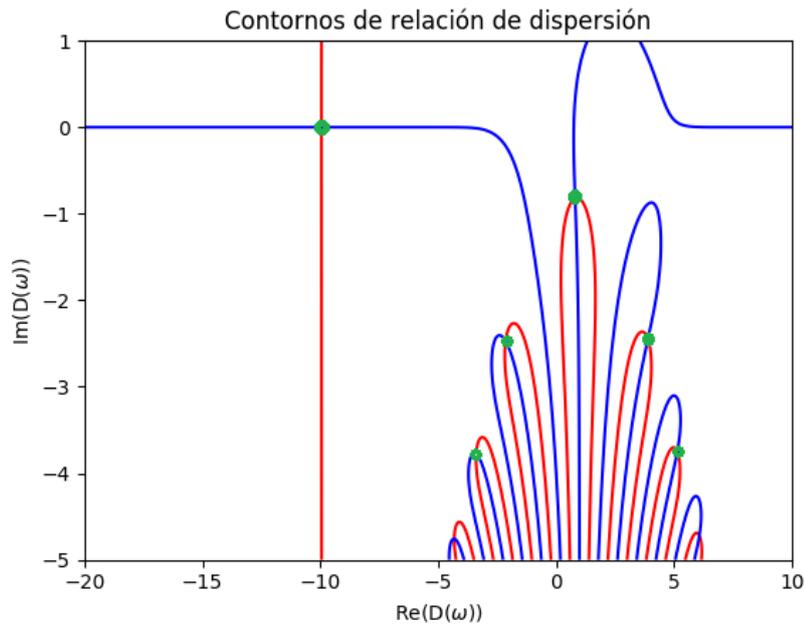


Figura 5.1.: Solución de la relación de dispersión para anisotropía térmica $A_p = 4$, $\beta_{\parallel} = 0.3$ y $k_{z0} = 3$, seleccionando seis raíces para el método de Müller.

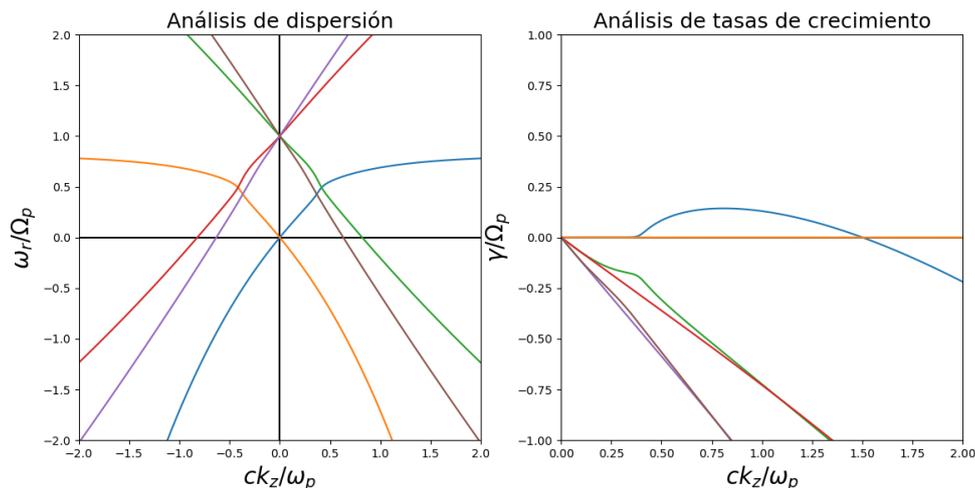


Figura 5.2.: Modos para la solución de la relación de dispersión para anisotropía térmica $A_p = 4.$, $\beta_{\parallel} = 0.3$ y $k_{z0} = 3$. Se muestran las ramas pertenecientes a las seis raíces seleccionadas en la Figura 5.1 al lado derecho se muestra el comportamiento de las ramas para la frecuencia real en función del vector de onda k_z ; al lado izquierdo se muestra el comportamiento de las ramas para la frecuencia imaginaria en función del vector de onda k_z .

Se puede observar en la Figura 5.2 que cada raíz seleccionada de la Figura 5.1 corresponde a un modo o rama tanto en la parte real como imaginaria del plano $\omega - k_z$. Se analizará en primer lugar la parte real de la frecuencia (mano izquierda de la Figura 5.2) y posteriormente la parte imaginaria (mano derecha de la Figura 5.2). En la parte real de la frecuencia, se pueden identificar en el primer y segundo cuadrante, es decir, para $\omega_r > 0$, en color naranja y azul la rama ion-ciclotrón, donde las ondas que se ven excitadas poseen frecuencias del orden de la frecuencia de ciclotrón de los protones Ω_p , por lo tanto, esta rama tiende a la resonancia de forma asintótica a ω_r/Ω_p ; ya que esta rama está presente para $\omega_r > 0$, sugiere que estas ondas se encuentran polarizadas circularmente hacia la izquierda como se reportado en la literatura [66, 67, 68, 69]. En cuanto al tercer y cuarto cuadrante, es decir, para $\omega_r < 0$ se identifican las ramas magnetosónicas, donde estas poseen el mismo color que en el caso anterior, y de la misma manera al estar presentes en esta región, sugiere que tienen polarización circular derecha. Por último, las ramas se cruzan $\omega_r = 1$ y pasan por tres cuadrantes al tiempo, se identifican como las ramas de modos de orden superior, las cuales, deben su existencia al momento de la solución numérica. Como se puede notar, estas ramas se encuentran en pares, por los que se tomará en consideración solo las comprendidas en el primer y cuarto cuadrante es decir con $k_z > 0$ ya que en el segundo y tercer cuadrante son ondas propagándose en dirección anti-paralela al campo magnético (dirección contraria).

Ahora pasamos a la parte imaginaria de la frecuencias γ también conocida como tasa de crecimiento; esta tasa de crecimiento nos da la información del comportamiento de la onda en cuanto a su estabilidad. Si $\gamma = 0$ el sistema es estable, si $\gamma > 0$ el sistema es inestable y si $\gamma < 0$ el sistema se amortigua; de esta manera es posible conocer que ondas estarán excitadas, amortiguadas o estables para cada valor del vector de onda k_z por ende se podrá inferir la relevancia de estos dentro del interés de esta tesis. De la **Figura 5.2** al lado derecho, se observa que todas las ramas de modo superior se ven amortiguadas independientemente del número de estas y de la variación de la anisotropía (pruebas posteriores) , además de permanecer de esta manera para todo valor de k_z , dando como resultado su no contribución directa con las demás ondas; la rama magnetosónica (línea naranja) se encuentra en $\gamma = 0$ para todo k_z siendo entonces estable. Por último, la rama ion-ciclotrón ($\omega_r > 0$) se encuentra excitada para un determinado rango de k_z con un valor máximo de la tasa de crecimiento, por lo tanto, esta rama es la que contribuye mayoritariamente al sistema, por tal razón, es la de mayor relevancia y objetivo principal de estudio en esta tesis.

5.4. Pruebas para el código solución de la relación de dispersión

Para corroborar la validez y fiabilidad del código al momento de resolver y encontrar las soluciones de la relación de dispersión, se harán algunas pruebas variando valores de la anisotropía térmica de los protones $A_p = T_{\perp p}/T_{\parallel p}$, para un parámetro de β_{\parallel} fijo. Después, para importancia de esta tesis, se harán pruebas para encontrar el comportamiento de la tasa de crecimiento máxima cuando se varía el beta para un valor de anisotropía fijo ($A_p = 2.5$). Los resultados son comparados y corroborados con publicaciones de este tipo de inestabilidad bajo las mismas condiciones expuestas a lo largo del capítulo 2 ; con el fin de no alterar el resultado, las pruebas se harán con los mismos parámetros de anisotropía y beta paralelo reportados en las referencias [8, 9, 10]. Los parámetros para el código son: $k_{z0} = 3$, rango de $k_z = (-3, 3)$, rango de frecuencia real $\omega_r = (-20, 10)$,rango de la frecuencia imaginaria $\omega_i = (-5, 1)$, número de puntos para el vector de onda (para frecuencia real e imaginaria) $k_z = 400$, número de puntos para la frecuencia $\omega_r = \omega_i = 2000$; estos parámetros son los mismos para cada una de las pruebas y para los resultados expuestos en el siguiente capítulo.

5.4.1. Comportamiento de la frecuencia compleja con $A_p = 2.5$ y $\beta_{\parallel} = 0.25$

En esta prueba se observará el comportamiento de la parte real e imaginaria (tasa de crecimiento) de la frecuencia en función del vector de onda k_z , este resultado

es comparado y comprobado en la **Figura 5.3** mediante la referencia [8]. Como se mencionó antes las ramas de modos de orden superior no serán tomadas en cuenta por lo tanto no serán expuestas desde este punto en adelante en esta tesis.

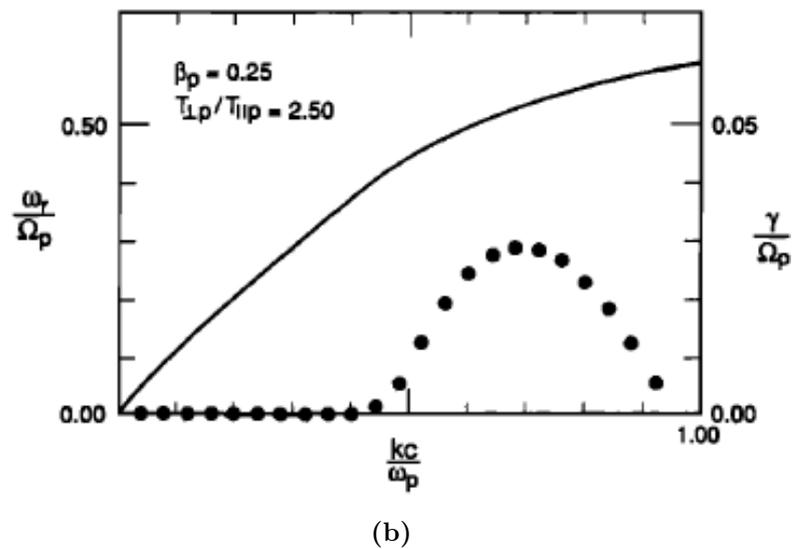
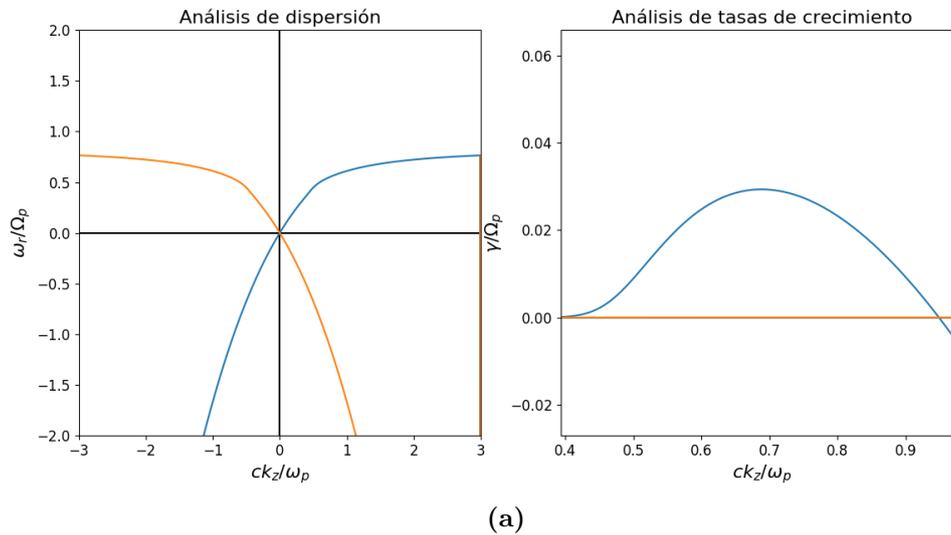


Figura 5.3.: Solución de la relación de dispersión (Ecuación 4.105) para $A_p = 2.5$ y $\beta_{\parallel} = 0.25$. a) Solución y comportamiento de la frecuencia del modo ion-ciclotrón (línea azul en el primer cuadrante) en función del vector de onda mediante el código de esta tesis, a la derecha se encuentra la parte imaginaria de la frecuencia y a la izquierda la parte real de la frecuencia; . b) Solución y comportamiento de la frecuencia del modo ion-ciclotrón , donde la línea sólida es la parte real de la frecuencia y la línea con puntos es la parte imaginaria de la frecuencia, fuente: [8].

Es posible encontrar que la tendencia tanto de la parte real como la parte imaginaria de la frecuencia en ambas gráficas es la misma desde el punto de vista de la simetría; de la misma manera, el valor de la tasa de crecimiento máxima $\gamma_m = 0.029\Omega_p$ y el ancho de la misma $k_z = (0.40, 0.94)$ poseen el mismo valor, por tanto es posible concluir que los resultados son satisfactorios y acordes a la literatura.

