CORRECCIÓN Y CORRECCIONES DE LOS CÁLCULOS LÓGICOS DE LEIBNIZ

Alejandro Martín Maldonado
Universidad de los Andes
martinmaldonado@yahoo.com

Resumen:
Los ensayos lógicos de Leibniz aparecen en público por primera vez en 1903 gracias al trabajo de edición y comentario del lógico y filósofo francés Louis Couturat. Sin embargo, en su exposición los cálculos leibnicianos aparecen como una serie de intentos condenados al fracaso por haber preferido una interpretación incorrecta de la lógica: *el punto de vista intensional*. Estas aparentes incorrecciones vinieron a estimular el trabajo de variedad de lógico-matemáticos que durante el correr del siglo fueron refutando una por una las afirmaciones del filósofo francés. Aquí pretende presentarse el resultado de esta nueva visión de los intentos leibnicianos para una parte muy concreta de los mismos: los métodos de decisión para la silogística aristotélica.
Palabras claves: historia de la lógica, Leibniz, Couturat, Sánchez-Mazas, silogística.

Abstract:
Leibniz's logical calculi were edited for the first time in 1903 thanks to the work of the french logician and philosopher Louis Couturat. However, in the exposition he makes of them, they appear as a series of attempts doomed to failure because of a wrong logical interpretation of the concepts: *the intensional point of view*. These apparent errors became an incentive for many logicians during the twentieth century to take a look by themselves of Leibniz's work and end refuting one by one Couturat's judgements. We pretend to discribe here the development of this new vision of Leibniz's attempts for a very specific part of them: the decision methods for aristotelian logic.
Key words: history of logic, Leibniz, Couturat, Sánchez-Mazas, syllogistic.

A comienzos del siglo XX, en un momento en que la lógica matemática comienza a desarrollarse como una disciplina particular, Louis Couturat publica dos obras que sacarán de la oscuridad los trabajos lógicos de Leibniz y los pondrán en primer plano. Una de ellas, *Opuscules et Fragments Inédits (1903)*, es una compilación de gran variedad de textos inéditos leibnicianos que se mueven alrededor de lógica, metafísica y filosofía de las matemáticas, y la otra, *La Logique de Leibniz (1901)*, que consiste en un análisis detallado de los trabajos leibnicianos desde su propia percepción de la lógica. Por un lado nos presenta las fichas originales del rompecabezas arregladas en un desorden muy particular, y por otro, una serie de pistas para comenzar a armarlo. Si bien Couturat manifiesta una fascinación por la profundidad y complejidad del estudio leibniciano de la lógica, su juicio sobre el mismo resulta severamente crítico al considerar esencialmente incorrecto cada uno de los intentos particulares. Al analizar con rigor los cálculos lógicos leibnicianos, señalando sus motivaciones y las brillantes intuiciones que contienen, no deja de concluir una y otra vez que estos mismos resultan defectuosos. Couturat encuentra que la causa por la cual Leibniz no pudo llevar ninguna de sus empresas lógicas a buen término se encontraría en haber escogido un mal punto de partida. Leibniz pretendió casi siempre desarrollar la lógica desde el punto de vista de la intensión (comprehensión) y no del de la extensión, que es el único que, según Couturat, nos ha de guiar correctamente:

> El fracaso final de su sistema es, por lo tanto, extremamente instructivo, pues muestra que la lógica algorítmica (e.d. en suma la Lógica exacta y rigurosa) no puede ser fundada sobre la consideración confusa y vaga de la comprehensión; ésta no logró constituirse sino con Boole, porque él la hizo reposar sobre la consideración exclusiva de la extensión, la única suceptible de un tratamiento matemático.(Couturat 1961: 387)[1]

Con el desarrollo de la lógica matemática durante el siglo XX, estos cálculos habrían de ser objeto de nuevas y variadas lecturas siempre condicionadas por la apreciación original de Couturat. Nuevas herramientas formales fueron desarrollándose, y la concepción misma de la lógica fue evolucionando. El punto de vista de la extensión perdió su lugar privilegiado al desarrollarse sistemas intensionales y al reconocerse que el debate intensión vs. extensión no había sido zanjado de una vez por todas. Surgieron diversos lenguajes para la lógica, variedad de cálculos y sistemas axiomáticos, demostraciones particulares, así como interconexiones y teoremas metalógicos. El interés por la lógica iba creciendo, no sólo por los nuevos desarrollos sino también por su historia. Una historia que estaba siendo en gran medida por los estudiosos de la "nueva lógica" que brindaba también herramientas formales para "examinar" los sistemas lógicos antiguos. Pudiendo situarse desde perspectivas distintas a la de Couturat, los nuevos lectores tendrán que vérselas con el enigma del "eterno fracaso" leibniciano y, con sorpresa, uno tras otro irán verificando cómo muchos de sus errores estaban lejos de serlo y, sobre todo, cómo las soluciones y los cambios de estrategia que proponía estaban llenos de riquezas que se escapaban al análisis del estudioso francés.

