

Representaciones y corepresentaciones de posets 3-equipados

IVON ANDREA DORADO CORREA

MATEMÁTICA

CÓDIGO: 830002



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

2011

Representaciones y corepresentaciones de posets 3-equipados

IVON ANDREA DORADO CORREA

MATEMÁTICA

CÓDIGO: 830002

TRABAJO DE TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

DIRECTOR

OLEKSANDR ZAVADSKYY

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN

TEORÍA DE REPRESENTACIONES DE ÁLGEBRAS

GRUPO DE INVESTIGACIÓN

REPRESENTACIONES DE ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

2011

Título en español

Representaciones y corepresentaciones de posets 3-equipados

Title in English

3-equipped posets and their representations and corepresentations

Resumen: Se definen los posets 3-equipados, es decir conjuntos parcialmente ordenados equipados con tres tipos de relaciones binarias, y sus representaciones y corepresentaciones sobre una extensión cúbica inseparable de campos $F \subset G$, en característica 3. A través de los problemas matriciales determinados por dichas representaciones y corepresentaciones, se demuestra el criterio de un parámetro para posets 3-equipados, se establece la respectiva lista de posets sinceros, y se describen completamente, en forma matricial evidente, sus representaciones y corepresentaciones indescomponibles.

Abstract: We define 3-equipped posets, i.e. partially ordered sets equipped with three kinds of binary relations, and their representations and corepresentations over an inseparable cubic field extension $F \subset G$, in characteristic 3. Through the matrix problems determined by these representations and corepresentations, we proof the one-parameter criterion for 3-equipped posets, establish the respective list of sincere posets, and completely describe, in evident matrix form, their indecomposable representations and corepresentations.

Palabras clave: Poset 3-equipado, extensión cúbica de campos, representación, corepresentación, problema matricial, poset de un parámetro, poset sincero, clasificación de indescomponibles.

Keywords: 3-equipped poset, Cubic field extension, Representation, Corepresentation, Matrix problem, One-parameter poset, Sincere poset, Classification of indecomposables.

Nota de aceptación

Trabajo de tesis

Aprobado

“Mención Laureada”

Jurado

Marcelo Lanzilotta Mernies

Jurado

Viktor Bekkert

Jurado

Raymundo Bautista Ramos

Director

Oleksandr Zavadskyy, Ph.D.

Bogota, D.C., 2011

Dedicado a

A mi hermosa familia...
... y a todas las maravillosas personas que considero parte de ella.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional.

No encuentro ninguna expresión que sea suficiente para agradecer al profesor Zavadsky por todas sus enseñanzas, y especialmente por su paciencia.

Índice general

Índice general	I
Introducción	III
1. Posets ordinarios y posets equipados	1
1.1. Representaciones matriciales y vectoriales de posets ordinarios	1
1.2. Posets equipados, sus representaciones y corepresentaciones	4
2. Los posets 3-equipados, sus representaciones y corepresentaciones	7
2.1. Los posets 3-equipados y sus formas asociadas	7
2.2. Representaciones	11
2.3. Corepresentaciones	13
2.4. Propiedad de Krull-Schmidt	15
2.5. Posets 3-equipados críticos	17
3. Posets 3-equipados de un parámetro	20
3.1. Series y posets 3-equipados de un parámetro	20
3.2. Formulación de los resultados principales	22
3.3. Demostración de los teoremas 11 y 12	24
4. Indescomponibles de los posets 3-equipados críticos	34
4.1. Definiciones en términos de bimódulos y notación	34
4.2. Corepresentaciones del poset 3-equipado K_{11}	37
4.3. Representaciones del poset 3-equipado K_{11}	43
4.4. Indescomponibles del poset 3-equipado K_{10}	57
5. Aplicaciones posibles	61
5.1. Aplicaciones a la teoría de anillos	61

5.2. Aplicaciones a la teoría de vectroides	62
A. Formas matriciales de los indescomponibles sinceros de los posets 3- equipados de tipo finito	65
B. Representaciones matriciales del poset 3-equipado K_{10}	66
C. Corepresentaciones matriciales del poset 3-equipado K_{10}	69
D. Representaciones matriciales del poset 3-equipado K_{11}	72
E. Corepresentaciones matriciales del poset 3-equipado K_{11}	76
Trabajo futuro	78
Bibliografía	79

Introducción

La presente investigación pretende hacer una contribución al desarrollo de la teoría de representaciones de posets con estructuras adicionales. Nuestro objetivo principal es introducir los posets $\mathfrak{3}$ -equipados, que son conjuntos ordenados equipados con tres relaciones binarias, y definir sus representaciones y corepresentaciones sobre una extensión cúbica de campos en característica $\mathfrak{3}$, para resolver de la manera más completa posible, los problemas concernientes a las representaciones y corepresentaciones de los posets $\mathfrak{3}$ -equipados de un parámetro.

La teoría de representaciones de posets, y posets con estructuras adicionales, forma una parte importante de la teoría de representaciones de estructuras algebraicas moderna, y tiene sus raíces en la teoría de representaciones de álgebras de dimensión finita [3, 22, 24, 47, 51]. Tiene además, estrechas relaciones con la teoría de representaciones de algunas categorías de espacios vectoriales, llamadas también vectroides [6, 17, 36], con la teoría de formas bilineales y cuadráticas [21, 42, 43, 47, 58], con la teoría de anillos y módulos [31, 64, 65], e incluso con las representaciones de grupos abelianos [1, 2, 13].

El estudio de las representaciones de posets se inició a comienzos de los años setenta a partir de dos investigaciones diferentes, que aparecen en [35] y [23].

Por un lado estaban Nazarova y Roiter quienes trabajaban en algunos problemas de representaciones de álgebras de dimensión finita, en particular la segunda conjetura de Brauer-Thrall, y con este objetivo introdujeron representaciones de posets en lenguaje matricial. Ellos consideraron el problema de encontrar una forma canónica para cierto conjunto de matrices, el cual constituía el conjunto de representaciones de un poset finito \mathcal{P} , bajo algunas transformaciones admisibles especificadas, que dependían de la estructura de \mathcal{P} . En [35] se construye, además, el primer algoritmo de diferenciación para posets con respecto a un punto maximal. Este resulta ser una de las herramientas principales para la teoría de representaciones de posets.

Por otro lado estaba Gabriel quien en [22] introdujo la noción, muy importante, de representaciones de carcajes (es decir grafos orientados) y obtuvo una clasificación de los carcajes de tipo de representación finito sobre un campo. El trabajo de Gabriel fue novedoso y revolucionario. Uno de sus descubrimientos más importantes es que los diagramas no orientados de los carcajes conexos de tipo de representación finito coinciden precisamente, de manera inesperada, con los famosos diagramas de Dynkin. Gabriel consideró en [22] representaciones de algunos posets particulares, e introdujo en [23] la definición invariante de representaciones de posets en lenguaje de espacios lineales.

Los descubrimientos de Nazarova, Roiter y Gabriel despertaron el interés por desarrollar la teoría de representaciones de posets por sí sola. Esto se llevó a cabo durante las dos décadas siguientes, principalmente, en la escuela de teoría de representaciones de Kiev.

Es así como en 1972, Kleiner presenta en [29] el criterio para que un poset sea de tipo de representación finito y describe completamente todas las representaciones indescomponibles de este tipo de posets en [30]. En 1975, Nazarova obtiene el criterio de tipo de representación manso para posets [33]. Un poset de tipo manso puede ser de crecimiento finito o infinito. En 1977, Zavadskij introdujo el algoritmo de diferenciación de posets con respecto a una pareja conveniente de puntos [56], que es más general que el algoritmo de [35]. Esto permitió que él, junto con Nazarova, probaran el criterio de crecimiento finito [66]. De otro modo, los posets mansos de crecimiento infinito fueron estudiados con base en la solución de un problema matricial plano de tipo Gel'fand [37]. Las respectivas clasificaciones de representaciones indescomponibles se publicaron en particular, en los artículos [30], [9], [45], [46], [8] y [58], incluso se describió el carcaj de Auslander-Reiten, en [12] para posets de un parámetro, y en [57] para posets de crecimiento finito.

La teoría de representaciones de posets avanzó también en otras direcciones, determinadas por conjuntos ordenados con algunas estructuras adicionales. Desde comienzos de los años 80 han aparecido investigaciones sobre representaciones de posets con involución [34, 38], bipartidos [39, 42], con una relación de equivalencia [10, 11, 59], diádicos [26, 27, 40, 41], triádicos [5], etcétera.

A comienzos de los años 90 Zavadskij, junto con Zabarilo, comenzaron a investigar posets con dos relaciones de orden y los llamaron posets equipados. Ellos estudiaron algunos problemas matriciales de tipo mixto sobre la pareja de campos (\mathbb{R}, \mathbb{C}) . Naturalmente, estos problemas están asociados a representaciones de posets equipados. Luego describieron los posets equipados de un parámetro y presentaron una clasificación completa de sus indescomponibles, incluyendo la lista de los conjuntos sinceros de un parámetro [54, 55].

Los criterios de tipo de representación manso para posets equipados y equipados con involución, y de crecimiento finito para posets equipados fueron publicados por Zavadskij en [60] y [61], entre 2003 y 2005. Luego, se interesa en otro problema también determinado por los posets equipados. Así que introdujo y empezó a estudiar, con Rodríguez, las corepresentaciones de posets equipados, para las cuales describieron algunos algoritmos de reducción y otras propiedades [48].

Hasta el momento no se ha encontrado una construcción que relacione directamente las representaciones y corepresentaciones, de manera que se decidió investigar los problemas derivados de las corepresentaciones por aparte y en [49] son estudiadas y clasificadas las corepresentaciones de algunos posets equipados de un parámetro.

Recientemente, en [63] fueron introducidos los posets equipados generalizados, ellos incluyen los posets equipados (allí llamados 2-equipados) y los 3-equipados. Sus representaciones se definen sobre extensiones de campos de Galois, y algunos problemas concernientes a ellas son reducidos a los problemas, ya resueltos, de las representaciones de posets ordinarios sobre un campo.

Continuando con el desarrollo de estas ideas, en el presente trabajo, se introducen los posets 3-equipados, y sus representaciones y corepresentaciones sobre una extensión cúbica inseparable de campos $F \subset G$, en característica 3. Como en el caso de los posets ordinarios, se usa el lenguaje matricial y el lenguaje invariante de los espacios vectoriales. La elección

de las definiciones aquí presentadas, está motivada por la experiencia real en el manejo y reducción de los correspondientes problemas matriciales de tipo mixto.

Los posets 3-equipados de tipo finito pueden ser caracterizados y descritos, junto con sus representaciones y corepresentaciones, usando algunos resultados de [31]. Por lo tanto, nuestro objeto de estudio son los posets 3-equipados de tipo infinito, comenzando con los de un parámetro. Los resultados principales de esta investigación son los siguientes:

- Introducción de los posets 3-equipados, de sus representaciones y corepresentaciones, tanto en forma matricial como en forma invariante, sobre una extensión cúbica inseparable de campos $F \subset G$, en característica 3.
- Obtención del criterio de un parámetro para posets 3-equipados, con respecto a representaciones y corepresentaciones.
- Descripción de los posets 3-equipados sinceros de un parámetro.
- Clasificación completa, en forma matricial evidente, de las representaciones y corepresentaciones de los posets 3-equipados de un parámetro.
- Relación entre las raíces de la forma cuadrática de Tits asociada a un poset 3-equipado, y las dimensiones de sus representaciones indescomponibles.
- Relación entre las raíces de la coforma cuadrática asociada a un poset 3-equipado, y las dimensiones de sus corepresentaciones indescomponibles.
- Desarrollo de algunos métodos de reducción para problemas matriciales de tipo mixto sobre la pareja (F, G) .
- Solución de algunos problemas matriciales de tipo mixto, que contienen el haz clásico de Kronecker y el haz pseudolineal, respectivamente.

Algunos de estos resultados fueron publicados parcialmente en el artículo [19], y socializados en ponencias presentadas por la autora en los siguientes eventos:

- XVI Congreso Nacional de Matemáticas. Medellín, Colombia, 2007.
- XVII Coloquio Latinoamericano de Álgebra. Río Negro, Colombia, 2007.
- ALTENCOA 3. Bucaramanga, Colombia, 2008.
- ICRA XIII, The 13-th International Conference on Representations of Algebras. São Paulo, Brazil, 2008.
- UN Encuentro de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 2011.
- XVIII Congreso Colombiano de Matemáticas. Bucaramanga, Colombia, 2011.

Para presentar la totalidad de los resultados, este documento se ha estructurado como sigue:

El primer capítulo contiene varios aspectos preliminares, concernientes a posets ordinarios (Sección 1.1) y a posets equipados (Sección 1.2), que han motivado la manera de llevar a cabo el estudio de los posets 3-equipados.

En el segundo capítulo se encuentran las definiciones principales, es decir, el primero de los resultados listados arriba. En la sección 2.1, se definen posets 3-equipados, sus diagramas y algunas formas cuadráticas asociadas a ellos. Sus representaciones y corepresentaciones son introducidas en las secciones 2.2 y 2.3, en lenguaje matricial e invariante, sobre una extensión cúbica inseparable de campos en característica 3. En la sección 2.4, se demuestra que las categorías de representaciones y corepresentaciones de un poset 3-equipado tienen la propiedad de Krull-Schmidt. La sección 2.5 contiene la descripción de los posets 3-equipados críticos y los de tipo finito.

El tercer capítulo contiene la definición de posets 3-equipados de un parámetro en la primera sección. En la segunda están formulados el criterio de un parámetro para posets 3-equipados (teorema 11), los teoremas en los que se presentan la lista de posets sinceros de un parámetro y las clasificaciones completas de sus representaciones y corepresentaciones indescomponibles (teoremas 12, 13 y 14), algunas propiedades de las dimensiones de dichos indescomponibles en términos de las formas cuadráticas asociadas a cada poset (teorema 15), y un corolario que relaciona las representaciones y corepresentaciones de cada poset sincero (corolario 16). En la sección 3.3 se demuestran el criterio de un parámetro y el teorema 12.

El cuarto capítulo está dedicado a mostrar con detalles cómo se obtuvo la clasificación de las representaciones y corepresentaciones indescomponibles de los posets 3-equipados sinceros de un parámetro. Las demostraciones utilizan métodos de álgebra lineal, por lo cual se introducen unas definiciones de representaciones y corepresentaciones en términos de bimódulos, equivalentes a las del segundo capítulo (Sección 4.1). También se reducen los problemas matriciales correspondientes, a algunos problemas particulares que involucran, por una parte el haz clásico de Kronecker, resuelto originalmente en [32] (Sección 4.2), y por otra el haz pseudolineal introducido y resuelto por Sergeichuk en [52] (Sección 4.3). La solución de estos problemas particulares (teoremas 22 y 25) permite restaurar las formas matriciales de todas las representaciones y corepresentaciones de los posets 3-equipados sinceros de un parámetro (demostraciones de los teoremas 13 y 14 y proposición 26). Además en la sección 4.4, se explican con detalles los motivos de la elección de algunas definiciones principales y de la pareja (F, G) .

En el quinto capítulo, se presentan dos aplicaciones posibles de los resultados obtenidos: una de ellas a la teoría de anillos y la otra a la teoría vectroides.

Los apéndices contienen las listas completas de indescomponibles, de cada uno de los posets estudiados aquí.

Por último, se mencionan algunas maneras en las que se puede continuar esta investigación.

Posets ordinarios y posets equipados

En este capítulo, se presentan de manera general y acorde a nuestros objetivos, definiciones, criterios y observaciones de investigaciones previas que han motivado, de forma natural, el estudio de los posets 3-equipados, sus representaciones y corepresentaciones.

La primera sección se dedica a los posets ordinarios, y la segunda a los posets equipados.

1.1. Representaciones matriciales y vectoriales de posets ordinarios

Un *poset* (abreviatura de partially ordered set, conjunto parcialmente ordenado) ordinario finito (\mathcal{P}, \leq) está conformado por un conjunto finito de puntos \mathcal{P} , relacionados mediante un orden parcial \leq .

Sean $x, y \in \mathcal{P}$ dos elementos tales que $x \leq y$. Si además $x \neq y$, escribiremos $x < y$ y diremos que y es *sucesor inmediato* de x , si no existe ningún $z \in \mathcal{P}$ tal que $x < z < y$.

Cada poset está unívocamente determinado por su diagrama de Hasse que se obtiene poniendo los elementos de \mathcal{P} en un nivel inicial y cada vez que un punto y sea sucesor inmediato de otro punto x , se dibuja y en un nivel superior y se conecta con una línea con x .

Las representaciones de los posets ordinarios fueron introducidas en [35] de la siguiente forma: Una *representación matricial* M de algún poset \mathcal{P} sobre un campo K , es una matriz con entradas en K dividida en franjas verticales M_x para cada $x \in \mathcal{P}$. A estas matrices se aplican las siguientes *transformaciones admisibles*:

- (a) Transformaciones K -elementales de filas de toda la matriz M ;
- (b) Transformaciones K -elementales de columnas de cada franja M_x ;
- (c) Si $x < y$, adiciones de columnas de la franja M_x a columnas de la franja M_y con coeficientes en K .

Se dice que dos representaciones matriciales son *equivalentes* o *isomorfas* si se puede obtener una de la otra a partir de una sucesión de transformaciones admisibles.

La *dimensión* de una representación M del poset \mathcal{P} es el vector

$$d = \underline{\dim} M = (d_0; d_x : x \in \mathcal{P}),$$

donde d_0 es el número de filas de M y d_x es el número de columnas de la franja M_x .

De acuerdo con la definición invariante de Gabriel [23], una representación de un poset \mathcal{P} sobre un campo K está determinada por un espacio vectorial U_0 de dimensión finita sobre K , y a cada elemento de \mathcal{P} se le asigna un subespacio de U_0 , de manera que el orden parcial en \mathcal{P} induce la contención en los subespacios asignados. Esto es, una *representación* U de un poset \mathcal{P} sobre K es una colección de K -espacios vectoriales, de la forma

$$U = (U_0; U_x : x \in \mathcal{P})$$

donde $U_x \subseteq U_0$ para cada $x \in \mathcal{P}$, y para todo par de puntos $x, y \in \mathcal{P}$ se satisface

$$x \leq y \Rightarrow U_x \subseteq U_y.$$

Un morfismo $U \xrightarrow{\varphi} V$ es una aplicación K -lineal $\varphi : U_0 \rightarrow V_0$ tal que $\varphi(U_x) \subseteq V_x$ para todo $x \in \mathcal{P}$.

El *radical* de una representación U es otra representación $\underline{U} = (U_0, \underline{U}_x : x \in \mathcal{P})$ donde $\underline{U}_x = \sum_{y < x} U_y$.

La *dimensión* de una representación U es un vector $d = \underline{\dim} U = (d_0; d_x : x \in \mathcal{P})$, donde $d_0 = \dim_K U_0$, $d_x = \dim_K U_x / \underline{U}_x$, para todo $x \in \mathcal{P}$.

Una representación matricial M corresponde a una representación $U = (U_0; U_x : x \in \mathcal{P})$ si las columnas de cada franja M_x están formadas por coordenadas (con respecto a una base elegida de U_0) de algún sistema de generadores de U_x módulo \underline{U}_x . Nótese que las transformaciones admisibles de M corresponden a aquellos cambios de base de U_0 y de los sistemas de generadores de U_x que no cambian el número de generadores.

Se tiene que $\underline{\dim} M = \underline{\dim} U$ si y sólo si los sistemas de generadores elegidos son minimales (es decir, la matriz M es *reducida*). En caso contrario, $\underline{\dim} M \geq \underline{\dim} U$.

Por lo tanto, un isomorfismo matricial $M \simeq M'$ implica un isomorfismo de las representaciones correspondientes $U \simeq V$ (la afirmación recíproca es verdadera cuando M y M' son reducidas).

De esta forma, describir las representaciones indescomponibles de un poset es equivalente a describir sus representaciones matriciales, excluyendo aquellas matrices formales que no tienen filas pero tienen columnas.

Si una representación indescomponible U de algún poset \mathcal{P} , es tal que $\underline{\dim} U$ no tiene coordenadas nulas, entonces se dice que U es *sincera* y también que el poset es *sincero*.

Las representaciones de un poset \mathcal{P} junto con sus morfismos constituyen una categoría aditiva y de Krull-Schmidt (ver [1, teorema 1.2.2]), y como tales, sus tipos de representación se pueden determinar según sus objetos indescomponibles.

De la observación anterior se originaron las definiciones de *poset de tipo finito* y *poset de tipo infinito* que son, respectivamente, posets con finito e infinito número de representaciones indescomponibles, salvo isomorfismo.

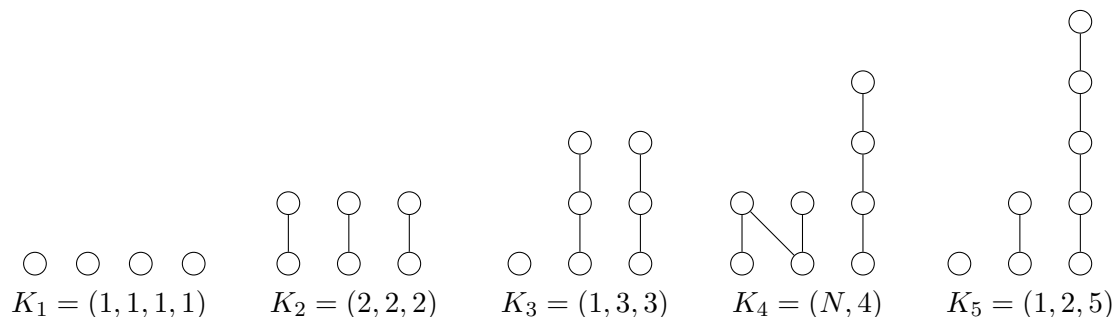
Los posets de tipo finito y sus representaciones fueron completamente caracterizados y descritos en [29] y [30]. Mientras que para estudiar los posets de tipo infinito se utilizó el siguiente concepto de serie.

Supongamos que el campo K es infinito. Considérense las representaciones de un poset \mathcal{P} sobre el anillo de polinomios $K[t]$ que se definen análogamente a las representaciones sobre K . Es decir, son matrices con entradas en $K[t]$ divididas en franjas verticales. Así, cada representación sobre $K[t]$ genera una *serie* de representaciones sobre K substituyendo la variable t por alguna matriz cuadrada A con entradas en K , y cada escalar $k \in K$ por una matriz, del mismo tamaño de A , de la forma kI .

Un poset de tipo infinito se dice de *n*-parámetros si el número minimal de series, que generan casi todas sus representaciones indescomponibles de cada dimensión dada (salvo isomorfismo) es igual a n .

Los posets ordinarios de un parámetro fueron caracterizados en [45] mediante el siguiente criterio.

Teorema 1 (Criterio de un parámetro para posets ordinarios). *Un poset ordinario es de un parámetro si y solo si contiene exactamente uno de los posets críticos de Kleiner*



como subposet.

Los posets de n parámetros se dicen de tipo de representación *manso*, además de *crecimiento finito* (estas últimas dos clases fueron definidas y caracterizadas en [33] y [66]).

Cuando no es posible “parametrizar” las representaciones indescomponibles de un poset con un número finito de series para alguna dimensión, se dice que este poset es de tipo *salvaje*.

En otras palabras, un poset es de tipo salvaje si y sólo si su problema matricial incluye el problema de reducir dos o más matrices simultáneamente por transformaciones de semejanza ordinaria sobre K .

Como se mencionó en la introducción, durante las décadas de los 70s y los 80s, la teoría de representaciones de poset fue desarrollada caracterizando los posets de los diferentes tipos de representación, presentando las listas de posets sinceros y las descripciones completas de sus representaciones, incluso describiendo el carcaj de Auslander-Reiten, en varios casos. Todo este desarrollo motivó otras direcciones de investigación como la que se presenta en la siguiente sección, que es la que conlleva al presente trabajo.

1.2. Posets equipados, sus representaciones y corepresentaciones

Un *poset equipado* (2-equipado en terminología de [63]) es un poset finito (\mathcal{P}, \leq) junto con una relación binaria adicional \triangleleft sobre sus puntos, llamada relación fuerte, que satisface la siguiente condición para todos los puntos $x, y, z \in \mathcal{P}$.

$$\text{Si } x \leq y \triangleleft z \text{ o } x \triangleleft y \leq z, \text{ entonces } x \triangleleft z.$$

Esto es simplemente, que la composición de una relación fuerte con cualquier otra, es fuerte.

Cuando algunos puntos $x, y \in \mathcal{P}$ son tales que $x \leq y$ pero $x \not\triangleleft y$, decimos que x y y están en *relación débil*, notado por $x \prec y$.

Se sigue de la definición que para cada punto $x \in \mathcal{P}$, o bien $x \triangleleft x$, o bien $x \prec x$. En el primer caso llamamos a x *punto fuerte*, y en el segundo lo llamamos *punto débil*.

Cuando todos los puntos de algún poset equipado \mathcal{P} son fuertes, decimos que el equipamiento del poset es trivial y en este caso \mathcal{P} será un poset ordinario.

El diagrama de un poset equipado se obtiene partiendo del diagrama de Hasse, distinguiendo en él los puntos fuertes de los débiles y conectando con una línea adicional los puntos débiles que están en relación fuerte, cuando esta relación no sea consecuencia de otras.

Las representaciones de posets equipados fueron introducidas en [54], sobre la pareja clásica de campos (\mathbb{R}, \mathbb{C}) , más tarde su definición se generalizó a una extensión cuadrática de campos arbitraria $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ (ver [48]). Al igual que para el caso de (\mathbb{R}, \mathbb{C}) , se tiene que $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\zeta)$, para algún elemento primitivo ζ , y como cada elemento $x \in \mathbb{L}$ se puede escribir como $x = a + b\zeta$, para algunos $a, b \in \mathbb{K}$, se dice que a es la parte real de x y b su parte imaginaria, con la notación $\text{Re } x = a$ e $\text{Im } x = b$, respectivamente.