5.4.2. Tasa de crecimiento para $A_p = 2, 3, 4, 5, 6$ con valor fijo de $\beta_{\parallel} = 0.5$

En esta prueba se observará el valor de la tasa de crecimiento máxima para los valores descritos de anisotropía y beta, estos valores son comparados y corroborados mediante la [Figura 5.4](#) y la referencia [9]. Para conformidad, solo se mostrarán dos de las gráficas del comportamiento de la frecuencia compleja ($A_p = 2, 6$) resumidas en la figura [Figura 5.5](#).

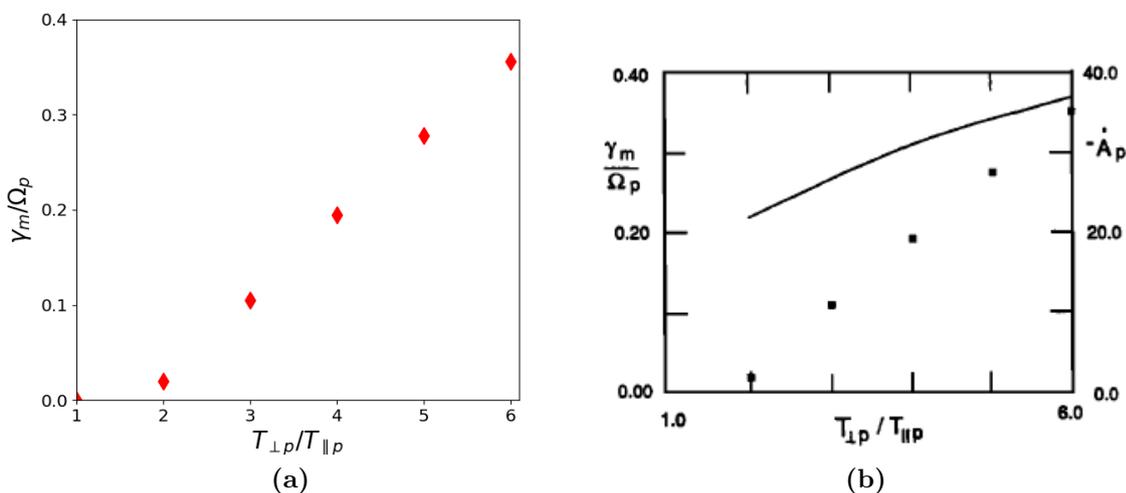


Figura 5.4.: Tasa de crecimiento máxima normalizada en función de la anisotropía térmica de los protones para un $\beta_{\parallel} = 0.5$. a) Resultados de la tasa de crecimiento máxima para la inestabilidad ion-ciclotrón mediante el código de esta tesis. b) Resultados de tasa de crecimiento máxima para la inestabilidad ion-ciclotrón (puntos), fuente: [9].

Es posible observar que la magnitud de la tasa de crecimiento máxima (γ_m) en ambos casos tienen valores numéricos muy cercanos, con un margen de error pequeño, para cada uno de los valores de la anisotropía térmica escogidos en el artículo de referencia ($A_p = 2, 3, 4, 5, 6$), por lo que es posible afirmar que los resultados son satisfactorios y acordes a la literatura. Podemos adicionar que la tasa de crecimiento máxima es proporcional a la anisotropía, esto tiene sentido ya que una de las fuentes de energía libre dentro del plasma es precisamente la anisotropía, por lo tanto, a mayor

anisotropía mayor energía y por lo tanto una mayor excitación de ondas. Añadido a esto, de la **Figura 5.5** es posible observar que también se ve afectado el rango de ondas que son excitadas bajo estos parámetros, siendo entonces proporcional a la anisotropía.

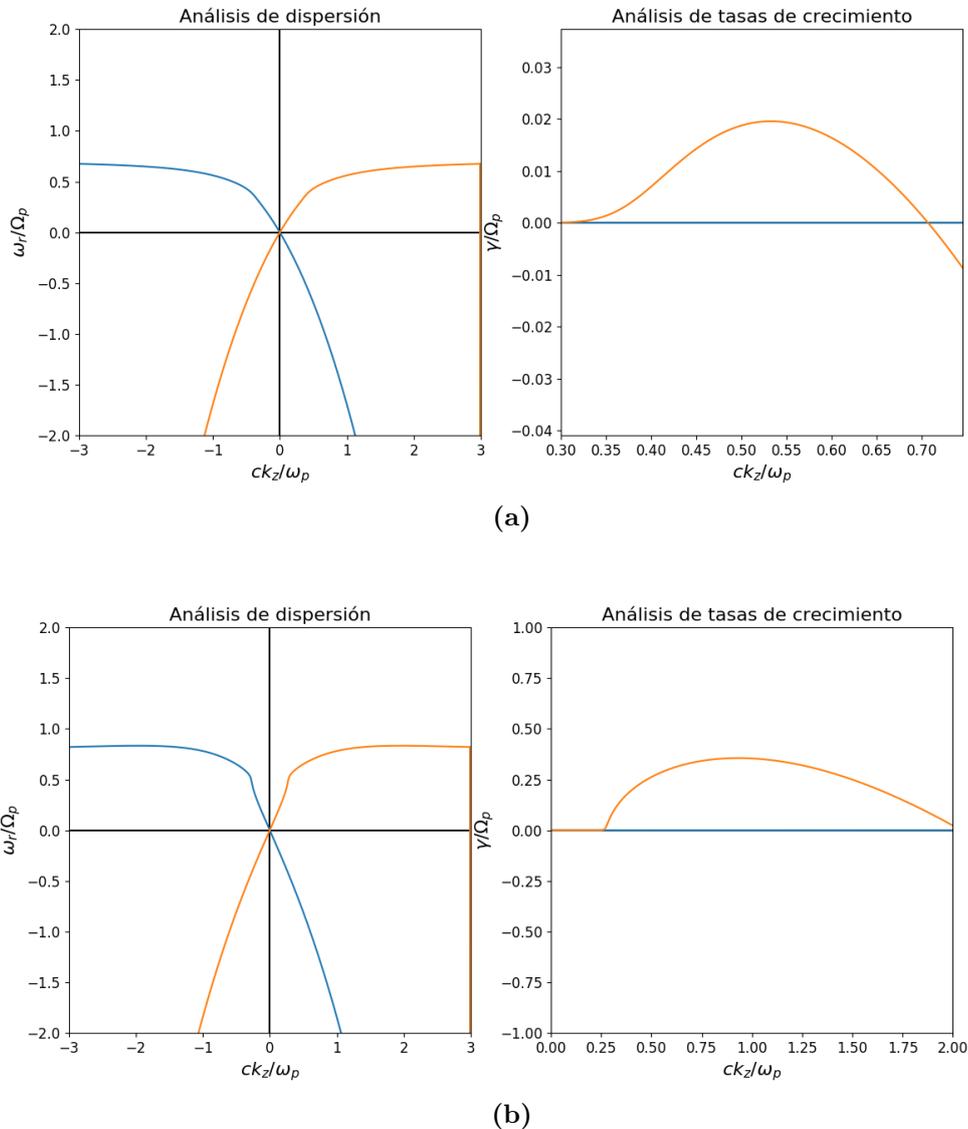


Figura 5.5.: Solución de la relación de dispersión para la inestabilidad ion-ciclotrón (línea naranja) para un valor de $\beta_{\parallel} = 0.5$ en un plasma protón-electrón con electrones isotrópicos. a) Comportamiento de la parte real (izquierda) y parte imaginaria (derecha) de la frecuencia para una anisotropía de $A_p = 2$ presentando una tasa de crecimiento máxima de $\gamma_m = 1.95 \times 10^{-2}\Omega_p$. b) Comportamiento de la parte real e imaginaria de la frecuencia para una anisotropía de $A_p = 6$ presentando una tasa de crecimiento máxima de $\gamma_m = 0.35\Omega_p$

5.4.3. Tasa de crecimiento máxima en función de la anisotropía térmica de los protones y beta del plasma

En esta prueba se observará el cambio de la tasa de crecimiento máximo para un valor de beta fijo en $\beta_{\parallel} = 1$ en un rango de $A_p = (1, 10)$ en la figura (1.6) y para un valor de anisotropía fijo en $A_p = 2.5$ en un rango de $\beta_{\parallel} = (0.1, 1)$ [42, 41] en la **Figura 5.6**; en ambos casos, los resultados son comparados y corroborados con las figuras (3) y (4) extraídas de la referencia [10].

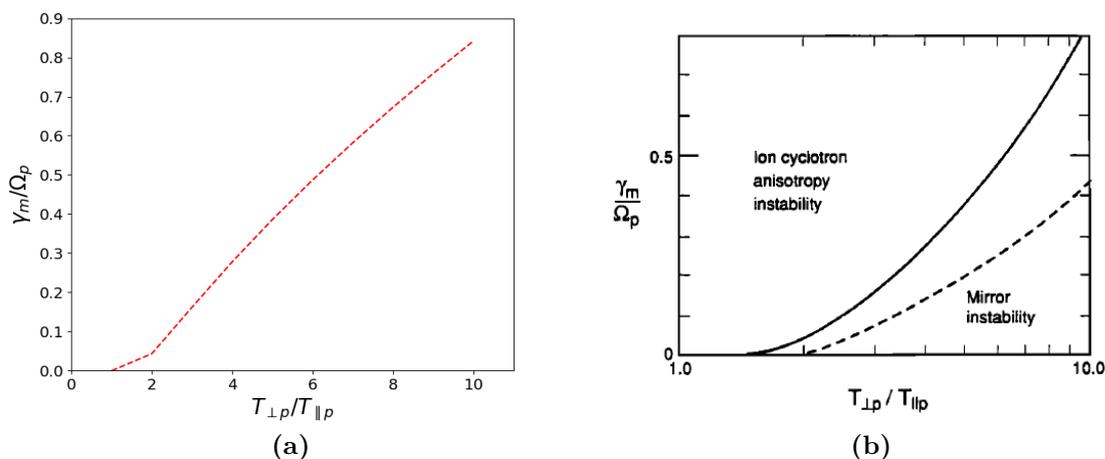


Figura 5.6.: Tasa de crecimiento máxima normalizada en función la anisotropía térmica de los protones par un $\beta_{\parallel} = 1$. a) Resultados para la inestabilidad ion-ciclotrón por medio del código de esta tesis. b) Resultados para la inestabilidad ion-ciclotrón (línea sólida) e inestabilidad espejo (línea punteada). Fuente: [10].

De la **Figura 5.6** se tiene que los valores para la tasa de crecimiento máxima normalizada son muy similares, sin embargo, en la forma de la tendencia hay una ligera diferencia. Esta incongruencia puede ser atribuida a la diferencia que existe en la proporción de los espaciados en la numeración del eje x, es decir, de la anisotropía siendo este decreciente a medida que se acerca a $A_p = 1$ en contraste con la proporción equitativa presentada en la parte (a) de la **Figura 5.6**, lo que puede afectar la impresión visual más no el valor numérico de γ_m . Teniendo esto en cuenta es posible afirmar que los valores de [10] son similares a los encontrados mediante el código. Esto mismo es aplicable a la **Figura 5.7** donde se nota la misma presentación del eje x, para los espaciados en los valores de beta, sin afectar el valor numérico de γ_m normalizada por lo que es posible llegar a la misma conclusión antes mencionada.

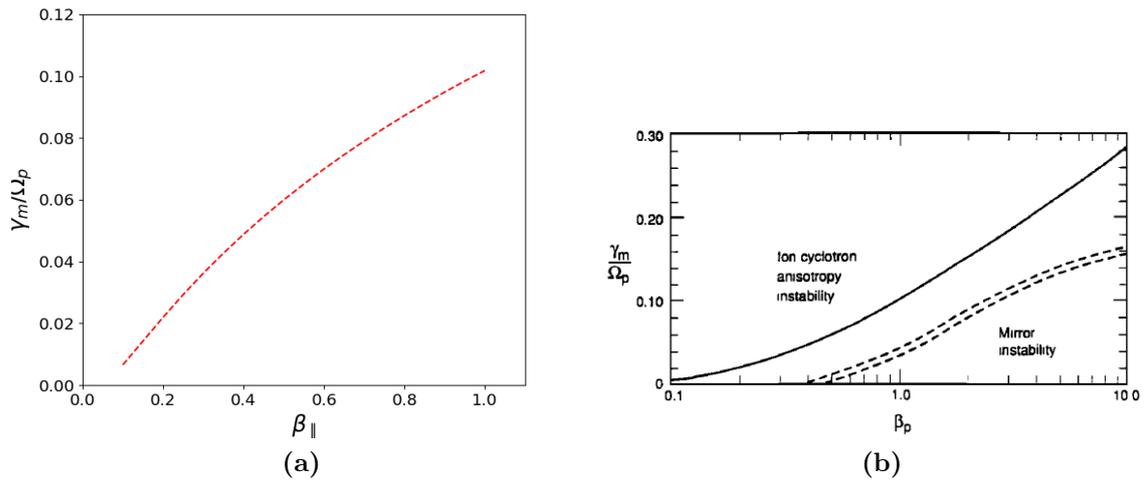


Figura 5.7.: Tasa de crecimiento máxima normalizada en función de beta para un valor de anisotropía térmica de los portones de $A_p = 2.5$. a) Resultados para la inestabilidad ion-ciclotrón por medio del código de esta tesis. b) Resultados para la inestabilidad ion-ciclotrón (línea sólida) e inestabilidad espejo (línea punteada). Fuente: [10]

6. Resultados para la solución de la relación de dispersión ion-ciclotrón electromagnética

Para resolver la relación de dispersión descrita por la [Ecuación 4.105](#), se utiliza la metodología explicada en la sección 1 del capítulo 5, la forma general que se utilizará del método de Müller es:

$$q = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}} \quad (6.1)$$

$$A = qf(x_n) - q(1+q)f(x_{n-1}) + q^2f(x_{n-2}) \quad (6.2)$$

$$B = (2q+1)f(x_n) - (1+q)^2f(x_{n-1}) + q^2f(x_{n-2}) \quad (6.3)$$

$$C = (1+q)f(x_n) \quad (6.4)$$

$$x_{n+1} = x_n - (x_n - x_{n-1}) \frac{2C}{\max(B \pm \sqrt{B^2 - 4AC})} \quad (6.5)$$

donde A, B y C son las constantes del polinomio de grado 2 en el método de Müller, y la [Ecuación 6.5](#) es la expresión para encontrar la raíz para la siguiente iteración. Al tomar un solo valor para el método (la raíz tomada de la intersección de las curvas de nivel), los dos puntos restantes se toman a ambos lados con paso del orden de 10^{-7} ; para minimizar el error, la tolerancia para el método es del orden de 10^{-10} .