Aquí voy a concentrarme en una parte muy particular de los ensayos lógicos de Leibniz: *los métodos de decisión para los argumentos*

[1][Las traducciones del texto de Couturat son mías]"*L'échec final de son système est donc extrêmement instructif, car ir prouve que la Logique algorithmique (c'est-à-dire en somme la Logique exacte et rigoureuse) ne peut pas être fondée sur la considération confuse et vague de la compréhension ; elle n'a réussi à se constituer qu'avec Boole, parce qu'il l'a fait reposer sur la considération exclusive de l'extension, seule susceptible d'un traitment mathématique.*"

silogísticos. En ellos se ve claramente la deuda que mantiene con Aristóteles y la silogística medieval, pero también se vislumbran sus próximos desarrollos algebraicos y puramente lógico-matemáticos. En general, puede decirse que los cálculos lógicos leibnicianos surgen de un intento por expresar matemáticamente la silogística. Por lo tanto, las diversas interpretaciones que se vendrán a hacer de ellos durante este siglo dependerán no sólo de la perspectiva lógica con que se los mire, sino también de la interpretación que se tenga de la silogística.

La historia de las re-lecturas lógico-matemáticas de los cálculos lógicos leibnicianos comienza con la aparición del libro de Lukasiewicz, *La silogística aristotélica*. La importancia para nosotros de ese texto no se agota en ser una presentación formal de la lógica aristotélica, sino que resulta de un valor muy especial ya que al final de uno de sus capítulos se demuestra la corrección de uno de los sistemas aritméticos de Leibniz como método de decisión para la silogística (la prueba es de su alumno Slupecki). Sin embargo, la formalización de la silogística de Lukasiewicz es tan diferente de la de Leibniz que no permite comprender la razón de su corrección, y el lógico polaco llega incluso a considerar que ésta pueda ser no más que una "mera coincidencia". El estudio de la lógica leibniciana parece no ser más que una anotación marginal en la obra de Lukasiewicz de la que no conozco ningún posterior desarrollo dentro de la lógica polaca. Unos pocos años después aparecería en España el primer matemático en consagrarse a un estudio sistemático de los cálculos lógicos de Leibniz: Miguel Sánchez-Mazas. Su obra parece ser el reflejo inverso de la de Couturat, ya que él prefiere aproximarse a la lógica desde la perspectiva intensional. Sin embargo, al igual que el lógico francés, sostiene que todos los cálculos leibnicianos resultan defectuosos o al menos incompletos. Claro que ahora, al no considerar el defecto como algo esencial, sino más bien marginal, su tarea consistirá en encontrar la manera de corregirlos, de perfeccionarlos, de completarlos. Refutará doblemente a Couturat al mostrar cómo el punto de partida no tenía por qué estar errado, y cómo los resultados a los que llega el filósofo alemán están lejos de ser esencialmente defectuosos; más bien, por el contrario, son muy fácilmente corregibles.

Tanto Sánchez-Mazas como Couturat comparten un compromiso profundo por cierta interpretación de la lógica. Lukasiewicz, por el contrario, pretende tomar distancia de los debates filosóficos acerca de la naturaleza de la lógica y hacer uso de las herramientas formales para realizar un estudio matemático de los sistemas lógicos clásicos. A finales de siglo surgen en dos lugares opuestos del planeta dos nuevas refutaciones a las afirmaciones de Couturat desde una perspectiva que tiene unas intenciones muy similares a las de Lukasiewicz. Por un lado, en Bulgaria, Vladimir Sotirov, encuentra (de manera independiente de Sánchez-Mazas pero de forma muy similar) que el sistema original del los números caracterísitcos (como método de decisión para la silogística aristotélica) puede ser muy fácilmente corregido. Contrariamente al filósofo español, muestra como éste cálculo no está atado necesariamente a una interpretación intensional de la lógica y puede usarse también desde una perspectiva extensional. Y por otro, en Colombia, conjuntamente con el matemático Xavier Caicedo, demostramos (de forma muy diferente a la de Lukasiewicz/Slupecki) que el sistema de dos números cumple a cabalidad sus propósitos, señalando las motivaciones que guiaron a Leibniz hasta llegar a tal resultado.

Leibniz y los métodos de decisión para la silogística

Lo que persigo, principalmente, es hacer una exposición de los intentos leibnicianos, de forma que se pueda seguir su evolución y se hagan más comprensibles sus quiebres. Puede decirse que lo que intento es armar de una nueva forma el rompecabezas presentado en *Opuscules et Fragments inédits*, de manera que los ensayos leibnicianos dejen de aparecer como una serie de fracasos. La clave para esta reconstrucción es entender su proyecto como una re-visión de la silogística. Leibniz parte de la silogística, pero no como el sistema cerrado y perfecto que encontraba Kant, sino como la fuente para infinidad de desarrollos. Desde su obra juvenil de 1666, *De arte combinatoria* (G, vi, 27-102), hasta un ensayo que escribe en sus últimos años, *Schedae de novis formis et figuris syllogisticis* (1715) (C, 206-210), Leibniz re-escribe una y otra vez la demostración de los silogismos, busca nuevas figuras y distintas maneras de distinguir aquellas que son válidas de aquellas que no lo son. Es importante señalar que Leibniz no parte exclusivamente de Aristóteles sino que recoge las síntesis y sistematizaciones que se hicieron de ellos durante la edad media y comienzos de la edad moderna, siendo también testigo de sus críticas y desarrollos.

