UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Propuesta didáctica para abordar el concepto de número real con estudiantes de undécimo grado

Elizabeth Martínez Villarraga

Universidad Nacional de Colombia

Facultad De Ciencias

Bogotá, Colombia

2014

Propuesta didáctica para abordar el concepto de número real con estudiantes de undécimo grado

Elizabeth Martínez Villarraga

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Directora:

Magister en Matemáticas, Myriam Margarita Acevedo Caicedo

Codirectora:

Doctora en Lógica e Filosofía de ciencia, Clara Helena Sánchez Botero

Universidad Nacional de Colombia

Facultad De Ciencias

Bogotá, Colombia

2014

Considero más valiente al que conquista sus deseos que al que conquista a sus enemigos, ya que la victoria más dura es la victoria sobre uno mismo.

Aristóteles

Agradecimientos

A Dios por acompañarme y ser mi guía en esta experiencia.

A la Universidad Nacional de Colombia, mi segundo hogar, por fortalecer mi formación profesional.

A la profesora Myriam Margarita Acevedo Caicedo, directora de esta tesis, por su dedicación, tiempo, paciencia y valiosos aportes.

A la profesora Clara Helena Sánchez Botero, por sus reflexiones como docente, compromiso y empeño por perfeccionar esta maestría.

A mi familia, quienes con cariño, confianza y apoyo incondicional me animaron a seguir adelante para cumplir otra etapa en mi vida.

A mis estudiantes, quienes participaron con honestidad e interés en la elaboración de la unidad didáctica.

Resumen

En este trabajo se presenta una Unidad Didáctica para estudiantes de grado undécimo cuyo objetivo principal es avanzar en los niveles de comprensión del concepto de número real y sus propiedades de densidad y completitud. La unidad se fundamenta en: un breve recorrido histórico-epistemológico por la evolución y consolidación del concepto de número real, en una revisión de aspectos disciplinares relacionados con la construcción de significado del concepto en la que se discuten en detalle algunas construcciones de los números reales y finalmente en un análisis didáctico de los diferentes sistemas de representación, los obstáculos asociados a su comprensión, los estándares curriculares y la prueba diagnóstica aplicada a los estudiantes del grupo.

Palabras Clave: Número real, densidad, completitud, representación, didáctica.

Abstract

This research paper presents a didactic unit for eleventh graders. The main objective is to improve the comprehension level of the concept of real number, its properties, of density and completeness. The unit is supported by three elements. First, a brief historical-epistemological background of evolution and consolidation of the concept. Second, a review of the disciplinary aspects related to the building of the concept meaning that deals with some constructs of the real numbers. Third, a didactic analysis of the different representation systems, the obstacles related to comprehension, curricular standards, and the diagnosis test applied to students.

Keywords: Real number, density, completeness, representation, teaching.

Contenido

Lista de figuras

Lista de tablas

Introducción

El concepto de número real se logró consolidar después de varios siglos de trabajo de la comunidad matemática, el proceso fue complejo y se tuvieron que superar múltiples dificultades y rupturas que requirieron cambios drásticos de concepciones respecto a aspectos como: la naturaleza de los números, las relaciones entre el número y la magnitud, las formas de representación, el continuo numérico…etc. Sin embargo, las prácticas tradicionales de aula no tienen en cuenta esta complejidad y abordan el concepto de manera superficial, enfatizando en aspectos puramente instrumentales o formales que no tienen significado alguno para los estudiantes, posiblemente los docentes no tienen aún claro que las dificultades que evidencian sus estudiantes podrían estar relacionadas con la complejidad del concepto y que es posible plantear aproximaciones intuitivas, por ejemplo las que se centran en el análisis de las formas de representación.

Las prácticas antes mencionadas se relacionan muy seguramente con la propuesta que hacen los libros de texto para los estudiantes de educación secundaria, donde se abordan los números reales desde su construcción axiomática presentando en forma esquemática las operaciones y relaciones de orden; sin analizar, por ejemplo, las distintas formas de representación. Es a partir de esta introducción poco profunda que los textos fundamentan los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral. La presentación estática-rigurosa y el poco tiempo que se asigna para abordar este tema en el aula no permite la comprensión del concepto del número real y sus propiedades.

Este trabajo pretende ofrecer un camino diferente para abordar la enseñanza-aprendizaje de los números reales en el grado undécimo y para ello una vez descrito el problema didáctico y los objetivos de éste en el capítulo 1, en el dos, se hace una síntesis del desarrollo histórico del concepto desde la introducción de los números naturales hasta su consolidación con los trabajos de Cantor y Dedekind. Lo anterior complementado con una reflexión epistemológica acerca de las dificultades inherentes a la evolución y formalización del concepto.

Posteriormente en el capítulo tres se profundiza en las construcciones de los números reales presentadas por Dedekind y Cantor y se exponen algunos elementos de la teoría de las fracciones continuas con el objeto de enriquecer las actividades propuestas en la Unidad Didáctica e introducir otra forma de representación de los números racionales e irracionales.

El cuarto capítulo se dedica a los aspectos didácticos relacionados con el concepto de número real, se discuten algunos apartes de la propuesta del doctor Luis Rico y su equipo de investigación (Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas,

1999) sobre la importancia de considerar distintas formas de representación y coordinar éstas para la comprensión de un concepto. Se incluye además en este capítulo un análisis de los obstáculos epistemológicos y didácticos asociados al concepto. Todas estas consideraciones fueron fundamentales tanto para el diseño de la prueba diagnóstica como para las actividades que componen la unidad didáctica.

En el último capítulo se describe la unidad didáctica, se identifican los estándares curriculares, de los pensamientos numérico y variacional, pertinentes a los números reales y se presenta una secuencia de cuatro actividades orientadas a favorecer la comprensión del concepto del número real y sus propiedades, de densidad y completitud. Finalmente, en el anexo se incluye el teorema de Thales, una prueba de salida para determinar cómo se van modificando los conceptos previos de los estudiantes al desarrollar la unidad didáctica y por último algunas actividades mediadas por el software GeoGebra.

1. Identificación del problema didáctico

El programa de cálculo en el colegio Anglo Americano contempla cinco unidades temáticas: Probabilidad, números reales, límites, derivadas e integrales. En la segunda unidad se enfatiza en las operaciones con intervalos y solución de inecuaciones y sólo se dedican dos horas de clase para el trabajo con los números reales. Este tema se aborda como generalmente proponen los libros de texto y debido al trabajo realizado en grados anteriores los números reales se presentan como objetos que cumplen ciertas propiedades algebraicas y de orden, necesarias para realizar operaciones, olvidando por completo mostrar sus diferentes representaciones (simbólicas y geométricas) y los procesos infinitos que subyacen a las expresiones decimales que ayudan a dar significado a los números racionales y posteriormente a los reales.

Posiblemente por los factores antes mencionados en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto de número real, pueden presentarse obstáculos didácticos (relacionados con el tipo de actividades de aprendizaje que se seleccionan, la naturaleza de los currículos, las decisiones del sistema educativo), ontogénicos (relativos a las capacidades cognitivas de los estudiantes) y epistemológicos (por la naturaleza misma del concepto). Es importante señalar que la construcción del concepto de número real tomó a la comunidad matemática varios siglos, cambio de paradigmas, aceptación y consolidación de ideas tan complejas como la de magnitud inconmensurable.

Por otra parte, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) propone en los estándares básicos del Pensamiento Variacional para el undécimo grado: “Analizar representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales”, “Reconocer la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos” y “Establecer relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada” [11], es decir que el énfasis debe estar según el MEN en la representación y en las propiedades analíticas de los números reales.

La pregunta que surge es entonces:
¿Qué características debe tener una unidad didáctica que permita a los estudiantes de grado undécimo interpretar intuitivamente las propiedades de densidad y continuidad de los números reales?
Para resolver esta pregunta se propuso en el trabajo que se presenta, analizar las diferentes representaciones de los números reales y cómo cada una de ellas aporta a comprender este concepto y diseñar a partir de allí una unidad didáctica que aborde el concepto de número real, sus representaciones y propiedades.

1.1 Objetivo general

Diseñar una unidad didáctica para grado undécimo que permita a los estudiantes dar significado al concepto de número real, sus representaciones y sus propiedades.

1.1.1 Objetivos específicos

- Identificar conceptos previos de los estudiantes respecto a los números reales, sus formas de representación y propiedades.

- Evaluar estrategias didácticas que surgen del análisis histórico epistemológico de la evolución del concepto de número real.

- Seleccionar y analizar diversos sistemas de representación de los números reales y establecer conexiones entre ellos.

- Valorar investigaciones y propuestas didácticas relacionadas con el proceso de enseñanza aprendizaje de los reales y su estructura.

- Diseñar unidad didáctica sobre el concepto y propiedades de densidad y continuidad de los números reales.

2. Aspecto Histórico

El concepto de número real surgió en un contexto científico y social determinado y fue consolidándose paulatinamente con el tiempo. Es importante señalar que el conocimiento y análisis de este proceso permite al docente de matemáticas no sólo reconocer las dificultades y rupturas que se presentaron y comprender mejor el porqué de las dificultades que evidencian los estudiantes con este concepto, sino, identificar aproximaciones informales y estrategias didácticas que pueden enriquecer el trabajo en el aula.

A continuación se realizará una síntesis de las diferentes etapas de evolución del concepto de número real; se describirán brevemente las fases iniciales, relacionadas con los conceptos de número natural, entero y racional, desde los problemas que motivaron su introducción. Y posteriormente se enfatizará en el desarrollo del concepto de número irracional, en la discusión acerca de la naturaleza de los decimales infinitos no periódicos y en la construcción formal del conjunto de los números reales, todo esto con base en las investigaciones de Bergé [2], Meavilla [9], Sánchez [18] y los libros de historia de las matemáticas de Boyer [3] y Kline [7].

2.1 Números Naturales

La noción de número natural, por lo menos en su concepción inicial, de percepción de cantidad y conteo de pequeñas colecciones, es asumida por la mayoría de los historiadores, como ligada a la aparición del hombre [3]. Se considera que esta primera noción surgió como respuesta a la pregunta ¿cuántos hay?, pero realmente en las fuentes bibliográficas consultadas se describen los primitivos medios de contar y de dar una expresión gráfica o simbólica y no el concepto de número natural.

En el análisis de documentos y prácticas de las civilizaciones primitivas se han identificado diversos métodos de conteo, pero a pesar de las diferencias hay una idea que se considera universal a todos los pueblos primitivos: inicialmente utilizaron los dedos de sus manos y/o pies para contar y cuando estos resultaron insuficientes para dar cuenta de una cantidad, utilizaron grupos de objetos piedras (por ejemplo). Los grupos de piedras no fueron muy útiles para guardar información, así que el hombre primitivo usó lenguaje gráfico para representar cantidades, utilizó marcas en troncos y en huesos (hueso de Ishango), cada marca representaba un elemento de la colección a enumerar.

Con el paso del tiempo fue necesario representar cantidades más grandes y para ello se introdujeron símbolos o sistemas de símbolos, es decir numerales y sus combinaciones.

Los primeros sistemas de numeración se basaron en la yuxtaposición de numerales, pero las dificultades que ocasiona esta yuxtaposición, para escribir números grandes y operar, motivó la introducción de sistemas posicionales, que utilizan un número mínimo de símbolos. Entre estos sistemas, surgió el sistema de numeración decimal actual que utiliza 10 símbolos y es aditivo y posicional. Este sistema de numeración tuvo su origen en la India y fue introducido a Europa por los árabes en el siglo XV. Actualmente este sistema es el de mayor uso.

Boyer, en su libro (Historia de las matemáticasc) menciona que, numerosos hallazgos antropológicos muestran que las civilizaciones Egipcia en el siglo XVI a. C. (papiro de Ahmes y de Moscú) y Babilónica en los años 1800 al 1600 a. C. (tablillas) además de contar con un sistema de numeración, en la última posicional y aditivo, efectuaron operaciones aritméticas básicas. Aplicaron este conocimiento a la solución de problemas específicos, como: la construcción de pirámides o la repartición de terrenos u otros, pero los historiadores han concluido de los análisis, que estas civilizaciones no dedicaron tiempo a comprender el porqué de los elementos teóricos incipientes.

Fueron los Pitagóricos, escuela fundada en Crotona, ciudad del sur de Italia por Pitágoras de Samos (572-496 a.C.), quienes se dedicaron a estudiar los números sin fines de utilidad práctica. El lema de esta escuela "Todo es número" impulsó a los pitagóricos a estudiar las propiedades de los números, ya que estos eran el principio de explicación de la naturaleza. La primera definición de número natural viene de esta escuela "Un número es una multiplicidad de unidades (Elementos, VII, def. 1 y 2)". Esta definición (arquitectura discontinua de unidades) hacía referencia a los números naturales a partir del 2, pues para ellos el 1 era el origen de los números más no una multitud de unidades.

Entre las propiedades de los números naturales que los pitagóricos reconocieron, describieron y relacionaron están: la paridad e imparidad, la clasificación de los números en triangulares, cuadrados, pentagonales… etc, clasificación que depende del arreglo que se pueda dibujar con los puntos que los representan. Este tipo de análisis dio inició a la llamada "matemática pura", estudio de la matemática como una ciencia independiente de sus aplicaciones.

2.2 Números Racionales

El desarrollo de los números naturales dio origen a la aritmética y a la geometría, que según el nivel cultural de la civilización mostró mayor o menor desarrollo. El análisis de documentos recuperados, como señala Hernández [5] ha llevado a concluir, por ejemplo, que los egipcios fueron los primeros en utilizar además de los naturales las fracciones (edad de bronce), como divisiones indicadas, cuando no podían realizar repartos exactos (divisiones). Los chinos realizaron operaciones con fracciones; para adicionar o sustraer fracciones plantearon un algoritmo similar al actual y determinaron el mínimo común denominador de varias fracciones. Es de anotar que tanto los egipcios, como otras civilizaciones de Mesopotamia trabajaron con el sistema de numeración sexagesimal, pero para problemas relacionados con pesos y medidas usaron el sistema decimal, e introdujeron las fracciones decimales como se ilustra en la figura 2-1.

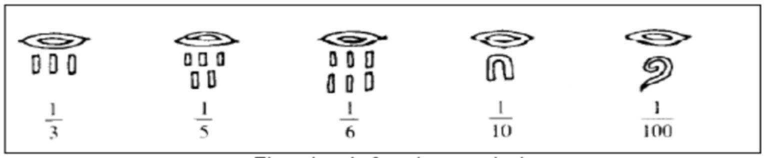


Figura 2-1: Ejemplo de fracciones egipcias

Los griegos, por su parte, utilizaron las fracciones para expresar medidas. Para medir una magnitud es necesario compararla con otra magnitud escogida como unidad y de esta comparación surge una relación, la fracción en su significado de razón. Es decir, dadas dos longitudes AB y AC se requiere seleccionar una unidad de longitud común para ambas, AD, de manera que: la longitud de AB se exprese como *a* veces AD, a un entero, la longitud de AC b veces AD, b entero y la relación entre las dos longitudes es entonces la razón entre números enteros $\frac{a}{b}$, esto se traduce en encontrar una medida común para dos longitudes cualesquiera, en cuyo caso dichas longitudes se dicen conmensurables.

El concepto de número hasta este momento tenía dos posibles significados: multiplicidad de unidades y operador. Como operador al resultar de la transformación de una medida y corresponder a una parte o porción de una magnitud.

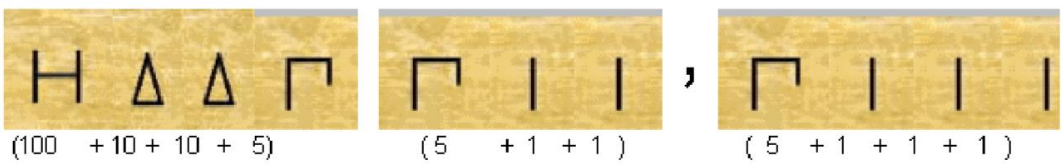


Figura 2-2: Ejemplo de fracción griega $125\frac{7}{8}$

Autores como Boyer y Kline mencionan que a finales del siglo XV, en Europa se emplearon las fracciones decimales para representar números expresados como suma de potencias de diez (expandidos en el sistema decimal). Paralelo al trabajo con las fracciones decimales se desarrolló teoría relativa a las fracciones continuas, teoría que se fundamenta en la aplicación reiterada del algoritmo de la división de Euclides y que permitió encontrar otra forma de representar los números racionales. Fue Cataldi (1548-1626) el primer matemático en introducirlas, desarrolló su simbolismo y estudió algunas de sus propiedades.

Respecto a la notación de las fracciones en, el siglo XV F. Vieta (1540-1603) planteó en su obra Canon-mathematicus de 1579 que debían usarse las fracciones decimales y no las sexagesimales; en el texto expresa el número 141421'35624 utilizando la siguiente notación: $141421.^{\underline{35624}}$ unas páginas más adelante como $141421\frac{356.24}{1000.00}$, posteriormente como $\mathbf{141421}356.24$ (parte entera en negrita) y finaliza con $\mathbf{141421}|356.24$. El uso del punto para separar la parte entera de la parte decimal de un número realmente se le atribuye a G. Magini (1555-1617), cartógrafo de Kepler y a Clavius amigo jesuita de Kepler, sin embargo, el punto decimal no se popularizó hasta que J. Napier lo utilizó 20 años más tarde, en su trabajo con logaritmos.

Fue Simón Stevin (1548-1620) en 1585 quien formuló en forma más enérgica la petición de usar el sistema de base diez y no sesenta. La comunidad de matemáticos solo aceptó esta propuesta cuando Stevin se dio a la tarea de explicar de manera sencilla el uso de este sistema a partir de la expansión decimal de números enteros, para luego considerar la expansión de las fracciones introduciendo unidades de diferente orden: décimas, centésimas, milésimas etc; En la notación utilizó círculos que indicaban la potencia de diez que debería llevar como divisor. La notación que conocemos en la actualidad apareció en la traducción al inglés de la obra Descriptio de J.Napier (1550-1617) en 1616, un ejemplo se ilustra en la figura 2-3:

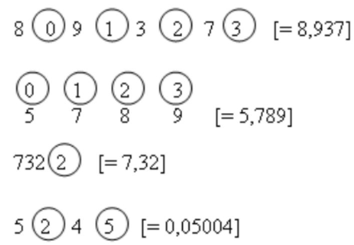


Figura 2-3: Notación para expresiones decimales por Stevin.

Con la presentación de la teoría de los logaritmos y los avances en el cálculo de Leibniz y Newton aparecen los infinitésimos (cantidades infinitamente pequeñas), de los que Leibniz afirmó: estos objetos no se pueden comparar con los números usuales, son elementos de órdenes diferentes. Este planteamiento, dio origen a una gran discusión acerca de la pregunta, ¿son los decimales infinitos no periódicos números o no? La respuesta a esta pregunta sólo se dio cuando se definieron formalmente los números reales.

2.3 Números Irracionales

Los griegos consideraron que todo en la naturaleza podía ser cuantificado usando números enteros y razones, hasta que descubrieron que no era posible expresar como una razón entre enteros, la longitud de la diagonal de un cuadrado. Este descubrimiento, se atribuye a Hipaso de Metaponto (450 a.C.) y ocasionó una ruptura en la filosofía de la escuela Pitagórica, agitó las bases más profundas de las concepciones de esta escuela, pues ahora todo en la naturaleza no era medible, conmensurable o expresable en términos de una razón entre enteros.

Al intentar demostrar por reducción al absurdo que estas magnitudes (la longitud de la diagonal de un cuadrado y la longitud de su lado) eran conmensurables, los pitagóricos dieron origen a las magnitudes inconmensurables o lo que hoy conocemos como números irracionales.

El descubrimiento de las magnitudes inconmensurables planteó a la comunidad matemática griega diversas preguntas frente a la medición: ¿el proceso de búsqueda de una medida común es ilimitado?, ¿la unidad común de medida es indefinidamente pequeña? y como esta debe estar contenida en las magnitudes que se comparan, ¿lo hace un número infinito de veces?

El reconocimiento de la existencia de otra clase de números, originó además, como lo enunció Zenón en sus paradojas, la separación entre lo discreto y lo continuo, la ruptura entre la aritmética y la geometría, que ocasionó a la vez un estancamiento en la aritmética (que trataba fenómenos discretos) y en el álgebra, mientras que la geometría (que se ocupaba de magnitudes continuas) logró un mayor desarrollo en esta civilización.

La escuela platónica dio solución a este problema desligando la experiencia de la matemática, estableciendo la distinción entre número numerado (útil para contar) y número aritmético (ente ideal de naturaleza abstracta formado por la agrupación de unidades iguales), lo que permitió que miembros de esta escuela estudiaran estos "números".

Eudoxo de Cnido (355 a.C.) matemático griego miembro de la escuela pitagórica, formuló una teoría general de proporciones definiendo magnitudes conmensurables e inconmensurables desde la geometría, a partir de la idea del continuo (a través de magnitudes sin apoyarse de forma explícita en los números) eludiendo así la discusión sobre la naturaleza de estos números priorizando el razonamiento geométrico sobre el aritmético y algebraico.

