



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

**Conformación de portafolios óptimos de
inversión a través de métodos de estimación
robusta, un estudio comparativo**

**Optimal investment portfolio conformation
through robust estimation methods, a
comparative survey**

Ángela Mayellis Melo Hidalgo

Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales
Facultad de Administración. Maestría en Administración
Manizales, Colombia

2015

**Conformación de portafolios óptimos de
inversión a través de métodos de estimación
robusta, un estudio comparativo**

**Optimal investment portfolio conformation
through robust estimation methods, a
comparative survey**

Ángela Mayellis Melo Hidalgo

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Administración

Director:

Magister en Investigación Operativa y Estadística Ricardo Alfredo Rojas Medina

Línea de Investigación:

Finanzas

Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales
Facultad de Administración. Maestría en Administración
Manizales, Colombia

2015

“El «riesgo» no existe «ahí fuera», independientemente de nuestras mentes y nuestra cultura, esperando que alguien lo mida. Los seres humanos han inventado el concepto de «riesgo» para poder entender y sobrellevar los peligros y las incertidumbres de la vida. Aunque estos peligros sean reales, no hay algo así como el «riesgo real» o el «riesgo objetivo»”

Daniel Kahneman, Jackson Beatty, Irwin Pollack

Agradecimientos

Agradezco profundamente a Dios por todas las bendiciones recibidas, por permitirme iniciar y culminar con éxito este proceso formativo.

A mi madre Bertalia Hidalgo Díaz, que me inculcó el amor por el estudio. Sin ella, este logro no habría sido posible.

A mi familia por su constante apoyo, acompañamiento, comprensión y amor. Gracias por ser mi fortaleza en los momentos de dificultad.

A mi profesor y amigo Ricardo Alfredo Rojas Medina, director de esta investigación, por su constante orientación y supervisión.

A la Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, por enriquecer cada aspecto de mi vida y permitirme crecer como persona y como profesional.

Resumen

Con esta investigación se logra establecer la frontera eficiente mediante la implementación de métodos estadísticos robustos en la estimación de la matriz de varianza – covarianza, como medida de solución a la demanda de análisis técnicos que le permitan al inversionista conformar portafolios óptimos con un tratamiento adecuado del riesgo, en conjunto con los lineamientos básicos del proceso de selección de portafolios.

Se desarrolló un estudio comparativo en el que se contrastó diferentes métodos robustos entre sí, y frente al método clásico. Los insumos para realizar los cálculos respectivos fueron los precios de cierre históricos diarios de diez acciones transadas en la Bolsa de Valores de Colombia. La ejecución de los procedimientos se efectuó en el software libre R – Project.

Palabras clave: estadística robusta, frontera eficiente, método MCD, método MVE, método OGK, rendimiento, riesgo.

Abstract

This research is aimed to establish the efficient frontier through the robust statistical methods implementation in the matrix of variance – covariance estimation, as a solution way to the demand of technical analysis that allow the optimal portfolios conformation by the investor with a risk appropriate treatment, jointly with the basic guidelines of the portfolio selection process.

A comparative study was developed in which different robust methods were contrasted among them, and against the classical method. The inputs to perform the respective calculations were the daily historical closing prices of ten traded stocks in the Colombian Securities Exchange. The procedures execution was carried out in the free open software R-Project.

Keywords: robust statistics, efficient frontier, MCD method, MVE method, OGK method, return, risk.

Contenido

Resumen	V
Índice de ilustraciones	VIII
Índice de tablas	IX
Índice de símbolos.....	X
INTRODUCCIÓN.....	1
1. Capítulo 1. Marco teórico y contextualización	4
1.1 Generalidades del Sistema Financiero Colombiano.....	4
1.1.1 Mercado monetario.....	5
1.1.2 Mercado cambiario o de divisas.	5
1.1.3 Mercado de capitales.	5
1.2 Teoría Moderna de la Selección de Portafolios	9
1.2.1 Diversificación.	11
1.2.2 Frontera eficiente.	11
1.2.3 Supuestos de la Teoría Moderna de la Selección de Portafolios.	13
1.2.4 Rentabilidad del portafolio.	14
1.2.5 Riesgo del portafolio.	16
1.2.6 Coeficiente de correlación.	18
1.2.7 Restricciones del modelo clásico.	18
1.2.8 Punto de varianza mínima global.....	19
1.2.9 Algoritmo de la línea crítica.	21

1.2.10	Línea del Mercado de Capitales (LMC) y Línea de Tangencia.....	22
1.2.11	Limitaciones del Modelo de Media-Varianza (MV).....	25
2.	Capítulo 2. Estadística robusta.....	28
2.1	Método Robusto: Matriz de Covarianza con Determinante Mínimo (MCD).....	32
2.2	Método Robusto: Elipsoide de Mínimo Volumen (MVE).....	35
2.3	Método Robusto: Estimador Ortogonalizado de Gnanadesikan y Kettenring (OGK).....	39
3.	Capítulo 3. Caso de estudio.....	43
3.1	Metodología y resultados	43
3.1.1	Procedimiento en R - Project para calcular la frontera eficiente y establecer portafolios óptimos por el método MV.	45
3.1.2	Procedimiento en R - Project para calcular la frontera eficiente y establecer portafolios óptimos por el método MCD.	54
3.1.3	Procedimiento en R - Project para calcular la frontera eficiente y establecer portafolios óptimos por el método MVE.	59
3.1.4	Procedimiento en R - Project para calcular la frontera eficiente y establecer portafolios óptimos por el método OGK.	63
3.2	Comparación de los resultados	68
3.2.1	Coefficiente de variación.	68
3.2.2	Importancia de la estimación robusta en la conformación de portafolios.....	69
3.2.3	Representación gráfica de la incidencia de los valores atípicos en el riesgo.	71
4.	Capítulo 4. Conclusiones	79
	BIBLIOGRAFÍA	97

Índice de ilustraciones

Ilustración 1. Estructura del Sistema Financiero Colombiano.	4
Ilustración 2. Estructura del Mercado de Valores Colombiano.	7
Ilustración 3. Perfiles del inversionista frente al riesgo.	8
Ilustración 4. Riesgo Sistemático y Riesgo Diversificable.	10
Ilustración 5. Frontera eficiente.	12
Ilustración 6. LMC y Curva de Mínima Varianza.	24
Ilustración 7. Dispersión de los rendimientos de 63 días.	30
Ilustración 8. Dispersión de los rendimientos de 61 días.	30
Ilustración 9. Rendimientos diarios de acciones negociadas en la BVC.	47
Ilustración 10. Frontera eficiente método MV.	49
Ilustración 11. Participación accionaria en portafolios de inversión MV.	52
Ilustración 12. Rendimiento, riesgo y participación de cada punto en la frontera eficiente MV. ..	53
Ilustración 13. Frontera eficiente método MCD.	57
Ilustración 14. Frontera eficiente método MVE.	61
Ilustración 15. Frontera eficiente método OGK.	66
Ilustración 16. Puntos con riesgo mínimo.	71
Ilustración 17. Composición accionaria en los portafolios con el mínimo riesgo.	72
Ilustración 18. Puntos de tangencia.	73
Ilustración 19. Composición accionaria en los puntos de tangencia.	73
Ilustración 20. Matriz de Covarianzas MV vs MCD.	74
Ilustración 21. Matriz de Covarianzas MV vs MVE.	75
Ilustración 22. Matriz de Covarianzas MVE vs MCD.	75
Ilustración 23. Matriz de Covarianzas MVE vs OGK.	76

Índice de tablas

Tabla 1. Índice COLCAP y precios Acciones Banco de Bogotá.	28
Tabla 2. Rendimiento diario COLCAP y Banco de Bogotá.	29
Tabla 3. Rendimiento promedio por acción y matriz de varianzas y covarianzas – MV.	46
Tabla 4. Descripción de los puntos que conforman la frontera eficiente.	48
Tabla 5. Portafolio en el punto de tangencia MV.	50
Tabla 6. Portafolio en el punto de mínima varianza MV.	50
Tabla 7. Portafolio óptimo para una rentabilidad establecida MV.	51
Tabla 8. Rendimientos promedio por acción y matriz de varianzas y covarianzas MCD.	55
Tabla 9. Puntos que conforman la frontera eficiente MCD.	56
Tabla 10. Portafolio en el punto de tangencia MCD.	58
Tabla 11. Portafolio en el punto de mínima varianza global MCD.	58
Tabla 12. Rendimientos promedio por acción y matriz de varianzas y covarianzas MVE.	59
Tabla 13. Puntos que conforman la frontera eficiente MVE.	60
Tabla 14. Conformación del portafolio en el punto de tangencia MVE.	62
Tabla 15. Conformación del portafolio en el punto de mínima varianza global MVE.	63
Tabla 16. Rendimientos promedio por acción y matriz de varianzas y covarianzas OGK.	64
Tabla 17. Puntos que conforman la frontera eficiente OGK.	65
Tabla 18. Conformación del portafolio óptimo en el punto de tangencia OGK.	67
Tabla 19. Conformación del portafolio en el punto de mínima varianza OGK.	67
Tabla 20. Cálculo de la homogeneidad para las acciones según método de estimación empleado.	70

Índice de símbolos

Símbolo	Término	Símbolo	Término
MV	Método de Media -Varianza	r	Coefficiente de correlación.
MCD	Matriz de Covarianza con Determinante Mínimo	\mathcal{L}	Lagrange.
MVE	Elipsoide de Mínimo Volumen.	λ	Lambda, operador lagrangiano.
OGK	Estimador Ortogonalizado de Gnanadesikan y Kettenring.	X_f	Rentabilidad libre de riesgo.
x_i, x_j	Rentabilidad de una acción en un periodo dado.	\bar{R}_A	Rendimiento elegido por el inversionista A.
\bar{x}_i, \bar{x}_j	Rentabilidad promedio de cada acción.	σ_A	Riesgo del portafolio A.
\bar{x}_p	Rentabilidad esperada del portafolio.	r_f	Tasa libre de riesgo.
P_{id}	Precio promedio ponderado de transacción.	\bar{R}_p	Rentabilidad del portafolio.
$P_{i(d-1)}$	Precio promedio ponderado de transacción en el período inmediatamente anterior.	θ	Pendiente de la LMC.
D	Cantidad de períodos analizados.	\bar{R}_M	Rendimiento de la cartera de mercado (Sharpe).
i, j	Acción.	σ_M	Riesgo de la cartera de mercado (Sharpe).
V_{iq}	Volumen de acciones negociadas en q	h	Sumuestra con el máximo punto de ruptura.
q	Ronda de negociación.	$H_{(h)}^{(n)}$	Observación de la submuestra.
P_{iq}	Precio de transacción.	p	Dimensión de la matriz.
Q	Número total de rondas de negociación.	t	Transpuesta.
w_i	Participación de la acción i en el portafolio.	T	Media robusta o ubicación.
n	Cantidad de activos considerados.	C	Matriz de varianzas y covarianzas o dispersión.
D_d	Pago de dividendos por acción.	C_{ccf}	Factor de corrección de consistencia.
C_d	Prima por nueva emisión de acciones.	χ_p^2	Chi cuadrada con p grados de libertad.

Conformación de portafolios óptimos de inversión a través de métodos de estimación XI
robusta, un estudio comparativo

Símbolo	Término	Símbolo	Término
σ	Desviación Estándar.	C_{ssf}	Factor de corrección para una muestra finita.
σ^2	Varianza.	d_i	Distancia Mahalanobis
σ_{ij}	Matriz de varianzas y covarianzas.	A	Matriz invertible $p - por - p$.
σ_p^2	Varianza del portafolio.	b	Vector.
min	Minimizar.	σ^*	Desviación estándar robusta.
max	Maximizar.		

INTRODUCCIÓN

La comunidad de inversionistas¹, inmersa en un contexto de incertidumbre, debido a los factores que inciden en las fluctuaciones constantes de los precios de los activos financieros, afronta constantemente el problema sobre cómo asignar los recursos económicos ante las diversas alternativas de inversión que ofrece el mercado. Bajo este escenario, un inversionista posiblemente aplicaría análisis fundamental y técnico para predecir, aproximadamente, las cotizaciones futuras de dichos activos o su comportamiento para tomar una decisión de inversión.

El análisis fundamental permite obtener un acercamiento al proceso de conformación de un portafolio, a partir de la recopilación y análisis de una gran cantidad de información sobre diversos aspectos macroeconómicos y sectoriales que afectan las cotizaciones de las acciones en el mercado, algunos de estos son: la posición de la empresa emisora en el mercado, su contexto económico y expectativas, eventos políticos, noticias relacionadas e interpretaciones de los informes e indicadores financieros necesarios para el cálculo de las ganancias y dividendos futuros. Así, el inversionista estima el precio de un activo, su aumento o disminución, interesándose en aquellos que proporcionan la mayor rentabilidad y menor riesgo (Farias & Rodrigues de Moura, 2013). Debido a las características de este tipo de análisis, puede convertirse en un proceso costoso en la obtención de los datos y de alta complejidad analítica de la información requerida para tomar una decisión de inversión (Brito Alonso & Villalba Vila, 2001).

El análisis técnico se basa en mecanismos cuantitativos aplicados por los inversionistas para reducir la incertidumbre. Consiste en tomar como base los rendimientos históricos de los activos para generar modelos estadísticos y econométricos, los cuales, se complementan con representaciones gráficas, en las que se aprecian las fluctuaciones de los precios en un período de tiempo dado facilitando la identificación de patrones de comportamiento, que de esta manera, le

¹ Para efectos de este documento, el concepto “inversionista” comprende a los administradores profesionales de portafolios y a los clientes.

permitan al inversionista pronosticar las tendencias en el mercado y prever el momento de realizar operaciones de compra y venta de acciones.

En 1952 Harry Markowitz ideó la manera de simplificar y formalizar el proceso de conformación de portafolios de inversión, al considerar únicamente las estadísticas obtenidas a partir de las desviaciones de los rendimientos históricos de los títulos y la conducta racional del inversor. Planteó el modelo matemático cuadrático de media-varianza (MV), que permite calcular la frontera eficiente o conjunto de portafolios óptimos, considerando el riesgo en función del rendimiento de los títulos, con el fin de obtener la máxima rentabilidad con un riesgo dado o el mínimo riesgo sin afectar el rendimiento esperado.

A manera de gestión del portafolio, Markowitz (1952) propuso la diversificación con el fin de disminuir su riesgo global sin reducir la rentabilidad requerida. Sus aportes innovadores se convirtieron en el referente teórico por excelencia para los desarrollos posteriores en los campos financiero y económico (Markowitz H. M., 1959); sin embargo, su aplicación se ha visto restringida por limitaciones que serán analizadas en el desarrollo de este documento (Benavente Hualpa, 2012).

Los modelos cuadrático paramétricos, en los que se basa el método para su desarrollo, suponen que el comportamiento histórico de los rendimientos esperados de los activos financieros sigue una distribución normal, lo cual, no ocurre en algunos casos. Esto se debe a la existencia de valores extremos que pueden generar colas gruesas en la distribución, provocando sesgos en las estimaciones. Adicionalmente, a partir de los rendimientos históricos se obtienen las covarianzas y varianzas esperadas, que se convierten en los estimadores de los parámetros del modelo, cuya validez se basa en el supuesto de normalidad, en caso contrario, se tergiversaría todo el proceso de estimación; asimismo, el incumplimiento de los supuestos iniciales del modelo y la existencia de datos atípicos impiden la obtención de resultados con propiedades de eficiencia y estabilidad. (Michaud, 1989; Brito Alonso & Villalba Vila, 2001; Trojani, Vanini, & Vignola, 2002; Chalabi, Chen, Ellis, & Würtz, 2009).

En este orden de ideas, el propósito de la presente investigación es apoyar el proceso decisorio de inversión en el mercado de las transacciones financieras, mediante la conformación de portafolios óptimos con dichas propiedades, a través de las ventajas cuantitativas que brinda el cálculo de matrices de covarianza aplicando métodos de estimación robusta, con los cuales se reduce la

volatilidad del portafolio al disminuir la incidencia de valores atípicos existentes en un grupo de datos objeto de análisis.

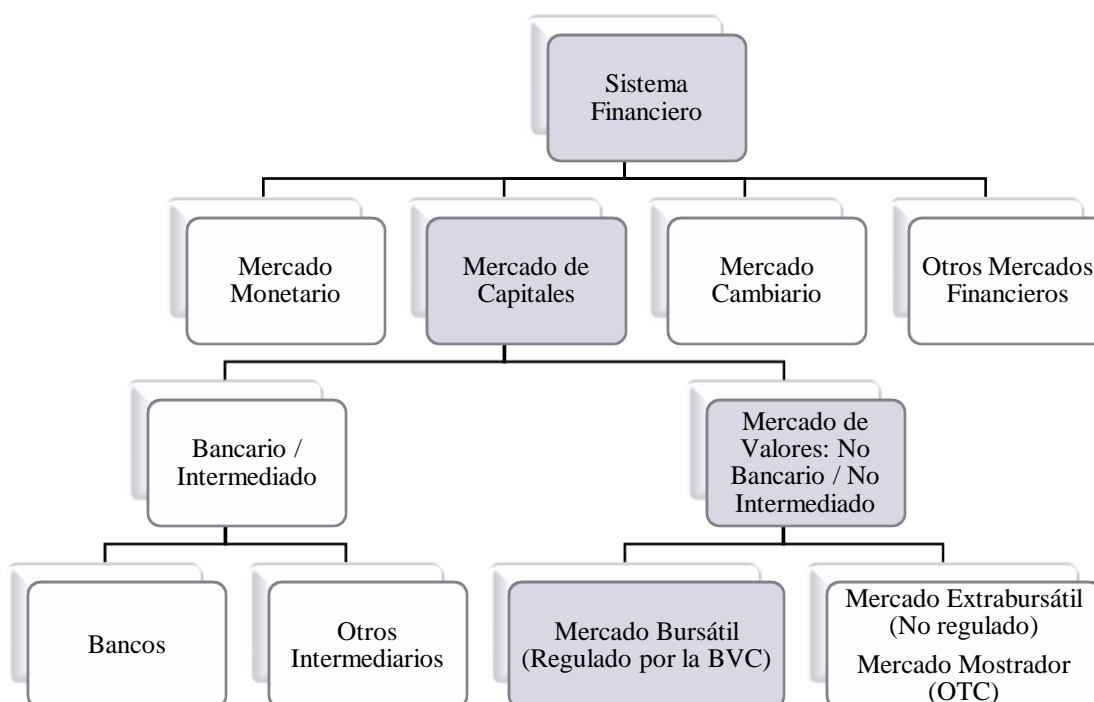
Para el desarrollo de esta investigación, en este documento se incorporan cinco secciones esenciales: inicia con la contextualización del lector acerca del Sistema Financiero Colombiano haciendo énfasis en el mercado accionario. Continúa con la exposición y discusión sobre el uso de la Teoría de la Selección de Portafolios propuesta por Markowitz (1952). Posteriormente, se aborda la necesidad de aplicar métodos robustos con el fin de producir resultados con un mayor grado de estabilidad, se procede a su explicación y se complementa con el desarrollo de un caso de estudio, para el que se emplea la información sobre los precios de cierre diarios de diez acciones negociadas en la Bolsa de Valores de Colombia (BVC). Luego, se realiza una comparación de los resultados obtenidos con el método estadístico cuadrático paramétrico y los métodos robustos sobre un conjunto de observaciones contaminado por datos atípicos. Finalmente, se exponen las conclusiones concernientes a la presente investigación.

1. Capítulo 1. Marco teórico y contextualización

1.1 Generalidades del Sistema Financiero Colombiano

El Sistema Financiero Colombiano es el entorno en el que confluyen diferentes instituciones, que por medio de sus operaciones, hacen posible el intercambio (oferta y demanda) de recursos. Dependiendo del instrumento financiero y del procedimiento para gestionar una inversión se incursiona en alguno de los cuatro mercados principales que forman parte de su estructura (AMV Colombia, 2013), los cuales son expuestos en la Ilustración 1.

Ilustración 1. Estructura del Sistema Financiero Colombiano.



Fuente: Adaptado de AMV Colombia (2013).

Las operaciones llevadas a cabo por el Sistema Financiero Colombiano juegan un papel importante en la economía. Este Sistema proporciona un mecanismo de pagos en el que los recursos se transfieren mediante giros, cheques y transferencias bancarias; el traslado de recursos puede realizarse por medios electrónicos, beneficiando al usuario en términos de seguridad y eficiencia. Conjuntamente, facilita la asignación del precio de los recursos financieros depositados y prestados a lo largo del tiempo. Adicionalmente, dada la asimetría de la información, como producto del desconocimiento de la situación económica de los deudores por parte de los acreedores, el Sistema Financiero permite gestionar el riesgo por incumplimiento de pago mediante la inversión en diversos tipos de activos y empleando distintas combinaciones de riesgo y rentabilidad (AMV Colombia, 2014; Méndez López, 2014).

1.1.1 Mercado monetario.

En este mercado se negocian títulos valores y préstamos interbancarios. Estos activos se caracterizan por captar y colocar recursos altamente líquidos con vencimiento en el corto plazo (inferior a un año), presentan un bajo nivel de riesgo y una rentabilidad moderada. Los emisores de este mercado son el Gobierno, los intermediarios financieros y las entidades públicas y privadas (Uribe Escobar, 2013).

1.1.2 Mercado cambiario o de divisas.

Es el segmento del Sistema Financiero en el que se realizan las operaciones de compra y venta de dólares o de cualquier moneda extranjera en Colombia. Se encuentra regulado por el Banco de la República de acuerdo con la Resolución Externa 08 de 2000 que define a los intermediarios cambiarios, entre estos se encuentran las casas de cambio, los bancos comerciales e hipotecarios, las corporaciones financieras, las sociedades comisionistas de bolsa, Bancoldex, las compañías de financiamiento comercial, y la Financiera Energética, a su vez, estas entidades son supervisadas por las Superintendencias Bancarias o de Valores (Bancoldex, 2005).

1.1.3 Mercado de capitales.

En esta investigación se tiene especial interés en este mercado, dentro del cual las instituciones captan los recursos provenientes del sector superavitario (depositantes o inversionistas), para transferirlos al sector deficitario a través de dos mecanismos diferentes: el Mercado Bancario y el

Mercado de Valores. En el primero, participan entidades intermediarias entre acreedores y deudores, cuyo objetivo es canalizar los recursos hasta los deudores potenciales. Dependiendo de su actividad principal se clasifican en (Méndez López, 2014):

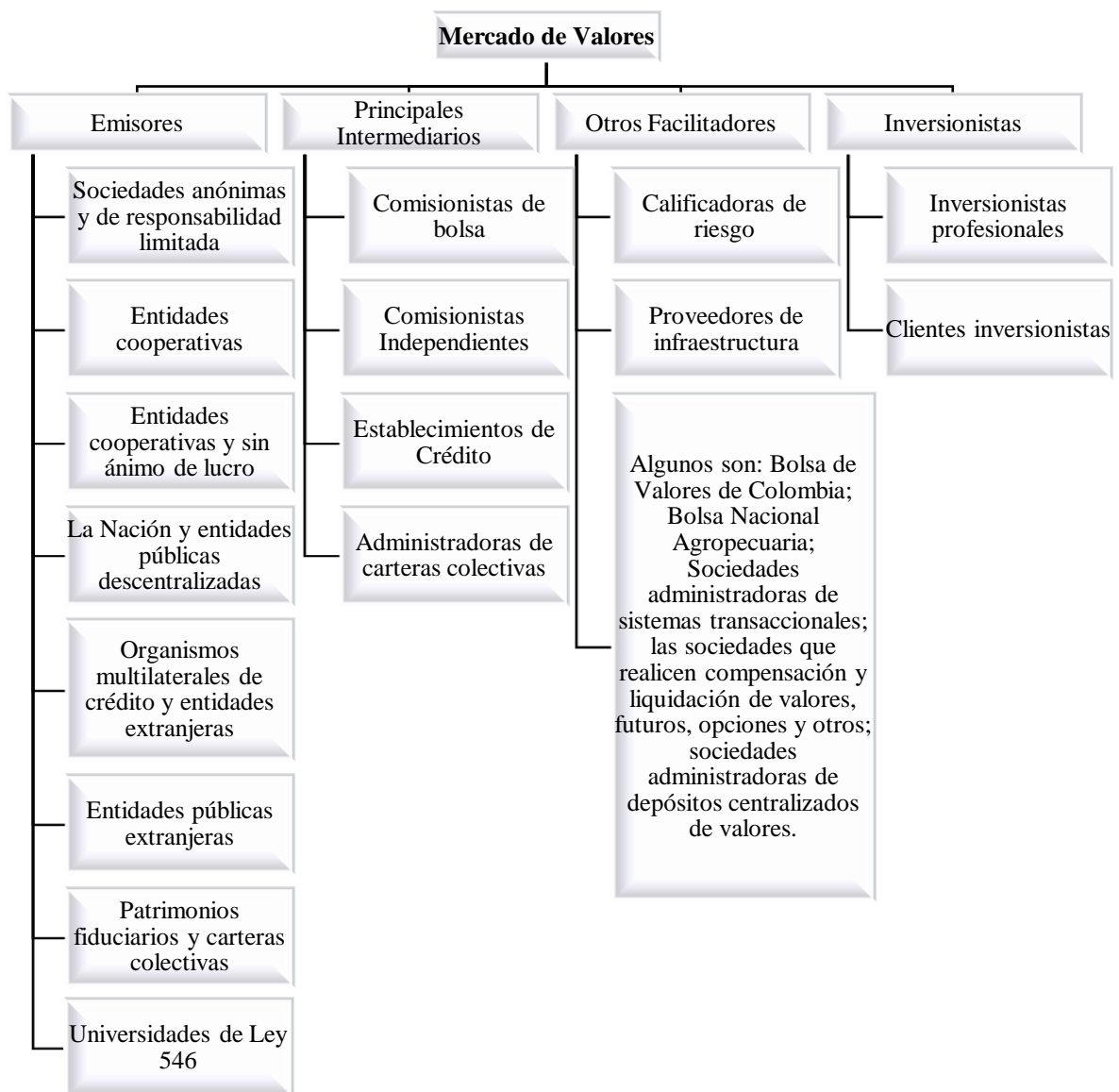
- Establecimientos de crédito (EC): este grupo está conformado por bancos comerciales, corporaciones financieras, compañías de financiamiento comercial y las especializadas en leasing. Su función principal es captar recursos en el sector superavitario para transferirlos al sector deficitario.
- Sociedades de Servicios Financieros (SSF): esta sección está integrada por sociedades fiduciarias, administradoras de los fondos de pensiones, cesantías e inversiones, comisionistas de bolsa, de intermediación cambiaria y de servicios financieros especiales, así como, los almacenes generales de depósito. Su papel fundamental consiste en asesorar la administración de los recursos.
- Otras instituciones financieras: aseguradoras, carteras colectivas, sociedades de capitalización y las instituciones oficiales especializadas (Uribe Escobar, 2013).

Por otra parte, en el Mercado de Valores los inversionistas tienen una relación menos impersonal con los emisores. En cuanto a los intermediarios de valores legales están autorizados y supervisados por la Superintendencia Financiera de Colombia (SFC, 2014) y certificados por el Autorregulador del Mercado de Valores en Colombia (AMV Colombia, 2014). La interacción se ejerce en los mercados de negociación de valores: Bursátil y Extrabursátil.

El Mercado Bursátil es un sistema de negociación de títulos valores de renta variable, donde los agentes que captan recursos tienen contacto más directo con el público que en el Mercado Bancario. La negociación se practica mediante sistemas transaccionales o entidades autorizadas por el Gobierno para administrar las plataformas de negociación, como lo es la Bolsa de Valores de Colombia (BVC), siendo una sociedad anónima de carácter privado en la cual se inscriben y negocian valores públicamente; además, provee normas, servicios y supervisa las negociaciones. En contraste, en el Mercado Extrabursátil las transacciones se efectúan por fuera de sistemas transaccionales o de una bolsa de valores (Méndez López, 2007).

Continuando con la descripción de la estructura del Mercado de Valores, dependiendo del origen de la emisión se clasifica en Primario, cuando la compra es realizada directamente al emisor y en Secundario, cuando la negociación se desarrolla entre accionistas sobre valores previamente emitidos y en circulación (Méndez López, 2007). La estructura del Mercado de Valores Colombiano se observa en la Ilustración 2.