Como se ha venido planteando el sistema a trabajar es un plasma protón-electrón magnetizado espacialmente uniforme con un campo magnético uniforme constante

$B = B_{0z}$ y bajo la asunción de electrones anisotrópicos, la inestabilidad seleccionada como objetivo de estudio es la inestabilidad ion-ciclotrón electromagnética bajo la condición de bajas frecuencias comparables con la girofrecuencia de los protones; los parámetros o variables a estudiar y analizar serán : frecuencia imaginaria (tasa de crecimiento) γ , ancho de la población de ondas que se ven afectadas por la inestabilidad, para resumir, ancho de la población inestable en el plano $\gamma - k_z$, el cual, se denominará como Δk_z por simplicidad, y por último la frecuencia real ω_r , cabe destacar que estas variables son normalizadas a la girofrecuencia de los protones Ω_p .

6.1. Metodología para la obtención de γ , Δk_z y ω_r

Las tres variables enunciadas serán tomadas de las gráficas del comportamiento de la frecuencia compleja en el plano $\omega (r + i\gamma) - k_z$ y se harán de la siguiente manera

6.1.1. Frecuencia imaginaria o tasa de crecimiento γ

Para esta variable se toma en consideración la frecuencia imaginaria máxima o tasa de crecimiento máxima γ_m la cual se muestra como el punto máximo o altura máxima de la región inestable, esta se toma dentro del rango del vector de onda establecido de $k_z = (0, 3)$ en el plano $\gamma - k_z$ como se muestra en la [Figura 6.1](#)

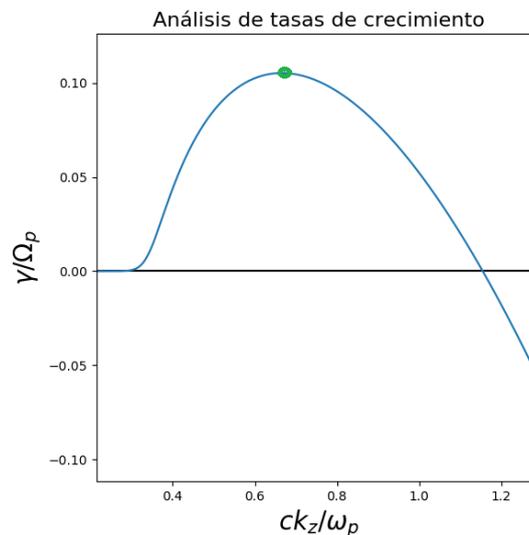


Figura 6.1.: Tasa de crecimiento para $A_p = T_{\perp p}/T_{\parallel p} = 3$ y $\beta_{\parallel} = 0.5$, el punto verde representa el valor máximo de la tasa de crecimiento

6.1.2. ancho de la población inestable Δk_z

Esta variable se toma como los valores límites (superior e inferior) de los números de onda para los cuales se presenta la inestabilidad dentro del rango de k_z establecido en el plano $\gamma - k_z$, tomando en cuenta que la rama ión ciclotrón no es inestable para todo valor de k_z . Luego, se encuentra la diferencia entre estos valores y se denota por el valor resultante $\Delta k_z = k_{z\text{máx}} - k_{z\text{min}}$. Cabe resaltar que esto se hace con el propósito de dar un valor numérico al conglomerado de ondas que se encuentran excitadas por la inestabilidad, sin embargo no es un número definido o finito de ondas en específico, por lo que se analiza de la siguiente manera: si Δk_z aumenta quiere decir que la cantidad de ondas excitadas aumenta, mas no es la cantidad precisa de dichas ondas. Ya que se analizarán tasas de crecimiento pequeñas se debe especificar el umbral de estabilidad requerido, ya que existen frecuencias del orden de 10^{-10} por la tolerancia del método; el umbral para los resultados de esta tesis se establece en $\gamma_{\text{min}} \sim 10^{-3}$, límite para el cual se considera una crecimiento de fluctuación relativamente débil; este límite es extraído de la referencia [8]. Los puntos aproximados son mostrados en la [Figura 6.2](#)

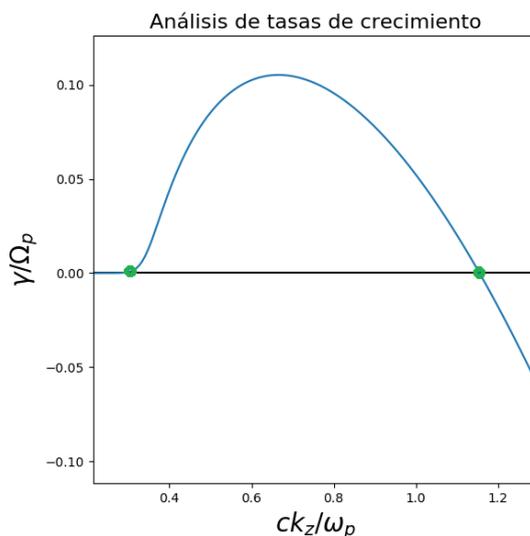


Figura 6.2.: Tasa de crecimiento para $A_p = T_{\perp p}/T_{\parallel p} = 3$ y $\beta_{\parallel} = 0.5$, los punto verdes representan el vector de onda para el cual inicia la inestabilidad $k_{z\text{min}}$ (izquierda) y el vector de onda para el cual finaliza la inestabilidad $k_{z\text{máx}}$ (derecha)

6.1.3. Frecuencia real ω_r

En esta variable se toma el valor máximo de la frecuencia real $\omega_{r\text{max}}$ dentro del rango del vector de onda establecido de $k_z = (0, 3)$ en el plano $\omega_r - k_z$. Para esta medida se presentan dos casos particulares : 1) frecuencia real máxima en el límite del vector de onda, es decir, que su valor máximo se encuentra en $k_z \simeq 3$, lo que

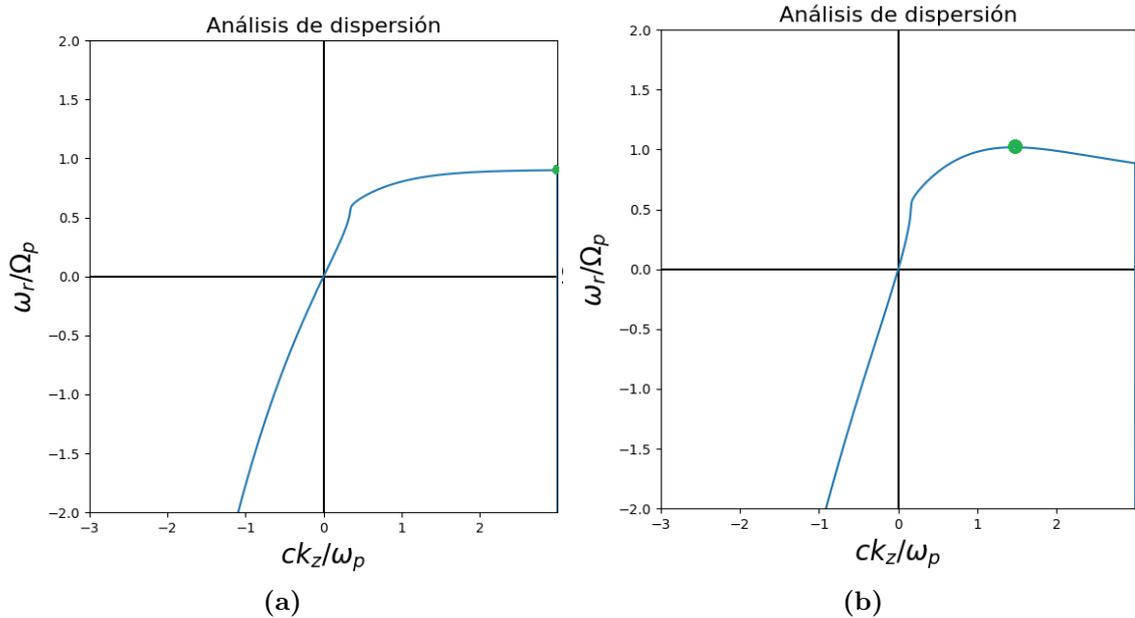


Figura 6.3.: Comportamiento de la frecuencia real en función del vector de onda k_z , para a) $A_p = T_{\perp p}/T_{\parallel p} = 10$ y $\beta_{\parallel} = 0.2$; b) $A_p = T_{\perp p}/T_{\parallel p} = 10$, y $\beta_{\parallel} = 0.95$. El punto verde representa el valor máximo de la frecuencia real para ambas gráficas.

da a entender que la tendencia es creciente como se muestra en la gráfica a) de la **Figura 6.3**, 2) frecuencia real máxima en otro punto de k_z menor al límite, es decir para $0 < k_z < 3$ como se muestra en la gráfica b) de la **Figura 6.3**, lo que nos da a entender que después de ese valor la frecuencia real no puede tener valores mayores al ya establecido en dicho máximo, por lo que a partir de ese punto la tendencia será decreciente y antes de esta será creciente, este fenómeno se encuentra para valores de beta altos. La tendencia referida al caso dos ya ha sido documentada en las referencias [70, 71, 72, 44].

6.2. Presentación de resultados 2D y 3D

Como se mencionó anteriormente, los parámetros de los cuales depende la frecuencia compleja son la anisotropía térmica de los protones A_p y el beta paralelo del plasma β_{\parallel} . Para los resultados encontrados en esta tesis se varía la anisotropía desde 1 hasta 10, con pasos de 0.5, y beta desde 0.1 hasta 1. con pasos de 0.05. Estos límites fueron escogidos utilizando como base las referencia [42, 41, 73] en la cual se muestra la la región de mayor probabilidad y mayor lo que sea. Para observar y analizar las variables de la frecuencia compleja, se hace en primer lugar dos gráficas en 2D para cada una de las variables, estas gráficas constan de una para el comportamiento de la variable par aun valor de beta fijo y anisotropía variable, y la segunda del compor-

tamiento de la variable para un valor de anisotropía fijo con beta variable; esto con el fin de expandir los resultados normalmente expuestos en diversas publicaciones [74, 67, 75, 76, 77, 66, 78, 79]. Posteriormente se expandirán los comportamientos de las variables en un plano tri-dimensional y un mapa de contornos, para una mayor claridad y mayor facilidad al momento de analizar las variables en función de los parámetros beta y la anisotropía térmica; la presentación de los datos en un plano 3D puede ser de ayuda y brindar mayor información relevante para el estudio y ampliación de la inestabilidad ion-ciclotrón electromagnética.

6.2.1. Presentación de resultados en plano bidimensional para

$$\gamma_m, \Delta k_z \text{ y } \omega_{r_{max}}$$

En esta sección se presentan los resultados en un plano de dos dimensiones para las tres variables bajo consideración, todas las figuras presentan al lado izquierdo la gráfica del comportamiento de la variable en función de la anisotropía térmica de los protones para tres valores de β_{\parallel} fijos, y al lado derecho presentan la gráfica del comportamiento de la variable en función de β_{\parallel} para cuatro valores de anisotropía térmica fijos.

