UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MANIZALES

APROPIACIÓN E INTERPRETACIÓN DE LA LETRA Y EL SIGNO IGUAL EN LA TRANSICIÓN ARITMÉTICO ALGEBRAICA

Trabajo presentado como requisito parcial para optar por el título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Autor: Didier Andrés Montoya Guzmán

Tutor: Msc. Jaider Albeiro Figueroa Flórez

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MANIZALES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
MANIZALES, COLOMBIA
2019

APPROPRIATION AND INTERPRETATION OF THE LETTER AND EQUAL SIGN IN THE ARITHMETIC ALGEBRAIC TRANSITION

Work presented as a partial requirement to opt for the master degree in Teaching of Exact and Natural Sciences

Author: Didier Andrés Montoya Guzmán

Advisor: Msc. Jaider Albeiro Figueroa Flórez

NATIONAL UNIVERSITY OF COLOMBIA
MANIZALES
FACULTY OF EXACT AND NATURAL SCIENCES
MASTER IN TEACHING OF EXACT AND NATURAL SCIENCES
MANIZALES, COLOMBIA
2019

Agradecimientos

A Dios, quien es mi principal patrocinador.

A mis padres, Arcesio (q.e.p.d) y Adiela por su indeclinable propósito de apoyarme, por ser mí guía y ejemplo.

A mi familia y amigos por su paciencia y compresión.

Al asesor del presente trabajo, Magíster Jaider Albeiro Figueroa Flórez por su respaldo y colaboración para culminar esta tarea.

A la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales y a los docentes de Maestría de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales por sus aportes durante mi proceso formativo.

A los directivos del Colegio Nuestra Señora del Rosario del municipio de Manzanares por permitir que hiciera uso del tiempo requerido para llevar a cabo mi formación; así como por facilitar los espacios académicos y físicos para ejecutar esta propuesta pedagógica.

A los alumnos del grado noveno del Colegio Nuestra Señora del Rosario del municipio de Manzanares por la disposición y activa participación en este proyecto.

Resumen

Se presenta una propuesta didáctica en el área de matemáticas, que busca contribuir al uso adecuado de la letra y el signo igual en la solución de problemas relacionados con la variación y el uso de sistemas algebraicos. El trabajo se enmarca en el paradigma cualitativo y es de tipo descriptivo, dentro de los instrumentos metodológicos implementados se destaca; una fase diagnóstica, que busca indagar los problemas o dificultades puntuales presentada por los estudiantes a la hora de usar en contexto el signo igual y la letra; una fase de proposición y aplicación, que implica el diseño de actividades de aprendizaje basado en la teoría base orientadora de la acción (BOA) y luego su aplicación en el intento de fortalecer ciertas interpretaciones y usos adecuados de la letra y el signo igual; y una última fase, que involucra la aplicación de una prueba final que busca indagar los avances de los estudiantes en los procesos que con mayor dificultad se presentaron en la fase inicial. Dentro de los resultados obtenidos, destacamos el uso comprensivo del signo igual como aproximación, proposición y equivalencia a la hora de resolver problemas en el contexto de las ecuaciones numéricas; progresos en la implementación y comprensión de la letra como número generalizado y variable en la solución de problemas de medición y variación.

Palabras claves: Aprendizaje colaborativo, BOA, uso comprensivo, pensamiento variacional, sistemas algebraicos, transición de la aritmética al algebra.

Abstract

A didactic proposal is presented in the area of mathematics, which looks to contribute at the proper use of the letter and the equal sign in solving problems related to the variation and use of algebraic systems. This work is part of the qualitative paradigm and is descriptive, within the methodological instruments implemented stands out; a diagnostic phase in order to investigate the specific problems or the specific difficulties presented by the students when in context are using the equal sign and the letter; a propositional and applicational phase, which involves the design of learning activities based on the base oriented of action (BOA) and then its application in the attempt to strengthen some appropriate interpretations and uses of the letter and the equal sign; and the last phase, which involves the application of a final test to find out the progress of students respect to the processes that were more difficult in the initial phase. Among the obtained results, we highlight the comprehensive use of the equal sign as an approximation, proposition and equivalence when they were solving problems in the context of the numerical equations; so also there were progresses in the implementation and understanding of the letter as a generalized and variable number when they were solving measurement and variation problems.

Keywords: collaborative learning, BOA, comprehensive use, variational thinking, algebraic systems, transition from arithmetic to algebra.

Tabla de Contenido

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Introducción

Como bien se indica en el documento de Estándares Básicos de Competencias (EBC) del Ministerio de Educación Nacional (MEN) de Colombia: «Hace ya varios siglos que la contribución de las matemáticas a los fines de la educación no se pone en duda en ninguna parte del mundo» […] e incluso «desde el comienzo de la edad moderna se ha considerado esencial para el desarrollo de la ciencia y la tecnología». Así pues, dado que «el aprendizaje de las matemáticas no es una cuestión relacionada únicamente con aspectos cognitivos, sino que involucra factores de orden afectivo y social vinculados con contextos de aprendizaje particulares» es conveniente reflexionar sobre la inminente necesidad de pasar de una instrucción orientada solamente al «logro de objetivos relacionados con los contenidos del área […] hacia una enseñanza que se oriente a apoyar a los estudiantes en el aumento de competencias matemáticas, científicas, tecnológicas, lingüísticas y ciudadanas» (MEN, 2006).

Por ende y dado que la propuesta didáctica que aquí se presenta está orientada por los resultados de una prueba diagnóstica aplicada a estudiantes del grado 9° del Colegio Nuestra Señora del Rosario del municipio de Manzanares (Caldas-Colombia) los cuales, tal cual se había planteado en la hipótesis formulada conforme a la revisión bibliográfica inicial, demostraron que durante la transición aritmético-algebraica se presentan recurrentes problemas de interpretación de la letra y del signo igual; en el desarrollo de las guías y dado que después de todo algunas de las respuestas "incorrectas" corresponden a las propias "interpretaciones" que tienen los alumnos; se diseñaron actividades de aprendizaje que al ser utilizadas como herramientas de formación en el significado matemático de la letra (número generalizado o variable) y del signo igual "=" (equivalencia, proposición o acercamiento) no desconozcan el concepto que en el lenguaje ordinario representan estos términos para el colegial.

Siguiendo una metodología de enfoque de investigación cualitativa y después de examinar las teorías de enseñanza-aprendizaje más influyentes según la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (Unesco), el autor propone diseñar las herramientas didácticas conforme la teoría de la actividad por acciones mentales de Nina Talizina[1], teoría en la cual se consideran diferentes momentos en el accionar cognoscitivo del estudiante; primero una etapa preliminar o pretest; segundo una fase de motivación para abordar el proceso cognitivo

[1] (1923-2018). Catedrática de psicología pedagógica de la Universidad Estatal de Moscú-Rusia; quien promovió la teoría de la actividad aplicada a la enseñanza principalmente en Rusia, Cuba, México, Colombia y Brasil.

dirigido por el docente con el tipo de la base orientadora de la acción (BOA) seleccionada; y tercero la realización un trabajo grupal en la que se socializa el conocimiento. Ciertamente, en virtud de lo observado durante la ejecución y los resultados escritos de una prueba posterior a la implementación de las actividades propuestas, se concluyó que fue posible no sólo fortalecer el lenguaje simbólico de los estudiantes, sino que además fue posible lograr el desarrollo de conceptos cuya «enseñanza de manera directa por parte de los educadores resulta: "imposible y estéril"» (Vygotsky, 1934).

Por último, una vez ejecutadas las actividades de aprendizaje, el autor considera que las mismas pueden adaptarse en otras instituciones del departamento y del país; no sólo porque los contextos culturales básicamente son semejantes, sino debido a que los más recientes resultados publicados por el ICFES de la evaluación efectuada a estudiantes del grado 9° de educación básica secundaria (ICFES, 2016) revelan que el Colegio Nuestra Señora del Rosario del municipio de Manzanares en el área de matemáticas obtuvo un puntaje similar al de los establecimientos educativos de Caldas y Colombia (Figura 1).

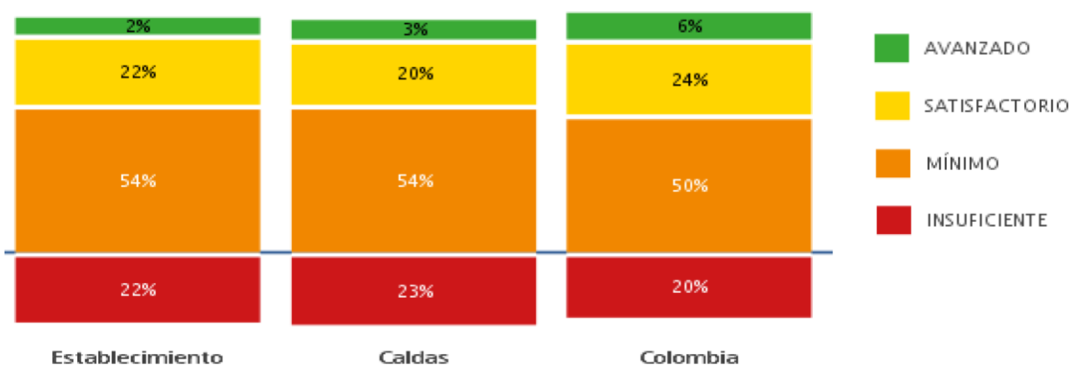


Figura 1. *Desempeño estudiantes en Matemáticas - grado noveno*

En cuanto a la estructura del documento éste se presenta en cuatro capítulos: el primero se refiere al horizonte de trabajo y está conformado por el planteamiento del problema, la descripción de la justificación, del objetivo general y los objetivos específicos. En el segundo capítulo se reseña el marco referencial del proyecto, compuesto por un marco de antecedentes, un marco teórico y otro conceptual. En el tercer capítulo se describe la metodología empleada en el diseño de las actividades de aprendizaje y en el análisis de pruebas. Finalmente, en el cuarto capítulo se describen los resultados de la prueba diagnóstica y de la implementación de las herramientas pedagógicas, lo cual permite obtener conclusiones y efectuar las respectivas recomendaciones que apuntan a mejorar la propuesta didáctica.

Capítulo I. Horizonte del trabajo

El autor del presente trabajo de grado es docente de álgebra en el Colegio Nuestra Señora del Rosario del municipio de Manzanares del departamento de Caldas (Colombia); por esta razón, la propuesta didáctica se concibió para ser ejecutada en éste establecimiento educativo que para el año 2019 cuenta con una población estudiantil de treinta (30) alumnos en el grado noveno (9°), con edades que oscilan entre los 14 años y los 16 años; 21 de sexo femenino y 9 de sexo masculino.

1.1. Planteamiento del Problema

Antes que nada se debe considerar que los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) presentados en Colombia por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) trazan elementos con los cuales construir rutas de enseñanza de conocimientos y habilidades que junto con los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y articulados al mismo tiempo con los Proyectos Educativos Institucionales (PEI) han de ser aprendidos por los estudiantes en cada uno de los grados de educación escolar, de modo que se alcancen los Estándares Básicos de Competencias (EBC) (MEN, 2006).

Para el área de matemáticas del grado 9° algunas de las evidencias de aprendizaje que plantean los DBA son: primero reconocer el uso del signo igual como relación de equivalencia de expresiones algebraicas en los números reales; segundo operar con formas simbólicas que representan números y encontrar valores desconocidos en ecuaciones numéricas; tercero representar relaciones numéricas mediante expresiones algebraicas y operar con y sobre variables; y cuarto describir diferentes usos del signo igual (equivalencia, igualdad condicionada) en las expresiones algebraicas (MEN, 2016).

Ahora bien, dado que según Godino y Font (2003) entre las dificultades que más se presentan en los estudiantes durante el aprendizaje y uso de los sistemas algebraicos se encuentra la comprensión de las letras como variables; y que así también Kieran y Filloy (1989) han comprobado que «los estudiantes que comienzan con el álgebra traen consigo las nociones que usaban en aritmética» y tienen la idea extendida que «el signo igual es un mero separador entre la secuencia de operaciones y el resultado, antes que un símbolo de equivalencia entre los lados izquierdo y derecho de una ecuación»; en el desarrollo de este trabajo, el autor realiza una propuesta didáctica que parte de la hipótesis descriptiva que es necesario generar un aprendizaje en los alumnos del grado noveno (9°) con objeto de contribuir al uso adecuado de la letra y el signo igual en la solución de problemas relacionados con la variación y el uso de sistemas algebraicos.

1.2. Justificación

Si bien la educación es un derecho, consagrado en el artículo 67 de la Constitución Política de Colombia, en las instituciones educativas públicas y especialmente en aquéllas que se encuentran en municipios que no son capital de departamento, el modelo tradicional de la pedagogía que se sigue es del tipo en el que se ejerce poder por parte del docente quien actúa como emisor del conocimiento y donde la memorización es la base de aprendizaje; así pues y considerando que este modelo conductista no responde a las actuales necesidades de la población estudiantil del país, lo que pretende el autor es proponer una herramienta didáctica fundamentada en la teoría de la actividad aplicada en la enseñanza, que eventualmente se constituya en una alternativa pedagógica a través de la cual se disminuya la brecha en cuanto a “calidad” entre los establecimientos educativos, sin importar la zona o región a la que pertenezcan.

En definitiva, se plantea a partir de la teoría de aprendizaje socio-constructivista y de la teoría de aprendizaje del siglo XXI; diseñar actividades de aprendizaje orientadas al desarrollo de procesos relacionados con los saberes conceptuales, procedimentales y actitudinales que, de manera significativa y constructiva configuren las habilidades de los estudiantes para alcanzar el nivel de competencia esperado en el área de matemáticas para el grado noveno (9°) según los lineamientos del Ministerio de Educación Nacional.

Será necesario, entonces considerar estudios como el de Kieran y Filloy, en el que se señala que para los estudiantes de educación básica primaria el uso de las letras en ecuaciones se reduce a fórmulas de la forma $A = b \times h$ y a relaciones entre unidades de medida del tipo 10 mm = 1 cm, situación que interfiere a menudo con la forma en que se llega a entender el significado de los términos variables en ecuaciones algebraicas. De hecho, en esta última ecuación no sólo se leen las letras como etiquetas, sino que además el signo igual se lee como una preposición: “hay 10 milímetros en un centímetro”. (Kieran y Filloy, 1989).

Esta dificultad de interpretación, que una vez se hizo inmersión inicial en campo, efectivamente fue evidenciada en la prueba diagnóstica preliminar; además de justificar la intervención didáctica realizada a través de las actividades de aprendizaje diseñadas, explica los resultados publicados por el ICFES de la evaluación a estudiantes del grado 9° en donde en comparación con otros establecimientos que en el año de 2016 presentaron un puntaje promedio similar; el resultado en el área de matemáticas para el Colegio Nuestra Señora del Rosario fue débil tanto en razonamiento y argumentación como en comunicación, representación y modelación. (ICFES, 2016).

Por último, además de alcanzar los objetivos de tipo académico propuestos tanto por el docente, como por la institución y el Ministerio; se espera que al implementar las actividades de aprendizaje planteadas, se logre crear en el educando aquéllos esquemas mentales que posteriormente le serán útiles en su desarrollo profesional y personal; con más razón cuando investigaciones semejantes a la publicada en 2013 por Carl Benedikt Frey y Michael A. Osborne de la Universidad de Oxford, indican que 47% de los empleos podría desaparecer en los próximos quince (15) o veinte (20) años como resultado de la automatización de procesos y en consecuencia solamente la gente con destrezas especiales; capacidades tecnológicas y habilidades de razonamiento crítico, resolución de problemas y trato interpersonal estará bien equipada para moverse hacia los nuevos trabajos que surjan en el futuro.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General.

Contribuir en el uso adecuado de la letra y el signo igual en la solución de problemas relacionados con la variación y sistemas algebraicos, a partir del diseño e implementación de actividades de aprendizaje que inciten al uso de sus diversas interpretaciones.

1.3.2. Objetivos Específicos.

- Aplicar una prueba diagnóstica que permita identificar pre-saberes relacionados con la interpretación de la letra y uso del signo igual
- Proponer e implementar actividades de aprendizaje que susciten el trabajo con la letra (en sus interpretaciones como número generalizado y variable) y el signo igual (en sus interpretaciones como equivalencia, proposición y acercamiento).
- Describir los avances y/o dificultades de los estudiantes en cuanto al uso adecuado e interpretación de la letra y el signo igual, a medida que se avanza en la aplicación de las actividades de aprendizaje.

Capítulo II. Marco referencial

2.1. Marco de Antecedentes

> Existe un gran número de investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra. Todas ellas hacen referencia a las dificultades que manifiestan los estudiantes de diferentes grados respecto a la comprensión de conceptos algebraicos, la comprensión del concepto de variable en la resolución de problemas, las diferentes interpretaciones de expresiones algebraicas, la comprensión y comunicación del lenguaje simbólico […]. Estas investigaciones han propuesto diferentes alternativas de enseñanza, recomendando como estrategias el planteamiento y la resolución de problemas, el trabajo con material concreto y el uso de las nuevas tecnologías, entre otras. (Osorio, 2016).

En consecuencia y dado que no sería viable una discusión detallada de estos temas y tampoco es el objeto del proyecto el realizar una monografía al respecto; partiendo desde un panorama general hacía uno específico, se ha decidido referenciar los objetivos, metodologías y resultados de algunos trabajos de investigación tanto en el ámbito internacional, nacional, como local; que respaldan el trabajo realizado; para así luego construir el marco teórico y el marco conceptual del proyecto didáctico propuesto.

2.1.1. Modelos conceptuales de profesores de educación básica sobre las matemáticas y su enseñanza.

Autor: Hilda María Muñoz Hernández. (2013).

Objetivo: Reconocer los componentes de los modelos conceptuales que poseen los profesores de educación básica acerca de las matemáticas y su enseñanza.

Ubicación geográfica: Pensilvania (Caldas), Colombia

Metodología: La investigación se desarrolla desde los procesos didácticos de la asignatura de matemáticas relacionado con la formación de los docentes y a partir de esto se identifica modelos conceptuales y se aportan reflexiones referentes a dicha formación en los procesos de enseñanza. Para la construcción y puesta en marcha del proyecto se empleó un enfoque cualitativo-descriptivo con un alcance interpretativo, y para ello se usaron diversos mecanismos de recolección de información como cuestionarios y entrevistas enriquecidos con los relatos de los estudiantes; esto con objeto de inferir, predecir, analizar e interpretar las experiencias de aprendizaje de cada uno en particular.

Conclusión: Se le da relevancia al docente en el ámbito educativo del área de matemáticas. Muchos estudios se han citado respecto al pensamiento variacional, la solución de problemas, la importancia de la tecnología en el proceso y lo relacionado con el aprendizaje del estudiante, pero también es importante analizar las concepciones de los docentes en cuanto a los procesos de enseñanza y aprendizaje; más aún, teniendo en cuenta que es necesario que el formador ayude a mejorar la motivación del estudiante por medio de actividades de aprendizaje innovadoras, distintas a las tradicionales.

2.1.2. Diseño de una unidad didáctica (UD) que promueva el pensamiento métrico para los grados 6ª a 8ª de la I.E Félix Naranjo sede Tarro Pintado.

Autor: James Iván Betancourth López. (2017).

Objetivo: Desarrollar el pensamiento métrico, identificando relaciones entre distintas unidades para medir cantidades de la misma magnitud, para que los estudiantes mejoren la comprensión de situaciones problema, utilizando una unidad didáctica que cumpla con los objetivos de aprendizaje definidos por Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2016).

Ubicación geográfica: Samaná (Caldas), Colombia.

Metodología: La metodología empleada está apoyada en la teoría de la actividad por acciones mentales de Nina Talizina, quien considera diferentes momentos en el accionar cognoscitivo del estudiante yendo de una etapa preliminar o pretest para determinar su estado inicial, pasando por una de motivación o preparación anímica para abordar el trabajo cognitivo dirigido por el docente con la base orientadora de la acción (BOA), y llegando a desarrollar unas actividades grupales que permitan socializar el conocimiento, lo cual contribuye a formar la base conceptual científica por la que se debe responder de manera individual.

Conclusión: El trabajo realizado contribuyó con el cumplimiento de los objetivos de aprendizaje, toda vez que se pudo desarrollar el pensamiento métrico (longitud, área, volumen, capacidad, masa, tiempo) utilizando una metodología que se apoyó en materiales y necesidades acordes al entorno del estudiante.

2.1.3. El paso de la aritmética al álgebra.

Autor: Macedonio Osorio Osorio. (2016).

Objetivo: Diseñar una estrategia didáctica para que los estudiantes de grado octavo de la I.E. Ana Elisa Cuenca Lara muestren un mejor desempeño en la interpretación, modelación y manejo de las expresiones algebraicas

Ubicación geográfica: Yaguará (Huila), Colombia.

Metodología: El trabajo incorpora un diseño cualitativo, debido a que establece procesos asociados al pensamiento variacional y sistemas algebraicos: interpretación, modelación y uso de expresiones algebraicas. Las pruebas se llevan a cabo con dos (2) grupos de estudiantes: uno que interactúa con una propuesta didáctica elaborada por el investigador (grupo experimental de 34 estudiantes), y el otro grupo el cual no tiene asignada ninguna condición experimental (grupo control de 28 estudiantes), extraídos de la población de los grados octavos de la Institución Educativa Ana Elisa Cuenca Lara, cuyas edades oscilan entre los trece y los quince años.

Conclusión: Es necesario que los docentes, además de poseer un buen dominio de los temas, desarrollen un conocimiento epistemológico o didáctico, pues al implementar estrategias tradicionales, estas no arrojan buenos indicadores de respuesta; sin embargo, las estrategias de partir de los conocimientos previos (preconceptos), contextualizar los temas, revisar aplicaciones reales de la problemática y el uso de las tecnologías de la información y comunicación (TICs), entre otros, producen resultados positivos en los aprendizajes.

2.1.4. Desarrollando el pensamiento algebraico en alumnos de octavo grado del CIIE a través de la resolución de problemas.

Autor: Manuel Antonio Cardona Márquez. (2007).

Objetivo: Explorar las habilidades de pensamiento algebraico que desarrollan los alumnos de octavo grado de educación básica del CIIE a través de la resolución de problemas.

Ubicación geográfica: Tegucigalpa, Honduras.

Metodología: A través de experiencias de aula, la etapa de ejecución se realizó en la clase de matemáticas del grado 8°, dividido en siete equipos, a quienes en guías se les presentaron uno o más problemas cuya lectura y comprensión se realizó al interior de cada equipo, para luego proceder a su solución en un ambiente de discusión y de reflexión (con las demás etapas de la estrategia que propone el matemático George Polya para resolver un problema y que se describen en el Marco Teórico del presente trabajo). En general, el papel del profesor consistió en controlar a los equipos para que el paso a cada etapa superior se realizara solamente cuando la etapa previa se hubiera logrado satisfactoriamente.

Conclusiones: Después de explorar los avances, logros y dificultades en el proceso de la construcción del conocimiento y desarrollo de habilidades matemáticas, se evidenció que los alumnos lograron:

- Traducir expresiones verbales al lenguaje algebraico;
- Expresar relaciones numéricas usando el lenguaje algebraico;
- Reconocer, describir y generalizar patrones numéricos;
- Proponer y manejar técnicas adecuadas para simplificar términos semejantes y multiplicar monomios y
- Construir sucesiones a partir de una regla dada.

En cuanto a la solución de problemas se evidenció que fueron los debates grupales, los que consolidaron la forma de pensar de los alumnos y que la estrategia de resolución de problemas de Polya resultó ser adecuada para desarrollar habilidades en los estudiantes, acordes a cada Guía de Trabajo; «pues se abordó el aprendizaje del código algebraico, no a partir de un conocimiento previo de reglas, sino a través de su uso. Los conceptos algebraicos se desarrollaron por necesidad y no por un fin en sí mismo».

2.1.5. Didáctica del Pensamiento Variacional y los Sistemas Algebraicos en Instituciones Indígenas del Resguardo Escopetera y Pirza, Riosucio – Caldas.

Autor: Inés Lucía Guarumo Ladino. (2018).

Objetivo: Fortalecer procesos de pensamientos asociados a la variación y los sistemas algebraicos, en estudiantes de la Institución Educativa Florencia del resguardo Indígena Escopetera y Pirza, a partir del planteamiento y solución de problemas en contextos significativos.

Ubicación geográfica: Riosucio (Caldas), Colombia.

Metodología: Aplicando el modelo pedagógico del pueblo Embera de Caldas, se realiza un trabajo de tipo cualitativo – descriptivo, facilitando evidenciar los avances y dificultades en los procesos matemáticos, especialmente del álgebra y sus variaciones. También es descriptivo porque, a través, de la observación y otras fuentes de información se puede describir los avances de los estudiantes en ciertos procesos asociados al pensamiento variacional y los sistemas algebraicos.

Conclusión: La estrategia de plantear y solucionar problemas en contextos no matemáticos, aportó significativamente a la hora de poner a prueba ciertos procesos de pensamiento. Se pudo percibir avances y fortalezas en los procesos de: identificación y reconocimiento de la variación en diferentes contextos, la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos de tipo analítico, y la relación del pensamiento variacional con otros tipos de pensamientos.

2.1.6. Sobre la interpretación y uso de la letra como número generalizado en tareas y actividades sobre generalización de patrones: reporte de una experiencia con estudiantes de grado octavo (13 – 15 años).

Autores: John Edward Forigua Parra y Diego Alejandro Velandia Silva. (2015).

Objetivo: Describir y analizar el proceso de desarrollo de pensamiento en estudiantes de grado octavo al resolver tareas sobre generalización de patrones que exijan la interpretación y uso de la letra como número generalizado.

Ubicación geográfica: Bogotá, Colombia.

Metodología: Este estudio, desarrollado a través de una serie de seis fases, se apoya en el método de Vigotsky, el cual establece que el pensamiento se puede desarrollar, y que cuando se interfiere en el curso de los procesos de comportamiento, sólo puede hacerse en conformidad con las mismas leyes que rigen estos procesos en su curso natural. Esto, pensando en la intención del desarrollo del concepto de la letra como número generalizado, representa que la inclusión en cualquier proceso de un signo remodela toda la estructura de las operaciones psicológicas, así como la inclusión de una herramienta remodela toda la estructura de una operación de trabajo.

Conclusiones: El estudio muestra que recursos semióticos tales como la actividad perceptual, las manifestaciones descriptivas en las producciones escritas, las representaciones icónicas, las organizaciones tabulares y las justificaciones mediante expresiones alfa-numéricas, forman parte de las características propias del pensamiento.

El análisis de las diversas producciones de los estudiantes indicó que en una buena cantidad de casos los estudiantes capturaron el patrón y que el lenguaje simbólico es una manera para describir su estructura.

2.1.7. Análisis de concepciones del signo igual y concepto de equivalencia desarrolladas en estudiantes de educación básica primaria, grado quinto de la institución educativa San Simón sede Montealegre.

Autores: Yeison Jair Chica Cárdenas y Yulady Soto Rivera. (2015).

Objetivo: Analizar las concepciones sobre equivalencia desarrolladas en la educación básica, grado quinto de la institución educativa San Simón sede Montealegre.

Ubicación geográfica: Ibagué, Colombia.

Metodología: Realización de una investigación-acción siguiendo la definición de Latorre [2], la cual permitirá precisar no solo las falencias que poseen los educandos con respecto a la interpretación del signo igual, sino que detallará las consideraciones que permitirán intervenir dentro del proceso en aras de mejorar las practicas pedagógicas y así consolidar un verdadero pensamiento matemático dentro del aula.

Conclusiones:

- La gran mayoría de los estudiantes no comprenden de forma clara en el lenguaje matemático el significado y función del signo igual.
- Las concepciones erróneas que adquieren los estudiantes durante su educación primaria tienen una fuerte incidencia en su paso a la etapa de secundaria.
- Los docentes poseen la concepción de que la enseñanza del signo igual y el concepto de equivalencia es algo trivial.
- Se puede notar la necesidad de fomentar una enseñanza matemática que se desligue de lo procedimental para dar paso a una comprensión compleja tanto en el campo de la enseñanza como en los procesos de aprendizaje.

2.1.8. La comprensión del signo de igual en la entrada al álgebra: el diseño de tareas y la conversación en la clase de matemática.

Autores: Parodi, Sebastian; Ochoviet, Cristina y Lezama, Javier. (2017).

Objetivo: Presentar un estudio que indaga sobre los significados que le atribuyen al signo igual, en un contexto algebraico, un grupo de estudiantes de enseñanza secundaria (13-14 años).

Ubicación geográfica: Montevideo, Uruguay.

Metodología: Se diseñaron dos sesiones de trabajo con todo el grupo. Para estas sesiones se diseñaron dos tareas enfocadas en la búsqueda de similitudes y diferencias: una tarea de clasificación de tarjetas con expresiones tanto en un contexto aritmético como algebraico y una tarea que requiere comparar y contrastar dos o más objetos matemáticos, y en pedirles a los estudiantes que realicen un listado con las diferencias y similitudes que logren identificar. La metodología empleada estuvo caracterizada por una práctica de indagación, que consiste en escuchar, confrontar y cuestionar los planteamientos de los estudiantes, sin emitir juicios acerca de lo correcto o incorrecto. Se buscó exclusivamente el intercambio de ideas entre los alumnos.

[2] Latorre, Marino y del Pozo, Carlos Javier. (2013). *Estrategias y técnicas metodológicas*. Perú.

Conclusiones: La metodología permitió un trabajo desinhibido por parte de los estudiantes y los resultados pusieron de manifiesto la necesidad de atender específicamente la expresión condicional antes de introducir a los estudiantes en el trabajo con las ecuaciones, toda vez que se encontró dificultadores con la conceptualización misma del objeto ecuación (que está ligada al uso del signo igual como expresión de una equivalencia condicional). También se encontró que el uso de la palabra resultado y sus significados habituales en el contexto aritmético (resultado de una operación, resultado de un problema), representó un problema para algunos estudiantes, pues obstaculizaba la comprensión del concepto de solución de una ecuación.

2.2. Marco Teórico

La Unesco define el aprendizaje «como un proceso que reúne experiencias e influencias personales y ambientales para adquirir, enriquecer o modificar los conocimientos, habilidades, valores, actitudes, comportamientos y visiones del mundo»; siendo las teorías del aprendizaje las que desarrollan hipótesis que describen cómo se lleva a cabo este proceso. Específicamente respecto al tema del presente trabajo Kiernan y Filloy (1989) afirman que el informe presentado en 1976 por Bauersfeld y Skowronek señaló un cambio significativo de la dirección emprendida por la investigación en la educación matemática tradicional, toda vez que los autores sugirieron que en lugar de comenzar desde una teoría del aprendizaje general y neutral respecto del contenido y derivar de ella una teoría del aprendizaje matemático, se debe empezar desde procesos de aprendizaje específicos de un contenido.

Para desplegar el marco teórico de este trabajo lo primero es hacer una moderada descripción del enfoque de investigación utilizado; inmediatamente después se hace una breve referencia a las nueve (9) teorías de aprendizaje más influyentes según la Unesco (2004) para luego describir la teoría BOA sobre la que se construyen las actividades de aprendizaje. Seguidamente se realiza una mención a la didáctica de la Matemática propuesta por Brousseau, se identifican los símbolos sobre los que se recogerán los datos y posteriormente se pormenoriza en la teoría de los estadios de comprensión e interpretación de la letra y el significado del signo igual.

2.2.1. Enfoque cualitativo de la investigación.

> El enfoque cualitativo se guía por áreas o temas significativos de investigación. Sin embargo, en lugar de que la claridad sobre las preguntas de investigación e hipótesis preceda a la recolección y el análisis de los datos (como ocurre en la mayoría de los estudios cuantitativos), los estudios cualitativos pueden desarrollar preguntas e

hipótesis antes, durante o después de la recolección y el análisis de los datos […] la acción indagatoria se mueve de manera dinámica en ambos sentidos: entre los hechos y su interpretación, y resulta un proceso más bien “circular” en el que la secuencia no siempre es la misma, pues varía con cada estudio. (Baptista, 2014).