Se define una *representación matricial* de un poset equipado \mathcal{P} , sobre la pareja (\mathbb{K}, \mathbb{L}) , como una matriz M dividida en franjas verticales M_x , para cada $x \in \mathcal{P}$, con entradas en \mathbb{K} (\mathbb{L}) si el punto x es fuerte (débil). El conjunto de *transformaciones admisibles* para estas matrices es el siguiente:

- (a) Transformaciones \mathbb{K} -elementales de filas de toda la matriz M ;
- (b) Transformaciones \mathbb{K} -elementales (\mathbb{L} -elementales) de columnas de la franja M_x para cada punto fuerte (débil) x ;
- (c) Si $x \prec y$, adiciones de columnas de la franja M_x a columnas de la franja M_y con coeficientes en \mathbb{L} ;
- (d) Si $x \triangleleft y$, adiciones independientes de las partes real o imaginaria de las columnas de M_x a las partes real o imaginaria de las columnas de M_y , con coeficientes en \mathbb{K} . Si y es un punto fuerte no se hacen adiciones a sus partes imaginarias, que en este caso son nulas.

En términos de espacios vectoriales, dado un \mathbb{K} -espacio U_0 de dimensión finita, se identifica la suma directa U_0^2 de dos copias de U_0 , con el \mathbb{L} -espacio $U_0^2 = U_0 \oplus \zeta U_0$. Nótese

que para cualquier L-subespacio $X \subseteq U_0^2$, sus partes real e imaginaria coinciden, esto es $\operatorname{Re} X = \operatorname{Im} X$. De modo que al definir la K-cápsula de X como $\mathsf{K}(X) = (\operatorname{Re} X)^2$, se tiene que $X \subseteq \mathsf{K}(X)$.

Una *representación* U de un poset equipado \mathcal{P} sobre el par (K, L) es una colección de la forma

$$U = (U_0; U_x : x \in \mathcal{P})$$

donde U_0 es un K-espacio vectorial de dimensión finita, cada U_x es un L-subespacio de U_0^2 , y para todo par de puntos $x, y \in \mathcal{P}$ se satisfacen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} x \leq y &\Rightarrow U_x \subseteq U_y \\ x \triangleleft y &\Rightarrow \mathsf{K}(U_x) \subseteq U_y. \end{aligned}$$

Sean U, V representaciones de \mathcal{P} , un morfismo $U \xrightarrow{\varphi} V$ es una aplicación K-lineal $\varphi : U_0 \rightarrow V_0$ tal que $\varphi^2(U_x) \subseteq V_x$ para todo $x \in \mathcal{P}$.

Dos representaciones U y V son *isomorfas*, $U \simeq V$, si existe un isomorfismo de K-espacios $\varphi : U_0 \rightarrow V_0$ tal que $\varphi^2(U_x) = V_x$ para todo $x \in \mathcal{P}$.

De los posets equipados surge también, la definición de sus corepresentaciones sobre el par (K, L) , introducida en [48].

Una *corepresentación matricial* de un poset equipado \mathcal{P} , sobre la pareja (K, L) , es una matriz M sobre L , dividida en franjas verticales M_x ($x \in \mathcal{P}$), con el siguiente conjunto de *transformaciones admisibles*:

- (a) transformaciones L-elementales de filas de toda la matriz M ;
- (b) transformaciones K-elementales (L-elementales) de columnas de la franja M_x para cada punto débil (fuerte) x ;
- (c) si $x \prec y$ ($x \triangleleft y$), adiciones de columnas de la franja M_x a columnas de la franja M_y con coeficientes en $\mathsf{K}(\mathsf{L})$.

Dado un L-espacio vectorial de dimensión finita U_0 , si $X \subset U_0$ es un K-espacio, se define la L-cápsula de X , como el espacio vectorial generado por X sobre L , notado $\mathsf{L}(X) = \mathsf{L}\langle X \rangle$.

Una *corepresentación* U de un poset equipado \mathcal{P} sobre el par (K, L) es una colección de la forma

$$U = (U_0; U_x : x \in \mathcal{P})$$

donde U_0 es un L-espacio vectorial de dimensión finita, cada U_x es un K-subespacio de U_0 , y para todo par de puntos $x, y \in \mathcal{P}$ se satisfacen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} x \leq y &\Rightarrow U_x \subseteq U_y \\ x \triangleleft y &\Rightarrow \mathsf{L}(U_x) \subseteq U_y. \end{aligned}$$

Un morfismo $U \xrightarrow{\varphi} V$, entre dos corepresentaciones U, V de \mathcal{P} , es cualquier aplicación L-lineal $\varphi : U_0 \rightarrow V_0$ tal que $\varphi(U_x) \subseteq V_x$ para todo $x \in \mathcal{P}$.

Las representaciones y corepresentaciones de un poset equipado, junto con sus morfismos conforman dos categorías que son aditivas y de Krull-Schmidt.

Las definiciones de poset equipado sincero, de sus tipos de representación (finito, infinito, manso, etc.) son análogas a las de los posets ordinarios.

Usando algunos resultados de [31], se pueden caracterizar y describir los posets equipados de tipo finito, dando la respectiva lista de posets sinceros y clasificando sus representaciones y corepresentaciones.

Las representaciones de los posets equipados de tipo infinito han sido estudiadas en [54, 60, 61], donde se establecen respectivamente, los criterios de un parámetro, de tipo manso, y de crecimiento finito. También se describen los posets sinceros.

El estudio de las corepresentaciones de posets equipados llega hasta la caracterización y descripción completa de los posets de un parámetro con sus respectivos indescomponibles, lo encontramos en las investigaciones principales [48, 49].

Evidentemente, la teoría de representaciones (y corepresentaciones) de posets equipados ha sido ampliamente desarrollada, esto despertó el interés por estudiar posets no con dos tipos de relaciones (fuerte y débil) sino con tres, y sirve además, como prototipo de la investigación presente y futura sobre posets 3-equipados.

Los posets 3-equipados, sus representaciones y corepresentaciones

En este capítulo se introducen las definiciones principales para el desarrollo de toda nuestra investigación.

Su estructura es la siguiente: en la sección 2.1 se presenta la definición de poset 3-equipado, su diagrama y algunas formas cuadráticas asociadas. En las dos secciones siguientes, se definen respectivamente, las representaciones y corepresentaciones de posets 3-equipados sobre una extensión cúbica de campos, puramente inseparable en característica 3, tanto en forma matricial, como en el lenguaje invariante de los espacios vectoriales. Estas representaciones y corepresentaciones, junto con sus morfismos correspondientes, constituyen dos categorías, en la sección 2.4, mostramos que dichas categorías son de Krull-Schmidt. Para terminar, se describen en la sección 2.5, los posets 3-equipados críticos y los de tipo finito.

2.1. Los posets 3-equipados y sus formas asociadas

Un poset finito (\mathcal{P}, \leq) se dice *3-equipado* si a cada par comparable de puntos $x \leq y$ se le asigna únicamente uno de los valores 1, 2 ó 3, usando la notación $x \leq^1 y$, $x \leq^2 y$ ó $x \leq^3 y$, y se satisface la siguiente condición:

$$\text{Si } x \leq^l y \leq^m z \text{ y } x \leq^n z, \text{ entonces } n \geq \min\{lm, 3\}. \quad (2.1)$$

Una relación $x \leq y$ se llama *débil*, *semifuerte* ó *fuerte*, si $x \leq^1 y$, $x \leq^2 y$ ó $x \leq^3 y$, respectivamente. Por eso, se dice que \mathcal{P} está equipado con tres relaciones.

De la definición se sigue inmediatamente que la composición de una relación fuerte con cualquier otra, es fuerte.

Por la condición (2.1), para todos los puntos $x \in \mathcal{P}$ se tiene, o bien $x \leq^1 x$, o bien $x \leq^3 x$. En el primer caso, llamaremos a x punto *débil* y en el segundo caso, lo llamaremos punto *fuerte*. Nótese que cualquier relación entre un punto arbitrario y un punto fuerte es siempre fuerte.

En general, ninguna de las relaciones \leq^1, \leq^2, \leq^3 es un orden. De hecho ninguna de ellas es reflexiva y solamente la relación fuerte es transitiva.

Escribiremos $x <^l y$, si $x \leq^l y$ y $x \neq y$. En particular, para las relaciones semifuertes siempre se tiene $x <^2 y$.

El equipamiento de un poset se dice *trivial* cuando éste sólo contiene puntos fuertes; en este caso, (\mathcal{P}, \leq) es un poset *ordinario*.

Sea X un subconjunto de puntos de algún poset \mathcal{P} y $a \in \mathcal{P}$, escribiremos $a < X$ ($a \leq X$) cuando $a < x$ ($a \leq x$) para cada $x \in X$. De la misma forma, si $Y \subset \mathcal{P}$ escribiremos $X < Y$ ($X \leq Y$) cuando $x < y$ ($x \leq y$), para todo $x \in X$ y $y \in Y$.

Si $x < y$, el *intervalo abierto* (x, y) es el conjunto de todos los puntos $z \in \mathcal{P}$ tales que $x < z < y$. Si (x, y) es vacío decimos que $x < y$ es una *relación corta*. De lo contrario la relación $x < y$ se dice *larga*.

Sea $x <^n y$ una relación larga. Para cada $z \in (x, y)$ tal que $x <^l z <^m y$, se define $\mu_z = \mu_z(x, y) = \min\{lm, 3\}$, de este modo para el intervalo (x, y) asignamos

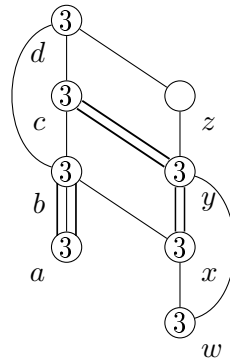
$$\mu(x, y) = \max_{z \in (x, y)} \{\mu_z\}.$$

Obviamente $n \geq \mu(x, y)$ por (2.1).

Cada poset 3-equipado está unívocamente determinado por su *diagrama*, que se construye de la siguiente manera:

1. Se dibuja el diagrama de Hasse de \mathcal{P} denotando por $\textcircled{3}$ y \bigcirc a los puntos débiles y fuertes, respectivamente.
2. Si $x <^l y$ es una relación corta entre puntos débiles, los puntos x y y se unen con $l - 1$ líneas adicionales.
3. Si $x <^l y$ es una relación larga entre puntos débiles, los puntos x y y se unen con $l - \mu(x, y)$ líneas adicionales.

Ejemplo 2. Sea \mathcal{P} el poset 3-equipado dado por el siguiente diagrama



se tiene que z es el único punto fuerte y por lo tanto $\{w, x, y\} <^3 z <^3 d$. También $a <^3 \{b, c, d\}$ ya que $a <^3 b$. Nótese que $b <^1 c <^1 d$ luego $\mu_c(b, d) = \mu(b, d) = 1$ y, por la línea adicional entre b y d , entonces $b <^2 d$. De forma similar $w <^3 y$ aunque $\mu(w, y) = 2$ por $w <^1 x <^2 y$. Por otro lado $w <^1 x <^1 b$ luego $\mu(w, b) = 1$, y como no hay líneas

adicionales entre w y b , entonces $w <^1 b$. Como consecuencia de $x <^2 y <^2 c$ se tiene que $\mu(x, c) = 3$ y $x <^3 c$. Considerando el intervalo abierto $(y, d) = \{c, z\}$, vemos que $\mu_c(y, d) = 2$ y $\mu_z(y, d) = 3$ por lo tanto $\mu(y, d) = 3$ y $\{w, x, y\} <^3 d$.

Un subconjunto de un poset 3-equipado se llama *cadena* si esta linealmente ordenado. Si por el contrario todos sus puntos son incomparables dos a dos se llama *anticadena*.

Se denota por $\tilde{\mathcal{P}}$ al *alargamiento* $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \{0\}$ de un poset 3-equipado \mathcal{P} al que se le añade un único punto fuerte maximal 0.

Sean $\alpha = (\alpha_0; \alpha_x : x \in \mathcal{P})$ y $\beta = (\beta_0; \beta_x : x \in \mathcal{P})$ vectores en $\mathbb{Z}^{|\tilde{\mathcal{P}}|}$, la *forma bilineal no simétrica* de \mathcal{P} se define como sigue

$$B(\alpha, \beta) = \alpha_0\beta_0 + \sum_{\substack{x \leq y \\ x, y \in \mathcal{P}}} l_{xy}\alpha_x\beta_y - \alpha_0 \sum_{x \in \mathcal{P}} l_{xx}\beta_x,$$

donde $l_{xx} = 1$ si x es fuerte, $l_{xx} = 3$ si x es débil, y si $x <^l y$ entonces $l_{xy} = l^{\frac{l_{xx}l_{yy}}{3}}$.

También se define la *coforma bilineal no simétrica* de \mathcal{P}

$$\hat{B}(\alpha, \beta) = 3\alpha_0\beta_0 + \sum_{\substack{x \leq y \\ x, y \in \mathcal{P}}} \hat{l}_{xy}\alpha_x\beta_y - 3\alpha_0 \sum_{x \in \mathcal{P}} \beta_x,$$

donde $\hat{l}_{xy} = m$ si $x \leq^m y$.

La *forma* $S\langle\alpha, \beta\rangle$ y la *coforma* $\hat{S}\langle\alpha, \beta\rangle$ *bilineales simétricas* de \mathcal{P} se obtienen, respectivamente, de la forma y la coforma no simétricas, como sigue:

$$S\langle\alpha, \beta\rangle = \frac{1}{2}[B(\alpha, \beta) + B(\beta, \alpha)], \quad \hat{S}\langle\alpha, \beta\rangle = \frac{1}{2}[\hat{B}(\alpha, \beta) + \hat{B}(\beta, \alpha)].$$

La *forma cuadrática de Tits* f de \mathcal{P} es

$$f = f(\alpha) = S\langle\alpha, \alpha\rangle = B(\alpha, \alpha) = \alpha_0^2 + \sum_{\substack{x \leq y \\ x, y \in \mathcal{P}}} l_{xy}\alpha_x\alpha_y - \alpha_0 \sum_{x \in \mathcal{P}} l_{xx}\alpha_x.$$

Análogamente, la *coforma cuadrática de Tits* \hat{f} de \mathcal{P} es

$$\hat{f} = \hat{S}\langle\alpha, \alpha\rangle = \hat{B}(\alpha, \alpha) = \hat{f}(\alpha) = 3\alpha_0^2 + \sum_{\substack{x \leq y \\ x, y \in \mathcal{P}}} \hat{l}_{xy}\alpha_x\alpha_y - 3\alpha_0 \sum_{x \in \mathcal{P}} \alpha_x.$$

Una *raíz simple* d_i de la forma cuadrática de Tits f (coforma \hat{f}) asociada a un poset 3-equipado \mathcal{P} , es un vector en $\mathbb{Z}^{|\tilde{\mathcal{P}}|}$ con la coordenada i -ésima igual a 1 y las demás iguales a 0.

Las *reflexiones* $w_x(\alpha)$ y $\hat{w}_x(\alpha)$ de un vector α en algún punto $x \in \tilde{\mathcal{P}}$ son

$$w_x(\alpha) = \alpha - \frac{2}{l_{xx}}S\langle\alpha, d_x\rangle d_x \quad \hat{w}_x(\alpha) = \alpha - \frac{2}{\hat{l}_{xx}}\hat{S}\langle\alpha, d_x\rangle d_x.$$

Los vectores positivos obtenidos por reflexiones $w_x(\widehat{w}_x)$ de las raíces simples de f (\widehat{f}) son las *raíces admisibles* de la forma (coforma) cuadrática de Tits f (\widehat{f}). Un vector $d \in \mathbb{Z}^{|\mathcal{P}|}$ es una *raíz imaginaria* de f ó \widehat{f} si $f(d) = 0$ ó $\widehat{f}(d) = 0$, respectivamente. En el caso de los posets 3-equipados, el valor de la forma de Tits f (coforma \widehat{f}) evaluada en las raíces admisibles es 1 ó 3.

En los siguientes ejemplos se presentan los cálculos de algunas raíces admisibles.

Ejemplo 3. Considérese el poset 3-equipado K_{10} ,

$$\begin{array}{cc} a & b \\ \textcircled{3} & \bigcirc \end{array} \quad (2.2)$$

(i) Las raíces admisibles de su forma cuadrática de Tits

$$f(d) = d_0^2 + 3d_a^2 + d_b^2 - d_0(3d_a + d_b)$$

son las siguientes

$(1, 1, 1)$; $(3, 2, 1)$; $(2n + 1, n + 1, n + 1)$; $(2n + 1, n, n + 1)$; $(2n + 1, n, n)$; $(2n, n, n + 1)$; $(2n + 2, n + 1, n)$; $(2n + 3, n + 2, n + 1)$; $(3, 2, 3)$; $(6, 4, 3)$; $(3, 1, 3)$; $(6, 2, 3)$; $(9, 4, 3)$; $(12, 5, 6)$; $(6m + 3, 3m + 2, 3m)$; $(6m + 3, 3m + 1, 3m + 3)$; $(6n + 3, 3n + 2, 3n + 3)$; $(6n + 9, 3n + 4, 3n + 3)$; $(6n + 6, 3n + 4, 3n + 3)$; $(6n + 12, 3n + 5, 3n + 6)$.

El valor de la forma de Tits evaluada en las reflexiones de la raíz simple $(0, 1, 0)$ es igual a 3, mientras que el valor de la forma de Tits evaluada en las otras raíces admisibles es 1.

(ii) Su coforma cuadrática de Tits

$$\widehat{f}(d) = 3d_0^2 + d_a^2 + 3d_b^2 - 3d_0(d_a + 3d_b)$$

tiene las siguientes raíces admisibles

$(1, 3, 1)$; $(2n + 1, 3n + 3, n)$; $(3, 6, 2)$; $(3, 3, 2)$; $(5, 6, 3)$; $(2n, 3n, n + 1)$; $(2n + 2, 3n + 3, n)$; $(5, 9, 3)$; $(2n + 5, 3n + 6, n + 3)$; $(4n + 3, 6n + 6, 2n + 2)$; $(2n + 1, 3n, n)$; $(4n + 5, 6n + 9, 2n + 3)$; $(1, 2, 1)$; $(1, 1, 1)$; $(2, 2, 1)$; $(3, 4, 1)$; $(4, 5, 2)$; $(2n + 1, 3n + 2, n)$; $(2n + 1, 3n + 1, n + 1)$; $(2n + 1, n + 2, n + 1)$; $(2n + 3, n + 2, n + 1)$; $(2n, n + 3, n)$; $(2n + 4, n + 3, n + 2)$.

Ejemplo 4. Para el poset 3-equipado K_{11}

$$\begin{array}{c} \textcircled{3} b \\ | \\ \textcircled{3} a \end{array} \quad (2.3)$$

(i) Su forma cuadrática de Tits es

$$f(d) = d_0^2 + 3d_a^2 + 3d_b^2 + 3d_a d_b - 3d_0(d_a + d_b)$$

y tiene las siguientes raíces admisibles

$(3, 2, 1)$; $(6, 3, 1)$; $(6, 3, 2)$; $(6, 1, 2)$; $(9, 2, 3)$; $(3n + 3, n + 1, n)$; $(3n, n, n + 1)$; $(12, 3, 4)$; $(3n + 3, n, n + 2)$; $(3n + 3, n + 2, n)$; $(9, 4, 3)$; $(3n, n + 1, n)$; $(3n + 3, n, n + 1)$; $(2, 1, 1)$; $(5, 1, 2)$; $(3n + 2, n + 1, n)$; $(3n + 1, n, n + 1)$; $(3n + 2, n + 1, n + 1)$; $(3n + 1, n, n)$; $(3n + 1, n + 1, n)$; $(3n + 2, n, n + 1)$.

(ii) Su coforma cuadrática de Tits es

$$\widehat{f}(d) = 3d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_1d_2 - 3d_0(d_1 + d_2)$$

y tiene las siguientes raíces admisibles

(2, 3, 3); (4, 6, 3); (4, 3, 4); (4, 3, 3); (5, 3, 6); (n+1, n+1, n); (n, n, n+1); (n+1, n, n+2); (n+1, n+2, n); (n, n+1, n); (n+1, n, n+1); (3m+2, 3m+3, 3m); (3m+1, 3m, 3m+3); (3n+2, 3n+3, 3n+3); (3n+4, 3n+3, 3n+3); (3n+4, 3n+6, 3n+3); (3n+5, 3n+3, 3n+6).

En este caso, el valor de la coforma de Tits evaluada en las reflexiones de la raíz simple (1, 0, 0) es 3, y el valor de la coforma de Tits evaluada en las otras raíces admisibles es igual a 1.

Las formas cuadráticas resultan ser una herramienta útil e importante en la teoría de representaciones, en las siguientes secciones veremos como la forma y la coforma de Tits asociadas a un poset se relacionan con sus representaciones y corepresentaciones.

2.2. Representaciones

En adelante, todo el trabajo se llevará a cabo sobre la pareja de campos (\mathbb{F}, \mathbb{G}) de característica 3, donde \mathbb{G} es una extensión puramente inseparable de grado 3 sobre \mathbb{F} . Se tiene que $\mathbb{G} = \mathbb{F}(\xi)$, para algún elemento primitivo ξ cuyo polinomio minimal sobre \mathbb{F} será $t^3 + p$.

Claramente, cada elemento $g \in \mathbb{G}$ puede escribirse en la forma $g = a + b\xi + c\xi^2$, con $a, b, c \in \mathbb{F}$. Diremos que $a = \operatorname{Re} g$ es la *parte real* de g , $b = \operatorname{Im}_1 g$ y $c = \operatorname{Im}_2 g$ sus *partes imaginarias uno y dos*, respectivamente. De este modo, si $X \subseteq \mathbb{G}$ es un subconjunto arbitrario, sus partes real e imaginarias serán los conjuntos $\operatorname{Re} X = \{\operatorname{Re} g : g \in X\}$ e $\operatorname{Im}_i X = \{\operatorname{Im}_i g : g \in X\}$ ($i = 1, 2$), respectivamente¹.

Recordemos que una derivación δ , sobre un campo \mathbb{K} , es una aplicación de $\delta : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $(g+h)^\delta = g^\delta + h^\delta$ y $(gh)^\delta = gh^\delta + g^\delta h$, para todo $g, h \in \mathbb{K}$ (ver por ejemplo [16, 28]).

En nuestro caso aparece la derivación natural δ del campo \mathbb{G} , que es un endomorfismo de \mathbb{G} , que satisface

$$\delta(a) = 0, \text{ para todo } a \in \mathbb{F}, \quad \delta(\xi) = 1, \quad \delta(\xi^2) = -\xi.$$

Dado un elemento $g \in \mathbb{G}$, se va a usar la notación $g^\delta = \delta(g) = \operatorname{Im}_1 g - \operatorname{Im}_2 g\xi$.

Para algún \mathbb{F} -espacio de dimensión finita U_0 , considérese el \mathbb{G} -espacio inducido $\widetilde{U}_0 = U_0 \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{G}$. Si $X \subseteq \widetilde{U}_0$ es un \mathbb{G} -subespacio, entonces su *parte real* $\operatorname{Re} X$ es el siguiente \mathbb{F} -subespacio de U_0

$$\operatorname{Re} X = \{u \in U_0 : u \otimes 1 + u' \otimes \xi + u'' \otimes \xi^2 \in X, \text{ para algunos } u', u'' \in U_0\}.$$

Las *partes imaginarias* $\operatorname{Im}_1 X$ e $\operatorname{Im}_2 X$ se definen análogamente. Obviamente, como X es un \mathbb{G} -subespacio de \widetilde{U}_0 , entonces $\operatorname{Re} X = \operatorname{Im}_1 X = \operatorname{Im}_2 X$.

¹Esta notación fue motivada por las representaciones de posets equipados que se introdujeron sobre la pareja de campos clásica $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Un \mathbf{G} -subespacio $X \subseteq \widetilde{U}_0$ se dice *fuerte* si $X = (\text{Re } X) \otimes_{\mathbf{F}} \mathbf{G}$ o equivalentemente, si $(\text{Re } X) \otimes 1 \subset X$.

La *derivada* X^δ de cualquier conjunto $X \subseteq \widetilde{U}_0$ es el conjunto $X^\delta = \{u \otimes g^\delta : u \otimes g \in X\}$. Se denota por $\mathbf{K}\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ al espacio vectorial generado por los vectores dados a_1, a_2, \dots, a_n sobre un campo \mathbf{K} . Con esta notación considérense los siguientes tres \mathbf{G} -subespacios de \widetilde{U}_0 que contienen a X

$$\mathbf{G}^1(X) = \mathbf{G}\langle X \rangle, \quad \mathbf{G}^2(X) = \mathbf{G}\langle X, X^\delta \rangle, \quad \mathbf{G}^3(X) = \mathbf{G}\langle X, X^\delta, X^{\delta^2} \rangle.$$

Si $X \subseteq \widetilde{U}_0$ es un \mathbf{G} -subespacio, nótese que $X^{\delta^2} = \text{Im}_2 X \otimes 1$. Por lo tanto, $\mathbf{G}^3(X) = (\text{Im}_2 X) \otimes_{\mathbf{F}} \mathbf{G} = (\text{Re } X) \otimes_{\mathbf{F}} \mathbf{G}$ es un \mathbf{G} -espacio fuerte.

Una *representación* U de un poset 3-equipado \mathcal{P} sobre el par (\mathbf{F}, \mathbf{G}) es una colección de la forma

$$U = (U_0; U_x : x \in \mathcal{P})$$

donde U_0 es un \mathbf{F} -espacio vectorial de dimensión finita, cada U_x es un \mathbf{G} -subespacio de \widetilde{U}_0 , y para todo par de puntos $x, y \in \mathcal{P}$ se satisface

$$x \leq^l y \Rightarrow \mathbf{G}^l(U_x) \subseteq U_y.$$

En este punto se hace clara la similitud entre nuestro espacio $\mathbf{G}^3(X)$ y la cápsula definida para trabajar con los posets equipados (ver sección 1.2). También es claro que para conservar la estructura de un poset 3-equipado, es necesaria otra cápsula. Por eso resultó de gran utilidad el endomorfismo δ (que apareció de manera natural al realizar cálculos de representaciones del poset K_{11} de la forma (2.3)), ya que con él, se puede determinar una contención para el caso de la relación semifuerte que, intuitivamente, está entre la débil y la fuerte.

Para cada punto fuerte $x \in \mathcal{P}$ se tiene $\mathbf{G}^3(U_x) \subseteq U_x$, de donde U_x es un \mathbf{G} -subespacio fuerte, y como tal, está completamente determinado por su parte real.

Las representaciones de un poset 3-equipado \mathcal{P} son los objetos de la *categoría de representaciones* $\text{rep } \mathcal{P}$. Un morfismo $U \xrightarrow{\varphi} V$ es una aplicación \mathbf{F} -lineal $\varphi : U_0 \rightarrow V_0$ tal que $(\varphi \otimes 1)(U_x) \subseteq V_x$ para todo $x \in \mathcal{P}$.