Ilustración 2. Estructura del Mercado de Valores Colombiano.



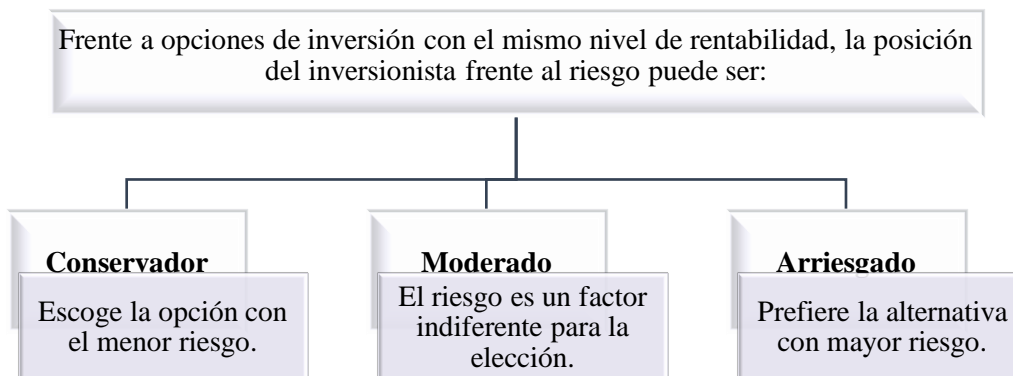
Fuente: Adaptado de Méndez López (2014)

De acuerdo con lo estipulado por el artículo segundo de la Ley 964 de 2005, los siguientes forman parte de los instrumentos de inversión: acciones, bonos, papeles comerciales, certificados de depósitos de mercancías, cualquier título o derecho resultante de un proceso de titularización, cualquier título representativo de capital de riesgo, los certificados de depósito a término, las aceptaciones bancarias, las cédulas hipotecarias y cualquier título de deuda pública (Méndez López, 2014).

La Superintendencia Financiera manifiesta que el concepto de valor no se limita al listado enunciado, para esta entidad un título valor debe ser un derecho de naturaleza negociable, que hace parte de una emisión y tiene la intención de captar los recursos del público. Cuando un instrumento cumple con los anteriores parámetros y se encuentra por fuera del listado, se requiere que el Gobierno Nacional genere la regulación en la que se le otorgue la calidad de valor (Méndez López, 2014).

Para efectos de esta investigación se acogerán las acciones como instrumento de inversión, las cuales se encuentran inmersas en el Mercado de Valores. El término acción se define como un valor normativo representativo del capital de una sociedad anónima. Es considerada un activo de renta variable cuyo valor se determina a futuro y éste depende de la valorización, de los dividendos del emisor (Méndez López, 2007) y de diferentes factores económicos que lo afectan, por ello, antes de tomar una decisión de inversión, es necesario conocer la situación del emisor con base en los análisis fundamental y técnico y el perfil del inversionista frente al riesgo. En la Ilustración 3 se exponen los diferentes perfiles frente al riesgo:

Ilustración 3. Perfiles del inversionista frente al riesgo.



Fuente: Adaptado de AMV Colombia (2013).

1.2 Teoría Moderna de la Selección de Portafolios

En 1952 el Premio Nobel de Economía Harry Markowitz publicó el artículo “*Portfolio Selection en The Journal of Finance*”, considerado por académicos como el trabajo pionero sobre la Teoría Moderna de Selección de Portafolios (Farias & Rodrigues de Moura, 2013). Posteriormente, amplió su teoría en el libro “*Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*” publicado en 1959, desde entonces se convirtió en el punto de referencia de múltiples derivaciones y desarrollos financieros y económicos.

Un portafolio eficiente es la combinación diversificada de activos financieros, en los cuales una persona o empresa invierte un capital con el propósito de obtener un nivel de rendimiento máximo y un mínimo riesgo de pérdida para dicha inversión, si esta Regla Fundamental se incumple, entonces el portafolio será ineficiente (Markowitz H. , 1952). Los conceptos de rendimiento, riesgo y diversificación de un portafolio serán desarrollados con mayor detenimiento en las secciones 1.2.1, 1.2.4 y 1.2.5.

En términos generales, el rendimiento esperado de un portafolio es igual al promedio ponderado de los rendimientos de los activos que lo componen y durante un tiempo fue el único aliciente para tomar decisiones de inversión. En cuanto al término riesgo y su cuantificación, fue abordado por inversionistas y académicos a partir de los trabajos de Markowitz (1952), quien lo define como la varianza de los rendimientos; es decir, que una inversión financiera puede tener varios resultados dependiendo de las fluctuaciones de los precios de los activos, si el riesgo no existiera, los inversionistas naturalmente invertirían en el activo que en un período proporcione la rentabilidad más alta (Lasa Crespo, 2004).

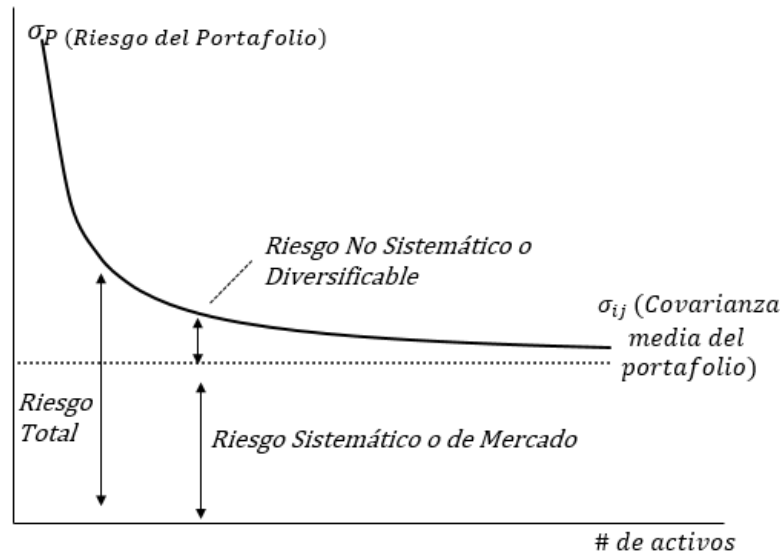
En el contexto de la selección de portafolios, antes de las contribuciones de Markowitz, se carecía de un modelamiento estadístico de los procesos y métodos de análisis previos a la decisión de inversión (Cruz, Restrepo, & Sánchez, 2005). Para Markowitz el comportamiento del inversionista racional depende de su nivel de aversión al riesgo en un contexto de incertidumbre², para

² La incertidumbre puede entenderse como un efecto de los fenómenos fortuitos, a diferencia del riesgo, no es susceptible de tratamiento probabilístico.

sobrellevar la situación objetivamente, propuso bajo una perspectiva fundamentalista³ sobre las expectativas futuras, que su comportamiento se debería regir por el enfoque de media – varianza, siendo estas las medidas estadísticas estimadas a partir de los datos históricos de la variable aleatoria rendimiento del activo y su riesgo, respectivamente (Lasa Crespo, 2004; Grajales Bedoya, 2009).

Una de las contribuciones más destacadas de la selección de portafolios, es el reconocimiento de la dicotomía entre el Riesgo Sistemático y No Sistemático, en conjunto, conformarían el Riesgo Total de un portafolio. La representación de estos dos componentes del riesgo se visualiza en la Ilustración 4.

Ilustración 4. Riesgo Sistemático y Riesgo Diversificable.



Fuente: Adaptado de Dumrauf (2010, pág. 218).

El Riesgo Sistemático afecta a todos los activos del mercado. No puede ser disminuido pese a que el portafolio involucre diversos tipos de activos, puesto que depende del comportamiento de las variables macroeconómicas, sobre las que el inversionista no tiene control alguno. Por otro lado, el Riesgo No Sistemático es aquel intrínseco a cada activo, los inversionistas pueden disminuir este riesgo mediante la diversificación del portafolio (Dumrauf, 2010).

³ Según la perspectiva fundamentalista de las expectativas futuras las “proyecciones acerca de los títulos financieros siguen las mismas reglas de probabilidad que obedecen las variables aleatorias” (Markowitz H. M., 1999. Tomado de López Herrera, 1999).

1.2.1 Diversificación.

Markowitz (1952) explica el concepto de diversificación como la combinación de diferentes activos sin interdependencia entre sus rendimientos⁴ con el objetivo de disminuir el riesgo, ya que el portafolio alcanza un riesgo menor a la sumatoria de los riesgos de sus componentes, o menor al de cada uno de ellos.

Adicionalmente, afirma que si el portafolio estuviese compuesto por una única acción, su riesgo sería igual al promedio de las variaciones del rendimiento de dicha acción. Si en el portafolio se incluyen dos o más acciones, en el caso de que se presente una disminución parcial de la rentabilidad, existe la posibilidad de evitar una pérdida mayor de la rentabilidad total del portafolio.

En este sentido, manifiesta la necesidad de diversificar los portafolios, para esto se debe calcular el rendimiento y el riesgo para cada una de las acciones consideradas; después, se realizan diferentes combinaciones hasta obtener la participación de los activos tal que satisfaga la Regla Fundamental de eficiencia, ésta establece que un portafolio debe aportar, de manera simultánea, el máximo rendimiento para cada nivel de riesgo dado y el mínimo riesgo para un rendimiento esperado. Todas las combinaciones eficientes conforman una frontera con base en la cual los inversionistas deberían tomar una decisión de inversión.

1.2.2 Frontera eficiente.

El proceso para la conformación de portafolios eficientes consta de dos partes. En la primera, se hace alusión a la especulación fundamentada en la observación y la experiencia previa al establecimiento de convicciones sobre el comportamiento futuro de un título accionario; en la segunda parte, se procede a la elección de un portafolio dependiendo de la convicción más sobresaliente. En esta fase, Markowitz muestra el dilema entre el riesgo y rendimiento que enfrenta el inversionista, puesto que entre mayor sea el rendimiento esperado mayor será el riesgo que debe asumir. Para ello, expone la formalización matemática del modelo cuadrático paramétrico⁵ que

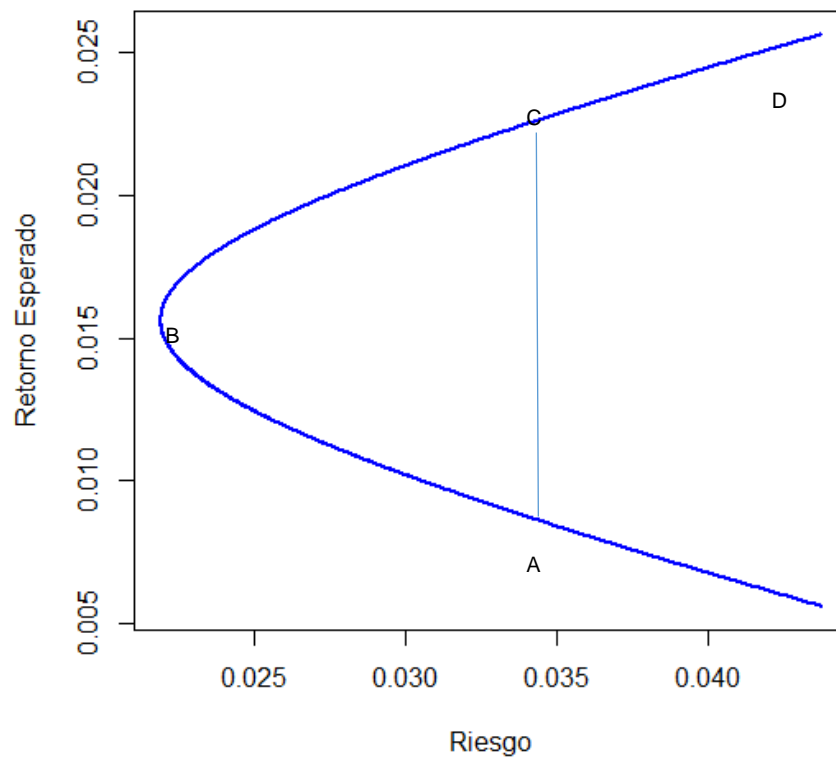
⁴ La interrelación entre variables se representa linealmente con el Coeficiente de Correlación (Levin & Rubin, 2004) término que será expuesto en la sección 1.2.6.

⁵ Los modelos paramétricos permiten la descripción aproximada del comportamiento de variables aleatorias en una forma exacta y conocida (Castaño Vélez, 1987).

permite determinar las combinaciones eficientes, así el inversionista tomaría una decisión con base en las alternativas que conformasen el conjunto de portafolios eficientes ubicados en el espacio geométrico de Media – Varianza $[\bar{x}_p, \sigma_p^2]$, representado por la frontera eficiente (Markowitz H. , 1952; Markowitz H. M., 1959).

Los límites de la frontera eficiente son el portafolio con el máximo nivel de rentabilidad (límite superior), y el lugar geométrico de mínima varianza (límite inferior), evidentemente, cualquier combinación con la misma rentabilidad pero por fuera de esta Frontera estará asociada a una varianza más alta y desde el punto de vista del inversionista, su elección sería irracional (Markowitz H. M., 1999; Lasa Crespo, 2004; Cruz, Restrepo, & Sánchez, 2005). A manera de ejemplo, en la Ilustración 5 se expone un esquema de la frontera eficiente.

Ilustración 5. Frontera eficiente.



Fuente: elaboración propia.

La Curva de Varianza Mínima AD está compuesta por los segmentos: AB, BC y BD. Las combinaciones que componen AB y las ubicadas en la zona delimitada por la curva AD, no serían elegidas por los inversionistas racionales puesto que sus combinaciones son dominadas por las que forman el intervalo BC, debido a que en éste se obtiene una rentabilidad mayor para los mismos niveles de riesgo, cumpliendo con la regla de eficiencia.

Dicho lo anterior, los puntos que integran BD conformarían el conjunto eficiente de posibles alternativas de inversión o frontera eficiente. El punto B es la opción con el menor riesgo de todos los puntos de AD y se denomina Punto de Varianza Mínima Global. Si el inversionista presenta una posición de alto grado de aversión al riesgo preferirá esta combinación. Por otra parte, si el inversionista desea un rendimiento alto y es propenso al riesgo optará por el portafolio D. Un inversionista que prefiera un rendimiento medio escogerá C.

1.2.3 Supuestos de la Teoría Moderna de la Selección de Portafolios.

Si bien, Markowitz (1952) proporciona un tratamiento riguroso al problema de la selección de portafolios eficientes, para su aplicación se deben asumir supuestos en torno al rendimiento y riesgo, algunos son:

- El inversionista actúa con una convicción probabilística cuadrático-paramétrica de la distribución de los rendimientos, por ello, los insumos estadísticos del modelo son: la rentabilidad esperada y la varianza de los rendimientos de los activos y las covarianzas entre estos (Markowitz H. , 1952). No obstante, Markowitz reconoce que su modelo es una aproximación matemática y que existen factores subjetivos que influyen en la decisión final (Lasa Crespo, 2004, págs. 5-6).
- Las diferentes opciones entre las que el inversionista debe escoger, pueden expresarse matemática y gráficamente en función de las variables: varianza y rendimiento esperado. La selección del portafolio dependerá del perfil del inversionista frente al riesgo (Hernández Blázquez, 2004).
- En el mercado existe una cantidad i de títulos valores fraccionables que al ser combinados forman una gama de portafolios (Lasa Crespo, 2004, págs. 5-6).

- Si dos o más activos presentan niveles iguales de rendimiento esperado y de riesgo, entonces, dichos activos se consideran iguales pese a sus diferencias de tipo y fuente (Lasa Crespo, 2004, págs. 5-6).
- De acuerdo con la hipótesis de eficiencia del mercado, no existe asimetría de la información sobre el contexto de las fuentes emisoras de activos (Lasa Crespo, 2004). Ante esta postura, los académicos Mendizábal Zubeldia, Miera Zabalza y Zubia Zubiaurre (2002), opinan que el inversionista debería optar por una estrategia pasiva⁶, inclinándose por el portafolio de referencia que represente las fluctuaciones del mercado.
- El modelo ignora todo tipo de costos de transacción, impuestos y las comisiones implícitas en la inversión (Lasa Crespo, 2004). El mercado de capitales se encuentra en equilibrio y los inversionistas tienen expectativas semejantes (Mascareñas, 2013).

1.2.4 Rentabilidad del portafolio.

Según la Superintendencia Financiera de Colombia, la rentabilidad corresponde a “*la relación entre la utilidad proporcionada por un título y el capital invertido en su adquisición*” (SFC, 2008). A partir de esta definición, la rentabilidad de una acción en un período dado x_i es igual a la variación de su precio de transacción en el mercado de valores, como se muestra en [1] (Mendizábal Zubeldia, Miera Zabalza, & Zubia Zubiaurre, 2002):

$$x_i = \frac{P_{id} - P_{i(d-1)}}{P_{i(d-1)}} \quad [1]$$

Donde:

P_{id} : precio promedio ponderado de transacción de la acción i en el momento d .

$P_{i(d-1)}$: precio promedio ponderado de transacción de la acción i en el momento d inmediatamente anterior.

⁶ Para los casos en los que los títulos no sean representantes perfectos de la información disponible, se recomienda el uso de una estrategia activa, que implica la identificación de títulos infravalorados o sobrevalorados y con su negociación se debe cubrir el riesgo asumido y los costos de transacción (Mendizábal Zubeldia, Miera Zabalza, & Zubia Zubiaurre, 2002).

Tomando como referencia a los académicos Cruz, Restrepo y Sánchez (2005), para calcular el P_{id} , se requieren los datos sobre la cantidad y el volumen de las negociaciones bursátiles al contado realizadas en el mercado de valores por la bolsa en la que se encuentra inscrita la acción, dentro de un marco temporal previamente definido. Dicho cálculo se resume en [2]:

$$P_{id} = \frac{\sum V_{iq} P_{iq}}{Q \sum V_{iq}} \quad [2]$$

Donde:

q : ronda de negociación.

V_{iq} : volumen de acciones negociadas en q .

P_{iq} : precio de transacción de la acción i en q .

Q : número total de rondas de negociación.

En el modelo MV la rentabilidad esperada del portafolio \bar{x}_p se estima a partir del promedio ponderado de los rendimientos individuales de cada acción \bar{x}_i , como se plasma en la multiplicación [3] (Markowitz H. , 1952):

$$\bar{x}_p = w_1 \bar{x}_1 + w_2 \bar{x}_2 + \dots + w_i \bar{x}_i \quad [3]$$

[3] se resume en [4]:

$$\bar{x}_p = \sum_{i=1}^n w_i \bar{x}_i \quad [4]$$

Donde w_i designa la ponderación del capital invertido en una acción y \bar{x}_i es el promedio de las variaciones del precio de la transacción y se calcula como se indica en [5]:

$$\bar{x}_i = \frac{\sum ((P_{id} - P_{id-1}) / P_{id-1})}{D} \quad [5]$$

Donde:

D : cantidad de períodos que se analizan.

Expresión que también puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{d=1}^D x_i}{D} \quad [6]$$

Como se indicó anteriormente, el modelo MV ignora todo tipo de costos de transacción, tales como los impuestos o las comisiones. Tomando como referencia a Cruz, Restrepo y Sánchez (2005), para el caso en el que estos costos se asuman en el proceso decisorio, la rentabilidad por cada acción se calcula con [7]:

$$x_i = \frac{P_{id} - P_{i(d-1)} + D_d + C_d}{P_{i(d-1)}} \quad [7]$$

Donde:

D_d : pago de dividendos por acción.

C_d : prima por nueva emisión de acciones.

1.2.5 Riesgo del portafolio.

Según la Superintendencia Financiera de Colombia el riesgo “*es el grado de variabilidad o contingencia del retorno de una inversión*” (SFC, 2008). Markowitz (1952) explica que el riesgo asumido por el inversionista está definido por la varianza σ^2 de la \bar{x}_i . Donde σ^2 se ocupa de medir la volatilidad del comportamiento de cada una de las observaciones respecto a su media. Debido a que la suma de $(x_i - \bar{x}_i)$ siempre es cero, la varianza toma para cada i la sumatoria de los cuadrados de las desviaciones de cada uno de los rendimientos respecto al rendimiento promedio y luego, divide la suma por la cantidad n que hacen parte de la población de datos, como se expresa en [8]:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2}{n - 1} \quad [8]$$

Para expresar el riesgo en términos lineales, mediante [9] se calcula la desviación estándar σ como medida de la dispersión en torno a la tendencia central de los rendimientos (Hernández Blázquez, 2004):

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad [9]$$

De acuerdo con el teorema de Chebyshev, σ permite ubicar con un grado de precisión los datos de una distribución en un rango respecto a su media. Como mínimo el 75% de los datos se ubicarían en el rango de $\pm 2\sigma$ y simultáneamente como mínimo el 89% de los datos en el rango de $\pm 3\sigma$ con relación a su media de distribución. Cuando el comportamiento de los valores forma una curva simétrica en forma de la Campana de Gauss, entonces aproximadamente el 68% de los datos están dentro de rango de $\pm 1\sigma$; el 95% dentro del rango $\pm 2\sigma$ y el 99% en el rango de $\pm 3\sigma$, respecto a su media de distribución (Levin & Rubin, 2004).

Los portafolios generalmente están integrados por dos o más títulos, por esto es necesario determinar la variación para el grupo de activos considerados. En primer lugar se calcula la varianza de la rentabilidad para cada título, luego se procede a establecer las covarianzas de la rentabilidad para todos los activos tomados de dos en dos, los resultados obtenidos son organizados en forma matricial, dando origen a la matriz de covarianzas σ_{ij} , con la que es posible calcular la varianza del rendimiento del portafolio σ_p^2 . Las expresiones que permiten calcular las variables mencionadas son [10] y [11] (Markowitz H. M., 1959; Lasa Crespo, 2004; Levin & Rubin, 2004), como se muestra a continuación:

$$\sigma_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [x_i - \bar{x}_i] [x_j - \bar{x}_j]}{n} \quad (10)$$

Puesto que la característica principal del inversionista según Markowitz es su racionalidad, él busca la disminución del riesgo del portafolio σ_p^2 dada una rentabilidad esperada \bar{x}_p , entonces se hace necesario minimizar [11]:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \quad [11]$$

Donde σ_{ij} equivale a la matriz de varianzas y covarianzas de los rendimientos de los n activos considerados [12]:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \quad [12]$$

Las varianzas σ^2 se ubican en la diagonal principal donde $i = j$ y las covarianzas σ_{ij} cuando $i \neq j$ (Lasa Crespo, 2004).

1.2.6 Coeficiente de correlación.

En el análisis relacional entre activos, Markowitz (1959) observó que se debería evitar invertir en activos que presenten un alto grado de correlación r positiva entre sus rentabilidades. De acuerdo con Levin y Rubin (2004), este coeficiente se obtiene con [13]:

$$r = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i * \sigma_j}; \quad (-1 \leq r \leq 1) \quad [13]$$

Donde:

σ_j, σ_i : desviación estándar de las acciones j e i .

$r = -1$: correlación lineal es perfecta e inversa.

$r = 1$: correlación lineal es perfecta y directa.

$r = 0$: no existe correlación lineal entre las acciones.

Una correlación directa significa que ambos títulos tienen un comportamiento similar, generando una situación inconveniente para el inversionista, ya que por tener una relación directa, la covarianza de los títulos será positiva incrementado el riesgo en vez de disminuirlo como se plantea en la diversificación. Cabe mencionar que el resultado de r , no necesariamente implica una relación causa-efecto entre ambos activos, ya que puede deberse al azar. Entonces la expresión [10] puede reescribirse como se muestra en [14] (Farias & Rodrigues de Moura, 2013):

$$\sigma_{ij} = r * \sigma_i * \sigma_j \quad []$$

1.2.7 Restricciones del modelo clásico.

El problema de la selección de portafolios tradicional es fundamentalmente un problema de optimización cuyo modelamiento estadístico considera algunas restricciones para su funcionamiento, éstas se puntualizan desde [15] hasta [17] (Markowitz H. , 1952):

- Minimización del riesgo para una rentabilidad esperada.

$$\sum_{i=1}^n w_i \bar{x}_i = \bar{x}_p \quad [14]$$

Esta condición elimina las combinaciones de capital invertido en títulos que no alcanzan la rentabilidad esperada, de esta manera, se asegura la conformación de un portafolio óptimo.

- Restricción presupuestaria: la suma de todas las ponderaciones que componen el portafolio es igual al 100% del presupuesto disponible para invertir.

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad [15]$$

- Condición de No Negatividad: la ponderación debe ser mayor o igual a cero para cada i , con una inversión en n títulos valores como máximo. Al evitar [17], la inversión en las opciones comprendidas por el tramo AB de la Ilustración 5, serían válidas (Velez-Pareja, 2003).

$$w_i \geq 0, \text{ para } i = 1, \dots, n \quad [16]$$

Sin esta restricción se permitirían las ventas en corto (Short Sales) o ponderaciones negativas en el portafolio. Esto significa que se vende una acción en lugar de comprarla, en el caso de no tenerla, se transa un activo que ha sido tomado como un préstamo, se vende a futuro y la utilización de este ingreso se utiliza para la compra de otro activo (Mendizábal Zubeldia, Miera Zabalza, & Zubia Zubiaurre, 2002; Lasa Crespo, 2004). Este tipo de inversión no es factible dentro del modelo de Markowitz.

1.2.8 Punto de varianza mínima global.

El punto de varianza mínima global es el portafolio que se puede conformar con el menor riesgo, un inversionista con un nivel alto de adversidad al riesgo podría escoger esta opción. Su cálculo se realiza a partir de la minimización dada en [18], y sujeta a las restricciones establecidas en [16] y [17].

$$\min \sigma_p^2 \quad [17]$$

O lo que es lo mismo:

$$\min \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \quad [18]$$

La función de Lagrange que permite solucionar este problema de optimización está dada por [20] (Lasa Crespo, 2004):

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} + \lambda \left[\bar{x}_P - \sum_{i=1}^n w_i \bar{x}_i \right] \quad [19]$$

Donde:

λ : operador lagrangiano que indica la variación de riesgo del portafolio por cada variación del 1% en la rentabilidad.

Para minimizar σ_p^2 se deriva [20] en función de w_i y del operador λ , posteriormente se iguala a cero, como se indica en [21]:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_i} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0; \quad \text{para } (i) = 1, \dots, (n) \quad [20]$$

Esto determina un conjunto de $(n + 1)$ ecuaciones para n ponderaciones de activos, siendo de esta manera susceptible a la solución. A continuación, se presenta un ejemplo en el que se desarrolla la función objetivo [20] para dos acciones:

$$\mathcal{L} = w_i^2 \sigma_i^2 + 2w_i w_j \sigma_{ij} + w_j^2 \sigma_j^2 + \lambda [\bar{x}_P - w_i \bar{x}_i - w_j \bar{x}_j]$$

Donde:

w_i, w_j : ponderaciones óptimas de las acciones i y j que permitirán minimizar el riesgo.

σ_i^2, σ_j^2 : valores de la varianza para las acciones i y j .

\bar{x}_P : rentabilidad esperada del portafolio, seleccionada subjetivamente por el inversionista.

\bar{x}_i, \bar{x}_j : rentabilidades esperadas individuales correspondientes a las acciones i y j .

Se deriva \mathcal{L} respecto a w_i, w_j y λ , se iguala a cero para obtener las condiciones de primer orden como se muestra a continuación:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_i} = 2w_i\sigma_i^2 + 2w_j\sigma_{ij} - \lambda\bar{x}_i = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_j} = 2w_j\sigma_j^2 + 2w_i\sigma_{ji} - \lambda\bar{x}_j = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \bar{x}_p - w_i\bar{x}_i - w_j\bar{x}_j = 0$$

El inversionista utiliza estos mecanismos de optimización para obtener un portafolio eficiente y así determinar qué ponderaciones deberían ser aplicadas en cada título, con el fin de minimizar σ_p^2 para una \bar{x}_p seleccionada. Sin embargo, el inversionista desconoce el comportamiento real que las acciones presentarán a futuro, todo está basado en sus expectativas (Markowitz H. M., 1959).