Formalización de la silogística

Aquí no se busca hacer un análisis detallado de las múltiples presentaciones leibnicianas de la deducción de las figuras silogísticas, sino presentar un marco básico para luego desarrollar aquellos intentos leibnicianos que resultan más originales: los sistemas geométricos y aritméticos. El texto del cuál parto, *De formis syllogismorum matematice definiendis* (C, 410-416), es posterior a aquellos donde se exponen los sistemas que quiero trabajar (no está fechado, pero se lo sitúa alrededor de 1690). Éste, sin embargo, recoge aquello que no parece variar demasiado a través de los textos leibnicianos, y que no modifica en mayor manera el tratamiento escolástico de la silogística. La formalización de la silogística que allí se expone es la siguiente:

Se tienen tres tipos de objetos lógicos a tratar: *términos, enunciados y silogismos*. Para los términos se utilizan letras consonantes: B, C, D, [...]; para codificar los tipos de enunciados se utilizan vocales: A para los universales afirmativos, E universales negativos, I particulares afirmativos, O particulares negativos. Tenemos entonces que: ACD está por *todo C es D*, ECD por *ningún C es D*, ICD por *algún C es D* y OCD por *algún C no es D*. Los *silogismos* son series de tres enunciados: la premisa mayor, la menor y la conclusión. El interés principal de la silogística es encontrar la manera de distinguir cuándo se sigue la conclusión de las premisas y cuándo no. Aristóteles encuentra que todos los silogismos válidos se pueden deducir mediante una serie de silogismos encadenados a partir de los de la primera figura, usando solamente las siguientes reglas: *subalternación*, *conversión* y *regreso* (prueba indirecta). Leibniz sabe, y Aristóteles mismo afirma (y prueba parcialmente en los Analíticos), que es suficiente con dos de los modos de la primera figura: *Barbara* y *Celarent*. En *De formis syllogismorum matematice definiendis* Leibniz procede a demostrar todos los silogismos válidos a partir de estos dos utilizando las reglas antes señaladas. Por lo tanto, los principios básicos del sistema delineado son los siguientes:

Barbara	*Celarent*	*subalternación*
A CB (*todo C es B*)	E CB (*ningún C es B*)	
A DC (*todo D es C*)	A DC (*todo D es C*)	A BC (*todo B es C*)
A DB (*todo D es B*)	E DB (*ningún D es B*)	I BC (*algún B es C*)

conversión
I BC (*algún B es C*)
I CB (*algún C es B*)

para el uso en las pruebas por *regreso* (contradicción):
ACD (*todo C es D*) y OCD (*algún C no es D*) son contradictorias.
ECD (*ningún C es D*) y ICD (*algún C es D*) son contradictorias.

Sistemas geométricos

Éstos aparecen en textos posteriores a los de la característica numérica, pero existen motivaciones para presentarlos primero. Ellos nos sirven para describir de manera sencilla la distinción entre el punto de vista de la intensión y el de la extensión, así como las exigencias que estos dos señalan a la hora de buscar interpretaciones para los enunciados dentro de cada sistema particular. Leibniz desarrolla dos tipos de interpretaciones geométricas: en una representa los términos mediante círculos y en la otra mediante líneas. La primera es análoga a la que vendrá a ser conocida como "diagramas de Venn" o "círculos de Euler" y la segunda no ha tenido ninguna utilización de importancia posteriormente, cuando, al menos para la silogística, resulta más adecuada. El fin principal de estas interpretaciones consiste en buscar relaciones entre las figuras que expresen las relaciones dadas en los enunciados, de manera que nos permitan distinguir los silogismos válidos de los inválidos. Por lo tanto, cada sistema tiene que cumplir dos requisitos esenciales: el primero, que llamaré de *validación*, consiste en que para todo silogismo válido si las figuras cumplen las relaciones dictadas por las premisas, cumplen también la señalada por la conclusión; y el segundo, que llamaré de *refutación*, consiste en que si un silogismo es inválido se puedan encontrar una serie de figuras que cumplan los requisitos de las premisas pero no el de la conclusión.

Antes de presentar los sistemas leibnicianos voy a describir rápidamente la diferencia entre el punto de vista de la intensión y de la extensión. Ambos constituyen, de manera general, dos formas de interpretar lo que se dice en los enunciados partiendo de una relación binaria: la *contenencia*. Desde el punto de vista *extensional* lo que dice el enunciado "todo C es D" es que D contiene a C, es decir que todo individuo que pertenece a la extensión de C también pertenece a la de D; por ejemplo: "todos los hombres son animales" quiere decir que el conjunto de todos los animales contiene al conjunto de todos los hombres. Por otro lado, desde el punto de vista *intensional* "todo A es B" afirma que A contiene a B, es decir que la noción representada por A contiene a la noción representada por B; por ejemplo "todos los hombres son animales" se ve que es verdadera al notar que *hombre* es lo mismo que *animal racional* y por lo tanto la noción *hombre* contiene la noción *animal*. La interpretación de la contradictoria de un enunciado viene a ser sencillamente la negación de la relación que se le asigna. Por lo tanto, para tener las interpretaciones de los cuatro tipos de enunciados basta con encontrar la de los particulares afirmativos. La interpretación que corresponde a "algún C es D", desde el punto de vista extensional, es fácil de intuir, e.d. que hay algún individuo de C que es a la vez individuo de D. Sin embargo, para el caso intensional no es tan evidente. La búsqueda de una expresión para la misma, en términos generales y en los sistemas particulares (geométricos y aritméticos) va a ser uno de los focos principales de la investigación leibniciana.

