Uso de la Programación Lineal Estocástica Difusa en la definición de la Política de Créditos

Santiago Medina Hurtado.
Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín
smedina@unalmed.edu.co

***Resumen*—En este artículo se presenta una metodología para resolver problemas de programación lineal en la incertidumbre. Inicialmente se plantean los supuestos de los que parte la programación lineal y la manera en que estos pueden relajarse haciendo uso de la teoría de probabilidades y conjuntos difusos. Posteriormente se aplica la teoría en un problema de política de créditos de una compañía financiera.**

***Palabras clave* —Programación lineal difusa, Programación estocástica,**

I. Introducción

La programación lineal es una herramienta de gran utilidad para resolver problemas que se plantean en el mundo real. La literatura existente sobre la fundamentación teórica y las posibles aplicaciones de este instrumento es amplia. (Hillier [1], Bazara [2]).

Sin embargo para la modelación de estas técnicas es necesario tener suficiente información sobre el problema que se trata de resolver, esto implica conocer los valores de los coeficientes que intervienen tanto en la función objetivo como en las restricciones, así como cuáles son las limitaciones técnicas o de cantidad de los recursos a las que el analista debe ajustarse. Esto da origen a las restricciones de desigualdad del programa matemático. Es evidente que todos estos datos no siempre van a ser fáciles de conocer pudiendo llegar a situaciones en las que esta insuficiencia de información sea irresoluble. Una manera de resolver esta situación es modelar el desconocimiento mediante coeficientes que son tratados como variables aleatorias o números difusos.

En el caso de la función objetivo, no siempre la meta va a ser la obtención de soluciones óptimas en el sentido matemático a ultranza. Por ejemplo, el objetivo de un fondo de inversión podría expresarse como la obtención de una rentabilidad suficiente buscando un equilibrio en todos los elementos que afectan la rentabilidad, por ejemplo evitando tomar riesgos altos. Es decir, es nuestro objetivo no es necesariamente maximizar la rentabilidad al máximo posible, sino aumentarla en una cuantía lo suficientemente grande con respecto a la competencia o al desempeño pasado. Por lo tanto tiene sentido plantearse modelos con funciones objetivo difusas.

También es posible por ejemplo, que las restricciones de disponibilidad de capital de la compañía, la política de crédito a un sector o la limitación del riesgo de perdidas, no esté restringidas a un valor específico sino que se encuentren en un rango. Es decir en muchas ocasiones al decisor le bastará con exigir un cumplimiento aproximado de la restricción lo que podría implementarse mediante restricciones de tipo difuso.

En muchas situaciones puede haber desconocimiento de los coeficientes de tanto la función objetivo como de las restricciones y esto se debe a que existe información imprecisa y vaga sobre estos, siendo en este caso más coherente la representación de estos coeficientes como números difusos en lugar de variables aleatorias. En el caso de que sea posible realizar análisis estadísticos de los valores de los coeficientes, estos podrían ser modelados mediante variables aleatorios.

Por tanto, parece claro que un modelamiento de programas matemáticos en una mezcla de ambiente difuso y estocástico en muchas ocasiones se aproxima de una manera más fácil y natural al problema que intenta resolverse. El objetivo de este artículo es utilizar las herramientas procedentes de la teoría de los conjuntos difusos para resolver un problema de política de crédito cuya función objetivo es tanto aleatoria en sus coeficientes como difusa en su planteamiento, además se plantearan restricciones difusas en la línea de las formuladas por Zimmermann [3] y añadiendo el supuesto de que algunos o todos de los coeficientes de las mismas son variables aleatorias (Luhandjula [4]).

II. Programación Lineal Estocástica Difusa

Consideremos el problema:

$$\begin{aligned} &\underset{\sim}{\mathrm{Max}} \quad \bar{c}\,x \\ &\text{s.a.} \quad Ax \,\tilde{\leq}\, \bar{b} \qquad x \geq 0 \end{aligned} \qquad [1]$$

donde $\bar{c}$ es un vector $1 \times n$, $\mathbf{x}$ es un vector $n \times 1$, $\mathbf{A}$ es una matriz de coeficientes $m \times n$, $\bar{b}$ es un vector aleatorio $m \times 1$ y $\tilde{\leq}$ denota una relación difusa para la desigualdad . Es conveniente hacer los siguientes comentarios sobre dicha expresión:

1. $\bar{c}$ y $\bar{b}$ son variables aleatorias con distribuciones de probabilidad conocidas. Este supuesto no puede estar más cercano a la realidad pues en muchos casos el investigador desconocerá los coeficientes de tanto la función objetivo como de las restricciones. Algunos de los cuales los podrá obtener en base a la historia pasada y otros solo será capaz de determinar o incluso tan solo de suponer una distribución de

probabilidad que se ajuste al comportamiento de dicho coeficiente.