Sin embargo, como señala Boyer [3], es importante anotar que civilizaciones anteriores a la griega, como la egipcia, mesopotámica y china trabajaron con algunos irracionales que surgieron en el contexto geométrico (determinación de área del círculo) o en el cálculo de raíces, pero no se detuvieron en cuestiones ontológicas como los griegos, sino que se dedicaron a realizar cálculos con estos números. Ante la imposibilidad de representarlos como razones de enteros surgieron las primeras aproximaciones a números irracionales entre ellas las de π y $\sqrt{2}$.

El método de aproximación se convirtió en una poderosa herramienta para la ejecución de cálculos matemáticos y comprensión de fenómenos físicos. Ejemplos de dichas aproximaciones hay varios, en la cultura egipcia el escriba Ahmes en el problema 50 muestra la equivalencia entre el área de un campo circular de 9 unidades de diámetro y el área de un cuadrado de lado 8 unidades, utilizando como aproximación de π, 3,16.

En un problema que aparece en tablillas de escritura cuneiforme de los mesopotámicos al establecer la razón entre el lado de un cuadrado de longitud de 30 unidades y su diagonal, se utiliza una muy buena aproximación a $\sqrt[2]{2},\ 1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$

Los matemáticos chinos encontraron valores cada vez más exactos de π. El matemático Tsu Ch'ung-Chih (430 a.C.), determinó aproximaciones por exceso y defecto a π, 3,1415926 < π < 3,1415927.

En la edad media, los matemáticos Brahmagupta (628 d.C.), Omar Khayyam (1050 d.C.), Al-Kashi (1436 d.C.) y Leonardo de Pisa (1180 d.C.) lograron determinar valores cada vez más próximos para π y φ (número de Euler) en el estudio intuitivo de los números irracionales. Realizaron operaciones entre expresiones racionales e irracionales, ocultando la diferencia tan marcada que los griegos establecieron entre estos números. A la representación del número como multiplicidad de unidades se añadió entonces la representación como razón entre magnitudes continuas. Se relacionó la inconmensurabilidad geométrica con la irracionalidad numérica, las expresiones irracionales empezaron a ser reconocidas como números. En este periodo se empiezan a fusionar los conceptos de número y razón, dando lugar a la idea de real positivo.

Omar Khayyam reemplazó la teoría de proporciones de Euclides, por un planteamiento numérico, logrando así que la solución geométrica a ecuaciones cúbicas dada por los griegos correspondiera a números concretos. Al- Kashi obtuvo como aproximación de π, 3,14159265358979 y manifestó junto con Omar Khayyam que cualquier razón, formada por segmentos conmensurables o no conmensurables, podía expresarse como un número. Así que gracias a estos matemáticos árabes se inició la idea de una concepción única de número mediante la integración de los racionales y las razones.

En el renacimiento, los irracionales empezaron a considerarse con más fuerza como números, cuando Jerónimo Cardano (1501-1576) y Nicolás Chuquet (1450-1500) plantearon aproximaciones a estos a través de los números racionales, utilizando las fracciones decimales y las fracciones continuas. En Europa, las fracciones decimales se usaron en la construcción de tablas para aproximar algunas raíces cuadradas y las fracciones continuas para representar los irracionales π y *e.*

En el siglo XVII, los cálculos con irracionales se hicieron más fuertes, John Wallis (1616-1703) estudiando la cuadratura del círculo llegó a una aproximación de π, pero al encontrarse con un número infinito de términos propuso a Lord Brouncker investigar sobre este tema y lo que Brouncker obtuvo fue una expresión para π en términos de una fracción continua, este trabajo dio origen a la teoría moderna de las fracciones continuas, desarrollada por Rafael Bombelli (1526-1573) como menciona el historiador Kline, teoría que se desarrollará más adelante.

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \ddots}}}}$$

Figura 2-4: Expresión en fracción continua infinita del número π hallada por Brouncker

A lo largo del siglo XVIII el concepto de número incluía ya a los números naturales, las fracciones positivas y los irracionales, sin embargo fue hasta el siglo XIX que el irracional se aceptó y definió como número gracias a los trabajos de Charles Méray (1836 d.C.), Karl Weierstrass (1815-1897), Richard Dedekind (1831-1916) y George Cantor (1845-1918).

2.4 Números Enteros

Los hindúes y los árabes fueron al parecer los primeros en trabajar con cantidades negativas, las utilizaron para representar deudas, usaron color negro para indicar deudas y rojo en caso contrario [5]. Con la aparición del álgebra, Brahmagupta en el año 628 d.C. estableció reglas para realizar operaciones con números negativos y Bhaskara mostró que todo número positivo, tiene dos raíces de índice par, una positiva y una negativa. Sin embargo en esta época los negativos no fueron realmente reconocidos como números, generalmente al solucionar ecuaciones cuadráticas se descartaba la solución negativa.

En el siglo II, en el tratado de aritmética de Diofanto, se establece la ley de signos para obtener un sistema cerrado para las cuatro operaciones del álgebra. Se plantea además que para agrupar términos semejantes en la solución de una ecuación si se pasa una cantidad de un lado a otro de una igualdad se debe cambiar su signo.

Los números negativos llegaron a Europa en el siglo XVI gracias a los libros árabes y a la obra del matemático francés Nicolas Chuquet, En el siglo XVIII fueron aceptados como números, pero fue hasta el siglo XIX que Weierstrass definió formalmente los enteros como clases de pares de números naturales mediante la relación de equivalencia:

$$(a,b)\sim(c,d) \leftrightarrow a\ +d\ = b\ +c\ \leftrightarrow a-b=c-d$$

Esto dio significado a la "diferencia" de naturales y amplió el conjunto de los racionales a positivos y negativos.

2.5 Números Reales

Hacia el siglo XIX los matemáticos se plantearon problemas que requerían de la fundamentación del sistema numérico de los reales, pues aunque el álgebra y el análisis habían alcanzado un gran desarrollo, este era insuficiente para comprender, entre otras, la teoría relacionada con: límites, el criterio de convergencia de Cauchy, ecuaciones diferenciales, discontinuidades de funciones representadas por series de Fourier etc.

A su vez la aparición de las geometrías no euclidianas requería de la fundamentación del análisis, pues la geometría había perdido su status de verdad indiscutible (Kline, p. 1293). y es por ello que la aritmética (concepto de número real) debería sustentar el análisis en forma incuestionable. Los trabajos de Carl Gauss (1777-1855), Nikolái Lobachevsky (1792-1856) y János Bolyai (1802-1860) liberaron las ideas preconcebidas que sobre la estructura del espacio se tenían desde la escuela Pitagórica y la aritmetización del análisis se logró, cuando los matemáticos comprendieron, como sugirió Hermann Hankel (1839-1873) que los números reales son "estructuras intelectuales" y no magnitudes dadas intuitivamente y heredadas de Euclides.

Finalizando este siglo, se aceptó además que se debía profundizar en la fundamentación del análisis y clarificar la estructura de todo el sistema numérico real con el fin de asegurar la estructura lógica del álgebra.

Una de las dificultades más grandes para esta formalización fue la relativa al concepto de número irracional pues la discusión generada desde el siglo XVII en donde a pesar de usar libremente estos números no se tenía certeza de si eran o no números permanecía latente a finales de siglo. A pesar de que Descartes (1596–1650) había incorporado un cambio epistemológico importante, pues presentó el segmento unidad no sólo como unidad de medida, sino como elemento neutro de la multiplicación, contribuyendo así con el reconocimiento de los números irracionales como tales (esto permitió extraer raíces cuadradas, cúbicas, etc., lo cual era imposible bajo la filosofía griega) [3].

El interés de los matemáticos se trasladó entonces a la demostración de la irracionalidad y trascendencia de algunos números. Cantor es quién en 1872 plantea la posibilidad de la numerabilidad de los números reales, pero en 1874 demostró que no era posible, pues la no numerabilidad de los reales se debe a los números trascendentes. No obstante el descubrimiento de la no numerabilidad de los números trascendentes, en contraste con la numerabilidad de los números algebraicos, se dio a la par de la necesidad de formalizar una teoría de números reales en la cual participaron matemáticos como Cauchy, Weierstrass, Dedekind, Cantor y Hilbert, a finales del siglo XIX.

Bolzano B (1781-1848) intentó en el año 1830 definir los números reales como límites de sucesiones de números racionales, pero la teoría que presentó para desarrollar esta idea paso desapercibida. Charles Meray (1835-1911) propuso una definición en su obra La petitio principii que buscó evitar el "error lógico" que cometieron varios matemáticos de la época como Cauchy, quien definió los número reales como el límite de sucesiones convergentes de números racionales, pero el concepto de límite había sido construido asumiendo la existencia de los números reales, lo que lógicamente era incorrecto [3]. Meray en su libro Nouveau consideró que el límite de una sucesión convergente determinaba o bien un número racional o un número ficticio. Estos números ficticios podían organizarse y son los que hoy conocemos como números irracionales.

Meray no fue muy preciso respecto a si su sucesión convergente representaba o no el número mismo (Boyer, p. 693). En caso de serlo, su teoría sería equivalente a la desarrollada al mismo tiempo por Weierstrass (1815-1897). Weierstrass también intento separar el análisis de la geometría y basarlo únicamente en el concepto de número. Su definición de número real también usó la noción de convergencia, aunque se dio cuenta de que era necesario dar una definición de número irracional independiente del concepto de límite, definiéndolos en forma general como conjunto de números racionales.

La construcción de los números reales realizada por Cantor (1845-1918) se dio a conocer en 1872 en un artículo escrito para Mathematische Annalen. Cantor construye los números reales a partir de los racionales, define una relación de equivalencia sobre las sucesiones de Cauchy de racionales, según la cual, dos sucesiones son equivalentes si la diferencia entre ellas es infinitesimal. El conjunto formado por las clases de equivalencia según esta relación es un campo, el campo de los números reales.

Dedekind (1831-1916) planteó un enfoque totalmente distinto, pues se centró en la diferencia entre las magnitudes geométricas continuas y los números racionales, generando así las cortaduras, que permiten definir formalmente números racionales o irracionales. Con su trabajo Dedekind logra demostrar rigurosamente teoremas fundamentales sobre límites sin recurrir a la intuición geométrica, y es aquí donde la geometría que ayudó con la idea intuitiva de continuidad es excluida de la definición formal del concepto de número real.

Algunas de estas construcciones serán mencionadas con mayor detalle en el siguiente capítulo "Aspecto disciplinar".

Presentamos para terminar este capítulo una síntesis y algunas reflexiones epistemológicas sobre la evolución de dos conceptos fundamentales para la propuesta, el descubrimiento de la irracionalidad y la construcción formal de los números reales.

2.6 Reflexión Epistemológica

Como mencionamos anteriormente, el trabajo realizado por los babilónicos y egipcios, se orientó a resolver problemas de aplicación y para ello requirieron encontrar aproximaciones racionales de algunos irracionales, pero hasta donde se puede inferir de los documentos encontrados no se detuvieron a analizar la naturaleza de estos números. Fueron los griegos, los primeros en reconocer la existencia de longitudes, que no pueden expresarse como razones de enteros, las longitudes inconmensurables (números irracionales), y en plantear una discusión teórica sobre la naturaleza de estos nuevos entes. Este descubrimiento surgió en el contexto geométrico, específicamente en el ámbito de la medida, cuando la matemática pasó de ser una ciencia pragmática a una ciencia hipotético-deductiva.

La noción de número irracional surge pues, en la edad antigua, asociada a la aproximación entre razones de tipo geométrico o numérico. Pero dado que en esta época y hasta el siglo XVI la figura geométrica es fundamental para la demostración, la demostración de la inconmensurabilidad requiere de procesos infinitos y es imposible argumentar sobre estos procesos, usando una figura, los griegos (Euclides) recurren al método de reducción al absurdo, con el fin de eludir los procesos infinitos.

En la edad media se inicia el reconocimiento de los irracionales como números, dándoles significado desde los contextos aritmético y algebraico, pero, se usan aproximaciones para representar los irracionales cuadráticos y en este contexto surge de nuevo, el problema del infinito.

En periodo del renacimiento se da significado al número irracional mediante aproximaciones sucesivas, por exceso y defecto a un racional usando fracciones decimales (Stevin), cálculo de radicales y raíces de ecuaciones. La notación decimal de los números reales proporciona un criterio para distinguir los racionales (notación decimal infinita y periódica) de los irracionales (notación decimal infinita no periódica), pero esta notación pone de manifiesto de nuevo el problema del infinito, pues un decimal infinito debe considerarse como un número y no solo como un proceso (paso del infinito potencial al infinito actual).

Finalmente en la edad moderna y contemporánea el irracional se asume como un número, asociándolo al límite de una sucesión (Meray, Weierstrass y Cantor) o como el ínfimo o supremo de un conjunto (Dedekind), este hecho permite consolidar teóricamente el concepto de número real desde la intuición geométrica pero desde la perspectiva aritmética. El máximo estatus matemático se obtiene con la formalización axiomática, caracterizando los números reales como entes abstractos que cumplen ciertas propiedades, independientes incluso de la percepción geométrica, y toma un sitio central dentro de los conceptos básicos del análisis y del álgebra.

3. Aspecto Disciplinar

Como se mencionó en el capítulo anterior, en el siglo XIX la exigencia de claridad, consistencia y rigor generó el interés por organizar lógicamente la matemáticas y salvar situaciones que se veían inconsistentes como el concepto de función, la convergencia y divergencia de series, la representación de funciones mediante series trigonométricas y las definiciones de derivada e integral. El interés por estructurar lógicamente la matemática y el surgimiento de las geometrías no euclidianas que desplazó a la geometría como fuente de validación y sustento en conceptos de cálculo llevó a fundamentar el análisis sobre bases exclusivamente aritméticas.

En este contexto surgió la discusión sobre la completez, propiedad que debería poseer un dominio numérico que permitiera fundamentar toda la teoría antes mencionada. Fueron los matemáticos Karl Weierstrass (1815-1897), Charles Méray (1835-1911), Heinrich Heine (1821-1881), George Cantor (1845-1918) y Richard Dedekind (1831-1916) quienes dedicaron sus trabajos a construir un conjunto numérico con estructura de cuerpo ordenado y completo.

Además del problema de la completitud estos matemáticos reconocieron que hasta ese momento se utilizaban propiedades de los números reales que no podían ser argumentadas o justificadas desde la aritmética, así que fundamentaron los reales a partir de los números racionales en donde dichas propiedades podían ser demostradas. Cada uno de ellos desde su construcción necesitó explicar además la continuidad de la recta.

En este capítulo se abordan inicialmente solo las construcciones realizadas por R. Dedekind y G. Cantor, pues las otras no se diferencian mucho de la de Cantor. Posteriormente con base en los libros de teoría de números de Jimenez [6] y Niven [13] se expone la teoría básica de fracciones continuas, que permite representar y construir sucesiones que convergen a números reales y finalmente, se presenta la teoría axiomática que aparece comúnmente en los textos actuales de matemáticas como el análisis matemático de Apostol [1] y el análisis clásico elemental de Marsden y Hoffman [8].

3.1 Richard Dedekind

Richard Dedekind (1831-1916) matemático alemán dedicó su trabajo en el año 1858 a los irracionales, concluyó que el concepto de límite debía darse solo aritméticamente sin referirse a la intuición (geometría), como se solía hacer, si se deseaba que realmente fuese riguroso y se garantizará la definición de la continuidad. En su obra, se pregunta en primer lugar por la continuidad de la recta, pues al igual que Galileo, Leibniz y Bolzano, creía que la continuidad significaba la existencia de al menos otro número entre dos cualesquiera, propiedad que ahora se conoce como densidad.

La construcción de Dedekind inicia con una comparación entre los números racionales y la recta geométrica, para lo cual hace una breve presentación de los números racionales reconoce, que estos son densos en la recta, pero como en la recta hay infinitos puntos que no corresponden a racionales, es necesario crear nuevos números, para que el conjunto de los números tenga las propiedades de continuidad (completitud) que posee la recta.

A partir del análisis de la diferencia entre magnitudes geométricas continuas y números racionales, Dedekind planteó que la esencia de la continuidad de un segmento no se debe a una vaga cohesión (densidad) sino a la propiedad opuesta, la división de un segmento en dos partes por un único punto del segmento.

Dedekind introdujo para su construcción la noción de cortadura, de la siguiente manera:

Una cortadura es la partición de un conjunto de números racionales en dos clases disjuntas A y B, tal que todo número de la primera clase A es menor que todo número de la segunda clase B $(si\ x \in A, y \in B \text{ entonces } x < y)$. Los subconjuntos A y B reciben el nombre de clase inferior y clase superior respectivamente. Este hecho se denota (A,B).

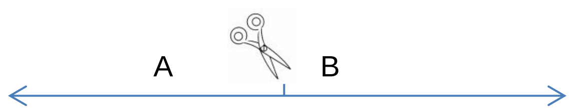


Figura 3-1: Cortadura de Dedekind

Como menciona Yu Takeuchi en su análisis matemático I [21], para una partición de este tipo, se presentan cuatro posibilidades:

1. La clase inferior tiene máximo y la superior no tiene mínimo.
2. La clase inferior tiene máximo y la superior tiene mínimo.
3. La clase inferior no tiene máximo y la superior tiene mínimo.
4. La clase inferior no tiene máximo y la clase superior no tiene mínimo.

La 2, se descarta pues contradice el hecho de que $\mathbb{Q} = A \cup B$. Veamos, si *a* es el máximo de A y *b* el mínimo de B, por definición de cortadura entonces *a*<*b* y por la densidad de los números racionales debe existir un número racional $r \in (a, b)$, tal que $r \notin A$ y $r \notin B$, pero esto contradice el hecho de que *a* es el máximo de A y *b* es el mínimo de B.

En la 1, sea $r \in \mathbb{Q}$, $A = \{x \in \mathbb{Q}: x \leq r\}$ $y\ B = \{x \in \mathbb{Q}: x > r\}$ se tiene que $A \cap B = r$, donde *r* es un número racional, el máximo del conjunto A. Y para la 3, sea $r \in \mathbb{Q}$ $A = \{x \in \mathbb{Q}: x < r\}$ $y\ B = \{x \in \mathbb{Q}: x \geq r\}$ se tiene que $A \cap B = r$, *r* número racional, el mínimo del conjunto B. En estas opciones las cortaduras se denominan racionales, por ser *r* el máximo o el mínimo de un conjunto de racionales.

Para la última opción si $r \in \mathbb{Q}$, $A = \{x \in \mathbb{Q}: x < r\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Q}: x > r\}$ se tiene que $A \cap B = \emptyset$, se dice entonces que la cortadura no es racional y está determinada por un número irracional. De esta forma cada cortadura, corresponde a un número racional o irracional determinado.

EJEMPLOS:

a. El conjunto vacío no es una cortadura.
b. El conjunto $\beta = \{x \in \mathbb{Q}: y < 0\}$ determina una cortadura y define el número racional 0.
c. Los conjuntos A= $\{x \in \mathbb{Q}: x^2 < 5\}$ y $\mathrm{B} = \{y \in \mathbb{Q}: y^2 > 5\}$ son dos clases disyuntas de racionales, en donde todo número de A es menor que todo número de B. Esta cortadura define un número que no está en A como máximo ni en B como mínimo. Esta cortadura define al número irracional $\sqrt[2]{5}$.

3.1.1 Construcción de los números reales utilizando cortaduras de Dedekind

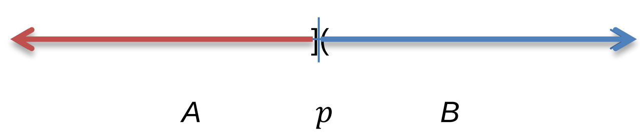
Dedekind realiza su construcción partiendo de la existencia de los números racionales, y en consecuencia dando por sentadas sus propiedades. Para definir los números reales dotó a la familia de las cortaduras con la estructura de un cuerpo ordenado y completo.

Definición 1: Un número real es, un conjunto *A* de números racionales que satisface las siguientes propiedades:

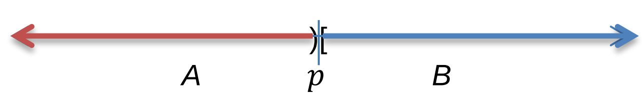
I. $A \neq \emptyset$ y $A \neq \mathbb{Q}$ (lo que significa que A es subconjunto propio de $\mathbb{Q}$)
II. Si y es un número racional con $y < x$ y $x \in A$, entonces $y \in A$.
III. Si $x \in A$, existe un $r \in A$ que satisface $r > x$ (lo que significa que A no tiene elemento máximo)

Ejemplo:

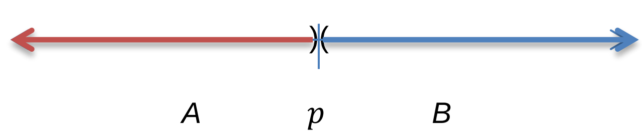
- Si x es un número racional, éste se representa como (*A*,*B*) de tal manera que: $A = \{x \in \mathbb{Q}: x \leq p\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Q}: x > p\}$



o bien $A = \{x \in \mathbb{Q}: x < p\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Q}: x \geq p\}$



- Si x es un número irracional, éste se representa como de tal manera que: $A = \{x \in \mathbb{Q}: x < p\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Q}: x > p\}$



Orden entre cortaduras

Una vez establecida la definición de número real, Dedekind compara los números racionales con los puntos de la recta, relacionando el “ser mayor o menor que” con la relación geometrica “estar a la derecha o izquierda de” y define las relaciones entre dos cortaduras a traves de las relaciones de contenencia entre las clases A y B. Utilizando las propiedades que conoce de los números racionales formula dos propiedades que los puntos de la recta deben cumplir, la propiedad transitiva y la densidad.