1.2.9 Algoritmo de la línea crítica.

Para Markowitz el conjunto de portafolios eficientes se representa de manera lineal (1952, 1956). Hacia 1952 Markowitz expuso el supuesto de que un único portafolio minimizaría la σ_p^2 para un nivel de \bar{x}_p dado. Mientras que en 1959, para facilitar el cálculo de cualquier matriz de covarianzas cuando n es extenso creó el *Algoritmo de Línea Crítica*, con base en el Algoritmo SIMPLEX “creado en 1947 y se le atribuye a George Bernard Dantzing (Estados Unidos) y Leonid Vitalievich Kantorovich (Rusia). Con este algoritmo se resuelven problemas de m restricciones y n variables; las restricciones pueden ser $\geq, \leq o =$ y m con respecto a n puede ser $>, < o =$. El número de soluciones básicas factibles es menor o igual a $\binom{m}{n}$ ” (Jiménez Lozano, 2009, pág. 115). Las ecuaciones de la Línea Crítica dependen de si las variables son (*IN*) u (*OUT*) (Markowitz H. M., 1999).

Donde:

OUT: se requiere que las variables no sean negativas.

IN: las variables varían libremente.

SLACK: desigualdades que son ignoradas en el desarrollo del modelo.

BINDING: se implementan como si fuesen igualdades.

La combinación entre *BINDING* e *IN*, en la fórmula de la Línea Crítica es la misma que si el problema fuese a minimizar la σ_p^2 para \bar{x}_p sujeta a restricciones de igualdad o para la maximización del \bar{x}_p con una σ_p^2 conocida.

1.2.10 Línea del Mercado de Capitales (LMC) y Línea de Tangencia.

En la época en la que Markowitz desarrolló su teoría, la complejidad técnica de su modelo implicaba costos de computación prohibitivos, debido a los extensos cálculos estadísticos de las medias, varianzas y covarianzas que el modelo cuadrático paramétrico requiere, por esto en sus textos no presenta desarrollos prácticos con la participación de numerosas acciones (Mendizábal Zubeldia, Miera Zabalza, & Zubia Zubiaurre, 2002). Asimismo, resultaba complejo el desarrollo del algoritmo propuesto para calcular la Matriz de Covarianzas (Markowitz H. M., 1999).

Por este hecho, la Teoría del Portafolio de 1952 fue ampliada por Sharpe en 1964 con la publicación del artículo “*Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk*” en “*The Journal of Finance*”.

Mientras que en el modelo de Markowitz todos los activos que componen el portafolio son riesgosos, en el modelo LMC de Sharpe (1964) el portafolio está conformado por las diferentes combinaciones de rentabilidad y riesgo obtenidas con la combinación de activos riesgosos y un activo que proporciona rentabilidad libre de riesgo⁷ R_f (Mascareñas, 2013), suponiendo que el inversionista puede prestar o pedir prestado a una tasa libre de riesgo r_f (Lasa Crespo, 2004).

La LMC es la recta de mayor pendiente θ tangente a la Curva de Mínima Varianza o “*prima por el riesgo esperada por unidad de desviación estándar*” (Dubova, 2005, pág. 256). Se traza con origen en la tasa libre de riesgo, caso en el que se invertiría la totalidad del presupuesto y el riesgo sería cero, hasta la región factible de los portafolios de mercado, llamados así ya que según el Criterio de Mínima Varianza, todos los inversores racionales deben mantener sus activos de riesgo en esa proporción (Sharpe, 1964; Mascareñas, 2013).

Según el Teorema de Separación planteado por el Nobel en Economía Tobin (1958), el inversionista puede tomar dos decisiones de inversiones separadas e independientes entre sí. La primera decisión consiste en escoger un portafolio conformado únicamente por activos riesgosos, que independientemente de la aversión al riesgo de los inversionistas, será el mismo para todos. La

⁷El activo libre de riesgo es un “*valor emitido por el gobierno de cada país, cuyo vencimiento coincide con la duración del período de tendencia del inversionista, con una rentabilidad segura, es decir, no existe incertidumbre acerca de su valor terminal y, por lo tanto, su desviación estándar es cero, al igual que la covarianza con otros activos riesgosos*” (Castaño Giraldo, Ramírez Aristizábal, & Taborda Tabares, 2013). Normalmente se utilizan los Bonos del Tesoro de los Estados Unidos (Lasa Crespo, 2004).

segunda decisión, radica en escoger el Portafolio Completo, que para todos los inversionistas se ubica en el punto de tangencia entre la frontera eficiente y la LMC. Dicha tangencia es llamada por Sharpe (1964) Cartera de Mercado, formada por “*la combinación de todos los títulos con riesgo en la misma proporción que tienen en el mercado de valores (...) puede actuar como una pseudocartera de mercado al tener representados a los valores con mayor peso del mercado de valores*” (Mascareñas, 2013).

De esta manera, según Sharpe (1964) el nuevo portafolio para el inversionista A estará definido por [22] y [23].

$$\bar{x}_P = R_f + \bar{R}_A \quad [21]$$

$$\sigma_P = w \sigma_A \quad [22]$$

Donde:

\bar{x}_P : rendimiento del portafolio.

\bar{R}_A : rendimiento elegido por el inversionista A.

w : parte del presupuesto invertida en el portafolio.

$1 - w$: parte del presupuesto invertida en títulos sin riesgo.

R_f : rentabilidad libre de riesgo.

σ_P : riesgo del portafolio.

σ_A : riesgo del portafolio A.

La ecuación de LMC es [24]:

$$\bar{x}_P = r_f + \theta \sigma_P \quad [23]$$

La pendiente es el resultado de [25]:

$$\theta = \frac{\bar{R}_M - r_f}{\sigma_M} \quad [24]$$

Donde:

\overline{R}_M : rendimiento de la Cartera de Mercado.

σ_M : riesgo de la Cartera de Mercado.

Por lo tanto:

$$\overline{x}_P = r_f + \frac{\overline{R}_M - r_f}{\sigma_M} \sigma_P$$

La función objetivo del modelo será la maximización de la tangente [26]:

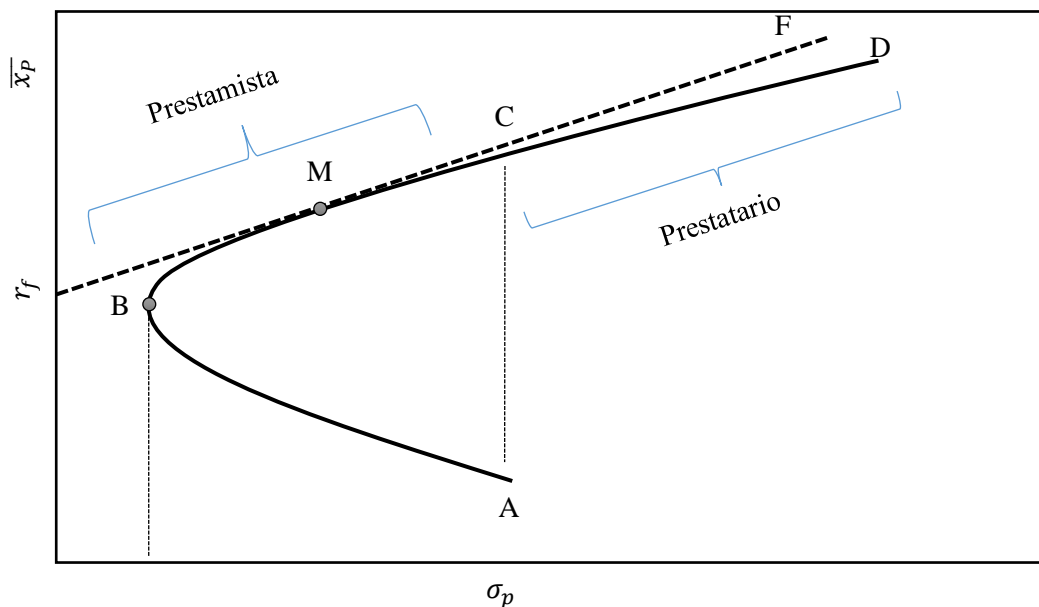
$$\frac{MAX}{\theta} = \frac{\overline{R}_M - r_f}{\sigma_M} \quad [25]$$

Sujeta a las restricciones dadas en [16] y [17], que a continuación se recuerdan:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad [15]$$

$$w_i \geq 0, \text{ para } i = 1, \dots, n \quad [16]$$

Ilustración 6. LMC y Curva de Mínima Varianza.



Fuente: Adaptado de Sharpe (1964) y Dubova (2005).

Donde:

B: Punto de Varianza Mínima Global.

BD: frontera eficiente, conformada por los portafolios integrados por títulos riesgosos.

r_F : LMC, al incorporar un activo sin riesgo, las combinaciones dominantes o eficientes son las ubicadas en esta recta.

M: representa la Cartera de Mercado.

r_M : prestamista, opciones para los inversionistas que prestan a una tasa libre de riesgo.

MF: prestatario, opciones para los inversionistas endeudados con una tasa libre de riesgo, suponiendo la factibilidad de las ventas en corto.

Los avances tecnológicos actuales permiten calcular la Línea Crítica sin utilizar el método de Sharpe; sin embargo, los principales inconvenientes del modelo de Markowitz se exponen en la siguiente sección.

1.2.11 Limitaciones del Modelo de Media-Varianza (MV).

El modelo clásico permite utilizar la información disponible de manera eficiente e integra las limitaciones del inversionista; sin embargo, pese a su superioridad frente a técnicas planteadas para una situación específica (Michaud, 1989) y a su éxito académico como referente teórico para el desarrollo de múltiples aportes en la economía financiera, en la práctica su implementación se ha visto restringida en la comunidad de inversionistas por causa de algunas falencias en la optimización (Brito Alonso & Villalba Vila, 2001). *“El carácter solamente aproximado del modelo que puede haber sido concebido nada más que por la aplicación de un resultado matemático (El caso del Teorema Central del Límite)”* (Castaño Vélez, 1987).

- Cálculo de los estimadores: uno de los principales problemas de las carteras optimizadas está en que los estimadores que permiten su cálculo maximizan la estimación de los errores. En la conformación de portafolios es inevitable la incidencia del error en la estimación del riesgo y del rendimiento, y al momento de realizar la optimización se sobre-pondera o infra-pondera significativamente los valores que tienen grandes o pequeños rendimientos esperados o los que presentan correlaciones negativas o positivas (Michaud, 1989; Villamil, 2007).
- Supuesto de la Distribución Normal: el proceso de inferencia estadística en la conformación de portafolios con el modelo MV, supone que la distribución normal describe el comportamiento

de los rendimientos históricos de los activos como base para la obtención de las matrices de varianzas y covarianzas; no obstante, la práctica ha demostrado que en múltiples casos la distribución de los rendimientos no es normal y los efectos de los desvíos moderados de la distribución normal se magnifican con la optimización (Michaud, 1989; Brito Alonso & Villalba Vila, 2001; Montaña & Zurita Herrera, 2009), situación con la cual se agrava aún más el problema.

- Constantes fluctuaciones en la frontera eficiente y en la composición del Portafolio Óptimo: se ha evidenciado que bajo los parámetros del modelo MV, las pequeñas variaciones en las suposiciones de entrada derivarían en grandes cambios en los resultados. Por ejemplo, por mínimo que sea un cambio en \bar{x}_p ocasionará la conformación de un nuevo portafolio, por esto, será necesario incluir nuevas restricciones en el modelo induciendo a la configuración de nuevas fronteras eficientes que dominarán a las previamente calculadas, entonces los portafolios no serán tan eficientes como deberían y sus componentes serían inestables. Estas consideraciones permiten cuestionarse sobre si el portafolio óptimo se encuentra o no debidamente conformado (Haugen, 1993; Chalabi, Chen, Ellis, & Würtz, 2009; Benavente Hualpa, 2012).

En torno al Portafolio Óptimo de la frontera eficiente se observa la Región Factible o conjunto infinito de portafolios estadísticamente equivalentes, a su vez, la composición de estos puede llegar a ser completamente diferente. De acuerdo con (Michaud, 1989), la carencia de particularidad del Portafolio Óptimo se debe al error de estimación sobre la información de entrada; por su parte, Villamil (2007) añade que en cierta medida esto se debe al mal acondicionamiento de la matriz de covarianza al implementar supuestos de entrada que no reflejan estimaciones financieramente significativas o al cálculo de parámetros con base en información histórica insuficiente o atípica⁸.

- Información contaminada: la existencia de datos atípicos tergiversa el proceso de estimación puesto que suelen generar colas gruesas que afectan el comportamiento de la distribución provocando sesgos y simultáneamente, presenta el inconveniente de una varianza elevada, ya que los errores de estimación pueden ser altos. En efecto, la estimación de las estadísticas de un portafolio pueden estar sesgadas significativamente, generando fronteras de MV erróneas

⁸Dato atípico: aquel que no tienen un comportamiento, en términos de proporción, similar a los demás datos al momento de formar un vector (Haugen, 1993; Villamil, 2007).

(Michaud, 1989; Brito Alonso & Villalba Vila, 2001; Trojani, Vanini, & Vignola, 2002; Montaña & Zurita Herrera, 2009). Adicionalmente, Castaño Vélez (1987) menciona que la pérdida de eficiencia de los modelos paramétricos clásicos puede ser inducida por errores en la transcripción, obtención, redondeo y agrupación de los datos.

- Soluciones de esquina: minimizar el riesgo de covarianza para un objetivo de rentabilidad, es un problema de programación cuadrática con restricciones lineales. El caso contrario, consiste en un problema lineal de máximo retorno del portafolio MV con restricciones cuadráticas. Independientemente de la función objetivo, en los portafolios grandes la solución tiende a centrarse en un pequeño grupo de activos debido a que el modelo busca opciones que permitan obtener altos rendimientos, varianzas mínimas y correlaciones bajas entre estos, reduciendo las posibilidades de diversificación, escenario poco atractivo para la comunidad de inversionistas al momento de implementar el modelo MV. Por ejemplo, podría inducir a la utilización de porcentajes extremos en la conformación del portafolio, limitando la Diversificación del mismo como lo propone Markowitz (Michaud, 1989; Brito Alonso & Villalba Vila, 2001; Montaña & Zurita Herrera, 2009; Villamil, 2007).

Las críticas citadas anteriormente sobre el enfoque MV y las propiedades deseables para los resultados entregados por los procesos de optimización, han orientado el desarrollo de la presente investigación en la que se propone el empleo de procesos estadísticos robustos para el establecimiento de la frontera eficiente.

La idea que subyace bajo el término estadística robusta, es proporcionar mejores propiedades de estabilidad que las ofrecidas a los inversionistas por los portafolios MV, mediante la reducción del error de estimación de la media y/o matrices de varianza y covarianza de un conjunto de activos financieros (Chalabi, Chen, Ellis, & Würtz, 2009).

2. Capítulo 2. Estadística robusta

En la información requerida en los procesos de investigación es frecuente encontrar valores atípicos, los cuales afectan los resultados obtenidos, por ende los análisis y las conclusiones que se deriven. Ante esta situación y con el ánimo de obtener información de mayor calidad, se han diseñado procedimientos estadísticos que eliminan la incidencia de la información atípica, estos se conocen con el nombre de métodos estadísticos robustos. En esta sección se realiza una síntesis de algunos de ellos (Zamar, 1994). Considere el precio de cierre de las acciones del Banco de Bogotá y el índice de precios COLCAP del trimestre comprendido entre 1 de julio y 29 de septiembre de 2014, los cuales se observan en la Tabla 1 (Grupo Aval y Valores S.A.).

Tabla 1. Índice COLCAP y precios Acciones Banco de Bogotá.

Julio 1 a septiembre 29 de 2014.

Fecha	B. Bogotá	COLCAP	Fecha	B. Bogotá	COLCAP	Fecha	B. Bogotá	COLCAP
01/07	68.800	1705,14	30/07	69.200	1710,59	01/09	72.600	1776,76
02/07	68.500	1703,39	31/07	70.000	1694,59	02/09	72.600	1777,53
03/07	68.700	1705,49	01/08	69.140	1693,06	03/09	72.540	1780,25
04/07	68.700	1704,32	04/08	70.000	1712,97	04/09	72.600	1769,38
07/07	69.000	1701,44	05/08	69.540	1724,24	05/09	72.800	1761,69
08/07	68.900	1695,60	06/08	69.520	1720,24	08/09	72.600	1749,84
09/07	68.700	1684,34	08/08	69.620	1719,88	09/09	72.620	1741,59
10/07	68.700	1674,48	11/08	70.000	1740,83	10/09	72.000	1744,09
11/07	69.400	1684,25	12/08	70.000	1720,34	11/09	72.000	1733,52
14/07	69.400	1673,99	13/08	70.120	1726,32	12/09	72.900	1734,98
15/07	68.740	1680,12	14/08	70.500	1723,15	15/09	72.900	1732,93
16/07	68.520	1687,00	15/08	71.000	1722,54	16/09	72.500	1728,09
17/07	68.520	1688,55	19/08	71.200	1731,95	17/09	73.500	1735,42
18/07	68.600	1689,55	20/08	73.460	1750,67	18/09	73.200	1741,58
21/07	68.500	1689,25	21/08	72.980	1755,26	19/09	73.300	1739,41
22/07	68.280	1697,12	22/08	72.160	1747,13	22/09	73.480	1730,80
23/07	68.240	1695,55	25/08	72.300	1749,93	23/09	73.000	1696,34
24/07	69.000	1693,63	26/08	73.000	1754,19	24/09	72.000	1688,37
25/07	68.520	1700,91	27/08	72.980	1764,10	25/09	71.000	1675,14
28/07	69.200	1714,94	28/08	72.540	1763,51	26/09	70.220	1678,00
29/07	69.200	1706,94	29/08	72.540	1771,18	29/09	70.500	1678,48

Fuente: Tomado de la página Web de Grupo Aval y Valores S.A.

Tabla 2. Rendimiento diario COLCAP y Banco de Bogotá.

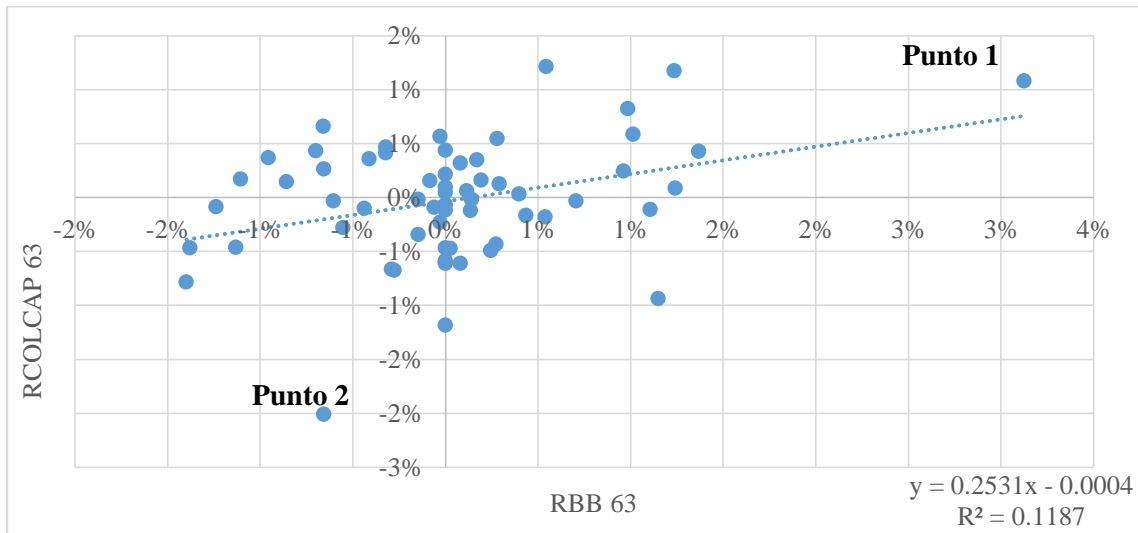
Julio 1 a septiembre 29 de 2014.

Fecha	B. Bogotá	COLCAP	Fecha	B. Bogotá	COLCAP	Fecha	B. Bogotá	COLCAP
01/07			30/07	0,00000%	0,21360%	01/09	0,08268%	0,31455%
02/07	-0,43700%	-0,10268%	31/07	1,14944%	-0,93975%	02/09	0,00000%	0,04333%
03/07	0,29155%	0,12321%	01/08	-1,23618%	-0,09033%	03/09	-0,08268%	0,15290%
04/07	0,00000%	-0,06863%	04/08	1,23618%	1,16912%	04/09	0,08268%	-0,61246%
07/07	0,43573%	-0,16913%	05/08	-0,65931%	0,65577%	05/09	0,27510%	-0,43556%
08/07	-0,14503%	-0,34383%	06/08	-0,02876%	-0,23226%	08/09	-0,27510%	-0,67492%
09/07	-0,29070%	-0,66629%	08/08	0,14374%	-0,02093%	09/09	0,02754%	-0,47259%
10/07	0,00000%	-0,58711%	11/08	0,54434%	1,21075%	10/09	-0,85742%	0,14344%
11/07	1,01377%	0,58177%	12/08	0,00000%	-1,18401%	11/09	0,00000%	-0,60789%
14/07	0,00000%	-0,61104%	13/08	0,17128%	0,34700%	12/09	1,24225%	0,08419%
15/07	-0,95556%	0,36552%	14/08	0,54046%	-0,18380%	15/09	0,00000%	-0,11823%
16/07	-0,32056%	0,40866%	15/08	0,70672%	-0,03541%	16/09	-0,55021%	-0,27969%
17/07	0,00000%	0,09184%	19/08	0,28129%	0,54480%	17/09	1,36988%	0,42327%
18/07	0,11669%	0,05920%	20/08	3,12482%	1,07506%	18/09	-0,40900%	0,35433%
21/07	-0,14588%	-0,01776%	21/08	-0,65556%	0,26184%	19/09	0,13652%	-0,12468%
22/07	-0,32168%	0,46481%	22/08	-1,12996%	-0,46426%	22/09	0,24527%	-0,49622%
23/07	-0,05860%	-0,09255%	25/08	0,19383%	0,16013%	23/09	-0,65538%	-2,01107%
24/07	1,10756%	-0,11330%	26/08	0,96353%	0,24314%	24/09	-1,37933%	-0,47094%
25/07	-0,69808%	0,42892%	27/08	-0,02740%	0,56334%	25/09	-1,39862%	-0,78668%
28/07	0,98752%	0,82147%	28/08	-0,60473%	-0,03345%	26/09	-1,10467%	0,17059%
29/07	0,00000%	-0,46758%	29/08	0,00000%	0,43398%	29/09	0,39795%	0,02860%

Fuente: elaboración propia.

En la Tabla 2 se observa la existencia de datos extremos ubicados en (3,125%, 1,075%) y (-0,655%, -2,0110%), los mismos son señalados en la Ilustración 7 bajo los nombres *punto 1* y *punto 2*, respectivamente. La línea de regresión calculada con la información es: $y = 0,2531x - 0,0004$. El coeficiente de correlación es de 34,45%.

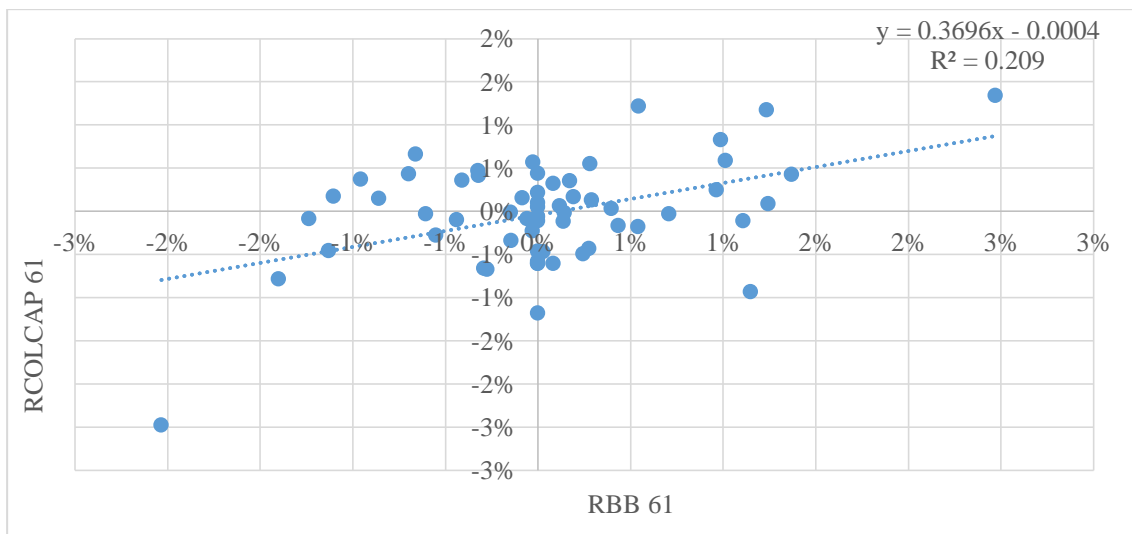
Ilustración 7. Dispersión de los rendimientos de 63 días.



Fuente: elaboración propia.

Al retirar los dos valores atípicos antes señalados, se obtiene un nuevo conjunto de información con el cual es posible calcular nuevamente el modelo de regresión cuya forma es: $y = 0.3696x - 0.0004$. El coeficiente de correlación asociado es de 45.72%. Aquí es importante observar como mejora el grado de asociación con la eliminación de los datos atípicos. La representación gráfica de la información analizada se encuentra en la Ilustración 8.

Ilustración 8. Dispersión de los rendimientos de 61 días.



Fuente: elaboración propia.

La estimación tradicional de media – varianza, como medidas de ubicación multivariante y dispersión, son determinantes al momento de seleccionar un portafolio (Markowitz H. , 1952). Cuando el conjunto de rendimientos presenta datos atípicos, se pone en duda el supuesto de normalidad, por lo que se altera y condiciona la eficiencia de los modelos tradicionales (Filzmoser & Todorov, 2009), por ello, los portafolios establecidos con la inclusión de la información atípica pueden ser inestables y bastante fluctuantes en el tiempo (Montaño & Zurita Herrera, 2009).

Al analizar el comportamiento de diferentes procedimientos estadísticos, varios son los autores que recomiendan utilizar el modelamiento estadístico robusto para contrarrestar la presencia de datos atípicos, así como las pequeñas variaciones en los supuestos iniciales de un modelo.

La estimación robusta fue desarrollada ante la necesidad de calcular estimadores estables frente al incumplimiento de los supuestos iniciales de un modelo y ante la presencia de valores que contaminan la muestra (Montaño & Zurita Herrera, 2009; Giraldo, Osorio, & Valencia, 2010). Se espera que los estimadores robustos cumplan con dos requerimientos: eficiencia y estabilidad. A través de la estimación robusta del vector de medias, se pretende que los datos atípicos no influyan en el resultado esperado (Montaño & Zurita Herrera, 2009), ya que proveen parámetros con altos puntos de ruptura⁹ en la creación de modelos adaptados a la realidad y de estimadores sólidos (Filzmoser & Todorov, 2009).

Con el fin de conformar portafolios con mejores propiedades de estabilidad en comparación con los métodos clásicos, en esta investigación se utilizaron los métodos robustos para portafolios eficientes de media - varianza MCD (Rousseeuw & Van Driessen, 1999), MVE (Rousseeuw & Van Zomeren, 1990) y OGK (Gnanadesikan & Kettenring, 1972; Maronna & Zamar, 2002), para reducir el error en la estimación del vector de medias y la matriz de varianza y covarianza.

⁹ **Punto de Ruptura:** es el máximo porcentaje de información atípica que tolera el estimador robusto, antes de tener un comportamiento aberrante (Agulló Candela, 1997; Benavente Hualpa, 2012).

2.1 Método Robusto: Matriz de Covarianza con Determinante Mínimo (MCD)

El problema de proveer estimadores con un alto punto de ruptura fue abordado por Rousseeuw, quien en 1984 propuso el método estadístico robusto de la Matriz de Covarianza con Determinante Mínimo (MCD, del inglés Minimum Covariance Determinant), como un estimador para los parámetros de localización y dispersión de datos multivariados, que detecta y elimina los datos atípicos en la estimación de la media y la matriz de covarianzas, respectivamente.