Las fases de este enfoque son: idea, planteamiento del problema, inmersión inicial en campo, concepción del diseño del estudio, definición de la muestra inicial del estudio y acceso a ésta, recolección de los datos, análisis de los datos, interpretación de resultados y elaboración de resultados; de la misma manera, algunas de sus características que pudieron evidenciarse en el trabajo que aquí se presenta, son:

- La revisión inicial de la literatura puede complementarse en cualquier etapa del estudio y apoyar desde el planteamiento del problema hasta la elaboración del reporte de resultados.
- En la investigación cualitativa a veces es necesario regresar a etapas previas.
- La inmersión inicial en el campo significa sensibilizarse con el ambiente o entorno en el cual se llevará a cabo el estudio, identificar informantes que aporten datos y guíen al investigador por el lugar, adentrarse y compenetrarse con la situación de investigación, además de verificar la factibilidad del estudio.
- En el caso del proceso cualitativo la muestra, la recolección y el análisis son fases que se realizan prácticamente de manera simultánea.
- Las indagaciones cualitativas no pretenden generalizar de manera probabilística los resultados a poblaciones más amplias ni obtener necesariamente muestras representativas; incluso, regularmente no pretenden que sus estudios lleguen a repetirse.

2.2.2. Teorías de Aprendizaje.

2.2.2.1. El conductismo.

Se originó en el año 1900 y fue la corriente dominante hasta principios del siglo XX. Como marco de referencia para la primera generación del conductismo se pueden considerar los descubrimientos relacionados con el condicionamiento clásico realizados por Iván Pavlov, los principios del refuerzo de Edwar Thorndilke, y los principios formulados por John Watson.

> Las investigaciones sobre el comportamiento animal hicieron pensar que el aprendizaje era una respuesta que se producía ante un determinado estímulo. La repetición era la garantía para aprender y siempre se podía obtener más rendimiento si se suministraban los refuerzos oportunos. (Ortiz, 2009).
>
> De esta manera, la idea básica del conductismo era que el aprendizaje consiste en un cambio de comportamiento debido a la adquisición, el refuerzo y la aplicación de las asociaciones entre los estímulos del medio ambiente y las respuestas observables del individuo. (Unesco, 2004).
>
> En la segunda generación de desarrollo del conductismo hubo un marcado progreso en la sistematización de los principios del condicionamiento y en su conversión en teorías generales.
>
> Skinner, un conductista influyente, propuso una variante del conductismo llamado “condicionamiento operante”. En su opinión, recompensar las partes correctas de la conducta estimula su recurrencia. La aplicación más conocida de la teoría de Skinner es la «enseñanza programada» mediante la cual la secuencia correcta de los comportamientos parciales a aprender se especifica mediante un elaborado análisis de tareas. (Unesco, 2004).
>
> Según los conductistas, para que los estudiantes aprendan basta con presentar la información. […], el profesor es un trasmisor de conocimientos, autoritario, rígido, controlador, no espontáneo […], mientras que el estudiante es un objeto pasivo, reproductor de conocimientos. (Ortiz, 2009).

Evidentemente la educación en Colombia históricamente ha seguido esta metodología de enseñanza-aprendizaje, no solamente por la tradición cultural de las familias, sino porque además la actual estructura curricular del país data de las épocas en que ésta fue la corriente dominante.

2.2.2.2. La psicología cognitiva.

> Entre los años 1950 y 1960, se desplaza el interés de la psicología cognitiva del aprendizaje de los animales en el laboratorio, hacia el estudio del aprendizaje humano y se propone el aprendizaje como adquisición de conocimientos. Los psicólogos sustituyeron el enfoque teórico del refuerzo de las respuestas por el enfoque de la adquisición del conocimiento. El currículo (los conocimientos que el alumno debe adquirir) pasan a ser el centro de la instrucción. (Curotto, 2006).

> En esta teoría las personas ya no son vistas como colecciones de respuestas a los estímulos externos, sino como procesadores de información a través de fenómenos mentales complejos. […] Sus métodos preferidos de instrucción son conferencias, la lectura; y, en su forma más extrema, el alumno es un receptor pasivo de conocimiento por parte del maestro. (Unesco, 2004).

2.2.2.3. El constructivismo.

El constructivismo surgió entre los años 1970 y 1980, dando lugar a la idea que los estudiantes no son receptores pasivos de información, sino que construyen activamente su conocimiento en interacción con el medio ambiente y a través de la reorganización de sus estructuras mentales, dando paso a la metáfora "construcción-conocimiento" y a un enfoque centrado en el alumno mediante el cual el profesor se convierte en una guía cognitiva del aprendizaje y no en un transmisor de conocimientos. (Unesco, 2004).

La teoría Piagetana. Piaget sostiene que, el desarrollo cognitivo parte de la puesta en marcha de conocimientos concretos, sostenidos primero en representaciones inmediatas y posteriormente en hipótesis. (Figueroa y Muñoz, 2003).

Jean Piaget señala que el proceso de desarrollo de la inteligencia se desarrolla a través de estadios que son parte de un proceso continuo, en el cual una característica del pensamiento infantil se cambia gradualmente en un tiempo determinado y se integra en formas mejores de pensamiento. Piaget distingue tres estadios de desarrollo cognitivo cualitativamente diferentes entre sí:

- El estadio sensoriomotor (0-2 años),
- El estadio de operaciones concretas (2-11/12 años) y
- El estadio de las operaciones formales (que se inicia alrededor de los 11 o 12 años y alcanza su pleno desarrollo tres años más tarde). (Cardona, 2007).

La teoría de Ausubel. Para D.P. Ausubel, el aprendizaje debe ser una actividad significativa para la persona que aprende y dicha significatividad está directamente relacionada con la existencia de interacciones entre el conocimiento nuevo y el que ya posee el alumno, por ello la recomendación Ausubeliana se basa en averiguar primero lo que el alumno ya sabe para proceder en consecuencia (Figueroa y Muñoz, 2003).

2.2.2.4. El aprendizaje social.

El Aprendizaje Social también conocido como aprendizaje vicario, observacional, imitación, modelado o aprendizaje cognitivo social, está basado en una situación social en la que al menos participan dos personas: el modelo, quien realiza una conducta determinada y el sujeto quien realiza la observación de dicha conducta. (Galvis, 2013). Desarrollada por Albert Bandura en 1977, esta teoría sugiere que las personas aprenden en un contexto social, y que el aprendizaje se facilita a través de conceptos tales como el modelado, el aprendizaje por observación y la imitación. A través de esta teoría Bandura propuso el llamado "determinismo recíproco" que sostiene que el comportamiento, medio ambiente y cualidades individuales de una persona, influyen recíprocamente unos a otros. (Unesco, 2004).

Según cita Galvis (2013), de "Aprendizaje Social Equipo 04" los siguientes cuatro elementos inciden fundamentalmente en el aprendizaje cognitivo social por parte del sujeto:

- Atención. Si se va a aprender algo, se necesita estar prestando atención. Alguna de las cosas que influye sobre la atención tiene que ver con las propiedades del modelo. Si el modelo es colorido y dramático, por ejemplo, se presta más atención. Si el modelo es atractivo o prestigioso, o parece ser particularmente competente, se presta más atención. Y si el modelo se parece más a uno mismo, se presta más atención.
- Retención. Se debe ser capaz de retener (recordar) aquello a lo que se le ha prestado atención, se guarda lo que se ha visto hacer al modelo en forma de imágenes mentales o descripciones verbales. Una vez esta información ha sido "archivada", se puede hacer resurgir la imagen o descripción de manera que se pueda reproducir con el propio comportamiento.
- Reproducción. Se deben traducir las imágenes o descripciones obtenidas en la atención al modelo y que fueron retenidas o archivadas, al comportamiento actual del sujeto.
- Motivación. Todavía no se aprende nada, a menos que el alumno esté motivado a imitar; es decir, a menos que tenga buenas razones para hacerlo. (Galvis, 2013).

2.2.2.5. El constructivismo social (o aprendizaje socioconstructivista).

A finales del siglo XX, la visión constructivista del aprendizaje cambió por el aumento de la perspectiva de la "cognición situada y aprendizaje", que hace hincapié en el importante papel del contexto y de la interacción social, mientras que el constructivismo y la psicología cognitiva observan a la cognición y el aprendizaje como procesos que ocurren dentro de la mente de forma aislada del entorno. (Unesco, 2004).

La teoría de Vigotsky. Para Vigotsky, el desarrollo de las funciones mentales superiores – la memoria, el lenguaje, la conciencia – sólo es posible a través de los sistemas semióticos como la escritura, los números y el habla. Los verdaderos instrumentos de la construcción psicológica, como son los sistemas de signos, tienen en el tratamiento del conocimiento, un papel análogo al de las herramientas técnicas en la manipulación del mundo físico. (Moreno, 2002); y es por lo que Vigotsky destacó la estrecha relación entre la actividad mental y la palabra.

Por otra parte, para Vigotsky el aprendizaje es una actividad social y no sólo un proceso de realización individual; […] puesto que aquello que el sujeto logra hacer con la ayuda de otras personas puede ser, en cierto sentido un indicativo más determinante sobre su desarrollo mental que lo que serían sus logros individuales. (Patiño, 2007). Vigotsky afirma que el individuo construye el conocimiento en la medida que participa en actividades sociales y transfiere dichas significaciones a una nueva estructura psicológica interna, es decir, su conocimiento forma parte y es producto de la actividad, el contexto y la cultura. (Dávila, 2018).

La principal contribución de Vigotsky fue la de desarrollar un enfoque general que incluyera plenamente a la educación en una teoría del desarrollo psicológico. La pedagogía humana, en todas sus formas, es la característica definitoria de su enfoque y representa el concepto central de su sistema. (Carrera, 2001).

Vigotsky también introduce el concepto de Zona de Desarrollo Próximo (ZDP), aquella en la cual una persona demanda la ayuda o el apoyo de una persona con mayor conocimiento o experiencia para resolver problemas y así aprender cómo en un futuro resolver esas situaciones de manera autónoma. (CECC, 2009). Básicamente la ZDP es la que se instala entre la zona de desarrollo real (capacidad de resolver independientemente un problema) y la zona de desarrollo potencial (lo que el sujeto puede resolver con la ayuda de otro) y es allí donde el docente debe intervenir para generar desarrollo. En esta concepción, el lenguaje es un aspecto clave en la formación del sujeto que logra operaciones mentales superiores, atención consciente, memoria voluntaria, inteligencia representacional y capacidad de interiorización. (Osorio, 2016).

2.2.2.6. El aprendizaje experiencial.

Las teorías de aprendizaje experimental se basan en las teorías sociales y constructivistas del aprendizaje, pero en este caso sitúan la experiencia como el centro del proceso de aprendizaje. Su objetivo es entender las maneras de cómo las experiencias motivan a los estudiantes y promueven su aprendizaje. Carl Rogers sugiere que el aprendizaje experimental es aquel "aprendizaje por iniciativa propia", y por el cual las personas tienen una inclinación natural; que además promueve una actitud completa de involucramiento en el proceso de aprendizaje. (Unesco, 2004).

2.2.2.7. Las inteligencias múltiples.

Howard Gardner elaboró en 1983 la teoría de las inteligencias múltiples la cual sostiene que la comprensión de la inteligencia no está dominada por una sola capacidad general. Gardner afirma que el nivel de inteligencia de cada persona se compone de numerosas y distintas "inteligencias": (1) lógico-matemática, (2) lingüística, (3) espacial, (4) musical, (5) cinético-corporal, (6) interpersonal, y (7) la intrapersonal. Más tarde se sumarían trabajos como el de D. Goleman referidos a la denominada inteligencia emocional. (Unesco, 2004).

2.2.2.8. El aprendizaje situado y comunidad de práctica.

Desarrolladas por Jean Lave y Etienne Wenger, dibujan muchas de las ideas de las teorías de aprendizaje consideradas anteriormente. Según la teoría del aprendizaje situado, es dentro de las comunidades donde el aprendizaje se produce con mayor eficacia. (Unesco, 2004).

También y gracias a su portabilidad, los dispositivos móviles pueden ofrecer magníficas oportunidades de "aprendizaje situado" (aprendizaje en el punto de contacto). Por ejemplo, las aplicaciones para móviles de sitios Web específicos pueden facilitar el aprendizaje de muchas disciplinas. (Scott, 2015).

En cuanto a las interacciones que tienen lugar dentro de una comunidad de práctica, estas tienen el potencial de fomentar el capital social y mejora el bienestar de los miembros de esta comunidad. Sergiovanni refuerza la idea de que el aprendizaje es más efectivo cuando se lleva a cabo en las comunidades. Argumenta que los resultados académicos y sociales sólo mejorarán cuando las aulas se conviertan en comunidades de aprendizaje y la enseñanza se centre en el alumno. (Unesco, 2004).

2.2.2.9. Aprendizaje o habilidades del siglo XXI.

Para satisfacer las nuevas demandas del siglo XXI, se deberá fomentar tanto el desarrollo del conocimiento de las materias básicas: matemáticas, geografía, historia, educación cívica, inglés; así como temas del siglo XXI: conciencia global, alfabetización cívica, alfabetización en salud, alfabetización ambiental, cultura ambiental, finanzas, alfabetización empresarial; habilidades de creatividad, aprendizaje e innovación, pensamiento crítico y resolución de problemas, comunicación y colaboración; habilidades de información, medios y tecnología (alfabetización en TICs); habilidades para la vida y carrera: flexibilidad y adaptabilidad, iniciativa y autodirección; y habilidades sociales e interculturales, productividad, liderazgo y responsabilidad. Un método de aprendizaje principal que apoya el aprendizaje de tales habilidades y conocimientos es el aprendizaje en grupo o proyectos temáticos, que involucra un trabajo colaborativo basado en la investigación que aborda cuestiones y preguntas del mundo real. (Unesco, 2004).

2.2.3. BOA.

Sigla de la Base Orientadora de la Acción, es el conjunto de todas aquellas actividades e indicaciones de cómo realizar el trabajo en el aula. La teoría de la actividad de Vigotsky explica el paso de la actividad externa a la actividad interna en la mente del ser humano. Galperin la aplicó de manera novedosa en el proceso de enseñanza-aprendizaje al desarrollar la metodología de la teoría de la formación por etapas de las acciones mentales. Esta metodología plantea que para lograr la asimilación de un conocimiento los estudiantes deben pasar por los momentos de la actividad, conformados por: la orientación, la ejecución y el control. (Mar, 2017).

Nina Talizina (seguidora de Galperin y éste a su vez discípulo de Vigotsky) diseñó una estrategia de la teoría de la actividad por acciones mentales, la cual se implementará en el presente trabajo. Así, esperando que con su aplicación los estudiantes realicen aprendizajes claros y significativos, se desarrollarán las etapas que se describen a continuación y que se referenciaron a partir de los textos de Betancourth (2017) y Calvo (2017):

2.2.3.1. Etapa motivacional.

Esta etapa es fundamental ya que de ella depende la apertura mental del estudiante que le permitirá continuar con las demás etapas. En ella se prepara al alumno para que se disponga a asimilar los conocimientos, haciendo una introducción al tema de manera llamativa. Cada tema se explica mediante el planteamiento de situaciones problema que se solucionarán grupalmente, utilizando para ello la información de las guías de trabajo, el tablero, equipos de cómputo, demostraciones experimentales, entre otros.

2.2.3.2. Etapa de la base orientadora de la acción (BOA).

Esta etapa constituye un momento psicológico imprescindible para la ejecución de la acción, requiriendo de manera indispensable el conocer cuáles son los conocimientos previos del estudiante, para luego diseñar los modelos de las acciones a ejecutar. En esta etapa no hay ejecución de la acción por parte del estudiante, sólo se muestra al alumno el material que tiene que asimilar y se profundiza la acción o conjunto de acciones que dan solución al problema.

Las tareas deben contar con **Grado de generalidad**, pues es ideal manejar problemas que se acerquen a las situaciones diarias, para luego crear otras similares o abordar nuevas situaciones que necesiten del empleo de los conceptos trabajados, pasando de un nivel básico de dificultad a otro mayor. También deben contar con **Grado de despliegue**, o sea, que el estudiante debe comprender la lógica de la acción y ser capaz de explicarla verbalmente, lo que garantiza que la acción sea consciente. Y finalmente, la tarea debe contar con **Grado de independencia**, es decir que se realiza con la ayuda del que enseña, hasta que llega a ser ejecutada de forma independiente. Estos tres grados son los que definen el tipo de BOA, experimentalmente en el trabajo de Talizina se descubrieron cuatro (que no serán objeto de discusión en este trabajo) pero teóricamente puede haber muchos más.

2.2.3.3. Etapa material o materializada.

A partir de la tercera etapa se inicia la ejecución de la acción en el plano material, en esta etapa es importante aclarar que la ejecución de la acción debe ser compartida por el profesor y el alumno: El estudiante realiza la acción siguiendo cada una de las indicaciones, mientras que el docente controla la ejecución de la acción de manera secuencial, e incide en la corrección o ajuste del aprendizaje que se va logrando. Es muy importante destacar que, en esta etapa, el profesor no suministra nueva información y para administrar el ejercicio se basa principalmente en la observación del trabajo que se realiza.

2.2.3.4. Etapa verbal.

A partir del momento en que el alumno domina el esquema de la acción y ha adquirido a su vez los conocimientos necesarios, existen las condiciones para pasar a la etapa de formación en el plano del lenguaje. Existe una codificación, en forma de concepto, de la acción material. En esta etapa es imprescindible propiciar entre los estudiantes el intercambio de criterios acerca de cómo se ejecutó la tarea, debe evidenciarse la argumentación de la acción: el estudiante debe haber interiorizado los conceptos necesarios para llevar a cabo la acción y debe demostrar de forma oral o escrita (también en grupo), la comprensión de tales conceptos, toda vez que deberá estar en capacidad de exponer con propiedad los pasos necesarios a seguir para la resolución de los ejercicios y problemas.

2.2.3.5. Etapa mental.

En esta etapa es posible utilizar como evaluación del aprendizaje los trabajos del curso. Para este momento el estudiante deberá estar en capacidad de realizar la acción de forma totalmente independiente, haciendo uso de los conocimientos adquiridos en las etapas anteriores.

2.2.4. Didáctica de la matemática.

Así como la didáctica etimológicamente está relacionada con la “enseñanza”, la didáctica de la matemática o educación matemática tiene por objeto de estudio la relación entre los saberes, la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos propios de la matemática. De esta manera y tomado del artículo sobre La evolución de la didáctica de la matemática (Contreras, 2012), con base en la Figura 2, se mencionarán tres teorías que sustentan el estado actual de la didáctica fundamental de la matemática.

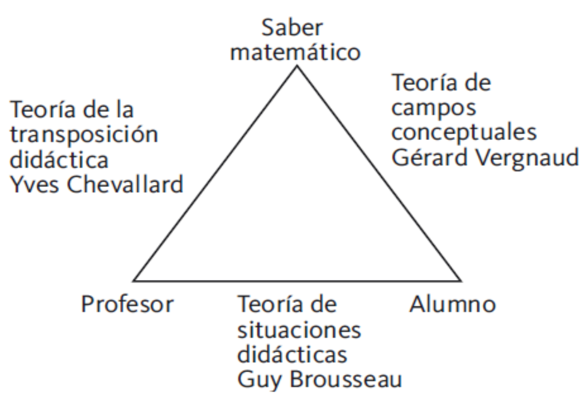


Figura 2. *Estado actual de la didáctica fundamental de la matemática*

Históricamente la didáctica de la matemática o didáctica fundamental hace su aparición en la década de los 70, cuando Guy Brousseau hace las primeras formulaciones de la teoría de Situaciones Didácticas donde se considera por primera vez la necesidad de utilizar un modelo propio de la actividad matemática. Por tanto, el objetivo fundamental de la didáctica es el de definir un “conocimiento matemático”, mediante una “situación” tal que produzca “situaciones a-didácticas” que permitan generar en el estudiante una representación del conocimiento.

Por otra parte, la incorporación del conocimiento matemático como objeto de estudio de la didáctica de la matemática, condujo a Yves Chevallard a proponer la teoría de la transposición didáctica, que se refiere a la adaptación del conocimiento matemático (saber considerado en el currículo) para transformarlo en conocimiento para ser enseñado (saber enseñar), lo que muestra la relatividad del saber a el contexto en que se presenta.

Finalmente, Gérard Vergnaud, otro de los fundadores de la didáctica de la matemática, desarrolló la Teoría de los Campos Conceptuales, esto es, grandes conjuntos de situaciones cuyo análisis y tratamiento requiere varios tipos de conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas que están conectadas unas con otras. Vergnaud, pese a haber sido discípulo de Piaget (Constructivismo), reconoce que esta teoría fue desarrollada también a partir del legado de Vigotsky, lo cual se manifiesta en la importancia atribuida a la interacción social, al lenguaje y a la simbolización en el progresivo dominio de un campo conceptual por los alumnos. Para el profesor, la tarea más difícil es la de proveer oportunidades a los estudiantes para que desarrollen sus esquemas en la ZDP. (Contreras, 2012).

2.2.5. Estrategias para resolver un problema.

Teniendo en cuenta que como se menciona en MEN (1998) «la resolución de problemas debe ser eje central del currículo de matemáticas» «pues en la medida en que los estudiantes van resolviendo problemas van ganando confianza en el uso de las matemáticas, van desarrollando una mente indagadora y perseverante, van aumentando su capacidad de comunicarse matemáticamente y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel»; en el desarrollo de la etapa de la BOA para las actividades de aprendizaje propuestas, se seguirá la formulación que hizo Polya (1965) de las cuatro etapas esenciales para la resolución de un problema:

2.2.5.1. Entender el problema.

Para la comprensión del problema el estudiante deberá hacer una lectura detallada del enunciado del problema, entenderlo y expresarlo en sus propias palabras. Además, deberá distinguir los datos, a qué se quiere llegar y si hay suficiente información. Finalmente, el alumno debería estar en capacidad de definir si hay información insólita, y si el problema es similar a algún otro que haya resuelto antes. Las preguntas propuestas por Polya (1965) para esta etapa son: ¿Cuál es el problema?; ¿Cuáles son los datos?; ¿Cuál es la condición?; ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?, ¿Es insuficiente?, ¿Redundante?, ¿Contradictoria?

2.2.5.2. Configurar un plan (analizar el problema).

Se deben aislar las partes del problema: la incógnita, los datos, las condiciones; y también se deben establecer las relaciones existentes. Posteriormente se deben conectar los puntos de contacto con los conocimientos previamente adquiridos y se tendrán que comparar diferentes estrategias para escoger las más adecuadas. Entre algunas podemos mencionar: Ensayo y error, búsqueda de un patrón, hacer listas, resolver un problema similar más simple, hacer figuras o diagramas, usar razonamiento directo o indirecto, resolver un problema equivalente, trabajar hacia atrás, etc. Algunas de las preguntas a plantearse son:

- ¿Se ha encontrado con un problema semejante?; ¿O ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?; ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil?
- ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.
- Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular?
- ¿Podría enunciar el problema en otra forma?; ¿Puede resolver una parte del problema?; ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición?; ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

2.2.5.3. Ejecutar el plan (solucionar el problema).

Para realizar esta acción, el estudiante deberá aplicar la o las estrategias escogidas hasta solucionar completamente el problema o hasta que la misma acción sugiera tomar un nuevo curso. Las preguntas sugeridas en Poyla (1965) son:

- Al ejecutar su plan de la solución, compruebe cada uno de los pasos
- ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto?; ¿Puede usted demostrarlo?

2.2.5.4. Evaluar la solución del problema.

El alumno deberá analizar la solución planteada, contemplando si es posible encontrar otra más sencilla, verificando si la respuesta hallada cumple con las exigencias planteadas en el problema y si es posible extender la solución a un caso general. Poyla (1965) sugiere preguntarse:

- ¿Puede usted verificar, el resultado?
- ¿Puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe?
- ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

2.2.6. Los símbolos.

Godino y Font (2003) distinguen dos etapas en la transición aritmético-algebraica:

- En la primera los símbolos substituyen a números, objetos, acciones sobre objetos o relaciones entre objetos, y su función es representarlos; pero ellos mismos no se consideran objetos sobre los cuales se pueden realizar acciones.
- En una segunda etapa los valores que pueden tener los símbolos son los que se quiera considerar y no están condicionados por la situación que inicialmente representaban. Ahora los símbolos se consideran objetos sobre los cuales se pueden realizar acciones.

Para el desarrollo del presente trabajo de grado y en el desarrollo del marco conceptual destacaremos los símbolos de la variable y el signo igual.

2.2.7. Estadios de comprensión e interpretación de la letra.

Godino y Font (2003) presentan seis (6) distintos estadios o niveles planteados por Küchemann para comprender e interpretar la variable:

Estadio 1: Letra evaluada

El niño asigna un valor numérico a las letras desde el principio. Si se pregunta al niño, "Si $5 + 2x = 13$, ¿cuánto vale x?", dirá que 4, sin que seguramente haga ninguna manipulación escrita, le bastará un simple cálculo mental.

El ejercicio $11 - y = 6$ se resuelve simplemente recordando que $6 + 5 = 11$.

Estadio 2: Letra ignorada

El niño ignora la presencia de la letra, o no le da ningún significado. Si se le pregunta el valor de $a + b + 2$ cuando se sabe que $a + b$ es igual a 27, el niño puede responder 29 sin pensar en ningún momento sobre la a, la b o la suma $a + b$.

Estadio 3: Letra usada como objeto

La letra es considerada como un objeto concreto. La frase matemática $3m + 7m$ y la frase "tres manzanas y siete manzanas" se consideran como equivalentes. La letra m se ve como la abreviatura del nombre de un objeto particular. Esto ocurre especialmente en problemas donde se involucran objetos concretos como lápices, mesas, etc., y es esencial distinguir entre los objetos y las cantidades de estos.

Estadio 4: Letra usada como incógnita específica

Los niños consideran las letras como un número desconocido, pero específico y pueden operar sobre él directamente. "¿Cuál es el resultado de añadir 4 a $3n$?" La respuesta esperada, $4 + 3n$, requiere considerar n como incógnita genuina, pero los niños en este estadio pueden responder $3n$ y 4, $7n$ o 7, en las que los elementos que intervienen son combinados sin tener en cuenta la presencia de la letra.

Estadio 5: Letra usada como un número generalizado

Una letra se ve como representando varios valores diferentes en lugar de uno solo. Si se pregunta a los niños que listen todos los valores de x y y cuando $x + y = 10$ podemos encontrar que ofrecen uno o varios números que cumplen la condición, pero no reconocen la necesidad de listar todos los valores.

Estadio 6: Letra usada como variable

La letra se ve como representando un rango de valores no especificados.

Si se pregunta, ¿qué es mayor $(3n)$ o $(n + 3)$? La letra n tiene que representar en cada caso un conjunto de valores no especificados y usarse como herramienta para hacer la comparación sistemática entre tales conjuntos. Si los niños prueban con un solo número, por ejemplo 4, o con tres o cuatro números particulares, decimos que están considerando la letra como número generalizado (estadio 5); pero si consideran la relación en términos de todos los números, aunque pueden usar algunos ejemplos específicos para ayudarse en la decisión, entonces decimos que están en el estadio 6 y tratan la letra como variable. (Caicedo, 2017).

2.2.8. Significado del signo igual.

Molina y Castro (2006) distinguen un total de nueve significados del signo igual:

1. Propuesta de actividad. Refiere al uso del signo en expresiones incompletas, con una cadena de números o símbolos vinculados por símbolos operacionales a la izquierda del signo de

igual y un espacio vacío a la derecha de este.

Ejemplos:16 / 3 = ; $x\ (x + 1) - 3x\ (x + 5) =$.

2. Operador (u operacional). Refiere al uso del signo como un símbolo que separa una cadena o secuencia de operaciones, que se sitúan a la izquierda, y su resultado, que se dispone a la derecha.

   Ejemplos: $4 \times 5 = 20$; $x\ (x - 2) + 3x^2 = 4x^2 - 2x$.

3. Expresión de una acción: Este es un significado bidireccional del signo. Aquí la cadena o secuencia de operaciones va indistintamente a la izquierda o a la derecha, y el resultado, en el otro miembro.

   Ejemplos: $2x = x\ (x - 2) - x^2 + 4x$; $24 = 12 + 12$; $12 + 12 = 24$.

4. Expresión de una equivalencia condicional (ecuación): Se encuentra en el contexto del álgebra cuando la equivalencia expresada por el signo de igual solo es cierta para algún o algunos valores de la o las variables, pudiendo inclusive no ser cierta para ningún valor. Ejemplo: $x^2 + 4x = 5x - 6$.

5. Expresión de una equivalencia: Refiere al uso del signo para relacionar dos representaciones diferentes de un mismo objeto matemático (Caicedo, 2017):

   - Equivalencia numérica. Indica el mismo valor numérico en las expresiones aritméticas que se encuentran en ambos miembros.

   Ejemplos: $4 + 5 = 3 + 6$; $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$

   - Equivalencia simbólica. Indica el mismo valor numérico de dos expresiones algebraicas para todos los valores de las variables.

   Ejemplos: $x^2 + 2x = x\ (x + 2)$; $x + y = y + x$.

   - Identidad estricta. Aquí las expresiones a ambos lados representan el mismo objeto matemático con el mismo representante.

   Ejemplos: $3 = 3$; $x = x$; $x + 5 = x + 5$.

   - Equivalencia por definición o por notación. Indica la equivalencia de dos expresiones numéricas o algebraicas por definición o por el significado de la notación utilizada.

   Ejemplos: 3 / 4 = 6 / 8; 100 cm = 1 m.

6. Definición de un objeto matemático: Se utiliza para definir o asignar un nombre a una función u otro objeto matemático.

   Ejemplos: $a^0 = 1$; $f\ (x) = 2x + 3$.

7. Expresión de una relación funcional o de dependencia: Refiere al uso para indicar una relación o dependencia entre variables o parámetros. Ejemplos: $y = 3x + 2$; $l = 2\pi r$.
8. Indicador de cierta conexión o correspondencia: Significado impreciso que se refiere a su uso entre objetos no matemáticos o de distinta naturaleza, como por ejemplo entre imágenes o figuras y números, o entre expresiones matemáticas y no matemáticas.
   Ejemplo: *** = 3; Pedro = 12 años.
9. Aproximación o acercamiento: Este significado corresponde al uso del signo para relacionar una expresión aritmética y una aproximación de su valor numérico.
   Ejemplo: $1 / 3 = 0{,}33$. (Caicedo, 2017).

2.3. Marco Conceptual

2.3.1. Actividad de aprendizaje.

Según cita Caicedo (2017) Lockwood [3] señala que las actividades de aprendizaje son ejercicios o supuestos prácticos que pretenden que el alumno no se limite a memorizar, sino que esté constantemente aplicando los conocimientos con la finalidad de que los convierta en algo operativo y dinámico. Mediante las actividades se puede guiar y organizar el aprendizaje, ejercitar, afianzar y consolidar lo aprendido, repasar los aspectos destacados de la unidad y, de esta manera, controlar el propio aprender; además es posible asimilar nuevas ideas integrando el conocimiento nuevo a lo ya aprendido, favorecer la síntesis interdisciplinar, aplicar los conocimientos a la realidad, generalizar y transferir lo aprendido a otras situaciones, analizar o comparar los componentes de la unidad, leer la realidad y entenderla en profundidad, buscar creativamente nuevas respuestas interpretativas y, finalmente, motivar el aprendizaje. (Caicedo, 2017).

El profesor organiza su proceso instructivo y al implementar cada una de las sesiones en torno a una serie de actividades didácticas, que, al ser implementadas, adquieren su pleno valor de actividad de aprendizaje. Con frecuencia, el término se emplea como equivalente a tarea didáctica. En otras ocasiones, la actividad se entiende como un componente más de la tarea, junto con los objetivos, los contenidos, los materiales, etc. Luego, la actividad de aprendizaje es aquella acción que realiza el alumno como parte del proceso instructivo que sigue. (Caicedo, 2017).

[3] Lockwood, Fred. (1998). The Design and Production of Self-Instructional Material. Londres: Kogan Page.

2.3.2. Aprendizaje colaborativo.

La interacción social es determinante para la apropiación de los conocimientos. Esta interacción, afirma Vigotsky es asimétrica, es decir debe darse entre personas con distinto nivel de conocimientos; ya sea entre educadores y estudiantes, o entre los mismos estudiantes. Esta idea, abre espacios para hacer de la educación una actividad colaborativa y de compromiso entre los seres humanos. (CECC, 2009).