Definición 2: Si (A,B) y (C,D) son dos cortaduras (conforme a la definición anterior), entonces *(A,B)<(C,D)* sí y sólo si $A \subseteq C$.

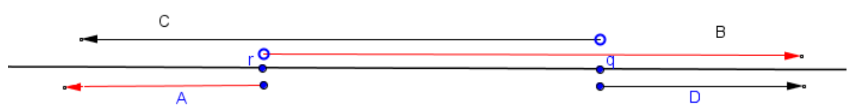


Figura 3-2: orden entre cortaduras.

Sea (A, B) la cortadura que define el número real *r* y (C, D) la cortadura que define el número real *q*; se observa en el gráfico que $A \subset C$, y esto implica que D$\subset B$. Además, si $x \in A$, existe $y \in C$ tal que $x \leq y$.

De acuerdo a la definición anterior se tiene que si (A,B) y (C,D) son dos cortaduras entonces:

- $(A,B) > (C,D)$ si y solo si $(\mathrm{C},\mathrm{D}) < (A,B)$
- $(A,B) \leq (C,D)$ si y solo si $(A,B) \subseteq (C,D)$
- $(A,B) \geq (C,D)$ si y solo si $(C,D) \subseteq (A,B)$

La relación de orden así definida satisface propiedades de tricotomía y transitividad que debe satifacer la relación de orden para los $\mathbb{R}$, pues establece el siguiente teorema:

Teorema 1: Si (A,B) y (C,D) son dos cortaduras entonces sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera:

- $(\mathrm{A},\mathrm{B}) = (\mathrm{C},\mathrm{D})$
- $(\mathrm{A},\mathrm{B}) < (\mathrm{C},\mathrm{D})$
- $(\mathrm{A},\mathrm{B}) > (\mathrm{C},\mathrm{D})$

Por la tricotomía de la relación de contenencia entre conjuntos, se da una de las siguientes opciones, para las clases A y C:

- $A = C$ todo elemento de la clase A pertenece a B y recíprocamente. Es decir las cortaduras son idénticas. $(\mathrm{A},\mathrm{B}) = (\mathrm{C},\mathrm{D})$
- Si las clases A y C no son iguales, entonces existe por lo menos un elemento que pertenece a C y no pertenece a A, o reciprocamente. De donde A $\subset C$ o C $\subset A$ de donde $(\mathrm{A},\mathrm{B}) < (\mathrm{C},\mathrm{D})$ o $(\mathrm{A},\mathrm{B}) > (\mathrm{C},\mathrm{D})$.
- Si (A,B), (C,D) y (E,F) definen tres números reales tales que $(\mathrm{A},\mathrm{B}) < (\mathrm{C},\mathrm{D})$ y (C,D) < (E,F) , se concluyen usando la propiedad transitiva de la relación de contenencia que $(\mathrm{A},\mathrm{B}) < (\mathrm{E},\mathrm{F})$, es decir la relación definida es transitiva.

Por último para establecer un orden total entre las cortaduras Dedekind define las cortaduras positivas.

Definición 3: $\mathbb{R}^+ = \{A \in \mathbb{R}: A > 0\}$. El conjunto de los números reales positivos son todos aquellos subconjuntos de $\mathbb{Q}$ que contienen a 0.

De esta definición se puede concluir que si (A,B) y (C,D) pertenecen a $\mathbb{R}^+$, entonces (A,B)+(C,D) y (A,B)·(C,D) tambien pertenecen a $\mathbb{R}^+$ ya que pueden escogerse dos racionales positivos $a \in (A,B)$ y $b \in (C,D)$ y para este par de racionales se tiene que $a + b > 0$ y que $a \cdot b > 0$

Teorema 2: Si (A,B) es un número real entonces una y sólo una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

- $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^+$
- $(\mathrm{A},\mathrm{B}) = 0$
- $-(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^+$

Definición 4: Si A es un número real, entonces se tiene que $|A| = \begin{cases} A, & A \geq 0 \\ -A, & A < 0 \end{cases}$

Definición 5: Si A y B son números reales, entonces se tiene que

- $A \cdot B = \begin{cases} 0, & \text{si } A = 0 \text{ ó } B = 0 \\ |A| \cdot |B|, & \text{si } A > 0\ y\ B > 0 \quad \text{ó} \quad A < 0\ y\ B < 0 \\ -(|A| \cdot |B|), & \text{si } A > 0\ y\ B < 0 \quad \text{ó} \quad A < 0\ y\ B > 0 \end{cases}$

Una vez establecido el orden entre los numeros reales definidos a traves de cortaduras Dedekind define las operaciones internas de adición y producto. La adición se define como $A + B = \{x + y: x \in A\ \wedge y \in B\}$ y cumple las siguientes propiedades:

P1: Clausurativa
Si A y B son números reales entonces la suma A+B es un número real.
P2:Conmutativa
Si A y B son números reales, entonces A+B=B+A.
P3: Asociativa
Si A, B y C son números reales, entonces (A+B)+C= A+(B+C).

Para la propiedad modulativa así como para la existencia de inversos aditivos se requiere definir primero el número 0.

Definición 6: El número cero se define como $(0 = \{x \in \mathbb{Q}: x < 0\})$

P4: Modulativa
Si A es un número real, se tiene que A+0=A.

Para la existencia de inversos (opuestos aditivos) se requiere de la siguiente defínción para evitar contradicciones con la definición de cortadura (el conjunto A no tiene máximo).

Definición 7: Si A es un número real, se definine $-A = \{x \in \mathbb{Q}: -x \notin A \ \wedge -x \text{ no el elemento mínimo de } \mathbb{Q} - A\}$

El conjunto $\mathbb{Q} - a = \{x \in \mathbb{Q}: x \geq a\}$ tiene como mínimo a el elemento *a*, asi que $-x \neq a$ lo que resulta en $x \neq -a$, eliminando la posibilidad de un elemento máximo.

P5: Inverso aditivo
Sea A un número real, entonces A+(-A)=0

Una vez definido el orden, Dedekind defne lo que es una cortadura positiva y es con esta noción que se inroduce la función valor absoluto como es usual y así el producto se define por casos:

- Si $A = 0$, $B = 0$ entonces $A \cdot B = 0 \ \cup \{x \cdot y : x \in A \ \wedge y \in B\}$
- Si $A = 0$, $B \leq 0$ entonces $A \cdot B = -A|B|$
- Si $A \leq 0$, $B = 0$ entonces $A \cdot B = -|A|B$
- Si $A \leq 0$, $B \leq 0$ entonces $A \cdot B = |A||B|$

Dedekind muestra que el producto cumple las siguientes propiedades:

P6: Clausurativa en $\mathbb{R}^+$
Si *A* y *B* son números reales tales que *A, B>0,* entonces *A·B* es un número real positivo.
P7:Conmutativa en $\mathbb{R}^+$
Si A y B son números reales, entonces A·B=B·A.
P8: Asociativa en $\mathbb{R}^+$
Si A, B y C son números reales, entonces (A·B) ·C= A· (B·C).

Para la propiedad modulativa se requiere definir primero la cortadura que define el número real 1.

Definición 8: El número uno se define como $1 = \{x \in \mathbb{Q}: x < 1\}$

P9: Modulativa en $\mathbb{R}^+$
Si A es un número real, entonces *A·1=A*

Para la propiedad de inverso multiplicativo se requiere la siguiente definición:

Definición 9: Si *A>0,* A^{-1} se define como: $A^{-1} = \{x \in \mathbb{Q}: x \leq 0\} \cup \left\{x \in \mathbb{Q}^+ : \frac{1}{x} \notin A \ \wedge \ \frac{1}{x} \text{ no es el elemento mínimo de } \mathbb{Q} - A\right\}$**.** En el caso que A<0, se tiene entonces que $A^{-1} = -(|A|)^{-1}$. No debe olvidarse que si *A* es un número real distinto de cero, entonces A^{-1} es tambien un número real.

P10: Inverso multiplicativo en $\mathbb{R}^+$
Si A es un número real diferente de cero, entonces *A*· A^{-1}=1
P11: Distributiva respecto a la suma en $\mathbb{R}^+$
Si A, B y C son números reales, entonces *A·(B+C)= A· B+A·C*

Para demostrar las propiedades anteriores se usan las definiciones 4 y 5.

Por útlimo Dedekind define la completitud (continuidad) en los números reales, como la propiedad característica de la línea recta al redefinir los números racionales como cortaduras y evidenciar la existencia de puntos en la recta que no corresponden a racionales, existen pues cortaduras que corresponden a números irracionales y de esta forma completa la recta.

> ***Principio de continuidad de Dedekind:*** *Si todos los puntos de la recta se descomponen en dos clases tales que todo punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un y sólo un punto que produce esta partición de todos los puntos en dos clases, este corte de la recta en dos partes. (Dedekind 1872, p. 85)*

Este principio garantiza la biyección de los puntos de la recta real con los números reales, es además este principio o teorema equivalente al principio del supremo, con el que es común formular el axioma de completitud de los números reales actualmente.

Teorema (Principio del supremo): Suponga que E es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.

a. Si es posible encontrar un número $r \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq r$ para todo $x \in E$ (es decir que E esta superiormente acotado) entonces existe $sup(E)$.
b. Si es posible encontrar un número $r \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq r$ para todo $x \in E$ (es decir que E esta inferiormente acotado) entonces existe $inf(E)$.

Con este teorema se garantiza la existencia de una mínima cota superior para cualquier conjunto de número reales acotado superiormente, y se establece que esa mínima cota es un número real.

3.2 George Cantor

George Cantor (1845-1918) matemático, físico y filósofo alemán dedicó parte de sus trabajos a las series trigonométricas, pues uno de los problemas importantes durante la segunda mitad del siglo XIX consistía en establecer la unicidad del desarrollo trigonométrico de algunas series. El problema anterior motivó a Cantor a construir una teoría sólida para los números reales que publicó en 1872 y le permitió fundamentar los resultados a los que había llegado en los trabajos sobre series.

Cantor al igual que Dedekind construyó los números reales a partir de los números racionales pero uso sucesiones fundamentales (Sucesiones de la forma $\{a_n\}$ que verifican $\lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n+r}) = 0$ para un número *r* cualquiera).

3.2.1 Sucesiones fundamentales y números reales

Cantor parte del hecho que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo ordenado no completo, lo que significa que existen sucesiones de racionales, cuyos términos se aproximan entre si tanto como sea posible pero no convergen a un número racional. Construye un nuevo conjunto $\mathbb{Q}^*$ adjuntando a $\mathbb{Q}$ todos los límites de sucesiones fundamentales. ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}^*$ es un cuerpo ordenado y completo).

Para ello define y caracteriza las sucesiones fundamentales. Veamos a continuación el planteamiento.

Definición 1: Una sucesión se dice que satisface el criterio de Cauchy si y solo si $\forall\varepsilon \in \mathbb{Q}^{+}, \exists N \in \mathbb{N}, (n, m > N \rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon)$

Ejemplo:

La sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ satisface el criterio de Cauchy, pues para $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. En consecuencia $|a_n - a_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

De acuerdo a este criterio aun cuando una sucesión de puntos racionales pueda converger hacia un valor no racional, este último no requiere hacerse explícito, ya que las definiciones dadas dependen, de las propiedades de cuerpo y orden de los números racionales.

Teorema 1: Toda sucesión $\{a_n\}$ de números racionales convergente satisface el criterio de Cauchy.

De este teorema se desprende la propiedad de completitud, ya que las sucesiones que cumplen con este criterio hacen parte de un cuerpo ordenado y arquimediano.

Definición 2: Una sucesión $\{a_n\}$ de racionales se denomina fundamental (o regular) si y solo si verifica el criterio de Cauchy.

Las sucesiones fundamentales se clasifican en nulas, positivas o negativas.

Definición 3: Una sucesión $\{a_n\}$ de racionales se dice elemental o nula (si converge a cero) si cumple: $\forall\varepsilon \in \mathbb{Q}^{+}, \exists N \in \mathbb{N}, (n > N \rightarrow |a_n| < \varepsilon)$

Ejemplo:

La sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ es nula en $\mathbb{Q}$, pues para cada 0$< \varepsilon$ solo es necesario tomar $\frac{1}{v} < \varepsilon$, para que sea $\frac{1}{n} < \varepsilon$ para todo $n \geq v$

Como los números reales se van a construir a partir de las sucesiones fundamentales y es posible que dos sucesiones de racionales converjan al mismo número es preciso definir una relación de equivalencia que permita resolver el problema de las sucesiones no elementales o nulas que no poseen inversa.

Definición 4: Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de sucesiones fundamentales. Dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son equivalentes si y solo si la sucesión $\{a_n - b_n\}$ es una sucesión nula. Esto se denota: $\{a_n\} \sim\{b_n\}$

Ejemplo:

Las sucesiones $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ y $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ Son equivalentes ya que $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$

La relación así definida es de equivalencia, es decir es reflexiva, simétrica y transitiva.

Esta relación define una partición de $\mathcal{S}$ en clases de equivalencia. El conjunto cociente, es decir el conjunto formado por todas las clases de equivalencia $\left(\frac{\mathcal{S}}{\sim}\right)$, es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.

La clase de equivalencia de una sucesión $\{a_n\}$ se designa como $[\{a_n\}]$, y corresponde a:

$$[\{a_n\}] = \big\{\{x_n\} \in \mathcal{S}: \{x_n\} \sim \{a_n\}\big\}.$$

Para determinar $\mathbb{R}^+$ se define un subconjunto de $(\mathcal{S}/\sim)$

Definición 5: $[\{a_n\}]$ es un número positivo si y solo si $[\{a_n\}] \in \mathbb{R}$ y $\exists q \in \mathbb{Q}^+, \exists N \in \mathbb{N}, (n > N \rightarrow a_n > q)$

Esta definición establece que un número real es positivo si y solo si sus términos a partir de cierto N, están acotados inferiormente por un racional positivo. Y de ella se deduce que:

Teorema 2: Si $[\{a_n\}]$ es un número real entonces una y sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera:

- $[\{a_n\}] \in \mathbb{R}^+$
- $[\{a_n\}] = 0$
- $-[\{a_n\}] \in \mathbb{R}^+$

Para definir el orden sobre el conjunto de clases de equivalencia, Cantor compara dos sucesiones, comparando sus límites. Compara el límite de una sucesión dada con un número racional arbitrario a y de dicha comparación resultan tres casos mutuamente excluyentes; a = b, a < b o a > b.

Dados los números reales $[\{a_n\}]$ y $[\{b_n\}]$ define:

- $[\{a_n\}] < [\{b_n\}]$ sí y sólo sí $[\{b_n\}] + (-[\{a_n\}]) \in \mathbb{R}^+$
- $[\{a_n\}] > [\{b_n\}]$ sí y sólo sí $[\{b_n\}] < [\{a_n\}]$
- $[\{a_n\}] \in \mathbb{R}^+$ sí y sólo sí $[\{a_n\}] > 0$
- $(-[\{a_n\}]) \in \mathbb{R}^+$ sí y sólo sí $[\{a_n\}] < 0$
- $[\{a_n\}] \leq [\{b_n\}]$ sí y sólo sí $[\{a_n\}] < [\{b_n\}]$ ó $[\{a_n\}] = [\{b_n\}]$
- $[\{a_n\}] \geq [\{b_n\}]$ sí y sólo sí $[\{b_n\}] \leq [\{a_n\}]$

A continuación define la adición y el producto, y demuestra que con estas operaciones el conjunto $\left(\frac{\mathcal{S}}{\sim}\right)$, de los reales, tiene estructura de cuerpo.

La adición se define simplemente a partir de la adición de sucesiones y dado que la suma de sucesiones fundamentales es una sucesión fundamental, la adición así definida es una ley de composición interna sobre este conjunto.

Es decir:
$([\{a_n\}] + [\{b_n\}]) = [\{a_n + b_n\}] = [\{s_n\}]$ con $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones fundamentales.

Esta operación satisface las siguientes propiedades:

A1: Clausurativa
Si $[\{a_n\}]$ y $[\{b_n\}]$ son reales cualesquiera (elementos de $\left(\frac{\mathcal{S}}{\sim}\right)$) entonces $([\{a_n\}] + [\{b_n\}]) = [\{a_n + b_n\}]$ es un real (elemento de $\left(\frac{\mathcal{S}}{\sim}\right)$) .
A2: Conmutativa
Si $[\{a_n\}]$y $[\{b_n\}]$ son números reales, entonces $[\{a_n\}] + [\{b_n\}] = [\{b_n\}] + [\{a_n\}]$
A3: Asociativa
Si $[\{a_n\}]$, $[\{b_n\}]$ y $[\{c_n\}]$ son números reales, entonces $([\{a_n\}] + [\{b_n\}]) + [\{c_n\}] = [\{a_n\}] + ([\{b_n\}] + [\{c_n\}])$

Para enunciar la propiedad modulativa se requiere definir el cero 0,módulo, como la clase de equivalencia de la sucesión $\{0\}$

A4: Modulativa
Si $[\{a_n\}]$ es un número real, se tiene que $[\{a_n\}]$+0=$[\{a_n\}]$.

Para referirse a la existencia de inversos (opuestos aditivos) se requiere de la siguiente definición.

Definición 6: Si $[\{a_n\}]$ es un número real, se definine $-[\{a_n\}] = [\{-a_n\}]$, donde $[\{-a_n\}]$ es la clase de una suceción fundamental

A5: Inverso aditivo
Sea $[\{a_n\}]$ un número real, entonces $[\{a_n\}]$ +(-$[\{a_n\}]$)=0

La multiplicación de reales (clases) se define a partir del producto de sucesiones $\{p_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$ dado que el producto de sucesiones fundamentales es una sucesión fundamental.

$$([\{a_n\}] \cdot [\{b_n\}]) = [\{a_n \cdot b_n\}] = [\{p_n\}]$$

La multiplicación así definida satisface las siguientes propiedades:

A6. Clausurativa
Si $[\{a_n\}]$ y $[\{b_n\}]$ son reales cualesquiera (elementos de $\left(\frac{\mathcal{S}}{\sim}\right)$) entonces $([\{a_n\}] \cdot [\{b_n\}]) = [\{a_n \cdot b_n\}]$ es un real (elemento de $\left(\frac{\mathcal{S}}{\sim}\right)$) .
A7. Conmutativa
Si $[\{a_n\}]$ y $[\{b_n\}]$ son números reales, entonces $[\{a_n\}] \cdot [\{b_n\}] = [\{b_n\}] \cdot [\{a_n\}]$
A8. Asociativa
Si $[\{a_n\}]$, $[\{b_n\}]$ y $[\{c_n\}]$ son números reales, entonces $([\{a_n\}] \cdot [\{b_n\}]) \cdot [\{c_n\}] = [\{a_n\}] \cdot ([\{b_n\}] \cdot [\{c_n\}])$

Para enunciar la propiedad modulativa se requiere definir el número uno como la clase de equivalencia de la sucesión constante $\{1\}$

A9. Modulativa:
Si $[\{a_n\}]$ es un número real, entonces $[\{a_n\}] \cdot 1 = [\{a_n\}]$

Para caracterizar inversos multiplicativos se requiere la siguiente definición.

Definición 7: La sucesión fundamental $\{d_n\}$ recibe el nombre de inversa multiplicativa de la sucesión $\{a_n\}$ no nula ($|a_n| > q$ para $n < N$) si:

$$\{d_n\} = \begin{cases} 0, & n < N \\ \dfrac{1}{a_n}, & n \geq N \end{cases}$$

Y esta sucesión se denota como $\{a_n\}^{-1}$

A10: Inverso multiplicativo
Sea $\{a_n\}$ una sucesión fundamental no nula y $\{d_n\}$ su inverso multiplicativo, entonces:

- $\{d_n\}$ es fundamental
- Si $\{x_n\} \in [\{a_n\}]$, $\{y_n\} = \{x_n\}^{-1}$, entonces $\{y_n - d_n\} \in [\{0\}]$

A11: Distributiva del producto respecto a la suma:
Si $[\{a_n\}]$, $[\{b_n\}]$ y $[\{c_n\}]$ son números reales, entonces
$([\{a_n\}] \cdot [\{b_n\}]) + [\{c_n\}] = [\{a_n\}] \cdot ([\{b_n\}] + [\{a_n\}] \cdot [\{c_n\}])$

Finalmente Cantor establece que $\left(\frac{\mathcal{S}}{\sim}\right) = \mathbb{Q}^* = \mathbb{R}$, y $\mathbb{R}$ es un cuerpo completo, es decir que toda sucesión fundamental en $\mathbb{R}$ tiene límite en $\mathbb{R}$. Cantor demuestra esta propiedad (completitud) afirmando que una sucesión fundamental $\{A_n\}$ de números reales (racionales o irracionales) cumple el criterio de Cauchy, lo que significa que es convergente en los números reales.

3.3 Fracciones Continuas

Las construcciones de los números reales propuestas en el siglo XIX surgieron por la necesidad de formalizar conceptos, procedimientos matemáticos y métodos de representación que sustentaban algunas técnicas operatorias.