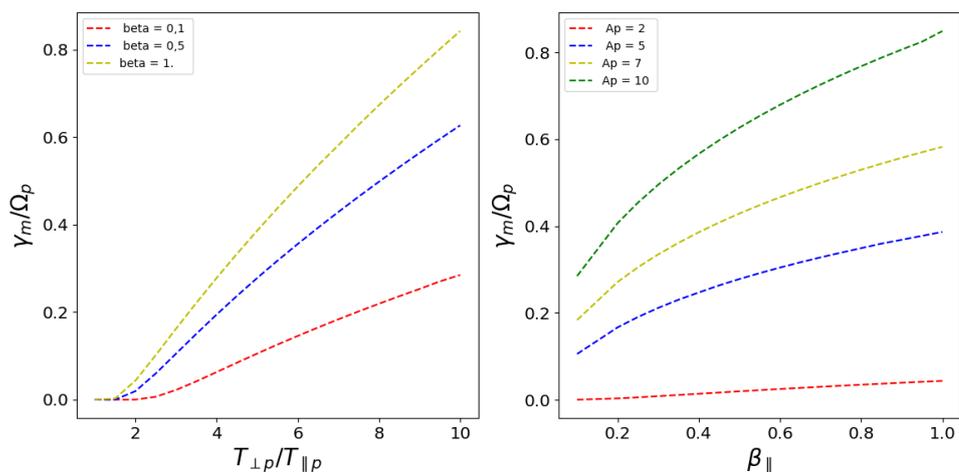


Figura 6.4.: Comportamiento de la tasa de crecimiento máxima en función de β_{\parallel} y A_p para los valores definidos en la sección 2.

de la [Figura 6.4](#) podemos notar que para β_{\parallel} fijo, la tasa de crecimiento para los tres valores del mismo comienzan desde valores cercanos a cero presentando un incremento relativamente lineal a medida que se incrementa la anisotropía, pero también este incrementa, aunque en menor medida en el lado derecho para el se da la variación de β_{\parallel} . Al lado derecho se nota una mayor diferencia entre $\beta_{\parallel} = 0.1$ y $\beta_{\parallel} = 0.5$ que entre $\beta_{\parallel} = 0.5$ y $\beta_{\parallel} = 1.0$; esto puede deberse a que la presión

térmica y la presión magnética tienden a ser iguales ($\beta_{\parallel} = 1$.) por lo que γ_m estaría dependiendo mayoritariamente de la anisotropía, lo cual sugiere que la anisotropía térmica es la fuente de energía libre principal para la inestabilidad ion-ciclotrón [37, 44, 45]. En contraste, al lado derecho, γ_m no comienza en cero para los cuatro valores de anisotropía, en su lugar, cada una comienza desde un valor diferente y tiende a aumentar a medida que β_{\parallel} aumenta, este crecimiento es más notable a medida que se aumenta el valor de A_p , sin embargo es menor que en el lado izquierdo. Dada esta tendencia, podemos inferir que la contribución de β_{\parallel} es relevante más no comparable con la contribución de A_p ; si analizamos la relación que representa β_{\parallel} podemos decir que, a medida que la presión magnética es mayor que la presión térmica la tasa de crecimiento máxima disminuye; en adición para $A_p = 2$, γ_m apenas supera el umbral de estabilidad, teniendo una notoria diferencia para $A_p = 5$.

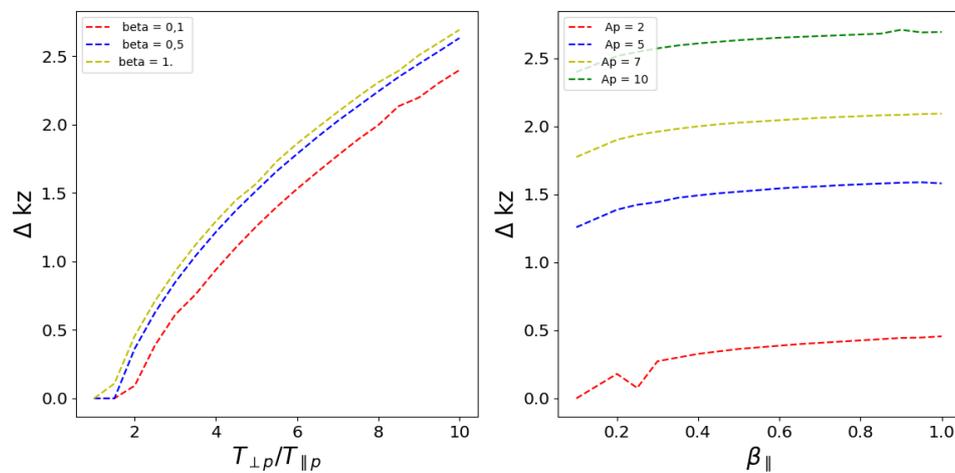


Figura 6.5.: Comportamiento del ancho de la población inestable Δk_z en función de β_{\parallel} y A_p para los valores definidos en la sección 2

de la Figura 6.5 podemos observar que el ancho de la población inestable aumenta con tendencia lineal a medida que A_p aumenta, sin embargo la diferencia existente entre los valores de β_{\parallel} son muy pequeños, esto se corrobora con la gráfica a la derecha, donde este ancho permanece casi constante a la variación de beta tomando diferentes valores para las cuatro anisotropías, por ende se puede decir que la contribución de β_{\parallel} tiene una relevancia significativamente menor que la de la anisotropía en cuanto a Δk_z , esto sugiere que la cantidad de ondas que se ven alteradas por la inestabilidad podrían no ser afectadas por la presión magnética presente en el viento solar, siendo entonces dependiente principalmente de la anisotropía térmica .

En la Figura 6.6 podemos notar un cambio en la tendencia de ω_{rmax} para un valor de $A_p \sim 5$, si se observa el comportamiento para anisotropía menor a 5 , es decir para $0 < A_p \lesssim 5$ ω_{rmax} es mayor para $\beta_{\parallel} = 0.1$ y menor para los demás, siendo el más bajo para $\beta_{\parallel} = 1$, pero para $A_p \gtrsim 5$ esta relación se invierte, ahora ω_{rmax} es mayor para

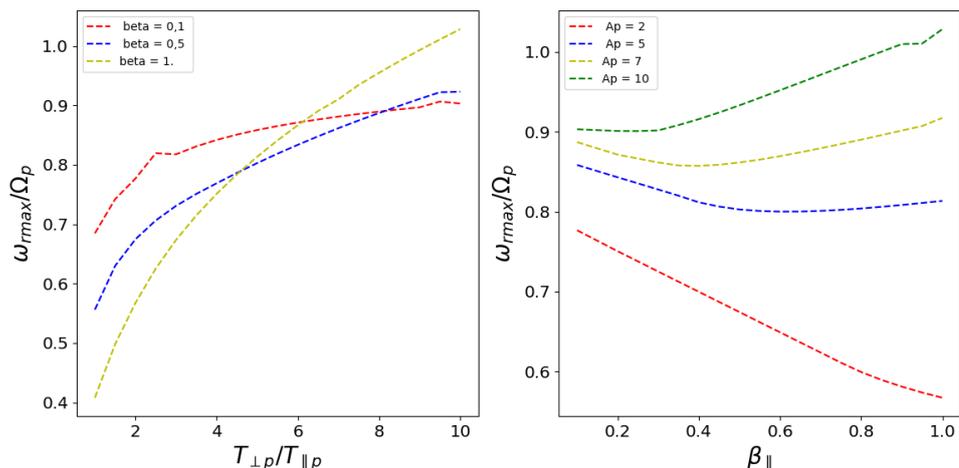


Figura 6.6.: Comportamiento del ancho de la frecuencia real ω_{rm} en función de β_{\parallel} y A_p para los valores definidos en la sección 2

$\beta_{\parallel} = 1$ y menor para $\beta_{\parallel} = 0.1$, esto también es notable a la derecha, teniendo un evidente cambio en el comportamiento entre $A_p = 2$ y $A_p = 5$, donde en la primera ω_{rmax} tiende a disminuir en contraste con los demás valores de A_p , sin embargo a medida que se aumenta A_p para la variación de β_{\parallel} la frecuencia aumenta como se observa en la gráfica derecha, la tendencia decreciente disminuye y la tendencia creciente aumenta. Estos cambios muestran una clara influencia de β_{\parallel} para valores de A_p altos, ya que para $\beta_{\parallel} = 1$ al lado izquierdo, el comportamiento es uniforme (cuando la presión magnética y la presión térmica son iguales) en contraste con el comportamiento para $\beta_{\parallel} = 0.1$ y $\beta_{\parallel} = 0.5$ donde la tendencia creciente disminuye. Algo que también es apreciable, es el hecho de que el comportamiento de ω_{rmax} para $\beta_{\parallel} = 0.1$ y $\beta_{\parallel} = 0.5$ es creciente de forma asintótica a un valor cercano pero menor a $\omega_{rmax} \approx 0.9\Omega_p$ siendo menor para el primero que para el segundo, por el momento se puede decir que a medida que β_{\parallel} aumenta se acerca más a 1, y para $\beta_{\parallel} = 1$ crece sin restricción evidente hasta llegar a $\omega_{rmax} \approx 1\Omega_p$ por lo que se puede inferir que a medida que la presión térmica se acerca a la presión magnética (y posiblemente cuando la supere) la frecuencia real no tiene restricciones para acercarse a la resonancia ciclotrónica ($\omega_{rmax}/\Omega_p = 1$). Esto puede deberse a que la agitación térmica resultante de la combinación de la anisotropía térmica y la creciente presión térmica ayudan a las ondas a llegar a la resonancia ciclotrónica ya sea aumentando la tasa de crecimiento de la inestabilidad; este cambio de tendencia se observará de mejor manera en las gráficas tridimensionales.

6.2.2. Gráficas 3D para γ_m , Δk_z y $\omega_{r_{max}}$

En la sección anterior, es notable que el comportamiento de las tres variables es influenciado por la variación de β_{\parallel} y de A_p , sin embargo la limitación de solo algunos valores fijos en una presentación 2D limita la interpretación, análisis y la veracidad de las suposiciones; por esta razón se presenta el comportamiento de las variables en función de β_{\parallel} y de A_p en un plano 3D, y adicionalmente un mapa de contorno para cada uno, con el fin de analizar la relación existente entre los parámetros para valores constantes de las tres variables, de esta forma facilitar el análisis y ampliar los resultados ya expuestos. Dichos resultados se presentan en la [Figura 6.7](#), [Figura 6.8](#) y [Figura 6.9](#).

Antes de proseguir con el debido análisis de los resultados, es de vital importancia comprender el comportamiento natural de los parámetros (β_{\parallel} y A_p) en la expansión heliocéntrica del viento solar hacia el espacio, de esta forma se podrá dar un significado plausible y asimilable de dichos resultados. Como se mencionó en la parte introductoria, el parámetro β_{\parallel} es una relación entre la presión térmica y la presión magnética (P_T/P_M); cuando el viento solar se aleja del Sol la presión magnética tiende a disminuir, ya que, el campo magnético del Sol tiene una menor influencia a medida que la distancia aumenta, por dicha razón el parámetro β_{\parallel} al ser inversamente proporcional a la presión magnética tiende a aumentar cuando el viento solar se expande en el espacio.

Utilizando el mismo análisis, tenemos que A_p es una relación entre la temperatura perpendicular y la temperatura paralela al campo magnético de fondo (T_{\perp}/T_{\parallel}), como T_{\perp} depende de la Fuerza de Lorentz, al aumentar la distancia dicha fuerza disminuye por acción del campo magnético, por ende, T_{\perp} disminuye; al tener una relación directa la anisotropía térmica disminuye. De esta forma encontramos que la anisotropía disminuye a medida que el viento solar se expande hacia el espacio, de esta forma podemos inferir que existe una relación inversa entre β_{\parallel} y A_p ; con esto definido proseguiremos con el análisis de los resultados expuestos de forma tridimensional.

Podemos observar de la [Figura 6.7](#) que γ_m incrementa a medida que A_p y β_{\parallel} incrementan, sin embargo, se observa una mayor dependencia hacia la anisotropía, creciendo para éste de forma cuasi-lineal en contraste a un incremento moderado con respecto al aumento de β_{\parallel} , sugiriendo entonces que la tasa de crecimiento es principalmente alimentada por la anisotropía térmica de los protones, corroborando las suposiciones hechas en la sección anterior. Teniendo esto en cuenta, es apreciable que los valores máximos de la tasa de crecimiento se encuentran para valores altos de anisotropía, dichos valores se encuentran en las cercanías del Sol (el satélite más cercano hasta el momento a sido HELIOS a unas 0.3 U.A. de distancia del Sol) por lo que podemos inferir que a esta distancia al tener una mayor tasa de crecimiento, la inestabilidad es mayor.

Cuando el viento solar se expande heliocéntricamente la anisotropía decae, sin em-

bargo notamos que la tasa de crecimiento para valores bajos de A_p disminuye de forma suave, en lugar de ser una caída abrupta ya que pierde su fuente de energía, encontrando entonces que, aunque leve, el parámetro β_{\parallel} puede funcionar como una fuente de energía alterna ya que a mayor distancia, la presión térmica supera a la presión magnética, sin embargo, al no ser una fuente principal, esta solo puede «sostener» paulatinamente el valor de la tasa de crecimiento, con un incremento leve, lo que conlleva a un decrecimiento lento durante la expansión, lo cual permitiría que la inestabilidad persista en el viaje del viento solar hacia el espacio aún cuando la anisotropía disminuya. Este comportamiento se evidencia en el crecimiento mínimo de γ_m para un aumento de β_{\parallel} .