La colaboración es una tendencia del siglo XXI que traslada el aprendizaje desde los sistemas centrados en el profesorado o en la clase magistral a otros que buscan la participación. Con el desarrollo de nuevas Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) están apareciendo también formas innovadoras de colaboración. […] El entorno de aprendizaje colaborativo incita a los estudiantes a expresar y defender sus posiciones y a generar sus propias ideas mediante la reflexión; en él, los estudiantes intercambian distintos puntos de vista, hacen preguntas, buscan aclaraciones y participan en procesos de pensamiento complejo. (Scott, 2015).

2.3.3. Herramientas tecnológicas.

Se definen como la gran variedad de programas y aplicaciones de software que se encuentran disponibles para agilizar y hacer más efectivo para los usuarios la puesta en marcha de diversos contenidos que son aplicables en cualquier contexto, es decir, actividades que van desde la vida cotidiana hasta los procesos más especializados ya sea en el ámbito personal, escolar o profesional. Estas herramientas tienen la ventaja que agilizan y perfeccionan las tareas en las cuales se emplean. (Sánchez, 2017).

2.3.4. Lenguaje simbólico.

«El lenguaje simbólico utiliza letras para denotar incógnitas y coeficientes genéricos. Este procedimiento hace rápida la formalización y resolución de muchos problemas matemáticos» (Caicedo, 2017).

2.3.5. Mediación Pedagógica.

Un concepto de suma importancia en la propuesta de Vigotsky es la mediación. Este término debe ser entendido como la intervención que realiza una persona (con mayor conocimiento y experiencia) para que otro aprenda, brindándole los mayores espacios de autonomía e independencia que sea posible. (CECC, 2009).

2.3.6. Pensamiento variacional.

Según Vasco (2003) citado por Sánchez (2017) el pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de las mismas o distintas magnitudes en los subprocesos de la realidad (Sánchez, 2017).

El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica. La organización de la variación en tablas puede usarse para iniciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento variacional por cuanto la solución de tareas que involucren procesos aritméticos inicia también la comprensión de la variable y de las fórmulas. (MEN, 1998).

2.3.7. Prueba diagnóstica.

«Una prueba diagnóstica es una herramienta importante para los educadores que quieren saber, en términos de conocimientos y habilidades, en qué nivel académico se encuentran sus estudiantes; y qué se requiere para llevarlos al nivel donde deberían estar» (Caicedo, 2017).

2.3.8. Razonamiento algebraico.

El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico. (Godino, 2003).

2.3.9. Signo Igual.

Según Godino y Font (2003) el signo "=" (igual) es un símbolo matemático que indica que lo que se encuentra a la izquierda de este signo (primer miembro de la igualdad) y lo que se encuentra a la derecha de este signo (segundo miembro de la igualdad), son dos maneras de designar al mismo objeto, o dos escrituras diferentes del mismo. Según la naturaleza de los elementos que intervienen en una igualdad numérica se obtienen diferentes tipos de igualdades:

- Si en la igualdad aparecen variables y la igualdad es verdadera para cualquier valor que tomen las variables, se dice que se trata de una identidad:

$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy.$

- Si la igualdad es verdadera sólo para ciertos valores de las variables se dice que se trata de una ecuación: $x + 3 = 7$.
- La igualdad se usa también para expresar la relación de dependencia entre dos o más variables, hablándose en este caso de una fórmula: e = $1/_{2gt^2}$. (Godino, 2003).

2.3.10. Variable.

Según Godino y Font (2003) una variable es un símbolo (habitualmente una letra) que puede ponerse en lugar de cualquier elemento de un conjunto, sea número u objeto. El principal interés del uso de la letra (variable) en matemáticas es que permite expresar relaciones generales entre los objetos de una manera eficaz. Los cuatro (4) principales usos de las variables en matemáticas son:

- Las variables como incógnitas. Cuando se usan para representar números (u otros objetos) uno de cuyos valores posibles hace verdadera una expresión. La incógnita interviene como un objeto matemático desconocido que se manipula como si fuera conocido.

Ejemplo: Cuando se proponen ejercicios del tipo: ¿Cuánto vale x para que sea cierta la igualdad $4x + 2 = 3x + 5$?

- Las variables como indeterminadas o expresión de patrones generales. Es el caso cuando la variable se usa en enunciados que son ciertos para todos los números o elementos del conjunto que se trate.

Ejemplo: Para todos los números reales se cumple que $x \times\ y = y \times x$.

- Las variables para expresar cantidades que varían conjuntamente. La relación de dependencia entre variables ocurre cuando el cambio en una variable determina el cambio en la otra.

Ejemplo: En la expresión $y = 5x + 6$, cuando cambia x también lo hace y.

- Las variables como constantes o parámetros. Es el caso de la letra $\propto$ en la fórmula de la función de proporcionalidad $y = (\propto x)$. En un primer momento se ha de considerar que la letra $\propto$ no varía y que sólo lo hacen de manera conjunta la x y la y. De esta manera se obtiene una función de proporcionalidad concreta. En este primer momento no hay diferencia entre tener $y = (\propto x)$ o $y = (2x)$. En un segundo momento se ha de considerar que $\propto$ puede variar y tomar cualquier valor, con lo que obtenemos la familia de todas las funciones de proporcionalidad. (Godino, 2003).

Capítulo III. Metodología

3.1. Tipo de aprendizaje

Se estableció que la metodología de la presente propuesta estará enmarcada dentro del paradigma socioconstructivista, empleando conceptos de la zona de desarrollo próximo, la mediación pedagógica y el aprendizaje colaborativo.

3.2. Tipo de trabajo

El ejercicio de investigación se hizo bajo el paradigma de la metodología cualitativa, dado que en ésta prevalece el interés por comprender e interpretar las acciones de los estudiantes frente a diversas situaciones y a que éste enfoque es particularmente útil cuando el fenómeno de interés es difícil de cuantificar como corresponde a temas de aprendizaje y uso del lenguaje.

3.3. Teoría de la formación por etapas de las acciones mentales

3.3.1. Etapa Motivacional.

En el sistema educativo tradicional la instrucción verbal ha demostrado ser una estrategia ineficaz para involucrar y motivar a los estudiantes, llevándolos a memorizar conceptos sin sentido; y, por otra parte, aquella enseñanza centrada únicamente en la práctica puede llevar a la construcción de conceptos erróneos. Por esta razón, para la presente propuesta didáctica se diseñan las actividades implementando un método mixto de prácticas pedagógicas en espacios de aprendizaje colaborativo que involucran activamente a los estudiantes y al docente.

Así pues, durante el desarrollo del trabajo se indicó a los estudiantes que debían formar los grupos según como fuera solicitado por la respectiva guía; también se utilizaron videos para la explicación de algunos temas. Además, se hicieron ejercicios prácticos que, si bien se ejecutaron dentro de la institución, se hicieron en entornos diferentes a los que habitualmente se desarrolla la clase de álgebra.

Finalmente, y dado que el interés en esta fase es motivar al estudiante con propósito de que la actividad propuesta no se llegue a considerar algún tipo de evaluación; dentro de la misma guía se comparte material de repaso para que los estudiantes no solamente puedan confrontar sus conocimientos durante la ejecución de la actividad, sino que también puedan contar con este material didáctico de manera permanente para la solución de los ejercicios planteados al finalizar la misma.

3.3.2. Etapa de BOA.

En el desarrollo de esta etapa, el docente inicia cada actividad con una explicación del tema y proponiendo en el tablero un ejercicio, demostrando así cómo seguir la estrategia de Polya para la solución de un problema. Posteriormente se hace lectura de la guía y se va explicando la misma; mientras que simultáneamente se realizan ejercicios demostrativos.

Cuando se dio la oportunidad, tanto por parte de los alumnos como del docente se mencionaron casos de la vida real y del entorno del municipio de Manzanares en los que fuera aplicable cada uno de los temas de estudio.

3.3.3. Etapa Material.

Durante el desarrollo de esta fase los estudiantes compartieron sus opiniones y sus hallazgos (algunos realizados a través de internet), compararon, debatieron y consolidaron acuerdos para dar respuesta a los ejercicios y a las preguntas planteadas. Sin embargo, a lo largo de cada sesión el docente acompañó a los grupos y al finalizar, ayudó a encaminar los aportes de los estudiantes hacia una conceptualización adecuada y acorde a los objetivos de aprendizaje trazados.

En esta etapa el grupo de estudiantes desarrolló las actividades de la guía de aprendizaje correspondiente y para documentar el proceso se hizo el registro fotográfico.

3.3.4. Etapa Verbal.

Para desarrollar esta fase de la metodología, las actividades realizadas se socializaron en clase, ejercitando de manera grupal el hecho de razonar y de manera individual el de comunicar las ideas mediante el uso de lenguaje matemático.

En esta etapa se planteó a los alumnos resolver un problema en equipo, donde uno de los miembros tuvo la misión explícita de observar cómo se desarrollaba el proceso de resolución y tomó apuntes sobre ello; para que luego el equipo discutiera e hiciera una reflexión sobre qué hicieron y cómo lo hicieron, y posteriormente compartieran su experiencia en el aula.

3.3.5. Etapa Mental.

Al finalizar cada una de las actividades se realizó con el grupo de escolares una coevaluación y una autoevaluación verbal en la que manifestaron su percepción respecto al conocimiento propio y de sus pares académicos, así como cuál consideraban había sido su desempeño y si tenían percepción sobre algún progreso académico.

También se les pidió manifestar su opinión sobre las actividades realizadas en grupo y el uso de espacios físicos diferentes al aula de clase en la que tradicionalmente se dicta la asignatura.

Finalmente, y posterior a la aplicación de las actividades de aprendizaje se realizó una prueba escrita para cuantificar los avances y/o dificultades que presentaron los estudiantes en cuanto al uso adecuado e interpretación de la letra y el signo igual, en comparación a la prueba de presaberes efectuada en la fase diagnóstica.

3.4. Instrumentos Metodológicos

3.4.1. Fase diagnóstica.

Las pruebas de diagnóstico son una herramienta importante para los educadores que quieren saber en qué nivel académico se encuentran sus estudiantes para así llevarlos al nivel donde deberían estar. De ahí que en el desarrollo del presente proyecto para la etapa de la BOA que será transversal a todas las actividades de aprendizaje, se diseña y aplica una prueba diagnóstica (Anexo 1) a los estudiantes del grado 9° de educación básica secundaria del Colegio Nuestra Señora del Rosario (Manzanares) a través de la cual se evaluó la interpretación de:

- La letra usada como incógnita
- La letra usada como número generalizado
- La letra usada como variable
- El signo igual como aproximación o acercamiento
- El signo igual como resultado
- El signo igual como proposición
- El signo igual como equivalencia

3.4.2. Fase de proposición

> Vygotsky subraya que las actividades llevadas a cabo bajo la tutela del adulto son las que, en primer lugar, permiten los aprendizajes del niño. Los individuos progresan por apropiación de la cultura en las interacciones sociales. El descubrimiento del entorno, la acción sobre los objetos, y, sobre todo, la apropiación de los sistemas semióticos depende de la mediación del otro. También las interacciones con los pares más competentes, lejos de frenar el desarrollo de un pensamiento autónomo, le son necesarias. (Moreno, 2002).

Es bajo esta teoría de aprendizaje que en esta fase se presentarán las actividades didácticas, con las cuales se pretende reforzar en los estudiantes del grado 9° del Colegio Nuestra Señora del Rosario del municipio de Manzanares el uso adecuado de la letra y el signo igual en el lenguaje simbólico y las representaciones algebraicas. En tales actividades se considera que tal como señalan Godino y Font (2003), las siguientes características del razonamiento algebraico son sencillas de adquirir por los niños:

1. Los patrones o regularidades que existen pueden ser reconocidos, ampliados, o generalizados. El mismo patrón se puede encontrar en muchas formas diferentes. Los patrones se encuentran en situaciones físicas, geométricas y numéricas.
2. Se puede ser más eficaz al expresar las generalizaciones de patrones y relaciones usando símbolos (entre los que sobresalen aquéllos que permiten representar variables y los que permiten construir ecuaciones e inecuaciones).
3. Las variables son símbolos que se ponen en lugar de los números; para este caso «las variables tienen significados diferentes dependiendo de si se usan como representaciones de cantidades que varían o cambian, como representaciones de valores específicos desconocidos, o formando parte de una fórmula».

En cuanto a las instalaciones físicas, en el diseño de las actividades se hará uso del aula de sistemas, como de un aula dotada con equipos audiovisuales, así como también de la cancha y el patio del colegio, pues como bien lo indica el documento de la Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana «En las instituciones educativas existen muchos espacios de aprendizaje, que la mayoría de las veces pasan inadvertidos y no son utilizados. Lugares donde existen las posibilidades de encuentros dinámicos y retadores entre los estudiantes y los objetos de estudio» (CECC, 2009).

Diseñar una experiencia de aprendizaje implica crear guías y actividades, para favorecer en el estudiante la motivación intrínseca y su actitud positiva frente al aprendizaje; en este sentido y aunque en la actualidad se insta a modificar las estructuras curriculares, en búsqueda del desarrollo intelectual que incorpore herramientas tecnológicas con miras al fortalecimiento de las actividades cognitivas (Dávila, 2018); también se consideró que el MEN (1998) sugiere que antes de pensar en la introducción de las calculadoras y de los computadores en el aula, es indispensable pensar primero en el conocimiento matemático tanto desde la disciplina misma como desde las transposiciones que éste experimente para devenir en conocimiento enseñable.

Por ello, con el ánimo de alcanzar los objetivos estipulados en el trabajo y buscando un punto donde el uso de las tecnologías no implique la sustitución del docente; se propone el desarrollo de tres (3) actividades de aprendizaje detalladas respectivamente en los Anexos 3, 4 y 5 de este trabajo, dentro de las cuales se incluyen tareas que hacen uso de tecnologías móviles, pues como menciona Scott (2015) «a juicio de la UNESCO, la portabilidad y el uso generalizado de los dispositivos móviles los convertirá en las herramientas ideales para influir en la enseñanza y en el aprendizaje, superando la utilización de computadoras personales».

Este último ítem es respaldado con la información publicada por el DANE según la cual mientras que en 2016 el 72,1% de las personas de 5 años y más manifestó tener teléfono celular (en las cabeceras la proporción fue 75,5% y en los centros poblados y rurales del 59,8%), para 2017 la proporción de las cabeceras era del 76,4% (de quienes el 75,9% afirmó poseer teléfono inteligente), y ya para 2018, el uso de celulares se mantuvo alrededor del 88%. En el informe de 2018 se indica además que el porcentaje de personas de 5 años y más que viven en las cabeceras municipales y utilizan internet en cualquier lugar aumentó entre 2017 y 2018, al pasar de 68,9% a 72,4%, mientras que el uso de computadores cayó de 53,0% a 50,9%.

3.5. Población

La Población la constituye un grupo treinta (30) estudiantes del grado 9° de educación básica secundaria del Colegio Nuestra Señora del Rosario del municipio de Manzanares, con edades que oscilan entre los 14 años y los 16 años; 21 de sexo femenino y 9 de sexo masculino.

Los participantes fueron elegidos por conveniencia, pues es el curso de álgebra en el que el autor de la presente propuesta realiza su labor como docente.

3.6. Fuentes de información

La principal fuente de información del trabajo será la producción escrita de los estudiantes durante el desarrollo de cada uno de los talleres, la observación directa, activa y reflexiva, y también, las clases de relaciones entre los participantes: la comunicación simétrica entre estudiantes y asimétrica entre estudiantes-docente.

3.7. Análisis de los resultados

En el desarrollo del trabajo de investigación que como se ha mencionado es de enfoque cualitativo, la principal fuente de información proviene de la producción verbal de los estudiantes; sin embargo y dado que se realiza una prueba diagnóstica a través de la cual se valida la información encontrada en la consulta bibliográfica que se refiere a las dificultades en la interpretación de la letra y el signo igual, común a estudiantes que realizan la transición de la aritmética al álgebra; solamente con el ánimo de poder cuantificar el alcance de los objetivos propuestos, se aplica a los estudiantes una prueba posterior que pueda ser comparada con la primera y así demostrar si hay incidencia de la propuesta didáctica planteada.

3.7.1. Análisis de la prueba diagnóstica

El taller diagnóstico se valora de modo global para identificar las fortalezas y las debilidades de los estudiantes frente a la interpretación de la letra y el signo igual. Luego, para el análisis de los resultados obtenidos (Anexo 2) se consideró la respuesta que idealmente se hubiera esperado en cada una de las preguntas formuladas y a los estudiantes que efectivamente respondieron de este modo se les asignó un punto mientras que, si su respuesta no era la esperada, pese a que su razonamiento correspondiera a una interpretación que tal vez en lenguaje matemático fuese correcta, se le asignó el valor de cero.

Luego, y para hacer un análisis por categoría se sumaron las respuestas correctas así: letra usada como incógnita: preguntas 1 a 2; letra usada como número generalizado: preguntas 3 a 4; letra usada como variable: preguntas 5 a 7; el signo igual como aproximación: preguntas 8 a 10; el signo igual como resultado: preguntas 11 a 13; el signo igual como proposición: preguntas 14 a 16; el signo igual como equivalencia: preguntas 17 a 20.

3.7.2. Análisis de la prueba posterior

La prueba posterior se aplicó por escrito y en ella se hicieron, por cada categoría, la misma cantidad de preguntas que en la prueba diagnóstica. A las respuestas esperadas se les asignó un punto y a las que no lo eran el valor de cero. Luego y de manera análoga a lo realizado en el análisis de la prueba diagnóstica, se sumaron las respuestas correctas por cada categoría; de tal manera que se interpretó la existencia o no de avance, hallando la diferencia entre los porcentajes de preguntas correctas obtenidas en cada una de las pruebas.

A partir de esta valoración se realiza el análisis correspondiente para concluir y efectuar recomendaciones que contribuyan a mejorar la propuesta académica que se presenta.

Capítulo IV. Resultados

4.1. Resultados de la prueba diagnóstica

Luego de analizar las respuestas dadas por los treinta (30) estudiantes a cada una de las preguntas de la prueba diagnóstica, y teniendo en cuenta los planteamientos citados en el marco referencial, se presentan los resultados según dos categorías:

- Dificultades asociadas a la interpretación de la letra, basadas en los estadios de comprensión e interpretación de la letra y sus usos; y

Tabla 1. *Matriz dificultades asociadas a la interpretación de la letra*

Categoría de las preguntas (según la prueba diagnóstica aplicada a los 30 alumnos)	Respuestas incorrectas	%
Usada como incógnita (Pregunta 1 y 2)	21	35.00%
Usada como número generalizado (Preguntas 3 y 4)	52	86.67%
Usada como variable (Preguntas 5, 6 y 7)	49	54.44%

- Dificultades asociadas a la interpretación del signo igual, basadas en los significados del signo igual y el tipo de igualdades.

Tabla 2. *Matriz dificultades asociadas a la interpretación del signo igual*

Categoría de las preguntas (según la prueba diagnóstica aplicada a los 30 alumnos)	Respuestas incorrectas	%
Como aproximación o acercamiento (Preguntas 8, 9 y 10)	33	36.67%
Como resultado (Preguntas 11, 12 y 13)	47	52.22%
Como proposición (Preguntas 14, 15 y 16)	48	53.33%
Como equivalencia (Preguntas 17, 18, 19 y 20)	65	54.17%

Dificultades asociadas a la interpretación de la letra.

La letra usada como incógnita.

Pregunta 1. Si $x + 5 = x + x$ ¿Cuál es el valor de x? Justifique su análisis.

En esta pregunta además de la respuesta de $x = 5$, obtenida como resultado de un análisis de la equivalencia, se encontró que algunos alumnos obtuvieron 5 como resultado de una operación "visual" en la que se eliminaron las x que suman a cada lado de la igualdad e hicieron una evaluación inmediata de la letra que quedaba a un cálculo mental. En este caso el estudiante no tiene en cuenta el significado de la letra, sólo ubica el número correspondiente para que se cumpla la igualdad.

En otras respuestas para esta pregunta, los alumnos operaron el lado derecho de la igualdad (dado que tenían términos semejantes) y luego comparaban el monomio resultante con la expresión de la izquierda, concluyendo que no se trataba de la misma expresión, esperando encontrar una equivalencia numérica. En este sentido se percibe que aún prevalece el pensamiento aritmético que supone que el resultado de una operación debe ser una expresión numérica y que, en el caso del álgebra, solamente un monomio se reconoce como una respuesta.

Pregunta 2.

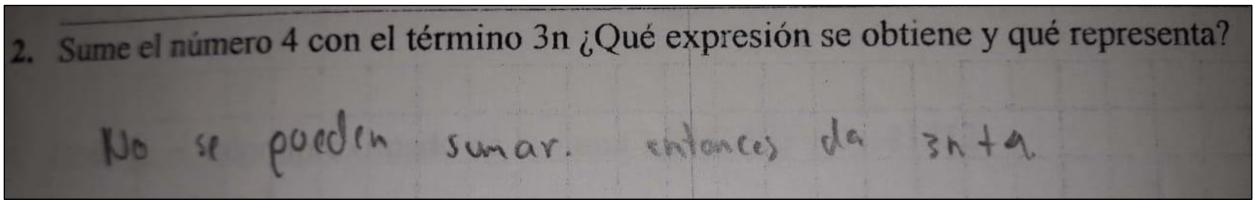


Figura 3. *Respuesta pregunta 2*

Tal como se describe en el estadio 4 de Küchemann (Godino y Font, 2003), aunque algunos niños consideraron las letras como un número desconocido, también lo consideraron específico y operaron directamente sobre él, obteniendo resultados como 7 y $7n$. Esta situación también se puede entender porque ante un igual, generalmente el alumno piensa en que se requiere un resultado numérico. El estudiante no tiene en cuenta la presencia de la letra como valor desconocido, simplemente opera todos los valores ignorando la letra como incógnita.

De otro lado y para la misma pregunta, más de la mitad de los estudiantes respondieron de manera similar a la Figura 3, encontrando que pese a saber que requieren aplicar el concepto de términos semejantes, registran el resultado como una combinación de términos en la que no es trascendental la letra, en lugar de asimilar el binomio resultante como una respuesta en sí.

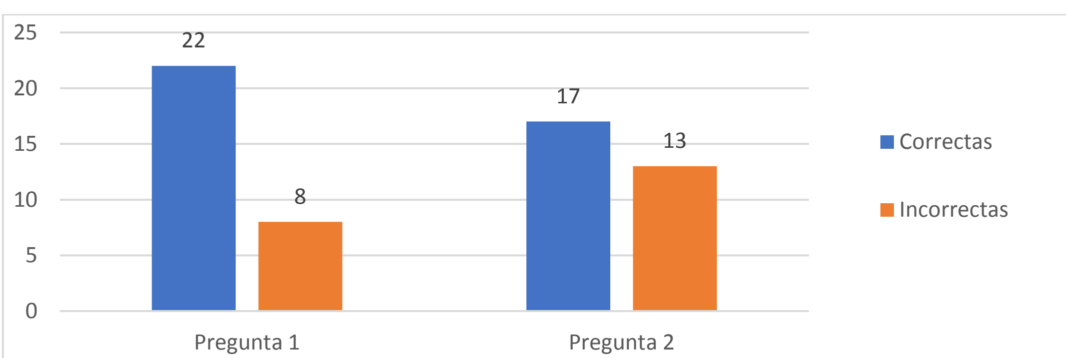


Figura 4. *Interpretación de la letra usada como incógnita*

La letra usada como número generalizado.

Pregunta 3.

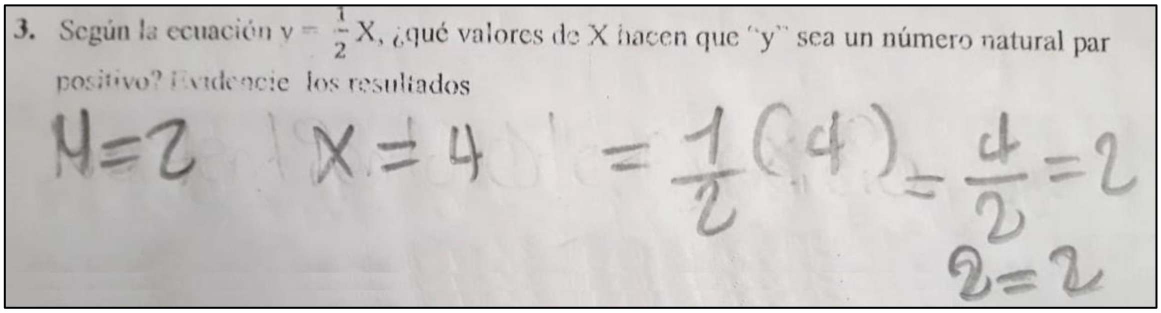


Figura 5. *Respuesta pregunta 3*

Pese a que las respuestas eras infinitas, la gran mayoría de los estudiantes no generalizaron la respuesta. Sólo un estudiante dio una respuesta correcta, pues los otros pretendieron dar un resultado único, en esta situación la letra se asume como un único valor desconocido, y no como una variable, lo que convertiría la expresión en una función proposicional donde la variable puede tomar muchos valores diferentes, obteniendo en cada caso una proposición.

En el desarrollo de las actividades, lo que se busca es aprovechar este tipo de situaciones: funciones proposicionales, para ampliar el significado del signo igual y el uso de las variables.

Aquí, también se pudo evidenciar la presencia de errores en el cálculo con fracciones en alumnos que antes no los tenían, esto se da porque muchos resuelven ecuaciones correctamente, pero sólo tienen un conocimiento instrumental que les permite resolverlas sin saber por qué se resuelven de esta manera y no de otra.

Pregunta 4. Listar todos los valores (enteros positivos) de A y B cuando $A + B = 10$

Aunque el resultado era más limitado que en la Pregunta 3, los estudiantes sólo ofrecieron algunos números que cumplieran la condición. Es decir, reconocen los resultados, pero en su mayoría no generalizan.

En esta respuesta, algunos de ellos utilizaron en contextos algebraicos el signo igual como separador de los pasos realizados en la resolución de una actividad, lo cual es un uso matemáticamente incorrecto.

Para quienes dieron la respuesta correcta, se presume que la letra como variable representa un rango de valores, toda vez que estuvieron en capacidad de describir el grado con el cual los cambios en un conjunto se determinan por los cambios en otro.

En la Figura 6 se puede evidenciar la importancia que la letra usada como número generalizado, sea uno de los temas abordados en las actividades de aprendizaje propuestas.

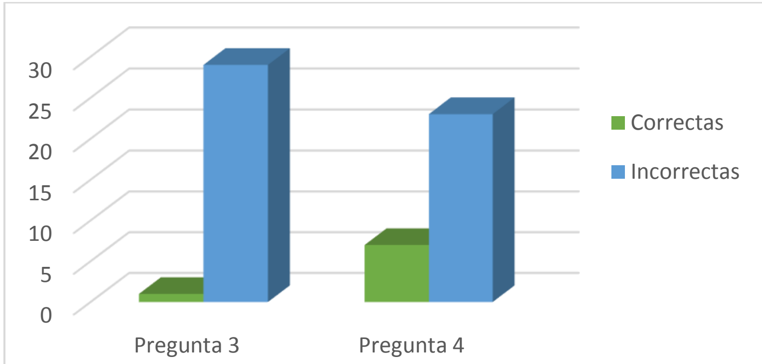


Figura 6. *Interpretación de la letra usada como número generalizado*

La letra usada como variable.

Pregunta 5. Si se tiene una caja de base cuadrada de lado x y altura h, la expresión algebraica que permite calcular su volumen es x^2h. Sí_No_ Argumente su respuesta

Algunos estudiantes ignoran la variable x y sólo pretendieron sustituir la respuesta generalizada del área de un cubo, pasando de l^3 a la respuesta x^3. Otros estudiantes utilizaron la letra (h) como un objeto específico para sustituir en la ecuación y poder hallar la altura (h) de un rectángulo, pero terminaron confundiendo los signos exponenciales de las variables.

Los estudiantes que respondieron si, expresaron la relación entre los lados de la base y la altura para hallar el volumen de la caja.

Pregunta 6.

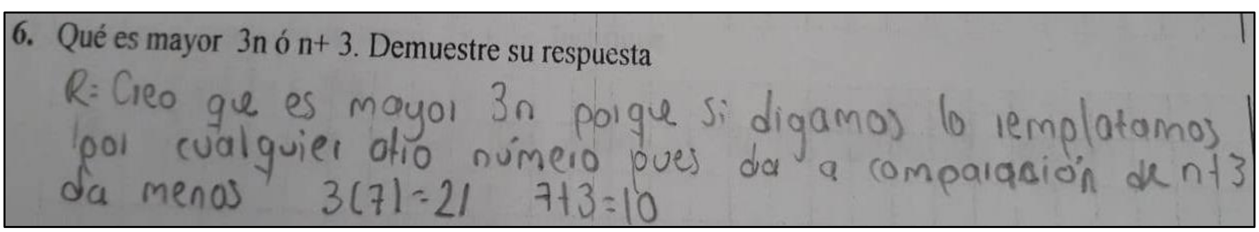


Figura 7. *Respuesta pregunta 6*

Para que se cumpla las proposiciones planteadas ($3n > n + 3$ o $n + 3 > 3n$), la letra n debe encontrarse en un conjunto de valores específico y así podrá usarse como herramienta para hacer la comparación sistemática. Cuando los estudiantes justifican su respuesta con un sólo número, decimos que están considerando la letra como número generalizado y no como una variable (Caicedo, 2017).

Pregunta 7. ¿Si en la expresión $y = 5x + 12$ la variable x cambia, el valor de "y" también cambia?

De acuerdo con las respuestas obtenidas, se asume que los estudiantes no reconocen la x como variable, y de hacerlo, no sucede lo mismo con la variable "y". En este sentido, los resultados de la prueba diagnóstica señalada y los objetivos planteados en la elaboración de las actividades de aprendizaje, concuerdan con el estudio de Samurcay (1985), citado por Kiera y Filloy (1989), quien al realizar investigaciones con estudiantes de 9 a 16 años en diferentes entornos, encontró que el concepto de variable no aparece espontáneamente en los jóvenes, quienes necesitan experimentar las variables en muchas situaciones diferentes antes de que pueda tener lugar una síntesis.

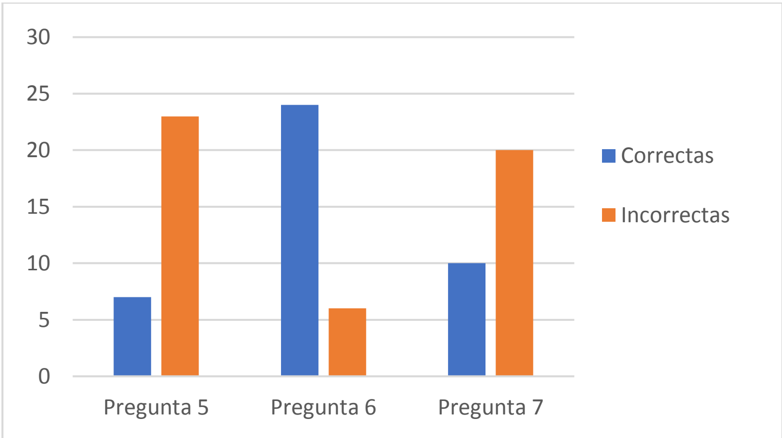


Figura 8. *Interpretación de la letra usada como variable*

Dificultades asociadas a la interpretación del signo igual.

El signo igual como acercamiento o aproximación.

Pregunta 8.

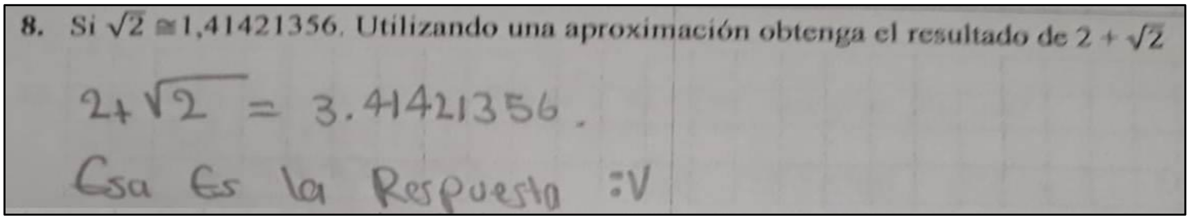


Figura 9. *Respuesta pregunta 8*

Aunque los alumnos realizan correctamente la operación aritmética de la suma, no aproximan el valor, que es tal como se solicita en el ejercicio.