La idea de número como colección de unidades, impidió por varios años la aceptación del "uno" como número y la existencia de una teoria formal para el tratamiento de las fracciones y los radicales. Con el paso de los años, el arduo trabajo y discusión de varios matemáticos, en particular los trabajos desarrollados por Stevin proporcionaron un algortimo de cálculo para las fracciones y los radicales, con la ayuda de la representación decimal. Es esta representación la que inicia la marcada diferencia entre las expresiones decimales infinitas para los radicales y las expresiones finitas o periodicas de las fracciones (actualmente racionales e irracionales).

3.3.1 Aproximación a los números reales a través de las fracciones continuas

Recalde y Vargas mencionan en uno de sus artículos [14] que varios historiadores coinciden en afirmar que Euler no tuvo preocupación por construir el conjunto numérico de los reales al estilo de Cantor o Dedekind, sin embargo, la organización de sus resultados desde una perspectiva moderna permite visualizar una construcción implícita de los números reales. En su trabajo caracterizó y clasificó las fracciones continuas, diferenciando las representaciones de los racionales y los irracionales.

Definición 1: Una fracción continua finita de orden *n* es una expresión de la forma:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

En donde, cada a_k es un número real tal que $a_0 \geq 0,\ \ a_k > 0 \text{ para } k \geq 1$.

Los números $a_0\,, a_1\,, a_2\,, \ldots, a_n$ reciben el nombre de cocientes parciales, si estos son enteros positivos excepto tal vez a_0, la fracción continua se llama *fracción continua simple*. Otra notación para la expresión anterior es $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$, notación que economiza escritura.

Definición 2: Una fracción continua infinita es una expresión de la forma:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}}$$

En donde, cada a_n es un número entero positivo, excepto tal vez a_0. Usando la notación por economía se tiene $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$

Los teoremas que se presentan a continuación muestran algunos de los resultados a los que llegó Euler. En sus trabajos no prueba que una fracción continua infinita represente un número irracional, es decir, no prueba la convergencia de la fracción continua, pero esto se expone en el teorema seis que se encuentra más adelante.

Teorema 1: Toda fracción continua simple y finita es equivalente a un número racional.

Teorema 2: Todo número racional se puede expresar en forma de fracción continua simple y finita.

Ejemplo: El número $\frac{-63}{11}$ se expresa como fracción continua simple así,

$$\begin{gathered} -63 = 11 \cdot (-6) + 3 \\ 11 = 3 \cdot 3 + 2 \\ 3 = 2 \cdot 1 + 1 \\ 2 = 1 \cdot 2 + 0 \end{gathered}$$

Luego,

$$\frac{-63}{11} = -6 + \frac{3}{11} = -6 + \frac{1}{\frac{11}{3}} = -6 + \frac{1}{3 + \frac{2}{3}} = -6 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = -6 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

$$= -6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = [-6,3,1,1,1]$$

La unicidad de la representación de un número racional en forma de fracción continua simple y finita, es un punto clave, pues es posible que dos expresiones diferentes representen el mismo número racional. Por ejemplo el racional $\frac{a}{b}$ se puede representar como $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ y esta representación es equivalente a $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n - 1,1]$ si $a_n > 1$ o si $a_n = 1$ también se obtiene como expresión equivalente a $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1} + 1]$

Teorema 3: Si un número racional $\frac{a}{b}$ tiene dos expresiones en forma de fracción continua simple y finita dadas por $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ y $[b_0; b_1, b_2, \dots, b_m]$ con $a_j > 1$ y $b_k > 1$ para $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq m$, entonces *n*=*m* y $a_i = b_i$ para $1 \leq j \leq n$.

Para la prueba de convergencia de una fracción continua se requiere de la siguiente definición y de los siguientes teoremas.

Definición 3: Dada una fracción continua se definen sus convergentes, como los números racionales $\frac{p_n}{q_n}$, de la siguiente forma**:**

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

$\frac{p_0}{q_0} = a_0$, $\quad \frac{p_1}{q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}$, $\quad \frac{p_2}{q_2} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$, …., $\quad \frac{p_k}{q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$

La sucesión de convergentes $\left\{\frac{p_k}{q_k}\right\} = \{c_k\}$ puede ser finita o infinita, dependiendo del tipo de fracción continua**.** Los convergentes de una fracción continua se pueden obtener con la siguiente ley de recurrencia:

Teorema 4: La convergente c_k, con $0 \leq k \leq n$, de la fracción continua simple finita $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ está dada por la expresión: $c_k = \frac{p_k}{q_k}$, $0 \leq k \leq n$. Donde p_k y q_k se definen por recurrencia como:

$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \text{para } 2 \leq k \leq n$ y $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \text{para } 2 \leq k \leq n$

Haciendo uso de el teorema 3 Euler muestra que cada número real positivo α se puede describir como una sucesión de racionales que converge al número, $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{p_k}{q_k}$.

Teorema 5: Sea $\{a_k\}_0^\infty = \{a_0; a_1, a_2, \dots\}$ una sucesión infinita de enteros positivos, excepto tal vez a_0. Se definen por recurrencia las siguientes sucesiones:

$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \text{para } 2 \leq k$ y $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \text{para } 2 \leq k$

Ahora, dado que $\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}$ se tiene que

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_0}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} = a_0 + \frac{1}{q_0 q_1}$$

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} = a_0 + \frac{1}{q_0 q_1} - \frac{1}{q_1 q_2}$$

Así,

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{q_{m-1} q_m}$$

Retomando que: $\alpha = \{a_0; a_1, a_2, \dots\} = \lim_{n\to\infty} \{a_0; a_1, a_2, \dots, a_n\} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_k}{q_k}$

$$\alpha = \{a_0; a_1, a_2, \dots\} = a_0 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{q_{m-1} q_m}$$

Esta serie converge, pues $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_k q_{k-1}} = 0$, dado que $q_k \geq 2^{\frac{n-2}{2}}$ lo cual se demuestra por inducción sobre *n*, dado que $q_{k+1} = q_{k+1} q_k + q_{k-1}$. Así cada fracción continua converge a un número real α.

Teorema 6: Si por $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ es una fracción continua simple infinita y $c_k = \frac{p_k}{q_k}$ es su n-esima convergente, entonces existe un número real x tal que $x = \lim_{n\to\infty} c_k$

El número real x del teorema anterior es un número irracional, así todo número irracional se puede expresar de manera única como una fracción continua simple infinita. Pues si x un número irracional, este número se puede expresar de la forma

$x = a_1 + \frac{1}{x_1}$ con $a_1 = [x]$ y $0 < \frac{1}{x_1} < 1$. Como x es irracional se tiene que x_1 es irracional y como $0 < \frac{1}{x_1} < 1$ se tiene que $x_1 > 1$. Entonces x_1 se puede expresar de la forma $x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2}$ donde $a_2 = [x_1]$ y $0 < \frac{1}{x_2} < 1$. En forma recursiva $x_i = a_{i+1} + \frac{1}{x_{i+1}}$

donde $a_{i+1} = [x_i]$ es un número entero positivo y x_{i+1} es un número irracional mayor que 1. Su representación sería única y es x=$[a_0; a_1, a_2, \dots]$

Ejemplo: el número $\sqrt[2]{2}$ se expresa como fracción continua simple infinita así, Como $1 < \sqrt[2]{2} < 2$, entonces la parte entera de este irracional es: $[\sqrt[2]{2}] = 1$ y por tanto,

$$\sqrt[2]{2} = 1 + (\sqrt[2]{2} - 1) = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{(\sqrt[2]{2}-1)}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{(\sqrt[2]{2}-1)} \cdot \cfrac{(\sqrt[2]{2}-1)}{(\sqrt[2]{2}-1)}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{(\sqrt[2]{2}-1)}{1}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{(\sqrt[2]{2}-1)}{1} \cdot \cfrac{(\sqrt[2]{2}+1)}{(\sqrt[2]{2}+1)}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{(\sqrt[2]{2}+1)}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{1 + (\sqrt[2]{2}-1) + 1}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{(\sqrt[2]{2}+1)}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{(\sqrt[2]{2}+1)}}}$$

$$\sqrt[2]{2} = [1,2,2,2,2,2\ldots]$$

- **Axiomas de cuerpo**

El teorema anterior permite relacionar las representaciones de números reales a través de fracciones continuas con las sucesiones fundamentales. Las operaciones de adición y multiplicación en el conjunto de las fracciones continuas se definen de acuerdo a las operaciones con sucesiones fundamentales y por tanto cumplen las mismas propiedades algebraicas.

- **Axiomas de orden**

Dadas las fracciones continuas

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}} \quad y \quad \beta = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{b_4 + \ddots}}}}$$

- Si $a_0 \neq b_0$ entonces $\alpha > \beta$ si $a_0 > b_0$
- Si $a_0 = b_0$ entonces $\alpha > \beta$ si $a_1 < b_1$
- Si $a_0 = b_0$ y $a_1 = b_1$ entonces $\alpha > \beta$ si $a_2 > b_2$

En general si $a_i = b_i$, para todo $n \leq i$ entonces $\alpha > \beta$ si $a_{n+1} > b_{n+1}$ donde i es número impar. Si i es un número par entonces $\alpha > \beta$ si $a_{n+1} < b_{n+1}$

3.4 Definición axiomática de los números reales

Sea $\mathbb{R}$ un conjunto no vacío, sobre el cual se definen dos operaciones: adición y multiplicación así:

Para cualesquiera *x* e *y* en $\mathbb{R}$,

$$+ : \mathbb{R} \text{ X } \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \to x + y$$

Para cualesquiera *x* e *y* en $\mathbb{R}$,

$$\cdot : \mathbb{R} \text{ X } \mathbb{R} \cdot\!\to \mathbb{R}, (x, y) \to x \cdot y$$

Que satisfacen los siguientes axiomas:

- **Axiomas de cuerpo** (estructura algebraica)

A1. Asociativa:
$x + (y + z) = (x + y) + z,\ \forall x, y,\ z \in \mathbb{R}$.
A2. Conmutativa:
$x + y = y + x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$
A3. Elemento neutro:
Existe 0 un número real llamado cero tal que: $x + 0 = 0 + x, \forall x \in \mathbb{R}$
A4. Elemento opuesto:
Para cualquier número real x existe otro número real x', llamado elemento opuesto, tal que: $x + x' = x' + x = 0$

Con la adición, $(\mathbb{R}, +)$ tiene estructura de grupo conmutativo o abeliano

A5. Asociativa:
$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.
A6. Conmutativa:
$x \cdot y = y \cdot x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$
A7. Elemento neutro:
Existe 1 un número real llamado uno, distinto de cero, tal que: $x \cdot 1 = x, \forall x \in \mathbb{R}$
A8. Elemento inverso:
Para cualquier número real $x \neq 0$ existe otro número real $y \in \mathbb{R}$, llamado inverso de x , tal que: $x \cdot y = 1$
A9. Distributiva de la multiplicación respecto a la adición:
$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Con la multiplicación el conjunto $(\mathbb{R}, \cdot)$ es grupo conmutativo. Y el conjunto $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ que satisface los axiomas A1 a A9 tiene estructura de cuerpo conmutativo.

- **Axiomas de orden**

Para enunciar los axiomas de orden se requiere definir el conjunto de los reales positivos.

Definición 1: Sea $\mathbb{R}^+$ un subconjunto de $\mathbb{R}$, llamado conjunto de números positivos, que satisface los axiomas:

A10. Las operaciones de adición y multiplicación son de composición interna en $\mathbb{R}^+$, es decir $x + y \in \mathbb{R}^+$ y $x \cdot y \in \mathbb{R}^+,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^+$
A11. Para todo número real x, sola una de las siguientes proposiciones es verdadera: $x \in \mathbb{R}^+,\ -x \in \mathbb{R}^+$ ó $x = 0$

Este conjunto de axiomas permite definir una relación de orden sobre $\mathbb{R}$ por medio de una relación denotada por los símbolos “<” y “>”

Definición 2: Si $x, y \in \mathbb{R}$,

I. $x < y$ si y solo si $y - x \in \mathbb{R}^{+}$
II. $x > 0$ si y solo si $\mathrm{x} - y \in \mathbb{R}^{+}$

Con esta relación de orden que es reflexiva ($\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$), antisimétrica ($\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$) y transitiva ($x, y, z \in \mathbb{R}, si\ x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$) se satisfacen en $\mathbb{R}$ los axiomas:

A12. La relación es de orden es total. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, se cumple solo una de las siguientes relaciones: $x < y$, ó, $x > y$ ó $x = y$.
A13. La relación de orden es compatible con la suma. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$.
A14. La relación de orden es compatible con el producto. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leq y,\ z \geq 0 \Longrightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$.

Con los axiomas A1 a A14 $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ tiene estructura de cuerpo conmutativo ordenado.

- **Axioma de completitud** (todo conjunto no vacío de números reales posee cota superior mínima)

Para establecer el axioma de completitud de los números reales se definen cota superior e inferior, máximo y mínimo. Supremo e ínfimo.

Definición 3: Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, se dice que el elemento α es una cota superior del conjunto A, si satisface: $x \leq \alpha, \forall x \in A$. Al conjunto de cotas superiores de A lo llamaremos $M(A)$. Análogamente se define el conjunto de cotas inferiores.

Definición 4: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Se dice que $\alpha \in \mathbb{R}$ es el máximo del conjunto A, $\alpha = máx(A)$, Si se cumple que α es una cota superior de A y además $\alpha \in A$. Análogamente se define el mínimo de un conjunto.

Definición 5: Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$. Si el conjunto A está acotado superiormente, se llama supremo del conjunto A, $sup(A)$, Al mínimo (si existe) del conjunto de las cotas superiores de A. $sup(A) := mín\ (M(A))$. En forma Análoga se define el ínfimo de un conjunto.

A13. Axioma del supremo, de completitud o de continuidad. Todo conjunto de números reales, no vacío y acotado superiormente, tiene supremo.

Este axioma junto con los anteriores, permite caracterizar de forma única el conjunto de los números reales.

A manera de reflexión

Las construcciones mencionadas en la primera parte de este capítulo (Dedekind y Cantor) naturalmente no se introducen, ni se sugiere introducirlas, en los niveles de la educación media, por la complejidad de los elementos teóricos que involucran, pues como menciona Kline (1972) los números irracionales definidos lógicamente son monstruos intelectuales, y justifica por qué los griegos y muchas generaciones posteriores encontraron estos números difíciles de entender; pero su análisis, en particular lo relacionado con las cortaduras, podrían sugerir al docente aproximaciones intuitivas a las propiedades de densidad, continuidad y completez [17].

De otra parte si es corriente, incluso desde la básica secundaria, introducir los números reales a partir del enunciado del conjunto de axiomas, como se comentó en otro aparte de este trabajo, presentación que para estudiantes de este nivel no tiene significado alguno, pues no tienen trabajo anterior con sistemas axiomáticos (la geometría Euclidiana está ausente) y especialmente porque no han explorado a fondo las diferentes formas de representación de los números reales: recta real, expansión decimal, exploración que justamente se enfatiza en la unidad didáctica.

Con respecto a las fracciones continúas aunque no con la formalidad que se trabajaron en este capítulo, se pueden introducir en la educación media para evidenciar, en el caso de los racionales, que aplicando el algoritmo de la división es posible encontrar otra forma de representación y que distinguiendo (diferenciando) la parte entera y la decimal de un número real podemos construir aproximaciones que posiblemente tengan mayor significado para un alumno de este nivel [14].

4. Aspecto Didáctico

Para comunicar una idea requerimos usar lenguaje oral, gráfico, gestual, simbólico, u otros. En matemáticas aparte de los diferentes tipos de lenguaje existen variedad de formas de representación y notaciones, un mismo concepto se puede representar de diversas formas. Las representaciones son herramientas que permiten a las personas interactuar con el conocimiento matemático y asignar significados a los conceptos y estructuras matemáticas.

Cada representación evidencia y destaca particularidades de un concepto o estructura matemática, permite trabajar algunas de sus propiedades y favorece su comprensión. Aunque en ocasiones no sean evidentes, las diferentes representaciones están interconectadas, así unas sean más usadas que otras ninguna de ellas agota el concepto o estructura, la comprensión se enriquece por la conexión entre ellas. A continuación se expondrán algunas de las dificultades que surgen al intentar comprender los números reales y como el uso de distintas representaciones nos permitió fundamentar y estructurar la unidad didáctica.

4.1 Obstáculos en la comprensión de los números reales

Se han podido evidenciar a través de las investigaciones de García [4], Rico [15], Romero [16] y tesis doctoral de Scalia [19] diferentes tipos de obstáculos que inciden en la comprensión del concepto de número real: didácticos (los relacionados con las actividades de aprendizaje que se seleccionan, naturaleza de los currículos, decisiones del sistema educativo, etc.), ontogénicos (relativos a las capacidades cognitivas de los estudiantes) y epistemológicos (relacionados con la naturaleza misma del concepto). Se describen a continuación algunos obstáculos que se originan en las prácticas curriculares, la naturaleza misma del concepto y las capacidades de los estudiantes.

En los Estándares Básicos de competencias [11], se propone introducir los números reales (los irracionales), en grado octavo, en los grados anteriores desde la básica primaria se han construido los sistemas numéricos previos (Naturales, Enteros y Racionales) y de octavo a once se trabajarían según el documento, con mayor sistematicidad los reales. Para el grado undécimo, se plantea: “Analizar representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales”, “Reconocer la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos”, “Comparar y contrastar las propiedades de los números (enteros, racionales, reales) sus relaciones y operaciones (sistemas numéricos)” y "Establecer relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada" (MEN, 2003).

Sin embargo, la forma como se presenta en el aula y en los textos el concepto de número real y sus operaciones, no interpreta el planteamiento de los estándares, sino que enfatiza en la estructura algebraica, sus símbolos y sus operaciones, es decir se privilegia la presentación de este concepto desde su versión más abstracta, dándole prelación a la notación simbólica, al lenguaje basado en la teoría de conjuntos, las propiedades analíticas de los números reales y la presentación axiomática del álgebra. Esta presentación impide que los estudiantes den significado al concepto, no permite que usen comprensivamente sus diferentes formas de representación; el estudiante se limita usualmente a memorizar definiciones y propiedades sin comprenderlas, hecho que le dificultará su trabajo en álgebra, la representación y análisis de funciones y en general con todos los temas del cálculo diferencial.

Reforzando los planteamientos del párrafo anterior, investigaciones en educación matemática mencionan que para el estudiante de estos niveles es imposible comprender las características, procesos y conceptos que están inmersos en la estructura lógica de los números reales definidos axiomáticamente. Autores como Romero y Rico (Representación y comprensión del concepto de número real, 1999) plantearon los tres momentos en los que se enfatizó en el capítulo número dos, como cruciales en la construcción de los números reales, pues develan como los procesos infinitos se eludieron desde el descubrimiento de la irracionalidad hasta el momento en que se relacionó el número real con el continuo numérico.

El desarrollo y evolución del concepto, los obstáculos que se presentaron y las diferentes construcciones de los números reales que se describieron en capítulos anteriores muestran la complejidad del concepto por requerir, entre otros, de la comprensión del infinito, cada nuevo intento por definir, caracterizar o manipular los números reales evidencian simples actualizaciones de la concepción que de este se tenía en un momento determinado, y un proceso similar deberá ocurrir en el aula.

De otra parte en el caso específico de los estudiantes de grado undécimo del colegio Angloamericano, el trabajo en la asignatura de cálculo inicia con los números reales, vistos desde su estructura algebraica como usualmente se presenta en los libros de texto. Además como la construcción (introducción) de estos números se inició en grado octavo se dedican solo dos horas para el trabajo con el tema, se presentan como un conjunto numérico que cumple ciertas propiedades algebraicas y de orden, necesarias para realizar operaciones, pero no se indaga por las nociones, ideas o concepciones que poseen los estudiantes.

Las dificultades u obstáculos que de lo anterior se derivan aparecen al trabajar con límites de funciones, y proponer el análisis de aproximaciones sucesivas para trazar la gráfica y determinar tendencias. Solo evalúan la función en números enteros y no reconocen valores racionales muy próximos a un número dado y desde luego tampoco valores irracionales. Expresiones como 0,2222…. no son reconocidas como números, no pueden además ordenar números que tienen una expresión decimal infinita. Estas dificultades motivaron precisamente el presente trabajo.

Utilizando como punto de referencia los estudios realizados por Romero y Rico (Representación y comprensión del concepto de número real, 1999) sobre como las diferentes representaciones y la conexión entre estas favorece la comprensión de los números reales. Pero ¿Qué significa comprender en matemáticas?, Hiebert y Carpenter (1992) plantean en el artículo, Aprendizaje y enseñanza con comprensión que:

"las matemáticas son comprendidas si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de comprensión viene determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido a fondo si se liga a redes existentes con conexiones más numerosas o más fuertes" (pág. 67).

Esto significa que cuando se piensa en un objeto o concepto matemático que se desea comprender, las representaciones de este objeto o concepto son fundamentales. Toda representación se presenta en dos formas, una interna y otra externa, un concepto se representa mentalmente de tal forma que se pueda operar con él (forma interna) y posteriormente se comunica (forma externa) haciendo uso de diferentes tipos de lenguaje, símbolos y otros. Estos dos tipos de representación están ligados, pues las representaciones mentales se efectúan como interiorización de las representaciones externas y, viceversa, las representaciones externas son el medio con el que se exteriorizan representaciones mentales.

