Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen IX (1975), págs. 95 - 114

UNA VEZ MÁS SOBRE LA ESTIMACIÓN DE LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR

por

L. CURELARU y V. Gh. VODĂ

El propósito de este trabajo es hacer un recorrido por el tema de la estimación de la desviación estándar de una población normal. Al final, se propone un estimador lineal para σ basado en el rango muestral y se le compara con el estimador clásico basado en el rango. Se dan también tablas relacionadas con el dicho estimador para diferentes tamaños de la muestra.

1. Introducción. Sobre la estimación de la desviación estándar de una población normal $N(\mu;\sigma^2)$ se ha escrito mucho, pero parece que todavía el tema no está agotado.

El lector puede encontrar obras de síntesis sobre el problema, en Zítek (1954), Sarhan y Greenberg (1962), Johnson y Kotz (1970) o David (1970).

En lo que sigue, concentraremos la atención en los estimadores lineales de σ, especialmente en lo referente a sus aplicaciones en la práctica del control estadístico de la calidad.

2. *Algunas palabras sobre la estimación de* σ. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una muestra de tamaño n tomada de una población normal $N(\mu ; \sigma^2)$. Es bien sabido que algunos estimadores para la desviación estándar pueden obtenerse *inter alia* de dos maneras :

1) tomando la raiz cuadrada de los estimadores para la varianza, por ejemplo :

$$s = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{ó} \quad s_1 = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

donde : $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$.

2) construyendo estimadores lineales con la ayuda de *estadísticas de orden* : $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(n)}$:

$$\sigma^* = C_n \sum_i a_i x_{(i)} \qquad (2)$$

donde $a_i \epsilon R$, $C_n > 0$ (C_n depende del tamaño de la muestra).

Los métodos que pueden emplearse para obtener los últimos son el método de la máxima verosimilitud y el método de los mínimos cuadrados (véase Lloyd,1952).

Debemos subrayar que para los estimadores del tipo (1) las propiedades de los estimadores para σ^2 no subsisten para estimadores de la desviación estándar. Por ejemplo, la propiedad de ser insesgado no se cumple para s.

Entonces, diversos coeficientes han sido propuestos para obtener estimadores insesgados para σ con la ayuda de s o s_1. (Véase : Bolch, 1968, Brugger,1969, Cureton, 1968, Jarrett, 1968) .

A veces, algunos autores siguen la manera de obtener estimadores para σ minimizando el llamado *error promedio cuadrático* ("mean-square-error"), esto es :

$$E\ (\ \sigma - \sigma^*\ )^2\ =\ \textit{mínimo} \tag{3}$$

Cuando hay un estimador insesgado para σ - sea $\hat{\sigma}$ - entonces rápidamente puede obtenerse un estimador de tipo MMSE (con *error promedio cuadrático mínimo* — "minimum-mean-square") escogiendo un coeficiente k_n para el cual :

$$E\ (\sigma - k_n\ \hat{\sigma})^2 = \textit{mínimo} \tag{4}$$

(Véase Markowitz, 1968, Stuart, 1969, D'Agostino, 1970, Vodă, 1972).

Es importante también anotar que pueden construirse estimadores lineales para σ sin ordenar la muestra.

Uno de tales estimadores es aquel dado por :

$$\sigma^*_m = c(n) \sum_{i=1}^{n} | x_i - \bar{x} | \tag{5}$$

donde ,

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} | x_i - \bar{x} | . \tag{6}$$

es la llamada *desviación media*.

También vale la pena anotar que el estimador construido mediante la *diferencia media de Gini* ("Gini's mean-difference") .

Tablas referentes al cálculo práctico de estos estimadores se encuentran en el artículo de Zítek (1954) .

En general, los estimadores lineales basados en valores muestrales no orde –

nados no se usan muy frecuentemente: pero David (1968) ha observado algunas similitudes entre la diferencia media de Gini y ciertos estimadores lineales construidos con las estadísticas de orden (véase Downton, 1966 y D'Agostino, 1971).

Pero, cualquiera que sea el método que utilicemos para obtener un cierto estimador lineal para σ, este estimador debe tener una cierta "bondad" en el sentido estadístico, esto es:

- ser insesgado y con varianza mínima;
- ser del tipo MMSE.