El propósito del método MCD es determinar una submuestra $(x_{i_1}, \dots, x_{i_h})$ de $h: (H_1, H_2, \dots, H_{\binom{n}{h}})$ observaciones por medio de la matriz de covarianzas con el menor determinante, considerando las submuestras como un producto de todas las posibles permutaciones $\binom{n}{h}$ de una misma combinación de los elementos extraídos de una muestra (x_1, \dots, x_n) compuesta por n observaciones multivariantes p – dimensionales, donde p es la dimensión de la matriz de correlación y el valor de h dependerá del máximo punto de ruptura como se establece en [27] (Rousseeuw, 1984).

$$h = \lfloor (n + p + 1)/2 \rfloor \quad [26]$$

Donde $\lfloor . \rfloor$ indica la parte entera del cociente con $\frac{n}{2} \leq h \leq n$. Entre mayor sea el valor de h , más robusto es el estimador MCD (Hualpa Benavente, 2012).

Una vez calculada h se estima el MCD para el vector de medias y la matriz de covarianzas tal como se procedería en el método clásico. El promedio de las h observaciones será el vector de medias que representa un estimador de localización T_{MCD} calculado mediante [28] (Leroy & Rousseeuw, 1987):

$$T_{MCD} = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^h x_{ij}; j = (1, \dots, h) \quad [27]$$

La dispersión C_{MCD} es el producto entre la matriz de covarianzas multiplicada por un factor de corrección de consistencia C_{ccf} y por un factor de corrección para una muestra finita C_{ssf} , escogidos de tal manera que C sea constante en el modelo normal multivariante. Para lograrlo se emplea [29] (Filzmoser & Todorov, 2009; Backhoff Veraguas, 2011).

$$C_{MCD} = C_{ccf} C_{ssf} \frac{1}{h-1} \sum_{j=1}^h (x_{ij} - T_{MCD})(x_{ij} - T_{MCD})^t \quad [28]$$

El procedimiento consiste en investigar exhaustivamente todos los subconjuntos de tamaño h de n en busca del subconjunto con el menor determinante en su matriz de covarianzas, pero esto sería posible para conjuntos de datos muy pequeños debido a los extensos cálculos de algoritmos que implica el desarrollo del MCD, así que en 1999, Rousseeuw y Van Driessen propusieron el algoritmo FAST-MCD. Este método es altamente implementado por sus características:

- Es un estimador robusto, incluso si se trata de tolerar una gran cantidad de datos atípicos (Berrendero Díaz, 1996).
- Sus propiedades asintóticas permiten que sea comparado con otros estimadores que poseen altos puntos de ruptura (Backhoff Veraguas, 2010).
- Detecta fácilmente datos atípicos multivariantes (Backhoff Veraguas, 2010).
- “*Es eficiente en términos de tiempo computacional*” (Rodríguez, 2005).
- Es aplicable a datos atípicos univariados y multivariados.
- Actualmente existen software adecuados para desarrollar el método, como R – Project (Jureckova & Picek, 2006; Chalabi, Chen, Ellis, & Würtz, 2009; Filzmoser & Todorov, 2009; Benavente Hualpa, 2012).

Debido a que se pretende encontrar la matriz de covarianza concentrada con el menor determinante, el algoritmo para FAST-MCD se basa en $C - step$, donde C representa dicha concentración. Rousseeuw y Van Driessen (1999) demuestran mediante un teorema que el proceso de iteración para $C - step$, converge en un número finito de pasos hasta llegar al mínimo local más aproximado al mínimo global, puesto que al ejecutar el MCD no hay garantía de que se alcance este último punto.

Se estima el MCD de una h inicial denominada H_1 . Luego se realiza una aproximación inicial para (T_{H_1}, C_{H_1}) , esta recorre una distancia Mahalanobis robusta $dMCD_i$ hasta llegar a la siguiente (T_{H_2}, C_{H_2}) con un determinante posiblemente menor $\det C_{H_2} \leq \det(C_{H_1})$. Las distancias $(dMCD_1, \dots, dMCD_n)$ se obtienen al reemplazar en la fórmula de la distancia Mahalanobis tradicional [30] los valores de (T_{H_1}, C_{H_1}) como se indica en [33] (Rousseeuw & Van Driessen, 1999):

$$d_i = \sqrt{(\bar{x}_i - T(x))^t C(x)^{-1} (\bar{x}_i - T(x))} \quad [29]$$

Donde:

$T(x)$: media aritmética dada por [31].

$C(x)$: matriz de covarianza obtenida con [32].

$$T(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \quad [30]$$

$$C(x) := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - T(x))^t (\bar{x}_i - T(x)) \quad [31]$$

Al reemplazar $T(x)$ por T_{H_1} y $C(x)$ por C_{H_1} se obtiene $dMCD_i$:

$$dMCD_i = \sqrt{(\bar{x}_i - T_{H_1})^t C_{H_1}^{-1} (\bar{x}_i - T_{H_1})} \quad [32]$$

Posteriormente, se calcula (T_{H_2}, C_{H_2}) para H_2 que tienen $dMCD_i$ más cortas. El proceso se ejecuta iterativamente disminuyendo las distancias robustas para obtener nuevos subconjuntos con igual o menor determinante que el inmediatamente anterior (Rodríguez, 2005). “*Los estimadores robustos MCD que se obtendrán a partir de esta submuestra seleccionada son adecuados para la detección de datos atípicos, ya que las observaciones de estas características no afectan a estos estimadores*” (Benavente Hualpa, 2012, pág. 79).

Para tener un mayor entendimiento de este procedimiento se deben comprender los siguientes conceptos:

- Subconjunto inicial: es el conjunto en el que se reinician las iteraciones de h generadas al azar para incrementar la probabilidad de escoger un subconjunto sin datos atípicos. A partir de $p + 1$ puntos seleccionados se calcula (T_{H_0}, C_{H_0}) ; posteriormente, se calculan las distancias $(dMCD_1, \dots, dMCD_n)$ y se ordenan ascendentemente para asignar la primera h a h – subset (H_0) (Filzmoser & Todorov, 2009).

- Número reducido de $C - steps$: se generan dos $C - steps$ para escoger los diez h con el menor determinante y reiterarlos a la convergencia. En el caso contrario, se tendría que realizar una iteración de convergencia para cada h (Filzmoser & Todorov, 2009).
- Particiones: la función [33] debe ser calculada para cada h de n , lo cual implica la realización de una gran cantidad de cálculos cuando n es muy grande. Para este tipo de situaciones, una de las soluciones para incrementar la eficiencia en el cálculo es la creación de subconjuntos de tamaño similar y realizar los cálculos para cada uno. Se escogen las mejores soluciones para cada subconjunto y se procede con su iteración en el conjunto de datos completo (Filzmoser & Todorov, 2009).

2.2 Método Robusto: Elipsoide de Mínimo Volumen (MVE)

En el método clásico los valores de todo el conjunto de datos pueden ser representados obteniendo una nube con forma elipsoidal y en la cual es posible ubicar el punto central representado por $T(x)$. Bajo esta situación se hace posible calcular la distancia de Mahalanobis d_i dada por [30], con la que se identifican los valores atípicos multivariantes presentes (Rousseeuw & Van Zomeren, 1990).

En la estimación de la matriz de covarianzas, $T(x)$ y $C(x)$ son variables equivariantes afines cuando se cumple con [34] y [35] (Leroy & Rousseeuw, 1987; Rousseeuw & Van Zomeren, 1990; Lopuhaä & Rousseeuw, 1991):

$$C(x_1A + b, \dots, x_nA + b) = A^t C(x_1, \dots, x_n)A \quad [33]$$

Donde:

A : Cualquier matriz invertible de $p - por - p$.

b : Cualquier vector.

$$T(xA + b, \dots, x_nA + b) = T(x_1, \dots, x_n)A + b \quad [34]$$

Dado que los métodos clásicos sufren el efecto del enmascaramiento de los datos atípicos, hacen que los cálculos tanto de $T(x)$ como de $C(x)$, sean vulnerables a su presencia. El valor de $T(x)$

será atraído por estos datos y $C(x)$ se contraerá en su dirección (Rousseeuw & Van Zomeren, 1990).

Para evitar el enmascaramiento, Rousseeuw (1983-1984) en Leroy y Rousseeuw (1987), desarrollaron el estimador MVE equivariante afín de posición T_{MVE} y dispersión C_{MVE} , que en comparación con el MCD es menos eficiente en el cálculo algorítmico pero permite obtener un mayor punto de ruptura.

De acuerdo con Rousseeuw y Van Zomeren (1990), una vez que los datos típicos o “*buenos*” son identificados, estos pueden ser utilizados para aplicar los métodos clásicos en las estimaciones finales de la media y la covarianza. En este orden de ideas, el enfoque MVE permite la robustificación de d_i para cada vector x_i al reemplazar $T(x)$ y $C(x)$ en [30] por estimadores robustos MVE, así un dato tiene probabilidad de ser atípico cuando supera un punto de corte prefijado. Adicionalmente, T_{MVE} y C_{MVE} deben permitir la minimización de $C(x)$ sujeta a [36] (Rousseeuw & Van Zomeren, 1990; Lopuhaä & Rousseeuw, 1991):

$$\#\{i; (\bar{x}_i - T(x))C(x)^{-1}(\bar{x}_i - T(x))^t \leq a^2\} \geq h \quad [35]$$

Donde:

a^2 : constante elegida como $X_p^2 \cdot 50$ cuando se espera que la mayoría de los datos provengan de una distribución normal. En caso que la muestra sea pequeña se debe tomar el factor $C_{n,p}^2$.

h : cobertura o submuestras aleatorias. Se obtiene a través de [27].

Tomando como referencia a Leroy y Rousseeuw (1987) en conjunto con el trabajo de Rousseeuw y Van Zomeren (1990), la metodología que permite estimar T_{MVE} y C_{MVE} es la siguiente:

A partir de una muestra con distribución normal (x_1, \dots, x_n) compuesta por n puntos multivariados y de dimensión p dispersos en una nube con forma elipsoidal, se toman submuestras h que a su vez están compuestas por Conjuntos Elementales $p + 1$ (Rousseeuw & Van Zomeren, 1990), de esta manera todos los posibles Conjuntos Elementales serán $\binom{n}{p+1}$ (Agulló Candela, 1997).

Para cada h se calcula la media ponderada T_{MVE} con la ecuación [37] y la matriz de covarianza ponderada C_{MVE} a través de la ecuación [39]. Estas estadísticas definen un elipsoide que puede expandirse o contraerse para cubrir exactamente las h elegidas.

$$T_{MVE1} = \left(\sum_{i=1}^n w_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n w_i \bar{x}_i \quad [36]$$

Donde el peso $w_i = w(dmVE_i)$ depende de las distancias robustas.

Si bien, la localización del MVE se mide con T_{MVE} ubicada en el centro del elipsoide con mínimo volumen, ésta debe cubrir al menos el 50% de la porción de los datos no contaminados de (x_1, \dots, x_n) , por esto h debe cumplir con [38] (Leroy & Rousseeuw, 1987):

$$h = \frac{n}{2} + 1 \quad [37]$$

La dispersión del MVE está dada por una matriz de covarianza C_{MVE} semidefinida positiva $p - por - p$, en forma elipsoidal y multiplicada por un factor de corrección para obtener la consistencia de una distribución normal (Rousseeuw, 1985; Agulló Candela, 1997; Chalabi, Chen, Ellis, & Würtz, 2009; Filzmoser & Todorov, 2009).

$$C_{MVE1} = \left(\sum_{i=1}^n w_i - 1 \right)^{-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - T_{MVE1})^t (\bar{x}_i - T_{MVE1}) \quad [38]$$

En la sección cinco de su publicación, Lopuhaä y Rousseeuw (1991) demostraron que el punto de ruptura de T_{MVE0} y C_{MVE0} es el mismo que T_{MVE1} y C_{MVE1} cuando la función de w se desvanece en una $dmVE_i$ grande. La ventaja de conservar el punto de ruptura de las estimaciones iniciales es que el modelo es capaz de combinar un alto punto de ruptura con una eficiencia igualmente alta.

Para facilitar el cálculo de las variables equivariantes afín, Leroy y Rousseeuw (1987) proponen el Algoritmo de Remuestreo, caracterizado por buscar los datos típicos en lugar de los datos atípicos y por depender de una permutación variante, es decir, que el reordenamiento de x_i producirá cambios en h .

A partir de submuestras de distintas observaciones $p + 1$, indexadas por $J = (i_1, \dots, i_{p+1})$ se calculan la media T_J y la matriz de covarianza C_J , como se muestra en [40] y [41], respectivamente:

$$T_J = \frac{1}{p+1} \sum_J x_i \quad [39]$$

$$C_J = \frac{1}{p} \sum_J (x_i - T_{JX})^t x_i - T_J \quad [40]$$

El elipsoide debe expandirse o contraerse para contener exactamente h , por ello se debe calcular iterativamente la expresión [42], para este procedimiento se recomienda la ayuda de equipos de computación:

$$m_J^2 = \{(x_i - T_J)C_J^{-1}(x_i - T_J)^t\}_{h:n} \quad [41]$$

Donde:

m_J^2 : factor de ampliación derecho. El volumen cuadrado del elipsoide resultante es proporcional a $m_J^{2p} \det(C_J)$, de este cálculo se toma únicamente el valor más pequeño. Para este J se computan [43] y [44]:

$$T_{MVE} = T_J \quad [42]$$

$$C_{MVE} = (X_{p,50}^2)^{-1} C_{n,p}^2 m_J^2 C_J \quad [43]$$

Una vez calculadas T_{MVE} y C_{MVE} se procede a sustituirlas en [30] para obtener la distancia Mahalanobis MVE como se muestra en [45]:

$$dMVE_i = \sqrt{(x_i - T_{MVE})C_{MVE}^{-1}(x_i - T_{MVE})^t} \quad [44]$$

2.3 Método Robusto: Estimador Ortogonalizado de Gnanadesikan y Kettenring (OGK)

Las situaciones cotidianas han demostrado que el comportamiento real de los datos no siempre obedece a una Distribución Normal. La estimación de la máxima verosimilitud no es fiable en presencia de valores atípicos, en este escenario, la estimación multivariada clásica de la localización \bar{x}_i y dispersión σ_{ij} resulta poco eficiente al momento de construir la frontera de portafolios eficientes. Por esto, en 1972 los autores (Gnanadesikan & Kettenring, 1972) plantearon un método robusto ortogonalizado (OGK) para identificar los valores atípicos de un conjunto de datos y estimar la dispersión y la matriz de varianzas y covarianzas robusta, variables representadas por T y C respectivamente.

Estimación multivariante de la localización y la matriz de covarianzas.

Para comprender este procedimiento, se definen las siguientes variables:

\bar{x}_i : vector de p elementos

σ_{XY} : Es una matriz simétrica respecto a su diagonal y definida positiva $i \times p$, con $i = p$

X : vector compuesto por p elementos y con distribución normal multivariante (\bar{x}_i, σ_{XY}) para cada $i = 1, \dots, n$.

Sea i la fila y P la columna, entonces, el vector columna o matriz columna será [46] (Kjell, 2006):

$$X = \begin{bmatrix} \bar{x}_{i1} \\ \bar{x}_{i2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{ip} \end{bmatrix} \quad [45]$$

Patrones:

$\bar{x}_i = 0$: Vector cero

$\sigma_{XY} = I$: Matriz idéntica.

De esta manera la matriz para dos dimensiones se expresa así:

$$\bar{x}_i \sim mvnormal \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}; i = 1, \dots, n \quad [46]$$

Propiedades:

Si Y es una variable aleatoria normal estándar, entonces $X = \mu + \sigma Y$ también es normal.

Si Y es una variable aleatoria normal estándar multivariada, se tiene que:

$$(\sqrt{\sigma_{xy}})^t \sqrt{\sigma_{XY}} = \sigma_{XY} \quad [47]$$

$$X = \bar{x}_i + \sqrt{\sigma_{XY}} \sim mvnormal(\bar{x}_i, \sigma_{XY}) \quad [49]$$

Estimación robusta multivariante de la localización y la matriz de covarianzas.

El método OGK consiste en calcular una matriz de covarianza robusta entre dos variables aleatorias X y Y , teniendo como base la identidad (50):

$$\sigma_{XY} = \frac{1}{4} [\sigma(X+Y)^2 - \sigma(X-Y)^2]; \sigma = \sqrt{\sigma^2}; \quad (50)$$

Los investigadores Gnanadesikan y Kettenring (1972), plantearon que al reemplazar σ^* en σ , entonces σ_{XY} también será robusta, representada por v y definida a través de (52), la cual toma como base la descomposición del vector propio y las variaciones en las direcciones de las coordenadas. No obstante, pese a que la matriz resultante es simétrica, no necesariamente será semidefinida positiva.

Con la finalidad de superar la carencia de la matriz robusta positiva, con base en la contribución al modelamiento estadístico realizada por Gnanadesikan y Kettenring (1972), en el 2002 los autores Maronna y Zamar, aportaron el procedimiento descrito a continuación:

A partir de un conjunto de datos $X = (x_{ij})$ con $i, j = (1, \dots, n)$ como una connotación general de una matriz $i \times p$ compuesta por filas $x^t_i; i = (1, \dots, n)$ y columnas $X_j; j = (1, \dots, p)$, se calcula de manera iterativa la matriz de dispersión $C(X)$ y la localización $T(X)$, para lo cual se recomienda la utilización de herramientas de simulación.

Las ecuaciones que permiten obtener $C(X)$ y $T(X)$ son (51) y (52):

$$C(X) = A \Gamma A^t \quad (51)$$

$$T(X) = AC \quad (52)$$

Los elementos A , Γ y v se denotan en el conjunto de expresiones (53) a (57):

$$A = DE \quad (53)$$

$$\Gamma = \text{diag}(\sigma(Z_1)^2, \dots, \sigma(Z_p)^2) \quad (54)$$

$$C = (\bar{x}_i(Z_1), \dots, \bar{x}_i(Z_p))^t \quad (55)$$

$$z_i = E^t y_i = A^{-1} x_i; \quad x_i = Az_i \quad (56)$$

$$y_i = D^{-1} x_i; \quad i = (1, \dots, n) \quad (57)$$

Donde:

μ : media aritmética, localización.

D : se calcula con (58):

$$D = \text{diag}(\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_p)) \quad (58)$$

E : matriz que tiene por columnas los valores propios e_j de la matriz de correlación $U = (U_{jk})$; $j \equiv (1, \dots, p)$.

A su vez U se expresa como (59) y se calcula aplicando C a las columnas de Y como se expresa en (60):

$$U \equiv E \Lambda E^t; \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \quad (59)$$

$$U_{jj} = 1; \quad U_{jk} = C(Y_j, Y_k); \quad j \neq k \quad (60)$$

λ_j : valores propios de U ; $j \equiv (1, \dots, p)$

De esta manera OGK se obtiene al resolver (61):

$$U_{jk} = \frac{1}{4} \left[\sigma^*(Y_j + Y_k)^2 - \sigma^*(Y_j - Y_k)^2 \right]; \quad j \neq k \quad (61)$$

El anterior proceso se desarrolla iterativamente para el cálculo de V y T para Z . Posteriormente, se expone el sistema de coordenadas original en (62):

$$C_2(X) = AV(Z)A^t \quad ; \quad T_{(2)}(X) = At(Z) \quad (62)$$

Se estima la distancia de Mahalanobis por medio de (63):

$$d_i = d(\bar{x}_i) = (\bar{x}_i - T(X))^t V(X)^{-1} (\bar{x}_i - T) \quad (63)$$

Cada x_i tiene una ponderación w_i para la cual se calculan V y T , por lo tanto, la media y la matriz de covarianza de w se definen como se muestra en (64) y (65), respectivamente.

$$T_w = \frac{\sum_i w_i \bar{x}_i}{\sum_i w_i} \quad (64)$$

$$V_w = \frac{\sum_i w_i (\bar{x}_i - T_w)(\bar{x}_i - T_w)^t}{\sum_i w_i} \quad (65)$$

Con $W(d) = I(d \leq d_0)$, donde I es el indicador de la función. Para medir la distancia inicial se emplea (66):

$$d_0 = \frac{\chi_p^2(\beta) \text{med}(d_{1,\dots,d_n})}{\chi_p^2(.5)} \quad (66)$$

Donde:

$\chi_p^2(\beta)$: Cuantil (β) de la distribución chi-cuadrada con p grados de libertad.

med : Mediana.

Finalmente, se calcula la expresión (67):

$$d_i = \sum_j \left(\frac{z_{ij} - \mu(Z_j)}{\sigma(Z_j)} \right)^2 \quad (67)$$

3. Capítulo 3. Caso de estudio

Con el propósito de suministrar una mejor ilustración y argumentación sobre los planteamientos teóricos expuestos en los anteriores capítulos, en la presente sección se desarrolla un ejercicio práctico para determinar el portafolio óptimo como resultado de la aplicación de cada una de las metodologías abordadas.

Se inicia con la aplicación de la teoría de portafolios de Markowitz (1952); posteriormente, para calcular los estimadores robustos se trae a colación la aplicación de los métodos: determinante mínimo (MCD) (Rousseeuw & Van Driessen, A fast algorithm for the minimum covariance determinant estimator, 1999), mínimo elipsoide (MVE) (Leroy & Rousseeuw, 1987), y finalmente, ortogonalización por pares (OGK) (Maronna & Zamar, 2002). Una vez llevados a cabo todos los cálculos, se conocen los porcentajes de inversión del capital en las acciones que conformarían los portafolios óptimos para cada método, y se procederá a realizar la comparación de los resultados para determinar la metodología más adecuada, que para el caso de estudio, permita obtener un mejor resultado en la conformación del portafolio en términos de rentabilidad y riesgo.

3.1 Metodología y resultados

Para estructurar un portafolio óptimo con cada uno de los métodos estudiados, se construyó una matriz de datos a partir de la información de los precios de cierre diarios de diez acciones negociadas en la BVC durante el período comprendido entre el 14 de enero del 2008 al 13 de noviembre del 2014: Ecopetrol, Isagen, Grupo Sura, Bancolombia Preferencial, Bancolombia, ISA, Nutresa, Celsia, Banco de Bogotá y Argos. Estos datos son suministrados al público por el Grupo Aval Acciones y Valores S.A., a través de su página Web (Grupo Aval y Valores S.A.).

En cuanto a la herramienta a utilizar para el desarrollo de esta investigación se propone el software R- Project en su versión 2.15.3 (CRAN R - project, 2013), por tratarse de un software libre bajo las condiciones de la licencia Pública General de GNU-GPL. El lenguaje de programación R - Project

fue escrito inicialmente por Robert Gentleman y Ross Ihaka del Departamento de Estadística de la Universidad de Auckland en Nueva Zelanda (R Core Team, 2013).

En la actualidad, R - Project es el producto de la retroalimentación constante de colaboradores de todo el mundo. Su código fuente es administrado por su núcleo de desarrollo, razón por la cual, cuenta con una amplia gama de procesos y análisis estadísticos adaptables a múltiples tareas de diferentes áreas del conocimiento, entre estos: estadística descriptiva, análisis multivariado, series de tiempo, regresión múltiple, diseño de experimentos, estadística no paramétrica, construcción de gráficos, entre otros (Rojas Medina & Suárez Cifuentes, 2013).

Para el funcionamiento de los procedimientos que permiten determinar el portafolio óptimo en R mediante cada método estudiado, se requiere la instalación de los paquetes mencionados a continuación y otros que son requeridos para su funcionamiento.

```
install.packages("fPortfolio",dependencies=TRUE).
install.packages("fAssets",dependencies=TRUE).
install.packages("mnormt",dependencies=TRUE)
install.packages("sn",dependencies=TRUE)
install.packages("corpcor",dependencies=TRUE)
install.packages("Rglpk", dependencies=TRUE)
```

La instrucción referenciada indica al programa el paquete que debe instalar al igual que todos aquellos que se requieran (Rmetrics Core Team, Diethelm Wuertz, 2011; Adler, y otros, 2014).

Inicialmente se debe tener la precaución de borrar la memoria, lo que se logra con el siguiente comando:

```
rm(list = ls()) # Borra memoria
ls() # Verifica que la memoria este limpia
```

Para que la base de datos sea compatible con la lectura de R, es indispensable que el archivo se grabe en Excel en formato *csv*, en este caso el nombre del archivo es *Valoraciones.csv*; adicionalmente, se debe indicar en R que los decimales están señalados mediante comas, que el formato de fecha es día, mes, año y que en la primera fila se encuentran ubicados los nombres de los títulos, para esto se utiliza el siguiente comando:


```
Fron<- readSeries("Valoraciones.csv",header= T,sep=";",dec=","format="%d/%m/%Y")
```

Donde Fron es el nombre de la base de datos con que se reconocerá en R al ser importada, seguido esto se verifica que los datos fueron cargados, para esto utilice.

```
names(Fron) # Señala los nombres de las acciones que fueron cargadas.  
dim(Fron)   # Indica las dimensiones de las bases de datos.
```

Fueron incorporados en el programa los valores de cierre de las acciones. El cálculo los rendimientos diarios, puede abordarse directamente desde R - Project con el comando *returns*, como se indica enseguida:

```
Rendimiento <- returns(Fron[,1:10])
```

En el Anexo A, se suministra el conjunto de instrucciones que permiten cargar la base de datos en R - Project.

3.1.1 Procedimiento en R - Project para calcular la frontera eficiente y establecer portafolios óptimos por el método MV.

Se estiman los rendimientos promedios y la matriz de covarianzas, por ser el método clásico se emplea el comando *covEstimator* y debe tenerse presente que los rendimientos fueron calculados y están denotados en el programa R bajo el nombre *rendimiento*. Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 3.

```
covEstimator <- covEstimator(Rendimiento)  
fastcovEstimator <- function(x, spec = NULL, ...)  
covEstimator  
print(covEstimator)
```

Tabla 3. Rendimiento promedio por acción y matriz de varianzas y covarianzas – MV.

\$mu										
ECOPETRO L	ISAGEN	GR_SURA	BANCOL(P)	BANCOL	ISA	NUTRESA	CELSIA	BAN_BOGO T*	ARGOS	
0,000182004	0,000233144	0,00046937	0,000376249	0,00038083	0,00015626	0,000340201	-0,00082732	0,000480306	0,000129639	
\$Sigma										
	ECOPETRO OL	ISAGEN	GR_SURA	BANCOL(P)	BANCOL	ISA	NUTRESA	CELSIA	BAN_BOG OT*	ARGOS
ECOPETRO OL	5,34671E-04	1,01324E-05	-8,70785E-05	4,87931E-05	4,97744E-05	1,99633E-04	-9,76400E-05	-6,01979E-05	-1,39483E-04	-1,31913E-04
ISAGEN	1,01324E-05	2,24723E-04	1,60141E-04	1,04395E-04	1,03255E-04	6,35867E-05	1,22904E-04	1,36954E-04	1,18606E-04	1,64195E-04
GR_SURA	-8,70785E-05	1,60141E-04	4,41699E-04	2,12784E-04	2,14720E-04	5,65235E-05	2,48737E-04	2,65919E-04	2,51691E-04	3,71561E-04
BANCOL(P)	4,87931E-05	1,04395E-04	2,12784E-04	2,99461E-04	2,38407E-04	8,09053E-05	1,35958E-04	1,63365E-04	1,38767E-04	2,07139E-04
BANCOL	4,97744E-05	1,03255E-04	2,14720E-04	2,38407E-04	2,89606E-04	8,59495E-05	1,31910E-04	1,69422E-04	1,35339E-04	2,21118E-04
ISA	1,99633E-04	6,35867E-05	5,65235E-05	8,09053E-05	8,59495E-05	2,73956E-04	1,38930E-05	4,93124E-05	-1,13563E-05	4,13659E-05
NUTRESA	-9,76400E-05	1,22904E-04	2,48737E-04	1,35958E-04	1,31910E-04	1,38930E-05	2,94469E-04	1,87260E-04	2,04452E-04	2,72709E-04
CELSIA	-6,01979E-05	1,36954E-04	2,65919E-04	1,63365E-04	1,69422E-04	4,93124E-05	1,87260E-04	3,54331E-03	1,96603E-04	2,97794E-04
BAN_BOG OT*	-1,39483E-04	1,18606E-04	2,51691E-04	1,38767E-04	1,35339E-04	-1,13563E-05	2,04452E-04	1,96603E-04	3,39771E-04	2,76267E-04
ARGOS	-1,31913E-04	1,64195E-04	3,71561E-04	2,07139E-04	2,21118E-04	4,13659E-05	2,72709E-04	2,97794E-04	2,76267E-04	7,89304E-04

Fuente: elaboración propia.