2. $\underset{\sim}{\text{Max}}\ c\,x$ es una versión difusa de la expresión nítida $\text{Max}\ c\,x$. De esta manera se intenta adaptar el planteamiento matemático a los objetivos del mundo real y esto no es necesariamente una optimización convencional. Así por ejemplo, si un fondo de inversión cuya rentabilidad actual es z_0, se plantea conseguir un aumento en la misma, posiblemente no necesite conseguir los resultados que son el resultado de la maximización clásica de su función de rentabilidad, puesto que si alcanza un nivel de rentabilidad z_1 el cual está significativamente por encima del resto de los fondos competidores o que le exige el gobierno, dicho nivel será suficiente para obtener un desempeño adecuado. En definitiva puede optarse por definir un conjunto difuso para la función objetivo tal como $\tilde{A}$ = {Rentabilidad adecuada respecto a la competencia}.

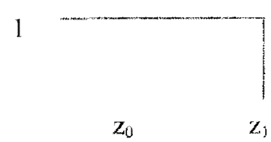

Fig. 1. Función de pertenecía del conjunto difuso $\tilde{A}$. Cuando la rentabilidad alcanza un valor por encima de z_1, se tiene un grado de pertenencia al conjunto difuso $\tilde{A}$ de 1. Cuando la rentabilidad alcanza un valor por debajo de z_0, se tiene un grado de pertenencia al conjunto difuso $\tilde{A}$ de 0. El incumplimiento máximo de la función objetivo definida por el conjunto difuso $\tilde{A}$, estará dado por $z_1 - z_0$

3. $\lesssim$ Es una relación vaga entre ambos lados de la restricción. Dado que algunos o todos los coeficientes de ambos lados de las restricciones son desconocidos, en muchas ocasiones será más fácil exigir un cumplimiento aproximado de las restricciones mediante la definición de conjuntos difusos y la asignación de funciones de pertenencia para estos conjuntos difusos.

En este artículo se presentar uno de los métodos existentes para reducir un problema de optimización lineal difuso estocástico a un problema de optimización clásico, es decir nítido y determinista. Además se mostrará su aplicación en un problema de política de créditos.

A. Versión Determinista de una función objetivo Estocástica Difusa.

Sea la función objetivo $\text{Max}\ \bar{c}\,x = \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i x_i$ siendo $\bar{c} = \bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots\ldots, \bar{c}_n$ variables aleatorias con distribuciones conocidas. Algunos métodos han sido propuestos en la literatura para conseguir una versión determinista de este objetivo ([5],[6]). Para nuestro caso usaremos la maximización de la esperanza matemática de la función objetivo, por lo tanto, la función objetivo determinista será la siguiente:

$$\text{Max}\ E\left(\bar{c}\,x\right) = E\left[\sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i x_i\right] \qquad [2]$$

Para el caso en que $\bar{c}$ sea una función discreta tenemos:

$$\text{Max}\ E\left(\bar{c}\,x\right) = E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{r} c_{ij} P_{ij}\right] \qquad [3]$$

Para el caso en que $\bar{c}$ sea una función continua se tiene:

$$\text{Max}\ E\left(\bar{c}\,x\right) = E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \int_{-\infty}^{\infty} c_i f(c_i)\, dc_i\right] \qquad [4]$$

Una vez eliminada la aleatoriedad el siguiente método permite eliminar la vaguedad [3]:

1. Definir un conjunto difuso que represente fielmente el objetivo que se trata de conseguir. En el ejemplo tenemos $\tilde{A}$ = {Rentabilidad adecuada respecto a la competencia}. Asociado a $\tilde{A}$, habrá que definir una función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1] \quad \forall x \in X$.

2. Maximizar la función de pertenencia de tal manera que se cumpla el objetivo con mayor precisión. Esto es: $\text{Max}\ \mu_{\tilde{A}}(c\,.\,x)$, donde c es el vector de coeficientes resultantes de eliminar la aleatoriedad.