De lo anterior es fácil deducir que las representaciones forman parte de un sistema. En matemáticas, este sistema corresponde a los llamados sistemas simbólicos que poseen sus propios elementos semánticos y sintácticos. De esta manera, si los estudiantes conocen diferentes tipos de representación de los números reales y las traducciones entre estas, esto favorecerá su comprensión.

Justamente como punto de partida de este trabajo se elaboró y aplicó una prueba diagnóstica para indagar por las representaciones externas de los números reales que manejan los estudiantes con el fin de conocer las representaciones internas que poseen, representaciones que pueden ser: digitales (discretas, de carácter alfanumérico) o analógicas (continuas, de tipo gráfico).

Las representaciones simbólicas en matemáticas son de tipo digital y las más usuales aparecen en los contextos aritmético y algebraico. En cuanto a las analógicas, en matemáticas, están fundamentalmente las visuales, representaciones geométricas y gráficas. A continuación se describen diferentes tipos de representaciones simbólicas de los números reales discutidas en los trabajos de Rico y Romero (Representación y comprensión del concepto de número real, 1999) y se complementa con aportes de Sierpinska (1994), Kaput (1992) y Duval (1993) respecto al papel de las representaciones a la comprensión del concepto.

4.2 Representaciones simbólicas de números reales

Las representaciones simbólicas de los números reales son: el sistema de notación decimal y la notación operatoria.

4.2.1 Sistema de notación decimal

Este sistema también llamado sistema decimal, es un sistema de numeración aditivo y posicional en el que los números se representan utilizando potencias de diez. En los niveles de la educación básica usualmente el estudiante descompone números naturales usando el sistema decimal pero no se enfatiza en la expansión decimal. En el grado sexto se introduce esta representación para los enteros y en séptimo para las fracciones, y es aquí donde los estudiantes se encuentran por primera vez con dos tipos de números, los que poseen un número finito de cifras decimales y los que se expresan con un número infinito pero periódico de cifras. Aunque la justificación formal de la equivalencia entre la fracción inicial y su expresión decimal infinita no se da a los estudiantes (series de potencias), estos pasan de procesos finitos a infinitos, o viceversa, al determinar la fracción que corresponde a una expresión decimal finita o infinita periódica. Posteriormente aparecen las expresiones decimales, infinitas no periódicas, asociadas a los números irracionales.

De esta manera el sistema decimal se convierte en un sistema integrador de las notaciones o representaciones simbólicas, pues toda notación decimal finita, periódica, o no periódica representa un número real y cada número real se puede expresar mediante una notación decimal.

Así que, aunque este sistema se muestra muy potente en cuanto al simbolismo de la notación decimal para los números reales, pone al mismo tiempo de manifiesto la gran complejidad y sofisticación que acompañan la aparente sencilla notación decimal (toda sucesión infinita de números reales creciente y acotada superiormente por cierto número A, tiene como límite un número real $\mathrm{a} < \mathrm{A}$).

4.2.2 Notación operatoria

Conocida como notación habitual de los números reales por indicar una operación que permite obtener su representación decimal, por ejemplo: la notación fraccionaria como una división indicada, la notación habitual de los irracionales cuadráticos ($\sqrt[2]{2}$) obtenida al solucionar una ecuación y la notación de irracionales conocidos como $\pi \ y \ e$ que surgen en contextos geométricos de medida.

Esta notación operatoria junto con el sistema decimal se convierten en un buen camino para trabajar los decimales infinitos no periódicos sin las teorías formales que los sustentan, pues enriquece el trabajo con el sistema de los números reales por el uso de sus propiedades algebraicas (estructura de cuerpo).

4.3 Representaciones geométricas de números reales

4.3.1 La recta real

La recta real es un gráfico unidimensional de una línea recta en la que haciendo uso de unas marcas (puntos) se representan geométricamente los números reales. Esta representación tiene características propias que le permiten reconocerla como el segundo instrumento integrador fundamental para el estudio de los números reales, pues además de que permite realizar una representación geométrica, favorece la interpretación de operaciones como la adición y sustracción.

Esta recta se construye eligiendo de manera arbitraria un punto de una línea recta que será el punto origen y representa el número cero, a partir del origen se selecciona un punto a la derecha a una distancia adecuada y a este punto se le asocia el entero 1, con el fin de establecer una escala numérica (unidad de medida). El orden entre los puntos de la recta corresponde al orden usual entre los números, de tal forma que los puntos a la derecha del cero son positivos y a la izquierda son negativos. De esta manera, el modelo de la recta real permite asignar a cada marca en la recta un número real y a cada número real una marca en dicha recta y además permite visualizar el continuo lineal sin necesidad de formalizar demasiado ni complejizar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En su proceso de formación los estudiantes trabajan este modelo desde los inicios cuando se introduce la recta numérica para representar los naturales, pero la intención en las actividades de la unidad didáctica que se describe posteriormente es usarlo para enfatizar en la correspondencia biyectiva que se puede establecer entre los puntos de la recta y los números reales. Esta última representación ayudará a dar significado intuitivo a las propiedades de orden y densidad de los números reales.

4.4 Conexiones entre los sistemas de representación

Como se comentó anteriormente la sicología cognitiva plantea que existe una conexión entre las representaciones externas e internas, las internas se relacionan entre sí, las externas influyen en las internas y viceversa y la interpretación que un estudiante da a una representación externa dice como la representa internamente, se puede deducir que una única forma de representación es insuficiente para abordar la complejidad de un concepto, en particular el número real. Es por ello que en la propuesta didáctica se privilegia el trabajo con los diferentes sistemas de representación de los números reales para enriquecer la comprensión de este concepto.

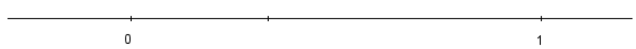
Así, para favorecer la comprensión del concepto de número real se pretende con las actividades propuestas en la unidad didáctica favorecer el dominio de cada una de las representaciones y el número de conexiones entre ellas que un estudiante puede dar al concepto en cuestión, para ello didácticamente se proponen actividades que establecen conexiones entre el sistema de notación decimal, la notación operatoria y la recta, pues como mencionan los didactas Janvier, 1987; Sfart, 1991; Duval,1993; Hiebert y Carpenter, 1992; Castro, 1994; González, 1995 las diferentes transformaciones dentro de los sistemas y las traducciones entre ellos enriquecen el concepto a trabajar.

4.5 Análisis de prueba diagnóstica

Se diseñó una prueba diagnóstica sobre algunos tópicos relativos a la comprensión del concepto de número real, sus formas de representación y estructura. Esta prueba se aplicó a 20 estudiantes de grado undécimo del colegio Angloamericano, antes de iniciar la unidad número 2 del programa de cálculo, donde se parte justamente de la fundamentación del sistema de los números reales.

El objetivo de esta prueba era identificar e interpretar cualitativamente las dificultades y errores asociados a la comprensión de los números reales, para su construcción se revisaron investigaciones realizadas por Rico y Romero (Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas, 1999). Su análisis sirvió de fundamento para estructurar la secuencia didáctica.

El instrumento consta de 10 preguntas abiertas. A continuación se categorizan las preguntas y se describen y analizan las respuestas dadas por los estudiantes.

PREGUNTAS	CATEGORÍA
Pregunta 1: Represente en la recta numérica el número racional $\frac{3}{7}$. Describa el procedimiento usado. **Pregunta 4:** Determine qué número corresponde al punto señalado en la recta numérica  Describa el procedimiento usado para identificar el número.	I. Correspondencia entre números reales y puntos de la recta.
Pregunta 2: En el ejercicio anterior determinó un segmento de longitud $\frac{3}{7}$, señálelo. ¿Puede ubicar el punto medio de este segmento? , si su respuesta es afirmativa, ¿qué número racional le corresponde a este punto?. Describa el procedimiento a seguir. **Pregunta 3:** Repita el ejercicio anterior con el segmento que determinó en 2. ¿Qué concluye? ¿Podría continuar indefinidamente este proceso?. Explique su respuesta **Pregunta 9:** ¿Cuántos números hay entre 0,3 y 0,4? Explique su respuesta **Pregunta 10:** Escriba un número positivo que sea muy próximo a cero, ¿es posible mencionar otros aún más próximos?, ¿cuáles?, ¿qué concluye? **Pregunta 6:** Ubique en la recta numérica los números reales del ejercicio 5 Describa el/los procedimientos usados:	II. Procesos infinitos y densidad de la recta real.
Pregunta 5: 6,252525…. y $\sqrt{5}$ son dos números reales. ¿Son los dos números racionales? Explique claramente su respuesta. **Pregunta 8:** El número 3,010110111011110111111… ¿es racional o irracional?, justifique su respuesta.	III. Reconocimiento de racionales e irracionales, diferenciación.

Pregunta 7: María asegura que un número real se puede representar de muchas formas, ¿está de acuerdo? Si es afirmativa su respuesta represente de diferentes formas los números: 6 y $\frac{5}{4}$	IV. Reconocimiento y aplicación de formas diferentes de representar un número real

Tabla 4-1: Preguntas de prueba diagnóstica por categorías

- **Categoría I**

En la pregunta 1, el 70% de los estudiantes dividieron el segmento comprendido entre 0 y 1 en siete partes iguales (congruentes) y tomaron tres como indicaba el numerador de la fracción, cinco estudiantes utilizaron la calculadora y con su expresión decimal realizaron la ubicación aproximada, dos de los cinco estudiantes mencionados anteriormente describieron los procedimientos realizados pero no ubicaron correctamente el punto y un estudiante utilizó simplemente el hecho de que el racional 3/7 está entre 0 y 1 y lo ubicó aproximadamente.

En la pregunta 4, el 75% de los estudiantes dividieron el segmento comprendido entre 0 y 1 en tres partes haciendo uso de la marca dada y concluyeron que el punto marcado correspondía al racional 1/3, dos estudiantes comentaron que se trataba de un número menor a ½ y que era aproximadamente 0.4, uno de los veinte estudiantes dividió el segmento en tres partes pero mencionó que el segmento quedaba dividido en cuatro y que la marca correspondía a ¼, un estudiante del 75% utilizó además la regla para determinar el número que representaba la marca y otro estudiante dividió la unidad en ocho partes y determinó que el racional representado era 3/8 .

- **Categoría II**

En cuanto a las preguntas dos y tres, exceptuando un estudiante que afirmó no comprender la pregunta los restantes respondieron que si se podía determinar el punto medio del segmento dado. En cuanto a la ubicación del número que representa el punto medio y la descripción del procedimiento se encontró lo siguiente: doce de los 19 estudiantes para dar respuesta a la pregunta multiplicaron la fracción dada por ½ o lo que es equivalente dividieron esta fracción entre dos, encontraron el número racional 3/14 pero no lo ubicaron de manera exacta en la recta, mencionaron además que si se aplicaba este proceso en forma repetitiva se determinaría el punto medio de cualquier segmento, pero que como este iba a ser cada vez de menor longitud dicha fracción no se podría ubicar en la recta.

Tres estudiantes utilizaron la calculadora para determinar el número racional y lo ubicaron en la recta utilizando esta aproximación. Con respecto a los otros estudiantes, tres se equivocaron al multiplicar o dividir la fracción y un estudiante multiplicó la fracción por dos en su calculadora y luego al dar su respuesta mencionó que debía utilizar una potencia de diez para expresar la representación decimal en una fracción y así poder ubicarla en la recta.

Frente a la pregunta seis, ocho estudiantes utilizaron la calculadora para obtener una aproximación a raíz de cinco y con estas dos aproximaciones decimales ubicaron los reales dados; cinco estudiantes usaron el hecho de que 6,252525…. > $\sqrt{5}$ para ubicar aproximadamente los puntos que corresponden a los números reales dados; seis estudiantes no contestaron la pregunta. Es de resaltar que 5 de los 14 estudiantes que dieron respuesta al ejercicio no eligieron una escala en la recta para realizar la ubicación.

En cuanto a las preguntas nueve y diez, la totalidad de los estudiantes respondieron que existen infinitos números reales con las condiciones dadas. Para justificar sus respuestas a la pregunta nueve ilustraron con varios ejemplos, pero respecto a la pregunta diez fueron pocos los dados para dar sus justificaciones.

- **Categoría III**

Respecto a la pregunta cinco, dos estudiantes diferenciaron correctamente el número racional del irracional pero no justificaron sus respuestas; cuatro estudiantes clasificaron en forma correcta y además utilizaron la expresión decimal y periodicidad de ésta para realizar sus justificaciones; tres estudiantes clasificaron correctamente los números reales, argumentaron que el primer número es finito mientras que el segundo es no periódico. Un estudiante no clasifica los números dados, menciona que son reales por que se pueden expresar en forma decimal; cinco estudiantes mencionan que los dos números son irracionales porque su expresión decimal es infinita y además el segundo corresponde a una raíz inexacta; tres estudiantes afirman que los dos números son racionales porque se pueden expresar como decimales y los dos estudiantes restantes expresaron que los dos números son racionales porque los irracionales se expresan utilizando letras como π y φ.

En cuanto a la pregunta ocho, ocho estudiantes clasificaron el número real dado como irracional y utilizaron como argumento su no periodicidad; cinco lo reconocieron como irracional por ser infinito; tres lo categorizaron como racional por ser un decimal; tres no contestaron la pregunta, uno lo clasificó como racional y justificó mencionando que este número es infinito periódico, por último un estudiante mencionó que la clasificación dependía de si el número era finito o infinito.

- **Categoría IV**

El 95% de los estudiantes respondieron en forma afirmativa, el 5% restante no contestó la pregunta. Para representar el número entero usaron especialmente fracciones equivalentes, tres estudiantes descompusieron el número utilizando operaciones básicas. Y para representar la fracción utilizaron fracciones equivalentes o expresión decimal.

Teniendo en cuenta las respuestas, justificaciones y argumentos presentados por los estudiantes de este grupo, se concluye que en general conocen algunos conceptos previos a las temáticas propuestas para el curso de cálculo, pero, evidencian algunas dificultades que se describen a continuación:

- Aunque son conscientes de la correspondencia biyectiva que se puede establecer entre los puntos de la recta y los números reales no tienen claro como representar en la recta algunos números irracionales (los cuadráticos por ejemplo) y acuden a aproximaciones, esto sugiere que no han logrado dar significado a estos números.
- Reconocen que las expresiones decimales son otra forma de representar las fracciones, pero no reconocen la existencia de expresiones decimales que no representen números racionales.

- Para dar significado a expresiones como $\sqrt{5}$ utilizan la calculadora, pero no entienden que obtienen simplemente una aproximación, posiblemente, porqué la idea de número está asociada exclusivamente a la noción de cantidad y una expresión decimal finita (que presenta la calculadora) es más intuitiva y se puede redondear a un entero, esto le confiere significado.
- Intuyen la existencia de infinitos números en un intervalo, son conscientes de la densidad de los racionales, pero no de la incompletitud de este conjunto.
- Las fracciones y los decimales son las representaciones más usadas y aceptadas por los estudiantes, pero no reconocen, como se comentó anteriormente, posiblemente porque no comprenden el significado de la expansión decimal, finita o infinita periódica o no periódica, que una aproximación decimal a esta expansión no es el número mismo.

En el siguiente capítulo se presenta una unidad didáctica que busca dar elementos que permitan avanzar en la comprensión de los conceptos y propiedades de los números reales, a los que se hace referencia en el análisis de la prueba, pues con el enfoque exclusivamente axiomático que se ha utilizado hasta el momento en la institución, los estudiantes no han logrado aún, dar significado (intuitivo) a éstos, a pesar de cursar el último grado de la secundaria.

5. Unidad Didáctica

La visión acerca de la naturaleza de la matemática y de la matemática escolar ha cambiado con el tiempo, hoy se resalta su importancia e impacto social. Se reconoce hoy la matemática como una actividad humana, que hace parte de una cultura y es una herramienta para comprender el mundo. Lo anterior exige a las instituciones educativas y a los docentes, entre otros, promover la construcción social de significados, tener en cuenta la diversidad e interculturalidad y formar ciudadanos competentes en el ejercicio de sus derechos y deberes.

Esta nueva visión exige cambios, reorganizaciones, redefiniciones y reestructuración del proceso de enseñanza- aprendizaje de las matemáticas y en este sentido los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN 1998) [10] reafirman lo expresado en el párrafo inicial y plantean algunos elementos que permitirán generar y orientar estos cambios, ellos son:

- El conocimiento matemático es una creación humana, el resultado de una evolución histórica, un proceso cultural en permanente desarrollo.
- El aprendizaje de la matemática requiere de interacción social y de procesos constructivos.
- Los conceptos, relaciones y estructuras de la matemática son una herramienta poderosa para el desarrollo de habilidades de pensamiento y se pueden formar a través de ellos competencias científicas, tecnológicas, lingüísticas y ciudadanas.
- Las nuevas tecnologías (calculadoras científicas, software educativo especializado, laboratorios virtuales, etc...) son de gran impacto en el procesos de enseñanza y aprendizaje.
- Se debe privilegiar como contexto para la enseñanza y aprendizaje, el hacer matemáticas a partir de situaciones problémicas.

Teniendo en cuenta las nuevas perspectivas antes mencionadas, que se caracterizan ampliamente en los documentos de Lineamientos y Estándares básicos de matemáticas y el análisis histórico, epistemológico y didáctico que aparece en los capítulos I, II y III; análisis que permitió reconocer las dificultades y rupturas que se dieron en el proceso de construcción del concepto de número real, avanzar en la comprensión de los problemas que presentan los estudiantes cuando abordan este concepto (evidenciados además en la prueba) e identificar posibles estrategias y aproximaciones informales; se construyó la Unidad Didáctica para los estudiantes de grado undécimo que se presenta en este capítulo, cuyo objetivo central es dar significado al concepto de número real, sus representaciones y propiedades (densidad y continuidad).

Antes de describir la unidad didáctica se hace una breve caracterización de la institución educativa en la que se implementará.

5.1 Caracterización de la institución

El Colegio Anglo Americano es una institución de educación formal, de carácter privado y está situada en la localidad de Usaquén; es mixta y cuenta con aproximadamente 2900 estudiantes de estratos tres y cuatro. Presta sus servicios educativos desde nivel prescolar hasta grado undécimo.

Como visión la institución busca la excelencia educativa, da importancia a la formación de valores y al nivel académico con especial énfasis en el idioma Inglés.

Desde la experiencia como docente de la institución, los estudiantes de grado undécimo han evidenciado dificultades al efectuar cálculos con números reales, determinar límites haciendo uso de tablas (método intuitivo) o de la gráfica de una función. Ha sido difícil que los estudiantes comprendan que se están tomando valores muy cercanos a un punto dado y que el límite (si existe) es el valor en Y al que se están acercando. Evidencian, además problemas relacionados con orden entre números decimales. Es por ello, que la unidad didáctica enfatiza en la comprensión de las propiedades fundamentales del sistema numérico real.

5.2 Descripción de la Unidad Didáctica

La unidad que se presenta parte de las ideas, representaciones y propiedades de los números reales que poseen los estudiantes de grado undécimo, que inician su trabajo con el cálculo diferencial. Requiere además de algunos conocimientos previos relativos a los sistemas numéricos y sus operaciones (Naturales, enteros, racionales), nociones básicas sobre construcciones con regla y compas y uso del software GeoGebra.

Esta unidad está conformada por una secuencia de cuatro actividades, la primera y segunda aborda un trabajo con los números racionales, la tercera con los números irracionales y la cuarta con los números reales. Se enfatiza en ellas en el uso de diferentes representaciones, en el paso de una a otra forma de representación y en el análisis de las propiedades de densidad y completitud de los números reales.

5.2.1 Objetivo general

Los estándares propuestos por el MEN (2003) para el grupo de grado décimo y once en lo que concierne al Pensamiento Numérico son los siguientes:

- Analizar representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales.
- Reconocer la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos
- Establecer relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada”

Analizando estos estándares y teniendo en cuenta las reflexiones presentadas en capítulos anteriores se plantea como objetivo general de la unidad didáctica:

- **Dar significado al concepto de número real y reconocer propiedades de densidad y completez a través del análisis de diferentes representaciones.**

5.2.2 Objetivos específicos

- Representar números racionales en la recta numérica.
- Reconocer que a cada número racional le corresponde un punto en la recta.
- Identificar que siempre es posible encontrar un número racional entre dos números racionales dados.
- Determinar expresión decimal que representa una fracción y viceversa.
- Identificar e interpretar el desarrollo en fracción continua de algunos números racionales.
- Representar números irracionales en la recta numérica.
- Identificar e interpretar el desarrollo en fracción continuada de algunos números irracionales.
- Reconocer y diferenciar los números racionales e irracionales desde diferentes representaciones.
- Reconocer las propiedades de densidad y completitud de los números reales.

5.2.3 Contenidos de aprendizaje

- **Conceptuales**

  - Representación de números reales en la recta real.
  - Orden en los reales.
  - Expansión decimal y fraccionaria de números racionales
  - Fracciones continuas.
  - Números racionales e irracionales-clasificación.
  - Expansión decimal y fracción continua de algunos números irracionales.
  - Aproximaciones por exceso y por defecto de números reales.
  - Propiedades de completitud y densidad de los números reales.