\$mu: En el espacio temporal analizado y de acuerdo con el enfoque MV, la acción que ha generado una mayor rentabilidad diaria promedio corresponde al Banco de Bogotá, seguida de Grupo Sura, Bancolombia, Bancolombia – Preferencial, Nutresa, Isagen, Ecopetrol, ISA, Argos y Celsia.

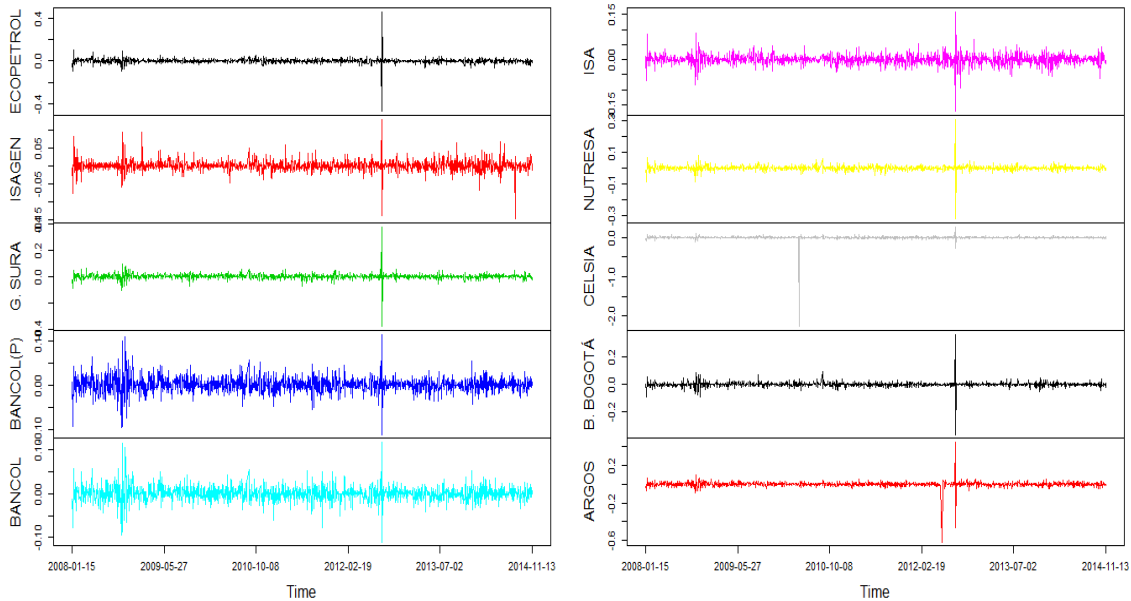
\$Sigma: Muestra los resultados correspondientes a la matriz de covarianza, nótese que esta es una matriz simétrica en la que las varianzas se encuentran ubicadas en la diagonal principal y las covarianzas por fuera de esta. Al calcular la raíz cuadrada a las varianzas, se obtiene el valor del riesgo para cada uno de los títulos considerados.

Para representar el comportamiento de los rendimientos de las acciones, se emplean las siguientes dos instrucciones:

```
GraficoRendimientos <- as.timeSeries(Rendimiento)
plot(GraficoRendimientos)
```

Ilustración 9. Rendimientos diarios de acciones negociadas en la BVC.

14 de enero del 2008 al 13 de noviembre del 2014.



Fuente: elaboración propia.

En la serie de tiempo se muestran las fluctuaciones de los rendimientos de cada una de las diez acciones estudiadas. La existencia de puntas muy pronunciadas evidencia la presencia de valores extremos, ya sean positivos o negativos, dando paso a la discusión sobre la presencia de valores atípicos que pueden incidir en los resultados al conformar carteras de inversión por el método MV. Así mismo, surge el cuestionamiento sobre el supuesto de normalidad de los rendimientos, el cual será analizado como un preámbulo de la aplicación de la estadística robusta.

Dado que la frontera eficiente está constituida por el conjunto de portafolios eficientes (Markowitz H. , 1952), para este caso R - Project conforma el número de portafolios solicitados y con base en esto, establece la forma de la frontera eficiente.

Para la obtención de los puntos que forman la frontera eficiente, el investigador tiene la alternativa de ingresar la instrucción en R – Project, en la que se especifique la cantidad de portafolios óptimos que se requieran para el estudio, si este número no es dado, por defecto R - Project genera 50 portafolios, pero solamente muestra el resultado para 5 de ellos y lo hace de la siguiente manera:

```

Frontier <- portfolioFrontier(Rendimiento)
print(Frontier)# El sistema por defecto solo muestra cinco puntos
setRiskFreeRate(Spec) = 0 # Se establece el valor a la tasa libre de riesgo
    
```

Tabla 4. Descripción de los puntos que conforman la frontera eficiente.

Portfolio Weights:										
	ECOPETROL	ISAGEN	GR_SURA	BANCOL(P)	BANCOL	ISA	NUTRESA	CELSIA	B. BOGOTÁ	ARGOS
1	0,0264	0	0	0	0	0	0	0,9736	0	0
13	0,0975	0	0	0	0	0,2526	0	0,6498	0	0
25	0,1736	0	0	0	0	0,3787	0	0,3229	0	0,1248
37	0,1925	0,2547	0	0	0	0,2464	0,1688	0,0624	0,0329	0,0423
49	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Target Return and Risks:										
	mean	mu	Cov	Sigma	CVaR	VaR				
1	-0,0008	-0,0008	0,0579	0,0579	0,0662	0,0235				
13	-0,0005	-0,0005	0,0392	0,0392	0,0498	0,0197				
25	-0,0002	-0,0002	0,0222	0,0222	0,0387	0,0195				
37	0,0002	0,0002	0,0113	0,0113	0,0269	0,0164				
49	0,0005	0,0005	0,0184	0,0184	0,0352	0,0190				

Fuente: elaboración propia.

Portfolio Weights: Indica la participación de los activos para cada portafolio conformado.

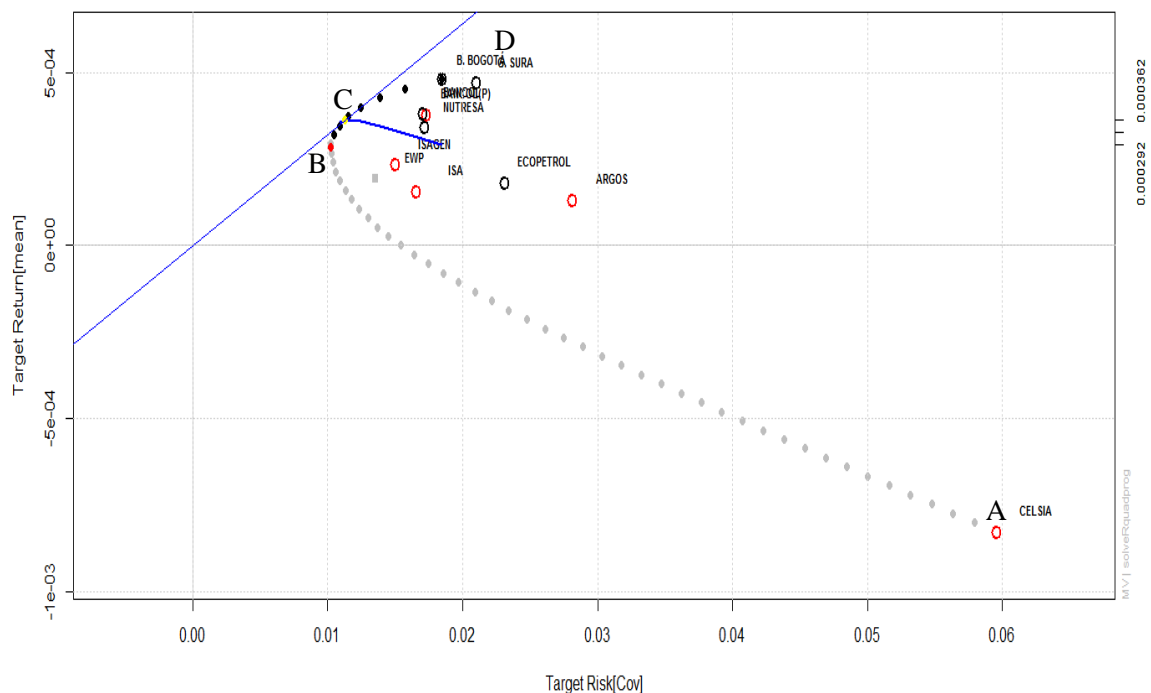
Target Return and Risks: Para cada uno de los portafolios generados, muestra el rendimiento (mean) y el riesgo (Sigma), además del valor condicional de riesgo (CVaR) y el valor en riesgo (VaR).

Es así como la opción 25 ofrece un portafolio integrado en un 17,36% por acciones de Ecopetrol, 37,87% por ISA, 32,29% por Celsia y la parte restante por Argos. Si el inversionista toma esta opción, obtendría un rendimiento esperado de -0,0002 asumiendo un riesgo de 0,0222, una posible pérdida máxima de 0,0195 y una pérdida potencial de 0,0387. Para graficar la frontera eficiente, se

define el valor de la tasa libre de riesgo que para el caso es de cero y se calcula en ella la línea de Sharpe.

```
setRiskFreeRate(Spec) = 0  
sharpeRatioLines(Frontier, col = "blue", lwd = 2)  
tangencyPoints(Frontier, pch = 19, col = "yellow")  
tangencyLines(Frontier, col = "blue")  
tailoredFrontierPlot(Frontier, col = c("black", "red"))  
grid()#Genera cuadrículas en el gráfico
```

Ilustración 10. Frontera eficiente método MV.



Fuente: elaboración propia.

La Ilustración 10 incluye los puntos que resultarían de invertir en cada acción el 100% del capital disponible. El inversionista escoge racionalmente el riesgo o la rentabilidad que desea para su inversión, su decisión se limitará a los puntos que conforman la frontera eficiente MV que le permite identificar las mejores rentabilidades para un nivel de riesgo determinado, de tal manera que a mayor riesgo se consigue una rentabilidad mayor. Cualquier punto ubicado por fuera de esta línea será ineficiente.

Para guiar aún más al inversionista al momento de tomar una decisión, en el gráfico se visualiza la línea de mercado de capitales (LMC) y el punto de tangencia (C). Para los inversionistas con alta aversión al riesgo se observa el Punto de Varianza Mínima Global (B); si el inversionista desea un rendimiento alto pese a que conlleve un alto nivel de riesgo, optará por el portafolio ubicado en (D).

Conformación del portafolio en el punto de tangencia:

$$tangencyPortfolio(Rendimiento, Spec)$$

Tabla 5. Portafolio en el punto de tangencia MV.

Portfolio Weights:									
ECOPETROL	ISAGEN	GR_SURA	BANCOL(P)	BANCOL	ISA	NUTRESA	CELSIA	BAN_BOGOT'	ARGOS
0,2558	0,0186	0,0232	0,0374	0,0989	0,0277	0,1002	0	0,4382	0
Target Return and Risks:									
mean	mu	Cov	Sigma	CVaR	VaR				
0,0004	0,0004	0,0113	0,0113	0,026	0,0152				

Fuente: elaboración propia.

El portafolio óptimo ubicado en (C) ofrece un rendimiento de 0,0004 con un riesgo de 0,0113.

Punto de mínima varianza:

$$minvariancePortfolio(Rendimiento, Spec)$$

Tabla 6. Portafolio en el punto de mínima varianza MV.

Portfolio Weights:									
ECOPETROL	ISAGEN	G. SURA	BANCOL(P)	BANCOL	ISA	NUTRESA	CELSIA	B. BOGOTÁ	ARGOS
0,2157	0,181	0	0,0056	0,018	0,1772	0,1782	0,0009	0,2234	0
Target Return and Risks:									
mean	mu	Cov	Sigma	CVaR	VaR				
0,0003	0,0003	0,0103	0,0103	0,024	0,0146				

Fuente: elaboración propia.

Un inversionista que desee obtener una rentabilidad distinta a la ofrecida en los puntos (B) y (C), podrá encontrar la combinación precisa de los activos que generan un portafolio óptimo para un rendimiento dado. En la primera instrucción se indica el rendimiento que para este caso será de 0.00048. En la segunda, se solicita la composición del portafolio para dicho rendimiento:

```
setTargetReturn(Spec) <- 0.00048
efficientPortfolio(Rendimiento, Spec)
```

Al solucionar el modelo planteado los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 7.

Tabla 7. Portafolio óptimo para una rentabilidad establecida MV.

Portfolio Weights:									
ECOPETROL	ISAGEN	G. SURA	BANCOL(P)	BANCOL	ISA	NUTRESA	CELSIA	B. BOGOTÁ	ARGOS
0	0	0,028	0	0	0	0	0	0,972	0
Target Return and Risks:									
Mean	mu	Cov		Sigma		CVaR	VaR		
0,0005	0,0005	0,0183		0,0183		0,0348	0,0185		

Fuente: elaboración propia.

Para el nivel de rentabilidad establecido (0.00048) el inversionista asumiría un riesgo de 0,0183 que en comparación al punto de tangencia (C) de la frontera eficiente, en la que se tenía un rendimiento de 0,0004 para un riesgo de 0,0113, se observa un riesgo mayor para una rentabilidad mayor.

Un inversionista que desee conocer de manera aproximada el rendimiento y el riesgo asumidos con un portafolio conformado previamente, debe ingresar en R - Project la participación de los activos. Como ejemplo se ha determinado un portafolio compuesto por acciones de Isagen y Bancolombia Preferencial en un 34,38% y un 65,62%, respectivamente:

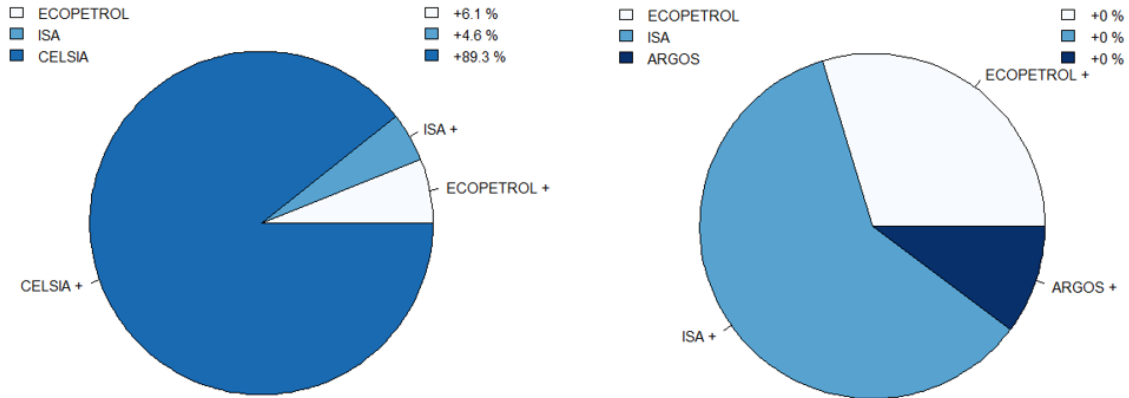
```
setWeights(Spec) = c(0, 0.3438, 0, 0.6562, 0,0,0,0,0,0)
feasiblePortfolio(Rendimiento, Spec)
```

Se obtiene que el portafolio ofrece una rentabilidad de 0,0003 asociada a un riesgo de 0,0142.

La Ilustración 11 correspondiente a la composición del portafolio anterior en R - Project, puede elaborarse con las siguientes instrucciones:

weightsPie(frontier, pos = 4)
weightedReturnsPie(frontier, pos = 20)

Ilustración 11. Participación accionaria en portafolios de inversión MV.



Fuente: elaboración propia.

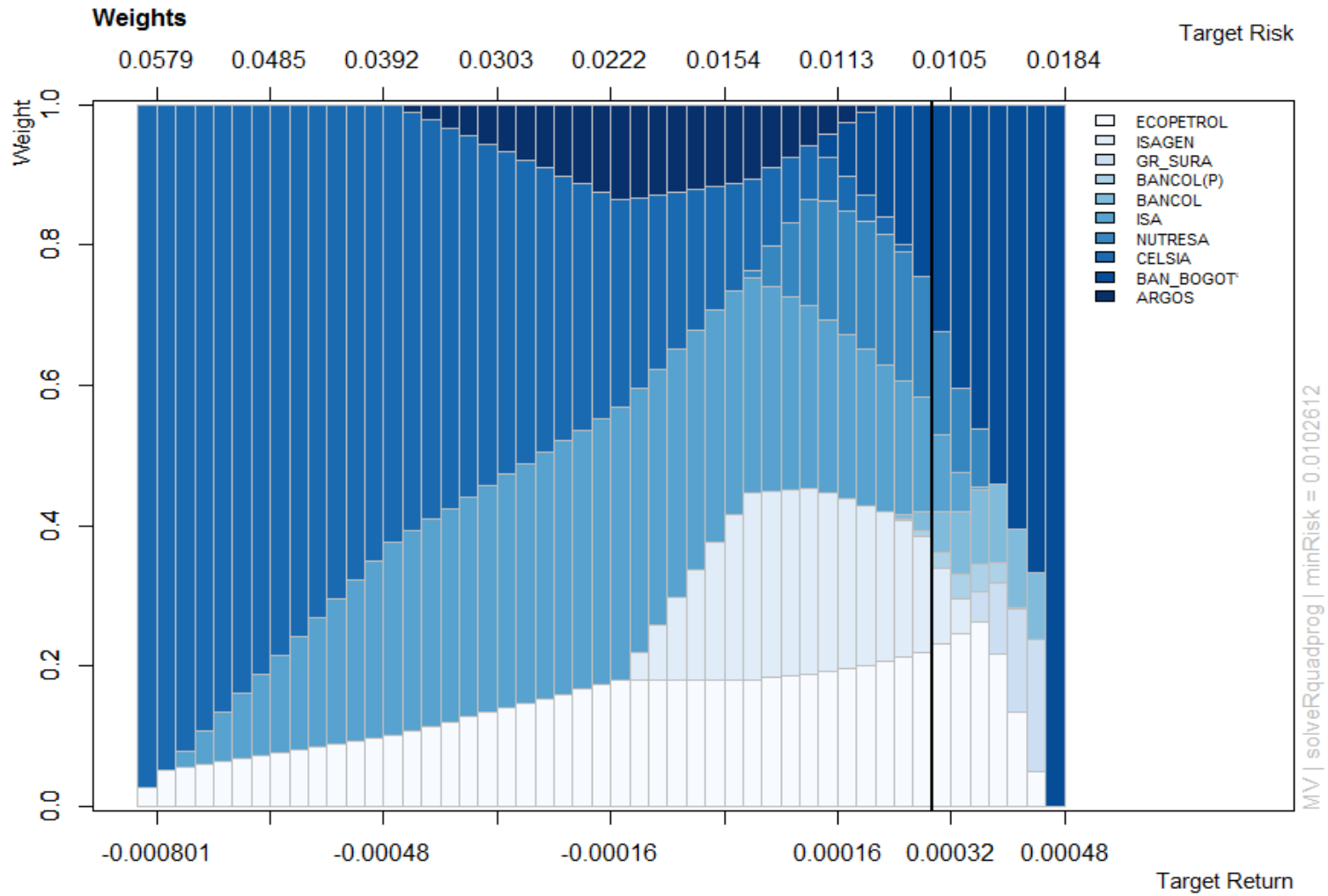
El gráfico circular ubicado al lado izquierdo representa al portafolio número 4 y el de la derecha el número 20.

La Ilustración 12 representa el rendimiento, riesgo, y conformación de activos y da una idea al lector de los efectos que tienen en cada uno de ellos en la medida en que se vaya desplazando, es decir, si se moviliza de izquierda a derecha en el eje horizontal inferior se observa como el rendimiento va en aumento, pero lo mismo ocurre con el riesgo, lo que se observa en la línea horizontal de la parte superior. En las columnas se observan variaciones de colores, cada color representa un activo y los cambios obedecen a las modificaciones que ellos sufren en las participaciones, por los desplazamientos hechos. La línea vertical negra y oscura denota el punto de mínima varianza y aquí debe tenerse presente que el desplazamiento debe hacerse hacia la derecha de esta línea para obtener portafolios eficientes.

Las instrucciones que permiten obtener la Ilustración 12 son las siguientes:

weightsfrontier = portfolioFrontier(Rendimiento)
weightsPlot(weightsfrontier)

Ilustración 12. Rendimiento, riesgo y participación de cada punto en la frontera eficiente MV.



Fuente: elaboración propia.

3.1.1.1 Validación del supuesto de normalidad.

Para verificar si se cumple el supuesto de normalidad exigido por el método tradicional, R tiene varias pruebas para verificar la normalidad multivariada, para este caso se plantea la prueba de Shapiro-Wilk.

H_0 : Los rendimientos se distribuyen normalmente.

H_1 : Los rendimientos no siguen una distribución normal.

La instrucción en R - Project es la siguiente:

```
shapiroTest <- assetsTest(Rendimiento, method = "shapiro")
print(shapiroTest)
slotNames(shapiroTest)
```

Se obtienen los siguientes resultados:

```
Shapiro-Wilk normality test
data: Z
W = 0.1008, p-value < 2.2e-16
```

Con un $p - value$ de $2.2e-16$ se rechaza H_0 a un nivel aproximado al 100%, es decir, los rendimientos no siguen una distribución normal multivariada. Justificando la necesidad de emplear métodos robustos en los procesos de estimación para conformación de portafolios.

En el Anexo B, se suministra el conjunto de instrucciones que permiten obtener la frontera eficiente y otros datos requeridos para tomar decisiones en procesos de inversión.

3.1.2 Procedimiento en R - Project para calcular la frontera eficiente y establecer portafolios óptimos por el método MCD.

En R - Project el algoritmo de la librería MASS es poco eficiente en términos de tiempo para calcular el MCD, por esto se utilizará el paquete *robustbase* propuesto por el mismo autor del método en cuestión (Chalabi, Chen, Ellis, & Würtz, 2009; Rousseeuw, y otros, 2014).

Se ejecutan los pasos previos al script específico de cada método. Estos van desde cargar los paquetes requeridos para el funcionamiento de R - Project hasta el cálculo de los rendimientos para cada acción. Seguido esto se realiza la estimación de la covarianza una única vez y al principio, los datos son almacenados globalmente para evitar realizar el proceso cada que se estima el MCD (Chalabi, Chen, Ellis, & Würtz, 2009).

El cálculo de la matriz de covarianza por el método MCD se realiza a través de la expresión `covMCDestimator`, es una instrucción que trae el programa R - Project, con la cual internamente efectúa los cálculos para establecer la matriz de covarianza por el método de determinante mínimo, siguiendo para esto todos los procesos que fueron indicados en el marco teórico de este método.

`covMcdEstimate <- covMcdEstimator(Rendimiento)`

Las estimaciones se realizan con:

`fastCovMcdEstimator <- function(x, spec = NULL, ...) covMcdEstimate`
`print(covMcdEstimate)`

Tabla 8. Rendimientos promedio por acción y matriz de varianzas y covarianzas MCD.

\$mu										
ECOPETRO L	ISAGEN	G. SURA	BANCOL(P)	BANCOL	ISA	NUTRESA	CELSIA	B. BOGOTÁ	ARGOS	
0.0001820041	0.0002331438	0.0004693720	0.0003762490	0.0003808333	0.0001562634	0.0003402008	- 0.0008273202	0.0004803062	0.0001296391	
\$\$Sigma										
	ECOPETRO L	ISAGEN	G. SURA	BANCOL(P)	BANCOL	ISA	NUTRESA	CELSIA	B. BOGOTÁ	ARGOS
ECOPETRO L	1,56900E-04	3,84686E-05	5,80707E-05	5,69382E-05	5,33192E-05	5,39483E-05	3,79482E-05	3,31467E-05	1,85950E-05	6,30913E-05
ISAGEN	3,84686E-05	1,14047E-04	3,32539E-05	3,36602E-05	3,31077E-05	3,81146E-05	2,49452E-05	2,99722E-05	1,79724E-05	3,89843E-05
GR_SURA	5,80707E-05	3,32539E-05	1,46826E-04	7,33117E-05	7,83887E-05	6,43642E-05	4,89448E-05	5,54179E-05	2,32487E-05	7,71345E-05
BANCOL(P)	5,69382E-05	3,36602E-05	7,33117E-05	2,02820E-04	1,47316E-04	4,71133E-05	4,32083E-05	3,90891E-05	2,55448E-05	6,84911E-05
BANCOL	5,33192E-05	3,31077E-05	7,83887E-05	1,47316E-04	1,84978E-04	5,46795E-05	3,83849E-05	4,10628E-05	2,60718E-05	6,96654E-05
ISA	5,39483E-05	3,81146E-05	6,43642E-05	4,71133E-05	5,46795E-05	1,59994E-04	4,21991E-05	4,82042E-05	1,72089E-05	8,29285E-05
NUTRESA	3,79482E-05	2,49452E-05	4,89448E-05	4,32083E-05	3,83849E-05	4,21991E-05	1,14757E-04	3,56666E-05	2,29222E-05	4,72296E-05
CELSIA	3,31467E-05	2,99722E-05	5,54179E-05	3,90891E-05	4,10628E-05	4,82042E-05	3,56666E-05	1,70802E-04	1,48485E-05	6,36910E-05
BAN_BOGOTÁ	1,85950E-05	1,79724E-05	2,32487E-05	2,55448E-05	2,60718E-05	1,72089E-05	2,29222E-05	1,48485E-05	9,82881E-05	1,76024E-05
ARGOS	6,30913E-05	3,89843E-05	7,71345E-05	6,84911E-05	6,96654E-05	8,29285E-05	4,72296E-05	6,36910E-05	1,76024E-05	2,34344E-04

Fuente: elaboración propia.

Al igual que en el método anterior, R - Project establece los rendimientos para cada uno de los títulos y estima la matriz de covarianzas. Debe tenerse presente que los rendimientos promedios de las acciones son distintos a los obtenidos en el método tradicional, esto en razón a que en el MCD, R - Project trabaja con muestras en las cuales los valores atípicos fueron eliminados.

```

covMcdSpec <- portfolioSpec()
setEstimator(covMcdSpec) <- "fastCovMcdEstimator"
setNFrontierPoints(covMcdSpec) <- 50
covMcdFrontier <- portfolioFrontier(data = Rendimiento, spec = covMcdSpec)
print(covMcdFrontier)

```

Tabla 9. Puntos que conforman la frontera eficiente MCD.

Portfolio Weights:										
	ECOPETROL	ISAGEN	G. SURA	BANCOL(P)	BANCOL	ISA	NUTRESA	CELSIA	B. BOGOTÁ	ARGOS
1	0,0264	0	0	0	0	0	0	0,9736	0	0
13	0,0963	0,1318	0	0	0	0,0307	0	0,6802	0,061	0
25	0,0978	0,1723	0	0	0	0,0602	0,075	0,412	0,1827	0
37	0,086	0,2018	0,0024	0,0082	0,0394	0,0759	0,1533	0,1482	0,2848	0
49	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Target Return and Risks:										
	mean	mu	Cov	Sigma	CVaR	VaR				
1	-0,0008	-0,0008	0,0579	0,0128	0	0,0662	0,0235			
13	-0,0005	-0,0005	0,0411	0,0099	0	0,0506	0,0186			
25	-0,0002	-0,0002	0,0264	0,0077	0	0,0386	0,0153			
37	0,0002	0,0002	0,0144	0,0067	0	0,0289	0,0137			
49	0,0005	0,0005	0,0184	0,0100	0	0,0352	0,019			

Fuente: elaboración propia.

R - Project está parametrizado para que muestre la conformación de 5 portafolios, por ejemplo, la opción 25 ofrece un portafolio integrado por seis de las diez acciones analizadas. Este portafolio genera un rendimiento de 0,0264 con un riesgo de 0,0077, una posible pérdida máxima de 0,0386 y una pérdida potencial de 0,0153.