Veremos primero la expresión geométrica de los enunciados y de los silogismos, partiendo del punto de vista de la extensión, tal como la describe Leibniz en *De formae logicae comprobatione per linearum ductus* (C, 292-321) (copio explícitamente del texto de Leibniz tanto la representación mediante líneas como aquella mediante círculos):

Proposiciones

universal afirmativa:
todo B es C

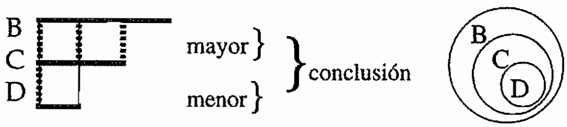
universal negativa:
ningún B es C

particular afirmativa:
algún B es C

particular negativa:
algún B no es C

Silogismos

Barbara:
A CB
A DC
A DB

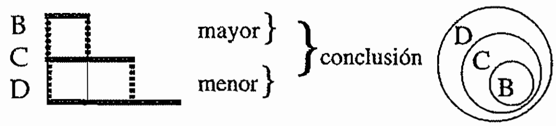


Celarent:
E CB
A DC
E DB

Vemos cómo el sistema de las líneas tiene varias ventajas sobre el de los círculos: se conserva el orden de los términos (el término medio va en el medio, el menor abajo y el mayor arriba); se puede expresar en qué lugar de la relación entre los términos ocurre aquello que se quiere señalar con la proposición (mediante las líneas entrecortadas), lo que permite que se distinga explícitamente la diferencia entre los juicios particulares (cosa que no sucede en la otra representación); y además se hace evidente de manera más clara cómo la conclusión enlaza las dos premisas (la línea continua más fina señala el lugar de la conclusión).

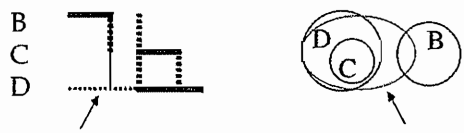
Ya vimos cómo este sistema valida los *silogismos primitivos*. Basta fijarse en la representación de los juicios afirmativos para ver cómo vale también la *subalternación;* y con notar la simetría de la definición para el juicio particular afirmativo (y el universal negativo) tenemos la *conversión*. Couturat, después de describir detalladamente este sistema, lo reconoce como su único sistema correcto y se lamenta del hecho que Leibniz no hubiese desarrollado la perspectiva extensional para ninguna de sus demás formulaciones. A continuación presenta Couturat los ensayos leibnicianos de expresar geométricamente los silogismos desde la perspectiva intensional. Para los juicios universales afirmativos esto se soluciona sencillamente con invertir la contenencia, y *Barbara* resulta validada de manera análoga a la que ya describimos:

A CB
A DC
A DB



Sin embargo a la hora de expresar el juicio universal negativo se ve en dificultades que se hacen evidentes al intentar demostrar por este medio el silogismo *Celarent*:

E CB
A DC
E DB



Con flechas señalo los defectos que Couturat encuentra en los intentos leibnicianos. En ambos casos no hay nada en las premisas que impida que D pueda aumentar hasta intersectarse con B. El problema principal está en haber representado el juicio universal negativo (y por lo tanto también el particular afirmativo) de la misma manera que bajo la perspectiva extensional, cuando ahora lo que se afirma es algo muy diferente. Según aparece en las gráficas, el universal negativo parece afirmar que sencillamente los representantes de los términos no se tocan, sin embargo, es posible que dos nociones se contradigan pero que a la vez compartan una noción como sucede por ejemplo con *hombre cuerdo* y *hombre loco*. Couturat examina primero la representación mediante círculos y luego de encontrar el defecto que señalé concluye que la interpretación intensional de la lógica es "refractaria al esquematismo geométrico, y por consiguiente al tratamiento matemático, que reposa siempre en alguna intuición" (Couturat 1961: 22). Procede a examinar el sistema lineal y el hecho de encontrar de nuevo el mismo problema le confirma que "las relaciones intensionales no son susceptibles de figuración geométrica como las relaciones extensionales, y que no es suficiente con poner al revés o invertir éstas para encontrar aquellas" (*Id.*, 32). Aún no sé si Leibniz pudo superar este escollo con alguna reforma, ésta es una investigación que queda pendiente. Más adelante veremos cómo Leibniz logra superar este problema para la representación aritmética, que sin embargo parece no satisfacerlo ya que abandona ese camino para concentrarse en su aproximación algebraica de la lógica. Sánchez-Mazas, por el contrario, encuentra una manera sencilla de corregir el primero de los sistemas numéricos, lo que parece confirmarle una intuición que sostiene desde que comienza su estudio de la lógica de Leibniz: "la estructura que revelan las relaciones de carácter comprehensivo es una estructura aritmética [...] y las relaciones que pueden llamarse extensivas se asemejan a ciertas relaciones geométricas" (Sánchez-Mazas 1951: 530). En su re-lectura de Leibniz, Sánchez-Mazas abre para la consideración intensional de la lógica un lugar en el espacio de las matemáticas, del cual Couturat había pretendido expulsarla para siempre. Pero aún desde bandos opuestos, se puede ver lo mucho que comparten Sánchez-Mazas y Couturat, en cuya interpretación de la lógica ocupa un lugar muy importante una filosofía de la matemática en la que la intuición y la imaginación tienen un lugar fundamental. El cierre del capítulo sobre el silogismo en el libro de Couturat recoge perfectamente su posición:

> [...] estuvo en constante tensión entre dos tendencias contrarias: la una, proveniente de la tradición, que lo llevaba a considerar sobre todo las relaciones de la comprehensión: la otra, más conforme a su espíritu matemático, que lo invitaba a veces a preferir la consideración de la extensión. Ahora bien, ésta es la única que permite someter la Lógica a tratamiento matemático, porque, como lo hemos visto, es la única que satisface las condiciones de la intuición y la imaginación. (Couturat 1961: 32) [2]

Sistemas aritméticos

Veremos ahora la manera como Leibniz busca reconocer los silogismos correctos mediante números. De nuevo la relación privilegiada es la *contenencia* y es a ella antes que nada a la que busca representar aritméticamente. Encuentra en la divisibilidad la relación perfecta para cumplir tal tarea, donde la analogía entre números primos y conceptos simples brindaría un campo no sólo para la representación de la silogística, sino también para realizar nuevamente dentro de la lógica su espíritu combinatorio.

Paso a describir ahora la manera como funciona la asignación. Usaré mayúsculas para los términos y minúsculas para los números ca-

[2] *"[...] il a été constantemment tiraillé entre deux tendances contraires: l'une, provenant de la tradition, qui le portait à considérer surtout les rapports de compréhension ; l'autre, plus conforme à son esprit mathematique, qui l'amenait parfois à préférer la considération de l'extension. Or celle-ci es la seule qui permette de soumettre la Logique au traitement mathématique, parce que, comme on l'a vu, c'est la seule qui satisfasse aux conditions de l'intuition et l'imagination. "*

racterísticos correspondientes. Como ya dije, en sus ensayos aritméticos Leibniz conserva siempre la perspectiva intensional. Por lo tanto el juicio universal afirmativo es verdadero si el sujeto contiene al predicado: *todo C es D* ssi *d divide c* ssi *Hay un* y *tal que* $dy = c$ (es decir, *si d divide a c*). Como la divisibilidad es una relación transitiva vemos cómo el silogismo *Barbara* se verifica fácilmente. Ahora tendría que encontrar la relación aritmética que correspondiese al juicio particular afirmativo. En *Elementa Calculi* (Abril 1679) (C, 49-57) Leibniz escribe que *algún C es D* afirma lo mismo que: (1) *algún ejemplo (o especie) de C contiene a D*. Y piensa que para esto es suficiente con que: (2) *C se relacione con D como la especie con el género, o como la especie con algo coincidente, o como el género con la especie*. Como vale la subalternación, es claro que (2) implica (1), pero al intentar demostrar la implicación contraria, Leibniz se da cuenta que hay un caso en el que no se da ninguna de las tres posibilidades admitidas en (2). Al notar esta posibilidad extra, afirma:

> Pero en verdad esto es un paralogismo; y con él se vienen abajo muchas cosas que hemos dicho hasta aquí, pues veo que una proposición particular afirmativa también tiene lugar aunque ninguno de los términos sea género o especie -como "algún animal es racional"- con sólo que sean compatibles. Ello hace evidente también que no es necesario que el sujeto pueda dividirse por el predicado o el predicado por el sujeto. Sobre lo cual edificamos mucho hasta aquí. Por lo tanto, lo que hemos dicho es justo sólo en un sentido más restringido, y por eso empezaremos con todo [de nuevo]." (Leibniz 1688 C, 56)