Si no se pueden obtener en todos los casos dichas propiedades, entonces nos contentaremos con la propiedad de ser asintóticamente insesgado o tener asintóticamente la propiedad de MMSE.

Un conjunto especial de estimadores lineales son aquellos construidos con la ayuda de los llamados *pseudo-rangos.*

Si $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(n)}$ es una muestra ordenada, entonces el estadígrafo:

$$w_{(i)} = x_{(n-i+1)} - x_{(i)} \tag{7}$$

se llama *pseudo-rango de orden* i. Para $i = 1$ obtenemos inmediatamente el rango de la muestra

$$w_{(1)} = x_{(n)} - x_{(1)} . \tag{8}$$

Hay una variedad bastante grande de estimadores lineales para la desviación estándar construidos mediante pseudo-rangos. La mayoría se encuentran en un trabajo de Illiescu-Vodă (1971) que está publicado en "Trabajos de Estadística" (Madrid), 1974 vol. XXV pp. 71-98

Hay también otra manera de desarrollo en la estimación de σ suponiendo que el llamado *coeficiente de variación* dado por :

$$\eta_X = \frac{\sigma}{\mu} \;, \qquad \text{donde} \quad X \in N(\mu ; \sigma^2) , \qquad \mu > 0 ,$$

es conocido. Entonces podemos escribir $X \in N(\mu ; \eta_X^2 \mu^2)$ y el problema de estimación consiste en la estimación de μ (véase Khan, 1968 y Govidarajulu-Sahai, 1972) .

3. *Un estimador basado en el rango.* Es bien sabido que en la práctica del control estadístico de la calidad se usa frecuentemente el estimador :

$$\hat{\sigma}_{w_{(1)}} = \frac{1}{d_n} \cdot w_{(1)} \;, \tag{9}$$

donde $\frac{1}{d_n}$ es un coeficiente que depende del tamaño de la muestra. Se sabe también que (9) es insesgado, esto es :

$$E(\hat{\sigma}_{w_{(1)}}) = \sigma \qquad \text{y} \qquad \lim_{n} Var(\hat{\sigma}_{w_{(1)}}) = 0 \tag{10}$$

El problema que aparece aquí es que la eficiencia de dicho estimador decrece muy rápido cuando el tamaño de la muestra crece.

Una alternativa para evitar esta falla es utilizar un rango promedio, dividiendo la muestra en grupos equinuméricos y tomando para cada grupo su rango.

Un método para evitar el uso de un rango promedio puede ser el siguiente : Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valores sucesivos obtenidos en un cierto proceso : ordenando los valores, tenemos :

$$x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(n)} \tag{11}$$

Para cada dos valores ordenados, calculamos el rango, esto es :

$$w_{(1)}^{(1)} = x_{(2)} - x_{(1)} \ ; \ w_{(1)}^{(2)} = x_{(3)} - x_{(2)} \ ; \ . \ . \ . \ ; \ w_{(1)}^{(n-1)} = x_{(n)} - x_{(n-1)} \quad (12)$$

Considerando para cada rango el estimador del tipo (9), tenemos :

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{1}{d_2} w_{(1)}^{(1)} \ ; \ \hat{\sigma}_2 = \frac{1}{d_2} w_{(1)}^{(2)} \ ; \ . \ . \ . \ ; \ \hat{\sigma}_{n-1} = \frac{1}{d_2} w_{(1)}^{(n-1)} . \quad (13)$$

Si tomamos la media de estos estimadores obtenemos :

$$\hat{\sigma}_{med} = \frac{1}{n-1} [\hat{\sigma}_1 + \cdots + \hat{\sigma}_{n-1}] = \frac{1}{(n-1)d_2} (w_{(1)}^{(1)} + w_{(1)}^{(2)} + \cdots + w_{(1)}^{(n-1)}). \quad (14)$$

que de hecho se puede escribir como sigue :

$$\hat{\sigma}_{med.} = \frac{1}{(n-1)d_2} \cdot w_{(1)} \quad (15)$$

Es de notar que para $n=2$ tenemos :

$$\hat{\sigma}_{med} = \hat{\sigma}_{w_{(1)}} = \frac{1}{d_2} w_{(1)} = \frac{x_{(2)} - x_{(1)}}{d_2} . \quad (16)$$

En la tabla 1 se dan valores para d_n^{-1} y $(n-1)^{-1} d_2^{-1}$ para $n=2(1)\,20$.