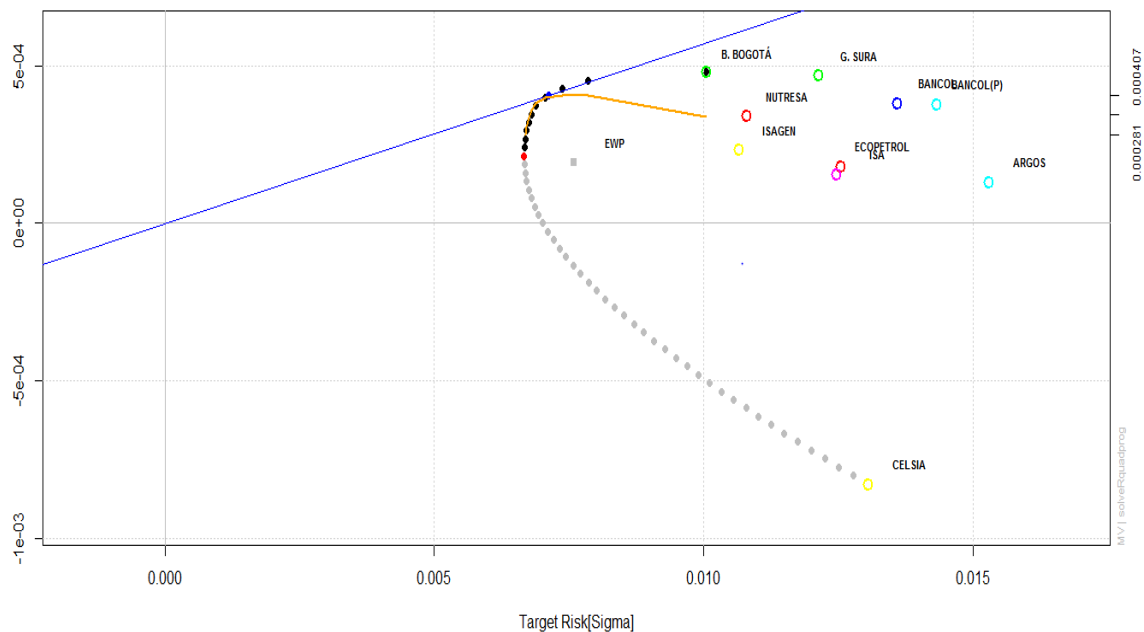
Generación de la frontera eficiente:

```

tailoredFrontierPlot(covMcdFrontier,mText = "MCD Robustified MV Portfolio",risk = "Sigma")

```

Ilustración 13. Frontera eficiente método MCD.



Fuente: elaboración propia.

En la Ilustración 13 además de la frontera eficiente se observa el conjunto de portafolios ineficientes, la línea y el punto de tangencia, el punto de mínima varianza y los puntos que representan la inversión del 100% del capital en cada acción.

Para describir con una mayor precisión la frontera eficiente MCD, a continuación se encuentran los comandos para realizar los cálculos pertinentes en R - Project.

Ilustración de la Línea de Mercado y el punto de tangencia:

```
frontierPlot(f)
tangencyPoints(f, col = "RED")
Ptotang <- tangencyPoints(f)
Ptotang
```

Los resultados obtenidos al correr la instrucción establecen una rentabilidad de 0.0004074347 para un riesgo de 0.007049779.

Para generar la conformación del portafolio en el punto de tangencia, se corren las siguientes instrucciones:

```
spec = covMcdSpec
setTargetReturn(spec) <- 0.0004074347
efficientPortfolio(Rendimiento, spec)
Ptotang
```

Tabla 10. Portafolio en el punto de tangencia MCD.

Portfolio Weights:										
ECOPETROL	ISAGEN	G. SURA	BANCOL(P)	BANCOL	ISA	NUTRESA	CELSIA	B. BOGOTÁ	ARGOS	
0,0018	0,157	0,1689	0,025	0,0416	0	0,1780	0	0,4276	0	
Target Return and Risks:										
mean		mu		Cov		Sigma		CVaR		VaR
0,0004		0,0004		0,0149		0,0070		0,0276		0,0144

Fuente: elaboración propia.

El punto de mínima varianza y la participación de los activos son calculados de la siguiente manera:

```
minvariancePoints(f)
Minvar <- minvariancePoints(f)
Minvar
spec = covMcdSpec
setTargetReturn(spec) <- 0.0002172424
efficientPortfolio(Rendimiento, spec)
```

De acuerdo con el método MCD, un inversionista con un alto grado de aversión al riesgo podría invertir en un portafolio con un riesgo de 0,006615087 asociado a una rentabilidad de 0,0002172424.

Tabla 11. Portafolio en el punto de mínima varianza global MCD.

Portfolio Weights:										
ECOPETROL	ISAGEN	G. SURA	BANCOL(P)	BANCOL	ISA	NUTRESA	CELSIA	B. BOGOTÁ	ARGOS	
0,0831	0,2004	0,0206	0,0018	0,0331	0,0634	0,1651	0,1065	0,3086	0,0014	
Target Return and Risks:										
mean		mu		Cov		Sigma		CVaR		VaR
0,0002		0,0002		0,0133		0,0066		0,0279		0,0136

Fuente: elaboración propia.

En el Anexo C, se suministra el conjunto de instrucciones que permiten obtener la frontera eficiente y otros datos requeridos para tomar decisiones en procesos de inversión.

3.1.3 Procedimiento en R - Project para calcular la frontera eficiente y establecer portafolios óptimos por el método MVE.

Una vez ejecutadas las instrucciones requeridas para cargar los datos en R - Project, se realiza el cálculo de los rendimientos promedios y la matriz de covarianzas a partir del precio de cierre de las acciones, por tratarse del método MVE se debe aplicar el comando *mveEstimator* a los rendimientos que se encuentran calculados en el programa R - Project con el nombre "Rendimiento". Los resultados se muestran en la Tabla 12.

```
mveEstimate <- mveEstimator(Rendimiento)
```

```
mveEstimate
```

Tabla 12. Rendimientos promedio por acción y matriz de varianzas y covarianzas MVE.

\$mu										
ECOPETROL	ISAGEN	G. SURA	BANCOL (P)	BANCOL	ISA	NUTRESA	CELSIA	B. BOGOTÁ	ARGOS	
0,0001820041	0,0002331448	0,000469372	0,000376249	0,000380833	0,0001562634	0,000340208	-0,0008273202	0,0004803062	0,0001296391	
\$Sigma										
	ECOPETROL	ISAGEN	G. SURA	BANCOL(P)	BANCOL	ISA	NUTRESA	CELSIA	B. BOGOTÁ	ARGOS
ECOPETROL	1,516619E-04	3,258714E-05	5,555823E-05	5,125942E-05	4,791052E-05	4,783705E-05	3,394775E-05	3,463669E-05	1,603832E-05	5,273232E-05
ISAGEN	3,258714E-05	9,412931E-05	3,430489E-05	3,216151E-05	3,198011E-05	3,640753E-05	2,033302E-05	2,882399E-05	1,737146E-05	3,682376E-05
G. SURA	5,555823E-05	3,430489E-05	1,431392E-04	7,592052E-05	7,926521E-05	6,554724E-05	4,819671E-05	5,841289E-05	2,493090E-05	8,146569E-05
BANCOL(P)	5,125942E-05	3,216151E-05	7,592052E-05	1,839022E-04	1,363873E-04	4,758810E-05	4,194398E-05	4,062412E-05	2,760760E-05	6,880696E-05
BANCOL	4,791052E-05	3,198011E-05	7,926521E-05	1,363873E-04	1,708255E-04	5,550259E-05	3,727338E-05	4,402088E-05	2,994553E-05	7,041923E-05
ISA	4,783705E-05	3,640753E-05	6,554724E-05	4,758810E-05	5,550259E-05	1,478004E-04	3,669723E-05	4,602011E-05	2,130849E-05	7,654679E-05
NUTRESA	3,394775E-05	2,033302E-05	4,819671E-05	4,194398E-05	3,727338E-05	3,669723E-05	9,864048E-05	3,260915E-05	1,964992E-05	3,977576E-05
CELSIA	3,463669E-05	2,882399E-05	5,841289E-05	4,062412E-05	4,402088E-05	4,602011E-05	3,260915E-05	1,448669E-04	1,599099E-05	5,811252E-05
B. BOGOTÁ	1,603832E-05	1,737146E-05	2,493090E-05	2,760760E-05	2,994553E-05	2,130849E-05	1,964992E-05	1,599099E-05	1,014520E-04	1,988618E-05
ARGOS	5,273232E-05	3,682376E-05	8,146569E-05	6,880696E-05	7,041923E-05	7,654679E-05	3,977576E-05	5,811252E-05	1,988618E-05	1,964042E-04

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con el método MVE propuesto por (Leroy & Rousseeuw, 1987), en la Tabla 12 se observan las estimaciones de los vectores de media y las matrices de covarianzas después de que los valores atípicos fueron eliminados.

Como parte del proceso de optimización para determinar la frontera eficiente MVE, se toman los rendimientos esperados y la volatilidad de los activos. Para este caso se ha realizado el cómputo de 50 portafolios que harán parte de la frontera eficiente MVE, cinco de estos se exponen en la Tabla 13.

```
fastMveEstimator <- function(x, spec = NULL, ...) mveEstimate
mveSpec <- portfolioSpec()
setEstimator(mveSpec) <- "fastMveEstimator"
setNFrontierPoints(mveSpec) <- 50
```

Tabla 13. Puntos que conforman la frontera eficiente MVE.

Portfolio Weights:										
	ECOPETROL	ISAGEN	G. SURA	BANCOL(P)	BANCOL	ISA	NUTRESA	CELSIA	B. BOGOTÁ	ARGOS
1	0,0072	0,0183	0	0	0	0	0	0,9745	0	0
13	0,0724	0,1533	0	0	0	0,0042	0,018	0,6863	0,066	0
25	0,083	0,1975	0	0	0	0,0287	0,1124	0,4144	0,164	0
37	0,0885	0,2369	0	0,0129	0,0116	0,0472	0,1991	0,1439	0,2557	0,0042
49	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Target Return and Risks:										
	mean	mu	Cov	Sigma	CVaR	VaR				
1	-0,0008	-0,0008	0,058	0,0118	0,0663	0,0235				
13	-0,0005	-0,0005	0,0415	0,0092	0,0511	0,0184				
25	-0,0002	-0,0002	0,0267	0,0073	0,0389	0,0154				
37	0,0002	0,0002	0,0144	0,0064	0,0289	0,0135				
49	0,0005	0,0005	0,0184	0,0101	0,0352	0,019				

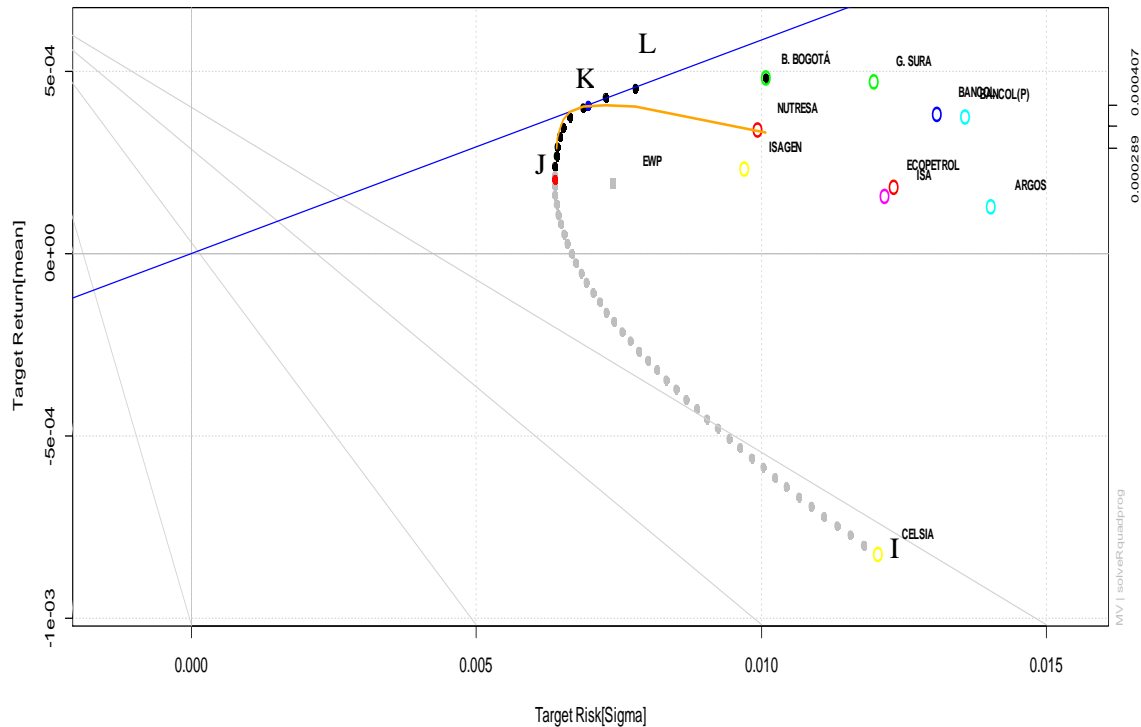
Fuente: elaboración propia.

La opción 25 corresponde a un portafolio integrado por seis de las diez acciones analizadas. Con éste el rendimiento será de -0,0002 con un riesgo de 0,0064, una posible pérdida máxima de 0,0289 y una pérdida potencial de 0,0135.

Con los portafolios calculados con el anterior procedimiento es posible construir la frontera eficiente:

```
setNFrontierPoints(mveSpec) <- 50  
mveFrontier <- portfolioFrontier(data = Rendimiento, spec = mveSpec)  
tailoredFrontierPlot(mveFrontier, mText = "MVE Robustified MV Portfolio", risk =  
"Sigma")
```

Ilustración 14. Frontera eficiente método MVE.



Fuente: elaboración propia.

A demás de la frontera eficiente, en la Ilustración 14 se observa el conjunto de portafolios ineficientes, la línea y el punto de tangencia, el punto de mínima varianza y los puntos que representan la inversión del 100% del capital en cada acción.

Para describir con una mayor precisión la frontera eficiente MVE, a continuación se encuentran las instrucciones para realizar los cálculos pertinentes en R - Project.

En la Ilustración 14, el punto de tangencia equivale a un rendimiento igual a 0,0004074347 y a un riesgo de 0,006965588, información que se obtiene mediante las siguientes instrucciones:

```
frontierPlot(f)
tangencyPoints(f, col = "RED")
Ptotang <- tangencyPoints(f)
Ptotang
```

Para conocer la participación de las acciones en el punto de tangencia, el procedimiento a seguir es el siguiente:

```
setTargetReturn(mveSpec) <- 0.0004074347
efficientPortfolio(Rendimiento, mveSpec )
```

De esta manera, se obtiene la Tabla 15.

Tabla 14. Conformación del portafolio en el punto de tangencia MVE.

Portfolio Weights:									
ECOPETROL	ISAGEN	G. SURA	BANCOL(P)	BANCOL	ISA	NUTRESA	CELSIA	B. BOGOTÁ	ARGOS
0	0,1468	0,172	0,021	0,0255	0	0,214	0	0,4206	0
Target Return and Risks:									
mean	mu	Cov		Sigma		CVaR	VaR		
0,0004	0,0004	0,0151		0,007		0,0276	0,0145		

Fuente: elaboración propia.

El punto de mínima varianza y su composición se obtienen como se muestra a continuación, dando como resultado la información expuesta en la Tabla 14:

```
minvariancePoints(f)
Minvar <- minvariancePoints(f)
Minvar

mveEstimate <- mveEstimator(Rendimiento)
fastMveEstimator <- function(x, spec = NULL, ...) mveEstimate
```

```
mveSpec <- portfolioSpec()
setEstimator(mveSpec) <- "fastMveEstimator"
setTargetReturn(mveSpec) <- 0.0002036705
efficientPortfolio(Rendimiento, mveSpec )
```

Tabla 15. Conformación del portafolio en el punto de mínima varianza global MVE.

Portfolio Weights:									
ECOPETROL	ISAGEN	G. SURA	BANCOL(P)	BANCOL	ISA	NUTRESA	CELSIA	B. BOGOTÁ	ARGOS
0,0884	0,2413	0	0,0143	0,0179	0,0481	0,2095	0,1072	0,2669	0,0064
Covariance Risk Budgets:									
ECOPETROL	ISAGEN	G. SURA	BANCOL(P)	BANCOL	ISA	NUTRESA	CELSIA	B. BOGOTÁ	ARGOS
-0,0021	0,1845	0	0,0102	0,0128	0,0148	0,1952	0,3097	0,2674	0,0074
Target Return and Risks:									
mean	mu	Cov	Sigma	CVaR	VaR				
0,0002	0,0002	0,0133	0,0064	0,0278	0,0136				

Fuente: elaboración propia.

En el Anexo D, se suministra el conjunto de instrucciones que permiten obtener la frontera eficiente y otros datos requeridos para tomar decisiones en procesos de inversión.

3.1.4 Procedimiento en R - Project para calcular la frontera eficiente y establecer portafolios óptimos por el método OGK.

Después de ingresar los datos en R - Project, se realiza el cálculo de los rendimientos promedios y de la matriz de covarianzas con el método OGK para eliminar los datos atípicos del conjunto de datos, para lograrlo, se aplica la función de estimación rápida *fastCovOGK* a los rendimientos que se encuentran calculados y guardados en la memoria de R - Project con el nombre "Rendimiento". Los resultados se detallan en la Tabla 16.

Con las siguientes instrucciones se obtiene el cálculo de la matriz de varianzas y covarianzas a partir del rendimiento por el método OGK:

```

covOGKEstimate <- covOGKEstimator(Rendimiento)
fastCovOGKEstimator <- function(x, spec = NULL, ...) covOGKEstimate
print(covOGKEstimate)

```

Tabla 16. Rendimientos promedio por acción y matriz de varianzas y covarianzas OGK.

\$mu										
ECOPETRO L	ISAGEN	G. SURA	BANCOL(P)	BANCOL	ISA	NUTRESA	CELSIA	B. BOGOTÁ	ARGOS	
0,000182004	0,000233144	0,000469372	0,000376249	0,000380833	0,000156263	0,000340201	-0,00082732	0,000480306	0,000129639	
\$Sigma										
	ECOPETRO L	ISAGEN	G. SURA	BANCOL(P)	BANCOL	ISA	NUTRESA	CELSIA	B. BOGOTÁ	ARGOS
ECOPETRO L	2,073330E-04	4,908467E-05	8,195133E-05	6,850670E-05	6,723127E-05	7,804528E-05	5,615853E-05	5,673775E-05	2,637103E-05	8,743874E-05
ISAGEN	4,908467E-05	1,288710E-04	4,764864E-05	4,078372E-05	3,986316E-05	5,432032E-05	3,808054E-05	4,085626E-05	2,277000E-05	4,760070E-05
G. SURA	8,195133E-05	4,764864E-05	1,854999E-04	9,343413E-05	9,761320E-05	8,569542E-05	6,406204E-05	7,226132E-05	3,554990E-05	1,062706E-04
BANCOL(P)	6,850670E-05	4,078372E-05	9,343413E-05	2,212724E-04	1,624711E-04	5,819528E-05	5,578811E-05	6,163888E-05	3,613619E-05	8,951332E-05
BANCOL	6,723127E-05	3,986316E-05	9,761320E-05	1,624711E-04	1,983189E-04	6,586837E-05	5,049368E-05	6,287323E-05	3,556227E-05	8,858002E-05
ISA	7,804528E-05	5,432032E-05	8,569542E-05	5,819528E-05	6,586837E-05	1,998762E-04	5,466918E-05	5,920901E-05	2,332474E-05	1,069148E-04
NUTRESA	5,615853E-05	3,808054E-05	6,406204E-05	5,578811E-05	5,049368E-05	5,466918E-05	1,346746E-04	5,245131E-05	3,295548E-05	6,309234E-05
CELSIA	5,673775E-05	4,085626E-05	7,226132E-05	6,163888E-05	6,287323E-05	5,920901E-05	5,245131E-05	1,991594E-04	2,784144E-05	9,023563E-05
B. BOGOTÁ	2,637103E-05	2,277000E-05	3,554990E-05	3,613619E-05	3,556227E-05	2,332474E-05	3,295548E-05	2,784144E-05	9,611944E-05	2,876261E-05
ARGOS	8,743874E-05	4,760070E-05	1,062706E-04	8,951332E-05	8,858002E-05	1,069148E-04	6,309234E-05	9,023563E-05	2,876261E-05	2,598313E-04

Fuente: elaboración propia.

Para determinar el intervalo en el que se graficará la frontera eficiente OGK, de manera conjunta al cálculo de los rendimientos y a la cantidad de puntos dispersos obtenidos a partir de las tasas de rentabilidad en torno a la medida de tendencia central, es necesario especificar el número de portafolios que formarán parte de la estructura de la frontera eficiente, en este caso se pretende obtener 50 portafolios así:

```

covOGKSpec <- portfolioSpec()
setEstimator(covOGKSpec) <- "fastCovOGKEstimator"
setNFrontierPoints(covOGKSpec) <- 50

```

Luego, se obtienen las participaciones para cada uno de los portafolios, el riesgo y el rendimiento. R - Project está programado para exponer 5 como se visualiza en la Tabla 15.

```
covOGKFrontier <- portfolioFrontier(data = Rendimiento, spec = covOGKSpec)
print(covOGKFrontier)
```

Tabla 17. Puntos que conforman la frontera eficiente OGK.

Portfolio Weights:										
	ECOPETROL	ISAGEN	G. SURA	BANCOL(P)	BANCOL	ISA	NUTRESA	CELSIA	B. BOGOTÁ	ARGOS
1	0	0,0252	0	0	0	0	0	0,9748	0	0
13	0,0345	0,1621	0	0	0	0,0367	0	0,6871	0,0796	0
25	0,0519	0,1929	0	0	0	0,055	0,0475	0,4228	0,23	0
37	0,0562	0,2113	0	0,011	0,0287	0,0612	0,1206	0,161	0,3501	0
49	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Target Return and Risks:										
	mean	mu	Cov	Sigma	CVaR	VaR				
1	-0,0008	-0,0008	0,0581	0,0138	0,0664	0,0235				
13	-0,0005	-0,0005	0,0417	0,0109	0,0512	0,0186				
25	-0,0002	-0,0002	0,0273	0,0086	0,0393	0,0152				
37	0,0002	0,0002	0,0154	0,0074	0,0297	0,0136				
49	0,0005	0,0005	0,0184	0,0098	0,0352	0,019				

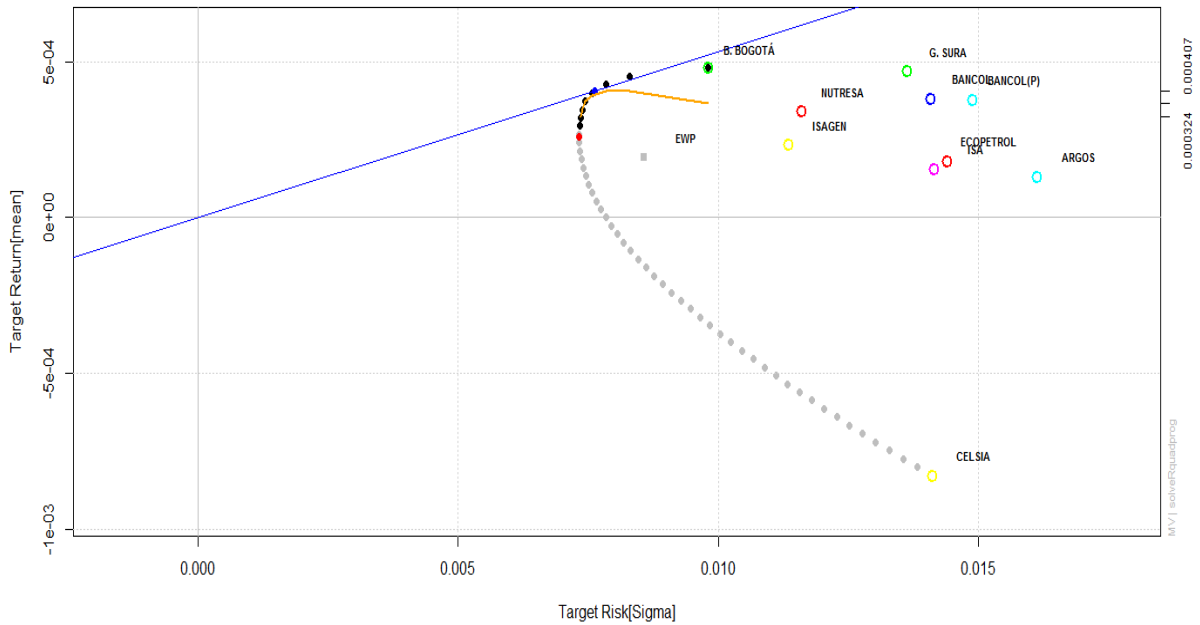
Fuente: elaboración propia.

Al igual que los resultados obtenidos con los métodos expuestos en las secciones 3.1.1 a 3.1.3, la opción 25 corresponde a un portafolio formado por seis de las diez acciones analizadas ofreciendo un rendimiento de -0,0002, con la diferencia de que el riesgo en esta situación es de 0,0086, una posible pérdida máxima de 0,0393 y una pérdida potencial de 0,0152.

A partir de los puntos obtenidos, se realiza la gráfica de la frontera eficiente OGK como se exhibe en la Ilustración 16:

```
tailoredFrontierPlot(covOGKFrontier, mText = "OGK Robustified MV Portfolio", risk = "Sigma")
```

Ilustración 15. Frontera eficiente método OGK.



Fuente: elaboración propia.

Asimismo, en la Ilustración 16 se observa cómo la línea de tangencia demarca el portafolio óptimo. Se indica el punto de mínima varianza y el conjunto de portafolios ineficientes. Para obtener una descripción más detallada de la frontera eficiente OGK, las instrucciones sugeridas a continuación, permiten ubicar tanto al portafolio tangente como al portafolio con el menor riesgo.

En la Ilustración 16 las coordenadas del punto de tangencia están dadas por un rendimiento de 0,0004074347 y un riesgo de 0,0076, las cuales se calculan así:

```
frontierPlot(f)
tangencyPoints(f, col = "RED")
Ptotang <- tangencyPoints(f)
Ptotang
```

Para conocer la estructura del portafolio de tangencia, a continuación se presenta el procedimiento a seguir en R - Project:

```
spec = covOGKSpec
setTargetReturn(spec) <- 0.0004074347
efficientPortfolio(Rendimiento, spec)
```

Tabla 18. Conformación del portafolio óptimo en el punto de tangencia OGK.

Portfolio Weights:									
ECOPETROL	ISAGEN	G. SURA	BANCOL(P)	BANCOL	ISA	NUTRESA	CELSIA	B. BOGOTÁ	ARGOS
0,0016	0,1715	0,1045	0,0165	0,0579	0	0,1527	0	0,4954	0
Target Return and Risks:									
mean	mu	Cov	Sigma	CVaR	VaR				
0,0004	0,0004	0,0148	0,0076	0,0277	0,0145				

Fuente: elaboración propia.

Un inversionista con un nivel alto de aversión al riesgo podría optar por el portafolio ubicado en el punto de mínima varianza, con un riesgo de 0,007332444 y un rendimiento de 0,0002576603. Las cifras mencionadas y su composición se exponen en la Tabla 18 a partir de las siguientes instrucciones:

```

Puntos <- frontierPlot(f)
Puntos
minvariancePoints(f)
Minvar <- minvariancePoints(f)
Minvar
spec = covOGKSpec
setTargetReturn(spec) <- 0.0002576603
efficientPortfolio(Rendimiento, spec)
    
```

Tabla 19. Conformación del portafolio en el punto de mínima varianza OGK.

Portfolio Weights:									
ECOPETROL	ISAGEN	G. SURA	BANCOL(P)	BANCOL	ISA	NUTRESA	CELSIA	B. BOGOTÁ	ARGOS
0,056	0,2157	0	0,016	0,0447	0,0617	0,1408	0,0817	0,3834	0
Target Return and Risks:									
mean	mu	Cov	Sigma	CVaR	VaR				
0,0003	0,0003	0,0132	0,0073	0,0274	0,014				

Fuente: elaboración propia.

En el Anexo D, se suministra todo el conjunto de instrucciones que permiten obtener la frontera eficiente y otros datos requeridos para tomar decisiones en procesos de inversión.

3.2 Comparación de los resultados

Como parte del proceso de análisis necesario para la conformación de portafolios óptimos propuesto en este documento, a partir de los procedimientos y cálculos realizados en R - Project y propuestos en la sección 3, en la presente sección, se realiza la comparación entre los resultados obtenidos con los diferentes métodos considerados.