- **Procedimentales**

  - Ubicación de números reales en la recta real mediante sucesiones y aproximaciones decimales.
  - Ordenamiento de números reales.
  - Representación de números racionales a través de expresiones decimales, fraccionarias y en fracciones continuas.
  - Representación de números irracionales a través de expresiones decimales.
  - Aproximación de números reales mediante expresiones decimales finitas o fracciones continuas.
  - Determinación y ubicación de racionales e irracionales en un intervalo dado.

- **Actitudinales**

  - Aprendizaje autónomo, responsable y reflexivo (fortalezas y dificultades)
  - Trabajo en equipo y participación activa en las discusiones.
  - Respeto por la opinión de sus compañeros y la participación de los mismos en discusiones.

5.2.4 Recursos y materiales

Entre los materiales y recursos se emplearán en la U.D:

- Instrumentos de trazo (regla, compás y lápiz)
- Calculadoras científicas
- Sala de cómputo (software GeoGebra).

5.2.5 Metodología

Cada actividad debe ser mediada por el docente, los estudiantes realizarán una lectura introductoria y/o verán un video sobre la temática a abordar en cada secuencia, posteriormente desarrollaran las actividades propuestas, algunas se proponen para desarrollar en forma individual y otras en grupos de trabajo, se propone además la socialización de las estrategias de solución y por supuesto las respuestas dadas, esto con el fin de contrastar, aclarar y precisar los conceptos básicos con la guía del profesor.

En cada secuencia se parte del análisis de una lectura relacionada con la pregunta o situación que generó o ayudo a la evolución del concepto de número real y sus propiedades. Se propone además el uso de la calculadora para realizar aproximaciones de números racionales e irracionales y usar el software GeoGebra con el fin de apoyar las construcciones con regla y compás.

5.2.6 Evaluación

La evaluación será constante, el papel del docente es fundamental, pues debe valorar cada solución, estrategia, interpretación e interacción con los instrumentos, recursos y materiales dada a cada una de las actividades propuestas en cada secuencia. El acompañamiento permanente del docente a sus estudiantes a través de preguntas promoverá la elaboración de conjeturas, propiciará la discusión de argumentos y justificaciones dadas.

Así mismo se sugiere al docente recoger un amplio número de evidencias del desempeño de los estudiantes, obtenidas de diferentes fuentes, distintas situaciones, momentos y aplicar la prueba de salida propuesta, pues estos elementos ayudarán a dirigir las discusiones, tomar decisiones, reflexionar, planificar y/o proponer mejoras o anexos a las actividades propuestas.

Para evaluar las actividades desarrolladas por los estudiantes se deberá tener en cuenta los siguientes lineamientos establecidos por el MEN (2003)[11],

<table>
<tr>
<td rowspan="3">Pensamiento numérico y sistemas numéricos
Analizar representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales.
Reconocer la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos.
Comparar y contrastar las propiedades de los números (enteros, racionales, reales) sus relaciones y operaciones (sistemas numéricos).
Establecer relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.</td>
<td>Pensamiento espacial y sistemas geométricos
Usar argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.</td>
</tr>
<tr>
<td>Pensamiento métrico y sistemas de medidas
Justificar resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.</td>
</tr>
<tr>
<td>Pensamiento variacional y sistemas algebraicos analíticos
Utilizar las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.</td>
</tr>
</table>

Tabla 5-1: Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

5.3 Secuencia de actividades

5.3.1 Actividad No.1: “Números Racionales”

Objetivos:

- Representar números racionales en la recta numérica.
- Reconocer que a cada número racional le corresponde un punto en la recta.
- Identificar que siempre es posible encontrar un número racional entre dos números racionales dados.

I. Realice la lectura y comente con sus compañeros

“**Las magnitudes conmensurables y los números racionales**”.

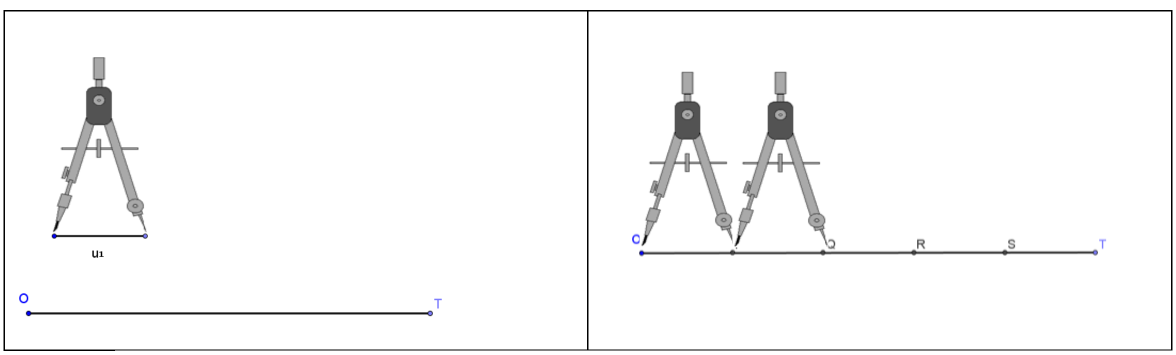
Para medir se requiere comparar. Dadas dos magnitudes, una de ellas, se selecciona como unidad de referencia (patrón) y se determina cuantas veces está contenida en la otra. Para los pitagóricos la unidad de referencia debía caber un número exacto de veces en cada una de las magnitudes que se estaban comparando. A la relación entre las dos magnitudes se le asignaba la razón entre los números encontrados y se denominaban magnitudes conmensurables aquellas para las cuales existe una medida común (unidad de medida), en caso contrario se llamaban inconmensurables. Por ejemplo, a la relación entre los segmentos AB y CD o a la relación entre el lado del cuadrado y el radio de la circunferencia se asociaban razones entre números.

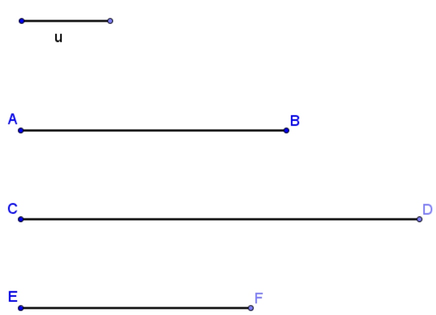
El origen de los números racionales está en la razón entre números que se asignan a las magnitudes conmensurables; los antiguos nunca le dieron a esas razones el estatus de números pero si los usaron como tales en sus aplicaciones.

Tomado y adaptado de: El origen de los Números y de los sistemas de numeración. Clara Helena Sánchez

Desarrolle ahora las siguientes actividades.

1. Determine la medida de los segmentos AB, CD y EF que se presentan a continuación, utilizando como unidad de medida (patrón) el segmento de longitud u. **Sugerencia: Tome la medida de u con un compás y trasládela sobre cada uno de los segmentos. Observe el ejemplo.**





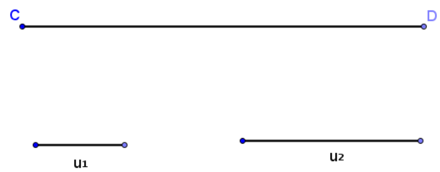
El segmento AB contiene ____ veces al segmento de longitud u, por tanto mide ____u

El segmento CD contiene ____ veces al segmento de longitud u, por tanto mide ____u

El segmento EF contiene ____ veces al segmento de longitud u, por tanto mide ____ u

2. Compare las medidas de los segmentos AB, CD y EF. ¿Son estos segmentos conmensurables? Explique claramente

3. Determine ahora la medida del segmento CD utilizando como unidad de medida (patrón) el segmento de longitud: u_1 y u_2



- CD=___ u_1
- CD=___ u_2

 a. Usted midió el segmento CD con las unidades u, u_1 y u_2, ¿Qué concluye acerca de la medida del segmento CD?

 b. ¿Puede establecer una relación entre u, u_1 y u_2?

1. ¿Es posible trazar (o dibujar) un segmento de longitud $\frac{3}{8}u$? Si su respuesta es afirmativa, trácelo y describa el procedimiento que utilizó.

2. Las longitudes de dos segmentos LM y NO están en razón 2 a 3. ¿Puede usted dibujar dos segmentos que cumplan esta condición?

3. ¿Puede usted determinar exactamente la longitud de cualquier segmento? si su respuesta es afirmativa dé ejemplos y describa el procedimiento usado.

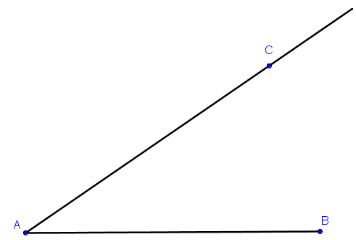
II. Realice la lectura y comente con sus compañeros

Para representar una fracción propia (un número racional positivo menor que 1) en la recta numérica dividimos el segmento (de medida unidad) con extremos en los puntos que corresponden a los enteros 0 y 1, en tantas partes iguales (segmentos congruentes) como indique el denominador de la fracción y contamos a partir de 0 el número de partes que indique el numerador. Si la fracción es impropia (un número racional mayor que 1) esta se expresa como la suma de un número natural más una fracción para ubicar el intervalo en que está comprendida y luego se procede como en el caso anterior. Y si el racional es negativo se realiza un procedimiento similar, pero a la izquierda del origen.

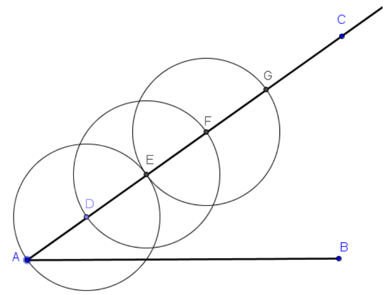
Sin embargo en la mayoría de los casos es muy difícil dividir la unidad en partes iguales utilizando un instrumento (regla o escuadra) o una cuadrícula. Un teorema muy importante de la geometría, el teorema de Thales, nos permite realizar esta división de manera exacta y correcta. Observe el ejemplo,

Dividir el segmento AB en 4 partes iguales

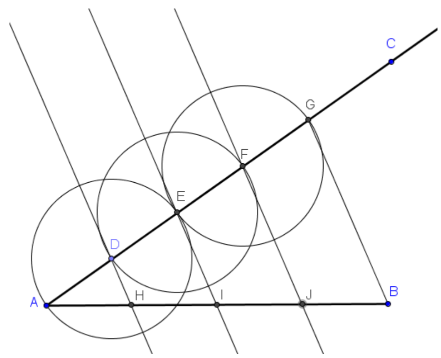
1. Dado el segmento AB, por uno de sus extremos (digamos A) se traza una semirrecta AC cualquiera.



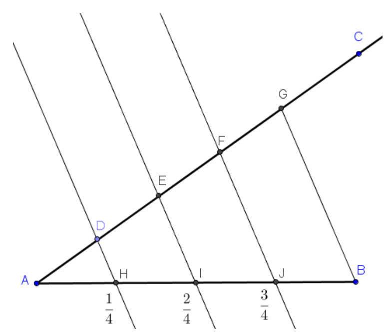
2. Sobre la semirrecta AC, a partir del punto A y con el compás se determinan cuatro segmentos congruentes. Se determinan los puntos D, E, F y G.



3. Se traza el segmento que une el punto G con A. Luego se trazan rectas paralelas a al segmento GB que pasen por los puntos F, E y D. Estas rectas determinan los puntos H, I y J en el segmento AB.

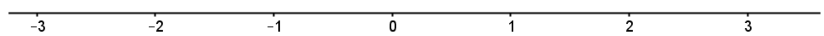


4. Por el teorema de Thales, los cuatro segmentos determinados sobre el segmento AB son congruentes (tienen la misma medida). Si al punto A le hacemos corresponder, el entero 0 y al punto B el entero 1, los puntos determinados sobre el segmento AB corresponden entonces a los racionales $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}$ y $\frac{3}{4}$.



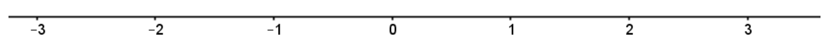
   a. Utilice el procedimiento anterior para dividir el segmento AB que se muestra a continuación en siete partes congruentes y señale los racionales que representan cada uno de los puntos que se determinan, cuando le asociamos al punto A el entero 0 y a B el entero 1.

b. Represente los racionales $\frac{4}{3}$ $y -\frac{1}{2}$ en la siguiente recta numérica y describa el procedimiento que realizó.



c. En la recta numérica que se presenta a continuación se señalaron los puntos A, B, C y D. Identifique los números racionales que corresponden a estos puntos. (Sugerencia: utilice el teorema de Thales)

d. Determine en cada caso el racional que cumple la condición dada y represéntelo en la recta numérica.
   a. mayor que 4 y menor que 5.
   b. mayor que $\frac{4}{3}$ y menor que 2.
   c. mayor que $-\frac{3}{5}$ y menor que $-\frac{4}{5}$.
   d. mayor que $-\frac{1}{2}$ y menor que $\frac{1}{2}$.



e. ¿Es posible encontrar otros racionales que cumplen cada una de las condiciones dadas? ¿cuántos? Explique su respuesta.

CONCLUSIONES:

- A cada número racional le corresponde un único punto en la recta numérica.
- Entre dos números racionales siempre es posible determinar otro número racional.

5.3.2 Actividad No.2: “Del decimal a la fracción y de la fracción al decimal”

Objetivos:

- Determinar expresión decimal que representa una fracción y viceversa.
- Identificar e interpretar el desarrollo en fracción continua de algunos números racionales.

I. Realice la lectura y comente con sus compañeros.

“Números decimales”

En el siglo XVI d.C., los matemáticos europeos comenzaron a notar la facilidad con la cual se efectuaban los cálculos con números fraccionarios cuyos denominadores fueran potencias de 10. Por ejemplo:

$$\frac{3}{100};\quad \frac{25}{10.000};\quad \frac{748}{10};\quad \text{etc.}$$

Naturalmente, para sumar las fracciones anteriores basta con tomar
10.000 como denominador común y se obtiene

$$\frac{300}{10.000} + \frac{25}{10.000} + \frac{748.000}{10.000} = \frac{748.325}{10.000}$$

Este tipo de fracción se llama fracción decimal.
Un ingeniero y matemático holandés llamado Simón Stevin inventó en el S. XVI un método para hacer cálculos con fracciones decimales sin usar el denominador. Para el ejemplo anterior, escribía

$\frac{3}{100}$	como	$\overset{\boxed{2}}{3}$
$\frac{25}{10.000}$	como	$\overset{\boxed{3}}{2}\quad\overset{\boxed{4}}{5}$
$\frac{748}{10}$	como	$7\quad 4\quad \overset{\boxed{1}}{8}$

Al sumar estos números, obtenía

$$\overset{\boxed{2}}{3} + \overset{\boxed{3}}{2}\ \overset{\boxed{4}}{5} + 7\ 4\ \overset{\boxed{1}}{8} = 7\ 4\ \overset{\boxed{1}}{8}\ .\ \overset{\boxed{2}}{3}\ \overset{\boxed{3}}{2}\ \overset{\boxed{4}}{5}$$

Aunque su método no llegó a usarse mucho, su idea fue tomada por un gran matemático escocés, Napier, quien desarrolló, a partir de la proposición de Stevin, otra manera de escribir las fracciones decimales.
Al principio, colocó una línea debajo de los dígitos del numerador, de esta manera:

$$\frac{25}{10} = 2\underline{5},\quad \frac{3}{100} = \underline{03};\quad \frac{324}{100} = 3\underline{24}$$

Finalmente, ya en 1617, Napier propuso el uso de una coma o un punto para separar la parte entera de la parte decimal:

$$\frac{25}{10} = 2\underline{5} = 2,5 \qquad\qquad \frac{324}{100} = 3\underline{24} = 3,24$$

Esta última idea de Napier fue la que se adoptó definitivamente para escribir los que hoy se llaman números decimales.

Tomado de: http://www.rena.edu.ve/TerceraEtapa/Matematica/TEMA17/NumerosDecimales.html

Analice y desarrolle las siguientes actividades:

1. La expresión decimal del número racional $\frac{3}{4}$ es 0.75, ¿está usted de acuerdo? Justifique su respuesta.

2. Encuentre la expresión decimal de los siguientes números racionales.

$\frac{5}{2} =$ $\frac{20}{3} =$ $\frac{6}{8} =$ $\frac{-13}{20} =$

3. En los ejercicios anteriores usted pudo observar que la expresión decimal de un número racional puede ser, finita o infinita periódica. Dé 3 ejemplos (diferentes a los anteriores) de números racionales que tengan expresión decimal finita y 3 que tengan expresión decimal infinita periódica.

Cuando se conoce la expresión decimal de un número racional es posible determinar la fracción. En unos casos resulta sencillo como en el siguiente ejemplo:

$$0.25 = \frac{25}{100} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Pero cuando la expresión decimal es periódica no es tan inmediato encontrar el número racional al que corresponde.

Observe el procedimiento que se utiliza en el siguiente ejemplo para determinar la fracción que corresponde a la expresión decimal $0.\overline{3}$.

Paso 1: Llamamos x a la expresión $0.\overline{3}$

$x = 0.\overline{3}$ lo que es equivalente a:

$$x = \underbrace{0.3333333\ldots\ldots}$$

(infinitas cifras decimales-cifra periódica: 3)

Paso 2: Se multiplica por $10^1 = 10$ cada miembro de la igualdad. (El exponente corresponde al número de cifras del periodo)

$$x = 0.3333333\ldots\ldots$$
$$10 \times x = 10 \times 0.3333333\ldots\ldots = 3.333333\ldots\ldots$$

Paso 3: Se halla la diferencia entre la expresión obtenida en el paso 2 y la expresión del paso 1.

$$\begin{aligned} 10x &= 3.3333333\ldots\ldots \\ -\,x &= 0.3333333\ldots\ldots \\ \hline 9x &= 3 \end{aligned}$$

Paso 4: Se despeja *x* y se obtiene la fracción buscada.

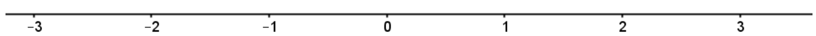
$$9x = 3$$
$$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

4. Verifique que $\frac{1}{3} = 0.\overline{3} = 0.33333 \ldots\ldots$ usando el algoritmo de la división.
5. Determine la fracción que corresponde a las siguientes expresiones decimales:
   $2.\overline{3}$ $\quad$ $0.\overline{15}$ $\quad$ $1.8\overline{3}$

CONCLUSIÓN:

Todo número racional tiene una expresión decimal y a toda expresión decimal: finita o infinita periódica le corresponde un número racional.

6. a) Determine ahora un racional que sea mayor que $1.\overline{5}$ y menor que 1.56. Represéntelo en la recta numérica.



6. b) ¿Es posible encontrar otros números racionales que cumplan la condición dada en a? ¿cuántos? Explique su respuesta

II. **Otra forma de representar los números racionales son las Fracciones Continuas**. Esta forma de representación se originó en la antigua Grecia. El primero en estudiar este tipo de fracciones fue Euclides quien vivió en el siglo III a.c en Alejandría. Veamos en que consiste esta representación,

El número racional $\frac{7}{5}$ se puede expresar así:

$$\begin{array}{r|l} 7 & 5 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

$$\frac{7}{5} = \underbrace{1}_{\text{Parte entera}} + \underbrace{\frac{2}{5}}_{\text{Parte decimal}}$$

A su vez la parte decimal de este número es equivalente a:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores se obtiene la expresión continua que representa al número:

$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$$

1. Encuentre en cada caso la fracción continua que representa al número racional. Recuerde que para las expresiones decimales debe identificar previamente la fracción.
    a. $\frac{2}{5}$
    b. $\frac{8}{21}$
    c. 0.45
    d. $3.\overline{2}$

2. Para las siguientes fracciones continuas determine el número racional que representan y ubique estos números en la recta numérica.

a. $3+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}$ b. $-3+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$ c. $2+\frac{1}{1+\frac{1}{7}}$

Observe ahora la fracción continua que representa el número racional

$$\frac{59}{11}=5+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}},$$

Con la fracción continua podemos encontrar números menores o mayores que el número dado, pero muy próximos (cercanos) a él. Observe:

$$5=5 \qquad 5+\frac{1}{2}=\frac{11}{2} \qquad 5+\frac{1}{2+\frac{1}{1}}=\frac{17}{3}, \qquad 5+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}=\frac{59}{11}$$

Son aproximaciones a $\frac{59}{11}$: $5,\quad \frac{11}{2}\ y\ \frac{17}{3}$

3. Use fracciones continuas para encontrar aproximaciones al número racional $\frac{38}{19}$

CONCLUSIONES:

- Todo número racional puede ser expresado como una fracción continua.
- Toda fracción continua finita representa un número racional.

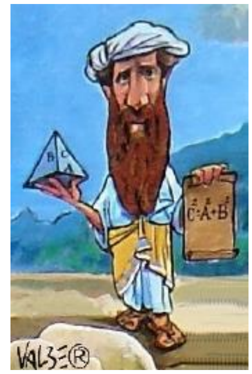
5.3.3 Actividad No.3: "Los irracionales"

Objetivos:

- Representar números irracionales en la recta numérica.
- Identificar e interpretar el desarrollo en fracción continuada de algunos números irracionales.