B. Versión Determinista de una Restricción Estocástica Difusa.

1. *Caso en que solo $\bar{b}_h$ es estocástico.*

La restricción difusa $A_h x \lesssim \bar{b}_h$ es un conjunto difuso definido sobre el espacio $X \times \Omega_h$. X es el conjunto de valores que puede tomar la variable x, y Ω_h es el conjunto de valores que puede tomar la variable aleatoria discreta $\bar{b}_h$. Para cada uno de los posibles valores de **x**, y para cada uno de los posibles valores de $\bar{b}_h$ se puede asociar un grado de cumplimiento determinado de la restricción.

Para un $x \in X$, $A_h x \lesssim \bar{b}_h$ puede ser considerado un evento difuso en Ω_h con función de pertenencia $\mu_h(x, \bar{b}_h)$ el cual expresa el grado en que **x** cumple la restricción estocástica difusa **h**.

Evidentemente, dado que $\bar{b}_h$ es una variable aleatoria, el conjunto difuso $A_h x \lesssim \bar{b}_h$ tendrá cierto grado de incertidumbre que no será otro que la incertidumbre asociada a la variable aleatoria $\bar{b}_h$. Por lo tanto, $P(A_h x \lesssim \bar{b}_h)$ representará la probabilidad de que para un **x** dado, se cumpla la h-esima restricción. Cuanto mayor sea $P(A_h x \lesssim \bar{b}_h)$, mayor será nuestra credibilidad de que x cumpla la restricción tanto aleatoria como imprecisamente definida. Dicha probabilidad siguiendo la definición de probabilidad de un suceso difuso propuesto por Zadeh tendremos para el caso discreto [7]:

$$P(A_h x \lesssim b_h) = E[\mu_h(x, b_h)] = \sum_{j=1}^{r} \mu_h(x, b_h).P_{hj} \qquad [5]$$

donde $P_{hj} = P(b_h = b_{hj})$

Por lo tanto, $P(A_h x \lesssim b_h)$ estará recogiendo tanto el grado de incertidumbre de la variable b_h como la precisión con que se ha definido la restricción **h**. El programa de optimización determinista, consistirá en exigir para cada una de las restricciones, que la probabilidad de que se cumpla cada una de ellas sea mayor que un valor α_h. Tendremos entonces que el problema determinista a resolver será:

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad \mu_{\tilde{A}}(c\,.\,x) \\ &\text{s.a.} \quad P(A_h x \lesssim b_h) \geq \alpha_h \qquad \forall h = 1,2,....,m \qquad [6] \\ &x \geq 0 \qquad x \in X \end{aligned}$$

Donde si a la h-ésima restricción le exigimos una probabilidad mayor que a la h'-ésima restricción, de modo que $\alpha_h \geq \alpha_{h'}$, ello significará que estamos dando más importancia a la primera restricción que a la segunda.

Las funciones de pertenencia expresan la decisión de que para un valor de **x**, la restricción este lo más cerca posible de b_h. Un valor de **x** tal que $\mu_h(x, b_h) = 0$ no es atractivo ya que sería deseable que se obtenga un grado de cumplimiento positivo de la restricción, o lo que es lo mismo, que $\mu_h(x, b_h) > 0$. Ello significa incorporar una nueva restricción al problema, esta es:

$$x \in \text{sop}\left\{\bigcap_{j=1}^{r} A_h x \lesssim b_{hj}\right\} \qquad [7]$$

Esta nueva restricción puede producir infactibilidad en el programa determinista o soluciones poco deseadas. Lo más recomendable es resolver el programa determinista sin estas restricciones y luego comparar la solución obtenida añadiendo estas restricciones quedándonos con la restricción que más nos satisfaga.

Teniendo en cuenta el valor que toma $P(A_h x \lesssim b_h)$, el planteamiento final del problema será:

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad \mu_{\tilde{A}}(c\,.\,x) \\ &\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^{r} \mu_h(x, b_h).P_{hj} \geq \alpha_h \qquad \forall h = 1,2...,m \qquad [8] \\ &x \in \text{sop}\left\{\bigcap_{j=1}^{r} A_h x \lesssim b_{hj}\right\} \qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

Si tanto $\mu_{\tilde{A}}(c\,.\,x)$ como $\mu_h(x,b_h)$ son funciones lineales en x, el problema puede ser fácilmente resuelto.