Se pretende mostrar con claridad la sensibilidad de los estimadores clásicos, para el vector de medias y la matriz de covarianzas y varianzas, ante la presencia de desviaciones atípicas en la distribución multivariada; y la importancia de los métodos robustos en la eliminación de los valores extremos.

Este análisis se complementa con distintas representaciones gráficas en las que se compara la conformación de portafolios en los puntos de tangencia y de mínima varianza. Se realizan ilustraciones en las que se evidencia las diferencias entre las matrices de covarianzas estimadas con los distintos métodos tratados.

3.2.1 Coeficiente de variación.

Para el desarrollo de esta sección, se introducirá el concepto coeficiente de variación, es un dato estadístico útil para establecer la relación entre la media y la desviación estándar útil para medir la homogeneidad y además permite comparar muestras de la misma variable en poblaciones cuyo volumen de observaciones es diferente.

Sea s la desviación estándar y \bar{R} la media aritmética de los rendimientos, el coeficiente de variación se denota así:

$$CV_{muestral} = \frac{s}{\bar{R}}; \bar{R} \neq 0 \quad (68)$$

En consecuencia, cuando s es igual o próxima a cero, CV disminuye debido a la poca variabilidad respecto a su media (Mendoza Rivera, 2002).

3.2.2 Importancia de la estimación robusta en la conformación de portafolios.

Para examinar la incidencia de los datos atípicos, en la Tabla 20 se muestra la información de rentabilidad esperada, riesgo y homogeneidad para cada uno de los métodos trabajados. Se visualiza cómo las estadísticas para cada acción varían dependiendo del método implementado en la estimación de la matriz de varianzas y covarianzas; esto se debe a la diferencia en el tratamiento del riesgo dado en cada método.

El coeficiente de variación calculado para cada una de las acciones en el método clásico, es muy superior al obtenido en los otros métodos, esto obedece al hecho de que en el primero no se han eliminado los datos atípicos y al ser considerados dentro del cálculo, se está aumentando la variabilidad y por lo tanto su valor.

Se evidencia el problema que supone la toma de decisiones de inversión a partir de información contaminada con datos atípicos, ya que según los métodos MCD, MVE y OGK, la rentabilidad de Ecopetrol, Bancolombia, ISA, Banco de Bogotá, Argos y Grupo Sura son mayores que las calculadas por medio de MV.

Tabla 20. Cálculo de la homogeneidad para las acciones según método de estimación empleado.

CONCEPTO	MV			MCD			MVE			OGK		
	\bar{x}_i	σ	CV	\bar{x}_i	σ	CV	\bar{x}_i	σ	CV	\bar{x}_i	σ	CV
ECOPETROL	0,0001820040	0,023123	12705%	0,000182004	0,012526	6882%	0,000182	0,012315	6766%	0,000182	0,014399	7911%
ISAGEN	0,0002331440	0,014991	6430%	0,000233144	0,010679	4581%	0,000233	0,009702	4161%	0,000233	0,011352	4869%
G. SURA	0,0004693700	0,021017	4478%	0,000469372	0,012117	2582%	0,000469	0,011964	2549%	0,000469	0,013620	2902%
BANCOL (P)	0,0003762490	0,017305	4599%	0,000376249	0,014241	3785%	0,000376	0,013561	3604%	0,000376	0,014875	3954%
BANCOL	0,0003808300	0,017018	4469%	0,000380833	0,013601	3571%	0,000381	0,013070	3432%	0,000381	0,014083	3698%
ISA	0,0001562600	0,016552	10592%	0,000156263	0,012649	8095%	0,000156	0,012157	7780%	0,000156	0,014138	9047%
NUTRESA	0,0003402010	0,017160	5044%	0,000340201	0,010712	3149%	0,000340	0,009932	2919%	0,000340	0,011605	3411%
CELSIA	-0,0008273200	0,059526	-7195%	0,000827320	0,013069	-1580%	0,000827	0,012036	-1455%	0,000827	0,014112	-1706%
B. BOGOTÁ	0,0004803060	0,018433	3838%	0,000480306	0,009914	2064%	0,000480	0,010072	2097%	0,000480	0,009804	2041%
ARGOS	0,0001296390	0,028095	21671%	0,000129639	0,015308	11808%	0,000130	0,014014	10810%	0,000130	0,016119	12434%

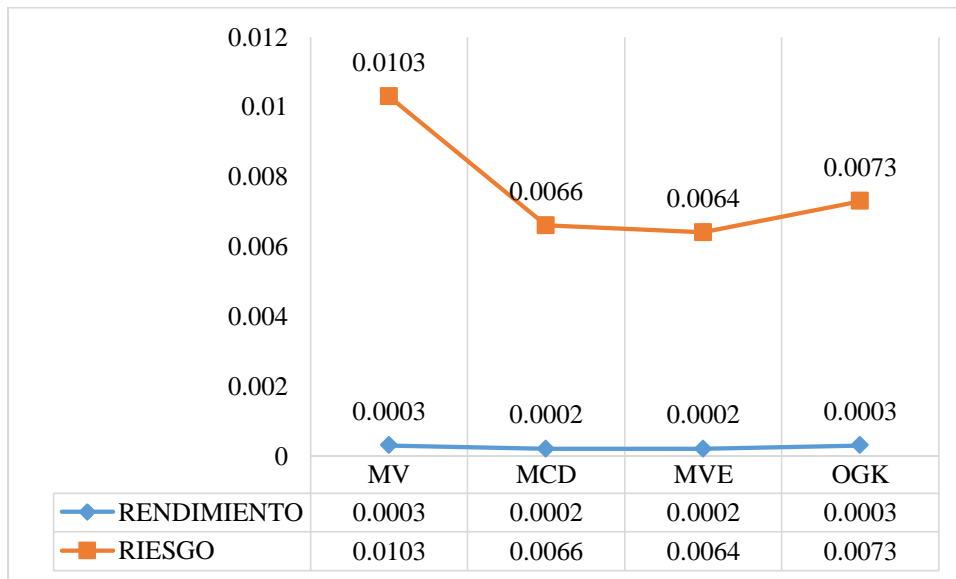
Fuente: elaboración propia.

3.2.3 Representación gráfica de la incidencia de los valores atípicos en el riesgo.

A lo largo de este documento, se ha sustentado que la presencia de datos atípicos afecta la normalidad de una variable, siendo este tipo de distribución un requisito indispensable para emplear el método tradicional en la conformación de portafolios. El hecho de contrarrestar su efecto en el proceso de estimación, permite obtener la rentabilidad esperada de un portafolio con un riesgo menor al que se obtendría a partir del método clásico.

Si se analiza el punto de mínimo riesgo con cada uno de los métodos de estimación, se ve con claridad las diferencias que existen entre ellos, la cual se ofrece en la Ilustración 16.

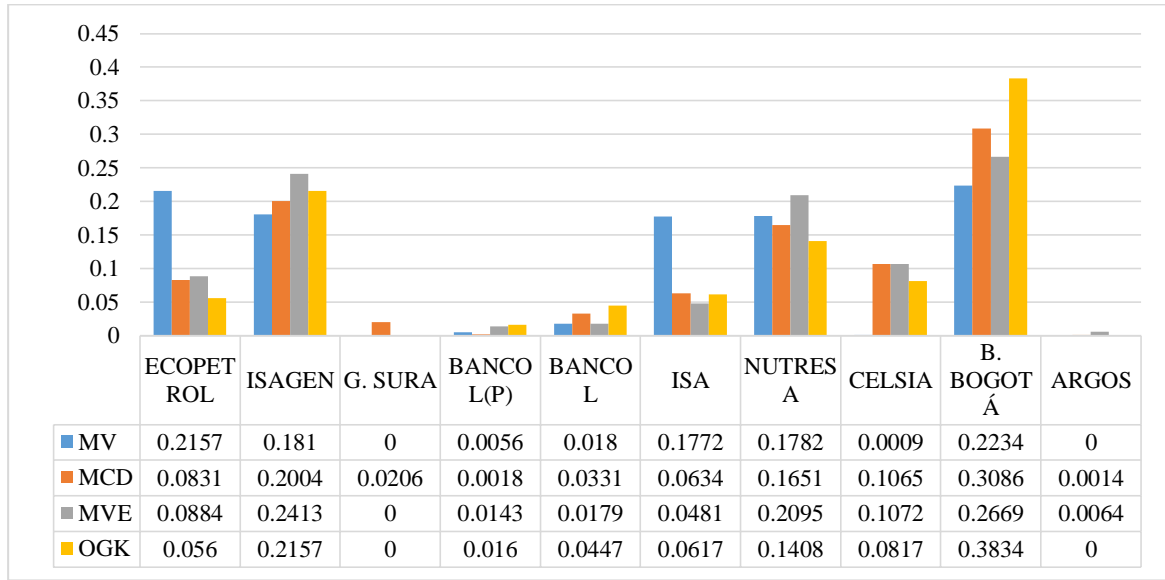
Ilustración 16. Puntos con riesgo mínimo.



Fuente: elaboración propia.

Los métodos MV y OGK ofrecen un rendimiento esperado diario de 0,003% asociado a un riesgo de 1,03% y 0,73%, respectivamente. Para un inversionista con aversión al riesgo la opción más favorable sería OGK. Los métodos MCD y MVE indican un rendimiento diario de 0,02% con riesgos de 0,66% y 0,64%, respectivamente. Pese a ofrecer rentabilidades similares la diferencia entre los riesgos para los cuatro métodos radica en la composición accionaria del portafolio como se muestra en la Ilustración 17.

Ilustración 17. Composición accionaria en los portafolios con el mínimo riesgo.

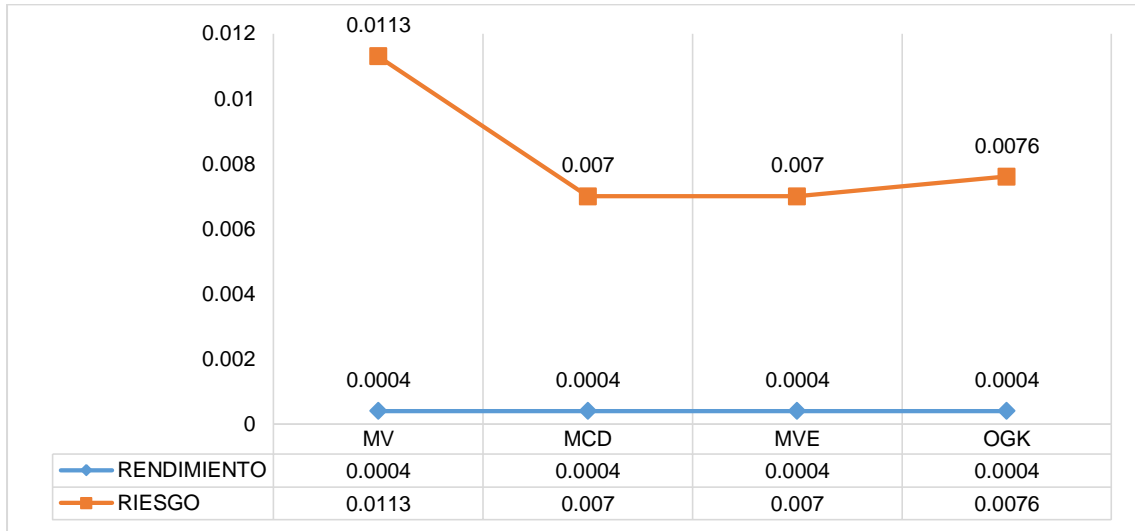


Fuente: elaboración propia.

Las ponderaciones sugeridas en cada uno de los métodos en el punto de mínima varianza coinciden en una mayor participación del Banco de Bogotá, seguida de Isagen y Nutresa. Lo que no sucede con Grupo Sura y Argos, cuya participación es mínima o simplemente no son tenidas en cuenta en la conformación del portafolio, consecuentemente, la menor participación corresponde a Bancolombia Preferencial seguida por Bancolombia. En cuanto a ISA, y de acuerdo con MV, debería ser del 17,72% y según los métodos robustos menor a 6.34%.

En relación a la conformación del portafolio en el punto de tangencia para cada uno de los métodos estudiados, todos ofrecen una rentabilidad esperada diaria de 0,04% como se indica en la Ilustración 18. No obstante, el menor riesgo que podría asumir un inversionista es de 0,7%, para lo cual podría optar por el portafolio óptimo constituido como lo indican MCD y MVE, ya que OGK y MV ofrecen riesgos mayores. Como se expresó anteriormente, las acciones de Celsia y Argos no fueron incluidas. ISA participaría en la alternativa establecida con MV únicamente.

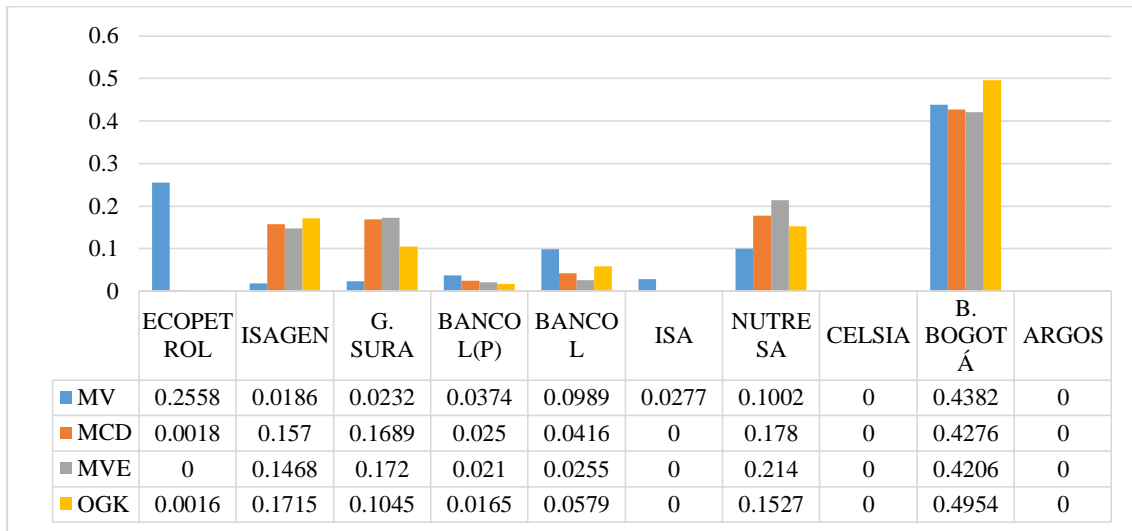
Ilustración 18. Puntos de tangencia.



Fuente: elaboración propia.

La Ilustración 19 detalla la participación de las acciones en los puntos de tangencia. Se observa que MCD y MVE presentan alternativas similares de inversión, mientras que OGK ofrece una diversificación menos favorable por el mayor riesgo que asume. El método MV considera mayor cantidad de activos en la conformación del portafolio y es el que mayor riesgo asume de todos, es decir, es el más diversificado y el que mayor riesgo toma.

Ilustración 19. Composición accionaria en los puntos de tangencia.



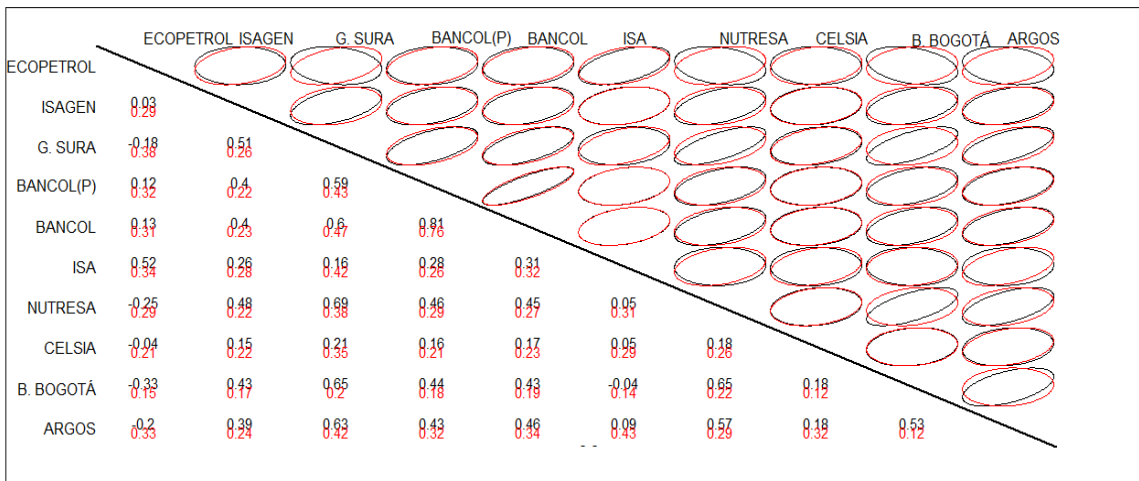
Fuente: elaboración propia.

En términos generales y para la conformación del portafolio en el punto de tangencia, en las cuatro alternativas estudiadas, la acción con mayor participación en los portafolios eficientes, por encima del 40% es la del Banco de Bogotá. Celsia y Argos no fueron incorporadas en ninguna opción e ISA fue incluida únicamente en el resultado de MV. Los métodos robustos a diferencia del tradicional, apoyan una mayor ponderación de Isagen, Grupo Sura y Nutresa. Bancolombia Preferencial se mantiene por debajo del 4% en todos los métodos. Ecopetrol tiene una participación del 25,6% en la conformación del portafolio con el método tradicional; sin embargo, para los métodos robustos su participación no sobrepasa del 0.18%

El comportamiento de las matrices de covarianzas se expone en las Ilustraciones 20 a 23, en las cuales se hacen las comparaciones respectivas y los cálculos fueron realizados con el empleo de las siguientes expresiones:

```
par(mfrow=c(2,2))
covEllipsesPlot(list(cov(Rendimiento), covMCD$cov))
title(main = "MV Frente a MCD")
```

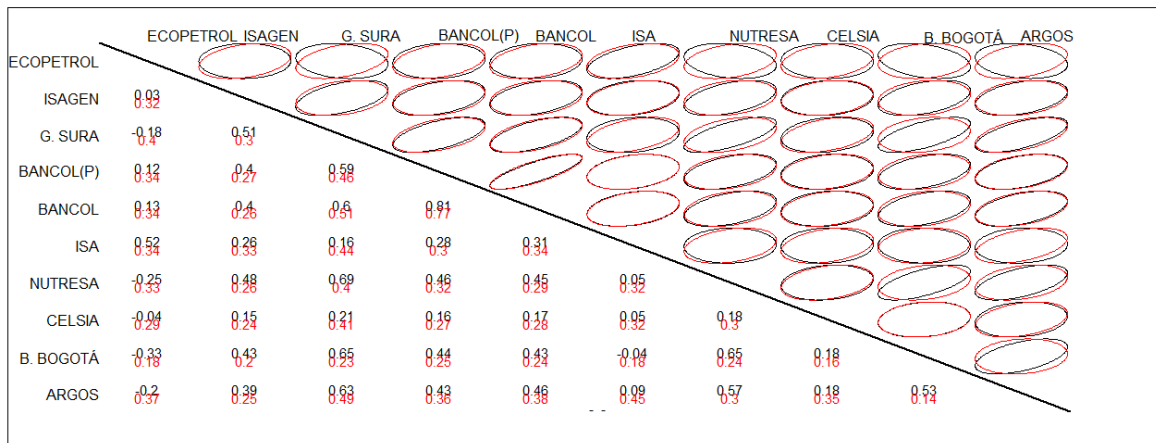
Ilustración 20. Matriz de Covarianzas MV vs MCD.



Fuente: elaboración propia.

```
covEllipsesPlot(list(cov(Rendimiento), covmve$cov))
title(main = "MV Frente a MVE")
```

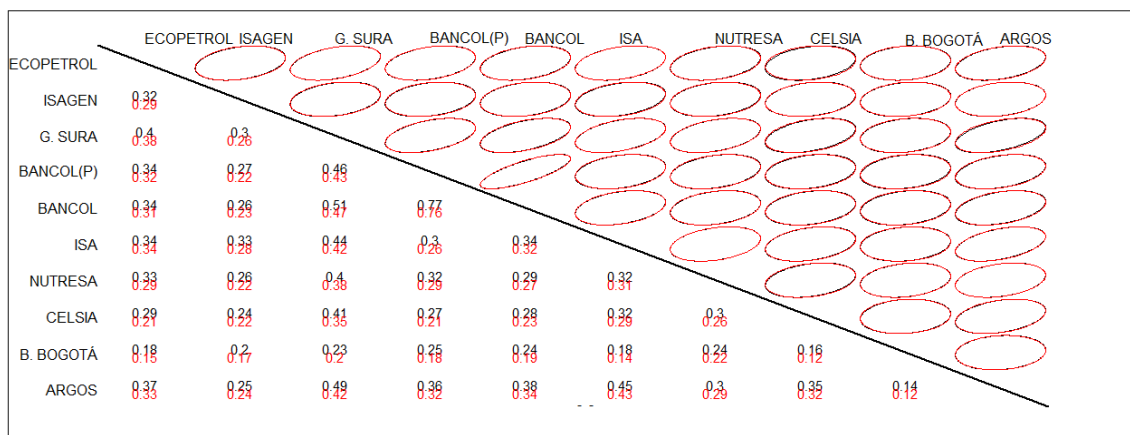
Ilustración 21. Matriz de Covarianzas MV vs MVE.



Fuente: elaboración propia.

```
covEllipsesPlot(list(covmve$cov, covMCD$cov))
title(main = "MVE Frente a MCD")
```

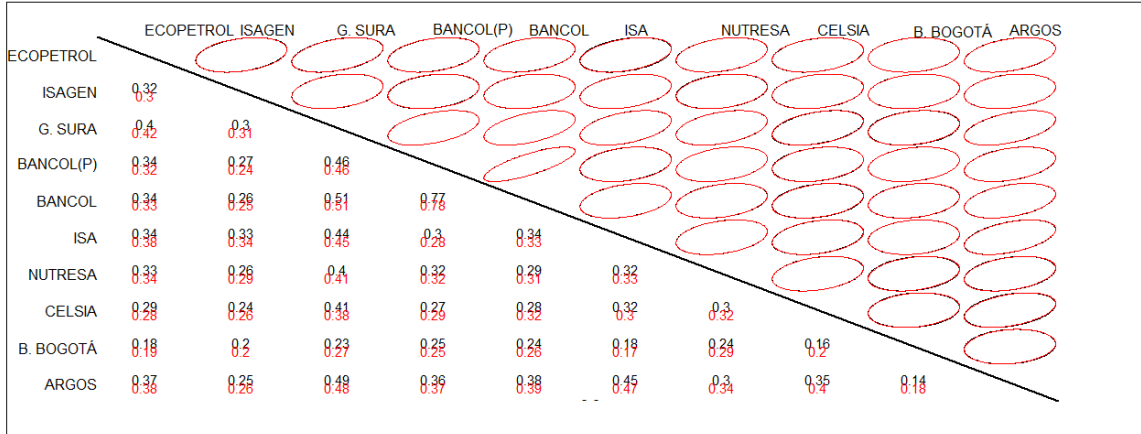
Ilustración 22. Matriz de Covarianzas MVE vs MCD.



Fuente: elaboración propia.

```
covEllipsesPlot(list(covmve$cov, covOGK$cov))
title(main = "MVE Frente a OGK")
```

Ilustración 23. Matriz de Covarianzas MVE vs OGK.



Fuente: elaboración propia.

Para comprender el funcionamiento de las anteriores gráficas, se debe tener presente que el dato superior mide la covarianza entre acciones para el primer método mencionado en el título de la Ilustración.

De acuerdo con las Ilustraciones 22 y 23, MV frente a MCD y MV frente a MVE, respectivamente, se observa diferencias evidentes entre las elipses trazadas para cada covarianza, esto porque en el método MV se están considerando los datos atípicos. Por otro lado, observe que las Ilustraciones 24 y 25, en las que se comparan las covarianzas estimadas por los métodos robustos, no hay diferencias tan marcadas. Esto obedece al hecho haber eliminado el efecto negativo que tiene la presencia de datos atípicos en el proceso de estimación de la matriz de covarianzas.

4. Capítulo 4. Conclusiones

A lo largo de este documento, se comprobó la incidencia que tienen los valores atípicos en el cálculo de los estimadores estadísticos para la conformación de portafolios por el método de media – varianza. En consecuencia, se pone en duda el supuesto básico de normalidad multivariante, en el que se fundamenta la teoría clásica de la Selección de Portafolios.

Al término de este trabajo, se justifica la necesidad de emplear procesos de estimación robusta, como alternativa de solución a la conformación de portafolios cuando los activos que son analizados presentan valores atípicos. Se confirma su importancia en la generación de modelos de análisis que apoyen la toma de decisiones de inversión al permitir la conformación de portafolios estables.

En este trabajo, se enfatizó en los métodos robustos MCD, MVE y OGK para el establecimiento de portafolios óptimos. Al revisar los textos de diferentes autores que aportan sus conocimientos a la literatura financiera, se encontraron múltiples contribuciones importantes sobre métodos robustos aplicables en R - Project, algunos reconocidos son: *estimadores M* (Huber, 1964), *estimador de la varianza Nearest-Neighbour* (Wang & Raftery, 2002) y estimador *Shrinkage* (Schäfer & Strimmer, 2005). Otro autores, proponen como parámetro de análisis el Valor en Riesgo (VaR) y el Valor del Riesgo Condicional (CVaR), en reemplazo de la desviación típica (Fabozzi, Huang, & Zhou, 2009).

Tras la revisión bibliográfica y a consideración personal del autor, se concluye que el uso incuestionado de herramientas como Excel para el establecimiento de las ponderaciones en la conformación de portafolios, genera descuidos ante los errores que puedan existir en el proceso de cálculo, a su vez, estos conllevan a la construcción de portafolios ineficientes, situación que unida a las limitaciones estadísticas de Excel, impide la aplicación y difusión de procedimientos novedosos que mejoran los análisis y la obtención de resultados. Se recomienda el uso de software

especializado para este tipo de ejercicios, contando con la evolución actual de las herramientas computacionales.

Con este trabajo se está ofreciendo un desarrollo metodológico para que una persona con conocimientos básicos en finanzas y en programación, pueda aplicar los procesos estadísticos que le permitan generar mediante métodos robustos la frontera eficiente y validar la eficiencia de algún portafolio que de manera intuitiva desee construir. Para dar una mayor claridad a este aspecto, en los anexos se incluyen las instrucciones para cada uno de los métodos tratados en este trabajo y con los cuales, es posible obtener los resultados requeridos para tomar una decisión en procesos de inversión.

Anexo A: Script para cargar la base de datos en R - Project.

"1. Se carga el programa en su versión (R 2.15.3) de la siguiente dirección:

[http://cran.R - Project.org/bin/windows/base/old/](http://cran.R-Project.org/bin/windows/base/old/)

"2. Se instalan los paquetes y todos los paquetes que requiere para su funcionamiento."

```
install.packages("fPortfolio",dependencies=TRUE)
```

```
install.packages("fAssets",dependencies=TRUE)
```

```
install.packages("mnormt",dependencies=TRUE)
```

```
install.packages("sn",dependencies=TRUE)
```

```
install.packages("corpcor",dependencies=TRUE)
```

```
install.packages("Rglpk", dependencies=TRUE)
```

"3. Se borran las memorias."

```
rm(list = ls())
```

"Para el cálculo del rendimiento, R - Project permite el cálculo mediante los métodos continuos y discreto. En este caso, se empleara el método continuo, el cual es una aproximación al método discreto. Para que el archivo sea leído por R - Project, se debe guardar la base de datos en Excel en formato CSV; verificar que no haya puntos como separadores de miles; los decimales deben estar indicados por coma y las columnas tituladas; no deben quedar espacios vacíos. Para lograrlo corra la siguiente instrucción:"

```
readSeries("Nombre del archivo", header = T, sep=";", dec=",", format="%d/%m/%Y")
```


Anexo B. Script en R - Project para calcular la frontera eficiente y establecer portafolios óptimos por el método tradicional (MV).