Dos representaciones U y V son *isomorfas*, $U \simeq V$, si existe un isomorfismo de \mathbf{F} -espacios $\varphi : U_0 \rightarrow V_0$ tal que $(\varphi \otimes 1)(U_x) = V_x$ para todo $x \in \mathcal{P}$.

Una *subrepresentación* $V = (V_0; V_x : x \in \mathcal{P})$ de una representación U es alguna representación de \mathcal{P} tal que $V_0 \subseteq U_0$ y $V_x \subseteq U_x$ para cada $x \in \mathcal{P}$.

El *radical* de una representación U es una subrepresentación $\underline{U} = (U_0, \underline{U}_x : x \in \mathcal{P})$ de U , donde $\underline{U}_x = \sum_{y <^l x} \mathbf{G}^l(U_y)$.

La dimensión de una representación U es un vector $d = \underline{\dim} U = (d_0; d_x : x \in \mathcal{P})$ donde $d_0 = \dim_{\mathbf{F}} U_0$ y $d_x = \dim_{\mathbf{G}} U_x / \underline{U}_x$ para todo $x \in \mathcal{P}$.

Una *representación matricial* de un poset 3-equipado \mathcal{P} , sobre la pareja (\mathbf{F}, \mathbf{G}) , es una matriz M dividida en franjas verticales M_x sobre \mathbf{G} (\mathbf{F}) si $x \in \mathcal{P}$ es un punto débil (fuerte).

Dos representaciones matriciales M y M' se dicen *equivalentes* o *isomorfas* si se puede obtener la una de la otra a partir del siguiente conjunto de *transformaciones admisibles*:

- (a) Transformaciones F-elementales de filas de toda la matriz M ;
- (b) Transformaciones F-elementales (G-elementales) de columnas de la franja M_x para cada punto fuerte (débil) x ;
- (c) Si $x <^1 y$, adiciones de columnas de la franja M_x a columnas de la franja M_y con coeficientes en \mathbf{G} ;
- (d) Si $x <^2 y$, adiciones de columnas de M_x y M_x^δ a columnas de M_y con coeficientes en \mathbf{G} ;
- (e) Si $x <^3 y$, adiciones independientes de las partes real o imaginarias de las columnas de M_x a las partes real o imaginarias de las columnas de M_y , con coeficientes en \mathbf{G} . Si y es un punto fuerte no se hacen adiciones a sus partes imaginarias, que en este caso son nulas.

La *dimensión* de una representación matricial M de un poset 3-equipado \mathcal{P} es un vector $d = \underline{\dim} M = (d_0; d_x : x \in \mathcal{P})$, donde d_0 es el número de filas de M y para $x \in \mathcal{P}$, d_x es el número de columnas de la franja M_x .

Sea U una representación de un poset 3-equipado \mathcal{P} . Al elegir una base del F-espacio U_0 (que al mismo tiempo induce una G-base de \widetilde{U}_0), se le asigna a U una representación matricial M tal que para todo punto débil (fuerte) $x \in \mathcal{P}$ las columnas de la franja M_x están formadas por coordenadas de algún sistema de generadores del G-espacio U_x (F-espacio $\text{Re } U_x$) módulo \underline{U}_x ($\text{Re } \underline{U}_x$), con respecto a la base elegida.

Nótese que las transformaciones admisibles de cada representación matricial M corresponden a aquellos cambios de la base escogida para U_0 y de los sistemas de generadores de U_x que no varían el número de generadores. Por lo tanto, el sistema de generadores elegido es minimal si y sólo si $\underline{\dim} M = \underline{\dim} U$, y en este caso la matriz M es *reducida*. De lo contrario, $\underline{\dim} M \geq \underline{\dim} U$.

De esta forma, un isomorfismo matricial $M \simeq M'$ implica un isomorfismo $U \simeq U'$ de las representaciones correspondientes (la afirmación recíproca es cierta cuando M y M' son reducidas).

Ya que tenemos definidas las representaciones de posets 3-equipados tanto en forma matricial, como en forma de colecciones de espacios vectoriales, continuaremos con la definición de corepresentaciones en la siguiente sección.

2.3. Corepresentaciones

Junto con los posets 3-equipados, surge el interés en estudiar un problema dual al de sus representaciones, en el siguiente sentido:

Para definir representaciones tomamos un F-espacio U_0 , lo “triplicamos” para obtener $\widetilde{U}_0 \simeq U_0 \otimes 1 \oplus U_0 \otimes \xi \oplus U_0 \otimes \xi^2 \simeq U_0^3$ que es un G-espacio, y luego, para mantener la estructura de poset 3-equipado, relacionamos sus G-subespacios por medio de algunas conteneencias adecuadas. Por lo tanto, ahora consideraremos colecciones de F-subespacios de un G-espacio. Para diferenciar este caso del anterior, se agrega el prefijo *co* a la mayoría de las definiciones.

De esta forma, veamos como los posets 3-equipados conllevan, de manera natural, a la noción de sus corepresentaciones sobre la pareja de campos (\mathbf{F}, \mathbf{G}) .

Sean U_0 un \mathbf{G} -espacio vectorial de dimensión finita y $X \subseteq U_0$ un subconjunto arbitrario, se definen tres \mathbf{F} -subespacios de U_0 que contienen a X

$$\mathbf{F}^1(X) = \mathbf{F}\langle X \rangle, \quad \mathbf{F}^2(X) = \mathbf{F}\langle X, \xi X \rangle, \quad \mathbf{F}^3(X) = \mathbf{F}\langle X, \xi X, \xi^2 X \rangle = \mathbf{G}\langle X \rangle.$$

Una *corepresentación* U del poset 3-equipado \mathcal{P} sobre el par (\mathbf{F}, \mathbf{G}) es cualquier colección de la forma

$$U = (U_0; U_x : x \in \mathcal{P})$$

donde U_0 es un \mathbf{G} -espacio vectorial de dimensión finita, cada U_x es un \mathbf{F} -subespacio de U_0 , y se satisface la siguiente condición para todo $x, y \in \mathcal{P}$

$$x \leq^l y \Rightarrow \mathbf{F}^l(U_x) \subseteq U_y.$$

Obviamente si x es un punto fuerte, U_x es un \mathbf{G} -espacio.

Las corepresentaciones de \mathcal{P} son los objetos de la *categoría de corepresentaciones* $\text{corep } \mathcal{P}$. Un morfismo $U \xrightarrow{\varphi} V$ es cualquier aplicación \mathbf{G} -lineal $\varphi : U_0 \rightarrow V_0$ tal que $\varphi(U_x) \subseteq V_x$ para todo $x \in \mathcal{P}$.

Dos corepresentaciones U y V se dicen *isomorfas* ($U \simeq V$) si existe un \mathbf{G} -isomorfismo $\varphi : U_0 \rightarrow V_0$ tal que $\varphi(U_x) = V_x$ para todo $x \in \mathcal{P}$.

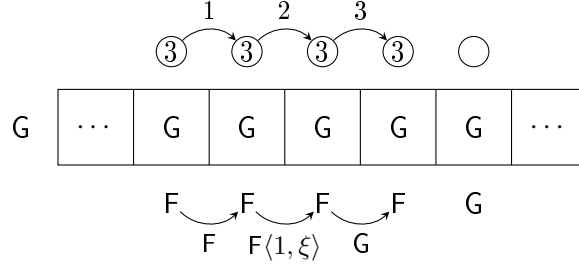
El *radical* de una corepresentación U es una subcorepresentación $\underline{U} = (U_0, \underline{U}_x : x \in \mathcal{P})$ donde $\underline{U}_x = \sum_{y <^l x} \mathbf{F}^l(U_y)$.

La *dimensión* de una corepresentación U es un vector $d = \underline{\dim} U = (d_0; d_x : x \in \mathcal{P})$, donde $d_0 = \dim_{\mathbf{G}} U_0$, $d_x = \dim_{\mathbf{G}} U_x / \underline{U}_x$ ($d_x = \dim_{\mathbf{F}} U_x / \underline{U}_x$) si $x \in \mathcal{P}$ es un punto fuerte (débil).

Una *corepresentación matricial* de un poset 3-equipado \mathcal{P} , sobre la pareja (\mathbf{F}, \mathbf{G}) , es una matriz M sobre \mathbf{G} , dividida en franjas verticales M_x ($x \in \mathcal{P}$). Su conjunto de *transformaciones admisibles* es el siguiente:

- (a) transformaciones \mathbf{G} -elementales de filas de toda la matriz M ;
- (b) transformaciones \mathbf{F} -elementales (\mathbf{G} -elementales) de columnas de la franja M_x para cada punto débil (fuerte) x ;
- (c) si $x <^1 y$, adiciones de columnas de la franja M_x a columnas de la franja M_y con coeficientes en \mathbf{F} .
- (d) si $x <^2 y$, adiciones de columnas de la franja M_x a columnas de la franja M_y con coeficientes en $\mathbf{F}\langle 1, \xi \rangle$.
- (e) si $x <^3 y$, adiciones de columnas de la franja M_x a columnas de la franja M_y con coeficientes en \mathbf{G} .

En el siguiente diagrama se presenta la forma de las corepresentaciones matriciales junto con sus transformaciones admisibles.



A continuación, serán consideradas algunas definiciones y hechos que son completamente análogos al caso de las representaciones de un poset 3-equipado \mathcal{P} .

Dos corepresentaciones matriciales se dicen *equivalentes* o *isomorfas* si una de ellas puede ser obtenida de la otra a partir de una secuencia de transformaciones admisibles.

La *dimensión* de una corepresentación matricial M de \mathcal{P} es un vector $d = \underline{\dim}M = (d_0; d_x : x \in \mathcal{P})$, donde d_0 es el número de filas de M y, para cada $x \in \mathcal{P}$, d_x es el número de columnas de la franja M_x .

Una corepresentación matricial M corresponde a una corepresentación $U \in \text{corep } \mathcal{P}$ si las columnas de cada franja M_x están formadas por coordenadas (con respecto a una base elegida de U_0) de algún sistema de generadores de U_x módulo \underline{U}_x . Nótese que las transformaciones admisibles de M corresponden a aquellos cambios de base de U_0 y de los sistemas de generadores de U_x que no cambian el número de generadores.

De esta forma, se tiene que $\underline{\dim} M = \underline{\dim} U$ si y sólo si los sistemas de generadores elegidos son minimales (es decir, la matriz M es *reducida*). En caso contrario, $\underline{\dim} M \geq \underline{\dim} U$.

Por lo tanto, un isomorfismo matricial $M \simeq M'$ implica un isomorfismo de las corepresentaciones correspondientes $U \simeq V$ (la afirmación recíproca es verdadera cuando M y M' son reducidas).

Aunque las definiciones de representaciones y corepresentaciones son duales, en algún sentido, hasta el momento no hemos encontrado una construcción general que transforme $\text{rep } \mathcal{P}$ en $\text{corep } \mathcal{P}$, o viceversa. De todas maneras, es posible algunas veces trabajar con las dos simultáneamente.

2.4. Propiedad de Krull-Schmidt

Para clasificar los posets 3-equipados según su tipo de representación, en esta sección se va a demostrar que las categorías de sus representaciones y corepresentaciones son de Krull-Schmidt, es decir, sus objetos pueden ser escritos de manera única, salvo permutación, como suma directa de objetos indescomponibles. [2]

Una representación (corepresentación) U de un poset 3-equipado \mathcal{P} es *descomponible* si existen otras dos representaciones (corepresentaciones), no nulas, V y W de \mathcal{P} tales que

$$U_x = V_x \oplus W_x, \quad x \in \{0\} \cup \mathcal{P}$$

en este caso, se escribe $U = V \oplus W$ y decimos que U es *suma directa* de V y W . Naturalmente, las representaciones ó corepresentaciones matriciales correspondientes a U tendrán la forma estándar de una suma directa matricial con cada franja M_x , $x \in \mathcal{P}$, como sigue

$$\dots \begin{array}{|c|c|} \hline & M_x \\ \hline A_x & 0 \\ \hline 0 & B_x \\ \hline \end{array} \dots$$

Si no existen V y W , entonces U se dice *indescomponible*.

Teorema 5. *Dado un poset 3-equipado \mathcal{P} , las categorías $\text{rep } \mathcal{P}$ y $\text{corep } \mathcal{P}$ son de Krull-Schmidt.*

Demostración. Es claro que las categorías de representaciones y corepresentaciones son aditivas. Se va utilizar el hecho de que una categoría aditiva es de Krull-Schmidt si y solo si el anillo de endomorfismos de cada objeto indescomponible es local (ver por ejemplo [4, Section 1.3]).

Como los endomorfismos de cualquier representación U son aplicaciones \mathbf{F} -lineales, nótese que ellos conforman un álgebra $\text{End}U$, de dimensión finita sobre \mathbf{F} , con las operaciones usuales de suma, composición de aplicaciones y producto por escalar.

Sea U una corepresentación de un poset 3-equipado \mathcal{P} . Su conjunto de endomorfismos $\text{End}U$, esta formado por aplicaciones \mathbf{G} -lineales que respetan la estructura de \mathcal{P} . Cada U_x es un \mathbf{F} -espacio, por lo tanto si $g \in \mathbf{G}$, $u \in U_x$ y $\varphi \in \text{End}U$, en general $g\varphi(u) = \varphi(gu)$ no es un elemento de U_x . Es decir, en general $\text{End}U$ no es una \mathbf{G} -álgebra, sin embargo, es sencillo ver que si tiene estructura de \mathbf{F} -álgebra.

Entonces si U es una representación, o bien una corepresentación, se tiene que $\text{End}U$ es una \mathbf{F} -álgebra de dimensión finita y por lo tanto un anillo artiniiano. Como todo anillo artiniiano es semiperfecto existe un conjunto $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset \text{End}U$ de idempotentes ortogonales tales que $\sum_{i=1}^n e_i = 1$ y cada $e_i \text{End}U e_i$ es local. De esta forma, si U es indescomponible, $n = 1$ y $\text{End}U$ es un anillo local.

Se tiene que para cualquier representación o corepresentación U indescomponible, su anillo de endomorfismos $\text{End}U$ es local. Esto es, las categorías $\text{rep } \mathcal{P}$ y $\text{corep } \mathcal{P}$ son de Krull-Schmidt. \square

Anotamos que las categorías de representaciones y corepresentaciones de algún poset 3-equipado no son abelianas.

La propiedad de Krull-Schmidt nos permite decir que un poset 3-equipado es de tipo *representación finito* (*corepresentación finito*) si tiene un número finito de representaciones (corepresentaciones) indescomponibles no isomorfas dos a dos. De lo contrario, el poset se dice de tipo *representación infinito* (*corepresentación infinito*).

Estaremos especialmente interesados en las representaciones y corepresentaciones indescomponibles cuyas dimensiones no tengan coordenadas nulas, éstas se llaman indescomponibles *sinceras*. Un poset 3-equipado se dice *sincero* si tiene al menos una de ellas.

Nótese que una representación o corepresentación U es sincera si y sólo si $\underline{U}_x \subsetneq U_x$, para cada $x \in \mathcal{P}$.

De aquí en adelante, con la palabra indescomponibles estaremos haciendo referencia a representaciones y corepresentaciones a la vez.

Como no hay una descripción categórica completa de $\text{rep } \mathcal{P}$ y $\text{corep } \mathcal{P}$, se hace necesario obtener las clasificaciones de los posets 3-equipados tanto del punto de vista de sus representaciones, como de sus corepresentaciones (indescomponibles). Sin embargo, estos dos

conceptos están estrechamente relacionados, y como veremos en adelante o bien se puede trabajar con ellos simultáneamente, o bien del trabajo con representaciones se obtienen problemas de corepresentaciones y viceversa.

En la siguiente sección presentaremos, en el lenguaje introducido hasta ahora, los posets 3-equipados de tipo finito, entre ellos los sinceros, y caracterizaremos completamente los posets 3-equipados críticos para los cuales se van a describir completamente sus representaciones y corepresentaciones.

2.5. Posets 3-equipados críticos

En esta sección vamos a caracterizar los posets 3-equipados críticos a través de sus formas cuadráticas asociadas y empezaremos a ver como estas se relacionan con las representaciones y corepresentaciones.

Como es conocido una forma cuadrática f es débilmente positiva (débilmente no negativa) si $f(d) > 0$ ($f(d) \geq 0$) para cada vector $d > 0$.

Un poset 3-equipado se dice *crítico* si su forma de Tits es débilmente no negativa, y las formas de Tits de cualquiera de sus subposets propios son débilmente positivas. Obtenemos una definición equivalente considerando la coforma cuadrática de Tits en lugar de la forma.

Para describir los posets 3-equipados críticos se usa el siguiente resultado, que es consecuencia de [31, teorema A] y de una interpretación, no del todo trivial, de las representaciones y corepresentaciones de posets 3-equipados, vistas como representaciones de algunos anillos (ver sección 5.1).

Teorema 6. *Dado un poset 3-equipado \mathcal{P} , las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1) \mathcal{P} es de tipo representación finito.
- (2) \mathcal{P} es de tipo corerepresentación finito.
- (3) La forma cuadrática de Tits f de \mathcal{P} es débilmente positiva.
- (4) La coforma cuadrática de Tits \hat{f} de \mathcal{P} es débilmente positiva.
- (5) \mathcal{P} no contiene a ninguno de los posets 3-equipados críticos K_1, \dots, K_5 (ver teorema 1), K_{10} y K_{11} como subposet, ni tampoco al poset W_{10} .

De este modo, los posets 3-equipados críticos incluyen los posets críticos ordinarios de Kleiner cuyos diagramas están en la sección 1.1, teorema 1, y los dos *posets críticos 3-equipados* con equipamiento no trivial K_{10} y K_{11} de formas (2.2) y (2.3) respectivamente. El diagrama del poset W_{10} es

$$\begin{array}{cc} a & b \\ \textcircled{3} & \textcircled{3} \end{array} \quad (2.4)$$

Las notaciones K_{10} , K_{11} , W_{10} continúan la notación de [60], en donde fueron considerados los posets críticos no trivialmente equipados K_6, \dots, K_9 y los posets equipados W_1, \dots, W_9 .

Como se mencionó en la introducción, vamos a empezar el estudio de los indescomponibles (representaciones y corepresentaciones) de posets 3-equipados de tipo infinito con los

postes críticos, ya que los posets 3-equipados de tipo finito ya han sido descritos indirectamente. De hecho por [31, Theorem B] los únicos posets sinceros 3-equipados de tipo finito (no hay diferencia con respecto a representaciones o corepresentaciones) son los siguientes

$$F_{19} \quad \textcircled{3} \qquad F_{20} \quad \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \parallel \\ \textcircled{3} \end{array}.$$

Sus representaciones y corepresentaciones indescomponibles sinceras pueden ser calculadas de manera sencilla usando las definiciones de las secciones anteriores. Las hemos obtenido, y están presentadas en el Apéndice A en forma matricial evidente, con los valores de su forma y su coforma de Tits evaluadas en las respectivas dimensiones.

Nótese que el poset W_{10} no es crítico, en efecto su forma de Tits es $f(d) = d_0^2 + 3d_a^2 + 3d_b^2 - d_0(3d_a + 3d_b)$ y se tiene que para el vector $d = (2n, n, n)$ con n entero, $f(d) = -2n^2$. Mas aún, casi todas las representaciones matriciales de dimensión $(2n, n, n)$ contienen el *problema matricial salvaje* de reducir tres matrices simultáneamente por transformaciones de semejanza ordinaria. Dichas representaciones tienen la forma

$$\begin{array}{cc} a & b \\ \hline I_n & I_n \\ \hline \xi I_n & A \end{array}$$

donde A es una matriz de orden n con entradas en \mathbb{G} , que se reduce por transformaciones de semejanza $(X^{-1}AX) = X^{-1}(\text{Re } A + \text{Im}_1 A + \text{Im}_2 A)X$ con X una matriz no singular sobre \mathbb{F} . Es decir, las tres matrices $\text{Re } A, \text{Im}_1 A, \text{Im}_2 A$ que tienen entradas en \mathbb{F} , se reducen simultáneamente por transformaciones de semejanza ordinaria sobre \mathbb{F} .

Recordemos que un problema matricial se dice *salvaje* si contiene al problema de reducir dos matrices simultáneamente por transformaciones de semejanza [7].

Análogamente, evaluando la coforma de Tits $\hat{f}(d) = 3d_0^2 + d_a^2 + d_b^2 - 3d_0(d_a + d_b)$, del poset 3-equipado W_{10} en el vector $d = (2n, 3n, n)$, $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que $\hat{f}(d) = -2n^2$. Además se tienen corepresentaciones de la forma

$$\begin{array}{cccc} & a & & b \\ \hline I_n & \xi I_n & \xi^2 I_n & I_n \\ \hline 0 & I_n & -\xi I_n & A \end{array}$$

en este caso se vuelve a tener que A es una matriz de orden n con entradas en \mathbb{G} , que se reduce por transformaciones de semejanza sobre \mathbb{F} .

Ya que las representaciones y corepresentaciones de W_{10} incluyen problemas salvajes, diremos que el poset es de *tipo salvaje* y por lo tanto no se incluye entre los objetos de estudio de este trabajo.

Hemos calculado las raíces admisibles de las formas cuadráticas asociadas a los posets 3-equipados críticos, en los ejemplos 3 y 4. Además, estas formas tienen raíces imaginarias (ya que son débilmente no negativas), que son obviamente vectores de \mathbb{N}^3 , y que presentamos a continuación.

Lema 7. *Raíces imaginarias de las formas cuadráticas asociadas a los posets 3-equipados críticos.*

- (i) *Considérense el poset K_{10} , su forma de Tits f , y su coforma \widehat{f} . Las raíces imaginarias de f tienen la forma $(2n, n, n)$, mientras que las raíces imaginarias de \widehat{f} son de la forma $(2n, 3n, n)$, para cada $n \in \mathbb{N}^3$.*
- (ii) *Para el poset K_{11} , las raíces imaginarias de su forma de Tits f son de la forma $(3n, n, n)$, y las de su coforma de Tits son de la forma (n, n, n) .*

Tenemos ya descritos los posets 3-equipados críticos y sus indescomponibles serán estudiados en forma matricial en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 3

Posets 3-equipados de un parámetro

Los posets 3-equipados de un parámetro, que son de tipo de representación infinito, serán caracterizados en este capítulo mediante un criterio, cuya demostración permite además, obtener la lista de posets sinceros con equipamiento no trivial.

Por medio de una noción de series (análoga al caso de los posets ordinarios), en la primera sección se definen los posets 3-equipados de un parámetro.

Los resultados principales están formulados en la sección 3.2. Estos son: el criterio de un parámetro (teorema 11), la lista de los posets sinceros no trivialmente 3-equipados de un parámetro (teorema 12), la clasificación de indescomponibles sinceros, en forma matricial evidente, de los posets K_{10} y K_{11} (teoremas 13 y 14), la relación entre las dimensiones de estos indescomponibles con las raíces de las formas cuadráticas asociadas a cada poset (teorema 15), y la relación entre las representaciones y las corepresentaciones de cada poset 3-equipado sincero de tipo finito y de un parámetro (corolario 16).

En la sección 3.3 se demuestran el criterio de un parámetro y el teorema 12, dejando para el siguiente capítulo los detalles de la clasificación de indescomponibles, es decir, las demostraciones de los teoremas 13 y 14.

3.1. Series y posets 3-equipados de un parámetro

En esta sección se definen los posets 3-equipados de un parámetro, de una manera que permite describir matricialmente sus infinitas representaciones y corepresentaciones no isomorfas entre sí.

Para ello se definen primero, representaciones y corepresentaciones matriciales sobre la pareja de anillos de polinomios $(\mathbf{F}[t], \mathbf{G}[t])$ análogamente a como se definen sobre la pareja (\mathbf{F}, \mathbf{G}) . Esto se hace considerando matrices divididas en franjas verticales sobre el par $(\mathbf{F}[t], \mathbf{G}[t])$ en lugar de (\mathbf{F}, \mathbf{G}) (por el momento no se introducen transformaciones admisibles para ellas).

Cada representación sobre $(\mathbf{F}[t], \mathbf{G}[t])$ genera una *F-serie* de representaciones sobre (\mathbf{F}, \mathbf{G}) substituyendo la variable t por alguna matriz cuadrada A sobre \mathbf{F} , en alguna forma canónica estándar, y cada escalar $g \in \mathbf{G}$ por una matriz, del mismo tamaño de A , de la forma gI .

Ejemplo 8. Para el poset K_{10} de la forma (2.2), la representación

$$\begin{array}{c} a \quad b \\ \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \xi & t \\ \hline \end{array}} \end{array}$$

sobre $(F[t], G[t])$, genera la F-serie

$$\begin{array}{c} a \quad b \\ \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline I_n & I_n \\ \hline \xi I_n & \Theta \\ \hline \end{array}}, \end{array}$$

donde Θ es una matriz de orden n en alguna forma canónica estándar con respecto a las transformaciones de semejanza $(X^{-1}\Theta X)$ sobre F .

Una representación sobre $(F[t], G[t])$ en la que el parámetro t no se encuentre en una franja correspondiente a un punto fuerte, genera una *G-serie* de representaciones sobre (F, G) al sustituir la variable t por alguna matriz cuadrada Θ sobre G , en alguna forma canónica estándar, y cada escalar $g \in G$ por una matriz, del mismo tamaño de Θ , de la forma gI .

Ejemplo 9. Para el poset K_{11} de la forma (2.3), la representación

$$\begin{array}{c} a \quad b \\ \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline \xi & 1 \\ \hline \xi^2 & -\xi + t \\ \hline \end{array}} \end{array}$$

sobre $(F[t], G[t])$, genera la G-serie

$$\begin{array}{c} a \quad b \\ \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline I_n & 0 \\ \hline \xi I_n & I_n \\ \hline \xi^2 I_n & -\xi I_n + \Theta \\ \hline \end{array}}, \end{array}$$

en este caso Θ es una matriz de orden n en forma canónica estándar con respecto a las transformaciones de semejanza pseudolineal $X^{-1}\Theta X + X^{-1}X^\delta$ sobre G .

De la misma forma, cada corepresentación matricial sobre la pareja de anillos de polinomios $(F[t], G[t])$ genera una *F(G)-serie* de corepresentaciones sobre (F, G) substituyendo la variable t por una matriz cuadrada A sobre $F(G)$, en alguna forma canónica, y cada escalar $g \in G$, por matrices escalares gI del mismo tamaño.