En el mapa de contornos (lado derecho) , se encuentra una clara relación inversa entre A_p y β_{\parallel} para cada uno de los valores de la tasa crecimiento máxima, lo cual es acorde con lo encontrado en la literatura [9, 8, 80], también se puede observar que la relación es uniforme en cada curva sin cambios abruptos.

De la **Figura 6.8** es apreciable y con mayor claridad la dependencia mayoritaria del ancho de la población inestable con la anisotropía térmica, siendo esta una relación proporcional con un incremento relativamente lineal; en cuanto a β_{\parallel} se observa que dicho ancho no se ve afectado con el incremento de este parámetro. Esto sugiere entonces que la cantidad de ondas que se ven afectadas por la inestabilidad aumente en las cercanías del Sol, disminuyendo a medida que el viento solar viaja hacia el espacio, encontrando entonces que no se ve afectada por la variación de β_{\parallel} , es decir que la presión térmica no contribuye de forma notable a la ampliación del rango de ondas que pueden ser excitadas por la inestabilidad en ningún punto del espacio, sin embargo se nota una pequeña cola para β_{\parallel} pequeños insinuando entonces que se tiene una pequeña participación de la presión magnética cerca al Sol; Esto cobra sentido desde el punto de vista de la cantidad de energía disponible, al aumentar la anisotropía, la energía libre dentro del plasma aumenta por lo que más ondas pueden verse alteradas y utilizar esta energía. En cuanto al mapa de contornos al lado derecho, es de mayor claridad la relación entre A_p y β_{\parallel} donde se observa que esta es ligeramente inversa dando a entender que β_{\parallel} puede influir en esta variable, sin embargo es con una contribución muy baja, en otras palabras minoritaria. Cabe destacar que en el mapa de contornos la relación tiende a ser constante a medida que la anisotropía baja y beta aumenta; podemos inferir que la relación inversa existente entre A_p y β_{\parallel} no se restringe solo a la tasa de crecimiento, si no también al ancho de la población inestable.

Para la **Figura 6.9** se observa de manera más detallada el cambio del comportamiento de la frecuencia real máxima, donde este cambio se da para $A_p \gtrsim 6$. Como se supuso en la sección anterior, esta se puede dividir en dos zonas, la primera para $A_p < 6$ y la segunda para $A_p \gtrsim 6$:

comportamiento para $A_p < 6$: Estos valores de anisotropía se encuentran por lo general en actividad solar regular, es decir, en los mínimos solares en los cuales las eyecciones de masa coronal y las tormentas solares son de menor magnitud y

ocurren con menor frecuencia [ref sobre mínimos solares un libro puede ser], para esta zona notamos que la frecuencia real máxima aumenta cuando se incrementa el valor de la anisotropía y disminuye cuando el parámetro beta aumenta, por lo cual se encuentra que la frecuencia real máxima decrece en la expansión del viento solar; en contraste con el ancho de la población inestable, aquí β_{\parallel} tiene una participación «negativa» es decir, este contribuye a que la frecuencia real disminuya, por lo que es posible inferir que la frecuencia real solo tiene sus valores más altos en la cercanías al Sol, lo cual significaría que la resonancia ciclotrónica puede darse en protones de mayor energía en dicha región tomando valores mayores iguales a $\omega_{rmax} \simeq 0.8\Omega_p$, sin embargo, los valores para betas altos y anisotropías bajas nos son despreciables ya que tienen valores entre los $0.6\Omega_p$ y $0.7\Omega_p$ teniendo ondas de mínimo el 60% de la frecuencia ciclotrónica por lo que partículas que en su viaje hubieran disminuido su energía podrían entrar en resonancia con estas ondas de frecuencia considerable generando así un aumento en la temperatura obteniendo entonces una expansión no adiabática.

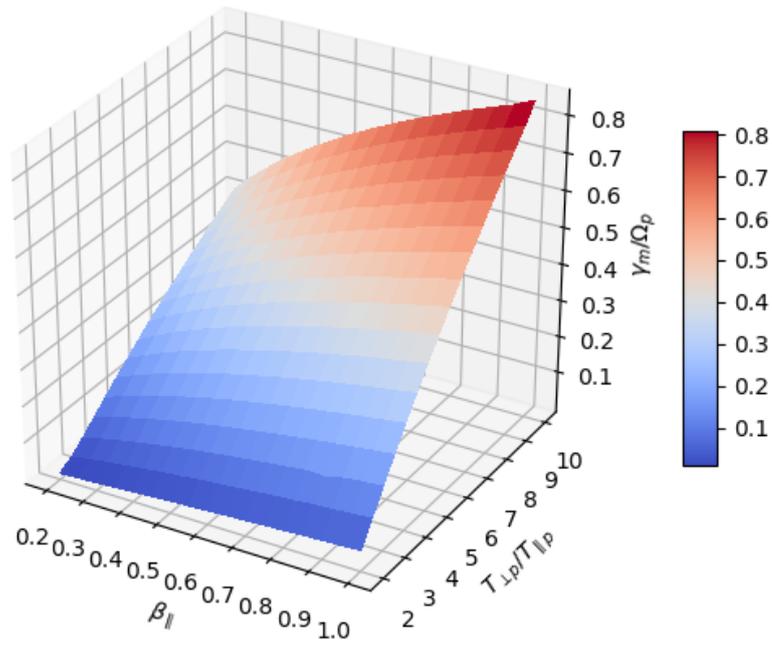
Comportamiento para $A_p \gtrsim 6$: Estos valores de anisotropía se pueden encontrar en los máximos solares, cuando aparecen eyecciones de masa coronal de mayor magnitud y tormentas solares con mayor frecuencia (como los ocurridos el 19 de Marzo de 2005) en estos se puede encontrar anisotropía térmica con valores entre 6 y 8.5 teniendo máximos en valores cercanos a los 9.5 para una distancia comprendida entre 0.3 y 1 U.A. ; En esta zona el comportamiento de la frecuencia real cambia, además, también cambia su relación con beta, donde ahora la frecuencia real aumenta a medida que beta y la anisotropía aumentan al igual que pasa en la tasa de crecimiento, sin embargo aún persiste el crecimiento asintótico para valores de $\beta_{\parallel} \lesssim 0.5$, pero para valores mayores, es decir cuando la presión térmica tiende a igualar la presión magnética, la frecuencia real puede crecer sin restricciones hasta la resonancia ciclotrónica ($\omega_{rmax}/\Omega_p = 1$) a medida que la anisotropía aumenta. Esto lleva a suponer que la variación de beta tiene un papel significativo para valores de anisotropía altos, es decir, para actividad solar irregular la presión térmica contribuye a la resonancia ciclotrónica, sin embargo, esta posee una mayor participación para frecuencias cercanas y superiores a $\omega_{rmax} \simeq 0.9\Omega_p$ la cual se encuentra para anisotropía con valores elevados (entre 8 y 10); estas anisotropías solo se podrían encontrar si se cumplen dos factores: el primero es la actividad solar ya que solo se presenta en máximos solares, y la segunda es que solo se podrían encontrar en las cercanías del Sol, ya que dentro de lo registrado en la [ref de marzo 2005] solo se encontró un evento cercano a la tierra donde el máximo valor de la anisotropía fue de 3.88. Esto sugiere entonces que los valores máximos de la frecuencia real se encontrarían cerca a $\omega_{rmax} \simeq 0.9\Omega_p$ para máximos solares en las cercanías del Sol.

6.2.3. Discusión de resultados

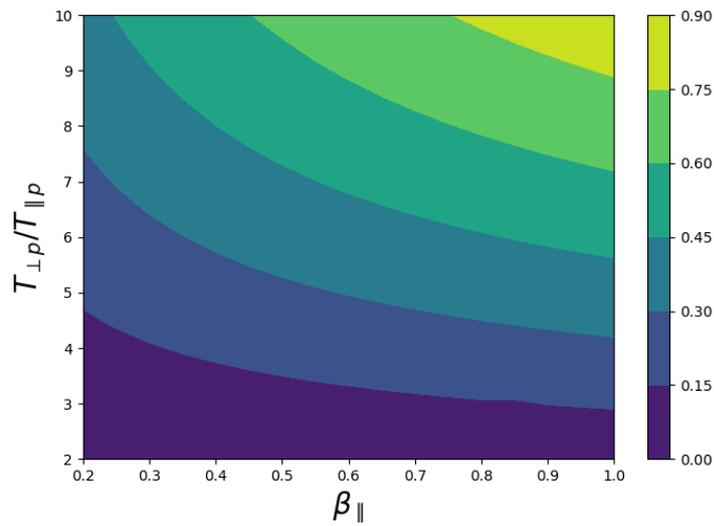
En la subsección anterior se encontró que los resultados de las tres variables (γ_m , Δk_z y ω_{rmax}) tienen una fuerte dependencia con la anisotropía térmica de los protones,

obteniendo valores altos para anisotropías altas con una leve más no totalmente despreciable participación del parámetro beta, esto muestra entonces que la anisotropía térmica es la principal fuente de la inestabilidad. Al ser la anisotropía térmica dependiente de la fuerza de Lorentz esta tiende a aumentar a medida que el campo magnético sea mayor, lo cual, se percibe al estar más cerca del Sol, además el parámetro beta también se ve afectado por el incremento del campo magnético, al tener una relación inversa el parámetro beta tenderá a ser mucho menor a 1 cuando se mida en las cercanías del Sol dando como resultado que la anisotropía térmica tenga mayor libertad como fuente principal de la inestabilidad como se pudo apreciar en los resultados anteriormente expuestos; esto sugiere que entre más cerca del Sol mayor será la inestabilidad, por lo tanto una posible mayor aceleración de protones, además de poder interactuar de forma resonante con protones de mayor energía y de esta forma se podrían encontrar frecuencias que puedan acelerar y calentar el viento solar hasta los valores reportados en la literatura [111].

Diversos trabajos como por ejemplo el hecho por R.C. Davidson en 1975, muestran que para valores de anisotropía alta ($A_p = 20$) la tasa crecimiento es aún mayor que la presentada en los resultados de esta tesis, al igual que se encuentra que la frecuencia real normalizada toma valores muy cercanos la unidad ($\omega_{rmax}/\Omega_p = 1$) para una mayor cantidad de números de onda, por lo que se podría decir que existirían una mayor población de ondas que entren en resonancia ciclotrónica con los protones; el problema radicaría en que dichos valores sólo son planteados de forma teórica ya que nos limita la obtención de los datos siendo hasta el momento los datos más cercanos los obtenidos por HELIOS a una distancia de aproximadamente 0.3 U.A. los cuales fueron tomados hasta el año 1971 por lo tanto la otra limitación sería la tecnología de la época. Sin embargo todo esto puede tener un gran cambio para obtener un gran avance, lo cual será provista por la misión Solar Orbiter (SolO) teniendo esta como objetivo tomar medidas in-situ y a distancia del campo magnético sobre la superficie solar, la heliosfera y el viento solar; esto conllevaría a una cantidad de datos nuevos con una mayor resolución a una distancia considerablemente pequeña hasta el Sol aproximadamente de 60 radios solares (equivalentes a 0.284 U.A.) proveerá material para corroborar o contradecir diversas teorías. Dentro de estos datos podrían encontrarse diferentes valores de anisotropía o del parámetro beta dada la distancia o nuevos cambios en la función de distribución de velocidades del viento solar por lo que existiría la posibilidad de utilizar los datos expuestos en esta tesis como un apoyo para un mayor análisis.