Teniendo en cuenta que $Var(\hat{\sigma}_{w_{(1)}}) = \frac{1}{d_n^2} Var(w_{(1)})$ y $Var(\hat{\sigma}_{med}) = \frac{1}{(n-1)^2 d_2^2} Var(w_{(1)})$: la tabla 2 da una comparación entre las razones :

$$\rho_1 = \frac{Var(\hat{\sigma}_{w_{(1)}})}{Var(w_{(1)})} \qquad y \qquad \rho_2 = \frac{Var(\hat{\sigma}_{med})}{Var(w_{(1)})} \quad (17)$$

para los mismos valores $n = 2(1)\,20$.

Está claro que $\hat{\sigma}_{med}$ tiene un sesgo bastante importante y mirando la tabla I podemos inferir que $\hat{\sigma}_{med}$ es útil solamente para muestras de tamaño muy pequeño muy pequeño ($n = 2, 3, 4$).

Sean $Y_{(i)}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) estadísticas de orden extraidas de una población normal estándar $N(0\ ;\ 1)$: entonces sabemos que

$$d_n = E(Y_{(n)} - Y_{(1)}) = E(R_{(1)}) \quad . \tag{18}$$

donde hemos escrito :

$$R_{(n-i+1)} = Y_{(n-i+1)} - Y_{(i)} \tag{19}$$

Tenemos entonces : $w_{(1)} = \sigma \cdot R_{(1)}$ y podemos escribir :

$$Var\,(w_{(1)}) = \sigma^2\ Var\,(R_{(1)}) \quad . \tag{20}$$

Para mejorar el estimador $\hat{\sigma}_{med}$ vamos a determinar un coeficiente $a(n)$ para el cual :

$$E\,[\,\sigma - a(n)\,\hat{\sigma}_{med}\,]^2 = mínimo \quad . \tag{21}$$

Tenemos :

$$\sigma^2 - 2\,a(n)\,\sigma\,E\,(\,\hat{\sigma}_{med}) + a^2(n)\,E\,(\hat{\sigma}^2_{med}) \quad mínimo \tag{22}$$

Pero

$$E\,(\hat{\sigma}_{med}) = \frac{1}{(n-1)d_2}\,E\,(w_{(1)}) = \frac{\sigma}{(n-1)\,d_2}\,E\,(R_{(1)}) = \frac{d_n}{(n-1)\,d_2} \cdot \sigma \tag{23}$$

y

$$E\,(\hat{\sigma}^2_{med}) = \frac{1}{(n-1)^2\,d_2^2}\,E\,(w^2_{(1)}) \quad . \tag{24}$$

Como podemos escribir :

$$E\,(w^2_{(1)}) = Var\,(w_{(1)}) + E^2(w_{(1)}) \quad . \tag{25}$$

o también,

$$E(w_{(1)}^2) = \sigma^2 \; Var(R_{(1)}) + d_n^2 \, \sigma^2 \; . \qquad (26)$$

tenemos finalmente :

$$\sigma^2 \left[1 - \frac{2 d_n}{(n-1) d_2} \, a(n) + \frac{Var(R_{(1)}) + d_n^2}{(n-1)^2 \, d_2^2} \cdot a^2(n) \right] = mínimo \, . \qquad (27)$$

El miembro izquierdo de (27) es una función de $a(n)$ y para obtener el mínimo debemos tomar la derivada con respecto a $a(n)$, esto es :

$$\frac{\partial E[\cdot]}{\partial a(n)} = -2 \frac{d_n}{(n-1)d_2} + 2 \cdot \frac{Var(R_{(1)}) + d_n^2}{(n-1)^2 \, d_2^2} \cdot a(n) = 0 \, , \qquad (28)$$

lo que suministra el siguiente resultado para $a(n)$:

$$a(n) = \frac{(n-1) \, d_2 \, d_n}{Var(R_{(1)}) + d_n^2} \; . \qquad (29)$$

Entonces, finalmente el estimador del tipo MMSE basado en el rango es :

$$\sigma^* = a(n) \, \hat{\sigma}_{med} = \frac{d_n}{Var\,(R_{(1)}) + d_n^2} \; w_{(1)} \; . \qquad (30)$$

Es importante subrayar que σ^* está construido mediante un *estimador sesgado* y entonces (30) representa, de verdad, algo mejor que la construcción inicial.