I. Realice la lectura y comente con sus compañeros

“Magnitudes inconmensurables y números irracionales”



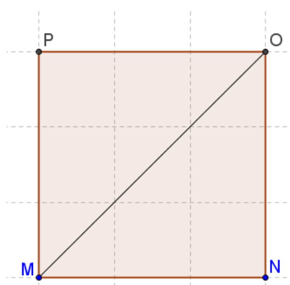
Los pitagóricos intentaron encontrar una medida común entre la diagonal de un cuadrado y su lado, y nunca la encontraron, por eso decidieron razonar por reducción al absurdo y llegaron a una contradicción al suponer que si eran conmensurables. Con ello demostraron que la diagonal de un cuadrado y su lado son inconmensurables. También supieron que la diagonal de un pentágono regular y su lado son inconmensurables. Este es el origen de los números irracionales. A la razón entre números que debía corresponder a la razón entre este tipo de pares de magnitudes se le dio el nombre de ilógica o irracional.

La existencia de este tipo de magnitudes afectó profundamente la matemática griega. Una de las consecuencias fue el divorcio entre aritmética y geometría, el desarrollo de la geometría y el estancamiento entre los griegos de la aritmética y el álgebra. Hindúes, árabes, trataron los números irracionales por medio de aproximaciones y para 1500 en Europa se usaban libremente por Pacioli, Stifel, Stevin y Cardano.

Tomado y adaptado de: El origen de los Números y de los sistemas de numeración. Clara Helena Sánchez B.

En la lectura se dice que el lado de un cuadrado y su diagonal son inconmensurables. Veamos qué significa esta afirmación.

1. Tome como unidad de medida el lado del cuadrado y determine con ella la longitud de la diagonal MO del cuadrado MNOP. ¿Qué concluye?



MO=_____

2. ¿La unidad de medida cubre la diagonal del cuadrado un número entero de veces?

3. ¿Entre qué valores enteros está comprendida la medida de la diagonal?, explique claramente su respuesta.

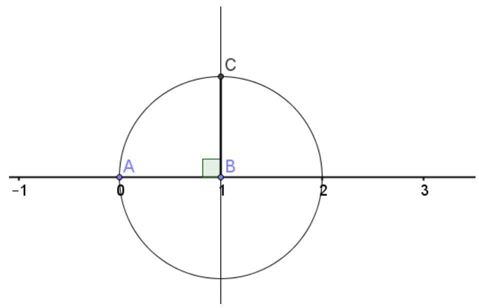
4. ¿La medida de la diagonal se puede expresar con un número racional? Justifique su respuesta

5. Si utiliza el teorema de Pitágoras para determinar la medida de la diagonal, ¿qué concluye?

6. ¿Podría explicar a partir de esta actividad la diferencia entre magnitudes conmensurables y magnitudes inconmensurables?, ¿cómo?. Explique claramente y discuta con sus compañeros.

II. La diagonal del cuadrado anterior mide $\sqrt{2}$ unidades. Veamos como representar este número en la recta numérica.

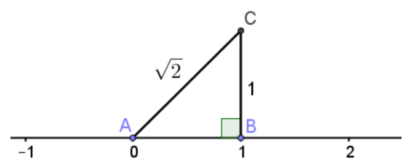
a. Sobre la recta numérica se marca el segmento AB, de extremos 0 y 1. Se traza el segmento BC de longitud uno, perpendicular a la recta.



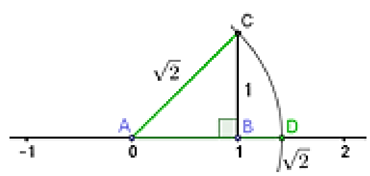
b. Se traza ahora el segmento AC. La hipotenusa del triángulo rectángulo ABC se determina usando el teorema de Pitágoras.

$$\overline{CA^2} = \overline{AB^2} + \overline{BC^2}$$

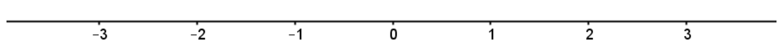
$$CA = \sqrt[2]{1+1} = \sqrt[2]{2}$$



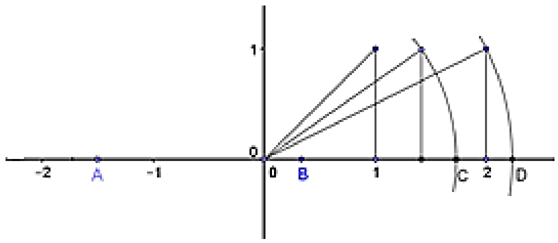
c. Con el compás se hace centro en A y con radio la medida de AC, se traza un arco que intersecta a la recta numérica en el punto D. Este punto corresponde al irracional $\sqrt[2]{2}$



1. Si repetimos el proceso anterior pero tomando el segmento CD de 3 unidades, ¿Qué número podemos representar en la recta numérica? ¿es este número irracional o racional? Justifique su respuesta.
2. Utilice el procedimiento anterior para ubicar en la recta numérica los números irracionales: $\sqrt{3}, -\sqrt{2}\ y\ \sqrt{5}$



3. Determine los números racionales o irracionales corresponden los puntos A, B, C y D señalados en la recta numérica.



4. Halle en cada caso un número que cumpla la condición dada:

   a. Un racional mayor que $\sqrt{3}$ menor que $\frac{7}{3}$
   b. Un irracional mayor que 4 y menor que $\frac{12}{5}$
   c. Un irracional mayor que -3 y menor que -2
   d. Un racional mayor que $\sqrt{3}\ y$ menor que $\sqrt{5}$

5. ¿Es posible hallar en cada uno de los numerales del punto anterior otros números que cumplan con las condiciones dadas? ¿cuántos? Explique su respuesta y comente con sus compañeros.

CONCLUSIÓN:

A todo número irracional (expresado a través de las raíces de números primos) le corresponde un punto en la recta numérica.

I. Los números irracionales también se pueden representar utilizando fracciones continuas. Observe el ejemplo:

El número irracional $\sqrt{2}$ esta entre $1 < \sqrt{2} < 2$. Su parte entera es 1 y $(\sqrt{2}-1)$ su parte decimal.	$\sqrt{2} = 1 + \left(\sqrt{2}-1\right)$
Racionalizamos la expresión $\frac{(\sqrt{2}-1)}{1}$ así:	$\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{1} \cdot \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)}$

$\sqrt{2}+1$ es equivalente a 2+$\left(\sqrt{2}-1\right)$	$\sqrt{2}=1+\left(\sqrt{2}-1\right)$ $=1+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}+1}}$ $=1+\frac{1}{\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)}{1}}$ $=1+\frac{1}{2+\left(\sqrt{2}-1\right)}$
Utilizando nuevamente el hecho de que $\sqrt{2}+1$ = 2+$\left(\sqrt{2}-1\right)$ y realizando el procedimiento varias veces se obtiene	$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}}$
El irracional $\sqrt{2}$ se representa con la fracción continua infinita: es decir el procedimiento se puede continuar indefinidamente.	$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}$

1. Use el procedimiento anterior para determinar fracciones continuas que representen a los números irracionales $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$. Compare sus respuestas con algunos compañeros y concluyan.

2. Utilizando la fracción continua que representa a $\sqrt{2}$, usted puede encontrar aproximaciones racionales a éste número (valores próximos), dos de esos valores son 1 y 1.5. Encuentre usted 2 aproximaciones más.

   $1=1$ $\quad 1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ $\quad 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=-$, $\quad 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}=-$

CONCLUSIÓN:

Todo número irracional puede representarse mediante una fracción continua infinita.

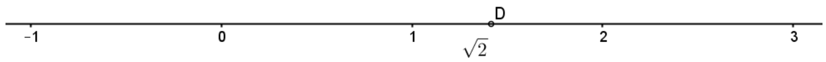
5.3.4 Actividad No.4: “Números Reales”

Objetivos:

- Reconocer y diferenciar los números racionales e irracionales desde diferentes representaciones.
- Reconocer las propiedades de densidad y completitud de los números reales.

I. Realice la lectura y comente con sus compañeros

Con el trabajo realizado en las tres primeras actividades se concluyó que a cada número racional se le puede asociar un punto de la recta numérica pero no a todo punto de la recta se le puede asociar un número racional. Es decir, el conjunto de los números racionales no completa la recta, ya que si bien entre dos números racionales siempre existen infinitos números racionales (el conjunto es denso), hay puntos que no corresponden a números racionales como el punto D que corresponde al irracional $\sqrt{2}$ que ubicamos en una actividad anterior.



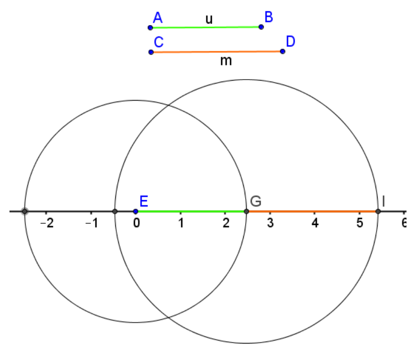
Con los números racionales y los irracionales se completa entonces la recta, la unión de estos dos conjuntos constituye el conjunto de los números reales. En el conjunto de los números reales se definen las operaciones de adición y multiplicación que satisfacen propiedades que usted ya trabajó en cursos anteriores.

A continuación veamos cómo se pueden representar los resultados de estas operaciones en la recta numérica

Recuerde que:

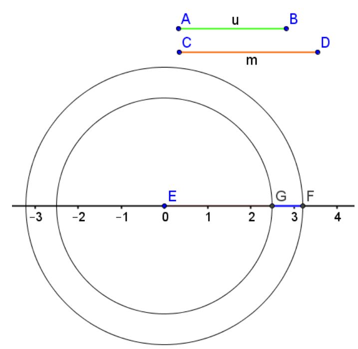
- Dados dos segmentos AB y CD es posible construir un segmento cuya longitud sea la suma de los segmentos iniciales. Observe,

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{EF}$$



- Dados dos segmentos AB y CD es posible construir un segmento cuya longitud sea la diferencia de los segmentos iniciales, observe

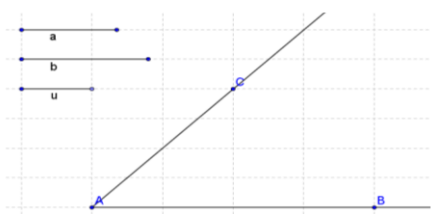
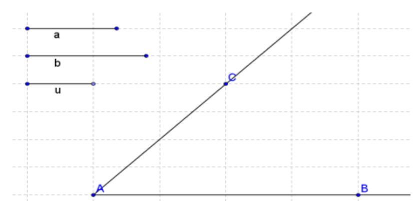
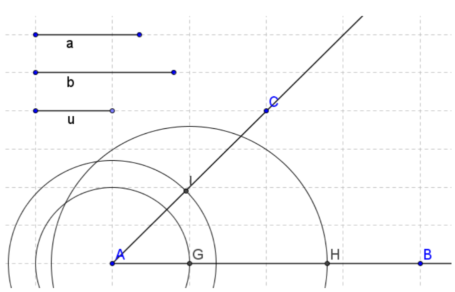
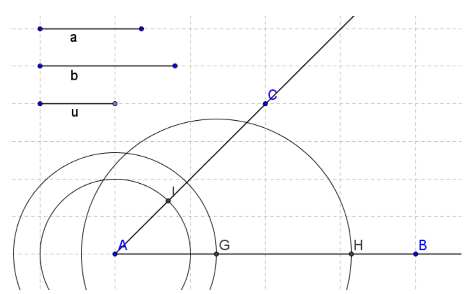
$$\overline{AB} - \overline{CD} = \overline{GF}$$

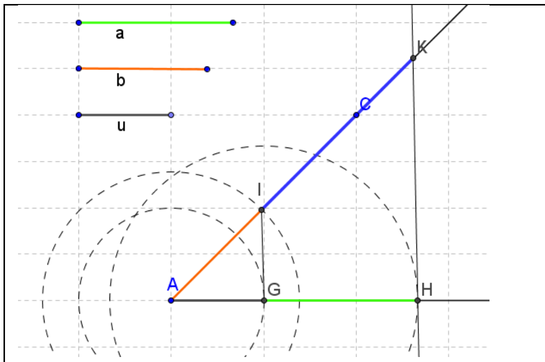
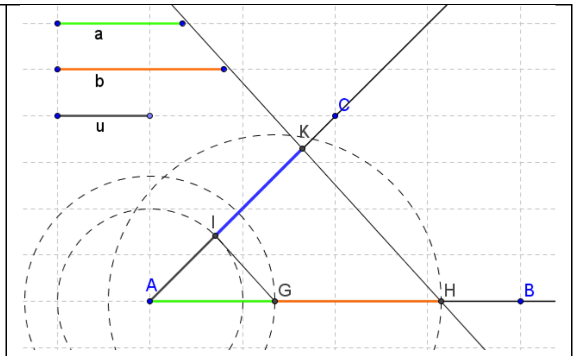


1. Teniendo en cuenta la idea anterior represente en la recta numérica la suma y diferencia de los siguientes números reales, describa el procedimiento usado.

a. $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$
b. $\sqrt{2}$ y $\frac{1}{3}$
c. $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$

2. Los procedimientos que se describen a continuación permiten construir el producto y el cociente de segmentos utilizando el teorema de Thales. Analice estos procedimientos y comente con sus compañeros.

Producto de dos segmentos	**Cociente de dos segmentos**
Dados los segmentos de longitud a, b y 1u.  	Dados los segmentos de longitud a, b y 1u. 
Se trazan las semirrectas AB y AC como se muestra en la figura. Sobre la semirrecta AB se trasladan los segmentos de longitud a y 1u sobre la semirrecta AB uno a continuación del otro iniciando desde el punto A y obteniendo los puntos G y H. El segmento de longitud b se traslada sobre la semirrecta AC obteniendo el punto I.  	Se trazan las semirrectas AB y AC como se muestra en la figura y Sobre la semirrecta AB se trasladan los segmentos de longitud a y b uno a continuación del otro obteniendo el segmento AH=a+b. El segmento de longitud 1u se traslada sobre la semirrecta AC obteniendo el punto I. 
Se traza el segmento IG y por el punto H se traza una recta paralela al segmento IG que corta a la semirrecta AC en el punto K.	Se traza el segmento IG y por el punto H se traza una recta paralela al segmento IG que corta a la semirrecta AC en el punto K.

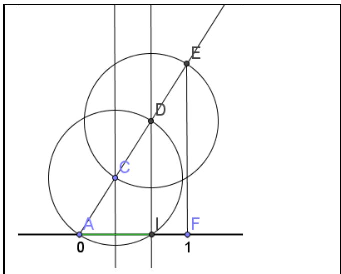
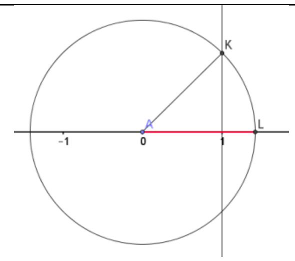
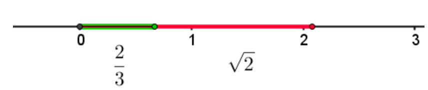
 El segmento buscado es el segmento AK.	 El segmento buscado es el segmento IK.

3. Utilizando el procedimiento anterior represente el producto y el cociente de los siguientes números reales

   2 y -3 $\qquad \frac{1}{4}\ y\ \frac{1}{2} \qquad \sqrt{2}\ y\ 3$

II. Ahora vamos a representar en la recta numérica la adición de dos números reales utilizando las construcciones geométricas y la calculadora

La representación gráfica del resultado a la operación $\sqrt{2}+\frac{2}{3}$ es:

 AI=$\frac{2}{3}$	 AL=$\sqrt{2}$	 $\sqrt{2}+\frac{2}{3}$

Utilizando la calculadora el resultado obtenido a la operación $\sqrt{2}+\frac{2}{3}$ es.

$\frac{2}{3} \approx 0.66666\ldots$	$\sqrt{2} \approx 1.41421356\ldots$	$\sqrt{2}+\frac{2}{3}$ $\approx 2.08088022\ldots$	

Si se desea ubicar en la recta numérica el real $\sqrt{2}+\frac{2}{3}$ con la construcción geométrica se puede determinar exactamente el punto que le corresponde y si se utiliza la calculadora para efectuar la operación y ubicarla en la recta se encuentra un resultado y ubicación aproximada del punto.

1. Represente en la recta numérica las operaciones entre números reales que se plantean a continuación
   a. $\sqrt{3} - \frac{7}{5}$
   b. $-\sqrt{2} + 3.6$
   c. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\sqrt{5}\right)$
   d. $\sqrt{8} \ \times \ \sqrt{2}$

2. Utilice su calculadora para determinar el resultado de las operaciones planteadas en el punto uno y represente en la recta numérica. ¿Qué observa?

3. Halle un número real:
   a. mayor a $-\frac{1}{6}$ y menor a $\frac{-1}{5}$
   b. mayor a $\frac{1}{3}$ y menor a $\sqrt{8}$
   c. mayor a $\sqrt{5}$ y menor a $\sqrt{10}$
   d. mayor a 9.05 y menor a 9.051

4. ¿Los números que determinó en el punto tres son todos racionales o irracionales? ¿Puede encontrar otros números que cumplan con las condiciones dadas? ¿cuántos?

CONCLUSIONES:

- Existen diferentes maneras de representar los números reales, entre ellas está la expresión decimal, la representación gráfica en la recta numérica y las fracciones continuas.
- A todo número real le corresponde un punto sobre la recta numérica y a todo punto de la recta le corresponde un número real.
- Entre dos números reales cualesquiera existen infinitos números reales, es decir el conjunto de los números reales es denso.
- Los números racionales e irracionales completan la recta, la unión de estos dos conjuntos constituye el conjunto de los números reales.

6. Conclusiones, recomendaciones y posibles ampliaciones

6.1 Conclusiones

- El análisis histórico epistemológico que fundamentó la construcción de la unidad didáctica permitió además reconocer que las dificultades evidenciadas en los estudiantes a través de la experiencia y en la aplicación de la prueba no son exclusivamente ontogénicas sino didácticas y epistemológicas, propias de la evolución del concepto y de su transposición al aula.

- El análisis disciplinar evidenció la complejidad del concepto formal a la que se ven muchas veces enfrentados los estudiantes sin abordar previamente significados intuitivos ni manejar diversas formas de representación. Lo anterior refuerza el planteamiento de los lineamientos curriculares y estándares básicos de competencias donde se afirma que el estudiante de la educación básica y media debería aproximarse de manera informal al concepto de número antes de trabajarlo formalmente.

- El análisis didáctico permitió reconocer las dificultades asociadas a la práctica pedagógica que evidencian los alumnos y además retomar aspectos de las propuestas de varios investigadores en didáctica de la matemática que sirvieron para diseñar la unidad didáctica adecuándolas al currículo del colegio Anglo Americano.

- Hacer uso de algunas de las situaciones y problemas identificados en el análisis histórico, ayudará a que los estudiantes reconozcan que el conocimiento matemático es dinámico, fruto de una comunidad y que se ha enfrentado a lo largo del tiempo con tropiezos y aciertos.

- Usualmente en los textos y en el aula se privilegia la presentación axiomática de los números reales ignorando el trabajo con las diferentes formas de representación de un concepto que favorecen la construcción de significado y permiten avances en la comprensión del concepto.

- La representación de los números reales en la recta numérica es una actividad que se realiza en grados anteriores a undécimo, pero al retomarla en este grado se evidencian dificultades con ella, es importante resaltar que las actividades de representación permiten un acercamiento intuitivo a las operaciones y propiedades de densidad y completitud del sistema de los números reales.

- Profundizar en el estudio de las expresiones decimales de los números reales y pasar de una a otra forma de representación es una manera de introducir intuitivamente a los estudiantes en el análisis de procesos infinitos, reconocer la naturaleza del número real y sus propiedades.

6.2 Recomendaciones

Para implementar en el aula la unidad didáctica propuesta se sugiere a los docentes tener en cuenta lo siguiente:

Realizar un trabajo de profundización sobre el uso de instrumentos de medición y la teoría básica relacionada con las construcciones con regla y compás. Lo anterior complementado con algunas actividades de refuerzo mediadas por el software GeoGebra que aparecen en los anexos del presente trabajo.

Para abordar las representaciones de los números reales a través de expresiones decimales y fracciones continuas es necesario que los estudiantes manejen muy bien las operaciones básicas en los diferentes dominios numéricos.

6.3 Posibles ampliaciones

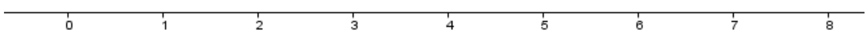
Las actividades propuestas en la unidad didáctica son un punto de partida para construir otras actividades que permitan profundizar en temas fundamentales del pensamiento numérico, que se asumen conocidos por los estudiantes de undécimo grado entre otros: concepto y significados de la fracción, operaciones entre fracciones, comprensión y aplicaciones del algoritmo de la división, orden, racionalización de expresiones…etc.

La unidad se puede ampliar o complementar con el estudio de los números construibles, la noción intuitiva de convergencia de sucesiones a través del análisis de los convergentes de una fracción continua, los números irracionales desde la solución de ecuaciones polinómicas, los conceptos iniciales del cálculo límite, continuidad… etc.