Ejemplo 10. La $(F[t], G[t])$ -corepresentación del poset K_{11} de la forma (2.3),

$$\begin{array}{c} a \quad b \\ \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \xi + t\xi^2 \\ \hline \end{array}}, \end{array}$$

genera la F -serie

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline I_n & \xi I_n + \xi^2 \Theta \end{array},$$

donde Θ es una matriz de orden n en forma canónica estándar con respecto a las transformaciones de semejanza $(X^{-1}\Theta X)$ sobre F .

Así mismo, la $(F[t], G[t])$ -corepresentación

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 1 & \xi & \xi^2 & 1 \\ 0 & 1 & -\xi & t \end{array},$$

del poset K_{10} de la forma (2.2), genera la G -serie

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline I_n & \xi I_n & \xi^2 I_n & I_n \\ 0 & I_n & -\xi I_n & \Theta \end{array};$$

para este caso Θ es una matriz de orden n en forma canónica estándar con respecto a las transformaciones de semejanza pseudolineal $X^{-1}\Theta X + X^{-1}X^\delta$ sobre G .

Por lo tanto, con una sola matriz se describe todo un conjunto infinito de representaciones o corepresentaciones matriciales no isomorfas dos a dos, en cada dimensión. Esto da origen a la siguiente definición.

Un poset 3-equipado \mathcal{P} se dice de *un parámetro*, si es de tipo infinito y existe una serie que contiene casi todas sus representaciones o corepresentaciones indescomponibles (salvo isomorfismo), de cada dimensión dada.

En general, un poset 3-equipado \mathcal{P} es de n *parámetros* para $n \in \mathbb{N}$, si el número minimal de series con que se cubren casi todas sus representaciones o corepresentaciones indescomponibles (salvo isomorfismo), de cada dimensión dada, es n .

Nótese que los indescomponibles del poset W_{10} de la forma (2.4) no pueden ser parametrizados, es decir, no pueden ser cubiertos con un número finito de series.

En la siguiente sección, se formulan los resultados principales que caracterizan y describen los posets 3-equipados de un parámetro, y sus representaciones y corepresentaciones sobre la pareja de campos (F, G) .

3.2. Formulación de los resultados principales

El primer resultado que se formula en esta sección, establece las condiciones necesarias y suficientes para que un poset 3-equipado sea de un parámetro.

Teorema 11 (Criterio de un parámetro para posets 3-equipados). *Sean F un campo de característica 3, G una extensión puramente inseparable de grado 3 sobre F y (\mathcal{P}, \leq) un poset 3-equipado con equipamiento no trivial. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. \mathcal{P} es de un parámetro con respecto a representaciones y corepresentaciones.

2. \mathcal{P} contiene exactamente uno de los posets críticos 3-equipados $K_1, \dots, K_5, K_{10}, K_{11}$ como subposet, y no contiene al poset W_{10} de la forma (2.4).

Ahora se presentan los posets 3-equipados sinceros de un parámetro.

Teorema 12. *Los posets 3-equipados sinceros de un parámetro (con respecto a representaciones o corepresentaciones) se agotan, salvo isomorfismo, por los posets ordinarios $K_1, \dots, K_5, A_1, \dots, A_{24}, S_1, S_2, S_3$ (ver [46], [58]) y los posets críticos con equipamiento no trivial K_{10} y K_{11} de formas (2.2) y (2.3), que recordamos a continuación:*

$$K_{10} \quad \begin{array}{cc} a & b \\ \textcircled{3} & \textcircled{} \end{array} \quad K_{11} \quad \begin{array}{c} \textcircled{3} \ b \\ | \\ \textcircled{3} \ a \end{array} .$$

Los siguientes teoremas corresponden a la clasificación de los indescomponibles de los posets 3-equipados críticos con equipamiento no trivial, las listas de las formas matriciales demuestran claramente que estos posets son sinceros y de un parámetro.

Teorema 13. *Los indescomponibles sinceros del poset 3-equipado K_{10} , de la forma (2.2), se agotan, salvo isomorfismo, por:*

- (i) *Los 33 tipos de representaciones matriciales indescomponibles sinceras, no isomorfas dos a dos, listadas en el Apéndice B;*
- (ii) *Los 33 tipos de corepresentaciones matriciales indescomponibles sinceras, no isomorfas dos a dos, listadas en el Apéndice C.*

Teorema 14. *Los indescomponibles sinceros del poset 3-equipado K_{11} , de la forma (2.3), se agotan, salvo isomorfismo, por:*

- (i) *Los 29 tipos de representaciones matriciales indescomponibles sinceras, no isomorfas dos a dos, listadas en el Apéndice D;*
- (ii) *Los 29 tipos de corepresentaciones matriciales indescomponibles sinceras, no isomorfas dos a dos, listadas en el Apéndice E.*

El siguiente teorema establece la relación entre las raíces de las formas cuadráticas asociadas a los posets 3-equipados sinceros de un parámetro, con equipamiento no trivial, y las dimensiones de sus indescomponibles.

Teorema 15. *Sean \mathcal{P} un poset 3-equipado sincero de un parámetro, con equipamiento no trivial, y $d \in \tilde{\mathcal{P}}$ un vector. Entonces d es la dimensión de alguna representación (corerepresentación) indescomponible de \mathcal{P} si y sólo si d es una raíz admisible o imaginaria de la forma (coforma) de Tits f (\hat{f}) de \mathcal{P} . Mas aún:*

- *Si d es una raíz admisible de f , entonces existe precisamente una representación indescomponible de \mathcal{P} (salvo isomorfismo), de dimensión d .*
- *Si d es una raíz admisible de \hat{f} , entonces existe precisamente una corerepresentación indescomponible de \mathcal{P} (salvo isomorfismo), de dimensión d .*
- *Si d es una raíz imaginaria de f , entonces existen infinitas representaciones indescomponibles no isomorfas dos a dos de dimensión d .*

- Si d es una raíz imaginaria de \widehat{f} , entonces existen infinitas corepresentaciones indescomponibles no isomorfas dos a dos de dimensión d .

Para demostrar el resultado anterior usamos las clasificaciones de indescomponibles de los posets 3-equipados sinceros de un parámetro (teoremas 13 y 14), sus raíces admisibles que fueron calculadas en los ejemplos 3 y 4 y el lema 7.

La clasificación de los indescomponibles en forma matricial permite establecer el siguiente resultado.

Corolario 16. *Sea \mathcal{P} un poset 3-equipado crítico o de tipo finito. Si \mathcal{P} es sincero, entonces existe una correspondencia biyectiva entre sus representaciones y sus corepresentaciones, tal que para cada representación U indescomponible de \mathcal{P} , se cumple una de las dos opciones siguientes:*

- Si la dimensión d de U es tal que $d_x = 3n$, para todo punto fuerte $x \in \mathcal{P}$ y para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces existe una corerepresentación V indescomponible de \mathcal{P} , cuya dimensión $\widehat{d} = (\widehat{d}_0, \widehat{d}_x : x \in \mathcal{P})$ satisface que $\widehat{d}_x = n$ si x es fuerte, y $\widehat{d}_x = d_x$, para x débil.
- Si d no satisface la condición anterior, es decir, existe un punto fuerte $x \in \mathcal{P}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $d_x \neq 3n$, entonces existe una corerepresentación V indescomponible de \mathcal{P} , cuya dimensión $\widehat{d} = (\widehat{d}_0, \widehat{d}_x : x \in \mathcal{P})$ satisface que $\widehat{d}_x = d_x$ si x es fuerte, y $\widehat{d}_x = 3d_x$, para x débil.

La n -ésima representación (corerepresentación) de algún poset crítico K_{1i} , $i = 0, 1$, según la numeración de los apéndices, se denota $K_{1i} - n$ ($\widehat{K}_{1i} - n$).

Según el corolario anterior, se puede ver que a $K_{1i} - n$ le corresponde $\widehat{K}_{1i} - n$. De hecho, las tablas de los apéndices están organizadas siguiendo esta correspondencia. Nótese además, que para los posets de tipo finito, a cada representación P de uno de ellos le corresponde la corerepresentación \widehat{P} (Apéndice A).

Además si d es una raíz admisible con $f(d) = 1$ se cumple la segunda condición del corolario y $\widehat{f}(\widehat{d}) = 3$. En el otro caso, si d es una raíz admisible con $f(d) = 3$ se cumple la primera condición del corolario y $\widehat{f}(\widehat{d}) = 1$.

3.3. Demostración de los teoremas 11 y 12

Antes de empezar con las demostraciones, se van a establecer algunas observaciones que son sencillas y de gran utilidad. Empezamos con un lema.

Lema 17. *Sea \mathcal{P} un poset 3-equipado tal que $\mathcal{P} = \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2$ (es decir, \mathcal{P} es la unión disyunta de sus subposets \mathcal{Q}_1 y \mathcal{Q}_2) con $\mathcal{Q}_1 <^3 \mathcal{Q}_2$. Entonces cualquier indescomponible U de \mathcal{P} es de la forma $U = V \oplus 0$, donde V es, o bien un indescomponible de \mathcal{Q}_1 , o bien un indescomponible de \mathcal{Q}_2 .*

Demostración. Sea U una corerepresentación de \mathcal{P} . Nótese que para todo punto $z \in \mathcal{Q}_2$, el G -espacio $F^3(\mathcal{Q}_1) = \sum_{x \in \mathcal{Q}_1} F^3(U_x)$ está contenido en $F^3(\mathcal{Q}_1) \subseteq U_z$. Entonces $U = V \oplus W$ donde V tiene los espacios $V_0 = F^3(\mathcal{Q}_1)$, $V_x = U_x$ para todo $x \in \mathcal{Q}_1$, $V_z = 0$ para todo

$z \in \mathcal{Q}_2$, y W está formada por $W_0 = U_0 \setminus V_0$, $W_x = 0$ para todo $x \in \mathcal{Q}_1$, $W_z = U_z \setminus V_0$ para todo $z \in \mathcal{Q}_2$.

Si U es una representación de \mathcal{P} , se tiene que $\mathbf{G}^3(\mathcal{Q}_1) = \sum_{x \in \mathcal{Q}_1} \mathbf{G}^3(U_x)$ es un \mathbf{G} -subespacio fuerte de \underline{U}_z para todo $z \in \mathcal{Q}_2$. Nuevamente se puede escribir $U = V \oplus W$ donde V es la colección $V_0 = \text{Re } \mathbf{G}^3(\mathcal{Q}_1)$, $V_x = U_x$ para todo $x \in \mathcal{Q}_1$, $V_z = 0$ para todo $z \in \mathcal{Q}_2$, y W es de la forma $W_0 = U_0 \setminus V_0$, $W_x = 0$ para todo $x \in \mathcal{Q}_1$, $W_z = U_z \setminus V_0$ para todo $z \in \mathcal{Q}_2$.

Entonces, si U es indescomponible (bien sea representación o corepresentación) esta completamente determinada por o un indescomponible de \mathcal{Q}_1 , o por un indescomponible de \mathcal{Q}_2 .

Al considerar las matrices, es claro que cualquier elemento no nulo en una franja correspondiente a \mathcal{Q}_1 puede anular todos los elementos de las franjas de \mathcal{Q}_2 , que estén al frente suyo (ver las adiciones de tipo (e) páginas 13 y 14). De esta manera el lema queda demostrado. \square

A continuación, se establece alguna notación que se va a usar en adelante, especialmente en las demostraciones.

Nota 18. Dado un poset 3-equipado \mathcal{P} , su conjunto de puntos es la unión disyunta de

$$\mathcal{P}^1 = \{x \in \mathcal{P} : x \leq^1 x\}, \quad \mathcal{P}^3 = \{x \in \mathcal{P} : x \leq^3 x\}.$$

Sea $w \in \mathcal{P}$ un punto arbitrario, se definen su *cono superior fuerte* $w^\nabla = \{x \in \mathcal{P}^3 : w <^3 x\}$, y simétricamente su *cono inferior fuerte* $w^\Delta = \{x \in \mathcal{P}^3 : x <^3 w\}$.

En las matrices, los bloques vacíos son bloques nulos, y un bloque marcado con \mathbf{G} o \mathbf{F} representa una matriz arbitraria con entradas en el respectivo campo.

Cuando en los problemas matriciales, reducimos la franja correspondiente a cualquier punto débil $x \in \mathcal{P}^1$ en la suma directa de sus indescomponibles, usamos los indescomponibles del poset F_{19} (que es un punto débil), y escribimos en el caso de las representaciones:

$$\boxed{D(x)} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} x \\ I \\ I \\ \xi I \quad I \\ \xi^2 I \quad -\xi I \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \xi I \\ I \\ \xi I \\ \xi^2 I \end{array} \end{array},$$

y para las corepresentaciones

$$\boxed{\widehat{D}(x)} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} x \\ I \quad \xi I \quad \xi^2 I \\ \\ I \quad \xi I \\ \\ I \quad \xi I \quad \xi^2 I \\ \\ I \quad -\xi I \\ \\ I \end{array} \end{array}.$$

Ahora consideremos los siguientes hechos con respecto a los indescomponibles del poset F_{20} .

Nota 19. Los indescomponibles sinceros del poset F_{20} $\begin{matrix} \textcircled{3} & b \\ \parallel & \\ \textcircled{3} & a \end{matrix}$, se obtuvieron reduciendo la franja de a en suma directa de sus indescomponibles, y con adiciones admisibles se anularon todos los bloques en la franja de b , excepto los que están al frente de la suma directa de $T(a)$, o respectivamente $\widehat{T}(a)$, de modo que una representación matricial arbitraria toma la siguiente forma

$$\begin{array}{c} M_a \qquad M_b \\ \left[\begin{array}{c|c} D(a) & \\ \hline & G \\ & D(b) \end{array} \right]; \end{array}$$

y cualquier corepresentación matricial toma la forma

$$\begin{array}{c} M_a \qquad M_b \\ \left[\begin{array}{c|c} \widehat{D}(a) & \\ \hline I & \xi^2 F \\ & \widehat{D}(b) \end{array} \right]. \end{array}$$

Esta reducción nos deja solamente los siguientes problemas matriciales que producen indescomponibles sinceros:

$$\begin{array}{c} a \quad b \\ \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline \xi I & 0 \\ \xi^2 I & G \end{array} \right] \circ \end{array} \qquad \begin{array}{c} a \quad b \\ \left[\begin{array}{c|c} I & \xi^2 F \end{array} \right] \circ \end{array}$$

El símbolo de un punto fuerte frente al bloque marcado con G , significa que para mantener la matriz en esa misma forma, este bloque se reduce por transformaciones G -elementales de filas y columnas, es decir como una franja correspondiente a un punto fuerte en el caso de corepresentaciones.

Análogamente, el diagrama de un punto fuerte frente al bloque marcado con F , quiere decir que este bloque se puede reducir por transformaciones F -elementales de filas y columnas, para conservar la matriz en la misma forma.

De esta manera obtuvimos los indescomponibles $H(a, b)$ y $\widehat{H}(a, b)$ presentados en el apéndice A.

Las siguiente formas matriciales de la representación $H(a, b)$ son equivalentes mediante operaciones admisibles de columnas

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \xi & 0 \\ \xi^2 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \xi & 1 \\ \xi^2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline \xi & 0 \\ \xi^2 & 0 \end{array} \right].$$

Teniendo ya las herramientas necesarias, se procede a mostrar el criterio de un parámetro para posets 3-equipados.

Demostración del criterio de un parámetro. Se sabe que los posets 3-equipados críticos son sinceros de un parámetro, gracias a las clasificaciones de sus indescomponibles (ver [30] para los posets críticos ordinarios y los teoremas 13 y 14 para K_{10} y K_{11}).

La necesidad es clara: si un poset 3-equipado es de un parámetro, es de tipo infinito y por lo tanto debe contener al menos a uno de los posets críticos como subposet. Pero si contiene a más de uno, tendrá también más de una serie de representaciones o corepresentaciones. Por lo tanto debe contener exactamente a un poset crítico.

Recíprocamente, si \mathcal{P} es un poset que contiene exactamente a uno de los posets críticos como subposet, es de tipo infinito, y para ver que es de un parámetro consideramos, a continuación, las formas que puede tener.

Como \mathcal{P} no puede contener al poset W_{10} , es decir no puede contener dos puntos débiles incomparables entre sí, entonces \mathcal{P}^1 tiene forma cadena donde, si \mathcal{P} no contiene al poset crítico K_{11} , entonces $x <^l y$ con $l \geq 2$, para cada par de puntos débiles $x, y \in \mathcal{P}^1$.

Si \mathcal{P} contiene a $K_{11} = \{a <^1 b\}$, entonces para cada par de puntos débiles $x, y \in \mathcal{P}^1$ tales que $x, y \neq a$ y $x, y \neq b$, se tiene que $x <^l y$ con $l \geq 2$, además o bien $x <^2 a$, o bien $b <^2 x$ para todo $x \in \mathcal{P}^1$.

Sea \mathcal{P} un poset 3-equipado de la forma

$$\mathcal{P} = \mathcal{Q}_1 <^3 K <^3 \mathcal{Q}_2, \tag{3.1}$$

donde K es un poset 3-equipado de un parámetro (puede ser un crítico) y \mathcal{Q}_1 y \mathcal{Q}_2 son posets 3-equipados de tipo finito, entonces, por el lema 17, \mathcal{P} es de un parámetro, pero no es sincero.

Se van a considerar tres casos, cuando \mathcal{P} contiene a uno de los posets críticos ordinarios de Kleiner, cuando \mathcal{P} contiene a K_{10} , y cuando \mathcal{P} contiene a K_{11} .

Supongamos que \mathcal{P} contiene a uno de los posets críticos ordinarios de Kleiner. Por el criterio 1 (ver página 3), \mathcal{P}^3 es de un parámetro, luego si $\mathcal{P}^1 = \emptyset$ entonces \mathcal{P} es un poset ordinario de un parámetro.

Si hay algunos puntos débiles en \mathcal{P}^1 estos deben estar relacionados fuertemente con todo $x \in \mathcal{P}^3$, luego \mathcal{P} es de la forma (3.1) y por lo tanto el poset \mathcal{P} es de un parámetro.

Ahora supongamos que \mathcal{P} contiene al poset K_{10} de la forma (2.2). Como K_{10} tiene un punto débil a y otro fuerte b , todo punto fuerte $x \in \mathcal{P}^3$, $x \neq b$ estará en relación fuerte con a y con todos los demás puntos débiles de \mathcal{P}^1 . De hecho, $\mathcal{P}^3 = a^\Delta \cup \{b\} \cup a^\nabla$ es un poset de tipo finito. Todo punto débil $y \in \mathcal{P}^1$, $y \neq a$ está en relación fuerte con b y todos los demás puntos fuertes de \mathcal{P}^3 . Teniendo en cuenta que \mathcal{P}^1 es una cadena, basta trabajar solamente dos puntos débiles y_1, y_2 , tales que $y_1 <^2 a <^2 y_2$ ya que para cualquier $z \in \mathcal{P}^1$ tal que $z <^2 y_1$ o $y_2 <^2 z$ por (2.1), se tiene que z estará en relación fuerte con a , y como también lo está con b estamos en el caso (3.1). De este modo, consideremos una representación matricial de \mathcal{P} :

a^Δ	y_1	a	b	y_2	a^∇
F	G	G	F	G	F

Se reducen los bloques correspondientes a \mathcal{P}^3 en la suma directa de sus representaciones indescomponibles (que son conocidas desde [30]), y usando las adiciones de a^Δ a los puntos débiles se anulan varios bloques, de modo que la representación matricial adquiere la siguiente forma.

a^Δ	y_1	a	b	y_2	a^∇
M_1	G	G	B_1	F	M_2
			F	G	F

Nótese que los bloques M_1 , B_1 y M_2 están conformados por bloques nulos y matrices identidad de diferentes tamaños adecuados.

Ahora reducimos los bloques correspondientes a los puntos y_1 y a en suma directa de los indescomponibles del poset F_{20} (ya que $y_1 <^2 a$). Además usando las adiciones determinadas por relaciones fuertes de y_1 y a a y_2 , b y a^∇ anulamos otros bloques, obteniendo la siguiente matriz.

a^Δ	y_1	a	b	y_2	a^∇
M_1	$D(y_1)$	I	B_1		M_2
	I	I			
	ξI				
	$\xi^2 I$	I			
		$D(a)$	F	G	

La pareja de matrices $(D(a), F)$ se reduce según el teorema 13 (i) como la suma directa de los indescomponibles del poset K_{10} , denotaremos a la pareja reducida (A, B) .

Además según la nota 19, las adiciones determinadas por $a <^2 y_2$ permiten anular la mayoría de bloques en la franja correspondiente a y_2 (nótese que la matriz A tiene la forma de suma directa de representaciones indescomponibles de F_{19}). Los bloques que no se anulan con estas adiciones, son los que están frente a bloques de la forma $T(a)$, es decir, están frente a bloques de (A, B) que tienen formas matriciales de tipo $K_{10} - 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 16, 17, 19, 20, 24, 25, 26, 27, 29, 31, 33$ (ver apéndice B). Sin embargo todos estos bloques tienen elementos no nulos en la franja del punto b , luego con las adiciones determinadas por $b <^3 y_2$, y teniendo en cuenta las observaciones de la nota 19, todos los bloques de la franja y_2 , que están en frente de (A, B) quedan anulados. La representación matricial toma la siguiente forma:

a^Δ	y_1	a	b	y_2	a^∇
M_1	$D(y_1)$	I	B_1		M_2
	I	I	B		
	ξI	A			
	$\xi^2 I$	$D(a)$	I		
		I	ξI	I	
		$\xi^2 I$		$D(y_2)$	

(3.2)

De este modo, las representaciones de \mathcal{P} son sumas directas de las representaciones indescomponibles de los posets de tipo finito $\mathcal{P}^3, F_{19}, F_{20}$ y el poset de un parámetro K_{10} . Por lo tanto \mathcal{P} es un poset de un parámetro, cuya serie coincide con la serie de $K_{10} = \{a, b\}$.

Para demostrar que \mathcal{P} también es de un parámetro con respecto a sus corepresentaciones, procedemos igual que para el caso de las representaciones. Es decir, consideramos una corepresentación matricial cualquiera y reducimos primero las franjas correspondientes a \mathcal{P}^3 en suma directa de sus indescomponibles, que en este caso son las representaciones indescomponibles del poset ordinario de tipo finito \mathcal{P}^3 sobre el campo \mathbb{G} . Después anulamos todos los bloques posibles usando las adiciones de a^Δ a y_1, a y y_2 . De este modo se obtiene la corepresentación matricial:

$$\begin{array}{c}
 a^\Delta \quad y_1 \quad a \quad b \quad y_2 \quad a^\nabla \\
 \hline
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 M_1 & & & B_1 & & M_2 \\
 \hline
 & \mathbb{G} & \mathbb{G} & & \mathbb{G} & \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

Luego, se reducen las franjas de y_1 y a en suma directa de las corepresentaciones indescomponibles de F_{20} , y se anulan varios bloques usando las adiciones de y_1 a b, y_2 y a^∇ .

$$\begin{array}{c}
 a^\Delta \quad y_1 \quad a \quad b \quad y_2 \quad a^\nabla \\
 \hline
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 M_1 & & & B_1 & & M_2 \\
 \hline
 & \widehat{D}(y_1) & & & & \\
 & & I & \xi^2 I & & \\
 & & & \widehat{D}(a) & & \\
 & & & & \mathbb{G} & \mathbb{G} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

Ahora se reduce la pareja de matrices $(\widehat{D}(a), \mathbb{G})$ en las franjas de a y b como suma directa de las corepresentaciones indescomponibles de K_{10} (ver apéndice C), y denotamos las matrices reducidas por $(\widehat{A}, \widehat{B})$. Además usando las adiciones de a y b a y_2 , junto con las observaciones de la nota 19, anulamos varios bloques en esta última franja obteniendo una corepresentación matricial de la forma:

$$\begin{array}{c}
 a^\Delta \quad y_1 \quad a \quad b \quad y_2 \quad a^\nabla \\
 \hline
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 M_1 & & & B_1 & & M_2 \\
 \hline
 & \widehat{D}(y_1) & & & & \\
 & & I & \xi^2 I & & \\
 & & & \widehat{A} & & \\
 & & & \widehat{D}(a) & & \\
 & & & & I & \\
 & & & & & \xi^2 I \\
 & & & & & \widehat{D}(y_2) \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array} \tag{3.3}$$

De esta corepresentación matricial es claro que \mathcal{P} es de un parámetro, ya que sus corepresentaciones indescomponibles están determinadas por las corepresentaciones indescomponibles de \mathcal{P}^3, F_{19} y F_{20} que son de tipo finito y K_{10} que tiene una sola serie de corepresentaciones.

El tercer y último caso consiste en un poset \mathcal{P} que contiene a $K_{11} = \{a <^1 b\}$. Si $\mathcal{P}^3 \neq \emptyset$, para cada $x \in \mathcal{P}^3$, o bien $x \in a^\Delta$, o bien $x \in b^\nabla$, entonces \mathcal{P} tiene la forma (3.1). Por lo tanto, ya que \mathcal{P}^1 es una cadena donde todo $x \in \mathcal{P}^1$ con $x \neq a, x \neq b$ está en relación

semifuerte o fuerte con a y b , basta considerar el caso en el que \mathcal{P} tiene dos puntos débiles y_1, y_2 tales que $y_1 <^2 a <^1 b <^2 y_2$.

De esta forma, tomamos dos matrices, una representación y una corepresentación de \mathcal{P} , y las reducimos de la misma forma: se reducen primero las franjas correspondientes a los puntos $y_1 <^2 a$ en suma directa de los indescomponibles de F_{20} , y usando algunas adiciones de y_1 a b y y_2 , y de a a b , los problemas matriciales quedan de la siguiente forma.

Para corepresentaciones:

	y_1	a	b	y_2
$\widehat{D}(y_1)$	I	$\xi^2 I$	$\xi^2 I$	
	I	$\widehat{D}(a)$	G	G

Para representaciones:

	y_1	a	b	y_2
$D(y_1)$	I	I		
	ξI			
	$\xi^2 I$			
	I	$D(a)$	I	
	ξI		G	G
	$\xi^2 I$		G	G

Como los indescomponibles del poset $K_{11} = \{a <^1 b\}$ son conocidos, reducimos los bloques $(D(a), G)$ y $(\widehat{D}(a), G)$, en las franjas a y b , en suma directa de ellos. Escribimos (A, B) y $(\widehat{A}, \widehat{B})$ cuando ya tenemos reducidos dichos bloques en suma directa de las representaciones y corepresentaciones indescomponibles de K_{11} , respectivamente.