Los valores del coeficiente $b(n) = d_n \left[Var(R_{(1)}) + d_n^2 \right]^{-1}$ se dan en la tabla 3 para $n = 2\,(1)\,20$. Valores para $Var(R_{(1)})$ son tomados de las tablas Bolchev-Smyrnov (1965) .

Tenemos inmediatamente que :

$$E(\sigma^*) = \frac{d_n^2}{Var(R_{(1)}) + d_n^2} \, \sigma = \sigma - \frac{Var(R_{(1)})}{Var(R_{(1)}) + d_n^2} \cdot \sigma \qquad \bullet \qquad (31)$$

n la tabla 4 se dan valores para el *coeficiente del sesgo*, esto es :

$$c(n) = \frac{Var\,(R_{(1)})}{Var(R_{(1)}) + d_n^2} \qquad (32)$$

También podemos escribir :

$$Var(\sigma^*) = \frac{d_n^2}{[Var(R_{(1)}) + d_n^2]^2} . Var\,(w_{(1)}) = \frac{d_n^2\, Var(R_{(1)})}{[Var(R_{(1)}) + d_n^2]^2} .\sigma^2 . \qquad (33)$$

En la tabla 5 se dan valores para :

$$\alpha\,(n) = \frac{d_n^2\, Var(R_{(1)})}{[\,Var(R_{(1)}) + d_n^2\,]^2} \qquad (34)$$

Ejemplos : (Iliescu - Vodă "Revista de Chimie" - Bucarest, 1972, No. 23(8), pág. 491). Los datos que se dan abajo provienen de un cierto experimento químico :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1126	1126	1147	1113	1142	1180	1132	1132	1125	1129
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	1127	1113	1140	1110	1115	1127	1111	1146	1133	1118

Tenemos inmediatamente : $\sum_{i=1}^{20} x_i = 22512$, $\bar{x}$ $1125{,}6$

$$\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 3100{,}9368 \quad , \quad s = 12{,}7752$$

$$\max_{1 \leq i \leq 20} \{ x_i \} = 1147 \quad , \quad \min_{1 \leq i \leq 20} \{ x_i \} = 1100$$

Entonces :

$$w_{(1)} = 1147 - 1100 = 47$$

La tabla 1 nos suministra : $d_{20}^{-1} = 0,26774$ y la tabla 3, $b(20) = 0,25792$. Obtenemos :

$$\hat{\sigma}_{med} = 0,26774 \times 47 = 12,58378 \quad \text{y} \quad \sigma^* = 0,25792 \times 47 = 12,12224 .$$

Las diferencias entre los tres estimadores de σ son una cosa natural porque ellos tienen propiedades diferentes.

El estimador $\hat{\sigma}_{w_{(1)}}$ es insesgado y entonces él se debe comparar con el estimador insesgado por σ construido mediante s.

El estimador σ^* es del tipo MMSE y entonces la comparación se debe hacer con el estimador del tipo MMSE construido mediante $\hat{\sigma}_{w_{(1)}}$.

Nota Bene : **El segundo autor expresa su reconocimiento a la Dra. María C. Fernández de Alaiza (Academia de Ciencias, Cuba) por la ayuda que le proporcionó cuando aprendía español.**

REFERENCIAS

1. *Ali, M. M. and Chan, L. K. : On Gupta's estimates of the parameters of the normal distribution. Biometrika 51, (1964), 498-501.*

2. *Benson, F. : A note on the estimation of mean and standard deviation from quantiles. J. Roy. Statistist. Soc. Ser. B, 11 (1949), 91-100.*

3. *Bland, R.P., Gilbert, R. D., Kapadia, C. H. and Owen, D. B. : On the distributions of the range and mean range for samples from a normal population. Biometrika. 53 (1966), 245-248.*