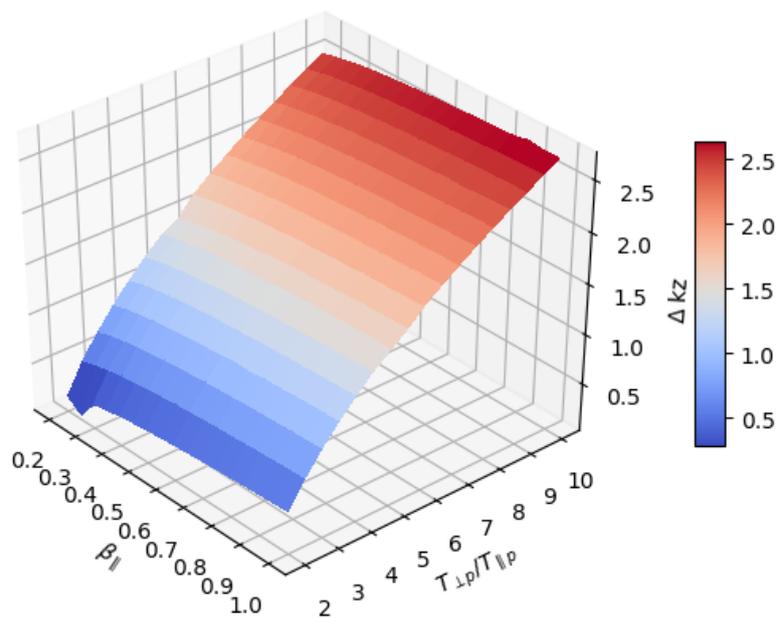


(a)

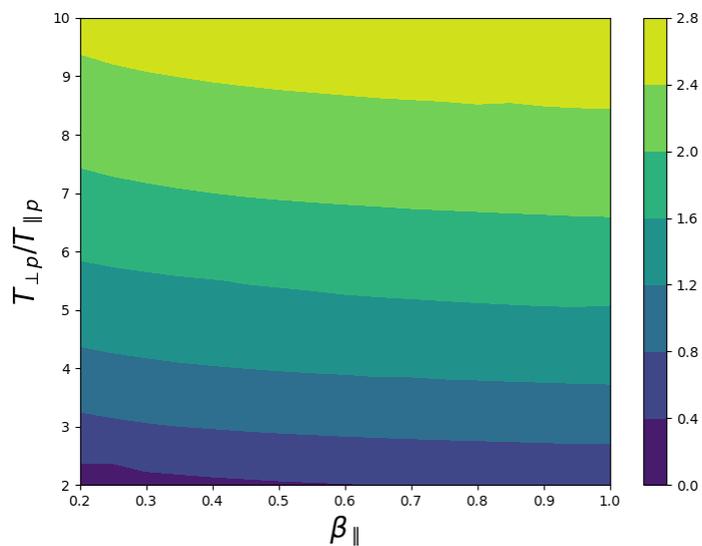


(b)

Figura 6.7.: Comportamiento de la tasa de crecimiento máxima en función de β_{\parallel} y de A_p a)gráfica tridimensional de $\gamma_m(\beta_{\parallel}, A)$ b) mapa de contorno en un plano $A_p - \beta_{\parallel}$ para los valores de γ_m constante.

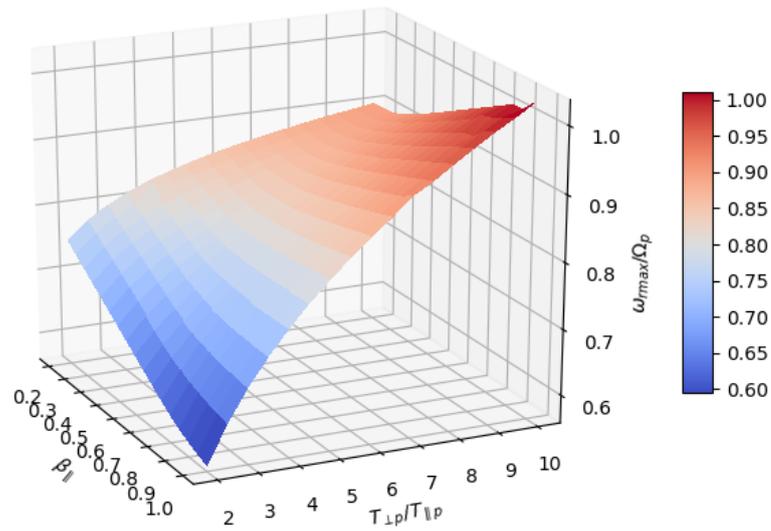


(a)

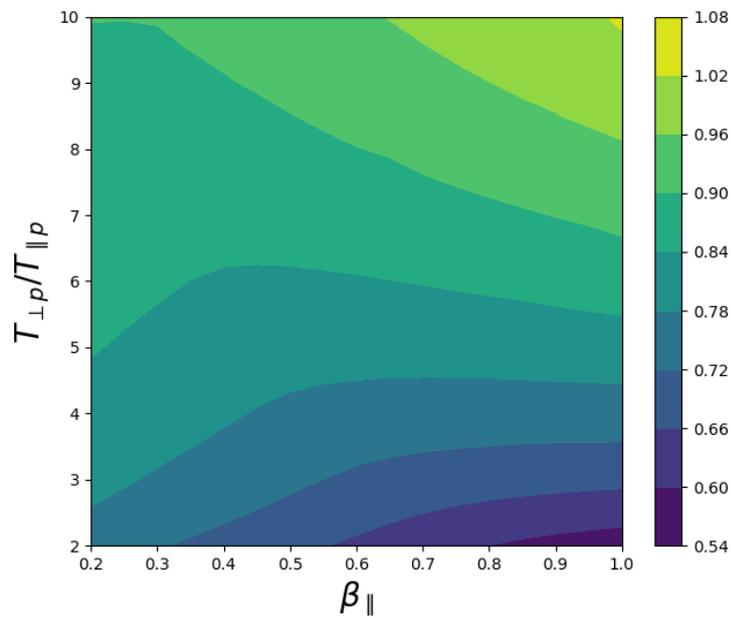


(b)

Figura 6.8.: Comportamiento del ancho de la población inestable en función de $\beta_{||}$ y de A_p a) gráfica tridimensional de $\Delta k_z(\beta_{||}, A_p)$ b) mapa de contorno en un plano $A_p - \beta_{||}$ para los valores de Δk_z constante.



(a)



(b)

Figura 6.9.: Comportamiento de la frecuencia real máxima en función de β_{\parallel} y de A_p a) gráfica tridimensional de $\omega_{rmax}(\beta_{\parallel}, A_p)$ b) mapa de contorno en un plano $A_p - \beta_{\parallel}$ para los valores de ω_{rmax} constante.

7. Conclusiones

En el capítulo 4 se resolvió la ecuación de Vlasov linealizada (Ecuación 4.14) aplicando el método de pequeñas perturbaciones y el método de las características. Se resolvieron todos los pasos para el cálculo analítico hasta llegar a la relación de dispersión para la inestabilidad electromagnética ion-ciclotrón, dada por la Ecuación 4.105, considerando una función de distribución de velocidades bi-Maxwelliana expresada de forma general por la Ecuación 4.85, lo cual aporta una base sólida para aquellas personas que deseen incursionar en el tema. Esto acompañado de una serie de conceptos básicos expuestos a lo largo de la tesis. En el capítulo 5 se resolvió la Ecuación 4.105 para un plasma tipo viento solar protón-electrón utilizando curvas de nivel y el método de Müller, donde se identificaron las ramas existentes al momento de la solución de relación de dispersión y su relevancia para el sistema establecido; se verificó que el modo que presenta excitación ($\gamma > 0$) es la rama ion-ciclotrón, mientras que las demás ramas se encontraron estables (rama magnetosónica) o amortiguadas (modos de orden superior). En la sección 5.4 se corroboró la validez y eficiencia del código planteado para la obtención de los resultados, obteniendo una respuesta satisfactoria y en concordancia con lo reportado en la literatura para diferentes valores de los parámetros.

Los resultados presentados se centraron en las variables γ , Δk_z y ω_r , lo cual es poco común en el análisis de la inestabilidad; además de presentar gráficos 3D y de contornos no reportados en la literatura. A continuación se resumen las conclusiones más importantes para estos resultados:

1. El comportamiento de la tasa de crecimiento máxima es creciente a medida que los parámetros A_p y β_{\parallel} aumentan, como se esperaba de lo reportado por la literatura, mostrando una dependencia mayoritaria de la anisotropía térmica, esto fue corroborado por el gráfico tridimensional el cual brinda una mayor información y mayor facilidad al momento del análisis de la variable en cuestión, además se encontró una relación cuasi-lineal con la anisotropía sugiriendo entonces que la inestabilidad es mayor para regiones cercanas al Sol y disminuye en la expansión del viento solar, sin embargo, dicha inestabilidad no desaparece como se supondría al perder su fuente de energía, por lo que esto puede ser responsabilidad de la presión térmica, ya que esta supera la presión magnética a grandes distancias lo cual se evidencia como el incremento en el valor del parámetro beta, persistiendo entonces la excitación de ondas para cientos de radios solares de distancia, por ende un posible incremento en la temperatura del viento solar. Además, se corroboró la relación inversa existente entre A_p y

- β_{\parallel} por medio del mapa de contornos, para los diferentes valores de la tasa de crecimiento máxima.
2. El denominado número de población inestable, el cual da una noción de la cantidad de ondas que se encuentran excitadas o afectadas por la inestabilidad (algo que generalmente es mencionado de forma superficial o minoritaria en cuanto a esta inestabilidad) mostró al igual que en la tasa de crecimiento una dependencia mayoritaria de la anisotropía térmica, teniendo un comportamiento creciente relativamente lineal a medida que A_p aumenta y una dependencia substancialmente menor de β_{\parallel} por lo tanto la variación de la presión térmica y la presión magnética no tiene interfiere en la cantidad de ondas que son excitadas, ya que no aumenta de disminuye dicho valor; sugiriendo entonces de igual manera que con la tasa de crecimiento, que el rango de ondas que se pueden ver afectadas por la inestabilidad es mayor en cuanto se esté más cerca del Sol. Además, en el mapa de contornos se evidenció la poca participación de β_{\parallel} teniendo esta una relación débilmente inversa; por lo que es posible inferir que la relación inversa de A_p y β_{\parallel} no solo se presenta en la tasa de crecimiento.
 3. La frecuencia real máxima (al igual que en Δk_z esto se ha mencionado de forma minoritaria en la literatura), presentó un cambio de comportamiento para $A_p \gtrsim 6$ dentro de los límites establecidos; se encontró que ω_{rmax} crecía de forma asintótica a medida que beta disminuía y la anisotropía aumentaba hasta un valor de $A_p \approx 6$, y posteriormente para valores mayores de A_p y β_{\parallel} la frecuencia crecía sin restricciones hasta la resonancia ciclotrónica, sugiriendo que beta juega un rol importante para llegar a la resonancia con las partículas (posiblemente también con otras ondas).
 4. El comportamiento de la frecuencia real máxima podría ser dividida en dos «regiones» , la primera para $A_p < 6$ donde ω_{rmax} crece a medida que beta disminuye y la anisotropía aumenta; y la segunda para $A_p \gtrsim 6$ donde ω_{rmax} crece a medida que beta aumenta y la anisotropía aumenta. La separación en estas dos regiones sugiere que la presión magnética cumple la función de restringir la posibilidad de la resonancia ciclotrónica, esto se cumple hasta que la agitación térmica aumente; es decir, cuando la presión térmica comienza a igualar la presión magnética y la anisotropía térmica tiene valores moderadamente altos, esto explicaría el crecimiento sin restricción de la frecuencia real máxima para valores altos de beta y de anisotropía. También se encontró que para valores altos de anisotropía la frecuencia real máxima es mayor que 0.9Ω por lo tanto se encontraría una mayor resonancia cerca al Sol.
 5. En el mapa de contornos de ω_{rmax} se observó este cambio para los valores antes mencionados, donde en la primera región se da una relación creciente en principio para cambiar a una tendencia decreciente después de cierto valor de beta; en la segunda región se da una relación inversa sin cambios en rango de valores establecidos de beta, similar a la encontrada para la tasa de crecimiento máximo. Esto corrobora el cambio de comportamiento y la depen-

dencia e importancia de beta para la resonancia ciclotrónica de las ondas con las partículas (u otras ondas).

6. Los resultados encontrados muestran que existe una mayor resonancia e inestabilidad, al igual que una mayor población de ondas afectadas cuanto más cerca se encuentre el viento al Sol, decreciendo a medida que el viento solar viaja desde el Sol hacia el espacio, sin embargo estas características de la inestabilidad no desaparecen, persisten aunque con menor fuerza, por lo tanto podría afectar a iones que en su viaje perdieron energía, y así de esta forma acelerarlos y aumentar en cierto grado la temperatura del viento solar, mostrándose como picos al momento de la medida de la temperatura como función de la distancia heliocéntrica.
7. Los resultados expuestos en forma tridimensional ([Figura 6.7](#), [Figura 6.8](#) y [Figura 6.9](#)) pueden brindar una mayor información en un amplio rango de valores posibles para la anisotropía térmica y el parámetro beta, los cuales han sido reportados para distancias entre los 0.3 U.A. y 1 U.A. de distancia desde el Sol abarcando tanto los mínimos solares como los máximos solares, siendo un apoyo para la posteriores eventos solares y futuros trabajos sobre el tema; añadido a estos dichos resultados también pueden ser aplicados a plasmas de laboratorio como lo son los experimentos de inyección de un haz de partículas en un plasma.