Nótese que tanto el bloque A como el bloque B , están expresados como sumas directas de representaciones indescomponibles de un punto débil (poset F_{19}), luego usando las adiciones determinadas por $a <^2 y_2$ y $b <^2 y_2$ (ver además la nota 19), se anulan los bloques de la franja y_2 que están frente a la pareja (A, B) . De este modo, la representación

matricial toma la siguiente forma.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & y_1 & a & b & y_2 \\
 D(y_1) & \begin{array}{c} I \\ \xi I \\ \xi^2 I \\ I \\ \xi I \\ \xi^2 I \end{array} & \begin{array}{c} I \\ \\ D(a) \\ A \\ \\ I \\ \xi I \\ \xi^2 I \end{array} & \begin{array}{c} I \\ \\ I \\ B \\ \\ D(b) \\ \\ I \\ \xi I \\ \xi^2 I \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ I \\ \\ \\ I \\ D(y_2) \end{array}
 \end{array}
 \end{array} \tag{3.4}$$

Luego las representaciones indescomponibles de \mathcal{P} consisten en una sola serie determinada por $a <^1 b$ y un número finito de representaciones no isomorfas dos a dos. Esto es, el poset 3-equipado \mathcal{P} es de un parámetro.

A continuación presentamos un ejemplo de como se anulan los bloques de la franja y_2 , cuando en (A, B) aparece la serie $K_{11} - 1$ (ver apéndice D), en este caso se tiene

$$\begin{array}{ccc}
 a & b & y_2 \\
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 I_n & & \\
 \hline
 \xi I_n & I_n & \\
 \hline
 \xi^2 I_n & -\xi I_n + \Theta & X \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array} ,$$

donde X es una matriz arbitraria sobre \mathbf{G} . Claramente, en la matriz anterior se han anulado los bloques superiores de la franja y_2 con adiciones desde a . La matriz Θ está en forma canónica estándar, por lo tanto puede ser un bloque de Frobenius o un bloque de Jordan de la forma $J_n^-(0)$. En cualquiera de los dos casos, adicionando a la franja de y_2 la franja de b derivada y con coeficientes adecuados, se anulan los $n - 1$ elementos superiores de cada columna de X .

Si el rango de la matriz $-\xi I_n + \Theta$ es n , se puede anular el n -ésimo elemento de cada columna de X de la misma forma en que se anularon los anteriores, y así ha quedado anulada toda la matriz X .

Por otro lado, si Θ es tal que el rango de la matriz $-\xi I_n + \Theta$ es $n - 1$ (nótese que esto sucede si y sólo si el elemento de la matriz Θ que está en la posición n, n es igual a ξ), entonces con operaciones \mathbf{G} -elementales de columnas de la franja de y_2 se deja un solo elemento no nulo $g \in \mathbf{G}$ en ella, después usando algunas consideraciones de la nota 19 se

anula este elemento de la siguiente manera.

$$\begin{array}{c|c|c} a & b & y_2 \\ \hline I_n & I_n & \\ \xi I_n & -\xi I_n + \Theta & ge_n \\ \xi^2 I_n & & \end{array} \sim \begin{array}{c|c|c} a & b & y_2 \\ \hline I_n & I_n & g'e_n \\ \xi I_n & -\xi I_n + \Theta & \\ \xi^2 I_n & & \end{array} \sim \begin{array}{c|c|c} a & b & y_2 \\ \hline I_n & I_n & \\ \xi I_n & -\xi I_n + \Theta & \\ \xi^2 I_n & & \end{array} .$$

El caso de las corepresentaciones de \mathcal{P} es similar porque los bloques de la franja y_2 se anulan por medio de las adiciones o bien desde \widehat{A} , o bien desde \widehat{B} , ya que estos dos bloques están expresados como sumas directas de corepresentaciones de un punto débil. Por ejemplo, si en $(\widehat{A}, \widehat{B})$ aparece la serie $\widehat{K}_{11} - 1$ (ver apéndice E), se tiene que si es una matriz arbitraria sobre \mathbb{F} , entonces

$$\begin{array}{c|c|c} a & b & y_2 \\ \hline I_n & \xi I_n + \xi^2 \Theta & \xi^2 Y \end{array} \sim \begin{array}{c|c|c} a & b & y_2 \\ \hline I_n & \xi I_n + \xi^2 \Theta & -p\xi \Theta Y \end{array} \sim \begin{array}{c|c|c} a & b & y_2 \\ \hline I_n & \xi I_n + \xi^2 \Theta & \end{array} ,$$

primero se adicionó a la franja de y_2 la franja de b multiplicada por $-\xi Y$, y luego se adicionó la franja de a multiplicada por $p\xi \Theta Y$ a la franja de y_2 . Recordemos que en este caso la matriz Θ es sobre \mathbb{F} .

Al reducir de este modo una corepresentación matricial, esta queda de la siguiente forma.

$$\begin{array}{c|c|c|c} y_1 & a & b & y_2 \\ \hline \widehat{D}(y_1) & & & \\ & I & \xi^2 I & \\ & & I & \\ & & \widehat{D}(a) & \\ & & \widehat{A} & \\ & & I & \\ & & \widehat{B} & \\ & & \widehat{D}(b) & \xi^2 I \\ & & I & \\ & & & \xi^2 I \\ & & & \widehat{D}(y_2) \end{array} \quad (3.5)$$

Por lo tanto, \mathcal{P} es de un parámetro ya que sus corepresentaciones indescomponibles, salvo un número finito, están determinadas por la serie correspondiente a $K_{11} = \{a <^1 b\}$. De este modo el teorema queda demostrado. \square

A continuación se demuestra el teorema 12.

Demostración del teorema 12. Si \mathcal{P} es un poset 3- equipado de un parámetro, entonces se tienen tres casos: o bien \mathcal{P} contiene a uno de los críticos ordinarios, o bien contiene a K_{10} , o bien a K_{11} .

En el primer caso, \mathcal{P}^3 que es un poset ordinario, debe ser un poset de un parámetro de los que están caracterizados en el criterio . Si $\mathcal{P}^1 \neq \emptyset$, entonces todo $x \in \mathcal{P}^1$ está en relación fuerte con todos los puntos de \mathcal{P}^3 , y por lo tanto \mathcal{P} es de la forma (3.1). Por el lema 17, sabemos que \mathcal{P} no es un poset sincero. Si $\mathcal{P}^1 = \emptyset$, sencillamente \mathcal{P} es un poset ordinario y nos remitimos al teorema , que dice que \mathcal{P} es sincero si y solo si es isomorfo o antiisomorfo a uno de los posets $K_1, \dots, K_5, A_1, \dots, A_{24}, S_1, S_2, S_3$ listados en [46] y [58].

Para el caso en el que \mathcal{P} contiene a $K_{10} = \{a, b\}$, se tiene que \mathcal{P}^1 tiene forma de cadena donde $x <^l y$ con $l \geq 2$, para cada par de puntos $x, y \in \mathcal{P}^1$. Además todo punto $x \in \mathcal{P}^1$ está en relación fuerte con todo punto de \mathcal{P}^3 . Por el lema 17, se sabe que los posets de la forma $\mathcal{Q}_1 <^3 \mathcal{Q}_2$ no son sinceros. Por lo tanto no vamos a considerar los casos que nos lleven a esta situación.

Entonces, al igual que en la demostración anterior, vamos a considerar el caso en el que $\mathcal{P}^1 = \{y_1 <^2 a <^2 y_2\}$. También en la demostración anterior vimos que las representaciones matriciales de \mathcal{P} son de la forma (3.2), y sus corepresentaciones matriciales son de la forma (3.3). Por lo tanto \mathcal{P} no es sincero, pero contiene los siguientes subposets sinceros, tanto para representaciones como para corepresentaciones: posets con un solo punto $\{x\}$ para cada $x \in \mathcal{P}$, un poset ordinario \mathcal{P}^3 , dos posets $\{y_1 <^2 a\}$ y $\{a <^2 y_2\}$ de la forma F_{20} y el poset $K_{10} = \{a, b\}$. Por lo tanto \mathcal{P} es sincero de un parámetro si y solo si $\mathcal{P} = K_{10}$.

Si \mathcal{P} contiene a $K_{11} = \{a <^1 b\}$, entonces $\mathcal{P}^3 = \emptyset$ ya que si existiera algún $x \in \mathcal{P}^3$, o bien $x \in a^\Delta$, o bien $x \in b^\nabla$, luego \mathcal{P} tendría la forma $\mathcal{Q}_1 <^3 \mathcal{Q}_2$, y por el lema 17 no sería sincero. Por lo tanto $\mathcal{P} = \mathcal{P}^1$ es una cadena tal que $x <^l y$ donde $l \geq 2$, para cada par de puntos $x, y \in \mathcal{P}^1$ con $x, y \neq a, x, y \neq b$. Como por definición $x <^2 y <^2 z$ implica $x <^3 z$, consideramos $\mathcal{P} = \{y_1 <^2 a <^1 b <^2 y_2\}$ porque de otro modo estaríamos en la situación de lema 17.

De esta manera, según la demostración anterior, las representaciones matriciales de \mathcal{P} tienen la forma (3.4), y sus corepresentaciones matriciales la forma (3.5). Por lo tanto \mathcal{P} no es sincero, y sus subposets sinceros son $\{y_1\}, \{a\}, \{b\}, \{y_2\}, \{y_1 <^2 a\}, \{y_1 <^2 b\}, \{a <^2 y_2\}, \{b <^2 y_2\}$, que son de tipo finito, y el poset $K_{11} = \{a <^1 b\}$. Entonces \mathcal{P} es un poset sincero de un parámetro si y solo si $\mathcal{P} = K_{11}$, y con esto el teorema queda demostrado. \square

Indescomponibles de los posets 3-equipados críticos

Este capítulo se dedica a demostrar los teoremas 13 y 14, a partir de los problemas matriciales correspondientes a las representaciones y corepresentaciones de los posets K_{10} y K_{11} sobre la extensión cúbica de campos (\mathbf{F}, \mathbf{G}) , en característica 3. Para ello, en la primera sección se establecen algunas definiciones en términos de bimódulos y alguna notación necesaria.

La segunda sección concierne a las corepresentaciones de K_{11} , es decir, se demuestra la parte (ii) del teorema 14. Esta demostración involucra la definición (Nota 21) y solución (teorema 22) de un problema que contiene al haz clásico de Kronecker (resuelto originalmente en [32]) como subproblema.

En la tercera sección se define un problema que contiene al haz pseudolineal (introducido y resuelto en [52]), ya que el problema matricial correspondiente a las representaciones de K_{11} se reduce a él (teorema 24). Luego se soluciona el problema definido (teorema 25), para demostrar la parte (i) del teorema 14.

En la cuarta sección, se usa la relación que existe entre los problemas matriciales determinados por los posets K_{10} y K_{11} (proposición 26) para demostrar el teorema 13, referente a los indescomponibles del poset K_{10} . También se explica como el problema matricial de clasificar las representaciones de K_{10} motivó varias definiciones.

4.1. Definiciones en términos de bimódulos y notación

En esta sección se presentan unas definiciones de representaciones y corepresentaciones de posets 3-equipados, equivalentes a las del capítulo anterior, que se emplean en las demostraciones de los teoremas 13 y 14. Estas definiciones utilizan ciertos bimódulos matriciales que aparecieron de manera natural durante el trabajo realizado con el problema correspondiente a las representaciones del poset crítico K_{10} .

También se establece alguna notación que será requerida en adelante.

Sean $\mathcal{M}_3(\mathbf{F})$ el espacio de las matrices de tamaño 3×3 con entradas en \mathbf{F} , y $e_{ij} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{F})$ la identidad matricial estándar que tiene entrada 1 en la posición (i, j) y el resto de entradas nulas.

Ya que \mathbf{G} es un espacio \mathbf{F} -lineal de dimensión 3, es posible identificar $\mathcal{M}_3(\mathbf{F})$ con el anillo de endomorfismos $\text{End}_{\mathbf{F}}(\mathbf{G})$. De este modo, los elementos de \mathbf{G} (que actúan por multiplicación como \mathbf{F} -endomorfismos naturales de \mathbf{G}) serán identificados con los elementos correspondientes de $\mathcal{M}_3(\mathbf{F})$. Por lo tanto se tiene la inclusión $\mathbf{G} \subset \mathcal{M}_3(\mathbf{F})$ que induce sobre $\mathcal{M}_3(\mathbf{F})$ la estructura de (\mathbf{G}, \mathbf{G}) -bimódulo con respecto a las operaciones ordinarias de las matrices.

De esta forma, el campo $\mathbf{G} \subset \mathcal{M}_3(\mathbf{F})$ se identifica con el espacio matricial

$$\Delta_1 = \mathbf{F} \left\langle I_3, \Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -p & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Sigma^2 \right\rangle.$$

Sea $g = a + b\xi + c\xi^2 \in \mathbf{G}$ un elemento arbitrario, con $a, b, c \in \mathbf{F}$, la matriz con la que se identifica g es

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ -pc & a & b \\ -pb & -pc & a \end{bmatrix} \in \Delta_1,$$

su determinante es $a^3 - pb^3 + p^2c^3 = (a + b\xi + c\xi^2)^3 = g^3$. Este determinante es 0 si y solo si $g = 0$, luego para cualquier g no nulo podemos calcular su matriz inversa

$$g^{-3} \begin{bmatrix} a^2 + pbc & -ab - pc^2 & b^2 - ac \\ pac - pb^2 & a^2 + pbc & -ab - pc^2 \\ p^2c^2 + pab & pac - pb^2 & a^2 + pbc \end{bmatrix} \in \Delta_1,$$

de donde

$$\text{Re } g^{-1} = (a^2 + pbc)g^{-3}, \quad \text{Im}_1 g^{-1} = (-ab - pc^2)g^{-3}, \quad \text{Im}_2 g^{-1} = (b^2 - ac)g^{-3}. \quad (4.1)$$

Se puede verificar fácilmente que los siguientes tres subconjuntos $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \Delta_3$ de $\mathcal{M}_3(\mathbf{F})$ tienen estructura de (\mathbf{G}, \mathbf{G}) -bimódulos (i. e. estructura de (Δ_1, Δ_1) -bimódulos).

$$\Delta_1, \quad \Delta_2 = \Delta_1 \langle I_3, e_{11} - e_{33} \rangle, \quad \Delta_3 = \mathcal{M}_3(\mathbf{F}) = \Delta_1 \langle e_{11}, e_{22}, e_{33} \rangle. \quad (4.2)$$

Una *representación* U de un poset 3-equipado \mathcal{P} sobre el par (\mathbf{F}, \mathbf{G}) es una colección de la forma

$$U = (U_0; U_x : x \in \mathcal{P})$$

donde U_0 es un \mathbf{F} -espacio vectorial de dimensión finita, cada U_x es un \mathbf{G} -espacio de \widetilde{U}_0 , y para todo par de puntos $x, y \in \mathcal{P}$ se satisface

$$x \leq^l y \Rightarrow U_x \Delta_l \subseteq U_y.$$

Ahora podemos dar una definición de corepresentaciones sobre la pareja de campos (\mathbf{F}, \mathbf{G}) , análoga a la anterior. Para ello, considérense los siguientes tres \mathbf{F} -subespacios $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3$ del campo \mathbf{G}

$$\Omega_1 = \mathbf{F}, \quad \Omega_2 = \mathbf{F} \langle 1, \xi \rangle, \quad \Omega_3 = \mathbf{G} = \mathbf{F} \langle 1, \xi, \xi^2 \rangle. \quad (4.3)$$

Una *corepresentación* U del poset 3-equipado \mathcal{P} sobre el par (F, G) es cualquier colección de la forma

$$U = (U_0; U_x : x \in \mathcal{P})$$

donde U_0 es un G -espacio vectorial de dimensión finita, cada U_x es un F -subespacio de U_0 , y se satisface la siguiente condición para todo $x, y \in \mathcal{P}$

$$x \leq^l y \Rightarrow U_x \Omega_l \subseteq U_y.$$

Como estas definiciones son equivalentes a las del capítulo anterior, con ellas también podríamos desarrollar toda la presente investigación. De hecho, con ellas se van a establecer algunas aplicaciones (ver secciones 5.1 y 5.2).

En la siguiente nota, se establece alguna notación necesaria.

Nota 20. Recordemos que la n -ésima representación (corepresentación) de algún poset crítico $K_{1i}, i = 0, 1$, según la numeración de los apéndices, se denota $K_{1i} - n$ ($\widehat{K}_{1i} - n$).

En las matrices los bloques vacíos representan bloques de ceros. Un bloque marcado con F (G) es una matriz arbitraria sobre F (G). El símbolo $I_n^\uparrow(I_n^\downarrow)$ significa la matriz identidad de orden n , con una fila de ceros adicional arriba (abajo). De forma similar, el símbolo $\overrightarrow{I}_n(\overleftarrow{I}_n)$ es la matriz identidad con una columna de ceros adicional, a la derecha (izquierda). Se denota por e_i un vector columna con 1 en su i -ésima coordenada y 0 en las demás, y por f_j un vector fila con su única coordenada j -ésima no nula igual a 1. Un bloque con el signo $J_n^+(0)$ ($J_n^-(0)$), es un bloque de Jordan de orden n con valor propio 0, y todos los elementos en su superdiagonal (subdiagonal) iguales a 1. Una flecha en la parte superior del símbolo $J_n^{\uparrow+}(0)$, $J_n^{\downarrow+}(0)$ ($\overleftarrow{J}_n^-(0)$, $\overrightarrow{J}_n^-(0)$) significa que el correspondiente bloque de Jordan tiene una fila (columna) nula adicional arriba o abajo (a la izquierda o derecha).

En las demostraciones, se dibuja al frente de cada matriz, el diagrama determinado por aquellas transformaciones admisibles que no cambian la correspondiente forma matricial. Si frente a una matriz formada por tres bloques sobre F , se encuentra el diagrama de un punto débil de la siguiente forma

$$\left. \begin{array}{|c|} \hline F \\ \hline F \\ \hline F \\ \hline \end{array} \right\} \textcircled{3}$$

esto significa que los bloques tienen el mismo número de filas y pueden multiplicarse (i. e. la matriz de tres bloques puede multiplicarse) por la izquierda por matrices no singulares

arbitrarias sobre F , de la forma $\begin{array}{|c|c|c|} \hline X & Y & Z \\ \hline -pZ & X & Y \\ \hline -pY & -pZ & X \\ \hline \end{array}$, donde X, Y y Z también son matrices

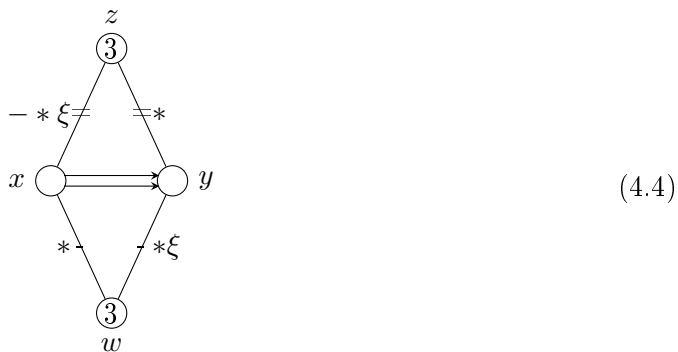
cuadradas sobre F . El efecto de esta multiplicación matricial es que los tres F -bloques se comporten como las partes real e imaginarias de una matriz sobre G (recordemos la matrices que generan $G = \Delta_1$). Por lo tanto, estos tres bloques se reducen juntos como un punto débil: F -transformaciones de columnas y G -transformaciones de filas, en el sentido matricial.

Con las definiciones matriciales y notación aquí introducidas clasificaremos, en las siguientes secciones, los indescomponibles de los posets 3-equipados sinceros de un parámetro, a través de sus problemas matriciales.

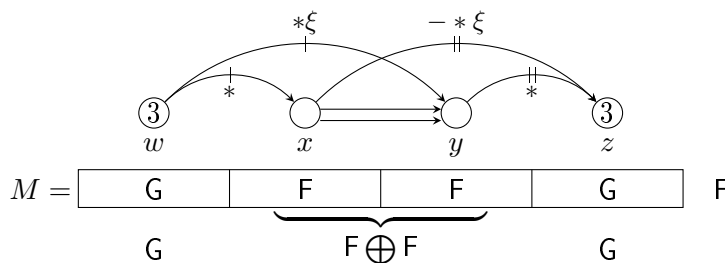
4.2. Corepresentaciones del poset 3-equipado K_{11}

Para describir las corepresentaciones indecomponibles de K_{11} en forma matricial evidente, reduciremos el problema matricial correspondiente a un problema que llamamos rombo de Kronecker, que definiremos a continuación.

Nota 21 (Rombo de Kronecker). Se denota por *Rombo de Kronecker* al siguiente diagrama.



Su problema matricial es de tipo de representación infinito y se describe de la siguiente manera.



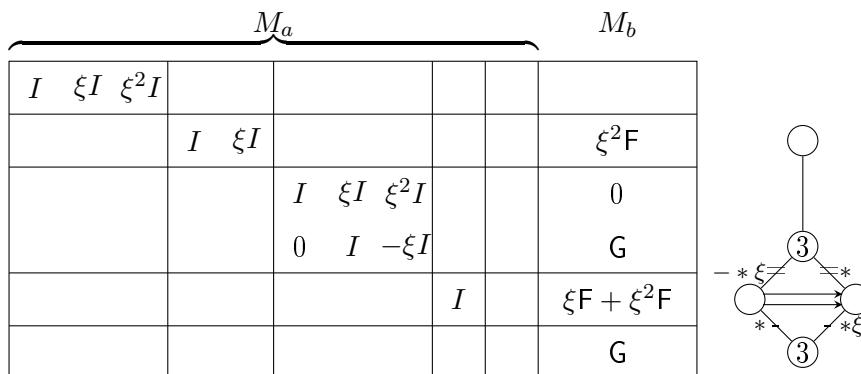
Consiste en una matriz M dividida en cuatro franjas verticales. Dos de ellas M_w y M_z , correspondientes a los puntos débiles, con entradas en \mathbf{G} , y las otras dos franjas M_x y M_y son sobre \mathbf{F} , y corresponden al problema de Kronecker (ver [62]) luego son del mismo tamaño. M admite el siguiente conjunto de transformaciones:

- (a) F-elementales de filas de toda la matriz (representadas por la \mathbf{F} a la derecha);
- (b) G-elementales de columnas de cada franja M_w y M_z (están indicads por una \mathbf{G} debajo de cada franja);
- (c) F-elementales simultáneas de columnas de M_x y M_y (indicadas por el símbolo $\mathbf{F} \oplus \mathbf{F}$);
- (d) Adiciones de cualquier columna de M_w , simultáneamente a una columna de M_x y una columna de M_y numeradas igual, con coeficientes $*$ y $*\xi$ respectivamente, donde $*$ $\in \mathbf{G}$ es un elemento arbitrario;
- (e) Adiciones simultáneas de una columna de M_x y una columna de M_y numeradas igual, a cualquier columna de M_z con coeficientes $-*\xi$ y $*$, respectivamente, donde $*$ $\in \mathbf{G}$ es un elemento arbitrario.

Los puntos x y y , del problema de Kronecker, son puntos fuertes, así que no hay adiciones a sus partes imaginarias (que son iguales a cero en este caso).

En la siguiente demostración se explica como se restauran las corepresentaciones matriciales indescomponibles sinceras del poset K_{11} a partir de las representaciones indescomponibles del rombo de Kronecker.

Demostración del teorema 14 (ii). Sea M una corepresentation matricial de K_{11} , se reduce la franja M_a , correspondiente al punto minimal, en suma directa de las corepresentaciones indescomponibles de un punto débil (poset F_{19}). Luego, usando algunas adiciones admisibles de M_a a M_b anulamos algunos bloques en la franja del punto maximal b . Teniendo en cuenta que las transformaciones de columnas de M_b son F -elementales, se obtiene el siguiente problema en dicha franja.



Según el diagrama anterior y el lema 17, las corepresentaciones indescomponibles de K_{11} se pueden restaurar de los indescomponibles del rombo de Kronecker y de la única representación indescomponible del punto fuerte maximal en el problema de M_b . De esta última se obtiene la corepresentación $\widehat{K}_{11} - 4$.

Ahora, vamos a restaurar la demás corepresentaciones indescomponibles de K_{11} de las representaciones indescomponibles del rombo de Kronecker (4.4).

Primero considérese el caso en que $M_w = M_x = M_y = 0$, utilizando las cuatro representaciones indescomponibles de un punto débil (ver apéndice A, representaciones del poset F_{19}) para el punto maximal z del rombo de Kronecker, obtenemos las cuatro corepresentaciones indescomponibles $\widehat{K}_{11} - 5, \widehat{K}_{11} - 6, \widehat{K}_{11} - 20$ y $\widehat{K}_{11} - 21$.

Veamos ahora, la parte central del rombo de Kronecker, para el caso $M_w = M_z = 0$



Esto representa precisamente el problema clásico de Kronecker. Por lo tanto, la pareja de matrices con entradas en F se transforma así $(A, B) \mapsto (X^{-1}AY, X^{-1}BY)$, donde X y Y son matrices cuadradas invertibles sobre F . Para escribir las representaciones matriciales correspondientes usamos la formulación de un resultado más general, que aparece en [62]. De acuerdo a [62, Theorem 1], las parejas indescomponibles de matrices en las cuales (A, B) puede transformarse se agotan, salvo isomorfismo, por pares de matrices de los siguientes tipos:

0: $(I_n, \Phi(f))$, donde $\Phi(f)$ es la matriz acompañante de una potencia f de algún polinomio primo.

1: $(I_n, J_n^-(0))$.

2: $(I_n^\uparrow, I_n^\downarrow)$.

3: $(\vec{I}_n, \overleftarrow{I}_n)$.

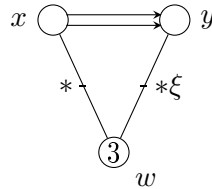
De las parejas de matrices de tipo 0 y 1, obtenemos la F-serie de representaciones $\widehat{K}_{11}-1$. Las corepresentaciones $\widehat{K}_{11}-10$ y $\widehat{K}_{11}-11$ fueron restauradas usando los indescomponibles de tipo 2 y 3, respectivamente.