4. *Blom, G. : Statistical Estimates and Transformed Beta Variables. John Wiley and Sons, New York, 1958.*

5. Bolch, B. W. : More one unbiased estimation of the standard deviation. American Statistician, 22(3), (1968), 27.

6. Breakwell, J. V. : On estimating both mean and standard deviation of a normal population from the lowest r out n observations (abstract). Ann. Math. Statist (1953)

7. Brugger, R. M. : A note on the unbiased estimation of the standard deviation. American Statistician 23(4) (1969), 32.

8. Cadwell, J. H. : The distribution of quasi-ranges in samples from normal population. Ann. Math. Statis. 24, (1953), 603 - 613.

9. Cohen, A. C. : On estimating the mean and standard deviation of truncated normal distributions. J. Amer. Statist. Ass. 44 (1949), 518 - 525.

10 Cureton, E. E. : Priority correction. American Stat. 22 (3) (1968), 27.

11. D'Agostino, R. B. : Linear estimation of the normal distribution standard deviation. American Statistician 24(3), (1970), 14-15.

12. D'Agostino, R. B : An omnibus test for normality for moderate and large size samples. Biometrika 58 (2) (1971).

13. David H. A : Giri's mean difference rediscovered. Biometrika 44 (1968), 282-6.

14. David, H. A. : Order Statistics. John Wiley and Sons, New York, 1970.

15. Dixon, W. J. : Estimation of the mean and standard deviation of a normal population. Ann. Math. Statist. 28 (1957), 806-809.

16. Downton, F. : Linear estimates with polynomal coefficients. Biometrika 53, (1966), 129-141.

17. Elfving, G. : The asymptotical distribution of range in samples from a normal population. Biometrika, 34 (1947), 111-119.

18. Govidarajulu, Z. : On moments of order statistics and quasi-ranges from normal populations. Ann. Math. Statist. 34 (1963), 633 - 651.

19. Govindarajulu, Z. and Sahai, H. : Estimation of the parameters of a normal distribution with known coefficient of variation. Rep. Stat. Appl. Res. JUSE vol. 19 (3) (1972), 1-14.

20. Grubbs, F. E. and Weaver, C. L. : The best unbiased estimate of population standard deviation based on group ranges. J. Amer. Statist. Ass. 42 , (1947), 224 - 241.

21. Gupta, A. K. : Estimation of the mean and standard deviation of a normal population from a censored sample. Biometrika 39 (1952), 260-273.

22. Harter, H. L. : Tables of range and studentized range. Ann. Math. Statist. 31 . (1960), 1122-1147.

23. Hartley, H. O. : Numerical evaluation of the probability integral of range. Biometrika. 32 (1942), 309-310.

24. Hartley, H. O. and Pearson, E. S. : Moment constants for the distribution of range in small samples. Biometrika 33, (1951), 257-8.

25. Holtzman, W. H. : The unbiased estimate of the population variance and standard deviation. Amer. J. of Psychology 63 (1950), 615 - 617 .

26. Iliescu, D. V., si Vodă, V. Gh. : Asupra determinării rapide a unor parametri statistici. Calitatea Producţiei şi Metrologie, vol II(XIX) 2 (1972), 99-102 .

27. Iliescu, D. V. and Vodă, V. Gh. : On the estimation of standard deviation for a normal population. "Trabajos de Estadística", Madrid 1974 , vol. XXV , pp. 71-98

28. Jarrett, R. F. : A minor exercise in history. American Statistician 22(3) (1968), 25-26.

29. Jonea, A. E. : A useful method for the routine estimation of dispersion from large samples. Biometrika. 33, (1946), 274-282.

30. Jones, G. M., Kapadia, C. H., Owen, D. B. and Bland R. P. : On the distribution of the quasi-range and mid-range for samples from a normal population . Technical Report No. 20, Themis Contract. Dept. of Statistics, Southern Methodist University, Dallas, Texas, USA. 1969.

31. Kamat, A. R. : Distribution theory of two estimates for standard deviation based on second variate differences. Biometrika, 41 (1954), 1 - 11.

32. Khan, R. A. : *A note on estimation of the mean of a normal distribution with known coefficient of variation.* J. Amer. Statist. Ass. 63 (1968), 1039-1041.