La única salida que Leibniz parece encontrar a este escollo es el nuevo sistema de dos números característicos que describiremos más adelante. Sánchez-Mazas, por el contrario, encuentra la manera de expresar, conservando los mismos principios de este sistema original, el juicio particular afirmativo (*cf.* Sánchez-Mazas 1981). Es curioso que Leibniz sólo intentara representar las relaciones entre los términos mediante la divisibilidad (y por lo tanto de la relación "especie-género") y no probara siquiera aquella que es la expresión más obvia de la misma proposición en términos numéricos (y que será la que utilizará más adelante para intentar expresarla en términos algebraicos), es decir: *algún C es D* ssi *algún F es C y D* ssi *se dan* y, z *tales que* $f = cy = dz$. Es claro que esta interpretación también tendría dificultades: así como está expresada implicaría que para cualquier par de términos C, D la proposición I CD sería valida, ya que el múltiplo de los dos números *cd* actuaría como múltiplo común. La tarea que lleva a cabo Sánchez-Mazas es la de buscar un criterio que permita decidir si la conjunción de los dos términos (y por lo tanto la multiplicación de sus correspondientes números característicos) implica una contradicción. En la expresión algebraica de los silogismos que Leibniz desarrolla en las *Generales inquisitiones de Analysi Notionum et Veritatum* (1686) (C, 356-99), soluciona este problema introduciendo la noción *non-Ens*. Sánchez-Mazas habrá de encontrar la traducción aritmética de la misma. Dados todos los conceptos primos, el *non-Ens* sería el máximo, aquél que los contiene a todos (análogo a la contradicción que en lógica proposicional implica todas las proposiciones). Por lo tanto, el número correspondiente al *non-Ens* (para el que utiliza la letra **F**) sería la multiplicación de todos los números primos en juego (aquí aparece como una restricción importante el hecho de que todo sistema que vayamos a tratar de esta manera debe tener sólo finitos conceptos simples). Antes de continuar tenemos que hacer una anotación muy sencilla pero importante: siguiendo la idea de divisibilidad como representante de la relación fundamental de contenencia, la operación que parece ser la natural para realizar la noción de conjunción es la multiplicación; pero el añadir a un concepto otro que ya está contenido en él no debería cambiarlo (un hombre animal es un hombre). De nuevo Sánchez-Mazas se guía por los ensayos algebraicos de Leibniz, en donde este último reconoce la idempotencia como una propiedad básica de la conjunción; reemplazamos entonces la multiplicación (ab) por la operación mínimo común múltiplo ($a * b$), que mantiene la relación con la divisibilidad pero que cumple también el nuevo requisito (al eliminar todas las repeticiones). La solución de Sánchez-Mazas para el problema de los juicios particulares afirmativos es entonces la siguiente: *algún C es D* ssi *CD no es contradictorio* ssi $c * d \neq$ **F**. Y recíprocamente para el universal negativo: *ningún C es D* ssi $c * d = F$. Para confirmar cómo de esta manera se pueden verificar los silogismos válidos, miremos la prueba de *Celarent*:

E CB (ningún C es B) $c * b = F$
A DC (todo D es C) $c * d = d$ (si c divide a d es claro que $c * d = d$)

E BD (ningún D es B) $b * d = b * (c * d) = (b * c) * d = F * d = F$

En la serie de ecuaciones de la derecha sólo nos aprovechamos de propiedades conocidas de la operación *mínimo común múltiplo*: la asociatividad y la absorción del menor por parte del mayor cuando se trata de uno de sus divisores. Teniendo que este sistema valida los silogismos primitivos, se trata de una sencilla demostración inductiva mostrar que lo hace con todos los silogismos válidos. En *Arithmetizations of syllogistic à la Leibniz* (Sotirov 1997) se demuestra cómo refuta todos los inválidos, pero la prueba rebasa los intereses de esta exposición. Sánchez-Mazas hace esta afirmación con convicción, pero por lo general las pruebas que presenta son particulares. Sotirov desarrolla la misma idea y llega a los mismos resultados, pero se interesa menos por los casos particulares y más por las demostraciones generales. Además, en su presentación desarrolla paralelamente el modelo aritmético dual que acabamos de describir, es decir, aquel que tiene como operación básica el *máximo común divisor*. Al invertirse los papeles, el término falso viene a ser el máximo común divisor de los números primos, es decir, el 1, que no depende ahora de los términos que se tomen. Muestra así cómo al invertirse la contenencia nos encontramos con una interpretación aritmética de la silogística de carácter extensional que resulta tan adecuada como la intensional. De esta manera refuta a Couturat no sólo probando la corrección del sistema leibniciano, sino también al mostrar que sí existe una forma de pasar de una interpretación a otra mediante una sencilla *inversión*. Pero refuta también a Sánchez-Mazas al mostrar que la aritmética no privilegia ninguna de las dos perspectivas, y de esta manera nos invita a buscar un resultado análogo para los sistemas geométricos.