Pregunta 9. Obtenga el valor aproximado de la suma 1,0366593 + 1,141852

Aunque en la pregunta el significado del signo igual solamente corresponde al uso del signo para relacionar una expresión aritmética y una aproximación de su valor numérico, ninguno de los estudiantes aproxima, de hecho, se detectaron problemas con la suma de números decimales, esto causó que los resultados obtenidos por algunos estudiantes fueran incorrectos.

Pregunta 10. El valor aproximado de la fracción 21/45 es:

Además del error aritmético que algunos estudiantes cometieron, se encontró que tampoco redondearon el resultado, evidentemente los estudiantes tienen cierta incomodidad por "modificar" un resultado numérico, pese a que es lo solicitado por el ejercicio y corresponde a la interpretación requerida.

El signo igual como resultado.

Pregunta 11.

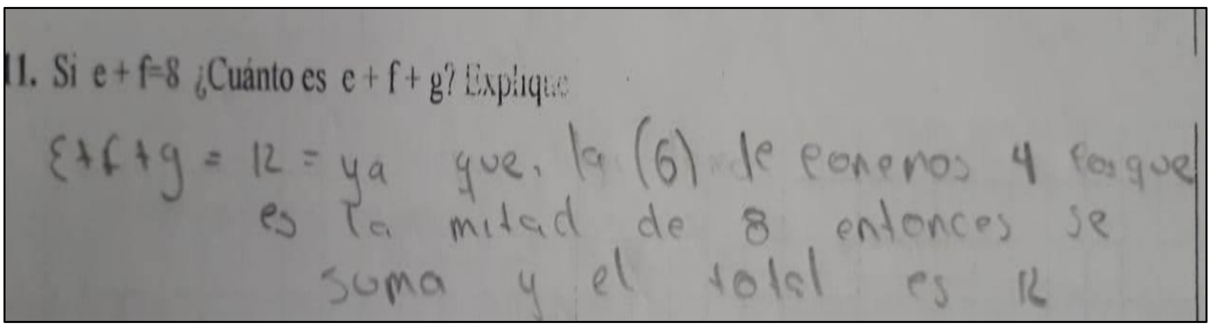


Figura 10. *Respuesta pregunta 11*

Nuevamente se evidencia que para los alumnos es difícil aceptar que el resultado sea una expresión algebraica. De hecho, en la respuesta del estudiante de la Figura 10 se utiliza el contexto de la aritmética, donde una secuencia de operaciones va de izquierda a derecha, y el resultado o la «respuesta» es un único número escrito a la derecha del signo igual.

Otros estudiantes le dieron a la letra un valor numérico en lugar de tratarla como un valor desconocido, ratificando que los estudiantes piensan que el uso principal del signo igual es separar el problema de la respuesta y que necesariamente esta debe ser un valor numérico.

En este mismo sentido, los estudiantes perciben que las letras tienen un valor especifico, pero desconocido porque e no es igual a f (aunque ambas sean reconocidas como variables con valor diferente una de la otra), ya que son representadas por diferentes letras del alfabeto.

Pregunta 12.

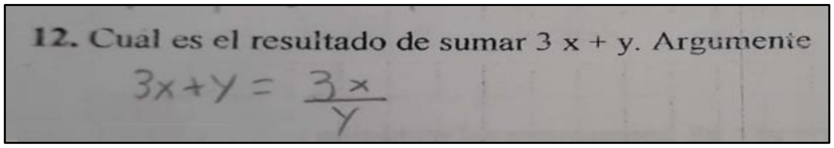


Figura 11. *Respuesta pregunta 12*

Pese a algunos resultados incorrectos como el de la Figura 11; en las respuestas a esta pregunta y en comparación con la anterior, el triple de los estudiantes contestó correctamente. Puede ser que incida el hecho que en álgebra son más los ejercicios realizados con binomios que con polinomios de mayor grado, así también puede darse por trabajar con las variables tradicionales x y y, por eso en la pregunta anterior se tuvo la tendencia a dar valor a las letras, al relacionarlas con valores numéricos según la posición de las respectivas letras en el alfabeto.

Pregunta 13.

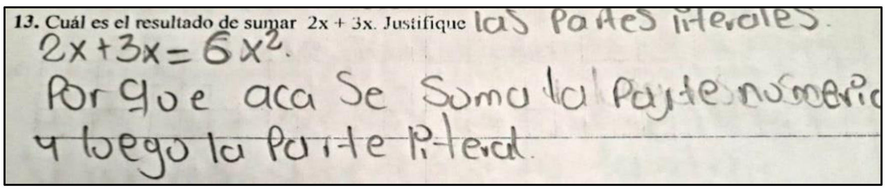


Figura 12. *Respuesta pregunta 13*

En esta respuesta el estudiante efectúa las operaciones sin tener en cuenta la presencia y el significado de la letra. Además, dado que el signo de multiplicar (×) con frecuencia se omite, y que cuando se pone puede confundirse con la letra equis (x), en este caso el estudiante operó los términos como si se tratase de un producto de monomios en el que a sólo uno se le escribió el signo positivo: $(2x) \times (+3x)$.

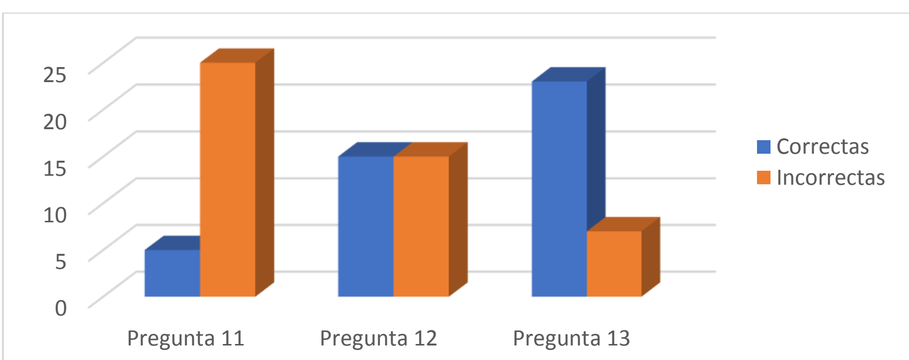
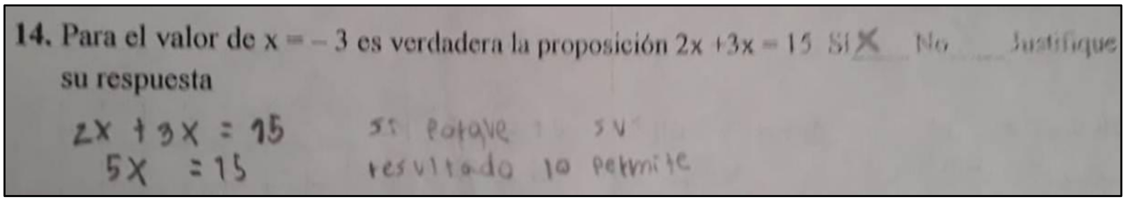


Figura 13. *Interpretación del signo igual como resultado*

El signo igual como proposición.

Pregunta 14.



14. Para el valor de $x = -3$ es verdadera la proposición $2x + 3x = 15$ Si X No ___ Justifique su respuesta

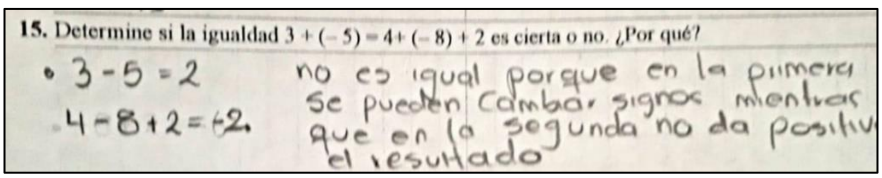
$2x + 3x = 15$
$5x = 15$

si porque su resultado lo permite

Figura 14. *Respuesta pregunta 14*

En una proposición en la que se debe indicar si es verdadera o falsa, los alumnos realizan operaciones que no se les pide y no sustituyen el valor de x. No se tiene claro el concepto que una ecuación, como cualquier otra función proposicional puede ser verdadera o falsa, según el valor que se asigne a la variable correspondiente; además que es posible asignar a la variable, no un único valor, sino múltiples. La actividad de aprendizaje deberá ayudar a los estudiantes a superar su idea que al aparecer el signo igual se debe realizar un cálculo.

Pregunta 15.



15. Determine si la igualdad $3 + (-5) = 4 + (-8) + 2$ es cierta o no. ¿Por qué?

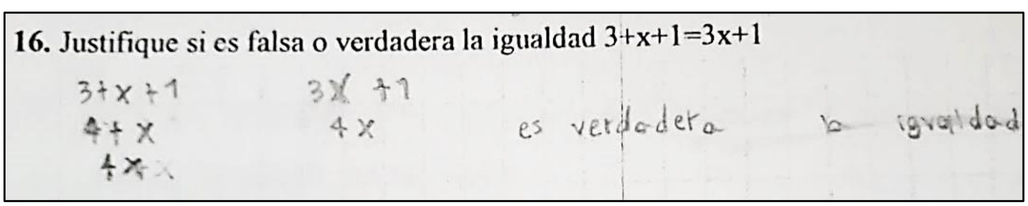
$3 - 5 = 2$
$4 - 8 + 2 = +2.$

no es igual porque en la primera se pueden cambiar signos mientras que en la segunda no da positiv el resultado

Figura 15. *Respuesta pregunta 15*

En este caso, más que problemas con la interpretación de la equivalencia se evidenció que a algunos estudiantes las operaciones aritméticas con signos contrarios les causan dificultad.

Pregunta 16.



16. Justifique si es falsa o verdadera la igualdad 3+x+1=3x+1

$3 + x + 1$
$4 + x$
$4x$

$3x + 1$
$4x$

es verdadera la igualdad

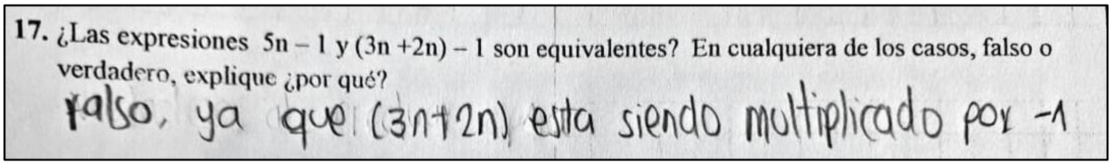
Figura 16. *Respuesta pregunta 16*

No se interpreta al signo igual como la equivalencia entre las expresiones de la derecha y la izquierda. Aquí la letra se piensa como un número particular pero desconocido y el estudiante se lanza a operar con la letra vista de esta manera, a pesar de la falta de cierre del resultado.

En este caso los estudiantes generalizaron la respuesta y ninguno exploró si había algún caso en particular (específicamente cuando $x = 1{,}5$) en el que la proposición fuera verdadera.

El signo igual como equivalencia.

Pregunta 17.

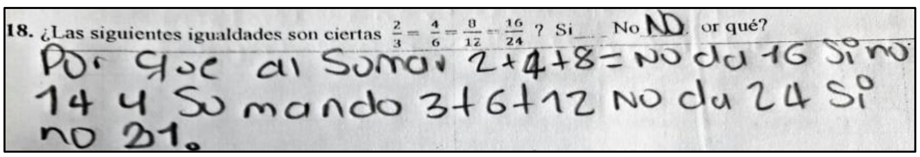

17. ¿Las expresiones $5n - 1$ y $(3n + 2n) - 1$ son equivalentes? En cualquiera de los casos, falso o verdadero, explique ¿por qué?

falso, ya que (3n+2n) esta siendo multiplicado por -1

Figura 17. *Respuesta pregunta 17*

La mayoría de los estudiantes evidenciaron en sus respuestas que tienen problemas con el concepto de equivalencia cuando se les presentan expresiones de apariencia diferente. Así también el que no contestaran, o respondieran "no sé" reforzó el hecho que presentan dificultades en las operaciones que involucren signos negativos.

Pregunta 18.


18. ¿Las siguientes igualdades son ciertas $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12} = \frac{16}{24}$? Si___ No NO ¿Por qué?

Por que al Sumar 2+4+8= no da 16 Si no 14 y Sumando 3+6+12 no da 24 Si no 21.

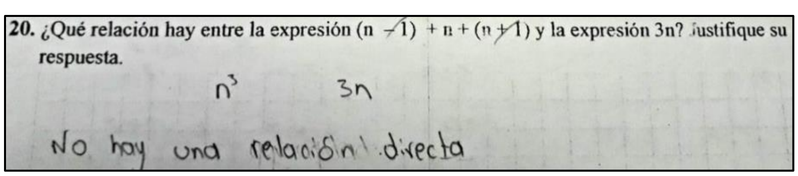
Figura 18. *Respuesta pregunta 18*

Aquí, aunque el signo igual se utiliza como equivalencia, es decir que los términos a uno o a otro lado representan la misma cantidad; su presencia se ve como la obligación de una respuesta: los jóvenes piensan que el uso principal del signo igual es separar el problema de la respuesta y por eso, como en la Figura 18 tienden a operar toda la secuencia a la izquierda del último símbolo igual de la expresión y utilizan el signo igual para apartar otras operaciones que según su concepto se realizaron para solucionar la ecuación.

Pregunta 19. Explique la similitud de las expresiones $3x + 2x + x = 6x$

Solamente para poco más del 50 % de los estudiantes, estas son expresiones algebraicas diferentes que equivalen a lo mismo; se debe enfatizar en el trabajo de polinomios y la equivalencia simbólica, aquélla que indica el mismo valor numérico de dos expresiones algebraicas para todos los valores de las variables.

Pregunta 20.


20. ¿Qué relación hay entre la expresión $(n - 1) + n + (n + 1)$ y la expresión $3n$? Justifique su respuesta.

n^3 $3n$

No hay una relación directa

Figura 19. *Respuesta pregunta 20*

Al confrontar con los estudiantes, cancelan la operación con el 1 y multiplican. Algunos de ellos por su parte, interpretan las expresiones como si fueran operaciones pendientes de realizar.

Finalmente, la tabla generada con todos los datos es:

Tabla 3. *Tabulación de resultados prueba diagnóstica*

		Número de la pregunta																				Ok
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	Olga Lucía	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	6
2	Alexandra	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	9
3	Paula	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	16
4	Karoll	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	6
5	Diana	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	10
6	Angie Lorena	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	15
7	Natalia	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	12
8	Isabela	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	8
9	Alixon	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	14
10	Yesica	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	15
11	Delmer	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	6
12	Daniel	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	6
13	Luis Felipe	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	18
14	Juan Diego	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	15
15	Katerine	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	8
16	María Paula	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	5
17	Samantha	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	8
18	Angelli	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	7
19	Yaris Andrea	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	5
20	Ana María	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	14
21	Yerson	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	4
22	Yeferson	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	8
23	Mariana	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	7
24	Alejandra S	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	9
25	Brayan	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	6
26	Fernanda	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	9
27	Mercedes	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	5
28	Tatiana	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	10
29	Verónica	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	16
30	Jorge	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	8
	Ok	22	17	1	7	7	24	10	17	18	22	5	15	23	15	13	14	11	15	16	13	

Observación: Por tratamiento de datos, se omite el nombre completo de los estudiantes.

4.2. Resultados de las actividades de aprendizaje

4.2.1. Resultados actividad de aprendizaje 1.

Teniendo en cuenta que no sólo dentro de un aula se aprende, se aprovecharon los espacios al aire libre del colegio para alcanzar un aprendizaje situado.

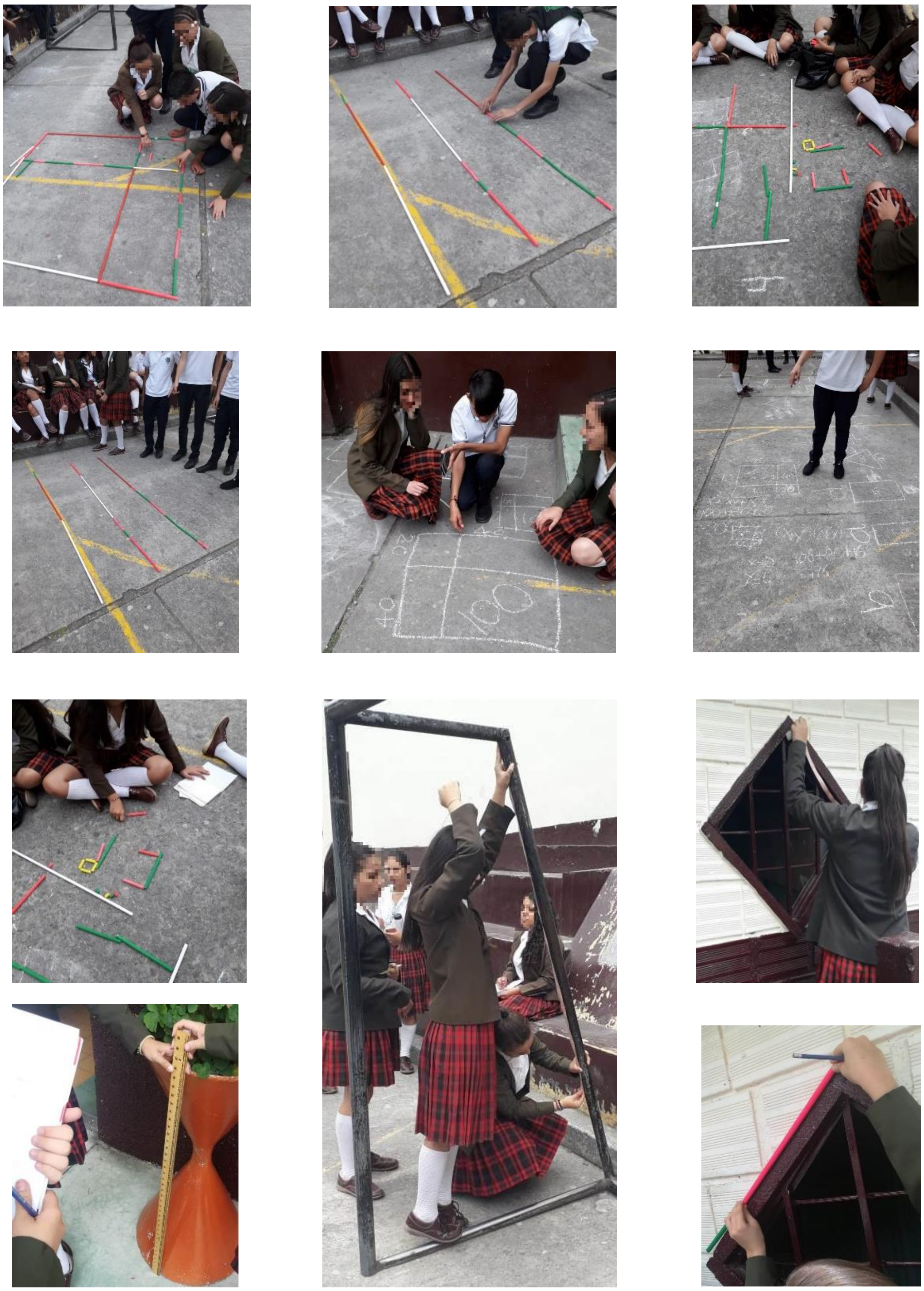
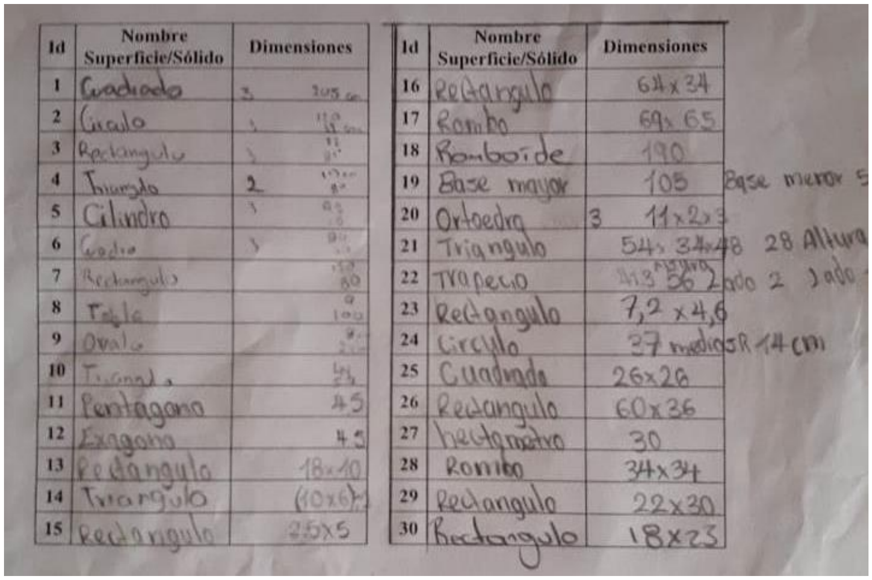
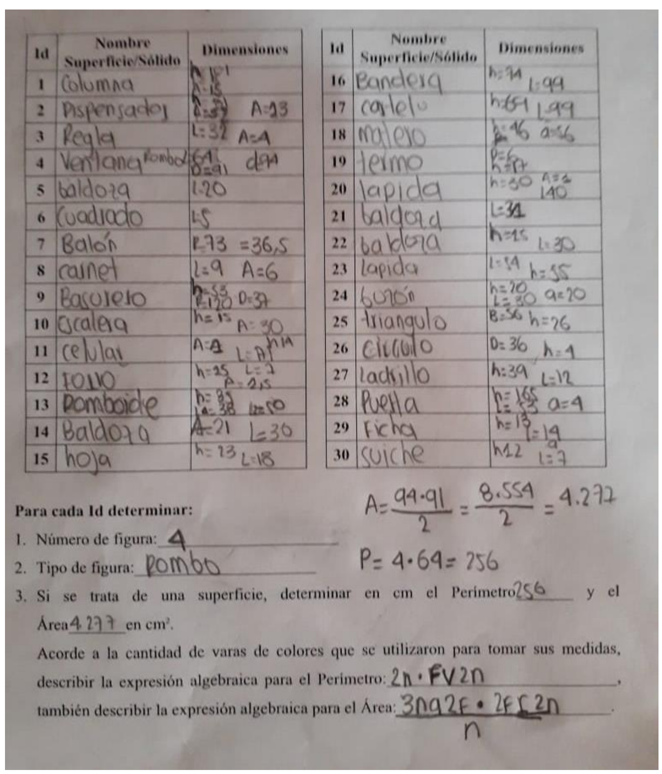


Figura 20. *Registro fotográfico ejecución actividad de aprendizaje 1*

En el desarrollo de la estrategia, se estimuló la participación de los estudiantes y se les instó a que compartieran sus opiniones, debatieran y consolidaran acuerdos para dar resolución a los problemas planteados en la actividad de aprendizaje diseñada. Para ello, el docente acompañó a los grupos, ayudando a encaminar los aportes individuales hacia una conceptualización adecuada y acorde a los objetivos de la guía.



Id	Nombre Superficie/Sólido	Dimensiones	Id	Nombre Superficie/Sólido	Dimensiones
1	Cuadrado	3 [illegible]	16	Rectangulo	64x34
2	Circulo	[illegible]	17	Rombo	69x65
3	Rectangulo	[illegible]	18	Romboide	190
4	Triangulo	2 [illegible]	19	Base mayor	105 Base menor [illegible]
5	Cilindro	[illegible]	20	Ortoedro	3 11x2x3
6	Cuadro	[illegible]	21	Triangulo	54x34x48 28 Altura
7	Rectangulo	[illegible] 80	22	Trapecio	113 56 2 lado 2 lado [illegible]
8	Tabla	[illegible] 100	23	Rectangulo	7,2 x 4,6
9	Ovalo	[illegible]	24	Circulo	37 medias R 14 cm
10	Triangulo	[illegible]	25	Cuadrado	26x26
11	Pentagono	45	26	Rectangulo	60x36
12	Exagono	45	27	hectometro	30
13	Rectangulo	18x10	28	Rombo	34x34
14	Triangulo	(10x6)/2	29	Rectangulo	22x30
15	Rectangulo	25x5	30	Rectangulo	18x23



Id	Nombre Superficie/Sólido	Dimensiones	Id	Nombre Superficie/Sólido	Dimensiones
1	Columna	h=181 A=15	16	Bandera	h=94 L=99
2	Dispensador	[illegible] A=13	17	cartelera	h=64 L=99
3	Regla	L=32 A=4	18	maletero	h=46 a=56
4	Ventana rombo	d=64 D=91 d=94	19	termo	D=6 h=[illegible]
5	baldoza	L=20	20	lapida	h=30 A=[illegible] 140
6	Cuadrado	L=5	21	baldosa	L=31
7	Balón	R=73 =36,5	22	baldosa	h=15 L=30
8	carnet	L=9 A=6	23	lapida	L=14 h=55
9	Basurero	h=53 R=120 D=37	24	borrón	h=70 L=30 a=20
10	Escalera	h=15 A=30	25	triangulo	B=36 h=26
11	celular	A=4 L=A h=14	26	circulo	D=36 h=4
12	Folio	h=25 L=2 P=2,5	27	ladrillo	h=39 L=12
13	Romboide	h=83 La=38 Lb=50	28	Puerta	h=165 L=53 a=4
14	Baldoza	A=21 L=30	29	Ficha	h=13 L=19 a
15	hoja	h=23 L=18	30	suiche	h=12 L=7

Para cada Id determinar:

$A = \frac{94 \cdot 91}{2} = \frac{8.554}{2} = 4.277$

1. Número de figura: 4
2. Tipo de figura: Rombo

$P = 4 \cdot 64 = 256$

3. Si se trata de una superficie, determinar en cm el Perímetro 256 y el Área 4.277 en cm².

   Acorde a la cantidad de varas de colores que se utilizaron para tomar sus medidas, describir la expresión algebraica para el Perímetro: 2n · FV2n,

   también describir la expresión algebraica para el Área: $\frac{3na2F \cdot 2F \cancel{F} 2n}{n}$.

Figura 21. *Registro gráfico resultados actividad práctica*

4.2.2. Resultados actividad de aprendizaje 2.

Para la realización de esta actividad fue necesario inicialmente elaborar las cartas del juego concéntrese, para ello y en grupo, los estudiantes primero tuvieron que entender y construir conceptos a través de la interacción con el docente y sus compañeros.

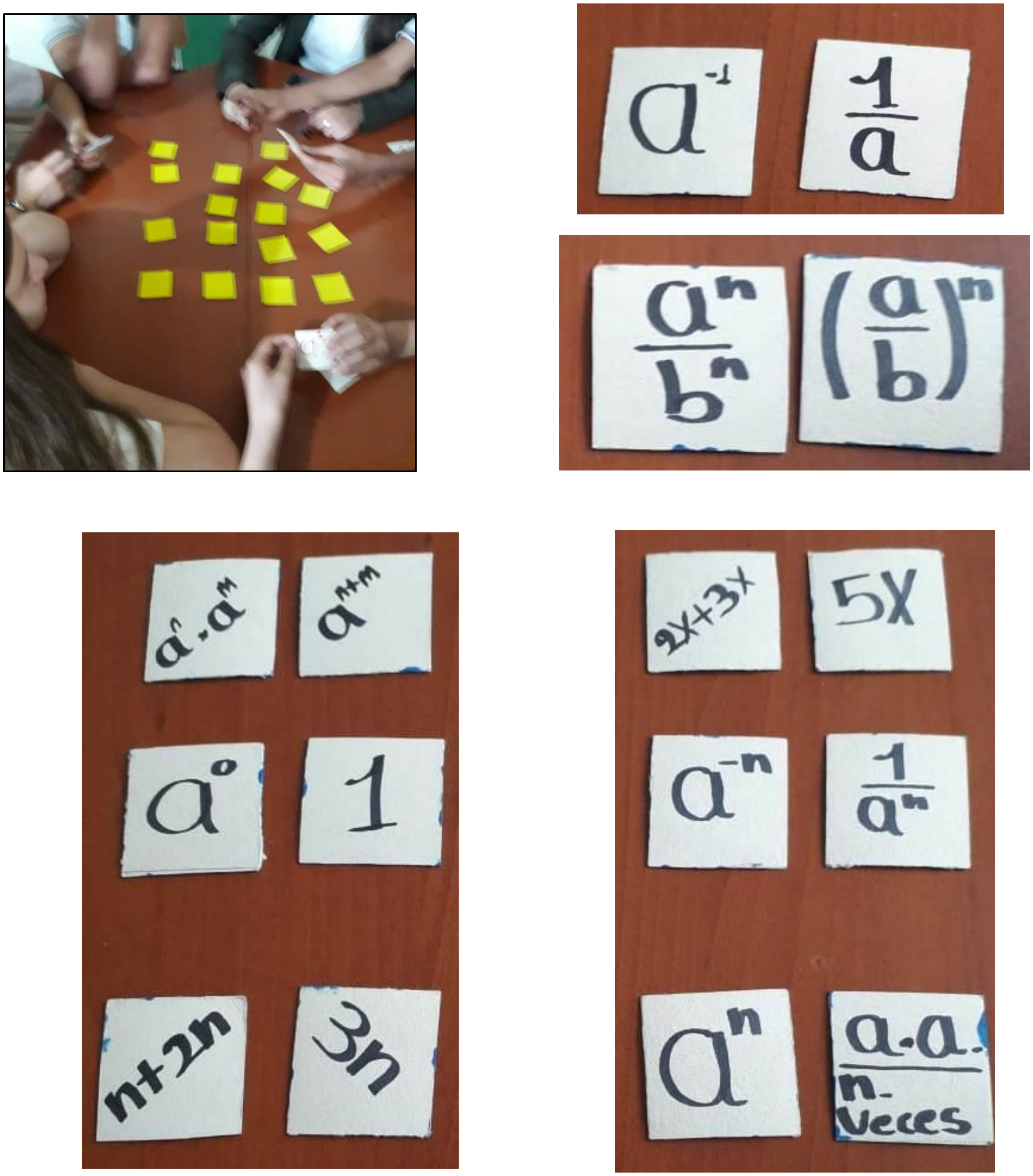


Figura 22. *Elaboración cartas del Concéntrese matemático*

A medida que la instrucción de la elaboración de las cartas se llevaba a cabo, la responsabilidad del aprendizaje se fue transfiriendo al estudiante. Gradualmente se requerían menos explicaciones y se llegó a un punto en el que los estudiantes estuvieron en capacidad de realizar la tarea por sí mismos, de esta manera cada meta lograda se convertía en el fundamento de una nueva zona de desarrollo próximo.

Figura 23. *Registro fotográfico ejecución actividad de aprendizaje 2*

Al ir avanzando en el juego, se evidenciaba que los estudiantes hacían una transición del pensamiento automático e inconsciente a un plano de pensamiento consciente e intencional.

4.2.3. Resultados actividad de aprendizaje 3.

En el desarrollo de esta actividad, cuando los estudiantes lo solicitaban o bien cuando se observaba que era necesario, se les ayudó para así pasar a un nivel más alto en las habilidades y conocimientos.

Figura 24. *Registro fotográfico ejecución actividad de aprendizaje 3*

También pudo observarse que algunos estudiantes, sin que así fuese designado por el docente, se beneficiaron con la ayuda que les brindaron los compañeros más expertos.

4.3. Resultados prueba posterior a la aplicación de las actividades de aprendizaje

Si bien dentro de la teoría de Vigotsky no se considera que la mejor manera de evaluar a los estudiantes sea mediante pruebas formales y estandarizadas, ésta es una acción sistemática y rigurosa de indagación sobre la realidad.

4.3.1. Interpretación de la letra

Con base en los seis (6) estadios o niveles planteados por Küchemann y presentados por Godino y Font (2003), se realizó la misma cantidad de preguntas e idéntica categorización de estas que en la prueba diagnóstica, para posteriormente, a partir de las respuestas correctas obtenidas, cuantificar el avance alcanzado en cada categoría evaluada.

En este ítem, de tres categorías y siete preguntas, durante la prueba diagnóstica se tuvo un 41.90 % de las respuestas correctas, mientras que, para la prueba comparativa, el 68.57 % de las preguntas fueron contestadas correctamente.

En la Tabla 4 se registran: la categoría de cada pregunta, las respuestas que se consideraron correctas en la prueba diagnóstica, las respuestas que se consideraron correctas en la prueba comparativa y en ambos casos, el porcentaje que por categoría representaban dichas respuestas correctas. Finalmente se registró como avance, la diferencia de tales porcentajes.