33. King, E. P. : *Estimating the standard deviation of a normal population.* Industrial Quality Control 10(2), (1953), 30-33.

34. Kuldorff, G. : *Maximum likelihood estimation of the standard deviation of a normal randon variable when the sample is grouped.* Skandinavisk Aktuarietidskrif 41 (1958), 18-36.

35. Lloyd, E. H. : *Least squares estimation of location and scale parameters using order statistics.* Biometrika, 39 (1952), 88-95.

36. Markowitz, E. : *Minimum-mean-square-error estimation of the standard deviation of the normal distribution.* American Statistician 22(3) (1968), 26.

37. Mead, R. : *A quick method of estimating the standard deviation.* Biometrika. 53, (1966), 559-564.

38. Mosteller, F. : *On some useful "inefficient" statistics.* Ann. Math. Statist. 17 (1946), 377-408.

39. Nair, K. R. : *The efficiency of Gini's mean difference.* Bull. Calcutta Statist. Ass. 2 (1949), 129-130.

40. Nair, K. R. : *Efficiencies of certain linear systematic statistic for estimating dispersion from normal samples.* Biometrika, 37 (1950), 182-183.

41. Nair, U. S. : *The standard error of Gini's mean difference.* Biometrika 28 (1936) 428-438.

42. Newman, D. : *The distribution of range in sample from a normal population expressed in terms of an independent estimate of standard deviation.* Biometrika 31 (1939), 20-30.

43. Oderfeld, J., Pleszcynska, E. : *Liniowy estymator odchylenia sredniego w populacji normalnej.* Zastosowania Matematyki, 6 (1961), 111-117.

44. Ogawa, J. : *Contributions to the theory of systematic statistics. I.* Osaka Mathematics Journal, 3 (1951), 175-213.

45. Pearson, E. S. : *The percentage limits for the distribution of range in samples from a normal population.* *Biometrika* 24 (1932), 404 - 417.

46. Pearson, E. S. : *The probability integral of the range in samples of n observation from a normal population. I. Foreword and tables.* *Biometrika* 32 (1942), 301 - 308.

47. Pearson, E. S. : *Comparison of two approximations to the distribution of the range in small samples from normal populations.* *Biometrika* 39 (1952), 130 - 136.

48. Pearson, K. : *Historical note on the distribution of the standard deviation of samples of any size drawn from an indefinitely large normal parent population.* *Biometrika* 23 (1931), 416 - 418.

49. Pleszcynska, E. : *Tabela wag liniowego estymatora odchylenia sredniego w populacji normalnej.* *Zastosowania Matematyki,* 7 (1963), 117 - 124.

50. Prescott, P. : *A simple method of estimating dispersion from normal samples.* *Applied Statistics,* 17 (1968), 70-74.

51. Prescott, P. : *Use of a simple range-type estimator of in tests of hypotheses.* *Biometrika,* 58 (1971), 333-340.

52. Sandelius, M. : *On the estimation of the standard deviation of a normal distribution from a pair of percentiles.* *Skandinavisk Aktuarietidskirff* 40 (1957), 85-88.

53. Sarhan, A. E. : *Estimation of the mean and standard deviation by order statistics, I.* *Ann. Math. Stat.* 25 (1954), 317-328.

54. Sarhan, A. E. :, and Greenberg, B. G. : *Contributions to Order Statistics.* *John Wiley, and Sons, New York,* 1962.

55. Stuart, A. : *Reduced mean-square-error-estimation of* σ^p *in normal samples.* *American Statistician* 23 (4) (1969), 27–28.

56. Tiku, M. L. : *Estimating the mean and standard deviation from a censored normal sample.* *Biometrika,* 54 (1967), 155-165.

57. Tippett, L. H. C. : *On the extreme individuals and the range of samples taken from a normal population*. Biometrika, 17 (1925), 155-165.

58. Vodă, V. Gh. : *Special Chapters in Applied Statistics* (curso dado en el Instituto de Cibernética de la Academia de Ciencias, La Habana, Cuba, enero-junio, 1973).