2. *Caso en el que tanto A_h, b_h son estocásticos.*

Existe la posibilidad de que tanto los coeficientes del lado derecho b_h y los coeficientes del lado izquierdo A_h de una o varias restricciones sean variables aleatorias. En este caso tendremos para cada una de las h-restricciones del problema una variable aleatoria (n+1)-dimensional dada por:

$$(A_h, b_h) = (a_{h1}, a_{h2}, ..., a_{hn}, b_h)$$

Bajo el supuesto de que cada una de las n+1 variables aleatorias sean discretas, la función de pertenencia asociada a la restricción difusa $A_h x \lesssim \tilde{b}_h$ es un conjunto difuso definido como $\mu_h(x, a_{h1}, a_{h2}, ..., a_{hn}, b_h)$.

Asumiendo distribuciones discretas, el coeficiente aleatorio a_{hi} puede tomar valores aleatorios $a_{hi} = (a_{hi_1}, a_{hi_2}, ..., a_{hi_{r_i}})$ con probabilidades asociadas $p_{hi} = (p_{hi_1}, p_{hi_2}, ..., p_{hi_{r_i}})$, donde i=1,2,...,n. En forma similar el coeficiente b_h puede tomar valores aleatorios $b_h = (b_{h_1}, b_{h_2}, ..., b_{h_{r_{n+1}}})$ con probabilidades asociadas $p'_h = (p'_{h_1}, p'_{h_2}, ..., p'_{h_{r_{n+1}}})$.

La probabilidad asociada a la restricción $A_h x \lesssim b_h$ será la siguiente:

$$P(A_h x \lesssim b_h) = E[\mu_h(x, a_{h1}, a_{h2}, ..., a_{hn}, b_h)] =$$

$$\sum_{j_1}^{r_1}\sum_{j_2}^{r_2}\cdots\sum_{j_n}^{r_n}\sum_{j_{n+1}}^{r_{n+1}} \mu_h(x, a_{h1_{j_1}}, a_{h2_{j_2}}, ..., a_{hn_{j_n}}, b_{h_{j_{n+1}}})\Theta_{h_{j1,j2,...,jn,jn+1}} \qquad [9]$$

donde:

$$\Theta_{h_{j1,j2,...,jn,jn+1}} = P(a_{h1} = a_{h1_{j_1}}, a_{h2} = a_{h2_{j_2}}, ..., a_{hn} = a_{hn_{j_n}}, b_h = b_{h_{j_{n+1}}})$$

$\Theta_{h_{j1,j2,...,jn,jn+1}}$ es la probabilidad conjunta.

Por ejemplo, si en una restricción tenemos dos coeficientes y una restricción técnica y cada uno puede concretarse en dos valores esto es $a_{h1} = (a_{h1_1}, a_{h1_2})$, $a_{h2} = (a_{h2_1}, a_{h2_2})$ y $b_h = (b_{h_1}, b_{h_2})$, las combinaciones posibles son 2x2x2 = 8. Es necesario obtener la función de pertenencia en cada una de esas combinaciones y sumarlas ponderándolas por sus respectivas probabilidades conjuntas.

El programa nítido y determinista transformado será:

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad \mu_{\tilde{A}}(c\,.\,x) \\ &\text{s.a.} \quad E[\mu_h(x, a_{h1}, a_{h2}, ..., a_{hn}, b_h)] \geq \alpha_h \quad \forall h = 1,2,..,m \qquad [10] \\ &x \in \text{sop}\left\{\bigcap_{j=1}^{r} A_h x \lesssim b_{hj}\right\} \qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

La solución anterior supone que la probabilidad de un evento difuso **Ã** es nítida en el sentido de Zadeh. Otras aproximaciones al problema suponen que dicha probabilidad es también un conjunto difuso. En tal sentido, lo más razonable es pensar que la probabilidad asociada al suceso difuso consistente en el cumplimiento de una restricción o de una función objetivo sea también difuso, para tal efecto, puede aplicarse el principio de extensión de Zadeh y obtener la función de pertenecía asociada al conjunto difuso $\underset{\sim}{P}(A_h x \lesssim b_h)$. Para mayor detalle de cómo realizar esta aproximación consúltese [4].

III. EJEMPLO APLICATIVO

El siguiente ejemplo busca aplicar el modelo anterior a un problema de la política de créditos de una entidad financiera a un año. La entidad cuenta con un recurso de capital que puede variar entre 28.000 y 30.000 con probabilidad de 0.4 y entre 28.000 y 38.000 con probabilidad de 0.6.