Los puntos x y y en la parte central del rombo (4.4) son fuertes, por tanto no hacemos adiciones a sus partes imaginarias. Entonces, cuando se adiciona una columna en la franja M_w a la i -ésima columna de M_x con un coeficiente arbitrario $g \in \mathbb{G}$, se está adicionando únicamente la parte real de gM_w , y simultáneamente estamos adicionando la misma columna de M_w multiplicada por $g\xi$ a la i -ésima columna de M_y , pero se adiciona solamente la parte real de ξgM_w , i. e. $-p \operatorname{Im} 2gM_w$. Después, se adiciona simultáneamente y la i -ésima columna de M_x con coeficiente $-h\xi$ ($h \in \mathbb{G}$) y la i -ésima columna de M_y con coeficiente h a alguna columna de M_z . Las adiciones resultantes de M_w a M_z son $h(-\xi \operatorname{Re} gM_w - p \operatorname{Im} 2gM_w)$, que corresponden a $w <^2 z$. Es decir, en el problema matricial de las corepresentaciones de K_{11} , se tiene lo siguiente:

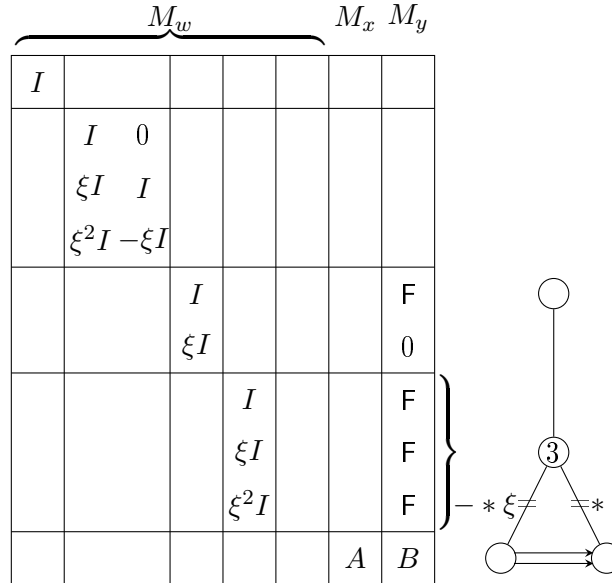
$$\begin{array}{c}
 \overbrace{\quad M_a \quad} \quad M_b \\
 \begin{array}{|ccc|c}
 \hline
 I & \xi I & \xi^2 I & 0 \\
 \hline
 0 & I & -\xi I & \mathbb{G} \\
 \hline
 & & & \mathbb{G} \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \textcircled{3} \\
 \parallel \\
 \textcircled{3}
 \end{array}
 \end{array}$$

que produce $\widehat{K}_{11}-2$ (usando la representación indescomponible sincera del poset F_{20}).

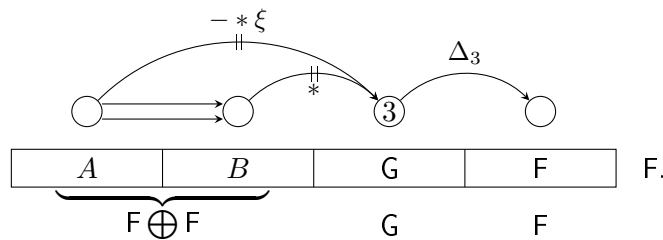
Para la parte inferior del rombo



se reduce primero el punto débil minimal w y usando algunas adiciones de columnas adecuadas de M_w a las franjas M_x y M_y , se anulan algunos bloques para obtener el siguiente problema:



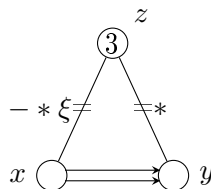
Para presentar el problema en la forma anterior, nótese que para los bloques marcados con A y B , las transformaciones son simultáneas y sobre F , y todas las transformaciones de columnas de la franja M_y se aplican simultáneamente a la franja M_x . De este modo, transponiendo las matrices, tenemos el siguiente diagrama matricial



El problema del punto fuerte maximal en la franja M_y produce $\widehat{K}_{11} - 7$.

Para el caso $A = B = 0$, al reducir el punto débil en la franja M_y obtenemos las corepresentaciones $\widehat{K}_{11} - 8$, $\widehat{K}_{11} - 9$, $\widehat{K}_{11} - 22$ y $\widehat{K}_{11} - 23$.

Para encontrar los indescomponibles sinceros de la parte superior del rombo



se reduce primero el haz en sus representaciones matriciales indescomponibles (ver página 38). Cuando las franjas correspondientes al haz son de tipo 0, las adiciones admisibles de M_x y M_y , hacia M_z están dadas por

$$(-\xi I_n + J(0))X$$

donde X es cualquier vector columna de tamaño n con entradas en \mathbb{G} . El determinante de $-\xi I_n + J(0)$ es igual a ξ^n , por tanto, siempre es posible anular la franja M_z .

Cuando la pareja (M_x, M_y) se reduce al tipo 1, esto es $M_x = I_n$, y $M_y = \Phi(f)$ la matriz acompañante de una potencia f de un polinomio primo. Sus adiciones admisibles hacia M_z están dadas por

$$(-\xi I_n + \Phi(f))X.$$

El determinante de $-\xi I_n + \Phi(f)$ es igual a $(-1)^n f(\xi)$, entonces cuando $f(\xi) \neq 0$ toda la franja M_z se vuelve 0. El polinomio f es alguna potencia de un polinomio primo π , luego necesitamos que $\pi(\xi) = 0$ para tener $f(\xi) = 0$. El único polinomio primo π con coeficientes en \mathbb{F} , que cumple $\pi(\xi) = 0$, es el polinomio minimal de ξ sobre \mathbb{F} , $t^3 + p$. En este caso la franja M_z no puede anularse completamente. Entonces cuando la franja M_y se reduce como una matriz acompañante de una potencia de $t^3 + p$, podemos anular $n - 1$ filas de M_z (nótese que el rango de $-\xi I_n + \Phi(f)$ es siempre al menos $n - 1$). Cuando tenemos una suma directa de matrices de este tipo, haciendo 0 las primeras $n - 1$ filas de M_z en cada sumando, y manteniéndolo de esta manera, las adiciones de M_x y M_y a M_z producen en su bloque no nulo transformaciones \mathbb{G} -elementales de filas. Esto es, el bloque no nulo de M_z se reduce como un punto fuerte (con respecto a corepresentaciones). De esta forma, tenemos un problema de un punto fuerte en M_z , para cada $m \in \mathbb{N}$, cuando $M_y = \Phi(t^3 + p)^m$. Es decir, tenemos una cadena infinita de puntos fuertes.

Las corepresentaciones indescomponibles de esta cadena son $\widehat{T}(u)$, para cada punto u en la cadena. Entonces, para todo $m \geq 1$ se tiene el siguiente indescomponible para la parte superior del rombo

M_x	M_y	M_z
I_{3m}	$\Phi((t^3 + p)^m)$	e_{3m}

de donde obtenemos $\widehat{K}_{11} - 24$. Este produce también el siguiente indescomponible para la parte inferior del rombo

M_w	M_x	M_y
1	0	0
ξ	0	0
ξ^2	0	e_1
0	I_{3m}	$\Phi((t^3 + p)^m)$

que produce $\widehat{K}_{11} - 25$.

Las franjas correspondientes al haz quedan reducidas como el tipo 2, es decir $M_x = I_n^\uparrow$ y $M_y = I_n^\downarrow$, consideremos la suma directa de m copias de representaciones de este tipo

M_x	M_y	M_z
0 0	I_m 0	0
$I_{m(n-1)}$ 0	0 $I_{m(n-1)}$	0
0 I_m	0 0	\mathbb{G} ③

Claramente, hemos anulado el bloque superior de M_z con adiciones de la matriz identidad de M_y . Para conservar las matrices en esta forma podemos hacer transformaciones \mathbb{G} -

elementales de columnas del bloque no nulo en M_z , y transformaciones F-elementales de filas de este bloque. Por eso es que hemos dibujado un punto débil en frente de él.

Existe un punto débil para cada $n \in \mathbb{N}$, luego tenemos una cadena infinita en la cual el punto débil correspondiente a n está en relación semi-fuerte con el punto débil correspondiente a $n + 1$ con respecto a corepresentaciones. La matriz que está a continuación, consiste en la suma de k copias de $(I_n^\uparrow, I_n^\downarrow)$, y m copias de $(I_{n+1}^\uparrow, I_{n+1}^\downarrow)$.

M_x				M_y				M_z	
0	0			I_m	0			0	
I_{mn}	0			0	I_{mn}			0	
0	I_m			0	0			G	③
	0	0			I_k	0		0	
	$I_{k(n-1)}$	0			0	$I_{k(n-1)}$		0	
	0	I_k			0	0		G	③

Al reducir el bloque correspondiente a cada punto débil de la cadena, en sus corepresentaciones indescomponibles, obtenemos cuatro indescomponibles para la parte superior del rombo, y de ellos obtenemos $\widehat{K}_{11} - 14$, $\widehat{K}_{11} - 16$, $\widehat{K}_{11} - 26$ y $\widehat{K}_{11} - 28$. También de cuatro indescomponibles para la parte inferior del rombo, ellos producen $\widehat{K}_{11} - 13$, $\widehat{K}_{11} - 17$, $\widehat{K}_{11} - 27$ y $\widehat{K}_{11} - 29$.

A cada $n \in \mathbb{N}$ le corresponde un subposet de la cadena de la forma F_{20} . Su corepresentación matricial indescomponible sincera produce el siguiente indescomponible de la parte superior del rombo

M_w				M_x				M_y	
0	0	0	0	1	0	0	0	0	
I_n	0	0	0	0	I_n	0	0	0	
0	1	0	0	0	0	0	0	ξ^2	
0	0	0	0	0	0	1	0	0	
0	0	I_{n-1}	0	0	0	0	I_{n-1}	0	
0	0	0	1	0	0	0	0	1	

De él obtenemos $\widehat{K}_{11} - 18$ y un indescomponible para la parte inferior del rombo que produce $\widehat{K}_{11} - 19$.

Si $n = 0$ el indescomponible de la parte superior del rombo tiene la forma

M_x	M_y	M_z
0	1	0
1	0	ξ^2
0	0	1

y produce $\widehat{K}_{11} - 15$. Su correspondiente indescomponible de la parte inferior del rombo produce $\widehat{K}_{11} - 12$.

El rombo completo tiene la siguiente representación matricial sincera

M_w	M_x	M_y	M_z
1	0	0	0
ξ	0	0	0
ξ^2	0	1	1
0	I_{3m}	$\Phi((t^3 + p)^m)$	0

De ella obtenemos $\widehat{K}_{11} - 3$, y con esto se completa la demostración del teorema 14 (ii). \square

Esta demostración, además de permitirnos restaurar las corepresentaciones indescomponibles sinceras del poset K_{11} nos permite formular el siguiente resultado.

Teorema 22. *Las representaciones indescomponibles sinceras del rombo de Kronecker (4.4), sobre la pareja (F, G) tienen la siguiente forma matricial*

M_w	M_x	M_y	M_z
1	0	0	0
ξ	0	0	0
ξ^2	0	1	1
0	I_{3m}	$\Phi((t^3 + p)^m)$	0

donde $\Phi((t^3 + p)^m)$ es la célula de Frobenius del polinomio $(t^3 + p)^m$, para cada $m \in \mathbb{N}$.

4.3. Representaciones del poset 3-equipado K_{11}

En esta sección, el problema de clasificar las representaciones matriciales indescomponibles del poset 3-equipado K_{11} se reduce a un problema matricial del tipo de las corepresentaciones, que involucra el haz pseudolineal.

Recordemos que este último problema está determinado en [52], sobre un campo K , por alguna pareja (τ, δ) donde τ es un automorfismo de K , y δ es una derivación derecha de K tal que $(gh)^\delta = gh^\delta + g^\delta h^\tau$, para todo $g, h \in K$.

En nuestro caso, apareció de manera natural un problema matricial que contiene como subproblema, un haz pseudolineal sobre G determinado por el par $(1, \delta)$ donde 1 es la identidad de G y δ la derivación natural de G tal que

$$\delta(F) = 0; \quad \delta(\xi) = 1; \quad \delta(\xi^2) = -\xi.$$

Notaremos $G[t, \delta]$ al anillo de *polinomios diferenciales*, es decir, el anillo de polinomios derechos en una variable t sobre G , que satisfacen la condición $gt = tg + g^\delta$, para cualquier $g \in G$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, el subconjunto $\mathfrak{F}_n \subset G[t, \delta]$ es un conjunto maximal formado por todos los polinomios diferenciales indescomponibles de grado n , que no son similares entre sí (los detalles se pueden consultar en [15, 16, 44]).

Representamos nuestro problema del haz pseudolineal por medio del siguiente diagrama que consta de dos puntos fuertes

$$x \circ \xrightarrow{(1, \delta)} \circ y \cdot \tag{4.5}$$

Este problema consiste en una pareja de matrices con entradas en \mathbf{G} que se transforma según la regla $(A, B) \mapsto (X^{-1}AY, X^{-1}BY + X^{-1}AY^\delta)$, donde X y Y son matrices cuadradas invertibles sobre \mathbf{G} .

Según el [62, Theorem 1], las parejas indescomponibles de matrices en las cuales (A, B) puede transformarse se agotan, salvo isomorfismo, por pares de matrices de los siguientes tipos:

0: $(I_n, \Phi(f))$, donde $\Phi(f)$ es la matriz acompañante de un polinomio diferencial $f \in \mathfrak{F}_n \setminus t^n$, con $n \geq 1$.

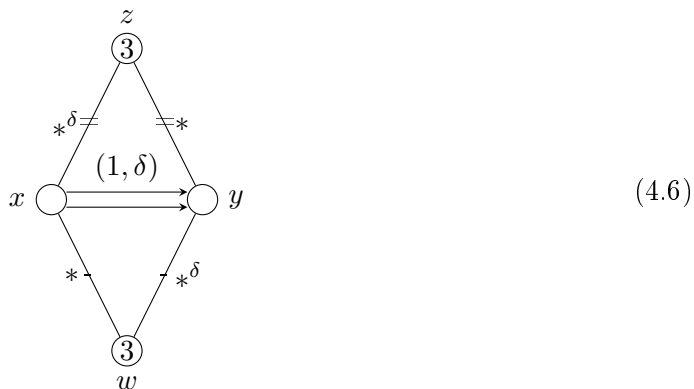
1: $(I_n, J_n^-(0))$.

2: $(I_n^\uparrow, I_n^\downarrow)$.

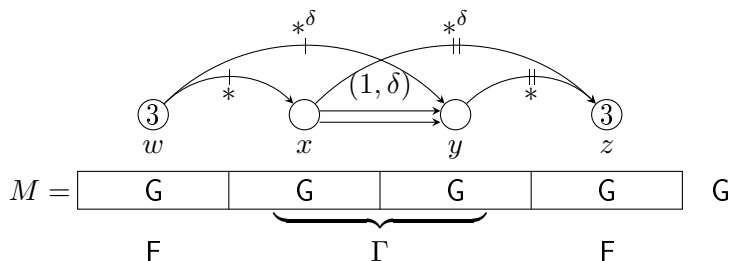
3: $(\vec{I}_n, \overleftarrow{I}_n)$.

Al estudiar las representaciones de K_{11} encontramos a (4.5) dentro del problema que se describe a continuación.

Nota 23 (Rombo pseudolineal). Denotamos por *rombo pseudolineal* al siguiente diagrama que consiste en un punto débil minimal a los puntos fuertes de (4.5), y otro punto débil que es mayor que ellos. El problema matricial correspondiente explica como estas relaciones de orden respetan las transformaciones simultáneas de los dos puntos de (4.5), y por lo tanto también determinan transformaciones simultáneas que hemos marcado en el diagrama con los símbolos $*$ y $*^\delta$, que denotan un elemento de \mathbf{G} y su derivada, respectivamente.



El problema matricial correspondiente a este rombo pseudolineal se describe de la siguiente forma



Consiste en una matriz M sobre \mathbf{G} dividida en cuatro franjas verticales $M_x = A, M_y = B$, que tienen el mismo tamaño, y M_w, M_z (cualquiera de ellas puede ser vacía). Estas matrices aceptan las siguientes *transformaciones admisibles*:

- a) Transformaciones \mathbf{G} -elementales de filas de toda la matriz (representadas por la \mathbf{G} a la derecha);
- b) Transformaciones \mathbf{F} -elementales de columnas de las franjas M_w y M_z (representadas por la \mathbf{F} debajo);
- c) El anillo $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} Y & Y^\delta \\ 0 & Y \end{pmatrix} : Y \text{ es una matriz cuadrada invertible sobre } \mathbf{G} \right\}$ determina las transformaciones de columnas de las franjas A y B , esto es, sus transformaciones siguen la regla $(A, B) \mapsto (AY, BY + AY^\delta)$;
- d) Adiciones simultáneas de una columna de M_w a una columna de A y a una columna de B numeradas igual, con coeficientes $*^\delta$ y $*$ respectivamente, donde $*$ $\in \mathbf{G}$ es un elemento arbitrario;
- e) Adiciones simultáneas de una columna de A y una columna de B numeradas igual, con coeficientes $*$ y $*^\delta$ respectivamente, a alguna columna de M_z .

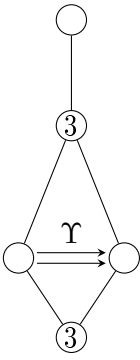
El siguiente resultado muestra la reducción del problema matricial correspondiente a las representaciones de K_{11} , al rombo pseudolineal (4.6).

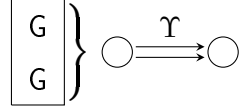
Teorema 24. *Todas las representaciones indescomponibles sinceras del poset 3-equipado K_{11} de la forma (2.3), a excepción de una, consideradas salvo isomorfismo, pueden restaurarse usando las corepresentaciones matriciales indescomponibles, no necesariamente sinceras, del rombo pseudolineal (4.6).*

Demostración. Al igual que en la demostración de la parte (ii) del teorema, se reduce primero la franja correspondiente al punto minimal M_a , en suma directa de las representaciones indescomponibles de un punto débil (poset F_{19}). Como se admiten adiciones de M_a a M_b con coeficientes en \mathbf{G} , con los bloques identidad de la franja M_a se anula todo lo que está frente a ellos en la franja M_b .

Manteniendo la matriz en esa misma forma se obtiene el siguiente problema en la franja M_b .

	M_a			M_b	
I					
	I	0			
	ξI	I			0
	$\xi^2 I - \xi I$				\mathbf{G}
			I		0
			ξI		\mathbf{G}
				I	0
				ξI	\mathbf{G}
				$\xi^2 I$	\mathbf{G}
					\mathbf{G}


(4.7)



La notación $\left. \begin{array}{c} \boxed{G} \\ \boxed{G} \end{array} \right\}$ significa que los dos bloques sobre G , que llamaremos el par (A, B) , se multiplican por la izquierda por matrices de la forma

$$\begin{array}{|c|c|} \hline X - \xi Y & Y - \xi Z \\ \hline -\xi^2 Y - pZ & X - \xi^2 Z \\ \hline \end{array}, \text{ donde } X, Y, Z \text{ son matrices sobre } \mathbb{F} \text{ cuadradas e invertibles.}$$

La solución para el problema de álgebra lineal anterior, expresado en esa forma, es desconocida. Sin embargo, nótese que dichas transformaciones son generadas por el espacio vectorial

$$\mathbb{F} \left\langle I_2, \Upsilon = \begin{bmatrix} -\xi & 1 \\ -\xi^2 & 0 \end{bmatrix}, \Upsilon^2 \right\rangle.$$

Este \mathbb{F} -espacio es isomorfo a G , si identificamos a Υ con ξ . Por lo tanto, intuitivamente, sabemos que tenemos alguna forma de transformaciones de (A, B) simultáneas sobre G .

El polinomio característico de Υ es $t^2 + \xi t + \xi^2 = (t - \xi)^2$, sus valores propios son iguales a ξ , y por eso se tiene que Υ es similar a la matriz $\begin{bmatrix} \xi & 1 \\ 0 & \xi \end{bmatrix}$. De hecho

$$\begin{bmatrix} \xi & 1 \\ 0 & \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\xi & 1 \\ -\xi^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\xi & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, con un cambio de base dado por la matriz $\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\xi & 1 \end{bmatrix}$ el par (A, B) se reduce como sigue

$$(A, B) \mapsto (XAY + X^\delta BY, XBY)$$

donde X y Y son matrices sobre G cuadradas e invertibles, y δ es la derivación natural del campo G , lo cual vuelve este problema el haz $(1, \delta)$ -pseudolineal (4.5).

También usando el cambio de base dado por Ψ , las adiciones desde y hacia los puntos del haz pseudolineal se transforman en las adiciones d) y e) de la nota 23.

Entonces, el problema de la franja M_b sin su punto maximal fuerte, se vuelve el rombo pseudolineal. Por el lema 17 cada indescomponible del rombo pseudolineal produce una representación del poset 3-equipado K_{11} y la única representación de K_{11} que no se obtiene de un indescomponible del rombo pseudolineal es $K_{11} - 4$ producida por el problema del punto fuerte maximal en M_b , y de esta forma el teorema queda demostrado. \square

El siguiente resultado clasifica las corepresentaciones del rombo pseudolineal. De ellas se van a restaurar, más adelante, las representaciones de K_{11} .

Teorema 25. *Las corepresentaciones indescomponibles sinceras del rombo pseudolineal (4.6), sobre la pareja (F, G) tienen la forma matricial*

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline M_w & M_x & M_y & M_z \\ \hline 1 & 0 & \xi^2 f_n & 0 \\ \hline 0 & I_n & J_n^-(0) & \xi^2 e_1 \\ \hline \end{array}, \tag{4.8}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Nótese que para algún coeficiente $g \in \mathbb{G}$, se adiciona simultáneamente gM_w a M_x y $g^\delta M_w$ a M_y , luego con un coeficiente $h \in \mathbb{G}$, adicionamos $h^\delta gM_w + hg^\delta M_w = (gh)^\delta M_w$. Esto significa que las adiciones de M_w a M_z admiten coeficientes en $\mathbb{G}^\delta = \mathbb{F}\langle 1, \xi \rangle$, es decir corresponden al problema matricial de las corepresentaciones del poset $F_{20} = \{w <^2 z\}$.

Considérese cualquier corepresentación matricial del rombo pseudolineal, se reducen la franja M_w en suma directa de las corepresentaciones indescomponibles de un punto débil, y con las adiciones determinadas por la relación semifuerte $w <^2 z$ se anulan casi todos los bloques en la franja M_z (ver nota 19). Luego con las adiciones admisibles de M_w a M_x y M_z se anulan varios bloques de estas últimas franjas, obteniendo la siguiente matriz

M_w			$M_x \ M_y \ M_z$			
I	ξI	$\xi^2 I$				
	I	ξI				
		I	ξI	$\xi^2 I$		0
		0	I	$-\xi I$		\mathbb{G}
			I		\mathbb{G}	$\xi^2 I$
				A	B	\mathbb{G}

En el bloque

$$\begin{array}{c}
 M_w \ M_x \ M_y \ M_z \\
 \boxed{ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline I & & \mathbb{G} & \xi^2 I \\ \hline \end{array} },
 \end{array}$$

se tiene que los elementos no nulos del bloque marcado con \mathbb{G} anulan todos los elementos que estén frente a ellos en la franja M_z , lo que le da la siguiente forma a la corepresentación matricial

M_w			$M_x \ M_y \ M_z$			
I	ξI	$\xi^2 I$				
	I	ξI				
		I	ξI	$\xi^2 I$		0
		0	I	$-\xi I$		\mathbb{G}
			I		\mathbb{G}	
				A	B	\mathbb{G}

(4.9)

El diagrama del problema matricial que quedo en las franjas M_x y M_y es

M_w			$M_x M_y$			
I	ξI	$\xi^2 I$				
	I	ξI				
		I	ξI	$\xi^2 I$		0
		0	I	$-\xi I$		G
				I		G
					A	B

(4.10)

Se ha dibujado el diagrama en esa forma ya que la pareja de matrices (A, B) se reduce siguiendo la regla $(A, B) \mapsto (X^{-1}AY, X^{-1}BY + X^{-1}AY^\delta)$, donde X y Y son matrices cuadradas invertibles sobre G , mientras que las transformaciones de columnas de los bloques marcados con G están determinadas por la matriz Y . De este modo, transponiendo las matrices, se tiene el siguiente diagrama matricial

El diagrama (4.10) muestra que cada indescomponible de la parte superior del rombo pseudolineal

(4.11)

produce un indescomponible de su parte inferior

(4.12)

Para obtener las corepresentaciones indescomponibles sinceras de la parte superior del rombo pseudolineal (4.11) escribimos en lugar de la pareja (A, B) las parejas de matrices que son solución del haz pseudolineal (4.5). Si en lugar de (A, B) hay una pareja de tipo 0, es decir, $(I_n, \Phi(f))$, donde $\Phi(f)$ es la matriz acompañante de un polinomio diferencial

$f \in \mathfrak{F}_n \setminus t^n$, con $n \geq 1$, entonces a cada columna de la franja M_z se puede adicionar $Y^\delta + \Phi(f)Y$ donde Y es un vector no nulo de tamaño n con entradas en \mathbb{G} . Por lo tanto, si X es alguna columna de M_z , es posible anularla encontrando un Y tal que

$$-X = Y^\delta + \Phi(f)Y. \quad (4.13)$$

Teniendo en cuenta que $Y^\delta = \text{Im}_1 Y - \xi \text{Im}_2 Y$, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones, en el que para abreviar hicimos $\Phi(f) = \Phi$

$$\begin{aligned} -\text{Re } X &= \text{Re } \Phi \text{Re } Y + (I - p \text{Im}_2 \Phi) \text{Im}_1 Y - p \text{Im}_1 \Phi \text{Im}_2 Y; \\ -\text{Im}_1 X &= \text{Im}_1 \Phi \text{Re } Y + \text{Re } \Phi \text{Im}_1 Y + (-I - p \text{Im}_2 \Phi) \text{Im}_2 Y; \\ -\text{Im}_2 X &= \text{Im}_2 \Phi \text{Re } Y + \text{Im}_1 \Phi \text{Im}_1 Y + \text{Re } \Phi \text{Im}_2 Y. \end{aligned}$$

Claramente, la matriz asociada está compuesta por nueve bloques, de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \text{Re } \Phi & I - p \text{Im}_2 \Phi & -p \text{Im}_1 \Phi \\ \text{Im}_1 \Phi & \text{Re } \Phi & -I - p \text{Im}_2 \Phi \\ \text{Im}_2 \Phi & \text{Im}_1 \Phi & \text{Re } \Phi \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

para el caso en el que Φ sea de orden 1, es decir $\Phi \in \mathbb{G}$, su determinante es:

$$(\text{Re } \Phi)^3 - p(\text{Im}_1 \Phi)^3 + p^2(\text{Im}_2 \Phi)^3 - \text{Im}_2 \Phi = (\text{Re } \Phi + \xi \text{Im}_1 \Phi + \xi^2 \text{Im}_2 \Phi)^3 - \text{Im}_2 \Phi = \Phi^3 - \text{Im}_2 \Phi.$$

Por lo tanto el sistema no tendrá solución, y no se podrá anular X cuando $\Phi \in \mathbb{G}$ sea tal que

$$\Phi^3 = \text{Im}_2 \Phi. \quad (4.15)$$

Si en el problema matricial de la parte superior del rombo pseudolineal tenemos

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline M_x & M_y & M_z \\ \hline 1 & 0 & x \\ \hline \end{array} \text{ con } x \in \mathbb{G},$$

es claro que no podremos anular x . Por la forma en cómo se transforman los bloques correspondientes al haz pseudolineal, tenemos además que

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline M_x & M_y & M_z \\ \hline 1 & 0 & x \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|} \hline M_x & M_y & M_z \\ \hline 1 & g^{-1}g^\delta & x \\ \hline \end{array}$$

para cualquier $g \in \mathbb{G}$. Sea $g = a + b\xi + c\xi^2$ para algunos $a, b, c, \in \mathbb{F}$, entonces

$$\begin{aligned} \text{Im}_2(g^{-1}g^\delta) &= [(\text{Im}_2 g^{-1}) \text{Im}_1 g - (\text{Im}_1 g^{-1}) \text{Im}_2 g](g^3)^{-1} \\ &= [(b^2 - ac)b - (-ab - pc^2)c](g^3)^{-1} \\ &= (b^3 + pc^3)(g^3)^{-1} = (b - c\xi)^3(g^3)^{-1} = (g^\delta)^3(g^{-1})^3 \\ &= (g^{-1}g^\delta)^3. \end{aligned}$$

Esto es, $g^{-1}g^\delta$ cumple la condición (4.15) y por lo tanto no se puede anular x .