"1. Verifique que los datos están cargados:"

```
Fron<- readSeries("Valoraciones.csv",header= T,sep=";",dec=".",format="%d/%m/% Y")
names(Fron) # Señala los nombres de las acciones que fueron cargadas.
dim(Fron)   # Indica las dimensiones de las bases de datos.
```

"2. Se obtienen los rendimientos para cada una de las acciones."

```
Rendimiento <- returns(Fron[,1:10])# Determina el valor del rendimiento.
```

"3. Se obtiene la matriz de covarianza por el método MV"

```
covEstimator <- covEstimator(Rendimiento) # Genera la matriz de covarianzas.
fastcovEstimator <- function(x, spec = NULL, ...)
covEstimator
print(covEstimator)
getEstimator(portfolioSpec()) # Indica el método empleado para estimar la matriz de
covarianzas.
```

"4. Gráfico para mostrar el rendimiento de cada una de las acciones estudiadas."

```
GraficoRendimientos <- as.timeSeries(Rendimiento)
plot(GraficoRendimientos)
```

"5. Se establece el número de portafolios a conformar para generar la frontera eficiente y se determina el método de optimización a emplear."

```
Spec = portfolioSpec()# Número de puntos 50. Método solveRquadprog
```

"6. Gráfico de la frontera eficiente.

Se generan puntos de la frontera eficiente para la realización del gráfico."

```
Frontier <- portfolioFrontier(Rendimiento)
print(Frontier)# El sistema por defecto solo muestra cinco puntos
```

"7. Se establece el valor a la tasa libre de riesgo."

```
setRiskFreeRate(Spec) = 0
```

"8. Se obtiene el gráfico de la frontera eficiente."

```
tailoredFrontierPlot(Frontier,col = c("black", "red"))
grid() #Genera cuadrículas en el gráfico
```

"9. Para graficar solamente los puntos de la frontera."

```
frontierPlot(Frontier, col = c("blue", "red"), pch = 19)
a <- singleAssetPoints(Frontier, pch = 19, cex = 2.5, col = topo.colors(6)) #Grafica los
rendimientos y riesgos de los títulos de forma individual.
a # Genera el rendimiento y riesgo para cada uno de los títulos.
```

"10. Sobre el gráfico anterior se representa: línea de Sharpe, punto de tangencia, línea de mercado."

```
sharpeRatioLines(Frontier, col = "blue", lwd = 2) # Se determina la línea de Sharpe.
tangencyPoints(Frontier, pch = 19, col = "yellow") # Se marca el punto de tangencia
tangencyLines(Frontier, col = "blue") # Se traza la línea mercado que es tangente a la
frontera eficiente.
```

"11. Se determina el punto de tangencia del portafolio. Al establecer el punto y la composición del portafolio con el rendimiento establecido y al correrla nuevamente con el rendimiento que muestra el punto de tangencia, la composición varía. Esto obedece a que no se toma la cantidad de decimales debida. Para confirmar tome el rendimiento en el punto de tangencia con cinco decimales y notará como la composición se acerca al punto de tangencia."

```
tangencyPortfolio(Rendimiento, Spec)
```

"12. Se efectúan los gráficos para la información obtenida, con el fin de mostrar la participación de los activos en el punto de tangencia."

```
tg <- tangencyPortfolio(Rendimiento, Spec)
tg      # Se obtiene la información para el punto de tangencia
weightsPie(tg) # Realiza el grafico de la participación de los activos en el punto de
tangencia.
```

"13. Se establece el punto de mínima varianza."

```
minvariancePortfolio(Rendimiento, Spec)
```

"14. Gráfico de la participación de los activos en el punto de mínima varianza."

```
a <- minvariancePortfolio(Rendimiento, Spec)
a
weightsPie(a)
```

"15. Se obtiene el portafolio óptimo para un rendimiento dado. En la primera instrucción se indica el rendimiento deseado y en la segunda se solicita la composición del portafolio para el rendimiento dado."

```
setTargetReturn(Spec) <- 0.00048
efficientPortfolio(Rendimiento, Spec)
```

"16. Se determina el rendimiento y riesgo para determinada participación de activos."

```
setWeights(Spec) = c(0, 0.3438, 0, 0.6562, 0,0,0,0,0)
feasiblePortfolio(Rendimiento, Spec)
```

"17. Se determina el valor para cada uno de los puntos que conforman la frontera eficiente."

```
Ptosfrontera = frontierPoints(Frontier, risk = "VaR", auto = FALSE)      83
print(Ptosfrontera)
```

"18. Gráfico para representar la participación de los activos en los diferentes puntos de la frontera eficiente. En este caso el punto requerido es indicado con el número asignado en *pos*."

```
weightsPie(Frontier, pos = 4) # representa el punto No. 4
```

```
weightedReturnsPie(Frontier, pos = 20) # Representa el punto No. 20
```

"19. Muestra rendimiento, riesgo y participación de cada uno de los puntos en la frontera eficiente."

```
weightsfrontier = portfolioFrontier(Rendimiento)
weightsPlot(weightsfrontier)
```

"20. Para evaluar este supuesto a continuación se plantea el test de normalidad de Shapiro-Wilk.

H_0 : Los rendimientos se distribuyen normalmente.

H_1 : Los rendimientos no siguen una distribución normal.

La instrucción en R - Project es la siguiente:"

```
shapiroTest <- assetsTest(Rendimiento, method = "shapiro")
print(shapiroTest)
slotNames(shapiroTest)
```


Anexo C. Script en R - Project para calcular la frontera eficiente y establecer portafolios óptimos por el método del determinante mínimo (MCD).

"1. Verifique que los datos están cargados:"

```
Fron<- readSeries("Valoraciones.csv",header= T,sep=";",dec=".",format="%d/%m/%Y")
names(Fron) # Señala los nombres de las acciones que fueron cargadas.
dim(Fron)   # Indica las dimensiones de las bases de datos.
```

"2. Se obtienen los rendimientos para cada una de las acciones."

```
Rendimiento <- returns(Fron[,1:10])# Determina el valor del rendimiento.
```

"3. Se obtiene la matriz de covarianza por el método MCD."

```
covMcdEstimate <- covMcdEstimator(Rendimiento)
fastCovMcdEstimator <- function(x, spec = NULL, ...) covMcdEstimate
print(covMcdEstimate)
```

"4. Se establece el número de portafolios a conformar para generar la frontera eficiente y se determina el método de optimización a emplear."

```
covMcdSpec <- portfolioSpec()
setEstimator(covMcdSpec) <- "fastCovMcdEstimator"
setNFrontierPoints(covMcdSpec) <- 50
covMcdFrontier <- portfolioFrontier(data = Rendimiento, spec = covMcdSpec)
print(covMcdFrontier)
```

"5. Gráfico de la frontera eficiente. Se generan puntos de la frontera eficiente para la realización del gráfico."

```
tailoredFrontierPlot(covMcdFrontier,mText = "MCD Robustified MV Portfolio",risk = "Sigma")
```

"6. Se define f de la siguiente manera:"

```
f = portfolioFrontier(Rendimiento, spec = covMcdSpec)
```

"7. Se determinan los puntos que demarcan la frontera y se grafican."

```
Puntos <- frontierPlot(f)
```

```
Puntos # Esta correcto
```

"8. Se grafica la línea de mercado, el punto de tangencia y se obtienen sus valores."

```
frontierPlot(f)
```

```
tangencyPoints(f, col = "RED")
```

```
Ptotang <- tangencyPoints(f)
```

```
Ptotang
```

"9. Se establece la conformación del portafolio para el punto de tangencia."

```
spec = covMcdSpec
```

```
setTargetReturn(spec) <- 0.0004074347
```

```
efficientPortfolio(Rendimiento, spec)
```

"10. Se determina el punto de mínima varianza y los pesos para los activos que conforman el portafolio."

```
minvariancePoints(f)
```

```
Minvar <- minvariancePoints(f)
```

```
Minvar
```

"11. Se establece la conformación del portafolio para el punto de mínima varianza."

```
spec = covMcdSpec
```

```
setTargetReturn(spec) <- 0.0002172424
```

```
efficientPortfolio(Rendimiento, spec)
```

"12. Se determina el rendimiento y riesgo para cualquier combinación de activos."

```
setWeights(spec) = c(0, 0.3438, 0, 0.6562, 0,0,0,0,0,0)
```

```
feasiblePortfolio(Rendimiento, spec)
```


Anexo D. Script en R - Project para calcular la frontera eficiente y establecer portafolios óptimos por el método de la mínima elipsoide (MVE).

"1. Verifique que los datos están cargados:"

```
Fron<- readSeries("Valoracciones.csv",header= T,sep=";",dec=".",format="%d/%m/%Y")
names(Fron) # Señala los nombres de las acciones que fueron cargadas
dim(Fron)   # Indica las dimensiones de las bases de datos
```

"2. Se obtienen los rendimientos para cada una de las acciones."

```
Rendimiento <- returns(Fron[,1:10])# Determina el valor del rendimiento.
```

"3. Se obtiene la matriz de covarianza por el método MVE."

```
mveEstimate <- mveEstimator(Rendimiento)
mveEstimate
```

"4. Se establece el número de portafolios a conformar para generar la frontera eficiente y se determina el método de optimización a emplear."

```
fastMveEstimator <- function(x, spec = NULL, ...) mveEstimate
mveSpec <- portfolioSpec()
setEstimator(mveSpec) <- "fastMveEstimator"
setNFrontierPoints(mveSpec) <- 50
```

"5. Gráfico de la frontera eficiente.

```
mveFrontier <- portfolioFrontier( data = Rendimiento, spec = mveSpec, constraints
= "LongOnly")
print(mveFrontier)
```

"6. Se calcula la frontera para 50 puntos."

```
setNFrontierPoints(mveSpec) <- 50
mveFrontier <- portfolioFrontier(data = Rendimiento, spec = mveSpec)
tailoredFrontierPlot(mveFrontier, mText = "MVE Robustified MV Portfolio", risk =
"Sigma")
```

"7. Se representan la ponderaciones para diferentes portafolios."

```
col = divPalette(6, "RdBu")
weightsPlot(mveFrontier, col = col, mtext = FALSE)
boxL()

text <- "MVE Robustified MV Portfolio"
mtext(text, side = 3, line = 3, font = 2, cex = 0.9)
weightedReturnsPlot(mveFrontier, col = col, mtext = FALSE)
boxL()

covRiskBudgetsPlot(mveFrontier, col = col,
mtext = FALSE)
boxL()
```

"8. Se define f de la siguiente manera:"

```
f = portfolioFrontier(Rendimiento, spec = mveSpec)
```

"9. Se determinan los puntos que demarcan la frontera y se grafican"

```
Puntos <- frontierPlot(f)
Puntos
```

"10. Se determina el punto de mínima varianza y los pesos para los activos que conforman el portafolio."

```
minvariancePoints(f)
Minvar <- minvariancePoints(f)
Minvar
```

"11. Se establece la conformación del portafolio para el punto de mínima varianza."

```
mveEstimate <- mveEstimator(Rendimiento)
fastMveEstimator <- function(x, spec = NULL, ...) mveEstimate

mveSpec <- portfolioSpec()
setEstimator(mveSpec) <- "fastMveEstimator"
setTargetReturn(mveSpec) <- 0.0002036705
efficientPortfolio(Rendimiento, mveSpec )
```

"12. Se grafica la línea de mercado, el punto de tangencia y se obtienen sus valores."

```
frontierPlot(f)
tangencyPoints(f, col = "RED")
Ptotang <- tangencyPoints(f)
Ptotang

setTargetReturn(mveSpec) <- 0.0004074347
efficientPortfolio(Rendimiento, mveSpec )
```

"13. Se determina el rendimiento y riesgo para cualquier combinación de activos:"

```
setWeights(mveSpec) = c(0, 0.3438, 0, 0.6562, 0,0,0,0,0,0)
feasiblePortfolio(Rendimiento,mveSpec )
```


Anexo E. Script en R - Project para calcular la frontera eficiente y establecer portafolios óptimos por el método robusto de ortogonalización por pares (OGK).

"1. Verifique que los datos están cargados:"

```
Fron<- readSeries("Valoraciones.csv",header= T,sep=";",dec="," ,format="%d/%m/% Y")
names(Fron) # Señala los nombres de las acciones que fueron cargadas
dim(Fron) # Indica las dimensiones de las bases de datos
```

"2. Se obtienen los rendimientos para cada una de las acciones."

```
Rendimiento <- returns(Fron[,1:10])# Determina el valor del rendimiento.
```

"3. Se obtiene la matriz de covarianza por el método (OGK)."

```
covOGKEstimate <- covOGKEstimator(Rendimiento)
fastCovOGKEstimator <- function(x, spec = NULL, ...) covOGKEstimate
print(covOGKEstimate)
```

"4. Se establece el rendimiento y riesgo para 50 portafolios distintos y con ellos obtener la frontera eficiente."

```
covOGKSpec <- portfolioSpec()
setEstimator(covOGKSpec) <- "fastCovOGKEstimator"
setNFrontierPoints(covOGKSpec) <- 50
```

"5. Se calcula la frontera eficiente por el método OGK."

```
covOGKFrontier <- portfolioFrontier(data = Rendimiento, spec = covOGKSpec)
print(covOGKFrontier)
tailoredFrontierPlot(covOGKFrontier, mText = "OGK Robustified MV Portfolio", risk =
"Sigma")
```

"6. Las ponderaciones, el rendimiento y el riesgo se exponen en la columna ubicada a la izquierda."

```
col = divPalette(6, "RdYlGn")
weightsPlot(covOGKFrontier, col = col, mtext = FALSE)
text <- "OGK Robustified MV Portfolio"
mtext(text, side = 3, line = 3, font = 2, cex = 0.9)
weightedReturnsPlot(covOGKFrontier, col = col, mtext = FALSE)
covRiskBudgetsPlot(covOGKFrontier, col = col, mtext = FALSE)
```

"7. Se define f de la siguiente manera."

```
f = portfolioFrontier(Rendimiento, spec = covOGKSpec)
```

"8. Se determinan los puntos que demarcan la frontera y se grafican."

```
Puntos <- frontierPlot(f)
Puntos
```

"9. Se determina el punto de mínima varianza y los pesos para los activos que conforman el portafolio."

```
minvariancePoints(f)
Minvar <- minvariancePoints(f)
Minvar
```

"10. Se establece la conformación del portafolio para el punto de mínima varianza."

```
spec = covOGKSpec
setTargetReturn(spec) <- 0.0002576603
efficientPortfolio(Rendimiento, spec)
```

"11. Se grafica la línea de mercado, el punto de tangencia y se obtienen sus valores."

```
frontierPlot(f)
```

```
tangencyPoints(f, col = "RED")  
Ptotang <- tangencyPoints(f)  
Ptotang
```

"12. Se establece la conformación del portafolio para el punto de tangencia."

```
spec = covOGKSpec  
setTargetReturn(spec) <- 0.0004074347  
efficientPortfolio(Rendimiento, spec)
```

"13. Se determina el rendimiento y riesgo para cualquier combinación de activos."

```
setWeights(spec) = c(0, 0.3438, 0, 0.6562, 0,0,0,0,0,0)  
feasiblePortfolio(Rendimiento, spec)
```


BIBLIOGRAFÍA

- Adler, M., Buchta, C., Davis, T., Gailly, J.-l., Hornik, K., Makhorin, A., . . . Theussl, S. (2014, 06 16). Rglpk: R/GNU Linear Programming Kit Interface. Retrieved from <http://R-Forge.R-project.org/projects/rglp/>
- Agulló Candela, J. (1997). Computación de estimadores con alto punto de ruptura. *Tesis Doctoral*. España: Universidad de Alicante.
- AMV Colombia. (2013, Enero). *Educación Financiera para Todos*. Retrieved from www.amvcolombia.org.co
- AMV Colombia. (2014). *Autorregulador del Mercado de Valores de Colombia*. Retrieved from <http://www.amvcolombia.org.co/>
- Apostol, T. (1988). *Calculus, Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades*. Bogotá: Editorial Reverté, col. S.A.
- Backhoff Veraguas, J. D. (2010, Enero). Optimización robusta de portafolios en un mercado financiero a tiempo contiguo: caso de incertidumbre no compacta o lineal. Santiago de Chile, Chile. Retrieved from <http://repositorio.uchile.cl/handle/2250/103769>
- Bancoldex. (2005). Retrieved from www.bancoldex.com/.../627_cartilla_coberturas_cambiaras_web2008.pdf
- Benavente Hualpa, P. F. (2012, Mayo). Componentes principales mediante el método robusto MCD: matriz de covarianzas de determinante mínimo. Lima, Perú: Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Retrieved from <http://cybertesis.unmsm.edu.pe/handle/cybertesis/3136>
- Berrendero Díaz, J. R. (1996, Junio). Contribuciones a la teoría de la robustez respecto al sesgo. Madrid, España: Departamento de Estadística y Econometría. Universidad Carlos III de Madrid. Retrieved from http://www.stat.ubc.ca/~ruben/website/tesis_berrendero_1996.pdf
- Brito Alonso, E., & Villalba Vila, D. (2001). La selección de carteras al alcance de todos. *Temas de Actualidad*(97), 22-20.
- Buenaventura Vera, G., & Cuevas Ulloa, A. F. (2005, Abril-Junio). Una propuesta metodológica para la optimización de portafolios de inversión y su aplicación al caso colombiano.

Estudios Gerenciales(95), 13-36. Retrieved from http://www.icesi.edu.co/revistas/index.php/estudios_gerenciales/article/view/160/html

- Castaño Giraldo, N. E., Ramírez Aristizábal, J. D., & Taborda Tabares, D. C. (2013). Portafolio de inversión en el mercado de renta variable colombiano: evaluación de un modelo de programación no lineal. *Global Conferene on Business and Finance Proceedings*, 8(2), 1355 - 1363.
- Castaño Vélez, E. (1987, Septiembre-Diciembre). Robustez estadística. *Lecturas de Economía*(24), 85-99.
- Chalabi, Y., Chen, W., Ellis, A., & Würtz, D. (2009). *Portfolio optimizacion with RMetrics*. Zurich: Rmetrics Association and Finance Online.
- CRAN R - project. (2013, Marzo). *Previous Releases of R for Windows*. Retrieved from <http://cran.r-project.org/bin/windows/base/old/>
- Cruz, E. A., Restrepo, J. H., & Sánchez, J. J. (2005, Abril 27). Portafolio de inversión en acciones optimizado. *Scientia et Technica*, 11, 175 - 180. Retrieved from <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=84911698031>
- Dubova, I. (2005, Julio-Diciembre). La validación y aplicabilidad de la teoría de portafolio en el caso colombiano. *Cuadernos de Administración*, 18(30), 241-279. Retrieved from <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=20503010>
- Dumrauf, G. (2010). *Finanzas corporativas, un enfoque latinoamericano* (Segunda ed.). Bogotá, Colombia: Alfaomega S.A.
- Fabozzi, F. J., Huang, D., & Zhou, G. (2009, Junio 29). Robust portfolios: contributions from operations research and finance. *Springer Science & Business Media LLC*, 176, 191-220. doi:10.1007/s10479-009-0515-6
- Farias, T. A., & Rodrigues de Moura, F. (2013, Mayo-Agosto). Carteiras eficientes e ingênuas: uma análise comparativa com o uso do modelo de Markowitz. *Revista de Economia Mackenzie*, 11(2), 114-152. Retrieved 2014, from <http://editorarevistas.mackenzie.br/index.php/rem/article/viewFile/6666/4637>
- Filzmoser, P., & Todorov, V. (2009, Agosto 8). An object-oriented framework for robust multivariate analysis. *Journal of Statistical Software*, 32(3). Retrieved Marzo 10, 2014, from <http://www.jstatsoft.org/>
- Giraldo, N., Osorio, L., & Valencia, E. (2010, Julio 20-28). Una Aplicación de Estimadores Robustos de Matrices de Covarianza en Finanzas. *VII Coloquio Regional de Estadística*, (pp. 1-17). Medellín.
- Gnanadesikan, R., & Kettenring, J. R. (1972). Robust estimates, residuals, and outlier detection with multiresponse data. *Biometrics*, 28(1), 81-124. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/2528963>
- Grajales Bedoya, D. D. (2011, Junio). Gestión de portafolios. Una mirada crítica más allá de Markowitz. *Revista AD-MINISTER*(15), 154-162. Retrieved from <http://publicaciones.eafit.edu.co/index.php/administer/article/view/259/259>

- Grupo Aval y Valores S.A. (2008). *Acciones Bolsa de Colombia*. Retrieved from <https://www.grupoaval.com/wps/portal/grupo-aval/bienvenido/portal-financiero-web/>
- Haugen, R. A. (1993). *Modern investment theory* (4 ed.). Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.
- Hernández Blázquez, B. (2004). Teoría del riesgo bursatil. *Autores Científico-Técnicos y Académicos - ACTA*, 49-58. Retrieved Febrero 26, 2014, from <http://www.acta.es/index.php/recursos/manuales-formativos-revista-digital/article/305-teoria-del-riesgo-bursatil>
- Hualpa Benavente, F. P. (2012, Mayo). Componentes principales mediante el método robusto MCD: matriz de covarianzas de determinante mínimo. Perú: Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Retrieved from <http://cybertesis.unmsm.edu.pe/handle/cybertesis/3136>
- Huber, P. (1964). Robust estimation of a location parameter. *The Annals of Mathematical Statistics*, 45, 73-101. Retrieved from The Annals of Mathematical Statistics: <http://projecteuclid.org/euclid.aoms/1177703732>
- Jiménez Lozano, G. (2009). *Optimización* (Primera ed.). Manizales, Colombia: Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales.
- Jureckova, J., & Picek, J. (2006). *Robust statistical methods with R*. Boca ratón, Florida, Estados Unidos: Chapman and Hall/CRC.
- Kjell, K. (2006, Enero 5). *Robust pairwise covariance matrix estimation*. (U. o. Washington, Ed.) Retrieved from Department of Mathematics: <https://www.math.washington.edu/acmssem/2006/01-05-2006.pdf>
- Lasa Crespo, A. J. (2004). Construcción de la “frontera eficiente” de portafolios de inversión aplicación al caso de México. *Denarius*, 131-153.
- Leroy, A., & Rousseeuw, P. (1987). *Robust regression and outlier detection*. New York: Wiley Interscience.
- Levin, R., & Rubin, D. (2004). *Estadística para administración y economía* (Séptima ed.). México: Pearson Education.
- López Herrera, F. (1999, Octubre-Diciembre). La historia temprana de la teoría de portafolios: 1600 - 1960. *Revista Contaduría y Administración*(195), 13-30.
- Lopuhaä, H. P., & Rousseeuw, P. J. (1991). Breakdown points of affine equivariant estimators of multivariate location and covariance matrices. *The Annals of Statistics*, 19(1), 229-248. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/2241852>
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*(7), 77-91.
- Markowitz, H. M. (1959). *Portfolio selection: efficient diversification of investments*. New York, United States: John Wiley & Sons, Inc.
- Markowitz, H. M. (1999, Julio-Agosto). The early history of portfolio theory: 1600 - 1960. *Financial Analysts Journal*, 55(4), 5-16. Retrieved from <http://www.jstor.org/>

- Maronna, R. A., & Zamar, R. H. (2002). Robust estimates of location and dispersion for high-dimensional datasets. *Technometrics*, 44(4), 307-317. Retrieved from <http://www.jstor.org/>
- Mascareñas, J. (2013, Agosto 22). *Gestión de carteras II: modelo de valoración de activos*. Retrieved Marzo 2014, from Juan Mascareñas: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2313393
- Méndez López, C. F. (2007, Julio). *Bolsa de Valores de Colombia*. Retrieved Mayo 2014, from Guía Colombiana del Mercado de Valores: http://www.bvc.com.co/pps/tibco/portalbvc/Home/Empresas/Empresas/Documentos+y+Presentaciones?com.tibco.ps.pagesvc.action=updateRenderState&rp.currentDocumentID=5d9e2b27_11de9ed172b_-1cf87f000001&rp.revisionNumber=1&rp.attachmentPropertyName=Attachment&com
- Méndez López, C. F. (2014). *Guía Colombiana del Mercado de Valores*. Bolsa de Valores de Colombia.
- Mendizábal Zubeldia, A., Miera Zabalza, L., & Zubia Zubiaurre, M. (2002). El modelo de Markowitz en la gestión de carteras. *Cuadernos de Gestión*, 2, 33-46.
- Mendoza Rivera, H. (2002). *Probabilidad y estadística*. Retrieved from Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá: http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/2001065/html/un1/cont_134_34.html
- Michaud, R. (1989). The Markowitz optimization enigma: is 'optimized' optimal? *Financial Analysts Journal*, 45, 31-42. Retrieved from <http://www.jstor.org/>
- Montaño, N., & Zurita Herrera, G. (2009, Febrero 2009). Estimadores robustos para el vector de medias y la matriz de varianzas y covarianzas de vectores aleatorios multivariados. *Revista Tecnológica ESPOL*, 22(1), 1 - 8. Retrieved from <http://www.dspace.espol.edu.ec/handle/123456789/60>
- R Core Team. (2013). *A language and environment for statistical computing*. Viena, Austria: R Foundation for Statistical Computing. Retrieved from <http://www.R-project.org/>
- Rodríguez, J. (2005). *Métodos robustos de estimación de correlación*. Retrieved 2014, from Biblioteca Digital de Trabajos Especiales de Grado: http://tesis.ula.ve/pregrado/tde_busca/archivo.php?codArquivo=414
- Rojas Medina, R. A., & Suárez Cifuentes, J. F. (2013). *Fundamentos básicos para manejo de R en estadística descriptiva* (Primera ed.). Manizales, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- Rousseeuw, P. (1984, Diciembre). Least median of squares regression. *Journal of the American Statistical Association*, 79(388), 871-880. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/2288718>
- Rousseeuw, P. (1985). Multivariate estimation with high breakdown point. *Mathematical Statistics and Applications*, 283-297.

- Rousseeuw, P., & Van Driessen, K. (1999, Agosto). A fast algorithm for the minimum covariance determinant estimator. *Technometrics*, 41(3), 212-223. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/1270566>
- Rousseeuw, P., & Van Zomeren, B. (1990). Unmasking multivariate outliers and leverage points. *Journal of the American Statistical Association*, 85(411), 633-639. Retrieved 2014, from <http://www.jstor.org/stable/2289995>
- Rousseeuw, P., Croux, C., Koller, M., Maechler, M., Ruckstuhl, A., Salibian-Barrera, M., . . . Verbeke, T. (2014). *Robustbase: basic robust statistics*. Retrieved from R package version 0.91-1: <http://robustbase.r-forge.r-project.org/>
- Schäfer, J., & Strimmer, K. (2005, Noviembre). *A shrinkage approach to large-scale covariance matrix estimation and implications for functional genomics*. doi:10.2202/1544-6115.1175
- SFC. (2008, Abril 15). *Superintendencia Financiera de Colombia*. Retrieved Noviembre 2013, from <https://www.superfinanciera.gov.co/SFCant/Glosario/glosario-r.htm#RENTABILIDAD>
- SFC. (2014, Mayo). *Superintendencia Financiera de Colombia*. Retrieved from www.superfinanciera.gov.co
- Sharpe, W. (1964). A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, 19(3), 425-442.
- Tobin, J. (1958). Estimation of relationships for limited dependent variables. *Econometrica*, 26(1), 24-36. Retrieved from <http://www.jstor.org.ezproxy.unal.edu.co/stable/1907382>
- Trojani, F., Vanini, P., & Vignola, L. (2002). A note on the three - portfolios matching problem. *European Financial Management*, 8(4), 515-527.
- Uribe Escobar, J. D. (2013, Enero). *Banco de la República*. Retrieved Mayo 15, 2014, from Revista del Banco de la República: http://www.banrep.gov.co/sites/default/files/publicaciones/archivos/rbr_nota_1023.pdf
- Velez-Pareja, I. (2003, Octubre 20). *Portfolio analysis*. Retrieved from Social Science Research Network: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=986978
- Villamil, J. (2007). Diversificación y valor en riesgo de un portafolio de acciones. *Cuadernos de Economía*, 26(47), 175-204. Retrieved from <http://www.revistas.unal.edu.co/index.php/ceconomia/article/view/1082/1591>
- Wang, N., & Raftery, A. (2002). Nearest neighbor variance estimation (nnve): robust covariance estimation via nearest neighbor cleaning. *Journal of the American Statistical Association*, 97(460), 994 - 1019. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/3085821>
- Zamar, R. H. (1994). Estimación robusta. *Estadística Española*, 36(137), 327-387. Retrieved from file:///C:/Users/N028/Downloads/843-89-137_1.pdf