La tabla siguiente indica los datos pertinentes acerca de los diferentes tipos de inversiones.

Línea de Crédito	Rentabilidad neta	Prob.	Cartera Perdida	Prob.
X1- Personal	9%	0.7	6%	0.8
	12%	0.3	8%	0.2
X2- Agrícola - Comercial	5%	0.6	2%	0.4
	8%	0.4	4%	0.6
X3- Automóvil	6%	0.6	3%	0.8
	10%	0.4	5%	0.2

Las pérdidas debido a los créditos irrecuperables no deben exceder de 1.800 y se considera un nivel óptimo de pérdidas si estas alcanzan un valor menor o igual a 1.500

Como políticas de colocación, se ha establecido que en el sector Agrícola-Comercial debe colocarse un máximo del 40% del total de recursos y además la institución deberá colocar por lo menos un 40% de los fondos a préstamos para los sectores Personal y Agrícola-Comercial.

La gerencia considera un nivel aceptable de ingresos netos de 1.300 o mayor pero puede permitir que este valor diminuya como máximo en 500

El analista debe determinar el plan de créditos de tal manera que se maximicen los ingresos netos de la compañía.

A. *Versión Determinista de una Función Objetivo Estocástica Difusa.*

Nuestro objetivo es maximizar la sumatoria de los ingresos netos menos las perdidas de cartera. Esto es:

Max 9.9 X1 + 6.2 X2 + 7.6 X3 - (6.4 X1 + 3.2 X2 + 3.4 X3)

Max 3.5% X1 + 3.0% X2 + 4.2% X3

Siendo X1= Créditos Personales, X2= Créditos Agrícolas y Comercial, X3= Créditos para Automóvil.

La relación anterior ha eliminado la aleatoriedad mediante el cálculo del valor esperado de cada uno de los coeficientes de la F.O. Por ejemplo el coeficiente de ingresos netos de X1 se obtuvo mediante $\sum_{j=1}^{r} c_{ij} P_{ij}$ = 9%×0.7+12%×0.3 =9.9%

Además, dicha F.O. tiene asociada un conjunto difuso expresado como Â = {Alcanzar utilidades suficientemente altas}, si asumimos una función de pertenencia como la indicada en la figura 1, el grado de pertenencia a dicho conjunto difuso esta dado por:

$$\text{Max} \quad \mu_{\tilde{A}}(c.x) = \begin{cases} (x - z_0) \div (z_1 - z_0) & z_0 < x < z_1 \\ 0 & x < z_0 \\ 1 & x > z_1 \end{cases}$$

para nuestro caso $z_1 = 1.300$, $z_0 = 800$ y

$x = 3.5\,x_1 + 3.0\,x_2 + 4.2\,x_3$

$$\text{Max} \quad \mu_{\tilde{A}}(c.x) = 7\times10^{-5}x_1 + 6\times10^{-5}x_2 + 8.4\times10^{-5}x_3 - 1.60$$

B. *Restricciones*

Nuestro problema tiene 4 restricciones asociadas con el manejo de los recursos de capital, el riesgo, y los créditos otorgados al sector Agrícola –Comercial y Personal-Automotriz.

1. Recursos de Capital.

La restricción difusa para el recurso de capital es del tipo $A_h \times \lesssim b_h$, donde **A** es nítida y b_h es estocástica y $\lesssim$ denota una relación difusa para la desigualdad. A dicha restricción se asocia una función de pertenencia $\mu_h(x, b_h)$ que expresa el grado en que **x** cumple la restricción y además, se exigirá que tenga un valor de probabilidad mayor que un valor α_h. Por lo tanto se tiene que $P(A_h \times \lesssim b_h) \geq \alpha_h$.

Nuestra restricción difusa será: $x_1 + x_2 + x_3 \lesssim b_1$ que no es otra cosa que la suma de las colocaciones en los tres sectores sea menor que una disponibilidad de capital. La función de pertenencia asociada a la restricción se indica en la figura 2 y el grado de pertenencia a dicho conjunto difuso esta dado por:

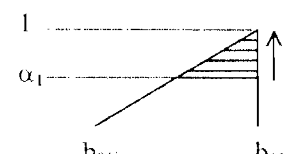

Fig. 2. Función de pertenecia asociada a la disponibilidad de capital

$$\mu_1(x.b_1) = \begin{cases} (x'-b_{01j})/(b_{11j} - b_{01j}) & b_{01j} < x < b_{11j} \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Se debe cumplir que: $\sum_{j=1}^{r} \mu_1(x', b_1).P_{1j} \geq \alpha_1 \qquad \forall h = 1,2,....,r$

donde r es el número de valores que puede tomar la variable aleatoria b_h (en este caso conjuntos difusos) y que tienen asociado un nivel de probabilidad. Para la restricción de capital tenemos:

$b_{01} = 28.000 \quad b_{11} = 30.000 \quad P_{11} = 0.4$

$b_{02} = 28.000 \quad b_{12} = 30.000 \quad P_{12} = 0.6$

$$\frac{x'-28.000}{2.000} \times 0.4 + \frac{x'-28.000}{10.000} \times 0.6 \geq \alpha_1$$

operando y haciendo $x' = x_1 + x_2 + x_3$ tenemos:

$$2.6\times10^{-4}x_1 + 2.6\times10^{-4}x_2 + 2.6\times10^{-4}x_3 - 7.28 \geq \alpha_1$$

Es deseable que la restricción se cumpla con un nivel de pertenencia mayor que cero para lo cual hay que exigir que

$x \in \operatorname{sop}\left\{\bigcap_{j=1}^{r} A_1 x \lesseqgtr b_{1j}\right\}$, en términos gráficos esto se muestra en la figura 3.

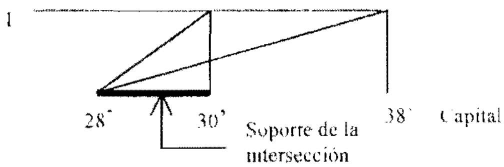

Fig. 3. Soporte de la intersección de conjuntos difusos.

Dicho de otro modo:

$$\max\{b_{01}, b_{02}\} \le x_1 + x_2 + x_3 \le \min\{b_{11}, b_{12}\}$$

$$28.000 \le x_1 + x_2 + x_3 \le 30.000$$

2. <u>Restricción de crédito al sector comercial y agricola.</u>

La restricción de crédito a dicho sector es de la forma $A_h \times \lesseqgtr b_h$. Solo es posible colocar como máximo el 40% del total de los recursos. Se tiene: $x_2 \lesseqgtr c_2 b_2$ donde **C2** es el porcentaje máximo que puede asignarse a dicho sector y b_2 es el total de recursos disponibles. La función de pertenencia asociada será:

$$\mu_2(x_2, b_{2j}) = \begin{cases} (x_2 - c_2 b_{20j})/(b_{21j} - b_{20j})c_2 & c_2 b_{20j} < x_2 < c_2 b_{21j} \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

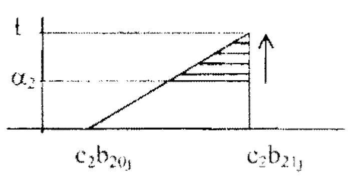

Fig. 4. Función de pertenecia asociada a la disponibilidad de recursos para el sector comercial y agricola.

Debe cumplirse que: $\sum_{j=1}^{r} \mu_2(x_2, b_{2j}) P_{2j} \ge \alpha_2$ y además que $x \in \operatorname{sop}\left\{\bigcap_{j=1}^{r} A_2 x \lesseqgtr b_{2j}\right\}$ para este caso tenemos:

$b_{201} = 28.000 \quad b_{211} = 30.000 \quad P_{21} = 0.4 \qquad C_2 = 0.4$

$b_{202} = 28.000 \quad b_{212} = 38.000 \quad P_{22} = 0.6$

$$\frac{x_2 - 0.4 \times 28000}{2000 \times 0.4} \times 0.4 + \frac{x_2 - 0.4 \times 28000}{10000 \times 0.4} \times 0.6 \ge \alpha_2$$

Operando obtenemos la restricción siguientes:

$$6.5 \times 10^{-4} x_2 - 7.28 \ge \alpha_2$$

y para el soporte tenemos que:

$$\max\{11.200, 11.200\} \le x_2 \le \min\{12.000, 15200\}$$

$$11.200 \le x_2 \le 12.000$$

3. <u>Restricción de crédito al sector Personal y Automotriz.</u>

Esta restricción es de la forma $A_h \times \lesseqgtr b_h$. Debe colocarse por lo menos el 40% del total de los recursos en estos sectores. Se tiene: $x_1 + x_3 \lesseqgtr c_3 b_3$ donde **C3** es el porcentaje que por lo menos puede asignarse a dichos sectores y b_3 es el total de recursos disponibles. La función de pertenencia asociada será:

$$\mu_3(x, b_{3j}) = \begin{cases} (x_1 + x_3 - c_3 b_{30j})/(b_{31j} - b_{30j})c_3 & c_3 b_{30j} < x_1 + x_3 < c_3 b_{31j} \\ 1 & x_1 + x_3 \ge c_3 b_{31j} \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