Recíprocamente, cada $\Phi \in \mathbb{G}$ que cumpla la condición (4.15) se puede escribir de la forma $\Phi = h^{-1}h^\delta$ para algún $h \in \mathbb{G}$. En efecto, vamos a mostrar que existe $h = x + y\xi + z\xi^2 \in$

\mathbb{G} tal que $h\Phi = h^\delta$. Considerando las partes reales e imaginarias de la ecuación, se tiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x \operatorname{Re} \Phi - py \operatorname{Im}_2 \Phi - pz \operatorname{Im}_1 \Phi &= y; \\ x \operatorname{Im}_1 \Phi + y \operatorname{Re} \Phi + -pz \operatorname{Im}_2 \Phi &= -z; \\ x \operatorname{Im}_2 \Phi + y \operatorname{Im}_1 \Phi + z \operatorname{Re} \Phi &= 0; \end{aligned}$$

que es equivalente al sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x \operatorname{Re} \Phi - y(1 + p \operatorname{Im}_2 \Phi) - pz \operatorname{Im}_1 \Phi &= 0; \\ x \operatorname{Im}_1 \Phi + y \operatorname{Re} \Phi + z(1 - p \operatorname{Im}_2 \Phi) &= 0; \\ x \operatorname{Im}_2 \Phi + y \operatorname{Im}_1 \Phi + z \operatorname{Re} \Phi &= 0. \end{aligned}$$

Su matriz asociada tiene la forma (4.14) y su determinante es 0 ya que $\Phi^3 = \operatorname{Im}_2 \Phi$. Por lo tanto existen infinitos $h \in \mathbb{G}$ tales que $\Phi = h^{-1}h^\delta$.

De este modo hemos probado que dados $g, x \in \mathbb{G}$, entonces

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline M_x & M_y & M_z \\ \hline 1 & g & x \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|} \hline M_x & M_y & M_z \\ \hline 1 & g & 0 \\ \hline \end{array} \iff \begin{array}{|c|c|} \hline M_x & M_y \\ \hline 1 & g \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c|c|} \hline M_x & M_y \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array}. \quad (4.16)$$

Como estamos considerando soluciones de tipo 0 del haz pseudolineal, $g = \Phi(f)$ donde $f \in \mathfrak{F}_n \setminus t^n$, luego podemos anular x .

No hay un método general para calcular el determinante de la matriz (4.14) cuando el orden de Φ es mayor o igual a dos, por eso vamos a transformar la ecuación (4.13) para obtener un sistema de ecuaciones más conveniente.

Cada matriz $\Phi(f)$ es invertible ya que el término independiente de f es diferente de 0 (porque $f \in \mathfrak{F}_n \setminus t^n$), entonces se multiplica la ecuación (4.13) por $\Phi(f)-1$. Nuevamente, para abreviar la escritura, hacemos $\Phi = \Phi(f)$

$$-\Phi^{-1}X = \Phi^{-1}Y^\delta + Y.$$

De la ecuación anterior se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re}(\Phi^{-1}X) &= \operatorname{Re} Y + (\operatorname{Re} \Phi^{-1})(\operatorname{Im}_1 Y) + p(\operatorname{Im}_2 \Phi^{-1})(\operatorname{Im}_2 Y); \\ -\operatorname{Im}_1(\Phi^{-1}X) &= (I + \operatorname{Im}_1 \Phi^{-1})(\operatorname{Im}_1 Y) - (\operatorname{Re} \Phi^{-1})(\operatorname{Im}_2 Y); \\ -\operatorname{Im}_2(\Phi^{-1}X) &= (\operatorname{Im}_2 \Phi^{-1})(\operatorname{Im}_1 Y) + (I - \operatorname{Im}_1 \Phi^{-1})(\operatorname{Im}_2 Y); \end{aligned}$$

cuya matriz asociada es

$$M = \begin{bmatrix} I & \operatorname{Re} \Phi^{-1} & p \operatorname{Im}_2 \Phi^{-1} \\ 0 & I + \operatorname{Im}_1 \Phi^{-1} & -\operatorname{Re} \Phi^{-1} \\ 0 & \operatorname{Im}_2 \Phi^{-1} & I - \operatorname{Im}_1 \Phi^{-1} \end{bmatrix}.$$

Como $\Phi = \Phi(f)$ es la matriz acompañante de un polinomio $f = t^n - h_1 t^{n-1} + \dots - h_{n-1} t - h_n$, donde para $i = 1, \dots, n$, cada $h_i \in \mathbb{G}$, entonces Φ tiene la forma

$$\Phi = \begin{bmatrix} & & & h_n \\ & & & h_{n-1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & h_1 \\ & & & & \end{bmatrix},$$

y su inversa

$$\Phi^{-1} = \begin{bmatrix} -h_{n-1}h_n^{-1} & 1 & & & \\ -h_{n-2}h_n^{-1} & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -h_1h_n^{-1} & & & & 1 \\ h_n^{-1} & & & & \end{bmatrix}.$$

Gracias a la forma de la matriz Φ^{-1} , se calcula de manera sencilla que $\det(I + \text{Im}_1 \Phi^{-1}) = 1 - \text{Im}_1(h_{n-1}h_n^{-1})$ y $\det(I - \text{Im}_1 \Phi^{-1}) = 1 + \text{Im}_1(h_{n-1}h_n^{-1})$. Entonces para toda Φ , o bien $I + \text{Im}_1 \Phi^{-1}$ tiene inversa, o bien $I - \text{Im}_1 \Phi^{-1}$ tiene inversa. Por lo tanto, el determinante de la matriz completa se puede calcular de alguna de las dos formas siguientes

$$\det(M) = \det(I + \text{Im}_1 \Phi^{-1}) \det(I - \text{Im}_1 \Phi^{-1} + \text{Im}_2 \Phi^{-1}(I + \text{Im}_1 \Phi^{-1})^{-1} \text{Re} \Phi^{-1}),$$

$$\det(M) = \det(I - \text{Im}_1 \Phi^{-1}) \det(I + \text{Im}_1 \Phi^{-1} + \text{Re} \Phi^{-1}(I - \text{Im}_1 \Phi^{-1})^{-1} \text{Im}_2 \Phi^{-1}).$$

Si Φ es de orden 1, es decir, si $\Phi = a + b\xi + c\xi^2 \in \mathbb{G}$ para algunos $a, b, c, \in \mathbb{F}$, entonces

$$\begin{aligned} \det(M) &= (1 + \text{Im}_1 \Phi^{-1})(1 - \text{Im}_1 \Phi^{-1} + \text{Im}_2 \Phi^{-1}(1 + \text{Im}_1 \Phi^{-1})^{-1} \text{Re} \Phi^{-1}) \\ &= (1 + \text{Im}_1 \Phi^{-1})(1 - \text{Im}_1 \Phi^{-1}) + \text{Im}_2 \Phi^{-1} \text{Re} \Phi^{-1} \\ &= 1 - (\text{Im}_1 \Phi^{-1})^2 + \text{Im}_2 \Phi^{-1} \text{Re} \Phi^{-1}. \end{aligned}$$

Usando (4.1) se tiene

$$\begin{aligned} -(\text{Im}_1 \Phi^{-1})^2 + \text{Im}_2 \Phi^{-1} \text{Re} \Phi^{-1} &= -(-ab - pc^2)^2 \Phi^{-6} + (b^2 - ac)(a^2 + pbc) \Phi^{-6} \\ &= -(p^2 c^4 + a^3 c - pb^3 c) \Phi^{-6} \\ &= -c(a^3 - pb^3 + p^2 c^3) \Phi^{-6} \\ &= -c \Phi^{-3}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Obviamente, al igual que para la matriz (4.14), $\det(M) = 0$ si y solo si $\text{Im}_2 \Phi = \Phi^3$.

Para el caso general, consideremos la forma de las matrices

$$I + \text{Im}_1 \Phi^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \text{Im}_1(h_{n-1}h_n^{-1}) & & & & \\ -\text{Im}_1(h_{n-2}h_n^{-1}) & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ -\text{Im}_1(h_1h_n^{-1}) & & & 1 & \\ \text{Im}_1(h_n^{-1}) & & & & 1 \end{bmatrix};$$

y su inversa

$$(I + \text{Im}_1 \Phi^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} (1 - \text{Im}_1(h_{n-1}h_n^{-1}))^{-1} & & & & \\ (1 - \text{Im}_1(h_{n-1}h_n^{-1}))^{-1} \text{Im}_1(h_{n-2}h_n^{-1}) & 1 & & & \\ & \vdots & \ddots & & \\ (1 - \text{Im}_1(h_{n-1}h_n^{-1}))^{-1} \text{Im}_1(h_1h_n^{-1}) & & & 1 & \\ -(1 - \text{Im}_1(h_{n-1}h_n^{-1}))^{-1} \text{Im}_1(h_n^{-1}) & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego se tiene la igualdad $\text{Im}_2 \Phi^{-1}(I + \text{Im}_1 \Phi^{-1})^{-1} = (1 - \text{Im}_1(h_{n-1}h_n^{-1}))^{-1} \text{Im}_2 \Phi^{-1}$, notando $k = (1 - \text{Im}_1(h_{n-1}h_n^{-1}))^{-1}$

$$\text{Im}_2 \Phi^{-1}(I + \text{Im}_1 \Phi^{-1})^{-1} \text{Re} \Phi^{-1} = k \begin{bmatrix} \text{Re}(h_{n-1}h_n^{-1}) \text{Im}_2(h_{n-1}h_n^{-1}) & \text{Im}_2(-h_{n-1}h_n^{-1}) \\ \text{Re}(h_{n-1}h_n^{-1}) \text{Im}_2(h_{n-2}h_n^{-1}) & \text{Im}_2(-h_{n-2}h_n^{-1}) \\ & \vdots \\ \text{Re}(h_{n-1}h_n^{-1}) \text{Im}_2(h_1h_n^{-1}) & \text{Im}_2(-h_1h_n^{-1}) \\ -\text{Re}(h_{n-1}h_n^{-1}) \text{Im}_2(h_n^{-1}) & \text{Im}_2(h_n^{-1}) \end{bmatrix};$$

y finalmente $I - \text{Im}_1 \Phi^{-1} + \text{Im}_2 \Phi^{-1}(I + \text{Im}_1 \Phi^{-1})^{-1} \text{Re} \Phi^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} k \text{Re}(h_{n-1}h_n^{-1}) \text{Im}_2(h_{n-1}h_n^{-1}) + \text{Im}_1(h_{n-1}h_n^{-1}) + 1 & k \text{Im}_2(-h_{n-1}h_n^{-1}) \\ k \text{Re}(h_{n-1}h_n^{-1}) \text{Im}_2(h_{n-2}h_n^{-1}) + \text{Im}_1(h_{n-2}h_n^{-1}) & 1 - k \text{Im}_2(h_{n-2}h_n^{-1}) \\ k \text{Re}(h_{n-1}h_n^{-1}) \text{Im}_2(h_{n-3}h_n^{-1}) + \text{Im}_1(h_{n-3}h_n^{-1}) & k \text{Im}_2(-h_{n-3}h_n^{-1}) & 1 \\ & \vdots & \ddots \\ k \text{Re}(h_{n-1}h_n^{-1}) \text{Im}_2(h_1h_n^{-1}) + \text{Im}_1(h_1h_n^{-1}) & k \text{Im}_2(-h_1h_n^{-1}) & & 1 \\ -k \text{Re}(h_{n-1}h_n^{-1}) \text{Im}_2(h_n^{-1}) - \text{Im}_1(h_n^{-1}) & k \text{Im}_2(h_n^{-1}) & & & 1 \end{bmatrix}.$$

El determinante de esta última matriz es simplemente

$$\begin{vmatrix} k \text{Re}(h_{n-1}h_n^{-1}) \text{Im}_2(h_{n-1}h_n^{-1}) + \text{Im}_1(h_{n-1}h_n^{-1}) + 1 & k \text{Im}_2(-h_{n-1}h_n^{-1}) \\ k \text{Re}(h_{n-1}h_n^{-1}) \text{Im}_2(h_{n-2}h_n^{-1}) + \text{Im}_1(h_{n-2}h_n^{-1}) & 1 - k \text{Im}_2(h_{n-2}h_n^{-1}) \end{vmatrix},$$

cuando el orden de Φ es mayor que 2.

Si Φ es de orden 2, este último determinante queda

$$\begin{vmatrix} k \text{Re}(h_1h_2^{-1}) \text{Im}_2(h_1h_2^{-1}) + \text{Im}_1(h_1h_2^{-1}) + 1 & k \text{Im}_2(-h_1h_2^{-1}) \\ -k \text{Re}(h_1h_2^{-1}) \text{Im}_2(h_2^{-1}) - \text{Im}_1(h_2^{-1}) & 1 + k \text{Im}_2(h_2^{-1}) \end{vmatrix},$$

y por lo tanto, cuando Φ es de orden 2

$$\begin{aligned} \det(M) &= (1 - \text{Im}_1(h_1h_2^{-1}))[1 + \text{Im}_1(h_1h_2^{-1}) + k \text{Re}(h_1h_2^{-1}) \text{Im}_2(h_1h_2^{-1}) \\ &\quad + k \text{Im}_1(h_1h_2^{-1}) \text{Im}_2(h_2^{-1}) + k \text{Im}_2(h_2^{-1}) - k \text{Im}_2(h_1h_2^{-1}) \text{Im}_1(h_2^{-1})] \\ &= 1 - (\text{Im}_1(h_1h_2^{-1}))^2 + \text{Re}(h_1h_2^{-1}) \text{Im}_2(h_1h_2^{-1}) + \text{Im}_1(h_1h_2^{-1}) \text{Im}_2(h_2^{-1}) \\ &\quad + \text{Im}_2(h_2^{-1}) - \text{Im}_2(h_1h_2^{-1}) \text{Im}_1(h_2^{-1}); \end{aligned}$$

Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, notamos por $h_i = a_i + b_i\xi + c_i\xi^2$ a las partes real e imaginarias de h_i , además usando la ecuación (4.17) se tiene

$$\begin{aligned}
\det(M) &= 1 - (h_2h_1^{-1})^{-3} \operatorname{Im}_2(h_2h_1^{-1}) + \operatorname{Im}_2(h_2^{-1}) \\
&\quad + [b_1(a_2^2 + pb_2c_2) + a_1(-a_2b_2 - pc_2^2) - pc_1(b_2^2 - a_2c_2)](b_2 - a_2c_2)h_2^{-6} \\
&\quad - [c_1(a_2^2 + pb_2c_2) + b_1(-a_2b_2 - pc_2^2) + a_1(b_2^2 - a_2c_2)](-a_2b_2 - pc_2^2)h_2^{-6} \\
&= 1 - (h_2h_1^{-1})^{-3} \operatorname{Im}_2(h_2h_1^{-1}) + \operatorname{Im}_2(h_2^{-1}) + b_1 \operatorname{Re}(h_2^{-1}) \operatorname{Im}_2(h_2^{-1}) - b_1(\operatorname{Im}_1 h_2^{-1})^2 \\
&\quad - pc_1(\operatorname{Im}_2 h_2^{-1})^2 - c_1 \operatorname{Re}(h_2^{-1}) \operatorname{Im}_1(h_2^{-1}) \\
&= 1 - (h_2h_1^{-1})^{-3} \operatorname{Im}_2(h_2h_1^{-1}) + \operatorname{Im}_2(h_2^{-1}) - b_1c_2h_2^{-3} \\
&\quad - c_1(pb_2^4 + pa_2b_2^2c_2 + pa_2^2c_2^2 - a_2^3b_2 - pa_2^2c_2^2 - pa_2b_2^2c_2 - p^2b_2c_2^3) \\
&= 1 - (h_2h_1^{-1})^{-3} \operatorname{Im}_2(h_2h_1^{-1}) + \operatorname{Im}_2(h_2^{-1}) - b_1c_2h_2^{-3} + c_1b_2h_2^{-3} \\
&= 1 - h_2^{-3}h_1^3[b_2(-a_1b_1 - pc_1^2) + c_2(a_1^2 + pb_1c_1) + a_2(b_1^2 - a_1c_1)]h_1^{-3} \\
&\quad + (b_2^2 - a_2c_2)h_2^{-3} - b_1c_2h_2^{-3} + c_1b_2h_2^{-3} \\
&= 1 - h_2^{-3}(-a_1b_1b_2 - pc_1^2b_2 + a_1^2c_2 + pb_1c_1c_2 + b_1^2a_2 - a_1c_1a_2 - b_1c_2 + c_1b_2 + b_2^2 - a_2c_2).
\end{aligned}$$

Cuando el orden de Φ es mayor que 2, se tiene

$$\begin{aligned}
\det(M) &= (1 - \operatorname{Im}_1(h_{n-1}h_n^{-1}))[\operatorname{Im}_1(h_{n-1}h_n^{-1}) + 1 + k \operatorname{Re}(h_{n-1}h_n^{-1}) \operatorname{Im}_2(h_{n-1}h_n^{-1}) \\
&\quad - k \operatorname{Im}_1(h_{n-1}h_n^{-1}) \operatorname{Im}_2(h_{n-2}h_n^{-1}) - k \operatorname{Im}_2(h_{n-2}h_n^{-1}) \\
&\quad + k \operatorname{Im}_2(h_{n-1}h_n^{-1}) \operatorname{Im}_1(h_{n-2}h_n^{-1})] \\
&= 1 - (\operatorname{Im}_1(h_{n-1}h_n^{-1}))^2 + \operatorname{Re}(h_{n-1}h_n^{-1}) \operatorname{Im}_2(h_{n-1}h_n^{-1}) - \operatorname{Im}_2(h_{n-2}h_n^{-1}) \\
&\quad - \operatorname{Im}_1(h_{n-1}h_n^{-1}) \operatorname{Im}_2(h_{n-2}h_n^{-1}) + \operatorname{Im}_2(h_{n-1}h_n^{-1}) \operatorname{Im}_1(h_{n-2}h_n^{-1}) \\
&= 1 - (h_{n-1}^{-1}h_n)^{-3} \operatorname{Im}_2(h_{n-1}^{-1}h_n) - \operatorname{Im}_2(h_{n-2}h_n^{-1}) \\
&\quad - \operatorname{Im}_1(h_{n-1}h_n^{-1}) \operatorname{Im}_2(h_{n-2}h_n^{-1}) + \operatorname{Im}_2(h_{n-1}h_n^{-1}) \operatorname{Im}_1(h_{n-2}h_n^{-1})
\end{aligned}$$

Si h_n, h_{n-1}, h_{n-2} son tales que $\det(M) = 0$, existe una matriz A de orden n , sobre \mathbb{G} , tal que $A^{-1}\Phi A + A^{-1}A^\delta$ es la matriz acompañante de un polinomio f' cuyo término independiente es nulo, es decir, f' no esta en el conjunto $\mathfrak{F}_n \setminus t^n$. Por lo tanto si $\Phi(f)$ es la matriz acompañante de un polinomio $f \in \mathfrak{F}_n \setminus t^n$, se pueden anular todos los elementos de la franja M_z , usando las adiciones admisibles desde M_x y M_y .

Cuando las matrices en las franjas M_x y M_y se reducen a una pareja de tipo 1, es decir $(I_n, J_n^-(0))$, tomando $J_n^-(0)$ en lugar de Φ en la matriz M se tiene que $\det(M) = 0$, por lo tanto no será posible anular todos los elementos de la franja M_z . De hecho, usando los 1 de la matriz $J_n^-(0)$, se pueden anular los $n - 1$ elementos inferiores en cada columna de M_z , luego con algunas adiciones adecuadas se anulan las partes imaginarias del elemento que quedo sin anular, de modo que se obtiene el siguiente indescomponible sincero para la parte superior del rombo pseudolineal

$$\boxed{I_n \mid J_n^-(0) \mid \xi^2 e_1}. \quad (4.18)$$

Si en las franjas M_x y M_y hay una suma directa de m copias de parejas de tipo 1, después de anular todos los elementos posibles de la franja M_z , los elementos no nullos que

quedaron en ella se reducen como el problema matricial de las representaciones un punto fuerte.

Para el caso en el que aparece una pareja de tipo 2 en las franjas del haz pseudo lineal, esto es $M_x = I_n^\uparrow$ y $M_y = I_n^\downarrow$, sólo se pueden anular los $n - 1$ elementos superiores de cada columna de M_z . Considerando la suma directa de m parejas de este tipo, y anulando los elementos del bloque superior de M_z con adiciones desde la matriz identidad en M_y , se tiene

$$\begin{array}{c}
 M_x \qquad M_y \qquad M_z \\
 \begin{array}{|ccc|ccc|}
 \hline
 0 & 0 & I_m & 0 & 0 \\
 I_{m(n-1)} & 0 & 0 & I_{m(n-1)} & 0 \\
 0 & I_m & 0 & 0 & \mathbf{G} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array} \quad \textcircled{3} \tag{4.19}$$

Hemos dibujado un punto débil en frente de el bloque no nulo en M_z , ya que la matriz anterior conserva su forma si hacemos transformaciones G-elementales de filas y F-elementales de columnas de este bloque.

Existe un punto débil para cada $n \in \mathbb{N}$, luego tenemos una cadena infinita en la cual el punto débil correspondiente a n está en relación semi-fuerte con el punto débil correspondiente a $n + 1$ con respecto a representaciones. La matriz que está a continuación, consiste en la suma de k copias de $(I_n^\uparrow, I_n^\downarrow)$, y m copias de $(I_{n+1}^\uparrow, I_{n+1}^\downarrow)$.

$$\begin{array}{c}
 M_x \qquad M_y \qquad M_z \\
 \begin{array}{|ccc|ccc|ccc|}
 \hline
 0 & 0 & & I_m & 0 & & & 0 \\
 I_{mn} & 0 & & 0 & I_{mn} & & & 0 \\
 0 & I_m & & 0 & 0 & & & \mathbf{G} \\
 \hline
 & 0 & 0 & & I_k & 0 & & 0 \\
 & I_{k(n-1)} & 0 & & 0 & I_{k(n-1)} & & 0 \\
 & 0 & I_k & & 0 & 0 & & \mathbf{G} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array} \quad \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \parallel \\ \textcircled{3} \end{array} \tag{4.20}$$

Si la pareja de matrices en las franjas M_x y M_y se reduce a una pareja de tipo 3, se pueden anular todos los elementos de cada columna de M_z , del superior al inferior, usando adiciones desde la matriz identidad que esta en M_y .

Por el diagrama (4.9) para que una corepresentación indescomponible de todo el rombo sea sincera, en el lugar de las matrices A y B debe haber una pareja que no anule todos los elementos arriba de B y que a la vez deje elementos no nulos en la franja M_z . Esta pareja puede ser únicamente de tipo 1, ya que las parejas de tipo 0 y 3 anulan todos los elementos en M_z y las parejas de tipo 2 anulan todos los elementos de la franja M_y que estan arriba de arriba de B (ver diagrama (4.10)).

Por lo tanto, las corepresentaciones indescomponibles sinceras del rombo pseudolineal tienen la forma (4.8), con lo cual el teorema queda demostrado.

□

Usando el teorema 24 y el teorema anterior, en especial la forma matricial de varios de los indescomponibles del rombo pseudolineal que aparecen en su demostración, se demuestra a continuación la parte (i) del teorema 14.

Demostración del teorema 14 (i). Partiendo del diagrama (4.7), vamos a restaurar las representaciones indescomponibles de K_{11} usando las corepresentaciones indescomponibles determinadas por el problema que se obtuvo en la franja M_b , que corresponde al punto maximal del poset K_{11} .

Según el teorema 24, la única representación de K_{11} que no se restaura a partir de las corepresentaciones del rombo pseudolineal es $K_{11} - 4$, que se obtiene al reducir el punto maximal fuerte que aparece en el diagrama (4.7).

En la demostración del teorema 25, vimos que los puntos minimal y maximal del rombo pseudolineal están en relación semifuerte, por lo tanto cuando las franjas correspondientes al haz pseudolineal son nulas, podemos dibujar el diagrama

$$\begin{array}{c} M_a \quad M_b \\ \begin{array}{|c|c|} \hline I & 0 \\ \hline \xi I & G \\ \hline & G \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \parallel \\ \textcircled{3} \end{array}, \end{array}$$

que produce $K_{11} - 2$ usando la corepresentación indescomponible sincera del poset F_{20} , y produce $K_{11} - 5$, $K_{11} - 6$, $K_{11} - 20$ y $K_{11} - 21$, usando las corepresentaciones indescomponibles del poset F_{20} que son sinceras en su punto maximal pero no en el minimal (ver nota 19). Nótese que las cuatro corepresentaciones de F_{20} que son sinceras en su punto minimal pero no en el maximal producen representaciones de K_{11} que no son sinceras.