Tabla 4. *Progreso de la interpretación de la letra*

Categoría	RC	Prueba Diagnóstica	RC	Prueba Comparativa	Avance
Usada como incógnita (Pregunta 1 y 2)	39	65.00 %	51	85.00%	20.00 %
Usada como número generalizado (Preguntas 3 y 4)	8	13.33 %	22	36.67%	23.34 %
Usada como variable (Preguntas 5, 6 y 7)	41	45.56 %	71	78.89%	33.33 %
Total	**88**	**41.90%**	**144**	**68.57%**	**26.67%**

RC = Respuestas correctas

4.3.1.1. La letra usada como incógnita.

Gracias al refuerzo básico en álgebra, en la primera pregunta los estudiantes realizaron el despeje algebraico de la variable del problema propuesto, para así determinar su valor exacto; mientras que en la segunda pregunta y a diferencia del ejercicio de la prueba diagnóstica, sin mayor complejidad dieron como respuesta un trinomio compuesto por tres letras o variables con sus correspondientes coeficientes numéricos, sin intentar operar los mismos.

Las preguntas que no fueron respondidas correctamente básicamente fueron por errores cometidos al momento de despejar la variable y operar con signos negativos, lo cual evidentemente deberá reforzarse en actividades futuras con los estudiantes.

4.3.1.2. La letra usada como número generalizado.

Si bien hubo avance en la interpretación de la letra como un número generalizado, pasando del 13.33 % al 36.67 % de las respuestas correctas, donde el estudiante aprendió a listar todos los valores finitos para que las variables involucradas en una de las preguntas cumplieran con la condición planteada; para la pregunta que tendría por respuesta: el universo infinito del triple de los números naturales positivos, sólo tres de los estudiantes plantearon correctamente la respuesta, y el resto solamente lograron hacer una leve descripción en lenguaje natural de su percepción visual sin lograr consolidar una expresión simbólica correcta.

4.3.1.3. La letra usada como variable.

La solución planteada para dos de las tres preguntas de esta categoría, podría decirse que fue acertada para la gran mayoría de los estudiantes. Sin embargo y debido a errores durante las operaciones matemáticas, no todos llegaron a las respuestas correctas.

En cuanto a la tercera pregunta, los estudiantes dieron respuestas concretas sobre la dependencia de variables y les fue sencillo plantear los ejemplos solicitados.

En esta categoría y deliberadamente decidido por el autor del trabajo, las preguntas de la prueba comparativa se hicieron empleando las variables $e, f, g, m\ y\ n$ porque es evidente que tanto en los textos escolares como en las actividades de enseñanza se hace un uso excesivo de la letra “x, lo cual limita el carácter multifacético del concepto de variable. Este tipo de situaciones conllevan a pensar en la letra no como variable, sino como representante de un número.

4.3.2. Interpretación del signo igual

Con base en los nueve (9) significados del signo igual propuestos por Molina y Castro (2006), se realizaron trece preguntas tal cual se hizo en la prueba diagnóstica para posteriormente, y de manera análoga a lo realizado en la interpretación de la letra, cuantificar el avance obtenido en cada categoría evaluada.

En la Tabla 5 se registran: la categoría de cada pregunta, las respuestas que se consideraron correctas en la prueba diagnóstica, las respuestas que se consideraron correctas en la prueba comparativa y en ambos casos, el porcentaje que por categoría representaban dichas respuestas correctas. Finalmente se registró como avance, la diferencia de tales porcentajes.

En este ítem, de cuatro categorías, durante la prueba diagnóstica se obtuvo un 50.51 % de respuestas correctas, mientras que, para la prueba comparativa, las respuestas correctas fueron del orden del 75.90 %.

Tabla 5. *Progreso de la interpretación del signo igual*

Categoría	RC	Prueba Diagnóstica	RC	Prueba Comparativa	Avance
Como aproximación o acercamiento (Preguntas 8, 9 y 10)	57	63.33 %	59	65.56%	2.23 %
Como resultado (Preguntas 11, 12 y 13)	43	47.78 %	60	66.67%	18.89 %
Como proposición (Preguntas 14, 15 y 16)	42	46.67 %	84	93.33%	46.66 %
Como equivalencia (Preguntas 17, 18, 19 y 20)	55	45.83 %	93	77.50%	31.67 %
Total	**197**	**50.51%**	**296**	**75.90%**	**25.39%**

RC = Respuestas correctas

4.3.2.1. El signo igual como aproximación o acercamiento.

Aunque en estas tres preguntas fue sencillo que los estudiantes intentarán aproximar el resultado de la operación planteada en cada una; nuevamente el error aritmético condujo a la respuesta equivocada y por ende es la categoría en el que menor avance se evidenció (2.23 %).

4.3.2.2. El signo igual como resultado.

En esta categoría la mayoría de las respuestas fueron correctas, sin embargo y dado que más que evaluar la interpretación de la letra o las habilidades algebraicas desarrolladas, se pretendía que, al momento de escribir sus justificaciones el estudiante demostrara con su análisis la correcta interpretación del signo igual como resultado; no todas las respuestas fueron valoradas como correctas y dieron pie a que el avance fuera relativamente bajo, del 18.89 %.

4.3.2.3. El signo igual como proposición.

Esta categoría es la que evidenció un mayor avance por parte de los estudiantes al comparar las respuestas correctas de la prueba diagnóstica (46.67%) versus las correctas de la prueba comparativa (93.33 %).

Fue fácil para los estudiantes otorgarle valor de verdadera o falsa a las proposiciones planteadas en cada una de las tres preguntas, así también como al justificar las respuestas lo hicieron de manera coherente y sencilla.

4.3.2.4. El signo igual como equivalencia.

En esta categoría, las primeras dos preguntas respecto a la equivalencia o igualdad de expresiones fue sencilla de responder para los estudiantes alcanzando un alto porcentaje de respuestas correctas. Sin embargo, para las otras dos preguntas, en las que no se hacía uso específico del término “equivalencia”, “igualdad” o alguno similar, hizo que los alumnos que respondieron de manera correcta lo hicieran básicamente en la misma proporción que durante la prueba diagnóstica. Por ello, se hizo crucial incorporar ejercicios en el aula para subsanar este inconveniente más que todo de tipo lingüístico.

Conclusiones

Después de construir la base teórica de esta propuesta, ejecutar el trabajo de campo y realizar el análisis de los resultados obtenidos, surgen una serie de conclusiones que dan cuenta de los principales hallazgos y el cumplimiento de los objetivos planteados:

- En la aplicación de la prueba diagnóstica a los estudiantes del grado noveno (9°) de educación básica secundaria en el Colegio Nuestra Señora del Rosario del municipio de Manzanares, se identificaron pre-saberes de los alumnos, de tal manera que fue posible validar la hipótesis construida con base a la revisión bibliográfica inicial y en la cual se planteaba que los estudiantes en esta etapa de desarrollo presentan dificultades en la interpretación de la letra y el signo igual.
- A medida que se implementaban las actividades de aprendizaje que indujeron el trabajo con la letra (en sus interpretaciones como número generalizado y variable) y el signo igual (en sus interpretaciones como equivalencia, proposición y acercamiento); el docente identificó nuevas dificultades que se fueron presentando, para con base en estas ajustar la propuesta pedagógica que finalmente se presenta.
- En este trabajo se da cuenta de una materialización práctica de los postulados de Vigotsky, pues a lo largo de la implementación de las actividades de aprendizaje los estudiantes lograron moverse efectivamente en la zona de desarrollo próximo: es decir, partieron de su estado inicial de conocimiento superficial para llegar a un nivel superior mediante el trabajo con el docente y sus pares.
- El analizar las situaciones problemas desde los cuatro pasos propuestos por Polya favorece la apropiación de un método por parte de los estudiantes, quienes al aplicarlo más de cuatro o cinco veces empiezan a mecanizar el procedimiento, más no el proceso mental correspondiente.
- La resolución de problemas es un medio para lograr el aprendizaje, pues despierta el interés del estudiante y le muestra la utilidad del contenido “teórico”.
- Realizar una investigación cualitativa en la que se utilizó una herramienta que permitiera efectuar un diagnóstico cuantitativo de las debilidades conceptuales de los estudiantes, permitió establecer con exactitud los conceptos en los que los estudiantes requerían mayor énfasis y profundidad, lo cual se tuvo en cuenta para la construcción de las guías en las actividades de aprendizaje.

- Los resultados obtenidos en la implementación de este trabajo sugieren que la actividad diagnóstica fue útil para corroborar estudios preliminares y para sustentar el diseño de la propuesta pedagógica que se aplicó a los estudiantes.
- El trabajo por grupos promovió el liderazgo, fortaleció habilidades comunicativas y garantizó que todos los estudiantes culminaran la actividad propuesta.
- En el trabajo grupal realizado para cada una de las actividades se demostró que los estudiantes lograron interiorizar el método de solución de problemas de Polya y al final lograron fortalecer habilidades y destrezas en la adquisición de conceptos algebraicos dentro de lo establecido por el MEN.
- El trabajo en equipo, actividad que permitió construir conocimientos, expresar ideas, comparar los propios puntos de vista con los de los compañeros y negociar soluciones en los problemas planteados en cada guía, facilitó la transformación de conceptos a un lenguaje algebraico claro y estructurado.
- Durante la evolución de este proyecto la interacción social juega un papel muy importante, pues lo que hacía un grupo de pares era internalizado por cada uno de los miembros y luego formaba parte de su propio aparato cognoscitivo desarrollando así los procesos superiores de pensamiento.
- La presencia de materiales audiovisuales en la enseñanza de conceptos algebraicos propicia su aprendizaje al adaptarse al entorno del estudiante fuera del aula; tal como sucedió en los videos con los que se reforzaron temas que con la sola teoría no quedaron muy claros.
- Al implementar una actividad de aprendizaje empleando una herramienta virtual se evidenció una motivación particular por parte de los estudiantes, más aún al conocer que no habían tenido la oportunidad dentro del Colegio de interactuar con equipos tecnológicos en asignaturas diferentes a informática.
- El uso de una herramienta virtual permitió un aprendizaje participativo, incrementando el interés por el tema de estudio y favoreciendo la interacción entre los compañeros de trabajo que explicaban a sus pares cuando no entendían el ejercicio.
- Los sitios web a los que se accedió para desarrollar las diferentes actividades de aprendizaje, bien en la sala de sistemas o a través de dispositivos móviles, dota al docente de un nuevo ambiente de aprendizaje y facilita al estudiante la construcción de su propio conocimiento.

- Una vez ejecutadas las actividades de aprendizaje diseñadas, mediante el análisis de resultados prácticos y escritos, se verificó que hubo contribución positiva en la interpretación y uso de la letra (avance del 26,67 %) y del signo igual (avance del 25,39 %) para la solución de problemas relacionados con la variación y el uso de sistemas algebraicos.
- El diseño e implementación de las guías de aprendizaje promueven en el estudiante el desarrollo del pensamiento variacional, lo cual no sólo se percibió en la solución de ejercicios, sino además los estudiantes en su autoevalución manifestaron que consideran haber adquirido habilidades al respecto.
- En la coevaluación los estudiantes consideran que están en capacidad de construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada, así también como de usar lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.
- La aplicación de la propuesta pedagógica permitió avances en los estudiantes en cuanto a mejorar la interpretación de la letra y el signo igual, uno de los escenarios en los que se demostró fue cuando tuvieron que expresar algebraicamente la generalización, lo cual representa un rasgo característico del razonamiento algebraico.
- Luego de ejecutada la propuesta del presente trabajo y a medida que se avanzaba en el desarrollo de las guías, el docente notó que durante los debates al interior de los grupos de trabajo se empleaba un lenguaje algebraico mucho más formal, estructurado y consciente que el empleado en la prueba diagnóstica.
- Aunque como criterio de evaluación para la prueba diagnóstica el docente tuvo en cuenta sus propios conceptos; la ejecución de las actividades le permitió entender mejor cómo el conocimiento previo de los estudiantes, sus experiencias y vivencias personales, así como su ambiente académico y la estructura curricular de las matemáticas en el nivel básico y medio habían influido en las diversas interpretaciones que de la letra y el signo igual manifestaban.
- Los resultados de la prueba posterior, así como los resultados de autoevaluación y coevaluación, muestran que la estrategia fue efectiva para ayudar a los estudiantes a superar sus preconcepciones y construir conceptos adecuados, representados en modelos y textos expositivos.
- En la prueba diagnóstica los estudiantes contestaron correctamente el 41.9 % de las preguntas asociadas a la interpretación de la letra, mientras que una vez aplicada la prueba comparativa, se obtuvo el 68.57 % de las respuestas correctas. Así también y específicamente en cuanto a

la interpretación de la letra usada como variable, en la prueba inicial los alumnos respondieron de manera adecuada solamente el 45.46 % de las preguntas, mientras que en la prueba comparativa este porcentaje aumentó al 78.89 %.

- En la prueba diagnóstica los estudiantes contestaron correctamente el 50.51 % de las preguntas asociadas a la interpretación del signo igual, mientras que una vez aplicada la prueba comparativa, se obtuvo el 75.90 % de las respuestas correctas. En este ítem, el mayor avance se evidenció en el uso del signo igual como proposición, pasando del 46.67 % al 93.33 % de las respuestas correctas.

Recomendaciones

A partir de la experiencia obtenida con el desarrollo de este proyecto, se presentan algunas recomendaciones:

- Si bien uno de los objetivos del trabajo es que como herramienta contribuya a disminuir la inequidad que presenta el actual sistema educativo colombiano; también es cierto que una propuesta pedagógica apropiada debe respetar las características particulares de la población educativa y por ende no puede ni debe desconocer la naturaleza rural del Colegio Nuestra Señora del Rosario del municipio de Manzanares. En este sentido, se recomienda a las directivas de la institución el desarrollar actividades pedagógicas para la asignatura de álgebra, que se valgan de las habilidades matemáticas que los estudiantes han adquirido gracias a su permanente contacto con el campo.
- Algunas dificultades o errores comunes que fueron más fácil de identificar en la prueba comparativa se refieren a problemas de la aritmética y sobre los cuales vale la pena aplicar una estrategia específica que permita subsanarlos.
- Con base en los resultados que obtengan los estudiantes en las próximas pruebas Saber, se podrá tener el presente trabajo como un referente respecto a otras intervenciones pedagógicas que se deban realizar en la institución, verificando así cada vez la validez de las Unidades Didácticas como herramientas de trabajo.
- Teniendo en cuenta que el estudio de la variación es base fundamental para acceder a los procesos de generalización, el autor recomienda el considerar la incorporación en los programas curriculares de básica primaria de una introducción al desarrollo de habilidades de pensamiento algebraico, de tal manera que los estudiantes estén preparados para el estudio formal del álgebra en el nivel de educación medio.
- Desde los primeros grados de la educación básica, proponer en las clases de matemáticas actividades donde los estudiantes deban plantear expresiones aritméticas generalizadas de tal manera que al realizar la transición aritmético - algebraica se haya desarrollado esta habilidad.
- Se recomienda implementar actividades de aprendizaje que incorporen TIC’s en su desarrollo, para de esta manera fortalecer las competencias tecnológicas que se requieren como respuesta a los avances tecnológicos de esta era.

- Implementar la propuesta didáctica no como una acción reactiva a los problemas en la transición aritmético-algebraica, sino de manera anticipada, forzando así el desplazamiento de la zona de desarrollo próximo del estudiante a un estadio superior.
- Compartir y socializar estos resultados y los de trabajos similares con los estudiantes de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, de tal manera que la práctica pedagógica de los próximos profesionales se encuentre enriquecida con esta información. También es importante participar de espacios que permitan fortalecer la red académica que promueva una actualización curricular en Colombia que esté acorde con los cambios culturales y tecnológicos de nuestra sociedad.
- Si el conocimiento es construido a partir de la experiencia, es conveniente incorporar en los procesos de enseñanza el mayor número posible de estas; el ambiente de aprendizaje tiene mayor relevancia que la simple y tradicional transmisión de información.

Referencias Bibliográficas

[1] Baptista Lucio, Pilar y Fernández Collado, Carlos. (2014). *Metodología de la investigación.* 6° Edición. México: Mc Graw Hill.

[2] Betancourth López, James Iván. (2017). *Diseño de una unidad didáctica (UD) que promueva el pensamiento métrico para los grados 6ª a 8ª de la I.E Félix Naranjo sede Tarro Pintado*. (Trabajo de grado). Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia. Recuperado el 30 de junio de 2019 de http://bdigital.unal.edu.co/59214/2/9971752.2017.pdf

[3] Caicedo Prada, Jerson Andrés. (2017). *El uso comprensivo del lenguaje simbólico en la formulación y la solución de problemas que involucran ecuaciones de primer grado*. (Trabajo de grado). Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia. Recuperado el 13 de mayo de 2019 de http://bdigital.unal.edu.co/58406/1/1080182326.2017.pdf.

[4] Calvo Trejos, Gloria Yaneth. (2017). *Diseño y aplicación de estrategias matemáticas, para ayudar a los estudiantes de grado cuarto del Instituto San Andrés, en el dominio de multiplicación y división de fracciones a través de las etapas de aprendizaje*. (Trabajo de grado). Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia. Recuperado el 4 de julio de 2019 de http://bdigital.unal.edu.co/63434/1/24396524.2017.pdf.

[5] Cardona Márquez, Manuel Antonio. (2007). *Desarrollando el pensamiento algebraico en alumnos de octavo grado del CIIE a través de la resolución de problemas*. (Trabajo de grado). Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Tegucigalpa, Honduras. Recuperado el 23 de mayo de 2019 de http://www.cervantesvirtual.com/obra/desarrollando-el-pensamiento-algebraico-en-alumnos-de-octavo-grado-del-ciie-a-traves-de-la-resolucion-de-problemas/f16c04b6-b3e1-11e1-b1fb-00163ebf5e63.pdf.

[6] Carrera, Beatriz y Mazzarella, Clemen. (2001). Vygotsky: Enfoque sociocultural. *Educere*. Vol. 5, Núm. 13. Pg 41-43. Universidad de los Andes. Mérida, Venezuela. Recuperado el 1 de agosto de https://www.redalyc.org/pdf/356/35601309.pdf.

[7] Chica Cárdenas, Yeison y Soto, Yulady. (2015). *Análisis de concepciones del signo igual y concepto de equivalencia desarrolladas en estudiantes de educación básica primaria, grado quinto de la institución educativa San Simón sede Montealegre*. (Trabajo de grado). Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia. Recuperada el 2 de junio de 2019 de http://repository.ut.edu.co/bitstream/001/1566/1/yeison%20jair%20chica%20cardenas.

[8] Contreras Oré, Fabio. (2012). La evolución de la didáctica de la matemática. *Horizonte de la Ciencia* 2 (2), junio. Documento recuperado el 24 de junio de 2019 de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5420575.pdf.

[9] Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana (CECC) - Pérez Córdoba, Rafael Ángel. (2009). *El Constructivismo en los espacios educativos*. 1ª. Edición. San José, Costa Rica. Recuperado el 10 de junio de 2019 de http://unpan1.un.org/intradoc/groups/public/documents/icap/unpan039683.pdf.

[10] Curotto, Margarita. (2006). *Estrategias de aprendizaje que utilizan los alumnos universitarios cuando aprenden matemática con un software específico*. (Trabajo de grado). Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina.

[11] Dávila Orozco, Wuilkinson Carlos. (2018). *Desarrollo de Pensamiento Variacional en Estudiantes de Secundaria, mediado por GeoGebra*. (Trabajo de grado). Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia. Recuperado el 24 de mayo de 2019 de http://bdigital.unal.edu.co/63814/1/72141944.2018.pdf.

[12] Díaz Ortega, Jesús. (2016). *Desarrollo de estrategias para la resolución de problemas matemáticos*. (Trabajo de grado). Universidad de la Rioja, Logroño, España. Recuperado el 20 de julio de https://biblioteca.unirioja.es/tfe_e/TFE001678.pdf.

[13] Figueroa Flórez, Jaider Albeiro y Muñoz Acosta, Jaime Eduardo. (2003). *Problemas de optimización, con Cabri*. (Trabajo de grado). Universidad de Sucre, Sincelejo, Colombia. Recuperado el 1 de mayo de 2019 de https://repositorio.unisucre.edu.co/bitstream/001/138/2/T515.3307%20F475.pdf.

[14] Franco Restrepo, Cristian David y Sánchez Quiceno, Eder Leandro. (2015). *Diseño de material didáctico para el fortalecimiento del pensamiento matemático en la enseñanza de la educación básica y media*. (Trabajo de grado). Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia. Tesis recuperada el 10 de julio de 2019 de http://repositorio.utp.edu.co/dspace/handle/11059/5382.

[15] Forigua Parra, John Edward y Velandia Silva, Diego Alejandro. (2015). Sobre la interpretación y uso de la letra como número generalizado en tareas y actividades sobre generalización de patrones: reporte de una experiencia con estudiantes de grado octavo (13 – 15 años). *Revista Colombiana de Matemática Educativa*. Número 1, Vol. 1. Recuperado 30 de mayo de http://funes.uniandes.edu.co/8604/1/Forigua2015Sobre.pdf.

[16] Galvis Panqueva, Alvaro H. (2013). *Teorías de aprendizaje como sustento a la creación de AVAs*. (Tercer seminario de formación docente). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Documento recuperado el 31 de julio de http://www.saebogota.unal.edu.co/bogota_archivos/formacion_docente/seminarios/seminario_III/Teor%C3%ADas%20de%20aprendizaje%20como%20sustento%20a%20la%20creaci%C3%B3n%20de%20AVAs.pdf.

[17] Godino, Juan y Font, Vicenç. (2003). Razonamiento Algebraico y su Didáctica para Maestros. *Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología, BSO2002-02452*. Universidad de Granada, España. Recuperado el 20 de junio de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf.

[18] Guarumo Ladino, Inés Lucía. (2018). Didáctica del Pensamiento Variacional y los Sistemas. *Algebraicos en Instituciones Indígenas del Resguardo Escopetera y Pirza, Riosucio - Caldas*. (Trabajo de grado). Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia. Recuperado el 30 de mayo de 2019 de http://bdigital.unal.edu.co/65112/1/30412649.2018.pdf.

[19] ICFES - Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. (2016). *Resultados de grado noveno en el área de matemáticas*. Recuperado el 24 de mayo de 2019 de https://www2.icfesinteractivo.gov.co/resultados.php.

[20] Kieran, Carolyn y Filloy Yagüe, Eugenio. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias*, 7(3), (229-240). Centro de investigación y estudios avanzados del IPN, México. Recuperado el 23 de junio de https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/51268/93013.

[21] López Mojerón, Vivian y Pérez de Prado Antonio. (1999). Aspectos fundamentales de la teoría de formación por etapas de las acciones mentales y los conceptos de P. Ya. Galperin. Recuperada el 10 de julio de 2019 de https://docplayer.es/12599488-Aspectos-fundamentales-de-la-teoria-de-formacion-por-etapas-de-las-acciones-mentales-y-los-conceptos-de-p-ya-galperin.html.

[22] Mar Cornerlio, Omar, y Bron Fonseca, Bárbara. (2017). Base orientadora de la acción para el desarrollo de prácticas en un sistema de laboratorios a distancia. *Revista Científica*, 29 (2), Pag 140-148. Documento recuperado el 21 de julio de 2019 de http://www.scielo.org.co/pdf/cient/n29/2344-8350-cient-29-00140.pdf

[23] Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Recuperado el 14 de mayo de 2019 de https://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/article-116042.html.

[24] Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2012). *Guía para el módulo de matemática para grado 9°*. Programa Secundaria Activa. Recuperado el 25 de julio de 2019 de http://redes.colombiaaprende.edu.co/ntg/men/archivos/Referentes_Calidad/Modelos_Flexibles/Secundaria_Activa/Guias_del_estudiante/Matematicas/MT_Grado09.pdf.

[25] Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje V.2.* Recuperado el 15 de junio de 2019 de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/DBA_Matem%C3%A1ticas.pdf.

[26] Molina González, Marta y Castro Martínez, Encarnación. (2006). *Comprensión del signo igual y desarrollo de pensamiento relacional en alumnos de tercero de primaria*. (Comunicación de investigación en curso). Universidad de Granada, España. Recuperada el 23 de mayo de http://funes.uniandes.edu.co/542/1/molinam06-2819.pdf.

[27] Moreno Armella, Luis y Waldegg, Guillermina. (2002). *Fundamentación cognitiva del currículo de Matemáticas*. Segunda Edición del Documento Publicado por el Ministerio de Educación de Colombia en el libro "Seminario Nacional de Formación de Docentes: en el Uso de Nuevas Tecnologías en el aula de Matemáticas", Bogotá D.C, Colombia, pág. 40 – 66.

[28] Muñoz Hernández, Hilda María. (2013). *Modelos conceptuales de profesores de educación básica sobre las matemáticas y su enseñanza*. (Trabajo de grado). Universidad Autónoma de Manizales, Manizales, Colombia.

[29] Ortiz Ocaña, Alexander Luis. (2009). *Pedagogía y docencia universitaria: Hacia una didáctica de la Educación Superior. Tomo 1*. Barranquilla: Cepedid (Centro de Estudios Psicopedagógicos y Didácticos del Caribe Colombiano).

[30] Osorio Osorio, Macedonio. (2016). *El paso de la aritmética al álgebra.* (Trabajo de grado). Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia. Recuperado el 15 de julio 2019 de http://bdigital.unal.edu.co/56283/1/7709140.2017.pdf.

[31] Parodi, Sebastian; Ochoviet, Cristina y Lezama, Javier. (2017). La comprensión del signo de igual en la entrada al álgebra: el diseño de tareas y la conversación en la clase de matemática. *Enseñanza de las ciencias.* Volumen 35, Número 3, Pag 51-67. Recuperado el 15 de julio de 2019 de https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/329207/419795.

[32] Patiño Garzón, Luceli. (2007). Aportes del enfoque histórico cultural para la enseñanza. *Educación y Educadores*. Volumen 10, Número 1, Pag 53-60. Recuperado el 5 de junio de 2019 de http://www.scielo.org.co/pdf/eded/v10n1/v10n1a05.pdf.

[33] Polya, George. (1ra. Ed. Español 1965-Decimoquinta reimpresión 1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

[34] Sánchez Cardona, Iván Dario. (2017). *La solución de problemas en el desarrollo de procesos generales asociados al pensamiento variacional y los sistemas algebraicos*. (Trabajo de grado). Universidad de Caldas, Manizales, Colombia.

[35] Scott, Cynthia. (2015). El futuro del aprendizaje 3 - ¿Qué tipo de pedagogías se necesitan para el siglo XXI?. (Documentos de Trabajo ERF, No. 15). *Investigación y Prospectiva en Educación UNESCO.* París, Francia. Recuperado el 21 de julio de 2019 de https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000243126_spa.

[36] United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (Unesco). (2004). *Most influential theories of learning*. Recuperado el 23 de junio de 2019 de http://www.ibe.unesco.org/en/geqaf/annexes/technical-notes/most-influential-theories-learning.

[37] Vygotsky, Lev. (1934). *Pensamiento y lenguaje*. Buenos Aires: Lautaro. Recuperado el 15 de junio de 2019 de http://abacoenred.com/wp-content/uploads/2015/10/Pensamiento-y-Lenguaje-Vigotsky-Lev.pdf.

Anexos

Anexo 1. Prueba Diagnóstica Aplicada en el Colegio

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA	PRUEBA DIAGNÓSTICA	VERDAD, VIRTUD Y CIENCIA
	Apropiación e interpretación de la letra y el signo igual en la transición aritmético algebraica	

Nombre :___________________________Grado:___________ Fecha:__________

Solucione por favor el siguiente cuestionario

1. Si $x + 5 = x + x$ ¿Cuál es el valor de x? Justifique su análisis.
2. Sume el número 4 con el término $3n$ ¿Qué expresión se obtiene y qué representa?
3. Según la ecuación $y = \frac{1}{2}x$, ¿qué valores de x hacen que "y" sea un número natural par positivo? Evidencie los resultados
4. Listar todos los valores (enteros positivos) de A y de B cuando $A + B = 10$
5. Si se tiene una caja de base cuadrada de lado x y altura h, la expresión algebraica que permite calcular su volumen es x^2h. Sí____ No____ Argumente su respuesta
6. Qué es mayor $3n$ o $n + 3$. Demuestre su respuesta

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA	**PRUEBA DIAGNÓSTICA**	
	Apropiación e interpretación de la letra y el signo igual en la transición aritmético algebraica	

7. ¿Si en la expresión $y = 5x + 12$ la variable x cambia, el valor de "y" también cambia? Justifique la respuesta y de ejemplos.

8. Si $\sqrt{2}$ ≅1,41421356. Utilizando una aproximación obtenga el resultado de $2 + \sqrt{2}$

9. Obtenga el valor aproximado de la suma $1{,}0366593 + 1{,}141852$

10. El valor aproximado de la fracción $21/45$ es:

11. Si $e + f = 8$ ¿Cuánto es $e + f + g$? Explique

12. Cuál es el resultado de sumar $3x + y$. Argumente

13. Cuál es el resultado de sumar $2x + 3x$. Justifique

14. Para el valor de $x = -3$ es verdadera la proposición $2x + 3x = 15$. Sí____ No____ Justifique su respuesta

15. Determine si la igualdad $3 + (-5) = 4 + (-8) + 2$ es cierta o no. ¿Por qué?

16. Justifique si es falsa o verdadera la igualdad $3 + x + 1 = 3x + 1$

17. ¿Las expresiones $5n - 1$ y $(3n + 2n) - 1$ son equivalentes? En cualquiera de los casos, falso o verdadero, explique ¿por qué?

18. ¿Las siguientes igualdades son ciertas $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12} = \frac{16}{24}$? Si___ No___ ¿Por qué?

19. Explique la similitud de las expresiones $3x + 2x + x = 6x$

20. ¿Qué relación hay entre la expresión $(n - 1) + n + (n + 1)$ y la expresión $3n$? Justifique su respuesta.