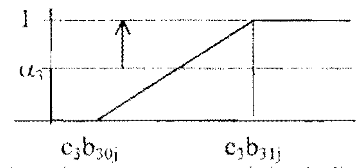

Fig. 4. Función de pertenecia asociada a la disponibilidad de recursos para el sector personal y automotriz

Debe cumplirse que:

$\sum_{j=1}^{r} \mu_3(x_1 + x_3, b_3) P_{3j} \ge \alpha_3$ y además que $x \in \operatorname{sop}\left\{\bigcap_{j=1}^{r} A_3 x \lesseqgtr b_{3j}\right\}$. Operando de manera similar al caso anterior obtenemos las restricciones siguientes:

$$6.5 \times 10^{-4} x_1 + 6.5 \times 10^{-4} x_3 - 7.28 \ge \alpha_3$$

y para el soporte: $11.200 \le x_1 + x_3 \le 12.000$

4. <u>Restricción para limitación de perdidas</u>

La restricción para limitar los créditos incobrables es de la forma $A_h x \lesseqgtr b_h$, aquí tanto A_h como b_h son estocásticos y $\lesseqgtr$ denota una relación difusa para la desigualdad. Al cumplimiento de dicha restricción se le asignara la siguiente función de pertenencia como se muestra en la figura 4:

$$\mu_4(x, a_{4i}, b_4) = \begin{cases} 1 & x' \le 1500 \\ (x'-1800)/(1500-1800) & 1500 \le x' \le 1800 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

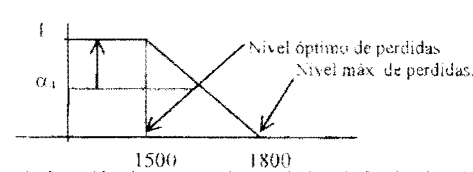

Fig. 4. Función de pertenecía asociada a la limitación de las perdidas

La restricción del riesgo está dada por: $a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 \lesseqgtr b_4 \quad \Rightarrow \quad x' \le b_4$ con valores y probabilidades asociadas dadas por:

$a_{41_1} = 6\% \to 0.8 \qquad a_{42_1} = 2\% \to 0.4 \qquad a_{43_1} = 3\% \to 0.8$

$a_{41_2} = 8\% \to 0.2 \qquad a_{42_2} = 4\% \to 0.6 \qquad a_{43_2} = 5\% \to 0.2$

En este caso se debe cumplir que: $P(A_4 x \lesseqgtr b_4) \ge \alpha_4$ y

$$P(\tilde{A}_4 x \le b_4) = \sum_{j1}^{2}\sum_{j2}^{2}\sum_{j3}^{2}\sum_{j4}^{1} \mu_4\left(x', a_{41_{j1}}, a_{42_{j2}}, a_{43_{j3}}, \tilde{b}_4\right)\Theta_{j1,j2,j3,j4}$$

El cálculo de la probabilidad implica realizar la sumatoria de todas las combinaciones posibles de $a_{41_{j1}}, a_{42_{j1}}, a_{43_{j1}}, b_4$ ponderadas por la probabilidad conjunta $\Theta_{j1,j2,j3,j4}$. Para nuestro caso tenemos 8 combinaciones posibles esto es:

$$\sum\sum\sum\sum\left(a_{41_{j1}}x_1 + a_{42_{j2}}x_2 + a_{43_{j3}}x_3 - 1800\right)\Theta_{j1,j2,j3,j4} / -300 =$$

$$(0.06x_1 + 0.02x_2 + 0.03x_3 - 1800)0.256/-300 +$$
$$(0.06x_1 + 0.02x_2 + 0.05x_3 - 1800)0.064/-300 +$$
$$(0.06x_1 + 0.04x_2 + 0.03x_3 - 1800)0.384/-300 +$$

....

$$(0.08x_1 + 0.04x_2 + 0.05x_3 - 1800)0.024/-300 =$$
$$-2.13\times10^{-4}x_1 - 1.07\times10^{-4}x_2 - 1.13\times10^{-4}x_3 + 6$$

Operando la restricción queda entonces:

$$-2.13\times10^{-4}x_1 - 1.07\times10^{-4}x_2 - 1.13\times10^{-4}x_3 + 6 \ge \alpha_4$$

C. Programa de Optimización

El programa de optimización nítido y determinista consistirá en resolver el siguiente problema:

$$\text{Max} \quad 7\times10^{-5}x_1 + 6\times10^{-5}x_2 + 8.4\times10^{-5}x_3 - 1.60$$

S.A.