Sistema de dos números característicos

Acabamos de mostrar el camino que Leibniz no siguió, mostremos ahora el suyo. Para eso tenemos que volver a la encrucijada: hemos encontrado la manera de expresar los juicios universales afirmativos (que el número del predicado divida al del sujeto), pero no encontramos cómo expresar los particulares afirmativos. La pregunta clave es entonces: ¿Qué expresan estos juicios desde la perspectiva intensional? Leibniz tiene claro que desde tal punto de vista no se trata de la *existencia* de individuos (como en la extensional), y encuentra la respuesta en una noción análoga: la *posibilidad*, que sí puede ser expresada de manera intensional como la no-contradicción. Dado el enunciado "algún B es C" este querría decir que los conceptos B y C son posibles conjuntamente, e.d. que son *composibles*. ¿Cómo expresar esto aritméticamente? Es necesario que el número de un término nos permita saber no sólo cuáles nociones contiene (cuáles afirma), sino también con cuáles es contradictorio (cuáles niega). Así que propone no utilizar un único número sino dos: a cada término C le correspondería una pareja de números característicos (*pc, nc*). Como Leibniz quiere trabajar sólo con nociones posibles (y así poder validar la subalternación), pone como primera condición que para todo término C, *pc* y *nc* sean primos relativos (e.d. que no exista una noción que afirme a la vez que la niega). Veamos ahora las relaciones que propone para representar los juicios: no cambia para los universales afirmativos: *todo B es C* ssi *pc divide a pb y nc divide a nb*; y la que ahora nos interesa, para los particulares afirmativos: *algún B es C* ssi *tanto (pb y nc) como (nb y pc) son primos relativos*. A primera vista, esta nueva definición parece muy complicada pero no hace más que expresar la idea que describíamos más arriba, es decir, no hay nada que B afirme y C niegue, y viceversa.

En el último texto en el que se expone este sistema (y de manera más rigurosa), *Sur les nombres characteristiques* (C, 245), Leibniz muestra cómo un silogismo incorrecto parece ser validado. Dados los siguientes términos con sus números característicos: P (10, 3) R (8, 11) F (5, 1), tenemos que:

A PF *todo piadoso es feliz* 5 divide a 10 y 1 divide a 3.
I PR *algún piadoso no es rico* 10 no es divisible por 8.
I PF *algún rico no es feliz* 8 no es divisible por 5.

Basándose en esto concluye Couturat:

> [...] Así que este sistema de notación no es válido./ No insistiremos entonces más sobre este primer sistema, que Leibniz parece haber abandonado, sin duda a causa de sus defectos y también de su complicación. Anotaremos solamente que está fundado expresamente sobre la consideración de la comprehensión (Couturat 1961: 32)[3]

Sin embargo, como notará bien Sánchez-Mazas, este ejemplo no muestra nada más que **un** caso posible, y no la demostración de la validez de un silogismo. A continuación nos presenta otra asignación para la que es fácil verificar que satisface las premisas pero no la conclusión: P (6, 35) R (30, 77) F (2,7) (Sánchez-Mazas 1973: 60). Como el mismo Leibniz nota en el verso de la página: "para ver si un silogismo es válido verificamos si la contradictoria de la conclusión es compatible con las premisas, es decir, si se pueden dar números que satisfagan las premisas y la contradictoria de la conclusión; pero si esto no es posible nunca, entonces el silogismo es válido" (C, 247). Es decir, para que un silogismo sea válido *todas* las asignaciones que satisfagan las premisas han de satisfacer la conclusión. Veamos, por ejemplo, cómo se muestra la validez del silogismo *Celarent*:

E CB *o bien pc y nb, o bien nc y pb no son primos relativos.* (1)
A DC *pc divide a pd, nc divide a nd.* (2)

E BD *o bien pd y nb, o bien nd y pc no son primos relativos*

Dado (1) supongamos que existe *x* que divide a *pc* y a *nb*, por (2) *pc* divide a *pd* y por lo tanto x divide a *pd*; así obtenemos que *pd* y *nb* no son primos relativos. El otro caso es igual. De la misma manera no es

[3] *"Ainsi ce système de notation n'est pas valable. / Nous n'insisterons donc pas davantage sur ce premier système, que Leibniz paraît avoir abandonné, sans doute à cause de ses défauts et aussi de sa complication. Nous remarquerons seulement qu'il est fondé expressément sur la considération de la compréhension."*

difícil verificar los demás silogismos primitivos para mostrar que se satisface el criterio de validación. Sánchez-Mazas construye un álgebra de términos mixtos análoga a este sistema y luego muestra uno por uno cómo satisface los 19 silogismos válidos, pero no demuestra que valga el criterio de refutación (*cf.* Sánchez-Mazas 1963: 104-11). En "Completud de dos cálculos lógicos de Leibniz" (Caicedo/Martín 2001) demostramos de manera general y sin añadir nada al planteamiento leibniciano, que el sistema de dos números característicos cumple a cabalidad su objetivo al satisfacer tanto el criterio de validación como el de refutación.

No deja de llamarnos la atención el hecho de que (por lo que podemos saber) Leibniz abandonase el sistema de los números característicos después del texto de 1679 en el que aparecía la nota señalada por Couturat. Es importante destacar que Leibniz, por lo general, utiliza *letras* para describir las reglas de su sistema y sólo utiliza *números* a la hora de probar los silogismos. Así que en los casos que conocemos no parece hacer uso de la regla que hemos citado más arriba. Leibniz afirma varias veces que quiere verificar los silogismos directamente con números y aquí parece encontrarse que debe hacerlo con letras (mediante un *álgebra numérica*). Se tienen pocas referencias de sus ensayos lógicos entre ese año y 1686 que es cuando escribe las *Generales inquisitiones de Analysi Notionum Veritatum* donde nos presenta un *álgebra de la lógica* ya bastante desarrollada. Allí se nota cómo los viejos trabajos no han sido echados en saco roto: las traducciones que hace de los silogismos en términos algebraicos son iguales a las que hemos descrito para los sistemas aritméticos. Pero ahora las letras representan directamente las nociones y no se tienen que utilizar los números como puente intermedio. Con el fin de mostrar que esto significa para Leibniz un salto nada trivial hacemos uso de los textos donde presenta su *analisys situs*, otro de los productos de su concepción de la lógica y la matemática. En ellos critica duramente la geometría cartesiana por requerir siempre de los números como un paso intermedio entre las letras y las figuras.[4] Su proyecto consistirá en superarla mediante una nueva geometría donde las letras representen directamente las figuras (y los axiomas las relaciones que existen entre éstas). La topología, que surge en manera relativamente paralela a la lógica moderna, vendrá a realizar muchas de sus proyecciones. Sin embargo, la geometría analítica (y el mismo cálculo diferencial que se rige por el mismo sistema de representación) no resultará por ello abandonada y aún hoy continúa siendo objeto de estudio. Esto nos puede llevar a