A. Anexo: Prueba de salida

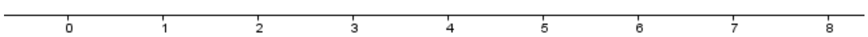
Muchas gracias querido estudiante por tomarse el tiempo para completar esta prueba. Sus respuestas son de gran importancia para mejorar nuestro proceso de enseñanza. Esta prueba requiere de toda su concentración y honestidad. Sus respuestas serán totalmente anónimas y no tendrán calificación. Por favor describa ampliamente sus respuestas y procedimientos efectuados.

1. Represente en la recta numérica los números $-\frac{2}{5}$ y $\sqrt{2}$



Describa el procedimiento usado____

2. Represente en la recta numérica el real $-\frac{2}{5}+\sqrt{2}$

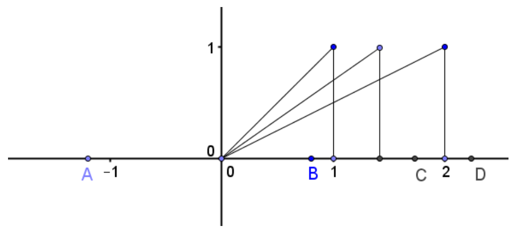


a) Localice un número real que sea mayor que cero y menor que $-\frac{2}{5}+\sqrt{2}$. Describa el procedimiento usado ___________________________________

b) ¿El número hallado en a) es racional o irracional? Justifique su respuesta ______

c) ¿Es posible hallar más de un número real que satisfaga la condición dada en a)? ¿cuántos?, justifique su respuesta____
____
____
____

3. En la recta numérica que aparece a continuación se han señalado algunos puntos. Determine los números reales que les corresponden.



Describa el procedimiento usado para identificar estos números____________________
____
____
____
____

4. "Un número real se puede representar de diferentes maneras". ¿Está usted de acuerdo con esta afirmación? ___________ Si su respuesta es afirmativa, represente de diferentes formas los números reales $\frac{5}{4}$ y $\sqrt{5}$
____
____
____
____

5. Encuentre la expresión decimal de los números racionales $\frac{9}{4}$ y $\frac{-4}{3}$

6. Dadas las expresiones decimales -1.555… y 4.12 identifique los números racionales que representan.

B. Anexo: Teorema de Thales

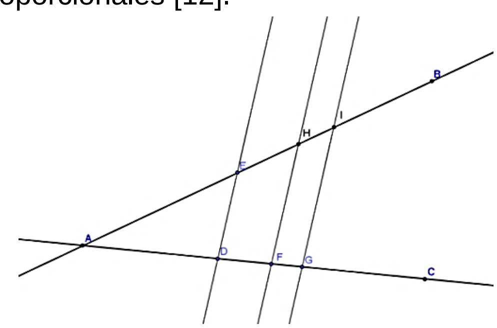
La matemática griega se inició y desarrolló a través de agrupaciones lideradas por maestros. La primera agrupación de este tipo que se conoce es la fundada por Thales, en Mileto, ciudad de Jonia, en donde se inició la filosofía y la matemática. Algunos historiadores concuerdan en que Thales vivó en el siglo IV a.C. y fue profesor de Pitágoras, Anaximandro, Anaxágoras y Anaxímenes.

Se le atribuyen a Thales varios descubrimientos y teoremas, entre ellos están, el teorema que lleva su nombre y el cálculo de las alturas de las pirámides egipcias.

Teorema de Thales:

Si tres rectas paralelas son cortadas por dos secantes, entonces los segmentos determinados sobre las secantes son proporcionales [12].

$$\frac{EH}{DF} = \frac{HI}{FG}$$



Con base en este teorema se abordaron múltiples construcciones clásicas con regla y compás, entre las más conocidas están el producto y cociente de segmentos que se derivan de la cuarta proporcional.

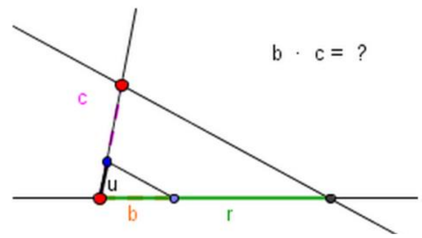
Cuarta proporcional:

se llama cuarta proporcional de 3 valores no nulos a, b y c a un valor r que cumpla:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{?}\ ;\ \ r = ?$$

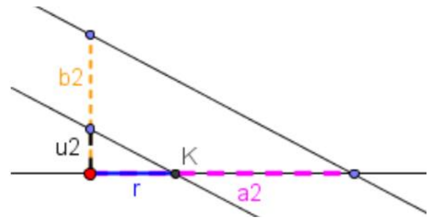
Producto de segmentos: Partiendo de las expresión $\frac{a}{c}=\frac{b}{r}$; si a es igual a la unidad se logra como resultado la construcción del segmento producto de otros dos dados.

$$\frac{u}{c}=\frac{b}{r}; \text{ya que } u=1 \text{ se tiene que } r=bc$$



Cociente de segmentos: Utilizando nuevamente la cuarta proporcional, y realizando una pequeña variación en la expresión se obtiene como resultado la construcción del segmento cociente de otros dos dados.

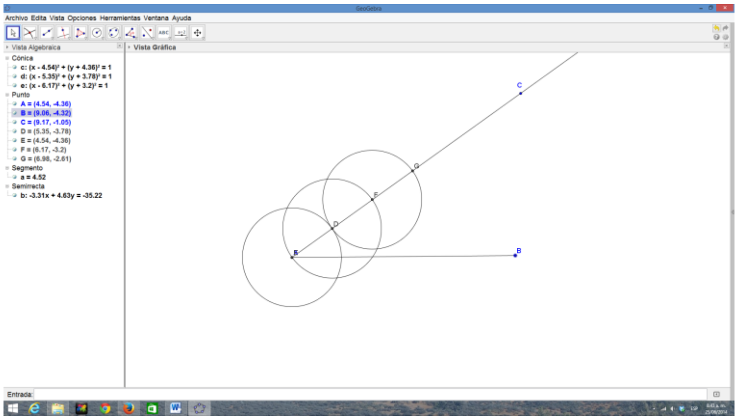
$$\frac{a}{b}=\frac{r}{u}; \text{ya que } u=1 \text{ se tiene que } r=\frac{a}{b}$$



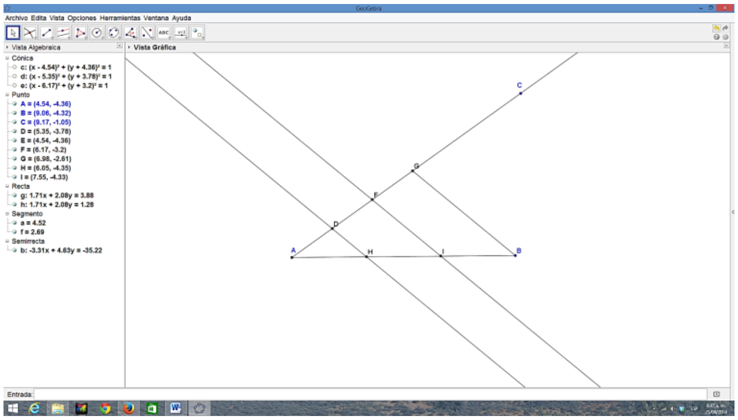
C. Anexo: Actividades mediadas con software GeoGebra

- **División de un segmentos en 3 partes iguales:**

1. Se traza el segmento AB y una semirrecta con origen en el punto A.
2. Con la herramienta "circunferencia dados su centro y radio" se traza una circunferencia de centro A y radio 1.
3. Se marca el punto de intersección entre la circunferencia y la semirrecta AC, lo llamamos D.
4. Trazamos nuevamente una circunferencia de radio 1 pero con centro en el punto D, se marca el punto de intersección entre esta circunferencia y la semirrecta, lo llamamos F. Como se desea dividir el segmento en tres partes congruentes, realizamos este procedimiento tres veces, al nuevo punto de intersección lo llamamos G



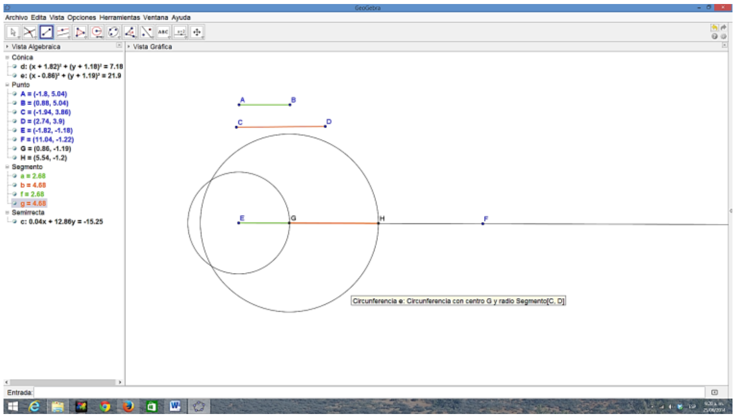
5. Con la herramienta "exponer/ocultar", se ocultan las circunferencias dando click sobre cada una de ellas.
6. Se traza el segmento GB y como lo indica el teorema de Thales, se trazan rectas paralelas al segmento GB que pasan por los puntos D y F. Se nombran los puntos de intersección de estas rectas paralelas con el segmento AB como H e I.
7. Así, el segmento AB ha sido dividido en tres partes congruentes



- ## Operaciones entre segmentos:

Dados los segmentos AB y CD, para realizar su suma:

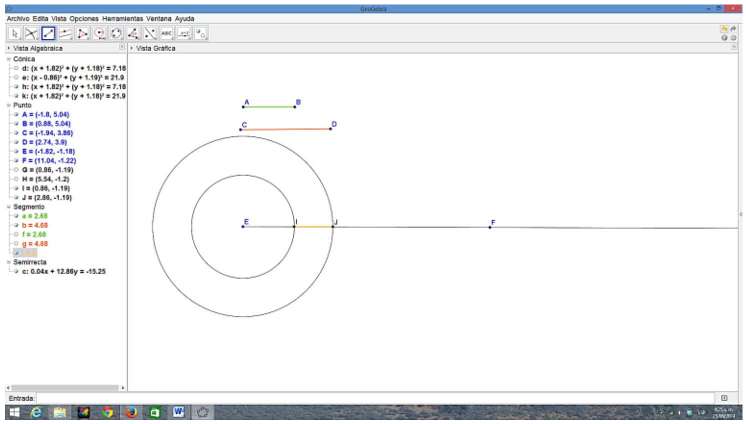
1. Se traza la semirrecta EF, con la herramienta compás se traslada la longitud del segmento AB sobre la semirrecta EF de tal forma que el centro del compás coincida con el punto E.
2. Se marca el punto de intersección entre la circunferencia y la semirrecta, lo llamamos G.
3. Utilizando nuevamente la herramienta compás se traslada ahora la longitud del segmento CD sobre la semirrecta EF, con centro en el punto G.
4. Se marca el punto de intersección entre la circunferencia y la semirrecta, lo llamamos H.
5. El segmento EH es el segmento que corresponde a AB+CD



Para realizar la resta de los segmentos AB y CD:

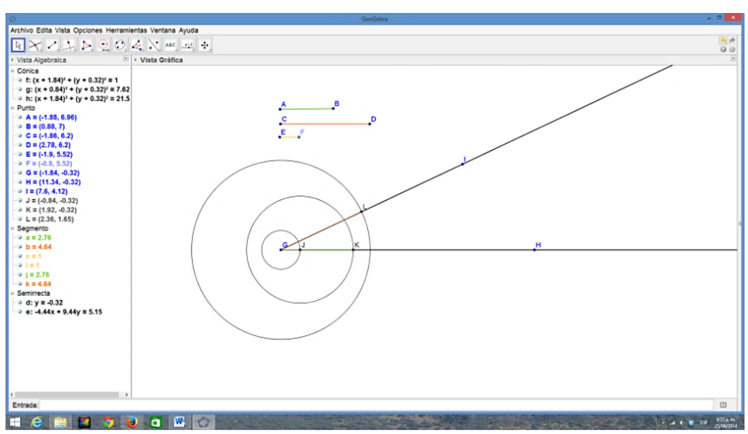
1. Se traza la semirrecta EF, con la herramienta compás se traslada la longitud del segmento AB sobre la semirrecta EF de tal forma que el centro del compás coincida con el punto E.

2. Se marca el punto de intersección entre la circunferencia y la semirrecta, lo llamamos I.
3. Utilizando nuevamente la herramienta compás se traslada ahora la longitud del segmento CD sobre la semirrecta EF, con centro en el punto E.
4. Se marca el punto de intersección entre la circunferencia y la semirrecta, lo llamamos J.
5. El segmento IJ es el segmento que corresponde a AB-CD

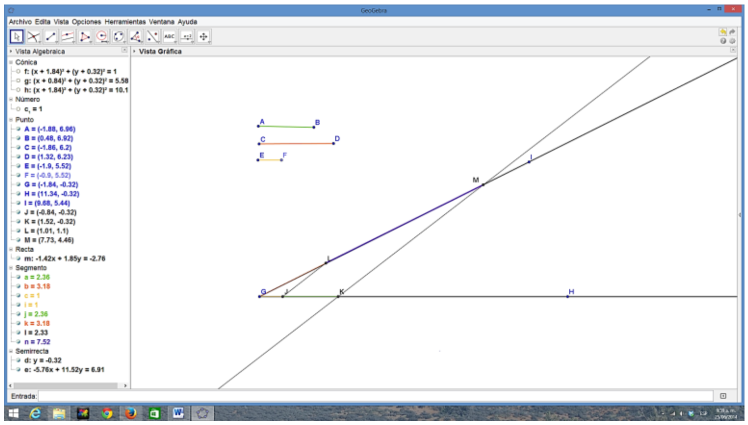


Para realizar el producto de los segmentos AB y CD:

1. Se traza un segmento de longitud 1 unidad, la semirrecta GH y la semirrecta GI.
2. Con la herramienta compás se traslada la longitud del segmento EF (unidad) sobre la semirrecta GH de tal forma que el centro del compás coincida con el punto G.
3. Se marca el punto de intersección entre la circunferencia y la semirrecta, lo llamamos J.
4. Utilizando la herramienta compás se traslada ahora la longitud del segmento AB sobre la semirrecta GH, con centro en el punto F. Llamamos al punto de intersección K.
5. Utilizando la herramienta compás se traslada ahora la longitud del segmento CD sobre la semirrecta GI, con centro en el punto G. Llamamos al punto de intersección L.

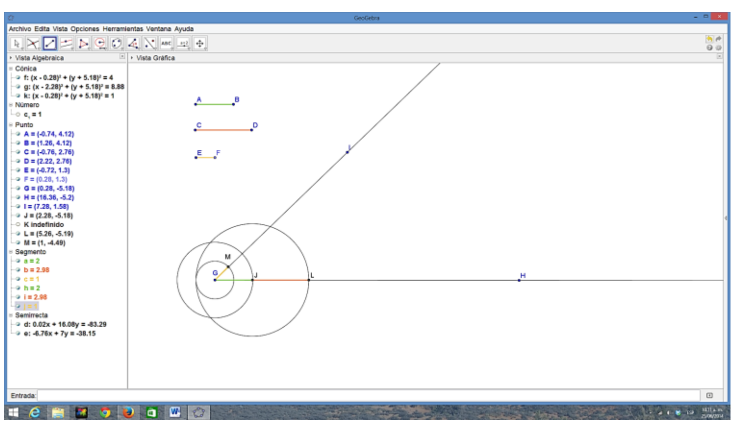


6. Con la herramienta “exponer/ocultar”, se ocultan las circunferencias dando click sobre cada una de ellas.
8. Se traza el segmento LJ y como lo indica el teorema de Thales, se traza una recta paralelas al segmento LJ que pasa por el punto K. Se nombra el punto de intersección de esta recta paralela con la semirrecta GI como M.
9. El segmento LM es el segmento que corresponde a AB×CD



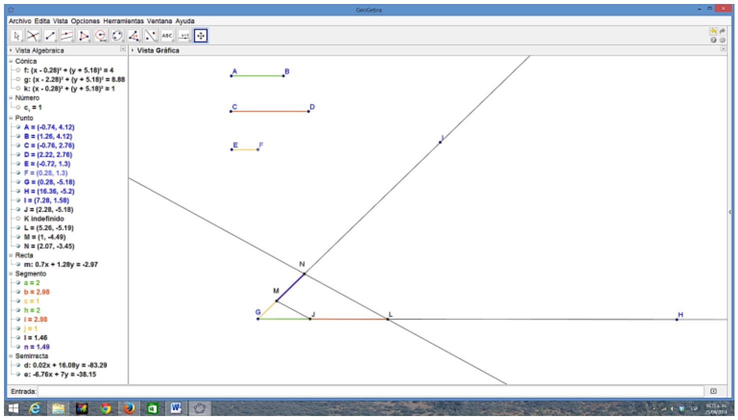
Para realizar el cociente entre los segmentos AB y CD:

1. Se traza un segmento de longitud 1 unidad, la semirrecta GH y la semirrecta GI.
2. Con la herramienta compás se trasladan las longitudes de los segmentos dados uno a continuación del otro sobre la semirrecta GH obteniendo el segmento GK=AB+CD
3. Sobre la semirrecta Gi se traslada la longitud del segmento EF (unidad) de tal forma que el centro del compás coincida con el punto G.
4. Se marca el punto de intersección entre la circunferencia y la semirrecta, lo llamamos M.
5. Con la herramienta “exponer/ocultar”, se ocultan las circunferencias dando click sobre cada una de ellas.



6. Se traza el segmento MJ y como lo indica el teorema de Thales, se traza una recta paralelas al segmento MJ que pasa por el punto L. Se nombra el punto de intersección de esta recta paralela con la semirrecta GI como N.

7. El segmento MN es el segmento que corresponde a AB÷CD



Bibliografía

[1] APOSTOL T. (1960), Análisis Matemático, Barcelona. Editorial Reverte.

[2] BERGÉ A. y SESSA C. (2003), Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica, Bogotá. Publicado en Rev. Relime, Vol.6, núm.3, pp.163-197.

[3] BOYER, C. (1986), Historia de la matemática, Madrid. Editorial Alianza Universidad Textos.

[4] GARCÍA, G; SERRANO, C y DIAZ, H. (1999), ¿Qué hay detrás de las dificultades que presenta la comprensión del concepto de número real?, Bogotá. Publicado en Rev. Tecne Episteme y Didaxis, Vol.5, pp.3-16

[5] HERNANDEZ M. (2005), Evolución histórica del concepto de número, Extremadura. Publicado en Rev. On-line Autodidacta, Vol. 1, núm. 1, Febrero 2010, artículo núm. 3. Dirección: http://www.anpebadajoz.es/autodidacta/

[6] JIMENEZ R; GORDILLO E. y RUBIANO G. (1999), Teoría de números, Bogotá. Universidad Nacional de Colombia.

[7] KLINE, M. (1992), El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, Madrid. Editorial Alianza Universidad Textos.

[8] MARSDEN J. y HOFFMAN M. (1998), Análisis Clásico Elemental, Wihnington .Ed Addison Wesley Iberoamericana

[9] MEAVILLA S. El origen de los números decimales. {En línea}. {16 marzo de 2011} disponible en: (http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php)

[10] Ministerio de Educación Nacional. (1998), Matemáticas Lineamientos Curriculares, Bogotá. Editado por MEN.

[11] Ministerio de Educación Nacional. (2006), Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas-documento No.3, Bogotá. Editado por MEN.

[12] MOISE E. y DOWNS F. (1986), Geometría moderna, E.U.A. Editorial Addison-Wesley iberoamericana, S.A.

[13] NIVEN I. y ZUCKERMAN H. (1969), Introducción a la teoría de números, México. Editorial Limusa S.A.

[14] RECALDE L. y VARGAS V. (2013), Las fracciones continuas en el desarrollo histórico de los números reales, Publicado en Rev. Lecturas Matemáticas, Vol. 34 núm. 1, pp. 131-148.

[15] RICO, L. (1996), Pensamiento numérico, México. Publicado en libro: Investigaciones en matemática educativa, grupo editorial Iberoamericana, pp. 27-53.

[16] ROMERO I. y RICO L. (1999), Representación y comprensión del concepto de número real, Publicado en Rev. EMA. Investigación e innovación en educación matemática, Vol. 4 núm. 2, pp. 117-151.

[17] SANABRIA G. (2005), Los números reales utilizando Cortaduras de Dedekind y sucesiones de Cauchy: una propuesta didáctica, Cartago. Publicado en Rev. Digital Matemática, Educación e Internet del Instituto Tecnológico de Costa Rica, Vol.6, núm. 1; Mayo 2005. Dirección: www.tec-digital.itcr.ac.cr/.../propuestas-didacticas-em/v6n1-may-2005/

[18] SANCHÉZ J. y VALDIVÉ C. (2011), El número irracional: una visión histórico-didáctica, Venezuela. Publicado en Rev. Científica "Teorías, enfoques y aplicaciones en las ciencias sociales", Vol.4, núm. 8, pp.31-44.

[19] SCALIA, S. (2000), Dos conflictos al representar números reales en la recta. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

[20] TKACHUK V. Notas de Cálculo Avanzado 1. {En línea}. {4 junio de 2014} disponible en: (http://licmat.izt.uam.mx/notas_de_clase/tkachuk.pdf)

[21] YU TAKEUCHI (1974), Análisis matemático I, Bogotá. Universidad Nacional de Colombia.