1) $2.60\times10^{-4}x_1 + 2.60\times10^{-4}x_2 + 2.60\times10^{-4}x_3 - 7.28 \ge \alpha_1$

2) $6.50\times10^{-4}x_2 - 7.28 \ge \alpha_2$

3) $6.50\times10^{-4}x_1 + 6.50\times10^{-4}x_3 - 7.28 \ge \alpha_3$

4) $-2.13\times10^{-4}x_1 - 1.07\times10^{-4}x_2 - 1.13\times10^{-4}x_3 + 6.00 \ge \alpha_4$

5) $28.000 \le x_1 + x_2 + x_3 \le 30.000$

6) $11.200 \le x_2 \le 12.000$

7) $11.200 \le x_1 + x_3 \le 12.000$

8) $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Finalmente queda por definir los valores α_h para cada una de las restricciones y que nos mide el grado de importancia que le damos a la h-restricción. Para nuestro caso: Recursos de Capital $\alpha_1 = 0.80$, Crédito al sector comercial-agricola $\alpha_2 = 0.20$, Créditos personal-vehículo $\alpha_3 = 0.20$, Limitación de perdidas $\alpha_4 = 0.70$. Estamos asignando mayor importancia a las restricciones de capital y riesgo por ser variables críticas.

Las restricciones 5,6,7 nos pueden generar un problema infactible. Si este es el caso, debe plantearse el problema sin estas restricciones y comparar la solución añadiendo las restricciones quedándonos finalmente con la que más nos satisfaga. La solución sin las restricciones 5,6,7 es infactible pues asigna más capital del que se tiene. La mejor solución se encuentra cuando añadimos la restricción 5. En este caso el valor de la F.O. es 0.6512 y el capital a comprometer en cada sector es: $X_1=0.0$, $X_2=11.200$, $X_3=18.800$

La utilidad neta equivalente es 1125.6 con grado de pertenencia de 0.6512.

En total se colocarán recursos por 30.000. de los cuales el 37.33% (11200) se colocarán en el sector Agrícola-Comercial y el 62.67% para créditos personales y automóvil.

La cartera perdida esperada ascenderá a 997.6 que representa el 3.32% de los recursos colocados.

IV. Conclusión

La metodología plantada para solucionar un problema de programación lineal en la incertidumbre, tiene como base la aplicación del concepto de probabilidad de un conjunto difuso, otras aproximaciones a la solución de problemas pueden obtenerse considerando el principio de extensión de Zadeh.

En el artículo no se trato la situación en que los coeficientes de tanto la función objetivo como de las restricciones sean números difusos, en este caso puede utilizarse relaciones de comparación entre números difusos [9] con el fin de reducir el problema incierto a un problema nítido.

Referencias

[1] F. Hillier, M. Hillier, G. Lieberman. "Métodos Cuantitativos para Administración". McGraw-Hill, 2002, pp. 21-237.

[2] M. Bazzara. J. Jarvis. Programación Lineal y Flujo de Redes. Limusa. México 1981.

[3] H.J. Zimmermann. *Description and optimization of fuzzy systems.* Int.Journal Gen. Syst. 2 p.p. 209-215, 1976.

[4] M.K. Luhandjula. *Linear Programming under Randomness and Fuzziness.* Fuzzy Set and Systems 10 (1983) 45-55.

[5] A. Charnes, W. Cooper. Chance constrained programming. Many. Sci. 6 (1959) 73-79

[6] S. Vadja. Probabilistic programming. Academic Press, New York 1972

[7] L.A. Zadeh. *Probability Measures of Fuzzy events.* J. Math. Anal. Appl. 23 (1968) 421-427.

[8] M. S. Alfredo. Notas de Clase: Programación Matemática Multiobjetivo difusa.

[9] S.J. Chen, C.L.Hwang. Fuzzy Multiple Attribute Decision Making. Springer-Verlang. Berlin 1992