[4] "[...]en efecto los Caracteres Algebraicos no expresan todo lo que hay para estudiar en el espacio [...] no representan directamente y en sí misma la situación de los puntos; sino por medio de un gran circuito pasando por las magnitudes." (Leibniz 1995:145) [la traducción es mía]

pensar que el sistema análogo dentro de su empresa lógica, e.d. los números característicos, puede seguir siendo de interés aún hoy. No es una simple hipótesis: Sotirov muestra que el sistema de un número característico sirve para modelar tanto la lógica proposicional como la de predicados unádicos; Sánchez-Mazas desarrolla a partir de los mismos principios un sistema numérico propio que no sólo sirve para la lógica proposicional clásica sino también para otras lógicas (modales, jurídicas); y ya dentro de la corriente central de la lógica matemática las estructuras numéricas y sobre todo la de los números naturales juegan un papel clave en la teoría de modelos y la teoría de demostración.

Bibliografía

Burkhardt, H. (1980). *Logik und Semiotik in der Philosophie von Leibniz.* Berlin: Philosophie.

Caicedo, X. - Martín, A. (2001). "Completud de dos cálculos lógicos de Leibniz". En: *Theoria* 14/42.

Corcoran, J. (1972). "Completeness of Ancient Logic". En: *Journal of Symbolic Logic* 37/4.

Couturat, L. (1901). *La Logique de Leibniz,* Paris: Alcan. [Tambien, (1961) Olms: Hildesheim].

Leibniz, G.W. (1903). *Opuscules et Fragments inédits de Leibniz* (ed. Couturat). Paris.

(1995). *La Charactéristique géométrique* (ed. Echeverría; trad. Parmentiér). Paris: Vrin.

(1988). *Seis Escritos de Lógica* (trad. Torreti). En: *Diálogos* 151.

(1986). *Investigaciones Generales sobre el análisis de las nociones y las verdades* (trad. Beuchot - Herrera-Ibañez). México: UNAM.

(1966). *Logical Papers* (ed. Parkinson). Oxford: Clarendon Press.

Lukasiewicz, J. (1977) [1957]. *La Silogística de Aristóteles.* Madrid: Tecnos.

Martín, A. (1998). *Completitud de dos cálculos lógicos de Leibniz.* [Tesis de licenciatura de matemáticas bajo la dirección de Xavier Caicedo, Universidad de los Andes, Bogotá]

Rescher, N. (1954). "Leibniz's Interpretation of his Logical Calculi". En: *Journal of Symbolic Logic* 19/1.

Sánchez-Mazas, M. (1951). "Sobre un pasaje de Aristóteles y el cálculo lógico de Leibniz". En: *Revista de Filosofía* 10.

(1963). *Fundamentos Matemáticos de la Lógica Formal.* Caracas: Universidad Central de Venezuela.

Sánchez-Mazas, M. (1981). "Un modelo aritmético de la silogística". En: *Lógica, Epistemología y Teoría de la Ciencia* 9.

(1994a). "Actualización de la característica numérica universal de Leibniz" (Prol. J. de Lorenzo). En: *Cuadernos universitarios de "Theoria"*. San Sebastián: Centro de análisis, lógica e informática jurídica.

(1994b). "La aritmética intensional". En: Echeverría, de Lorenzo, & Peña, (eds.). *Calculemos... Matemáticas y Libertad, Homenaje a Miguel Sánchez-Mazas*. Madrid: Trotta.

Smiley, T.J. (1973). "What is a Syllogism". En: *Journal of Philosophical Logic* 2.

Sotirov, V. (1997). "Arithmetizations of syllogistic à la Leibniz". Apple (ed.). Non-Class Logics. [Por aparecer]

(2000). "Monadic Predicate Calculus with Equality Arithmetized à la Leibniz". Presentado en "Logic Colloquium 2000", Paris. (Los artículos de este autor se pueden adquirir en www.math.bas.bg/~vslot)

Vega, L. (1990). *La trama de la demostración*. Madrid: Alianza.

Zalamea, F. (2000). "El cálculo infinitesimal y los cálculos lógicos, en Leibniz, como especificaciones de la característica universal". En: *Lecturas Matemáticas* 21.