A. Apéndice

A.1. Método de las características

El método de las características es un método por el cual es posible resolver problemas de valor inicial para ecuaciones diferenciales parciales de primer orden. La explicación de este apéndice es basada en la referencia [81]. El objetivo del método de características, cuando se aplica a esta ecuación, es cambiar las coordenadas de (x, y) a un nuevo sistema de coordenadas en el que la ecuación diferencial parcial (EDP) se convierte en una ecuación diferencial ordinaria (EDO) a lo largo de ciertas curvas en el plano $x - t$. Tales curvas, curvas característica, se denominan curvas características o simplemente las características. La nueva variable variará y la nueva variable será constante a lo largo de las características. La variable cambiará a lo largo de la curva inicial en el plano $x - t$. La forma más general de representar una ecuación diferencial de primer orden a dos variables independientes x e y es:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \tag{A.1}$$

para $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$; donde F es una función dada y $u = u(x, y)$ es una función desconocida de sus variables x e y . Por último u_x, u_y son las derivadas parciales

Para explicar el método se trabajará con la ecuación de advección:

$$u_t + cu_x = 0 \tag{A.2}$$

teniendo como solución general

$$u = f(x - ct) \tag{A.3}$$

Si se impone la condición inicial

$$u(x, 0) = \phi(x) \tag{A.4}$$

para $x \in \mathbb{R}$; entonces se tendrá que $f(x) = \phi(x)$, y que la solución a el problema de valor inicial para la **Ecuación A.2** y **Ecuación A.4** es

$$u(x, t) = \phi(x - ct) \quad (\text{A.5})$$

las líneas rectas $x - ct$ son constantes, las cuales son llamadas **características**, en estas características la ecuación diferencial parcial (**Ecuación A.2**) se reduce a una ecuación diferencial ordinaria $du/dt = 0$. Es decir, si C es una característica típica $x = ct + k$ para alguna constante k , entonces la derivada direccional de u a lo largo de la curva es

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(x(t), t) &= u_x(x(t), t) \frac{dx}{dt} + u_t(x(t), t) \\ &= u_x(x(t), t) c + u_t(x(t), t) \end{aligned}$$

el cual es el lado izquierdo de la **Ecuación A.2** evaluada a lo largo de C . Ahora, en lugar de ser una constante C , es posible reemplazarla por una función de variables independientes t y x y considerar el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} u_t + c(x, t) u_x &= 0 \\ u(x, 0) &= \phi(x) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

donde $c(x, t)$ es una función dada. Ahora C es la familia de curvas definidas por la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = c(x, t) \quad (\text{A.7})$$

luego, para un miembro a lo largo de C

$$\frac{du}{dt} = u_x \frac{dx}{dt} + u_t = u_x c(x, t) + u_t = 0$$

Por lo tanto u es constante en cada miembro de C . Las curvas C definidas por la **Ecuación A.7** son las denominadas *curvas características*.

Bibliografía

- [1] H. Zell, “SOHO Images,” 2015. [Online]. Available: <https://www.nasa.gov/mission{ }pages/soho/images/index.html>
- [2] —, “Sun Release X3.1-class Solar Flare on Oct. 24, 2014,” 2015. [Online]. Available: <https://www.nasa.gov/content/goddard/sun-release-x3.1-class-solar-flare-on-oct-24-2014>
- [3] —, “The Sun,” 2015. [Online]. Available: <https://www.nasa.gov/mission{ }pages/sunearth/science/Sunlayers.html>
- [4] I. S. Shklovskii and T. Page, “Physics of the Solar Corona,” *American Journal of Physics*, 1967.
- [5] H. Zell, “NASA’s Solar Dynamics Observatory Investigates the Sun’s Cycle of Highs and Lows,” 2013. [Online]. Available: <https://www.nasa.gov/topics/solarsystem/features/sdo{ }cycle.html>
- [6] —, “SDO Celebrates One Year Anniversary,” 2014. [Online]. Available: <https://www.nasa.gov/mission{ }pages/sdo/news/sdo-1year.html>
- [7] E. Marsch, “Solar wind and kinetic heliophysics,” *Annales Geophysicae*, vol. 36, no. 6, pp. 1607–1630, nov 2018. [Online]. Available: <https://www.ann-geophys.net/36/1607/2018/>
- [8] S. P. Gary, S. A. Fuselier, and B. J. Anderson, “Ion anisotropy instabilities in the magnetosheath,” *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, vol. 98, no. A2, pp. 1481–1488, feb 1993. [Online]. Available: <http://doi.wiley.com/10.1029/92JA01844>
- [9] —, “Ion anisotropy instabilities in the magnetosheath,” *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 1993.
- [10] S. P. Gary, “The mirror and ion cyclotron anisotropy instabilities,” *Journal of Geophysical Research*, vol. 97, no. A6, p. 8519, jun 1992. [Online]. Available: <http://doi.wiley.com/10.1029/92JA00299>
- [11] N. Meyer-Vernet, “Basics of the Solar Wind (Cambridge Atmospheric and Space Science Series),” Tech. Rep.
- [12] E. Marsch, “Kinetic Physics of the Solar Corona and Solar Wind,” *Living Reviews in Solar Physics*, vol. 3, 2006. [Online]. Available: <http://link.springer.com/10.12942/lrsp-2006-1>

- [13] N. A. Schwadron and D. J. McComas, “Solar Wind Scaling Law,” *The Astrophysical Journal*, vol. 599, no. 2, pp. 1395–1403, dec 2003. [Online]. Available: <http://stacks.iop.org/0004-637X/599/i=2/a=1395>
- [14] L. D. Xia, E. Marsch, and K. Wilhelm, “On the network structures in solar equatorial coronal holes,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 424, no. 3, pp. 1025–1037, sep 2004. [Online]. Available: <http://www.aanda.org/10.1051/0004-6361:20047027>
- [15] J. A. Eddy and R. Ise, “A new sun : the solar results from SKYLAB,” *Washington : Scientific and Technical Information Office, National Aeronautics and Space Administration : for sale by the Supt. of Docs., U.S. Govt. Print. Off., 1979., 1979.* [Online]. Available: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1979nssr.book.....E>
- [16] I. S. Shklovskii and T. Page, “Physics of the Solar Corona,” *American Journal of Physics*, 1967.
- [17] M. Neugebauer and M., “Observations of solar-wind helium,” *Fundamentals of Cosmic Physics, vol. 7, May 1981, p. 131-199.*, vol. 7, pp. 131–199, 1981. [Online]. Available: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1981FCoPh...7..131N>
- [18] W. I. Axford and J. F. McKenzie, “The origin of high speed solar wind streams,” *In: Solar Wind Seven; Proceedings of the 3rd COSPAR Colloquium, Goslar, Germany, Sept. 16-20, 1991 (A93-33554 13-92), p. 1-5.*, pp. 1–5, 1992. [Online]. Available: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1992sws..coll...1A>
- [19] —, “The acceleration of the solar wind,” in *AIP Conference Proceedings*, vol. 382. AIP, 1996, pp. 72–75. [Online]. Available: <http://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.51363>
- [20] J. L. Kohl, G. Noci, E. Antonucci, G. Tondello, M. C. E. Huber, S. R. Cranmer, L. Strachan, A. V. Panasyuk, L. D. Gardner, M. Romoli, S. Fineschi, D. Dobrzycka, J. C. Raymond, P. Nicolosi, O. H. W. Siegmund, D. Spadaro, C. Benna, A. Ciaravella, S. Giordano, S. R. Habbal, M. Karovska, X. Li, R. Martin, J. G. Michels, A. Modigliani, G. Naletto, R. H. O’neal, C. Pernechele, G. Poletto, P. L. Smith, and R. M. Suleiman, “UVCS/SOHO EMPIRICAL DETERMINATIONS OF ANISOTROPIC VELOCITY DISTRIBUTIONS IN THE SOLAR CORONA,” Tech. Rep., 1998. [Online]. Available: <http://iopscience.iop.org/article/10.1086/311434/pdf>
- [21] S. R. Cranmer, “Coronal Holes and the High-Speed Solar Wind,” *Space Science Reviews*, vol. 101, no. 3/4, pp. 229–294, 2002. [Online]. Available: <http://link.springer.com/10.1023/A:1020840004535>
- [22] P. A. Isenberg, “The kinetic shell model of coronal heating and acceleration by ion cyclotron waves: 2. Inward and outward propagating waves,” *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, vol. 106, no. A12, pp. 29 249–29 260, dec 2001. [Online]. Available: <http://doi.wiley.com/10.1029/2001JA000176>

- [23] J. V. Hollweg, “Generation of the fast solar wind: A review with emphasis on the resonant cyclotron interaction,” *Journal of Geophysical Research*, vol. 107, no. A7, p. 1147, 2002. [Online]. Available: <http://doi.wiley.com/10.1029/2001JA000270>
- [24] S. R. Cranmer, J. L. Kohl, G. Noci, E. Antonucci, G. Tondello, M. C. E. Huber, L. Strachan, A. V. Panasyuk, L. D. Gardner, M. Romoli, S. Fineschi, D. Dobrzycka, J. C. Raymond, P. Nicolosi, O. H. W. Siegmund, D. Spadaro, C. Benna, A. Ciaravella, S. Giordano, S. R. Habbal, M. Karovska, X. Li, R. Martin, J. G. Michels, A. Modigliani, G. Naletto, R. H. O’Neal, C. Pernechele, G. Poletto, P. L. Smith, and R. M. Suleiman, “An Empirical Model of a Polar Coronal Hole at Solar Minimum,” *The Astrophysical Journal*, vol. 511, no. 1, pp. 481–501, jan 1999. [Online]. Available: <http://stacks.iop.org/0004-637X/511/i=1/a=481>
- [25] C. Y. Tu and E. Marsch, “MHD structures, waves and turbulence in the solar wind: Observations and theories,” *Space Science Reviews*, vol. 73, no. 1-2, pp. 1–210, jul 1995. [Online]. Available: <http://link.springer.com/10.1007/BF00748891>
- [26] B. T. Tsurutani, G. S. Lakhina, J. S. Pickett, F. L. Guarnieri, N. Lin, and B. E. Goldstein, “Nonlinear Alfvén waves, discontinuities, proton perpendicular acceleration, and magnetic holes/decreases in interplanetary space and the magnetosphere: intermediate shocks? Nonlinear Processes in Geophysics Nonlinear Alfvén waves, discontinuities, proton ,” Tech. Rep. 3, 2005. [Online]. Available: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00302560>
- [27] P. H. Yoon, C. B. Wang, and C. S. Wu, “Pitch-angle diffusion of ions via nonresonant interaction with Alfvénic turbulence,” *Physics of Plasmas*, vol. 16, no. 10, p. 102102, oct 2009. [Online]. Available: <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.3236749>
- [28] C. S. Wu and P. H. Yoon, “Proton Heating via Nonresonant Scattering Off Intrinsic Alfvénic Turbulence,” 2007.
- [29] P. A. Isenberg and J. V. Hollweg, “On the preferential acceleration and heating of solar wind heavy ions,” *Journal of Geophysical Research*, 1983.
- [30] L. Gomberoff, V. Muñoz, and J. A. Valdivia, “Ion cyclotron instability triggered by drifting minor ion species: Cascade effect and exact results,” *Planetary and Space Science*, 2004.
- [31] R. Esser, S. Fineschi, D. Dobrzycka, S. R. Habbal, R. J. Edgar, J. C. Raymond, J. L. Kohl, and M. Guhathakurta, “Plasma Properties in Coronal Holes Derived from Measurements of Minor Ion Spectral Lines and Polarized White Light Intensity,” *The Astrophysical Journal*, vol. 510, no. 1, pp. L63–L67, jan 1999. [Online]. Available: <http://stacks.iop.org/1538-4357/510/i=1/a=L63>
- [32] J. L. Kohl, G. Noci, E. Antonucci, G. Tondello, M. C. E. Huber, L. D. Gardner, P. Nicolosi, L. Strachan, S. Fineschi, J. C. Raymond,

- M. Romoli, D. Spadaro, A. Panasyuk, O. H. W. Siegmund, C. Benna, A. Ciaravella, S. R. Cranmer, S. Giordano, M. Karovska, R. Martin, J. Michels, A. Modigliani, G. Naletto, C. Pernechele, G. Poletto, and P. L. Smith, “First Results from the SOHO Ultraviolet Coronagraph Spectrometer,” *Solar Physics*, vol. 175, no. 2, pp. 613–644, 1997. [Online]. Available: <http://link.springer.com/10.1023/A:1004903206467>
- [33] X. Li, S. R. Habbal, J. L. Kohl, and G. Noci, “The Effect of Temperature Anisotropy on Observations of Doppler Dimming and Pumping in the Inner Corona,” *The Astrophysical Journal*, vol. 501, no. 1, pp. L133–L137, jul 1998. [Online]. Available: <http://stacks.iop.org/1538-4357/501/i=1/a=L133>
- [34] W. H. Matthaeus and M. Velli, “Who Needs Turbulence?” *Space Science Reviews*, vol. 160, no. 1-4, pp. 145–168, oct 2011. [Online]. Available: <http://link.springer.com/10.1007/s11214-011-9793-9>
- [35] O. Alexandrova, C. H. K. Chen, L. Sorriso-Valvo, T. S. Horbury, and S. D. Bale, “Solar Wind Turbulence and the Role of Ion Instabilities,” *Space Science Reviews, Volume 178, Issue 2-4, pp. 101-139*, vol. 178, pp. 101–139, jun 2013. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/1306.5336><http://dx.doi.org/10.1007/s11214-013-0004-8>
- [36] R. Bruno and V. Carbone, “The Solar Wind as a Turbulence Laboratory,” *Living Reviews in Solar Physics*, vol. 10, no. 1, p. 2, 2013. [Online]. Available: <http://link.springer.com/10.12942/lrsp-2013-2>
- [37] S. J. Schwartz and I. W. Roxburgh, “Instabilities in the Solar Wind,” pp. 555–563. [Online]. Available: <https://www.jstor.org/stable/36799>
- [38] E. Marsch, K.-H. Mühlhäuser, R. Schwenn, H. Rosenbauer, W. Pilipp, and F. M. Neubauer, “Solar wind protons: Three-dimensional velocity distributions and derived plasma parameters measured between 0.3 and 1 AU,” *Journal of Geophysical Research*, vol. 87, no. A1, p. 52, jan 1982. [Online]. Available: <http://doi.wiley.com/10.1029/JA087iA01p00052>
- [39] P. Hellinger, P. Trávníček, J. C. Kasper, and A. J. Lazarus, “Solar wind proton temperature anisotropy: Linear theory and WIND/SWE observations,” *Geophysical Research Letters*, vol. 33, no. 9, p. L09101, 2006. [Online]. Available: <http://doi.wiley.com/10.1029/2006GL025925>
- [40] Š. Štverák, P. Trávníček, M. Maksimovic, E. Marsch, A. N. Fazakerley, and E. E. Scime, “Electron temperature anisotropy constraints in the solar wind,” *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, vol. 113, no. A3, pp. n/a–n/a, mar 2008. [Online]. Available: <http://doi.wiley.com/10.1029/2007JA012733>
- [41] E. Marsch, X. Ao, and C. Tu, “On the temperature anisotropy of the core part of the proton velocity distribution function in the solar wind,” *Journal of Geophysical Research*, vol. 109, no. A4, p. A04102, apr 2004. [Online]. Available: <http://doi.wiley.com/10.1029/2003JA010330>