Anexo 2. Resultados prueba diagnóstica aplicada en el colegio

Letra usada como incógnita

	1. Si $x + 5 = x + x$ ¿Cuál es el valor de x? Justifique su análisis.	2. Sume el número 4 con el término $3n$ ¿Qué expresión se obtiene y qué representa?
1	x = 5	4 + 3n = 3^2n
2	El valor de x es 2x, porque la propiedad indica que x + x = 2x	No se puede realizar porque no son términos semejantes, o puede ser 7n, no estoy muy segura… 4+3n
3	El valor es 5 ya que x+5 es igual a x + x, con base a eso se sobre entiende que ésta variable es de valor 5	No se puede sumar. Entonces da 3n + 4
4	es =2	4 + 3n = (7n).(7n) = $49n^2$
5	(que yo me acuerde…) la propiedad dice que x + x es 2x	4 + 3n es… NO SON SEMEJANTES
6	x = 5 En la pregunta lo remplazan por 5, supongo que también es 5	3n + 4 no se pueden sumar ya que no son semejantes
7	Si x es cualquier número para que x + 5 sea igual a x + x yo le daría el número a x = 5	4 + 3n = 3n + 4
8	El valor es 5 porque si x+5 es x + x es porque es el mismo número el que se está sumando	No se pueden sumar no son términos semejantes 4 + 3n porque si se pueden multiplicar
9	x=5 = 5 + 5 = x + x = 5 + 5 = 5 + 5 x + x = x + x	3n + 4 se obtiene 3n + 4 3n + 4 representa un racional
10	5 porque para que se cumpla la igualdad tendríamos que poner los mismos números y en este caso es 5	Expresión 4 + 3n No se pueden sumar
11	El valor de x es = 5. es 5 porque el = indica que las expresiones son iguales solo que se cambia la x por 5	4 + 3n = 7n se obtiene 7n
12	El valor de x es 5 porque aparece que cambio a x	la expresión es 7n porqué se suman y la n queda valiendo 7 veces
13	Sería 5 ya que "x" es la variable y equivale a 5, porque 5+5 sería 10, lo cual es igual a 5+5=10	Se obtiene la expresión 3n + 4 y representa a 3 veces n + 4
14	El valor de x, es cualquier valor ya que x es una variable que puede tomar valores desde -∞ hasta +∞	No se pueden sumar debido a que no son términos semejantes y quedaría la expresión 4 + 3n
15	el valor de x=5. Porque si x es cualquier número y x+5 es igual a 10 y es la misma letra es 5	4 + 3n
16	No se	4 + 3n = 7n
17	El valor de x es 5	No se pueden sumar porque no son términos semejantes
18	Sería 5	No se pueden sumar porque no tienen términos semejantes
19	No se puede, ya que x+5 no es igual a x + x porque x + x serian 2x y 2x + 2x serían 4x por lo tanto no se puede hallar el valor de x	4 + 3n = 7n
20	El valor de x es igual a 5. Porque la variable x en esta operación es igual al número 5. en la operación algebraica algo así: x + x es igual a 5 + 5	4 + 3n = 7n

21	El valor de x es 5. Porque de este x + 5 = x + x Porque en esa suma esta x + x entonces x es 5 porque x multiplica a 5	4 + 3n = 12n
22	x + x = x + 5 5 porque al ser una igualdad tienen que ser los dos lados dos iguales	4 + 3n = 7n Representa u término Algebraico
23	el valor de x es 2x porque x +x = 2x	Puede ser 7n pero la verdad no estoy tan segura
24	yo creo que es 5	3n + 4 queda igual porque no hay semejantes
25	el valor es 5 porque los dos son x tienen que tener valores iguales	4 + 3n = 7n
26	No sé, supongo que 5 ya que son iguales	La expresión que se obtiene es 7n porque al sumarlos da esto
27	porque si x + 5 = x + x pues el valor de x es 5	La expresión que se obtiene es 7n porque al sumarlos da esa expresión
28	Creo que 5 para que haya una igualdad entre los valores	4 + 3n = 7n representa la suma entre esos valores. Se suman los coeficientes "y si fuera multiplicación no se podría efectuar porque no son semejantes"
29	x + 5 = x + x 5 porque al ser una igualdad los dos lados deben ser iguales	4 + 3n No se pueden sumar porque no son semejantes
30	el valor de x es cualquier número	4 + 3n no se puede sumar por que el 4 no tiene un termino

Letra usada como número generalizado

	3. Según la ecuación $y = 1/2\ x$, ¿qué valores de x hacen que "y" sea un número natural par positivo? Evidencie los resultados	4. Listar todos los valores (enteros positivos) de A y de B cuando $A + B = 10$
1	y = 1/2 x = Depende del valor que tenga x, y	A + B = 10, 2 + 8 = 10, 4 + 6 = 10 Desde menos infinito hasta más infinito
2	1/2 x = 1/2	A = Todos los valores del 1 - 9 en el conjunto de los números naturales positivos B =
3	x equivale a 4 porque 1/2. 4/1 = 4/2 = 2 entonces y es 2 y es un número par, natural y positivo o a 6, 8, 8, 10, 12 é infinitos pares	A + B = 10, 1 + 9 = 10, 8 + 2 = 10, 7 + 3 = 10, 4 + 6
4	1/2 x = 0.5 el resultado de x no es un número par	Los valores positivos son de 1 a 9
5	No lo se	Todos los valores del 1 al 9
6	1/2 + 7/2 = 8/2 = 4	A y B = { - □, …,0,….. + □ }
7	y = 1/2 x Para que "y" sea un número natural positivo debe ser (4)	A + B = 10, 1 + 9 = 10, 8 + 2 = 10, 7 + 3 = 10, 4 + 6 = 10 1,2,3,4,5,6,7,8,9
8	2 = 1/2 (3) = 2 = 1/3 = 7	A + B (5+5) = 10 (8+2) = 10 (7+3) = 10 (4+6) = 10
9	1/2 (4) = 4/2 = 2 Par positivo (2) = 1/2 (4) 2 = 4/2 2 = 2	A = 1,2,3,4,5,6,7,8,9 B = 1,2,3,4,5,6,7,8,9
10	y = 1/2 x y = 1/2 (4) = 4/2 = 2	3 + 7 = 10, 5 + 5 = 10, 6 + 4 = 10, 2 + 8 = 10, 1 + 9 = 10, 0 + 10 = 10

11	y = 1⁄2 x = 1 = 1⁄2 (2)	A 6 = 10 A 4 = 10 A 2 = 10 B 4 B 6 B 8
12	Pueden 2	puede que A valga 4 y B valga 6 y eso da 10 ejemplo : 4 + 6 = 10
13	Algunos valores de "x" serian 4,8,12,16,20,24, etc… ya que "y" representa la mitad de "x"	A B 1 + 9 = 10, 2 + 8 = 10, 3 + 7 = 10, 4 + 6 = 10 5 + 5 = 10, 6 + 4 = 10, 7 + 3 = 10, 8 + 2 = 10, 9 + 1 = 10
14	Ninguno, porque al multiplicar cualquier número por 2 y sumarle 1 nos da un número impar	A=1 + B=9 = 10, A=2 + B=8 = 10, A=3 + B=7 = 10 A=4 + B=6 = 10, A=5 + B=5 = 10 y se puede realizar de la forma opuesta B + A y dará 10
15	y = 1⁄2 jum no sé	7 + 3 = 10, 5 + 5 = 10, 6 + 4 = 10, 8 + 2 = 10, 9 + 1 = 10
16	No se	A + B = 10, 6 + 4 = 10, 8 + 2 = 10, 7 + 3 = 10, 5 + 5 = 10, 9 + 1 = 10
17	No se	6 + 4 = 10, 5 + 5 = 10, 7 + 3 = 10, 8 + 2 = 10
18	x es la mitad de y, los valores de x podrían ser 4 - 6 - 8 - 10 - 12 □	Los enteros positivos son los que van de 0 al 9
19	1⁄2 x "y" = si, para poder obtener el resultado "y" se divide y el resultado que dé es el resultado de la y	Los números enteros positivos es del 0 al 9.Le podemos dar cualquier valor
20	Todos los pares enteros positivos en forma de fracciones	1= (5)+(5) = 10 2= (4)+(6) = 10 3 = (9)+(1) = 10 4= (8)+(2) = 10 5= (7)+(3) = 10 6= (10)+(0) = 10
21	y = 2 X = 4 = 1⁄2 (4) = 4⁄2 = 2 2 = 2	A = Podría tener cualquier valor B = Podría tener cualquier valor que sumado a B da 10
22	No respondió	6 + 4 = 10, 5 + 5 = 10, 7 + 3 = 10, 8 + 2 = 10, 9 + 1 = 10
23	y = 1⁄2 x depende del valor que tengan	9 + 1 = 10, 5 + 5 = 10, 7 + 3 = 10, 8 + 2 = 10, 6 + 4 = 10
24	y = 2 X = 4 = 1⁄2 (4) = 4⁄2 = 2	6 + 4 = 10, 5 + 5 = 10, 7 + 3 = 10, 8 + 2 = 10, 9 + 1 = 10
25	no se	1 + 9 = 10, 2 + 8 = 10, 3 + 7 = 10, 4 + 6 = 10, 5 + 5 = 10 6 + 4 = 10, 7 + 3 = 10, 8 + 2 = 10, 9 + 1 = 10
26	cualquiera, ya que se puede poner cualquier número a las letras	2+8 5+5 4+6 3+7 ya que los dos son enteros positivos o todos ya que son enteros positivos creo
27	2 numero natural par positivo	A equivale a 1 y B equivale a 9
28	4 = 1⁄2 (2) el 2 hace que 4 sea par positivo	5 + 5 = 10 3 + 7 = 10
29	y = 1⁄2 x 2 = 1⁄2 + 12⁄8 = (4 +12) ⁄ 8 = 16 ⁄ 8 = 2	6 + 4 = 10, 5 + 5 = 10, 7 + 3 = 10, 8 + 2 = 10, 9 + 1 = 10, 3 + 7 = 10
30	ninguno porque si multiplica un número por 2 y le suma uno siempre va a dar Impar	A + B = 10, 1 + 9 = 10, 2 + 8 = 10, 3 + 7 = 10, 4 + 6 = 10

Letra usada como variable

	5. Si se tiene un cubo de base cuadrada de lado x y altura h, la expresión algebraica que permite calcular su volumen es $x^2 h$. Sí____ No____ Argumente su respuesta	6. Qué es mayor $3n$ o $n + 3$. Demuestre su respuesta	7. ¿Si en la expresión $y = 5x + 12$ la variable x cambia, el valor de "y" también cambia? Justifique la respuesta y de ejemplos.
1	No x²h = xh²	= 3n	y= 5x + 12 = si cambia
2	No, porque esa expresión se estaría multiplicando 2 base por una altura, la expresión correcta es x.h multiplicada 3 veces para hallar el volumen	3n = n + n + n ese es mayor	Posiblemente sí, porque si uno come cereal con yogurt sabe bien pero si come cereal con leche cambia el sabor
3	Si se pide el volumen seria (x.h)³	3n es mayor por ser multiplicación	y= 5x + 12 si cambia x también cambia y por ser proporcionales y = 5(2) + 12 y = 5(3) + 12 22 = 10 + 12 27 = 15 + 12
4	x .x Si x²	3n . 3n 9n²	5x + 12 = 17x si, porque el resultado sería casi igual al de y entonces todo cambia
5	No, porque se tiene que multiplicar varias veces	3n	El valor de la variable. No cambia
6	Al ser volumen debe ser al cubo, no al cuadrado	Es mayor 3n, porque tenemos tres n, no una n más 3 n= silla tenemos 3 sillas o una silla +3. Es mayor 3 sillas n=4. Tenemos 3 x 4 = 12 o 4 + 3 = 7. Es mayor 3 x 4 = 12	si, ya que estamos remplazando por diferentes números x=3 = 5(3) + 12 = 15 + 12 = 27 = y x=2 = 5(2) + 12 = 10 + 12 = 22 = y
7	si porque x se eleva al cuadrado y luego se multiplica por la altura	3n = n + n + n n + 3 = 3n	y= 5x + 12 si cambia porque tienen que ser iguales
8	No Tendría que ser elevado a la 3 porque es un cubo y no un cuadrado	Los dos son iguales si sumamos n + 3 es igual = 3n entonces los dos son iguales	si porque equivale a la suma de todos los valores y = 5(2) + 12 = y = 1.0 + 1.2 = 2.2 se aproxima a 3
9	Si El lado se eleva al cuadrado para hallar los lados, esa sería una cara, para hallar el cubo se multiplica por la altura	3n = se tiene tres veces la misma cosa n+3 = una cosa más otras tres diferentes no sabría cual podría ser	sí porque se supone que después del igual está el resultado de y. Al cambiar el resultado no daría el total

10	No porque para obtener un volumen se debe multiplicar l x l x l.	Es mayor 3n n=3 3(3)=9 3+3=6 n=2 (2)(3)= 6 2+3=5	Si, por que el valor de y depende de la operación que hay después del paréntesis x=2 y= 5(2) + 12 = 10 + 12 24 = 24
11	Si, porque con esta expresión obtenemos el resultado	n+3 es mayor porque en la primera solo ahí 3n mientras que en la segunda ahí una n+3 lo cual indica que es mayor	No cambia porque la variable x evade ser un número
12	Si, y creo que sí porqué se suma y da el valor	yo creo que 3n porque es tres veces n	Si porque el resultado es casi igual y el resultado es 17x
13	No, ya que la multiplicación seria $(xh)^3$	Es mayor "3n" porque demuestra una multiplicación y "n+3" sería una suma	Sí, porque "y" y "x" son variables, son equivalentes 27 = 5(3) + 12 22 = 5(2) + 12 62 = 5(10) + 12 27 = 15 + 12 22 = 10 + 12 62 = 50 + 12
14	Si, porque para hallar el volumen multiplicamos bese por lado por altura	Pues yo digo que es mayor 3n, por lo que sería multiplicar cualquier valor por 3. En cambio n+3 seria sumar cualquier valor más 3 ej: 3n = 3(9) = 27 n+3 = (9) + 3 = 12	Cambiaria si nos dieran un valor para "y" porque si cambiamos "x" por cualquier valor nos dará un valor diferente
15	No, porque un cubo tiene más de dos lados y todos los lados son iguales	3n es mayor 3(7) 7 + 3 =21 =10	la verdad no se
16	No, porque para hallar el volumen sería el valor tres veces porque corresponde al espacio que ocupa	Creo que es mayor 3n porque si digamos lo remplazamos por cualquier otro número pues da a comparación de n+3 da menos 3(7)=21 3+7=10	no se
17	No el volumen se representa elevándolo a la 3	3n es mayor ya que n+3 no se puede sumar	si, porque si usted como galletas con leche y cambia la leche por yogurt cambia el sabor
18	No respondió	3n porque en el segundo término n no tiene parte numérica y 3 no tiene parte literal y en el primero si	No respondió
19	No, ya que x sería igual a 2x no a x^2 por lo tanto no es valida	Es mayor 3n porque no es lo mismo 3n que n+3	y= 5x + 12 No, no cambia lo único que cambia seria x por la y

20	No V= x^3 El cubo tiene 3 lados por tanto el volumen debe hallarse por los 3 lados	3n es mayor 3n=se multiplica. Este resultado seria mayor n+3 = se suma	Si debe cambiar ya que son variables proporcionales
21	No, porque dice muy claro que tiene base cuadrada, de lado x, y altura h. Entonces no quedaría así	3n. Por que 3n tiene una parte numérica y una parte literal. En cambio n+3 no porque están sumando y además el 3 no tiene parte literal y el n no tiene parte numérica	Si. Porque el resultado después del igual seria y y tiene que ser el mismo
22	No, por el cubo tiene más de dos lados	Es mayor n+3 3n es tener 3 veces n n+3 es multiplicar n 3 veces	No respondió
23	No, porque en el volumen se multiplica tres veces (x)(h). (x)(h). (x)(h) = x^3 h^3	el mayor es 3n	Si cambia, porque solo con cambiar la variable
24	No, porque debería ser (xh) (xh). Creo yo	3n	No
25	No, porque el volumen se multiplica por 3 xh^3 y de todas formas está mal escrito lo de x^2h porque hay solo multiplica la x^2 entonces la forma correcta seria xh^3	Creo que es mayor 3n por se multiplicaría 3xn y en cambio en la otra se sumaria n+3 entonces creo que es 3n	No se
26	Si, porque es un cuadrado y lado por lado	3n . Porque n solo vale "1"	Sí cambia
27	No, porque la expresión está mal	3n	No respondió
28	No, formula volumen por pascal= $1a^3$ $3a^2b$ $3ab^2$ $1b^3$ o $(xh)^3$ "por lo tanto no es esa respuesta"	3n porque seria 3 n veces mientras que n+3 da un valor menor	Si cambia ya que se le da un valor y el valor de "y" tiene que variar para que sea compatible con el de "x" y = 5x + 12 22 = 5(2) + 12
29	No, para calcular el volumen de un cubo se multiplica l x l x l	3n es mayor Ejemplo 3(4) 4 + 3 =12 =7	Si, porque si las dos expresiones son iguales, si cambia una parte también la otra 8 = 2(2) + 4 8 = 2(3) + 4 8 = 8 8 = 6 + 4
30	No, seria base por altura (b*h)	es mayor 3n debido a que se multiplica	Si, cambia porque son variables proporcionales

El signo igual como aproximación

	8. Si √2 ≅1,41421356. Utilizando una aproximación obtenga el resultado de 2 + √2	9. Obtenga el valor aproximado de la suma 1,0366593 + 1,141852	10. El valor aproximado de la fracción 21/45 es:
1	√2 ≅1,41421356 2 + √2 = 2 + 4 = 6 =2	1,0366593 + 1,141852 = 1,1508445	21/45 = 0,4066
2	el resultado de esta operación es … 2 + √2 = 3.414213562	1,0366593 + 1,141852 = 2,1785113	21/45 aproximadamente = 0,4666_
3	√2 ≅1,41421356 2 + √2 = 3,41421356	1,0366593 + 1,141852 = 2,1785113	21/45 = 0,4066666 ≅ 1
4	2 + √2 = 3,39	se aproxima 11,506,436	21/45 = 0,46
5	2 + √2 = 3,41421356 Esa es la respuesta : V	1,0366593 + 1,141852 = 2,1785113	21/45 = 0,4666_
6	2 + √2 = 2 2 + √2 = √4 = 2	1,0366593 + 1,141852 = 2,1785113	21/45 = 0,466666
7	2 + √2 = 3,39	1,0366593 + 1,141852 = 2,1785113	1,0366593 + 1,141852 = 2,1785113
8	se aproxima a 3,41	1,0366593 + 1,141852 = 11,508,445	0.46
9	2 + √2 = 2 + 1.41421 = 3.141421… 2 + √2 = 2 + 2^(1/2) = …4²	1,0366593 + 1,141852 = 2,1785113	21/45 = 0,46_
10	1,41421356 + 2 = 3,41421356	1,0366593 + 1,141852 = 2,1785113	0,466_
11	2 + √2 = 3,41421356	1,0366593 + 1,141852 = 2,1785113	21/45 = 0,7111 aprox.
12	la aproximación es 3,41421356	aproximada mente el resultado es 11,508,445	el valor aproximado es 0,4666_
13	2 + √2 ≅ 3,41	1,0366593 + 1,141852 = 2,1785113	21/45 ≅ 0,4066_
14	3.414213562	2.1785113	0.466
15	= 4	1,0366593 + 1,141852 = 2,1785113	21/45 = 0,466_
16	Creo que es 4 no estoy segura	1,0366593 + 1,141852 = 2,1785113	21/45 = 7/15 = 0,4666_
17	3.41421356	1,0366593 + 1,141852 = 11,508445	21/45 = 0,4666
18	2 + √2 = 3,41	1,0366593 + 1,141852 = 11,508445	21/45 = 0,466666
19	Se obtiene resultados diferente porque √2 no es igual a 2 + √2 2 + √2 = 3,41	1,0366593 + 1,141852 = 11,508.445	21/45 = 0,46

20	√2 = 1,41... 2 + √2 = 3,41	1,0366593 + 1,141852 = 2,1785113	21/45 = 7/15 = 0,46
21	2 + √2 = √4 = 2,414211356	El valor aproximado de esta suma es 2,1585445	El valor aproximado de 21/45 es 6,46_
22	No respondió	1,0366593 + 1,141852 = 1,141853,04	21/45 = 0,46666667
23	el resultado 2 + √2 = 3.414213562	1,0366593 + 1,141852 = 11,508.445	21/45 = 18/40 = 15/35 = 12/30 = 9/25
24	2 + √2 = 2 + 1,414213562	1,0366593 + 1,141852 = 2,1785113	21/45 = 0,46666_
25	2 + √2 = 4	1,0366593 + 1,141852 = 2,1785113	21/45 = 7/15 = 0,46666
26	2 + √2 = 4	1,0366593 + 1,141852 = 1.1508445	21/45 = 7/15 = 0,4666
27	2 + √2 = 4	= 1,1508445	21/45 = 0,4066
28	1,414213562 + 2 = 3,414	1,0366593 + 1,141852 = 2,1785113	21/45 = 0,4
29	2 + 1, 4142 = 3,4142	1,0366593 + 1,141852 = 2,1785113	21/45 = 0,466_
30	3.414213562	2.1785113	21/45 = 7/15 = 0,46

El signo igual como resultado

	11. Si $e + f = 8$. ¿Cuánto es $e + f + g$? Explique	12. ¿Cuál es el resultado de sumar $3x + y$? Argumente	13. ¿Cuál es el resultado de sumar $2x + 3x$? Justifique
1	e + f = 8 e + f + g = 16 2 + 6 = 8 2 + 6 + 8 = 16 Podría ser cualquier número, o depende del número que lo remplace	3x + y = 3xy	2x + 3x = 5x²
2	e + f + g = Cualquier número desde - infinito hasta más infinito	No se puede sumar una mesa con una silla o sea no son semejantes…	El resultado es 5x por aplicación de propiedad y son semejantes.
3	Puede ser 8 más cualquier otro número	No se suman por no ser semejantes entonces da 3x+y	2x + 3x = 5x ya que si son semejantes y por ello se suman
4	e + f + g =	3x + y = 3xy	2x + 3x = 5x son términos semejantes

5	Ejemplo: $5 + 3 = 8$ $5 + 3 + ?$ $5 + 3 + 9 = 16$ me confundí	…(para mi) No se pueden sumar, porque No son semejantes	5x porque la variable es semejante
6	g = Cualquier número. El algebra es una generalización de la matemática que puede ser remplazado por cualquier número	No se pueden sumar, no son semejantes $3x + y$	$2x + 3x = 5x$ Si son semejantes. Se deja la base y se sumas los coeficientes
7	$e + f + g = 14$ $4 + 4 + 6 =14$	$3x + y = \quad = \quad 3x/y$	$2x + 3x = 5x$ porque son términos " semejantes"
8	$e + f + g = 15$ e = 3 f=5 G= 7 contando	No es semejante así que no se puede sumar	$5x^2$ porque 2x 3x son semejantes y $2+3 = 5$ y $x + x = 5x^2$
9	e= 3 f= 5 g=6 3 + 5 + 6 = 14 Los valores de e y f sumados dan 8 y a g se le da un valor cualquiera	igual por que para poder sumar tiene que ser de igual variable y exponente	5x = se efectúa la operación ya que tienen la misma variable
10	8 + g porque "g" podría tener cualquier valor	$3x + y =$ porque no son semejantes	$2x + 3x += 5x$ porque son semejantes
11	$e + f + g$ $4 +4 + 4 = 12$ Porque cada letra vale 4	$= 3x + y$ $= 3xy$	$2x + 3x$ $5x^2$ porque $2 + 3 = 5$ y $x+ x = x^2$
12	$e + f + g =$	pues yo creo que sería 3xy	yo creo que $5x^2$
13	podría ser 8 + g y a e y f se le puede colocar cualquier que sumado de 8	es 3x +y, ya que no son semejantes	es 5x, ya que son semejantes
14	e + f + g es cualquier valor dependiendo del valor que le den a cada variable	No se puede realizar porque no son términos semejantes	El resultado se obtiene dejando la misma base "x" y haciendo operaciones entre coeficiente "3" y "2" $2x + 3x = 5x$
15	Seria cualquier numero	9xy	5x
16	No lo se	No se	$2x + 3x = 5x$ En este caso se suman los números y las variables pasan igual
17	e= 3 f= 5 g=8 $= e + f + g = 16$	No se puede porque no son semejantes	5x

18	No respondió	3x + y = 3xy	2x + 3x = 5x se deja la misma base y se hacen operaciones entre coeficientes
19	e + f + g = 12 ya que la (g) le ponemos 4 porque es la mitad de 8 entonces se suman y el resultado es 12	= 3x + y = 3xy = El resultado es 3xy solamente se baja el 3 y se pone x y (y)	= 2x + 3x = 5x = el resultado es 5x porque se suman los coeficientes y se deja la misma base
20	e + f = 8 2 + 6 = 8 e + f + g = 18 2 + 6 + 10 =18	No se pueden sumar porque no son términos semejantes	5x Ese es el resultado ya que por ser semejantes solo se suman los coeficientes y no la parte literal . Esta parte permanece igual.
21	e+ f + g = 12 porque si e + f da 8 entonces si le suma 4 más da 12	3x + y = 3xy Por que como no tengo en el otro exponente un número se pasa el mismo y se le colocan las partes literales	$2x + 3x = 5x^2$ porque acá se suma la parte numérica y luego la literal
22	g puede ser cualquier número es una variante	No se pueden sumar porque no son términos semejantes	3x + 3x = 5x Se suman los coeficientes
23	e + f+ g = 12	No se puede porque no son semejantes	2x + 3x = 5x Porque esa es la propiedad y además son semejantes
24	Podría ser 12, 10,18 cualquier resultado, porque "g" no tiene valor fijo	$3x^2y^2$	$5x^2$se deja la misma variable "x" y se suma el resto la potencia de x y como hay dos se suman
25	R= e + f + g = 14 porque yo le puse a e= 3 f= 5 g= 6	$=xy^3$ Porque se multiplica tres veces lo mismo	5x porque solo se suman los números no las variables
26	puede dar 16 porque e puede valer 7 g 7 y f 4 para que de 8 entonces g también 4 para que de 16 o cualquier otro numero	3xy	5x se suman exponentes y se deja la misma base
27	porque si e + f = 8 y se le suma g el resultado es 10	4x 2y	6x porque no cambian las variables
28	e f g 4 + 4 = 8 4 + 4 + 4 = 12	3x + y = 4xy se suma el coeficiente y como no hay semejantes se deja así mismo las bases	2x + 3x = 5x Se suman los coeficientes y se deja la misma base (si fuera multiplicación se suma también la base)
29	e + f = 8 e + f + g R/ g puede dar cualquier valor	3x + y y no se puede sumar porque no es un término semejante	2x + 3x = 5x <u>justificación</u> se pueden sumar porque son semejantes
30	e + f = 8 2 + 6 = 8 e + f + g 0 2 + 6 + 10 = 18	3x + y	5x se deja la misma base y se hacen las operaciones entre coeficientes

El signo igual como proposición

	14. Para el valor de $x = -3$ es verdadera la proposición $2x + x = 15$. Sí____ No____ Justifique su respuesta	15. Determine si la igualdad $3 + (-5) = 4 + (-8) + 2$ es cierta o no. ¿Por qué?	16. Justifique si es falsa o verdadera la igualdad $3 + x + 1 = 3x + 1$
1	x = -3, 2x+3x=15 =No	3+(-5) = 4+ (-8)+2 = No	3+x+1 =3x+1 = Verdadero
2	No, porque 2(-3) +3 (-3) =1 no a 15	por que se obtienen diferentes resultados…	No se pueden realizar ninguno por que no son semejantes...
3	2(-3) +3 (-3) = 15, = -6 + -9 , = -15 El resultado da negativo	Si es una igualdad, ya que 3+(-5) = -2 y 4 + (-8)+2 = -2 da el mismo resultado	falso, porque 3+x+1 no puede dar 3x+1 porque no son semejantes
4	No, no porque no es lo mismo	3+(-5) 4+ (-8)+ 2 40 +9 49	falso e el resultado no es igual
5	Si, 2(-3) + 3 (-3) = 15 , = 6 + 9, = 15	3+(-5) = 4+ (-8)+ 2 Se obtienen diferentes resultados -2 = -4 + 2 = -2, =4 se obtienen diferentes resultados	falsa, porque no se puede sumar 3+ x
6	No, Si remplazamos no hay forma de que de negativo	3+(-5) = 4+ (-8)+ 2 Si, porque al realizar la operación da -2 = -2, -2 = -2	falsa, ya que si realizamos la operación seria x+ 4 = 3x +1
7	No, se reemplazaría la x por el -3 (2(-3)) + (3 (-3)) = (-6) + (-9) = -15 no porque el signo es negativo	3+(-5) = 4+ (-8)+2 =-2 = -2	los resultados son diferentes (falso) 3+x+1 3x+1 x+4 3x+1
8	No, y donde queda la x la respuesta es 5x	No es cierto porque la respuesta correcta es - 2 3+ -5 = + - = -2	falsa porque se puedes sumar 3+1 = 4 es a 4x
9	No, 2(-3) + 3 (-3) = -6 + (-9) = -15 No por que el resultado tiene que ser negativo	3+(-5) = 4+ (-8)+2 = -2 = -2 Cierta por que el resultado es igual	3+x+1 =3x+1 x + 4 = 3x+1 falsa porque el resultado no es igual
10	No, 2(-3) + 3 (-3) = (-6) + (-9) 15 $\neq$ -15	3+(-5) = 4 + (-8)+2 3 - 5 = 4 - 8 + 2	No, para x = 2 para X=3 3+(2) +1 = 3(2) +1 3+3+1 =

		-2 = -2 Si 3+(-5) = 4 + (-8)+2	3(3) +1 6 ≠ 7 7 ≠ 10
11	Si, 2x+3x=15 5x = 15 si porque su resultado lo permite	= 3+(-5) = 4 + (-8) = 3-5 = 4-8 = -2 -4 no es cierta la igualdad porque su resultado no es igual	3+x+1 3x+1 4x + 1 4x 4x es verdadera la igualdad
12	No se	No se	Falsa porqué el resultado es diferente
13	No, ya que el resultado da negativo 2(-3) + 3 (-3) = -6 + (-9) = -15 ≠15	Si, ya que en la primera da -2 y en la segunda da igual	Falsa, ya que uno es una expresión y el otro un termino, lo cual en uno es una suma y en el otro una multiplicación
14	No, porque al hacer la operación 2(-3) + 3 (-3) nos da como resultado -15	Si es cierta porque al realizar las operaciones nos da como resultado -2	Es falsa si le damos un valor a x nos daría distintos resultados. Eje: 3+x+1 3x+1 = 3+2+1 ≠ 3(2)+1 = 6 =7
15	No	**No respondió**	es verdadero por que 3+x da 3x y y se pone el otro y ya
16	No se	No se	Falsa porque creo que 3x+1 se le suma el 1 a 3x quedaría 4x
17	No, 2x+3x = 15 5x =15 5(-3) =15 -15 ≠ 15	No respondió	No respondió
18	No respondió	No respondió	No respondió
19	= 2x + 3x = 5x	No respondió	= 3 +x + 3 = 3x +1 = 4x
20	No, X = -3 2x + 3x = 15 5x = 15 5(-3)= 15 -15 ≠15 No porque sus resultados no son iguales	3-3 4-8+2 -2 = -2 =-2 -9+2=-2 La igualdad es cierta	Es verdadera 3+x+1 3x+1 = 4x =4x

21	No, no es verdadero por que el primer termino dice que es x=-3 y el segundo dice 2x+3x= 15 No es verdadera la proposición	No es cierta. Por que en el primer termino es 3+(-5) y el supuesto resultado da 4+(-8) no tiene coherencia	falsa. Por que n el primer termino es 3+x+1 y en el segundo es 3x+1en la parte que subrayé le falta el (+) entonces no tiene igualdad
22	2(-3) + 3(-3) = -15 porque no tiene signos contrarios	3+ (-5) = 4+(-8) +2 3-5 = 4 - 8+2 -2	Falsa 3+x+1 3x+1 3x = 3x
23	Si, 2x+ 3x = 5x = 5(-3) = 15 porque el 5 es positivo y es el mayor entre 5 y -3	No se	No es verdadero 3+x +1 = 4x
24	No, 2(-3) + 3 (-3) -15 por que los signos son contrarios	3+ (-5) = 4+(-8) +2 3 -5 = 4 - 8 + 2 -2 -2	Falsa
25	no se	no se	la expresión es falsa
26	No, porque debe dar -15	3 +(-5) = -2 4 + (-8) +2 = -2 es cierto	no es una igualdad porque no hay términos semejantes
27	No, el resultado da negativo	es cierta porque da el mismo resultado	la igualdad es falsa
28	Si, 2(-3) + 3(-3) = 6 + 9 = 15	3 - 5 = 2 4 - 8 + 2= -2 No es igual porque en la primera se pueden cambiar signos mientras que en la segunda no da positivo el resultado	3 + x + 1 = 3x + 1 No es igual porque "x" puede tener cualquier valor y cambiar el resultado
29	x = -3 2x + 3x = 15 No uno da positivo y el otro negativo 5x = 15 5(-3) = 15 -15 ≠ 15 R/= Uno da positivo y el otro negativo	3 +(-5) = 4 + (-8) +2 3 - 5 = 4 - 8 + 2 = -2 = -4 + 2 = -2 = -2	Falsa porque 3 + x no son semejantes , por lo tanto no se pueden sumar 3 + x + 1 ≠ 3x + 1 4 + x ≠ 3x + 1
30	No respondió	No respondió	No respondió

El signo igual como equivalencia (1ra parte de 2)