59. Zítek, Fr. : *O pewnych estymatorach odchylenia standardowego* Zastozowania Matematyki I(4) (1954), 342-353.

Tablas estadísticas

60. Bolchev, L. N. y Smyrnov, N. V. : *Tablas de Estadística Matemática* (en ruso), Moscú, Nauka, 1965.

61. Hald, A. : *Statistical Tables and Formulas*, John Wiley and Sons, New York, 1952.

62. Rao, C. R., Mitra, S. K. and Matthai, A. : *Formulae and Tables for Statistical Work*. Statistical Publishing Society, Calcutta, 1966.

Centro de Estadística Matemática
Academia de Ciencias de Rumania
Bucarest, Rumania.

(Recibido en julio de 1974)

Tabla 1 : Valores d_n^{-1} y $d_2^{-1}/(n-1)$ para $n=2(1)\,20$

n	d_n^{-1}	$\dfrac{d_2^{-1}}{n-1}$	n	d_n^{-1}	$\dfrac{d_2^{-1}}{n-1}$
2	0,88622	0,88622	12	0,30689	0,08056
3	0,85524	0,44311	13	0,29976	0,07385
4	0,48573	0,29540	14	0,29353	0,06817
5	0,42993	0,22155	15	0,28803	0,06330
6	0,39456	0,17724	16	0,28312	0,05908
7	0,36977	0,14770	17	0,27871	0,05538
8	0,35122	0,12660	18	0,27472	0,05213
9	0,33669	0,11077	19	0,27107	0,04923
10	0,32493	0,09846	20	0,26774	0,04664
11	0,31517	0,08862			

Tabla 2 : Valores ρ_1 y ρ_2 para $n = 2\ (1)\ 20$

n	ρ_1	ρ_2	n	ρ_1	ρ_2
2	0,78539	0,78539	12	0,09418	0,00649
3	0,73144	0,19635	13	0,08985	0,00545
4	0,23593	0,08726	14	0,08616	0,00465
5	0,18484	0,04908	15	0,08296	0,00401
6	0,15568	0,03141	16	0,08016	0,00349
7	0,13673	0,02182	17	0,07547	0,00307
8	0,12336	0,01603	18	0,07547	0,00272
9	0,11336	0,01227	19	0,07348	0,00242
10	0,10558	0,00969	20	0,07168	0,00218
11	0,09933	0,00785			

Tabla 3 : Valores $b(n)$ para $n = 2(1)20$

n	$b(n)$	n	$b(n)$
2	0,56419	12	0,29032
3	0,54209	13	0,28458
4	0,41072	14	0,27951
5	0,37779	15	0,27498
6	0,35484	16	0,27091
7	0,33771	17	0,26722
8	0,32433	18	0,26385
9	0,31350	19	0,26076
10	0,30451	20	0,25792
11	0,29689		

Tabla 4 : Valores $c(n)$ para $n = 2(1)\,20$

n	$c(n)$	n	$c(n)$
2	0,36338	12	0,05399
3	0,36599	13	0,05063
4	0,15442	14	0,04776
5	0,12127	15	0,04529
6	0,10068	16	0,04313
7	0,08669	17	0,04123
8	0,07656	18	0,03954
9	0,06888	19	0,03803
10	0,06286	20	0,03666
11	0,05799		

Tabla 5 : Valores $\alpha(n)$ por $n = 2(1)\,20$

n	$d_n^2 Var(R_{(1)})$	$(Var(R_{(1)}) + d_n^2)^2$	$\alpha(n)$
2	0,92534	4,00000	0,23133
3	1,07900	4.65002	0,23204
4	3,28086	25,12536	0,13057
5	4,03912	37,90323	0,10656
6	4,61933	51,01373	0,09055
7	5,07737	64,12486	0,07917
8	5.44866	77,06434	0,07070
9	5,75681	89,75099	0,06414
10	6,01707	102,13892	0,36446
11	6,23999	114,21069	0,05463
12	6,43435	125,96852	0,05107
13	6,60525	137,41208	0,04806
14	6,75667	148,55173	0,04548
15	6,89297	159,40224	0,04324
16	7,01550	169,96989	0,04127
17	7,12681	180,27117	0,03953
18	7,22843	190,31803	0,03798
19	7,32174	200,12205	0,03658
20	7,40695	209,69415	0,03532