- [42] L. Matteini, S. Landi, P. Hellinger, F. Pantellini, M. Maksimovic, M. Velli, B. E. Goldstein, and E. Marsch, “Evolution of the solar wind proton temperature anisotropy from 0.3 to 2.5 AU,” *Geophysical Research Letters*, vol. 34, no. 20, p. L20105, oct 2007. [Online]. Available: <http://doi.wiley.com/10.1029/2007GL030920>
- [43] L. Matteini, P. Hellinger, B. E. Goldstein, S. Landi, M. Velli, and M. Neugebauer, “Signatures of kinetic instabilities in the solar wind,” *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, vol. 118, no. 6, pp. 2771–2782, jun 2013. [Online]. Available: <http://doi.wiley.com/10.1002/jgra.50320>
- [44] S. P. Gary, M. D. Montgomery, W. C. Feldman, and D. W. Forslund, “Proton temperature anisotropy instabilities in the solar wind,” *Journal of Geophysical Research*, vol. 81, no. 7, pp. 1241–1246, mar 1976. [Online]. Available: <http://doi.wiley.com/10.1029/JA081i007p01241>
- [45] N. Noreen, P. H. Yoon, and S. Zaheer, “Cyclotron instabilities driven by temperature anisotropy in the solar wind,” *Physics of Plasmas*, vol. 24, no. 10, p. 102902, oct 2017. [Online]. Available: <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.4999339>
- [46] S. Xue, R. M. Thorne, and D. Summers, “Electromagnetic ion-cyclotron instability in space plasmas,” *Journal of Geophysical Research*, vol. 98, no. A10, p. 17475, 1993. [Online]. Available: <http://doi.wiley.com/10.1029/93JA00790>
- [47] A. A. Galeev, “BASIC PLASMA PHYSICS III Selected Chapters Handbook of Plasma Physics Volumes 1 and 2 Editors NORTH-HOLLAND AMSTERDAM & OXFORD & NEW YORK & TOKYO,” Tech. Rep. [Online]. Available: <https://www-thphys.physics.ox.ac.uk/people/AlexanderSchekochihin/notes/PlasmaClassics/kulsrud{ }handbook83.pdf>
- [48] M. G. M. G. Kivelson and C. T. C. T. Russell, *Introduction to space physics*. Cambridge University Press, 1995. [Online]. Available: <https://books.google.com.co/books/about/Introduction{ }to{ }Space{ }Physics.html?id=qWHSqXGfsfQC{ }&redir{ }esc=y>
- [49] Y. Kamide and A. Chian, Eds., *Handbook of the Solar-Terrestrial Environment*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007. [Online]. Available: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-540-46315-3>
- [50] B. V. V Zheleznyakov, H. S. H Massey, and O. London Edinburgh New York Toronto Sydney Paris Braunschweig, “RADIO EMISSION OF THE SUN AND PLANETS PERGAMON PRESS,” Tech. Rep., 1970.
- [51] K. R. Lang, *Sun, earth, and sky*. Springer, 2006. [Online]. Available: <https://books.google.com.co/books/about/Sun{ }Earth{ }and{ }Sky.html?id=WIHNCRwbQdUC{ }&source=kp{ }cover{ }&redir{ }esc=y>
- [52] A. S. Narayanan, *An Introduction to Waves and Oscillations in the Sun*, 2013.

- [53] G. K. Parks and G. K., “Physics of space plasmas - an introduction,” *Redwood City, CA, Addison-Wesley Publishing Co., 1991, 547 p.*, 1991. [Online]. Available: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1991pspa.book.....P>
- [54] E. N. Parker and E. N., “Dynamics of the Interplanetary Gas and Magnetic Fields.” *The Astrophysical Journal*, vol. 128, p. 664, nov 1958. [Online]. Available: <http://adsabs.harvard.edu/doi/10.1086/146579>
- [55] K. Gringauz, V. Bezrukikh, V. Ozerov, and R. Rybchinskii, “The study of interplanetary ionized gas, high-energy electrons and corpuscular radiation of the sun, employing three-electrode charged particle traps on the second Soviet space rocket,” *Planetary and Space Science*, vol. 9, no. 3, pp. 103–107, mar 1962. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0032063362901800>
- [56] M.-B. Kallenrode, *Space physics : an introduction to plasmas and particles in the heliosphere and magnetospheres*. Springer, 2004. [Online]. Available: <https://books.google.com.co/books/about/Space{ }Physics.html?id=HnyPP4B4n-4C{&}redir{ }esc=y>
- [57] J. L. Burch, R. L. Carovillano, and S. K. Antiochos, *Sun-earth plasma connections*. American Geophysical Union, 1999.
- [58] C. F. Kennel and F. L. Scarf, “Thermal anisotropies and electromagnetic instabilities in the solar wind,” *Journal of Geophysical Research*, vol. 73, no. 19, pp. 6149–6165, oct 1968. [Online]. Available: <http://doi.wiley.com/10.1029/JA073i019p06149>
- [59] S. Bourouaine, E. Marsch, and F. M. Neubauer, “Temperature anisotropy and differential streaming of solar wind ions. Correlations with transverse fluctuations,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 536, p. A39, dec 2011. [Online]. Available: <http://www.aanda.org/10.1051/0004-6361/201117866>
- [60] A. J. Hundhausen, S. J. Bame, and N. F. Ness, “Solar wind thermal anisotropies: Vela 3 and IMP 3,” *Journal of Geophysical Research*, vol. 72, no. 21, pp. 5265–5274, nov 1967. [Online]. Available: <http://doi.wiley.com/10.1029/JZ072i021p05265>
- [61] S. M. Shaaban, M. Lazar, S. Poedts, and A. Elhanbaly, “Shaping the solar wind temperature anisotropy by the interplay of electron and proton instabilities,” *Astrophysics and Space Science*, vol. 362, no. 1, p. 13, jan 2017. [Online]. Available: <http://link.springer.com/10.1007/s10509-016-2994-7>
- [62] F. Cap, *Handbook on plasma instabilities*. Academic Press, 1976. [Online]. Available: <https://books.google.com.co/books/about/Handbook{ }on{ }Plasma{ }Instabilities.html?id=1govAAAAIAAJ{&}redir{ }esc=y>
- [63] J. A. Bittencourt, “Elements of Plasma Kinetic Theory,” in *Fundamentals of Plasma Physics*. New York, NY: Springer New York, 2004, pp. 122–140. [Online]. Available: <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4757-4030-1{ }5>

- [64] K. Chaudhary, A. M. Imam, S. Z. H. Rizvi, and J. Ali, “Plasma Kinetic Theory,” in *Kinetic Theory*. InTech, feb 2018. [Online]. Available: <http://www.intechopen.com/books/kinetic-theory/plasma-kinetic-theory>
- [65] Q. Edición, “Métodos numéricos para ingenieros - 5^a edición,” Tech. Rep. [Online]. Available: <http://curso.unach.mx/{~}rarceo/docs/Chapra.pdf>
- [66] R. S. Pandey, R. P. Pandey, A. K. Srivastava, and S. M. Karim, “THE ELECTROMAGNETIC ION-CYCLOTRON INSTABILITY IN THE PRESENCE OF A.C. ELECTRIC FIELD FOR LORENTZIAN KAPPA,” Tech. Rep., 2008. [Online]. Available: <http://www.jpier.org/PIERM/pierm01/14.08032601.pdf>
- [67] J. J. Podesta and S. P. Gary, “EFFECT OF DIFFERENTIAL FLOW OF ALPHA PARTICLES ON PROTON PRESSURE ANISOTROPY INSTABILITIES IN THE SOLAR WIND,” *The Astrophysical Journal*, vol. 742, no. 1, p. 41, nov 2011. [Online]. Available: <http://stacks.iop.org/0004-637X/742/i=1/a=41?key=crossref.56bd0249cbbf59061eda96b5d8113735>
- [68] I. Silin, R. D. Sydora, I. R. Mann, K. Sauer, and R. L. MacE, “Nonlinear evolution of electromagnetic ion cyclotron waves,” *Physics of Plasmas*, 2011.
- [69] S. Peter, G. And, and D. Winske, “Simulations of Ion Cyclotron Anisotropy Instabilities in the Terrestrial Magnetosheath,” Tech. Rep. A6, 1993.
- [70] M. S. dos Santos, L. F. Ziebell, and R. Gaelzer, “Electromagnetic ion-cyclotron instability in a dusty plasma with product-bi-kappa distributions for the plasma particles,” *Astrophysics and Space Science*, 2017.
- [71] S. M. Shaaban, M. Lazar, S. Poedts, and A. Elhanbaly, “Effects of electrons on the electromagnetic ion cyclotron instability: Solar wind implications,” *Astrophysical Journal*, 2015.
- [72] J. Seough, P. H. Yoon, and J. Hwang, “Quasilinear theory and particle-in-cell simulation of proton cyclotron instability,” *Physics of Plasmas*, 2014.
- [73] K. G. Klein, B. L. Alterman, M. L. Stevens, D. Vech, and J. C. Kasper, “A Majority of Solar Wind Intervals Support Ion-Driven Instabilities,” Tech. Rep., 2018. [Online]. Available: <https://arxiv.org/pdf/1804.06330.pdf>
- [74] P. Astfalk, T. Görler, and F. Jenko, “DSHARK: A dispersion relation solver for obliquely propagating waves in bi-kappa-distributed plasmas,” *Journal of Geophysical Research A: Space Physics*, 2015.
- [75] E. Quataert, T. Heinemann, and A. Spitkovsky, “Linear instabilities driven by differential rotation in very weakly magnetized plasmas,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 447, no. 4, pp. 3328–3341, mar 2015. [Online]. Available: <http://academic.oup.com/mnras/article/447/4/3328/992681/Linear-instabilities-driven-by-differential>
- [76] S. P. Gary, L. K. Jian, T. W. Broiles, M. L. Stevens, J. J. Podesta, and J. C. Kasper, “Ion-driven instabilities in the solar wind: Wind

- observations of 19 March 2005,” *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, vol. 121, no. 1, pp. 30–41, jan 2016. [Online]. Available: <http://doi.wiley.com/10.1002/2015JA021935>
- [77] M. Barati Moqadam Niyat, S. M. Khorashadizadeh, and A. R. Niknam, “Electrostatic ion cyclotron instability in a plasma with q-nonextensive distributions,” *Physics of Plasmas*, vol. 23, no. 12, p. 122110, dec 2016. [Online]. Available: <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.4971810>
- [78] D. Told, J. Cookmeyer, P. Astfalk, and F. Jenko, “A linear dispersion relation for the hybrid kinetic-ion/fluid-electron model of plasma physics,” *New Journal of Physics*, 2016.
- [79] M. Lazar, “The electromagnetic ion-cyclotron instability in bi-Kappa distributed plasmas,” *Astronomy & Astrophysics*, 2012.
- [80] S. P. Gary, M. E. Mckean, D. Winske, B. J. Anderson, R. E. Denton, and S. A. Fuselier, “The proton cyclotron instability and the anisotropy/ inverse correlation,” Tech. Rep. A4, 1994.
- [81] J. D. Logan, *Applied mathematics*. Wiley-Interscience, 2006. [Online]. Available: https://books.google.com.co/books?id=nUk{}_AQAAIAAJ{&q=7.1.2+the+advection+equation{&dq=7.1.2+the+advection+equation{&hl=es{&sa=X{&ved=0ahUKEwigq6ydwNzfAhWSmlkKHURzAXMQ6AEISzAE