	17. ¿Las expresiones $5n - 1$ y $(3n + 2n) - 1$ son equivalentes? En cualquiera de los casos, falso o verdadero, explique ¿por qué?	18. ¿Las siguientes igualdades son ciertas $2/3 = 4/6 = 8/12 = 16/24$? Si___No__ Argumente la respuesta.
1	5n-1 y (3n+2n)-1 = Verdadero	2/3 = 4/6 = 8/12 = 16/24 = Si
2	falso porque una operación se realiza y da (5n) pero la otra operación no se puede realizar por no ser semejante	No se!!!
3	si son equivalentes porque (3n+2n)-1 es 5n-1 porque sus bases son semejantes	Si, Si porque dan el mismo resultado
4	falso porque en una expresión no más hay un término y la expresión en paréntesis hay 2 términos el resultado no es el mismo	No, no porque si se suman no dan 16 y 24
5	verdadero, porque en cualquiera de los casos el resultado es 4n	Si, todas van de forma ascendente
6	falso, ya que (3n + 2n) esta siendo multiplicado por -1	Si, porque al simplificarlos quedamos en el mismo número
7	falso porque no son equivalentes	Si, porque todas dan el mismo resultado
8	Verdadero porque si le restamos es igual que el primero	Si, porque se saca el MCM y multiplico
9	Si son equivalentes porque al resolverlos seria el mismo resultado	No, no son ciertos porque en esos casos se podría simplificar
10	5(2) -1 = 3 (2) +2 (2)-1 9 = 6 + 4 -1 Verdadero = 9	porque expresan lo mismo
11	5n-1 (3n+2n)-1 4n 5n - 1 4n es cierto si son equivalentes	Si, porque son números enteros
12	No se	No se
13	Si, ya que se obtiene el mismo resultado que es 5n - 1, lo cual seria verdadero	Si, ya que se obtienen los mismos resultados que es 0,6
14	No respondió	Si, Todos nos dan de resultado 0,6
15	No se	si por que se van simplificando
16	Verdadero	Si, si todas son igualdades porque todas dan el mismo resultado
17	No respondió	Si, expresan lo mismo
18	No respondió	No respondió
19	No respondió	2/3
20	5n – 1 y (3n +2n) – 1 Son equivalentes porque la segunda operación al ser realizada da lo mismo que la primera	Porque se simplifican las fracciones y dan iguales a la primera fracción

21	verdadero. Porque 3n+2n da 5n - 1 y estas expresiones si son equivalentes	No, porque al sumar 2+4+8 = no da 16 si no 14 y su mando 3+6+12 no da 24 si no 21.
22	No respondió	si ("operaciones de división")
23	No se	No respondió
24	5n -1 = (5n) -1	Si, por que cuando se comienza a sacar mitad van dando los resultados
25	Verdadero	Si, porque si le hacemos de la siguiente forma es igual lo que pasa es que se simplifico ("operación de descomposición")
26	No son equivalentes porque nos son iguales	Si, todos tiene el mismo común múltiplo
27	5n = 1 y (3n+2n) = 1 Verdadero	porque son equivalentes
28	5n-1 y 3n + 2n 5n - 1 Si son equivalentes porque al efectuar la operación da una igualdad	si porque al sumar el numero o la fracción da esa respuesta que esta planteada
29	5n - 1 (3n + 2 n) -1 = 5n - 1 = 5n -1 R/ Son equivalentes, tiene el mismo resultado	Si, R/ Al dividirlas los resultados son iguales ("operaciones de división")
30	No respondió	No respondió

El signo igual como equivalencia (2da parte de 2)

	19. Explique la similitud de las expresiones $3x + 2x + x = 6x$	20. ¿Qué relación hay entre la expresión $(n - 1) + n + (n + 1)$ y la expresión $3n$? Justifique su respuesta.
1	3x +2x + x =6x 3x +2x + 1 = 6x	(n – 1) + n + (n + 1) = 3n en que en la expresión hay 3n y el resultado es =3n.
2	Son semejantes por lo tanto se suman...	Ninguna porque no son semejantes para sumar o restar
3	Tienen la misma base y por ello se suman los coeficientes y se deja la base intacta	n - 1+ n+ n + 1 es igual a 3n y se tacha el uno se pueden sumar porque son semejantes
4	3x +2x + x =6x x equivale a 1	si hay una relación porque si sumamos los 3 términos da la expresión 3n
5	la similitud es la variable en este caso x	que n se suma y el resultado es 3n.
6	3x +2x + x =6x, 6x = 6x si efectuamos operación da lo mismo	ya que si resolvemos la expresión (n-1) + n + (n+1) da 3n
7	que todas son semejantes	(n-1) + n + (n+1) y 3n ninguna
8	3x 2x = 6x 1x	Hay 3 veces n sumando esto que en este caso seria 3n 2
9	3x +2x + x =6x La similitud está en la variable y su exponente, al estar igual se suman constantes	(n-1) + n + (n+1) Que 3n sería el resultado de la expresión anterior

10	al multiplicar los coeficientes da 6 por lo tanto son semejantes	n^3 3n no hay relación directa
11	3x +2x + x 6x porque si se suma es igual a 3n 6x	(n-1) + n + (n+1) 3n n - 1 +n + n +1 3n si porque su suma es igual a 3n
12	No se	No se
13	Si, ya que la suma de 3x +2x + x = 6x	Son iguales, ya que se obtiene el mismo resultado
14	La similitud es que todas tiene de base "x"	Que al realizar la operación (n-1) + n + (n+1) nos da el resultado 3n
15	Se suman los números y se deja la misma letra	No respondió
16	No se	No se
17	Todas son semejante por eso se pueden sumar	Hay términos semejantes
18	porque todas tienen las mismas variables y se pueden sumar	No respondió
19	3x + 2x + x = 6x porque la (x) tiene 1 Entonces se suman y se deja la base	No respondió
20	3x + 2x + x 6x = 6x Son equivalentes debido a que ambas operaciones dan lo mismo	n-1+n+n+1 3n Su resultado es el mismo
21	pues que hay están haciendo una suma y se multiplica 3x2=6 y se le agrega la parte literal	pues que en esta n esta tres veces lo mismo que 1 por lo tanto este da 3n
22	3x + 2x +x = 6x se suman por que son términos semejantes	No respondió
23	Si porque son semejantes entonces se suman 3x+2x+x = 6x	No se
24	La variable es "x" y todos la tienen	Que el resultado de la operación es 3n
25	que todos tiene la x y esa no esta variando	De que si se multiplica da lo mismo
26	Da bien porque se pone la misma base y se suman los exponentes	Son equivalentes porque los dos tienen como resultado 3n
27	son semejantes	que son semejantes
28	3x + 2x + x = 6x Se suman los coeficientes y es igual a 6x y todos tienen la misma base	n + n + n = 3n todos los resultados dan "n" por lo tanto se suman y da 3n
29	3x + 2x + x = 6x = 6x = 6x R/ los dos tienen el mismo resultado	(n -1) + n + (n+1) tienen resultados iguales =n -1+n+n+1 =3n R/ La relaciones es que tiene resultados iguales
30	No respondió	No respondió

Anexo 3. Actividad de Aprendizaje 1

TEMA:	Perímetros, Áreas y Volúmenes
GRADO:	Noveno de Educación Básica Secundaria
DURACIÓN:	5 Clases
PENSAMIENTO MATEMÁTICO:	Pensamiento métrico y sistemas de medidas
MATERIAL DIDÁCTICO:	Regla / Cinta métrica Varas de madera de colores según su longitud Cuerda de material no elástico

DESCRIPCIÓN:

1. Conformar equipos de seis (6) alumnos, a quienes el docente asignará superficies y/o sólidos a los que los estudiantes deberán tomarles medidas.
2. Utilizando varas de madera de colores, los estudiantes realizarán el proceso de medición (de ser posible dos veces con diferentes varas) y registrar los datos correspondientes.
3. Para las medidas en las que no sea posible la utilización de las varas de colores, se empleará la cuerda para tomar la longitud y posteriormente se medirá con la regla.
4. Al terminar, los grupos se dirigirán al aula para transponer los datos obtenidos al lenguaje algebraico, resolviendo el cuestionario indicado.
5. Luego el docente asignará a cada equipo uno de los ejercicios planteados, para que sea resuelto por el equipo. En este ítem los alumnos están en libertad de utilizar el celular como herramienta para buscar información, siempre y cuando la misma sea referenciada y corresponda a una fuente confiable.

   Durante esta actividad, uno de los miembros tendrá la labor explícita de observar cómo se desarrolla el proceso de resolución y tomará apuntes; luego al finalizar, los miembros del equipo realizarán una reflexión sobre qué hicieron y cómo lo hicieron, para compartir su experiencia con el grupo.
6. Finalmente, se recrearán unas micro olimpiadas de seis problemas propuestos por el docente, donde para la resolución de cada ejercicio participará uno de los miembros del equipo – sin repetir turno – de tal manera que todos los estudiantes del grupo participen.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA	**GUÍA ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 1**	VERDAD, VIRTUD Y CIENCIA

Nombre:____

Perímetros, Áreas y Volúmenes

Ánimo, al finalizar esta actividad estarás en capacidad de:

- Seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, con niveles de precisión apropiados.
- Comprender las fórmulas para calcular el perímetro, el área superficial y el volumen de diversas figuras geométricas.
- Describir y calcular áreas y volúmenes de prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas.
- Generalizar procedimientos de cálculo válidos para encontrar perímetros, el área de regiones planas y el volumen de sólidos.
- Adquirir y demostrar destreza en el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes de lugares y objetos propios del entorno.

Para recordar…

PERÍMETRO:

El perímetro es la suma de todos los lados de una figura geométrica.

ÁREA:

El área es la cantidad de superficie de una figura plana o también, es el tamaño de la región interna de una figura geométrica.

VOLUMEN:

Volumen es la medida del espacio ocupado por un cuerpo. El volumen de los cuerpos es el resultado de sus tres dimensiones: ancho, alto y profundidad.

EJERCICIO 1:

Calcular el área total y el volumen del cilindro de radio 3 cm. y altura 4 cm.

Se reemplazan las medidas del radio y de la altura en las expresiones correspondientes:

Área: $A = 2\pi r\ (h + r)$

$$A = 2\pi\ (3cm)\big((4cm) + (3cm)\big)$$

$$A = 2\pi\ (3cm)\ (7cm)$$

$$A = (42\ \pi)\ cm^2$$

$$A = (42)(3{,}14)\ cm^2$$

$$A = 131{,}88\ cm^2$$

Volumen: $V = \pi r^2 h$

$$V = \pi\ (3\ cm)^2 (4\ cm)$$

$$V = (3{,}14)\ (9\ cm^2)\ (4\ cm)$$

$$V = 113{,}04\ cm^3$$

Ejercicio para reflexionar:

Hace mucho tiempo, había un granjero cuya finca tenía forma cuadrada. Cada lado del cuadrado media exactamente cien pasos de largo. Un día llamo a la casa del granjero un hombre cansado, cubierto de polvo, pidiendo algo de comer. El granjero, que era muy bondadoso, le ofreció un almuerzo. Una vez que hubo terminado de comer, el forastero dijo estas palabras: “Granjero, yo soy tu rey y como recompensa por tu bondad al ofrecerme comida, creyendo que yo no era sino un humilde extranjero, voy a doblar el área de tu finca. Pero cuando hayas añadido el nuevo terreno, tu granja deberá seguir teniendo la forma de un cuadrado”.

El granjero se puso contentísimo, pues ahora podría sembrar el doble de superficie. Sin pensarlo dos veces, salió a medir su nuevo terreno para poder después cercarlo. Pero en seguida se dio cuenta de que había un problema.

En un principio parecía fácil doblar su terreno cuadrado. Parecía que, dado que cada lado del cuadrado media cien pasos de largo, cada lado del nuevo cuadrado habría de medir doscientos pasos de largo, es decir, dos veces la longitud de los anteriores lados. Pero no resultó. ¿Por qué no es esta la solución? ¿Qué ocurre con el área de un cuadrado cuando se duplica el lado?. Busca una solución para el problema del granjero, compártela con tus compañeros.

Fuente: MEN, 2012

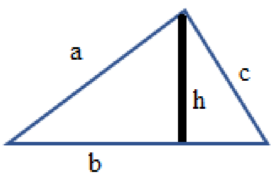
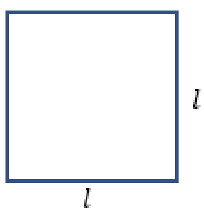
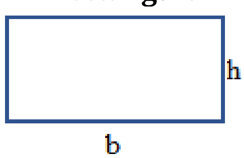
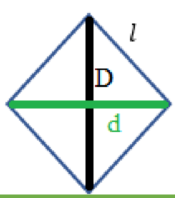
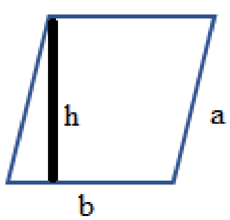
Recuerda!

El área de una figura irregular puede calcularse descomponiéndola en figura geométricas conocidas.

Ejercicio:

Dibujar un polígono irregular con sus medidas, luego dividir la figura en polígonos conocidos y calcular el área como la suma de áreas parciales.

Tabla de Perímetros y Áreas de figuras geométricas

Figura Geométrica	Elementos	Perímetro	Área
Triángulo 	b = base h = altura a = lado 1 b = lado 2 c = lado 3	$P = a + b + c$	$A_r = \frac{bh}{2}$
Cuadrado 	l = lado	$P = 4l$	$A_r = 4l^2$
Rectángulo 	b = base h = altura	$P = 2b + 2h$	$A_r = bh$
Rombo 	l = lado d = diagonal menor D = diagonal mayor	$P = 4l$	$A_r = \frac{dD}{2}$
Romboide 	h = altura a = lado 1 b = lado 2	$P = 2b + 2a$	$A_r = bh$

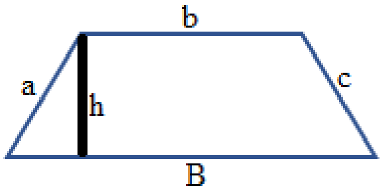
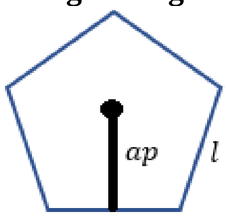
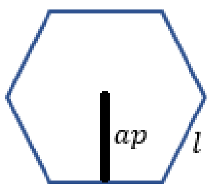
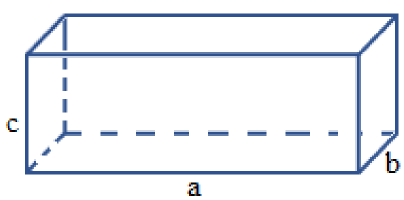
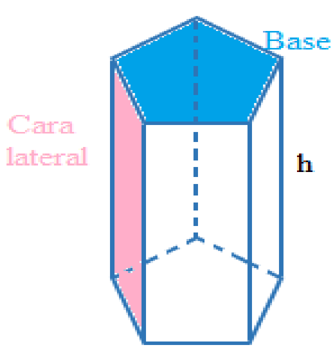
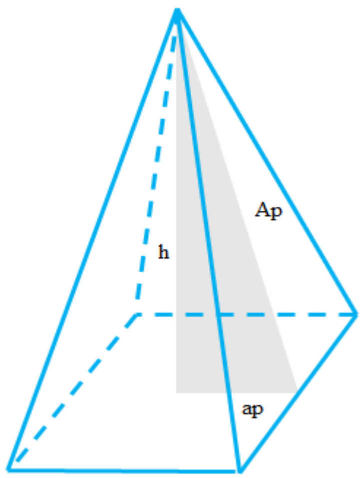
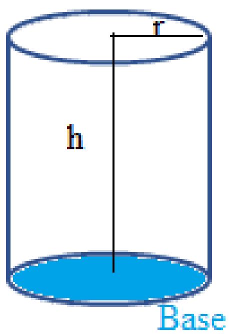
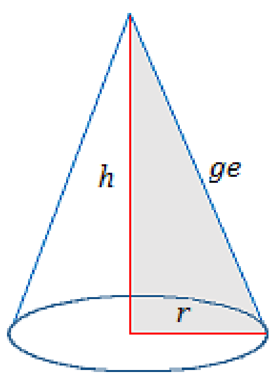
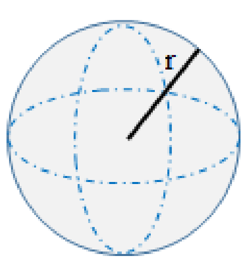
Trapecio 	b = base menor B = base mayor h = Altura a = lado no paralelo 1 c = lado no paralelo 2	$P = a + b + B + c$	$A_r = \frac{(b + B)\,h}{2}$
Pentágono regular 	ap = apotema l = lado	$P = 5l$	$A_r = \frac{P\,ap}{2}$
Hexágono 	ap = apotema l = lado	$P = 6l$	$A_r = \frac{P\,ap}{2}$

Tabla de Áreas y Volúmenes de sólidos

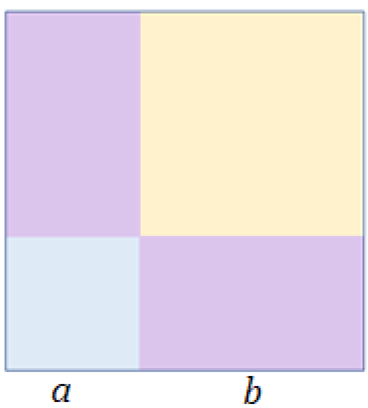
Sólido	Elementos	Área	Volumen
Ortoedro 	a = lado 1 b = lado 2 c = lado 3	$A_r = 2ab + 2ac + 2bc$	$V = abc$
Prisma 	A_B = área de la base h = altura A_L = área lateral P_B = perímetro de la base	$A_r = A_L + 2A_B$ Donde: $A_L = P_B + h$	$V = A_B h$

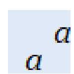
Pirámide 	$Ap =$ apotema lateral de una pirámide $ap =$ apotema de la base $h =$ altura $A_L =$ área lateral $P_B =$ perímetro de la base	$A_r = A_L + A_B$ Donde: $A_L = \frac{P_B\, Ap}{2}$ $Ap = \sqrt{h^2 + ap^2}$	$V = \frac{A_B\, h}{3}$
Cilindro 	$r =$ radio $h =$ altura	$A_r = 2\pi r\,(h + r)$	$V = \pi r^2 h$
Cono 	$r =$ radio $h =$ altura $ge =$ generatriz	$A_r = \pi r\,(g + r)$ Donde: $ge = \sqrt{h^2 + r^2}$	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
Esfera 	r = radio	$A_r = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

- Recuerda que los pasos de la estrategia de Polya para resolver un problema son:
  1. Entender el problema
  2. Desarrollar o Configurar un plan
  3. Ejecutar el plan
  4. Comprobar el resultado o mirar hacia atrás

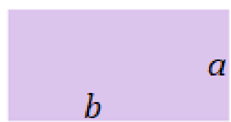
EJERCICIO 2:

Si $a = 3$ cm y $b = 5$ cm, determinar cuál es el área de la siguiente superficie, y escribir las expresiones algebraicas para su perímetro y su área:



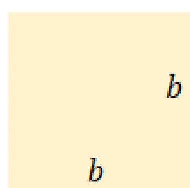


$A_r = l^2 = a^2 = (3\text{ cm})^2 = 9\text{ cm}^2$



$A_r = bh = ba = 5\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 15\text{ cm}^2$

Para los dos rectángulos $A_r = 30\text{ cm}^2$



$A_r = l^2 = b^2 = (5\text{ cm})^2 = 25\text{ cm}^2$

El lado del cuadrado más grande está compuesto por la suma de a y b. Luego $l = a + b$

Así, la expresión algebraica del perímetro será $= 4l = 4(a + b) = 4a + 4b$ y la expresión algebraica del área del cuadrado será $A_r = l^2 = (a + b)^2$ y empleando para el binomio un caso de factorización $A_r = a^2 + 2ab + b^2$.

Luego, reemplazando con las cantidades conocidas:

$$A_r = (3 + 5)^2\text{ cm}^2 = (8)^2\text{ cm}^2 = 64\text{ cm}^2 \text{ o también:}$$

$$\begin{aligned} A_r &= (3\text{ cm})^2 + 2 \times (3\text{ cm} \times 5\text{ cm}) = (5\text{ cm})^2 \\ &= 9\text{ cm}^2 + 2 \times (15\text{ cm}^2) + 25\text{ cm}^2 \\ &= (9 + 30 + 25)\text{ cm}^2 \\ &= 64\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

RESULTADOS ACTIVIDAD PRÁCTICA:

Registra en la siguiente tabla, anexando en una hoja, si es necesario adicionar más datos, las medidas tomadas a superficies y sólidos en la actividad realizada en el patio/cancha del colegio:

Id	Nombre Superficie/Sólido	Dimensiones
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		

Id	Nombre Superficie/Sólido	Dimensiones
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		
25		
26		
27		
28		
29		
30		

Para cada Id determinar:

1. Número de figura:________________________
2. Tipo de figura:________________________
3. Si se trata de una superficie, determinar en cm el Perímetro_______ y el Área_______en cm^2. Acorde a la cantidad de varas de colores que se utilizaron para tomar sus medidas, describir la expresión algebraica para el Perímetro:______________________________, también describir la expresión algebraica para el Área:____________________________.
4. Si se trata de un sólido, determinar, en cm^3 el Volumen: ______________________. Acorde a la cantidad de varas de colores que se utilizaron para tomar sus medidas, describir la expresión algebraica para el Volumen:___________________________.

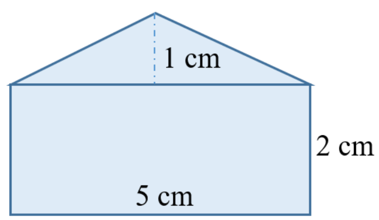
VÍDEOS RECOMENDADOS:

1. https://www.youtube.com/watch?v=TheARpnyMzw
2. https://www.youtube.com/watch?v=fTIP-SIOCBA&feature=youtu.be&t=127
3. https://www.youtube.com/watch?v=DLe1HgyD84I&feature=youtu.be

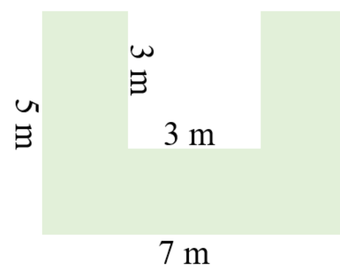
EJERCICIOS:

1. Dibujar las siguientes figuras y calcular sus áreas:
   a. Un rectángulo de 8 cm de altura y la mitad de base.
   b. Un cuadrado de 5 cm de lado.
   c. Un paralelogramo de base 5 m y altura 3 m.
   d. Un rectángulo de base 7 m y perímetro 24 m.
   e. Un triángulo equilátero de 90 m de perímetro.
2. Hallar el perímetro y el área de un rombo de diagonales 2 y 4 cm.
   TIP!!: Para hallar el lado, valerse del Teorema de Pitágoras
3. Determinar el área de las siguientes figuras compuestas:

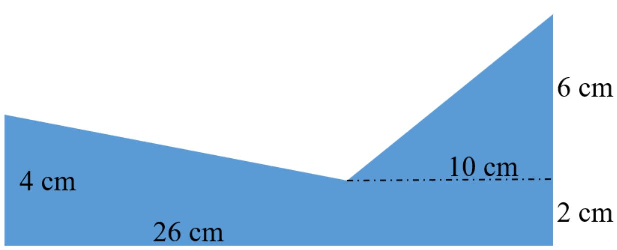
a.



b.



c.



4. Determinar para una caja de base cuadrada de lado x y altura h, la expresión algebraica que permite calcular su volumen.
5. Calcular el área lateral y el volumen de una caja en forma de prisma cuya base es un hexágono regular de lado 15 cm y cuya altura mide 30 cm. Si se desea poner una cinta alrededor del prisma, de forma que quede paralela a la base, ¿cuánta cinta se necesita?
6. Averigua sobre las pirámides de Egipto: sus dimensiones, cuándo fueron construidas, y con qué propósito. A partir de los datos de internet calcula su volumen y área.

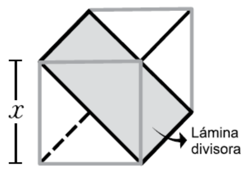
7. Para empacar dos artículos en una misma caja la empresa requiere dividirla en dos compartimientos iguales con una lámina de cartón, como se indica en la figura al lado de las opciones de respuesta. El área de la lámina divisoria, en unidades cuadradas, está representada por la expresión:

   a. x^2

   b. $2x^2$

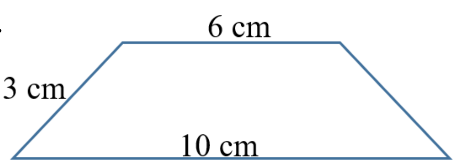
   c. $x\sqrt{2x^2}$

   d. $2\sqrt{2x^2}$

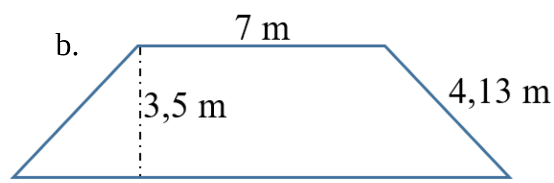


8. Si se toma un cono de altura 1 cm y se hace variar el radio, ¿cómo cambia el volumen cuando cambia el radio de la base? Si el radio se dobla, ¿el volumen se dobla también?
9. Hallar el área de los siguientes trapecios isósceles:

a.

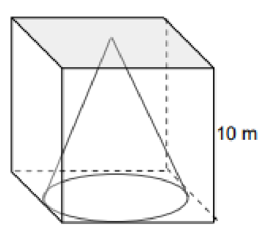


b.



10. Hallar el área de la siguiente señal de tráfico, si su altura es 90 cm y su lado mide 35 cm.

11. Hallar el volumen comprendido entre el cubo y el cono de la figura:



12. Medir, utilizando una cinta métrica, el perímetro de la circunferencia de un objeto cilíndrico (por ejemplo, un alimento enlatado). A continuación, medir con una regla su diámetro. Finalmente, dividir el perímetro entre el diámetro. ¿Se obtuvo para los objetos siempre, sea cual fuera el objeto utilizado, una cantidad muy próxima a $\pi \cong 3{,}1415926$?
13. Averigua sobre las pirámides de la civilización Maya como la de Chichen-Itzá o la pirámide de la Danta. Calcula su volumen aproximado a partir de datos que se encuentran en internet.

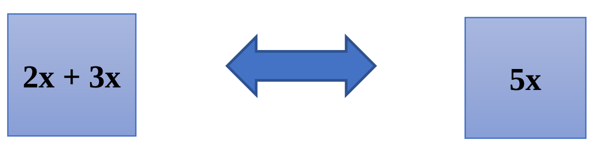
Anexo 4. Actividad de Aprendizaje 2

TEMA:	Expresiones Algebraicas
GRADO:	Noveno de Educación Básica Secundaria
DURACIÓN:	5 Clases
PENSAMIENTO MATEMÁTICO:	Pensamiento variacional y Sistemas algebraicos
MATERIAL DIDÁCTICO:	Concéntrese matemático

DESCRIPCIÓN:

1. Conformar equipos de cinco (5) alumnos cada uno.
2. Aunque en las matemáticas lo ideal es aprender conceptos y recordar estructuras a veces se necesita de la memoria ya que no en todo momento se tiene que deducir, es este el caso de la factorización.

   Para construir el Concéntrese matemático se realiza el siguiente procedimiento:
   - Para las piezas de cartulina (cartas) debemos utilizar la regla y recortar cuadrados de 6 cm de lado. En total debemos obtener 24 piezas.
   - En 12 de las cartas se escribirá una expresión algebraica, mientras que en las otras 12 una expresión equivalente.
3. Para comenzar la partida, el docente deberá mezclar todas las cartas y colocarlas en forma de rejilla, puede ser de 6 columnas y 4 filas, de manera que las imágenes no se vean.
4. El primer jugador dará la vuelta a dos cartas, si son equivalentes obtiene punto y sigue jugando, de lo contrario las fichas se vuelven a voltear y será el turno del siguiente jugador.
5. El objetivo es lograr memorizar la ubicación de las diferentes cartas con el fin de voltear las dos cartas que formen pareja, para ganar el punto.



Ejemplo del uso de Concéntrese Matemático

6. La partida se terminará cuando se hayan encontrado todas las parejas.
7. El jugador que más cartas (puntos) haya conseguido ganará la partida, y representará a su equipo para una partida de todo el grupo.
8. Al finalizar se realizará dentro de los equipos una autoevaluación y una coevaluación manifestando su percepción respecto a la adquisición de nuevos conocimientos, e indicarán cuál consideran fue su desempeño y si tienen la percepción de haber logrado algún progreso académico.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA	**GUÍA ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 2**	VERDAD, VIRTUD Y CIENCIA

Nombre:____

Expresiones Algebraicas

Nuestros Objetivos:

- Leer, escribir y realizar operaciones básicas con expresiones algebraicas y transformarlas en expresiones equivalentes.
- Construir expresiones algebraicas a partir de información obtenida de un texto narrativo y plantear métodos de solución para dichas expresiones.
- Identificar expresiones algebraicas a partir de la comprensión de textos.
- Resolver problemas cotidianos y de contexto real cuantificable usando operaciones y procedimientos que apliquen las matemáticas básicas.
- Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y probar conjeturas.
- Manejar intervalos y resolver desigualdades lineales y con valor absoluto.
- Comprender que las expresiones ya no son letras que representan números, son objetos matemáticos con los cuales se pueden realizar todo tipo de operaciones.
- Aprender a transformar expresiones en expresiones equivalentes, realizar operaciones entre expresiones, transcribir e interpretar expresiones en términos del contexto, y usar expresiones para construir funciones, plantear y resolver ecuaciones y desigualdades.
- Identificar las partes de una ecuación e inecuación.
- Realizar transposición de términos
- Plantear y resolver problemas que involucren casos de factorización y de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Hagamos un Repaso:

VARIABLE:

Un símbolo que representa un número o elemento que puede tomar cualquier valor particular.

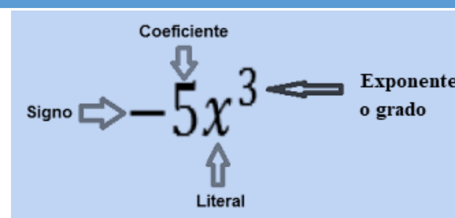
CONSTANTE:

Un símbolo que representa un valor particular.

TÉRMINO ALGEBRAICO:

Es un producto indicado entre constantes y variables o parte literal.

Ejemplos: - $3x$, $\frac{1}{2}x^5$, $5x^{-3}$, - $4x^2y^3$



EJERCICIO 1:

El valor numérico de un término algebraico es el valor que se obtiene al reemplazar las variables por valores numéricos determinados. Por ejemplo, si x = 1, el valor numérico de -12x^5 es:

$$-12\,(1)^5 = -12$$

EXPRESIÓN ALGEBRAICA:

Es una suma indicada de términos algebraicos:

Ejemplo: $x^4 + 8x^{-3}$

MONOMIO:

Es un término algebraico donde los exponentes de las variables son enteros positivos

Ejemplos: $2x^5$, -$3x^4y^6$, -$\sqrt{12}\,xyz^2$

MONOMIOS SEMEJANTES:

Dos monomios son semejantes si sus partes variables son exactamente iguales, las mismas variables con los mismos exponentes.

$3x^2b^5$ es monomio semejante a ¼ x^2b^5

POLÍNOMIO:

Es una suma indicada de monomios:

Ejemplos: $3x^4$+ $5xy$, es un **polinomio de dos términos o binomio**

$2x^4 + 8x^3 - 2xy^2$, es un **polinomio de tres términos o trinomio**

Sin embargo $4x^{-5} + 17xy^4$ **No es polinomio, porque el término $4x^{-5}$ no es un monomio**

GRADO DE UN POLINOMIO:

Corresponde al valor del término con mayor grado.

Ejemplo: Hallar el grado del polinomio $4xy^3 + 2x^4 + x^6$

Toda vez que, $4xy^3$ Grado 3

$2x^4$ Grado 4

x^6 Grado 6

El polinomio es de grado 6

Operaciones:

La **adición** se puede realizar entre monomios semejantes. Para ello, se suman los coeficientes y se deja la parte variable común.

$$3x^4y^6 + 10\ x^4y^6 = 13\ x^4y^6$$

El opuesto o inverso aditivo de un monomio corresponde al mismo monomio precedido del signo (-). El opuesto de $5a^2bc^2$ es (- $5a^2bc^2$)

La **sustracción** se puede interpretar como la suma entre el primer término y el opuesto del segundo término.

$$6x^2d^3 - 20x^2d^3 = 6x^2d^3 + (-\ 20x^2d^3) = (6 + (-\ 20))\ x^2d^3 = -\ 14\ x^2d^3$$

Propiedades generales de las potencias:

Propiedades para facilitar el producto o el cociente entre monomios.

$1^n = 1$	$a^1 = a$	$a^0 = 1, (a \neq 0)$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$		$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$		$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
$a^{-1} = \dfrac{1}{a}, \quad (a \neq 0)$		$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}, \quad (a \neq 0)$		$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \dfrac{b^n}{a^n}$

EJERCICIO 2:

Se tiene un rectángulo de largo de a^2 y de ancho a^3, determine el área del rectángulo:

$$A = bh$$

$$A = (a^2)(a^3)$$

$$A = a^{2+3}$$

$$A = a^5$$

La factorización es un proceso que consiste en representar una expresión algebraica como un producto de sus factores.

Monomio como factor común: Si todos los términos de una expresión algebraica tienen un monomio como factor común, éste se puede factorizar.

Ejemplo: $$3xy + 6x^2y - 12xy^3 + 9x^2y^2$$

El monomio común es $3xy$, luego (multiplicando y dividiendo por el factor común):

$$= 3xy\left(\frac{3xy}{3xy} + \frac{6x^2y}{3xy} - \frac{12xy^3}{3xy} + \frac{9x^2y^2}{3xy}\right)$$

$= 3xy\,(1 + 2x - 4y^2 + 3xy)$ Factorización del polinomio

Un **trinomio cuadrado perfecto de la forma $\boldsymbol{x^2 \pm 2xy + y^2}$** se puede factorizar como el cuadrado de la suma o diferencia de las raíces de los dos términos al cuadrado.

Ejemplo: $x^2 + 6x + 9$ es un trinomio cuadrado perfecto

Las raíces de los cuadrados son x y 3.

Luego, $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

La **diferencia de dos cuadrados** se puede factorizar como la suma de las raíces por la diferencia de estas.

Ejemplo: en $x^2 - 16$ las raíces de los dos términos son x y 4.

Luego, $x^2 - 16 = (x + 4)\,(x - 4)$

Para factorizar un trinomio de la forma $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$ se buscan dos números m y n tales que

$m + n = b$ y $n \times m = c$

Si se encuentran tales números, el trinomio se puede factorizar como:

$$x^2 + bx + c = (x + m)\,(x – n)$$

Para adicionar polinomios se realiza el siguiente procedimiento:
1. En primer lugar se suprimen los paréntesis
2. Luego se reúnen los términos semejantes
3. Finalmente se suman términos semejantes

EJERCICIO 3:

Sumar: $(2s^3 + 4s^2p^4 - 6) + (2s^2p^4 - 5s^3 + p - 4)$

Se suprimen los paréntesis:

$$2s^3 + 4s^2p^4 - 6 + 2s^2p^4 - 5s^3 + p - 4$$

Se reúnen los términos semejantes:

$$(2s^3 - 5s^3) + (4s^2p^4 + 2s^2p^4) + p + (-6-4) =$$

Se suman términos semejantes:

$$-3s^3 + 6s^2p^4 + p - 10$$

El **opuesto o inverso aditivo** de un polinomio se expresa como el mismo polinomio, pero precedido del signo negativo. Por ejemplo, el opuesto de $2r - 3t^4$ es: - $(2r - 3t^4)$, que si se destruye el paréntesis, es equivalente al polinomio compuesto por el inverso aditivo de cada término: - $(2r - 3t^4)$ = - $2r + 3t^4$

La sustracción entre dos polinomios se interpreta como la suma del minuendo con el inverso aditivo del sustraendo.

EJERCICIO 4:

Hallar la diferencia: $(6fg^2 + 4fg - 6f^3) - (2fg - 5\,fg^2 + f^3 - 3) =$

Expresando como suma:

$$(6fg^2 + 4fg - 6f^3) + (-2fg + 5\,fg^2 - f^3 + 3) =$$

Eliminando paréntesis:

$$6fg^2 + 4fg - 6f^3 + -2fg + 5\,fg^2 - f^3 + 3 =$$

Agrupando términos semejantes:

$$(6fg^2 + 5fg^2) + (4fg - 2fg) + (-6f^3 - f^3) + 3 =$$

Reduciendo términos semejantes:

$$11fg^2 + 2fg - 7f^3 + 3 =$$

El producto entre polinomios es otro polinomio que se obtiene mediante el proceso descrito a continuación:

1. Se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.
2. Se efectúa el producto entre monomios, aplicando la propiedad del producto de potencias con la misma base.
3. Se suprimen paréntesis y se reducen términos semejantes.

EJERCICIO 5:

Hallar el producto de: $(2g^2 + 3gj) \times (g - gj + 3j^2)$

1. Aplicamos la propiedad distributiva:

$$[(2g^2 \times g) + (2g^2 \times (-gj)) + (2g^2 \times 3j^2)] + [(3gj \times g) + (3\,gj \times (-gj)) + (3gj \times 3j^2)]$$

2. Producto entre monomios:

$$[2g^3 + (-2g^3j) + 6g^2j^2] + [3g^2j + (-3g^2j^2) + 9gj^3]$$

3. Se suprimen paréntesis y se reducen términos semejantes

$$= 2g^3 - 2g^3j + 6g^2j^2 + 3g^2j - 3g^2j^2 + 9gj^3$$

$$= 2g^3 - 2g^3j + (6g^2j^2 - 3g^2j^2) + 3g^2j + 9gj^3$$

$$= 2g^3 - 2g^3j + 3g^2j^2 + 3g^2j + 9gj^3$$

POTENCIAS DE POLINOMIOS:

Al igual que en los números reales, las potencias enteras positivas de un polinomio se encuentran mediante el producto repetido de una expresión por sí misma.

Ejemplo: Hallar la potencia del binomio $(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$

Los productos notables son productos que pueden realizarse mediante ciertas reglas fijas que agilizan la obtención del resultado.	
Descripción	**Ejemplo**
El cuadrado de una suma de dos términos es igual al cuadrado del primero más el doble producto del primero por el segundo, más el segundo al cuadrado.	$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
El cuadrado de una diferencia de dos términos es igual al cuadrado del primero, menos el doble producto del primero por el segundo, más el segundo al cuadrado.	$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

El producto de la suma de dos términos por la diferencia de los mismos es igual a la diferencia de los cuadrados de los dos términos.	$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$
El cubo de la suma de dos términos es igual al cubo del primer término más el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, más el segundo al cubo.	$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
El cubo de la diferencia de dos términos es igual al cubo del primer término menos el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, menos el segundo al cubo.	$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$
El producto de dos binomios con un término común es igual al cuadrado del término común más el producto entre la suma de los términos no comunes por el término común más el producto de los términos no comunes.	$(x+n)(x+m)=x^2+(n+m)x+(nm)$

Para dividir un polinomio entre un monomio se divide cada uno de los términos del polinomio entre el monomio.

Para realizar la división entre dos polinomios se realiza el siguiente proceso:
1. Se ordenan en forma descendente los polinomios:
2. El primer término del cociente se obtiene dividiendo el primer término del dividendo entre el primer término del divisor.
3. Se multiplica el término encontrado por los términos del divisor y el producto se resta del dividendo.
4. Se divide el primer término del residuo entre el primer término del divisor, para obtener el segundo término del cociente.

Se repiten los pasos descritos en 2, 3 y 4 hasta obtener como cociente cero (0) o un polinomio de menor grado que el cociente.

EJERCICIO 6:

El grupo deberá averiguar cómo se realiza la división entre dos polinomios. Todos deben conocer el procedimiento, pues uno de los miembros del grupo, al azar, será escogido para realizar la correspondiente explicación en el tablero.

VÍDEOS RECOMENDADOS:

- https://www.youtube.com/watch?v=XYNruwyOY_s
- https://www.youtube.com/watch?v=gpBEUnFBhGc
- https://www.youtube.com/watch?v=uDUr3TKE8IQ

POTENCIAS DE POLINOMIOS:

Una fracción algebraica corresponde a un cociente entre expresiones algebraicas.

$$\frac{x^3 - 3x + 4}{x^2 - 9}$$

Para simplificar una fracción algebraica, en primer lugar se factoriza cada uno de sus polinomios y luego se divide el numerador y el denominador por los factores comunes a ambos.

Antes de realizar operaciones con fracciones algebraicas es conveniente simplificarlas para abreviar los procesos.

Ejemplo: al simplificar la expresión:

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 + 5x + 6} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{(x + 2)(x + 3)} = \frac{\cancel{(x + 3)}(x - 3)}{(x + 2)\cancel{(x + 3)}} = \frac{(x - 3)}{(x + 2)}$$

Para sumar dos fracciones algebraicas homogéneas se suman los numeradores y se deja el denominador común.

$$\frac{x^3}{x^2 + 1} + \frac{x^3 + 4}{x^2 + 1} = \frac{2x^3 + 4}{x^2 + 1}$$

$$\frac{x+1}{\mathrm{x}^2}+\frac{4}{x+1}=\frac{(x+1)(x+1)}{x^2(x+1)}+\frac{4x}{x^2(x+1)}$$

$$\frac{x^2+2x+1+4x^2}{\mathrm{x}^3+\mathrm{x}^2}=\frac{5x^2+2x+1}{\mathrm{x}^3+\mathrm{x}^2}$$

Para sumar fracciones algebraicas heterogéneas primero se convierten en homogéneas, amplificando cada una por el denominador de la otra, y luego se suman.

El producto entre fracciones algebraicas se encuentra multiplicando los numeradores entre sí y los denominadores entre sí.

$$\left(\frac{x+2}{x}\right)\cdot\left(\frac{x^2+x}{x^2-5}\right)=\frac{(x+2)(x^2+x)}{x\,(x^2-5)}=\frac{x^3\ +3x^2+2x}{x^3-5x}$$

EJERCICIOS:

1. Para el valor de z = - 10, ¿es verdadera la proposición $2z + 5z = 65$?
2. ¿Si en la expresión $q = 5r + 12$ la variable r cambia, el valor de "q" también cambia?
3. Si $x + y = 13$ ¿Cuánto es $x + y + w$?
4. Determine si la igualdad 8 + (– 4) = 12 + (– 23) + 7 es cierta o no.
5. Si $d + 7 = d + e$ ¿Cuál es el valor de e?
6. Sume el número 8 con el término $2n$.
7. ¿Cuál es el resultado de sumar $3k + m$?
8. ¿Es falsa o verdadera la igualdad $(3 + x + 1) = (3x + 1)$?
9. Según la ecuación $f = \frac{1}{2}g$, ¿qué valores de g hacen que "f" sea un número natural par positivo?
10. Listar todos los valores (enteros positivos) de e y de f cuando $e + f = 12$
11. ¿Qué expresión es mayor: $4n$ o $(n + 6)$?

Anexo 5. Actividad de Aprendizaje 3

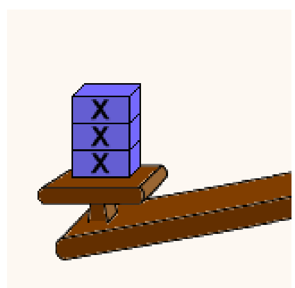
TEMA:	Ecuaciones Lineales
GRADO:	Noveno de Educación Básica Secundaria
DURACIÓN:	5 Clases
PENSAMIENTO MATEMÁTICO:	Pensamiento variacional y Sistemas algebraicos
MATERIAL DIDÁCTICO:	Balanza algebraica

DESCRIPCIÓN:

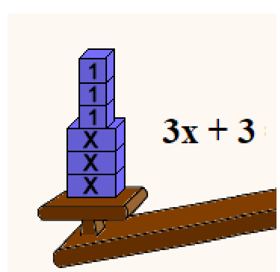
1. Asistir al aula de sistemas del colegio, en parejas para cada equipo de computo.
2. Se ingresa al link:
   http://www.hoodamath.com/mobile/games/algebra-balance-equations/game.html
3. Se muestra a los estudiantes que si conceptualizamos las ecuaciones algebraicas como una balanza de pesas en las que sus pesas siempre se deben mantener en equilibrio. En este caso los "pesos" que se colocan en cada platillo son, o números reales, o expresiones algebraicas, según la expresión solicitada automáticamente por el programa al iniciarlo por primera vez o al oprimir el botón "New Problem".
   Ejemplo:

Expresión algebraica $3x + 3 = x + 9$

- Para el término de la izquierda, se arrastra la variable "x" cuantas veces corresponda, según su coeficiente:

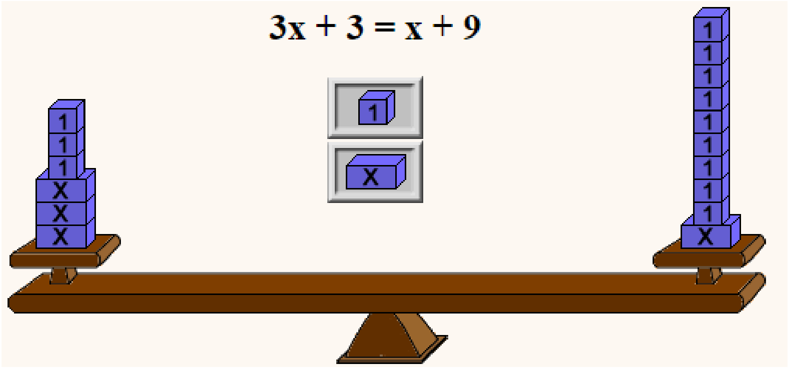


- Posteriormente se arrastra el "1" según el valor del término de la primera constante:



Ejemplo Balanza Algebraica – 1er. Término

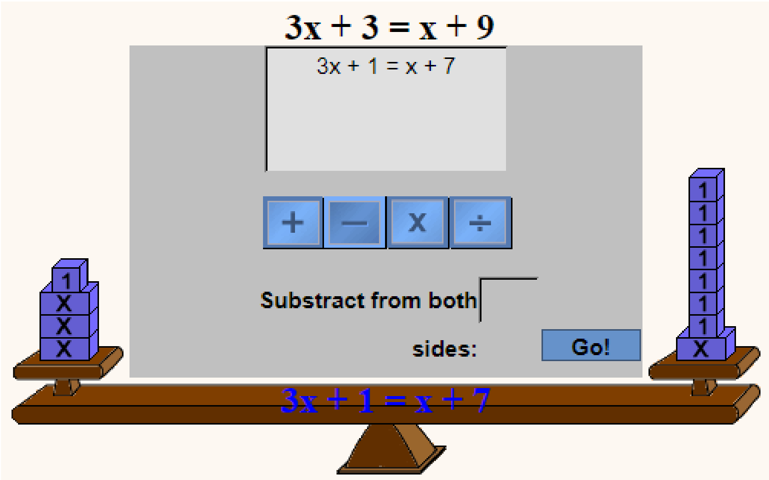
- Se sigue el mismo procedimiento y se completa la igualdad, representando la expresión del segundo término:



4. El programa permite que una vez se oprime el botón “Continue” se adicione, reste, multiplique o divida algún número a ambos lados de las expresiones originales. En este sentido es importante tener en cuenta la siguiente tabla que indica cómo escribir expresiones básicas con variables:

Operación	**Lenguaje**	**Expresión algebraica**
Suma	Más, Adición, Con aumento de	$x + 3$
Resta	Sustraer, Diferencia, Menos que, con decremento de k	$p - 6$
Multiplicación	Veces, Producto	$8w$
División	Dividir, Cociente	a / 9

Así, sustrayendo 2 del ejemplo con el que trabajamos, tendremos que:



5. Al finalizar la actividad se les pidió a los alumnos manifestar su opinión sobre las actividades realizadas en grupo y el uso de espacios físicos diferentes al aula de clase en la que tradicionalmente se dicta la asignatura.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA	**GUÍA ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 3**	VERDAD, VIRTUD Y CIENCIA

Nombre:____

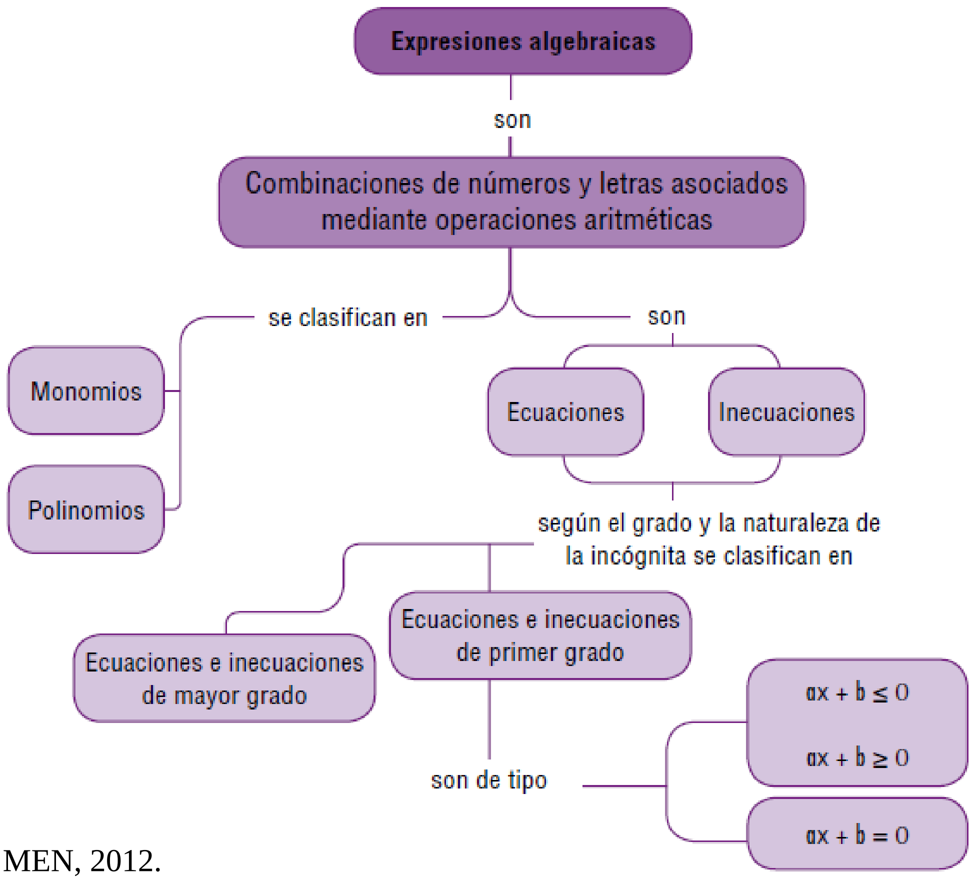
Expresiones Algebraicas

OBJETIVOS:

- Obtener e interpretar soluciones matemáticas y gráficas de ecuaciones lineales.
- Plantear y resolver ecuaciones lineales y desigualdades.
- Plantear ecuaciones de primer grado y sus métodos de solución, a partir de la comprensión de textos de tipo literario.
- Analizar problemas que involucran funciones lineales y aplicación de sus propiedades a través de una simbología de ecuación e inecuación con dos balanzas: una en equilibrio que simboliza la ecuación (tiene $=$) y otra desequilibrada que simboliza la inecuación (tiene $<, \leq, >, \geq$)
- Analizar diferentes situaciones del entorno, y reconocer las funciones lineales, con la revisión metacognitiva del contexto de un problema, se llega a determinar si la respuesta que se produce es sensata o razonable.
- Identificar diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.
- Plantear expresiones que muestren la variabilidad de una situación dada.
- Utilizar ecuaciones e inecuaciones para resolver problemas.
- Identificar la variable independiente y la variable dependiente en una función.
- Construir la tabla de valores de una función lineal

VÍDEOS RECOMENDADOS:

1. https://www.youtube.com/watch?v=o4qqOPsKq9Y&feature=youtu.be
2. https://www.youtube.com/watch?v=Wfb7ILDo_iw&feature=youtu.be
3. https://www.youtube.com/watch?v=mzYBjxZc35U&feature=youtu.be
4. https://www.youtube.com/watch?v=8qwW0PCRLLc&feature=youtu.be

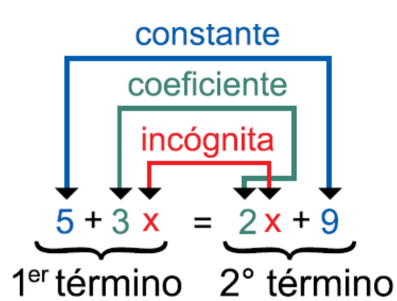


Fuente: MEN, 2012.

ECUACIÓN y FÓRMULA:

Una ecuación es una igualdad que tiene una o más cantidades desconocidas, llamadas incógnitas. Mientras que una fórmula es la ecuación que muestra una relación entre una o más variables. Ejemplo: área del rectángulo: $A_r = bh$.

Componentes de una ecuación:



La solución de una ecuación es el valor numérico por el cual se puede reemplazar la incógnita para que la igualdad sea verdadera.
Para resolver ecuaciones, se realiza transposición de términos, que no es más que la aplicación sucesiva de la propiedad uniforme de las **igualdades.**

EJERCICIO 1:

Resolvamos la siguiente ecuación:

$$8x - (6x + 12) = 14 - 3\,(x + 2)$$

Antes de suprimir los paréntesis es necesario recordar que, cuando hay un coeficiente antes de ellos, dicho coeficiente multiplica a cada uno de los términos de esa expresión (propiedad distributiva).

Como en el primer miembro el signo “menos” precede al paréntesis, se considera que el coeficiente que va con el signo es 1, mientras que en el segundo miembro el coeficiente que precede a la expresión entre paréntesis es –4, después se efectúan los productos indicados:

$$8x - 1\,(6x + 12) = 14 - 3\,(x + 2) \qquad \text{(Ec. 1)}$$

$$8x - 6x - 12 = 14 - 3x - 6 \qquad \text{(Ec. 2)}$$

Como se observa, la ecuación número 2 es una ecuación equivalente a la ecuación número 1.

Se agrupan los términos semejantes con incógnita en el primer miembro y los términos independientes en el otro; para ello se aplican las propiedades de la igualdad:

$$8x - 6x + 3x = 14 - 6 + 12$$

Luego, se reducen los términos semejantes en la ecuación:

$$5x = 20$$

Se despeja la incógnita, $x = 4$

Se comprueba el resultado, sustituyéndolo en la ecuación número 2:

$$8x - 6x - 12 = 14 - 3x - 6$$

$$8(4) - 6(4) - 12 = 14 - 3(4) - 6$$

$$32 - 24 - 12 = 14 - 12 - 6$$

$$-4 = -4$$

Como se obtiene una igualdad, la solución $x = 4$ es correcta.

Recuerda que los pasos que se deben seguir para resolver una ecuación con paréntesis son:
1. Suprimir los paréntesis mediante la multiplicación.
2. Agrupar términos semejantes.
3. Reducir términos semejantes.
4. Despejar la incógnita.
5. Comprobar el resultado.

EJERCICIO 2:

En una reunión comunitaria hay 40 personas que tienen más de 40 años; un cuarto del número de asistentes tiene entre 30 y 40 años y la tercera parte tiene menos de 30 años. ¿Cuántas personas hay en la reunión (llama x al número total de personas reunidas)?. Plantea la ecuación y halla el valor de x.

x = número de asistentes

$^1/_4\,x$ = Personas asistentes a la reunión con edades entre 30 y 40 años

$^1/_3\,x$ = Personas asistentes a la reunión con edades menores a 30 años

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x = x - 40$$

La ecuación anterior en su término de la izquierda representa la expresión de todas las personas de la reunión que tienen 40 años o menos (es decir las personas de menos de 30 años junto con las personas con edades entre 30 y 40 años). Por otro lado, el término de la derecha es una expresión que representa también a las personas que tienen 40 años o menos, pues al número total de asistentes se le resta 40, que acorde al enunciado del ejercicio son las personas mayores de 40 años.

$$\frac{3x + 4x}{12} = x - 40$$

$$\frac{7x}{12} = x - 40$$

$$7x = 12(x - 40)$$

$$7x = 12x - 480$$

$$7x - 12x = 480$$

$$-\ 5x = -\ 480$$

$$x = \frac{-\ 480}{-5}$$

$$x = 96$$

Respuesta: En la reunión hay 96 personas.

EJERCICIO 3:

En una caja hay dos bolsas que contienen la misma cantidad de mangos y una bolsa que contiene naranjas. Se desconoce cuántos mangos y cuántas naranjas hay en cada bolsa. En total, hay 11 frutas. Supongamos que: • x es número de mangos en cada bolsa de mangos. • y es número de naranja en cada bolsa de naranjas. La situación descrita la podemos representar por la ecuación lineal: $2x + y = 11$.

INECUACIÓN:

Una inecuación es una desigualdad algebraica en la que sus dos miembros aparecen ligados por uno de estos signos:

$<$ menor que; $\leq$ menor o igual que; $>$ mayor que; $\geq$ mayor o igual que

Cuando trabajamos una inecuación o desigualdad, se soluciona siguiendo los mismos pasos de la ecuación. La solución de una inecuación es el conjunto de valores de la variable que verifica la inecuación. Podemos expresar la solución de la inecuación mediante:

1. Una representación gráfica.
2. Un intervalo.

Ejemplo: Dada la inecuación $3x + 5 < 9 + 2x$

$$3x - 2x < 9 - 5$$

Tenemos que: $x < 4$

Intervalo: (-∞, 4)

Propiedades utilizadas para resolver desigualdades.

1. Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$	2. Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
3. Si $a > b$, entonces $a - c > b - c$	4. Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$
5. Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$	6. Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

EJERCICIO 4:

Resolver la siguiente inecuación: $-3x - 15 > 6$

Agrupando términos semejantes: $-3x > 6 + 15$

Reduciendo términos semejantes: $-3x > 21$

Despejando la incógnita: $x < -7$

IMPORTANTE
El signo $>$ cambió en la última línea por $<$, ya que se dividió entre -3

La gráfica de la solución de esta inecuación se hace en la recta real:

Intervalo: $(-\infty, -7)$

Comprobando el resultado con un número del intervalo:

$$-3\,(-8) - 15 > 6$$

$$24 - 15 > 6$$

$$9 > 6$$

EJERCICIOS:

1. Si $\sqrt{2} \cong 1{,}41421356$, utilizando una aproximación obtenga el resultado de $5 + \sqrt{2}$
2. Obtenga el valor aproximado de la suma $1{,}342146 + 5{,}750352$
3. El valor aproximado de la fracción $\frac{24}{50}$ es:
4. ¿Las expresiones $7y - 1$ y $(9y - 2y) - 1$ son equivalentes?
5. ¿Las siguientes igualdades son ciertas $\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{15}{12} = \frac{20}{24}$?
6. Explique la similitud de las expresiones $3z + 2z + z = 6z$
7. ¿Qué relación hay entre la expresión $(b - 1) + b + (b + 1)$ y la expresión $3b$?
8. El doble de la edad de A excede en 50 a la edad de B y 1/4 de la edad de B es 35 años menos que la edad de A. Las edades de A y B respectivamente son:

   a. 45 y 40   c. 12 y 14

   b. 32 y 39   d. 23 y 34
9. Resuelva las inecuaciones:

   a. $x + 5 > 9$ c. $5x + 22 > 7$

   b. $x - 6 < 2$ d. $4x - 7 \leq 9$

Anexo 6. Lista de símbolos en operaciones matemáticas

Símbolo	Nombre	Definición
$=$	Signo Igual	Símbolo que se utiliza para expresar la equivalencia o igualdad matemática. Utilizado por primera vez por el matemático galés Robert Recorde en su obra The Whetstone of Witte (1557): "para evitar la tediosa repetición de las palabras 'es igual a', usaré lo que a menudo uso en mi trabajo: un par de paralelas", escribió. ¿La razón? "No hay otras dos cosas que puedan ser más iguales". Este símbolo no se empezó a utilizar de manera extendida sino hasta comienzos del siglo XVIII.
$\times$	Equis / Cruz	Símbolo que se utiliza para expresar la multiplicación. En los viejos tiempos de la aritmética, muchos algoritmos hacían uso de la cruz de San Andrés para obtener productos y proporciones. Puede ser que, por esa razón en el 1631, Oughtred, eligió esta cruz como símbolo para la multiplicación. Tuvo una gran aceptación, excepto por los matemáticos Gottfried W. Leibniz e Isaac Newton, que no se sentían del todo cómodos con ese símbolo. Leibniz, en 1698, en una de sus cartas al también matemático Johann Bernoulli, escribe: “No me gusta el símbolo $\times$ como un símbolo para la multiplicación, ya que se puede confundir con la variable o la letra x;… a menudo yo simplemente relaciono dos cantidades con un punto”. Por esa razón Leibniz introdujo el punto como símbolo de la multiplicación.
$/$	Barra oblicua	Símbolo que se utiliza para expresar la división. Introducida por De Morgan en 1845 como recurso tipográfico en los libros impresos, para poder escribir la fracción en una sola línea.
$+$	Signo más	Símbolo que se utiliza para expresar la suma. A mediados del siglo XIV el astrónomo Nicole d'Oresme usaba el símbolo $+$ como abreviación de "**et**", que significa "**y**" en latín.
$-$	Signo menos	Símbolo que se utiliza para expresar la resta. Su origen es incierto, y existen diferentes teorías que tratan de explicarlo. Una de ellas es que podría venir de la utilización de la barra horizontal que los mercaderes utilizaban para indicar la separación de la tara, llamada durante mucho tiempo “minus”, del peso total de una mercancía, es decir, el peso del recipiente del producto. Sin embargo, lo que sí se sabe del signo menos es que aparece en un manuscrito alemán de 1481 que fue encontrado en la Biblioteca de Dresde y que en un manuscrito en latín del mismo período aparecen tanto el $+$ como el $-$. Ambos símbolos fueron examinados por Johannes Widmann y su "Aritmética Mercantil" publicada en 1489 fue el primer libro impreso en el que aparecen los dos símbolos que aún usamos para indicar sumas y restas.

$>$	Mayor que	Símbolo que se utiliza para expresar desigualdad en la que el número o expresión de la izquierda es cuantitativamente mayor que el número o expresión de la derecha. Tomas Harriot (1560 – 1621) fue su inventor.
$<$	Menor que	Tomas Harriot (1560 – 1621) fue inventor del símbolo que se utiliza para expresar desigualdad en la que el número o expresión de la izquierda es cuantitativamente menor que el número o expresión de la derecha
$\geq$	Mayor o igual que	Introducido por Pierre Bouguer (1698-1758), este símbolo se utiliza para expresar que el número o expresión de la izquierda es cuantitativamente mayor o igual que el número o expresión de la derecha
$\leq$	Menor o igual que	Símbolo que se utiliza para expresar que el número o expresión de la izquierda es cuantitativamente menor o igual que el número o expresión de la derecha. Este símbolo fue introducido por Pierre Bouguer (1698-1758).

Anexo 7. Lista de variables en ecuaciones de áreas o superficies

Variable	**Definición**	**Ecuación dimensional**
A_r	Área o medida de la extensión de una superficie	[L^2]
A_B	Área de la base	[L^2]
A_L	Área lateral	[L^2]
a	Letra para representar la longitud de un lado de una figura geométrica	[L]
Ap	Letras para representar la apotema lateral de una pirámide	[L]
ap	Letras para representar la apotema de una figura o la apotema de su base. En un polígono regular, el apotema es el segmento que va desde el centro del polígono al punto medio de uno de sus lados.	[L]
b	Letra para representar la longitud de una base, la base menor o la longitud de un lado de una figura geométrica	[L]
B	Letra para representar la base mayor de una figura geométrica	[L]
c	Letra para representar la longitud de un lado de una figura geométrica	[L]
d	Diagonal menor	[L]
D	Diagonal mayor	[L]
ge	Letras para representar la generatriz de una figura. Es un punto, línea o superficie cuyo movimiento genera una curva, superficie o sólido.	[L]
h	Letra para representar la longitud de una altura	[L]
l	Letra para representar el lado de una figura	[L]
P	Letra para representar la longitud o perímetro de una figura	[L]
P_B	Perímetro de una base	[L]
r	Letra para representar el radio o la distancia del centro de una circunferencia a cualquiera de sus puntos.	[L]
V	Letra para representar el volumen de un elemento	[L^3]

Anexo 8. Lista de letras

Sus dimensiones dependen de la ecuación, fórmula o contexto en el que se les utilice.

Variable	Definición
α	Letra alfa, usada como constante
A	Letra A, usada como variable
B	Letra B, usada como variable
e	Letra e, usada como variable
f	Letra f, usada como variable
g	Letra g, usada como variable
j	Letra j, usada como variable
k	Letra k, usada como variable
m	Letra m, usada como variable
n	Letra n, usada como variable
p	Letra p, usada como variable
q	Letra q, usada como variable
r	Letra r, usada como variable
s	Letra s, usada como variable
t	Letra t, usada como variable
w	Letra w, usada como variable
x	Letra x, usada como variable
y	Letra y, usada como variable
z	Letra z usada como variable