Considérese ahora

$$\begin{array}{c} M_a \quad M_b \\ \begin{array}{|c|c|} \hline I & 0 \\ \hline \xi I & G \\ \hline \xi^2 I & G \\ \hline \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{|c|c|} \hline I & 0 \\ \hline \xi I & G \\ \hline \xi^2 I & G \\ \hline \end{array}} \right\} \begin{array}{c} \circ \rightleftarrows \circ \end{array}, \end{array}$$

usamos los cuatro tipos de indescomponibles del haz pseudolineal de la forma (4.5), teniendo en cuenta el cambio de base dado por Ψ , para obtener:

- la G-serie de representaciones $K_{11} - 1$ cuando el haz se reduce a alguna pareja de matrices de tipo 0 o 1 (ver 4.3);
- las representaciones de forma $K_{11} - 10$ cuando el haz se reduce a alguna pareja de matrices de tipo 2;
- y las representaciones de la forma $K_{11} - 11$ cuando el haz se reduce a alguna pareja de matrices de tipo 3.

Es de anotar, que para escribir las formas matriciales de las representaciones que se restauran en adelante se tuvo en cuenta el cambio de base dado por Ψ (ver demostración del teorema 24).

Reduciendo el punto fuerte que aparece en el diagrama (4.10), se obtiene la corepresentación

$$\begin{array}{c|ccc} & M_w & M_x & M_y \\ \hline 1 & \xi & \xi^2 & 0 \\ 0 & 1 & -\xi & 0 \end{array},$$

de la parte inferior del rombo pseudolineal (4.12), que produce $K_{11} - 7$.

El indescomponible (4.18) de la parte superior del rombo pseudolineal (4.11), que fue encontrado en la demostración del teorema 25, produce la representación $K_{11} - 24$. También produce corepresentaciones de la parte inferior del rombo pseudolineal (4.12) de la forma

$$\begin{array}{c|cc} & M_w & M_x \\ \hline 1 & 0 & \xi^2 f_n \\ 0 & I_n & J_n^-(0) \end{array},$$

de las cuales se obtiene $K_{11} - 25$. Y además permite obtener las corepresentaciones sinceras de todo el rombo pseudolineal (4.8), ellas producen las representaciones de tipo $K_{11} - 3$.

Considérese el diagrama (4.19), reduciendo el punto débil en sus representaciones indescomponibles, obtenemos cuatro indescomponibles para la parte superior del rombo pseudolineal (4.11), y de ellos obtenemos $K_{11} - 14$, $K_{11} - 16$, $K_{11} - 26$ y $K_{11} - 28$. También, cuatro indescomponibles para la parte inferior del rombo, ellos producen $K_{11} - 13$, $K_{11} - 17$, $K_{11} - 27$ y $K_{11} - 29$.

La cadena descrita en el diagrama (4.20) contiene un subposet de de la forma F_{20} , para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, la representación matricial indescomponible sincera de F_{20} produce el siguiente indescomponible de la parte superior del rombo pseudolineal

$$\begin{array}{c|cccc|cccc|c} & M_w & & & & M_x & & & & M_y \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & T(y) \end{array}.$$

De él obtenemos $K_{11} - 18$ y un indescomponible para la parte inferior del rombo que produce $K_{11} - 19$.

Si $n = 0$ en el diagrama (4.20), el indescomponible de la parte superior del rombo

pseudolineal tiene la forma
$$\begin{array}{c|cc} & M_x & M_y \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \xi \\ 0 & 0 & \xi^2 \end{array}$$
 y produce $K_{11} - 15$. Su correspondiente

indescomponible de la parte inferior del rombo produce $K_{11} - 12$.

Cuando los bloques marcados con A y B en el diagrama (4.10) son nulos, al reducir el punto débil de este mismo diagrama y anulando el bloque correspondiente a su punto maximal fuerte se obtienen cuatro indescomponibles para la parte inferior del rombo pseudolineal (4.12) que producen $K_{11} - 8$, $K_{11} - 9$, $K_{11} - 22$ y $K_{11} - 23$.

De esta manera, se han restaurado todas las representaciones indescomponibles sinceras del poset K_{11} , completando así la demostración del teorema 14 (i). \square

Hemos mostrado cómo se obtuvieron los indescomponibles sinceros del poset 3-equipado K_{11} en forma matricial evidente. En la siguiente sección, mostraremos cómo a partir de ellos, se pueden obtener los indescomponibles sinceros del poset 3-equipado K_{10} .

4.4. Indescomponibles del poset 3-equipado K_{10}

Para obtener las representaciones y corepresentaciones indescomponibles sinceras del poset 3-equipado crítico K_{10} , se utilizan las clasificaciones de indescomponibles que se encontraron en las secciones anteriores para el poset K_{11} , y el siguiente resultado.

Proposición 26. *El problema matricial de clasificar las representaciones (corepresentaciones) del poset 3-equipado K_{10} se reduce, en el sentido explicado por la demostración, al problema matricial de clasificar las corepresentaciones (representaciones) del poset 3-equipado K_{11} .*

Demostración. Considérese una representación (corepresentación) del poset 3-equipado crítico K_{10} . Reduciendo la franja correspondiente al punto fuerte con transformaciones $F(\mathbf{G})$ -elementales de filas y columnas, obtenemos el siguiente problema matricial:

$$\begin{array}{c} \textcircled{3} \quad \textcircled{} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbf{G} & \mathbf{I} & 0 \\ \hline \mathbf{G} & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

a estas matrices se aplican aquellas transformaciones admisibles que no cambian la forma de la franja del punto fuerte ya reducida. Esto es, la franja correspondiente al punto débil admite transformaciones $\mathbf{G}(\mathbf{F})$ -elementales de columnas. Esta última franja quedó dividida en dos bloques cada uno de los cuales se reducen por transformaciones $\mathbf{F}(\mathbf{G})$ -elementales de filas, y también se admiten adiciones del bloque inferior al bloque superior con coeficientes en $\mathbf{F}(\mathbf{G})$. Por lo tanto, en la franja correspondiente al punto débil tenemos precisamente la transpuesta del problema de clasificar las corepresentaciones (representaciones) del poset 3-equipado K_{11} . \square

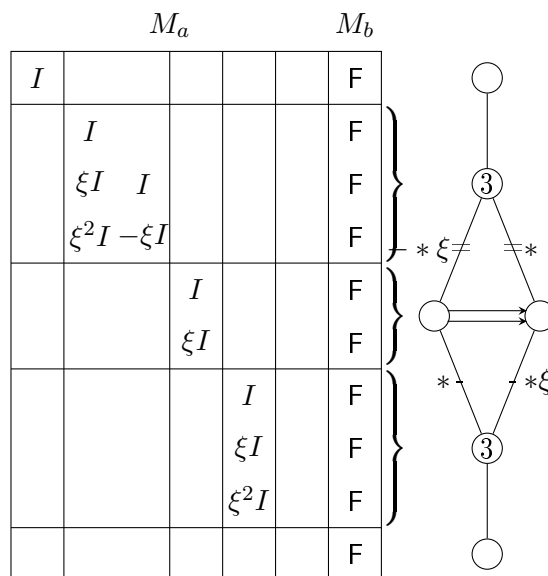
Los indescomponibles sinceros de K_{10} se obtienen (siguiendo la proposición) de las representaciones y corepresentaciones matriciales indescomponibles sinceras del poset K_{11} , presentadas en los apéndices D y E. Pero también hay que considerar cuatro representaciones y cuatro corepresentaciones indescomponibles de K_{11} que no son sinceras pero generan indescomponibles sinceros de K_{10} de la siguiente manera.

De las corepresentaciones de K_{11} de la forma $\begin{matrix} M_a & M_b \\ 0 & \widehat{D}(b) \end{matrix}$, (ver nota 18) se obtienen respectivamente $K_{10} - 4$, $K_{10} - 12$ para $n = 1$, $K_{10} - 22$ y $K_{10} - 24$.

Por otro lado, las representaciones de K_{11} de la forma $\begin{matrix} M_a & M_b \\ 0 & D(b) \end{matrix}$, generan las corepresentaciones $\widehat{K}_{10} - 4$, $\widehat{K}_{10} - 12$ para $n = 1$, $\widehat{K}_{10} - 22$ y $\widehat{K}_{10} - 24$.

De este modo, los indescomponibles sinceros del poset K_{10} se obtuvieron siguiendo la proposición 26, y sus formas matriciales se escribieron en los apéndices B y C reduciendo la primera franja en la suma directa de los correspondientes indescomponibles de un punto débil (poset F_{19}).

Como se mencionó en la sección 4.1 el problema matricial correspondiente a las representaciones del poset K_{10} motivó las primeras definiciones de representaciones de posets 3-equipados que fueron introducidas en [19]. En este problema se considera una representación matricial arbitraria de K_{10} , y se reduce la franja correspondiente al punto débil en suma directa de sus indescomponibles. De este modo, en la franja correspondiente al punto fuerte se obtiene el siguiente problema que incluye el rombo de Kronecker.



Este fue el primer problema matricial abordado por la autora. En él aparece dos veces Δ_1 , en el sentido que se explica en la nota 20. De hecho la definición de Δ_1 fue motivada por lo siguiente

$$\begin{matrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ -pZ_1 & X_1 & Y_1 \\ -pY_1 & -pZ_1 & X_1 \end{matrix} \begin{matrix} I \\ \xi I \\ \xi^2 I \end{matrix} = \begin{matrix} I \\ \xi I \\ \xi^2 I \end{matrix} \begin{matrix} X_1 + \xi Y_1 + \xi^2 Z_1 \end{matrix} ;$$

$$\begin{matrix} X_2 & Y_2 & Z_2 \\ -pZ_2 & X_2 & Y_2 \\ -pY_2 & -pZ_2 & X_2 \end{matrix} \begin{matrix} I \\ \xi I \\ \xi^2 I \end{matrix} \begin{matrix} I \\ -\xi I \end{matrix} = \begin{matrix} I \\ \xi I \\ \xi^2 I \end{matrix} \begin{matrix} I \\ -\xi I \end{matrix} \begin{matrix} X_2 + \xi Y_2 + \xi^2 Z_2 & Y_2 - \xi Z_2 \\ & X_2 + \xi Y_2 + \xi^2 Z_2 \end{matrix} ,$$

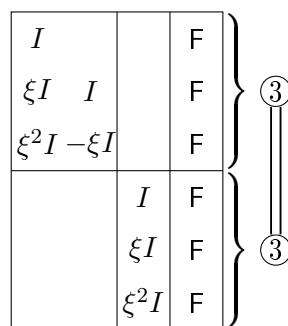
donde todas las X_i, Y_i, Z_i son matrices no singulares sobre F , de tamaño adecuado.

De igual forma, la definición de Δ_2 surge del siguiente hecho

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|} \hline \Delta_1 & \Delta_2 \\ \hline 0 & \Delta_1 \\ \hline \end{array} \\
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline I & & \\ \hline \xi I & I & \\ \hline \xi^2 I & -\xi I & \\ \hline & & I \\ & & \xi I \\ & & \xi^2 I \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|} \hline I & \\ \hline \xi I & I \\ \hline \xi^2 I & -\xi I \\ \hline & I \\ & \xi I \\ & \xi^2 I \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline X_2 + \xi Y_2 + \xi^2 Z_2 & Y_2 - \xi Z_2 & X_3 + \xi Y_3 + \xi^2 Z_3 \\ \hline & X_2 + \xi Y_2 + \xi^2 Z_2 & X_4 + \xi Y_4 + \xi^2 Z_4 \\ \hline & & X_1 + \xi Y_1 + \xi^2 Z_1 \\ \hline \end{array} ,$$

de este modo quedan completamente determinadas las adiciones del punto débil minimal del rombo de Kronecker a su punto débil maximal, y se dibuja el siguiente diagrama.



Cabe anotar que gracias a este problema matricial se determinaron también las condiciones que debía cumplir la pareja de campos (F, G) , ya que partimos de que la extensión cúbica de campos $F \subset G$, era de característica arbitraria, y tal que $G = F(\xi)$, para algún elemento primitivo ξ cuyo polinomio minimal sobre K sería $t^3 + rt^2 + qt + p$.

Bajo estas condiciones, el estabilizador de la representación $T(a)$ sería

$$\Delta'_1 = F \left\langle I_3, \Sigma' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -p & -q & -r \end{bmatrix}, \Sigma'^2 \right\rangle .$$

La representación $R(a)$ tomaría la forma $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \xi & \xi^2 \end{bmatrix}$, y su estabilizador sería

$$\Delta''_1 = F \left\langle I_3, \Sigma'' = \begin{bmatrix} 0 & -q & -1 \\ 1 & -r & 0 \\ 0 & -p & 0 \end{bmatrix}, \Sigma''^2 \right\rangle .$$

Las matrices no son similares en general, y cuando no son similares al tratar de encontrar un bimódulo que determine adiciones entre dos puntos débiles, este bimódulo siempre resulta igual al anillo $\mathcal{M}_3(\mathbf{F})$ lo que no concuerda con nuestra definición de poset 3-equipado.

Las matrices son similares si y sólo si $q = r = 0$ y la característica de los campos \mathbf{F} y \mathbf{G} es 3. Por eso se decidió llevar a cabo esta investigación con dichas condiciones para la pareja de campos (\mathbf{F}, \mathbf{G}) .

Toda esta investigación, y en especial este capítulo, confirma la importancia de los métodos matriciales, ampliamente usados durante varias décadas en la teoría de representaciones moderna (ver por ejemplo [7, 14, 20, 25, 37, 40, 42, 51, 53, 67]).

Aplicaciones posibles

Mediante algunas reformulaciones adecuadas de las definiciones de representaciones y corepresentaciones de posets 3-equipados, en este capítulo, se presentan posibles aplicaciones de los resultados obtenidos, a otras estructuras algebraicas.

5.1. Aplicaciones a la teoría de anillos

La siguiente interpretación permite describir algunos módulos, sobre ciertos anillos, usando las representaciones y corepresentaciones de posets 3-equipados.

A cada poset 3-equipado \mathcal{P} se le asignan dos *anillos de incidencia*:

$$\Lambda' = \Lambda'(\mathcal{P}) = \bigoplus_{x,y \in \mathcal{P}} \Lambda'_{xy}, \quad \widehat{\Lambda} = \widehat{\Lambda}(\mathcal{P}) = \bigoplus_{x,y \in \mathcal{P}} \widehat{\Lambda}_{xy},$$

donde

$$\Lambda'_{xy} = \begin{cases} \Delta_l, & \text{si } x \leq^l y, \\ 0, & \text{si } x \not\leq^l y, \end{cases} \quad \text{y} \quad \widehat{\Lambda}_{xy} = \begin{cases} \Omega_l, & \text{si } x \leq^l y, \\ 0, & \text{si } x \not\leq^l y. \end{cases}$$

Claramente $\widehat{\Lambda}(\mathcal{P}^0)$ es un *PI anillo de pico derecho* artiniano schuriano en el sentido de [31]. De la caracterización dada en ese artículo, de dichos anillos con un número finito de clases de isomorfía de módulos zócalo proyectivos indescomponibles, es posible obtener el criterio de tipo finito para posets 3-equipados.

Para poder aplicar ese resultado, en lugar de trabajar con el anillo $\Lambda'(\mathcal{P}^0)$, vamos a usar su anillo Morita equivalente $\Lambda(\mathcal{P}^0)$ es un anillo pico derecho artiniano schuriano, y se obtiene como sigue.

Considérese el poset 3-equipado \mathcal{P} , a cada punto $x \in \mathcal{P}$ se le asigna el campo $\Lambda_{xx} = \mathbb{G}$ ($\Lambda_{xx} = \mathbb{F}$) si x es débil (fuerte). Y a cada par de puntos distintos x y y se les asigna el

siguiente $(\Lambda_{xx}, \Lambda_{yy})$ -bimódulo Λ_{xy}

$$\Lambda_{xy} = \begin{cases} \Delta_1, & \text{si } x <^1 y, \\ \Delta_2, & \text{si } x <^2 y, \\ \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\Lambda_{xx}, \Lambda_{yy}), & \text{si } x <^3 y, \\ 0, & \text{si } x \not\leq y. \end{cases}$$

Entonces, el *anillo de incidencia* Λ de \mathcal{P} es

$$\Lambda = \Lambda(\mathcal{P}) = \bigoplus_{x, y \in \mathcal{P}} \Lambda_{xy}.$$

Las representaciones y corepresentaciones de \mathcal{P} son los módulos zócalo proyectivos derechos sobre los anillos de incidencia $\Lambda(\mathcal{P}^0)$ y $\widehat{\Lambda}(\mathcal{P}^0)$, respectivamente.

Nótese que Λ es el anillo matricial generalizado $[\Lambda_{x_i x_j}]$, es un anillo de Schur ya que los elementos de la diagonal son campos, además es triangular superior. Lo mismo sucede con $\widehat{\Lambda}$. Recordemos además que en [50] los anillos de pico derecho se definen precisamente como matrices generalizadas de este tipo.

Como simple observación, se tiene que los coeficientes l_{xy}, \widehat{l}_{xy} de la forma y la coforma de Tits (ver 2.1) de un poset 3-equipado \mathcal{P} son $l_{xy} = \dim_{\mathbb{F}} \Lambda_{xy}$ y $\widehat{l}_{xy} = \dim_{\mathbb{F}} \widehat{\Lambda}_{xy}$.

Entonces, la teoría de representaciones y corepresentaciones de los posets 3-equipados permite, en principio, desarrollar la teoría de los módulos zócalo proyectivos derechos sobre los anillos Λ y $\widehat{\Lambda}$, por medio de inducción de los resultados correspondientes. En particular, uno puede definir PI-anillo de pico derecho de un parámetro de un modo estándar, análogo al caso de álgebras sobre un campo (ver detalles por ejemplo [51, Chapter 14]), y obtener por esta vía el siguiente resultado.

Proposición 27. *Sean \mathcal{P} un poset 3-equipado y Λ y $\widehat{\Lambda}$ sus anillos de incidencia sobre la pareja de campos (\mathbb{F}, \mathbb{G}) . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) Λ es de un parámetro.
- (2) $\widehat{\Lambda}$ es de un parámetro.
- (3) \mathcal{P} contiene exactamente uno de los posets críticos 3-equipados $K_1, \dots, K_5, K_{10}, K_{11}$ como subposet, y no contiene al poset W_{10} de la forma (2.4).

5.2. Aplicaciones a la teoría de vectroides

Una de las motivaciones de esta investigación es su estrecha relación con la teoría de representaciones de categorías de espacios vectoriales, entre ellas los vectroides (ver por ejemplo [17, 18, 60]).

Recordemos que un *vectroide* \mathcal{L} sobre un campo \mathbb{K} es una subcategoría \mathbb{K} -lineal (por lo general no plena) de la categoría de \mathbb{K} -espacios de dimensión finita con objetos indescomponibles y no isomorfos dos a dos.

Sean X y Y objetos de \mathcal{L} , $\mathcal{L}(X, Y)$ el espacio de morfismos de X a Y . Los módulos derechos sobre el anillo $\bigoplus_{X, Y} \mathcal{L}(X, Y)$ se llaman \mathcal{L} -módulos (o módulos sobre el vectroide \mathcal{L}). El *módulo básico* del vectroide \mathcal{L} , es el \mathcal{L} -módulo $\mathcal{L}_0 = \bigoplus_X X$.

Una *representación* U , del vectroide \mathcal{L} sobre K , es cualquier \mathcal{L} -submódulo derecho del producto tensorial

$$U \subset U_0 \bigotimes_K \mathcal{L}_0$$

donde U_0 es un K -espacio, que para este trabajo se considerará de dimensión finita.

Claramente, $U = \bigoplus_X U_X$, donde $U_X \subset U_0 \bigotimes_K X$, por lo tanto la representación U puede identificarse con la colección

$$U = (U_0; U_X : X \in \text{Ob}\mathcal{L}),$$

donde $U_X \mathcal{L}(X, Y) \subset U_Y$ para cualquier par de objetos X, Y .

Un *morfismo* de una representación U en otra representación V es cualquier aplicación K -lineal $\varphi : U_0 \rightarrow V_0$ tal que $(\varphi \otimes 1)(U) \subset V$, que es equivalente a la condición $(\varphi \otimes 1_X)(U_X) \subset V_X$ para todo X .

Cada poset 3-equipado \mathcal{P} determina un vectroide $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{P})$ sobre el campo F , que depende de G , luego decimos que determina un vectroide sobre (F, G) . A todo punto $x \in \mathcal{P}$ corresponde uno y sólo un objeto X de \mathcal{L} . X es una copia F_x del campo F si el punto x es fuerte; o bien, si el punto x es débil, el objeto X será una copia G_x del campo G . Cada objeto X tiene anillo de endomorfismos $\mathcal{L}(X, X) = F$ si x es fuerte, o $\mathcal{L}(X, X) = G$ si x es débil. Los morfismos entre diferentes objetos se definen como sigue

$$\mathcal{L}(X, Y) = \begin{cases} G, & \text{si } x <^1 y, \\ G \langle e_{12} + e_{33}, e_{21} + e_{33} \rangle, & \text{si } x <^2 y, \\ \text{Hom}_F(X, Y), & \text{si } x <^3 y, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Una *representación* del poset \mathcal{P} sobre el par (F, G) es precisamente una representación del vectroide $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{P})$, sobre F , que identificaremos con la colección

$$U = (U_0; U_x : x \in \mathcal{P}),$$

donde U_0 es un F -espacio vectorial de dimensión finita y cada U_x es un F -subespacio de $U_0 \bigotimes_F F = U_0$ si x es fuerte o un G -subespacio del G -espacio vectorial $\widetilde{U}_0 = U_0 \bigotimes_F G$ si x es débil. Además, se satisface la condición $U_x \mathcal{L}(X, Y) \subset U_y$ para cualquier par de puntos $x, y \in \mathcal{P}$.

Hasta el momento, no es evidente como algún vectroide determinado por \mathcal{P} pueda tener por representaciones, las corepresentaciones de \mathcal{P} . Sin embargo, es posible definir vectroides de un parámetro e inducir los siguientes resultados.

Proposición 28. *Sean \mathcal{P} un poset 3-equipado y $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{P})$ el vectroide que determina \mathcal{P} sobre la pareja de campos (F, G) . Entonces \mathcal{L} es de un parámetro si y solo si \mathcal{P} contiene exactamente uno de los posets críticos 3-equipados $K_1, \dots, K_5, K_{10}, K_{11}$ como subposet, y no contiene al poset W_{10} de la forma (2.4).*

Los diagramas de los posets críticos se encuentran en los teoremas 1 y 12.

Proposición 29. *Sean \mathcal{P} un poset 3-equipado y $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{P})$ el vectroide que determina \mathcal{P} sobre la pareja de campos (F, G) . Si \mathcal{L} es de un parámetro, entonces tiene representaciones*

indescomponibles sinceras si y solo si \mathcal{P} es isomorfo a K_{10} , o a K_{11} , o a alguno de los posets ordinarios $K_1, \dots, K_5, A_1, \dots, A_{24}, S_1, S_2, S_3$ (ver [46], [58]).

APÉNDICE A

Formas matriciales de los indescomponibles sinceros de los posets 3-equipados de tipo finito

Poset	Representaciones	Corepresentaciones
F_{19} $\textcircled{3}$ a	$Q(a) = \begin{matrix} a \\ \boxed{1} \end{matrix} f = 1$ $R(a) = \begin{matrix} a \\ \begin{matrix} \boxed{1 & 0} \\ \xi & 1 \\ \xi^2 & -\xi \end{matrix} \end{matrix} f = 3$ $S(a) = \begin{matrix} a \\ \boxed{1} \\ \xi \end{matrix} f = 1$ $T(a) = \begin{matrix} a \\ \boxed{1} \\ \xi \\ \xi^2 \end{matrix} f = 3$	$\widehat{Q}(a) = \begin{matrix} a \\ \boxed{1 \quad \xi \quad \xi^2} \end{matrix} \widehat{f} = 3$ $\widehat{R}(a) = \begin{matrix} a \\ \boxed{1 \quad \xi} \end{matrix} \widehat{f} = 1$ $\widehat{S}(a) = \begin{matrix} a \\ \begin{matrix} \boxed{1 \quad \xi \quad \xi^2} \\ 0 \quad 1 \quad -\xi \end{matrix} \end{matrix} \widehat{f} = 3$ $\widehat{T}(a) = \begin{matrix} a \\ \boxed{1} \end{matrix} \widehat{f} = 1$
F_{20} $\textcircled{3}$ \parallel $\textcircled{3}$ b a	$H(a, b) = \begin{matrix} a & b \\ \begin{matrix} \boxed{1} & \boxed{0} \\ \xi & 0 \\ \xi^2 & 1 \end{matrix} \end{matrix} f = 3$	$\widehat{H}(a, b) = \begin{matrix} a & b \\ \boxed{1} & \boxed{\xi^2} \end{matrix} \widehat{f} = 1$

APÉNDICE B

Representaciones matriciales del poset 3-equipado K_{10}

La tabla a continuación contiene las formas matriciales de todas las representaciones indescomponibles sinceras del poset K_{10} , salvo isomorfismo.

En cada representación matricial, la franja izquierda corresponde al punto débil a y la franja derecha al punto fuerte b . Se siguen las convenciones de la nota 20 y la notación del apéndice A.

Representaciones cuyas dimensiones tienen forma de Tits igual a 0																																	
<p>Una serie</p> <p>1) <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>I_n</td><td>I_n</td></tr> <tr><td>ξI_n</td><td>Θ</td></tr> </table> <p style="margin-left: 40px;">donde Θ es una matriz sobre F en forma canónica estándar con respecto a transformaciones de semejanza ordinaria ($X^{-1}\Theta X$) sobre F.</p> </p>	I_n	I_n	ξI_n	Θ	<p>2) <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>$R(a)$</td><td>0</td><td>e_{11}</td></tr> <tr><td>0</td><td>$T(a)$</td><td>I_3</td></tr> </table></p>	$R(a)$	0	e_{11}	0	$T(a)$	I_3																						
I_n	I_n																																
ξI_n	Θ																																
$R(a)$	0	e_{11}																															
0	$T(a)$	I_3																															
<p>3) <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>$R(a)$</td><td>0</td><td>0</td><td>e_3</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>I_{3m}</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>I_{3m}</td></tr> <tr><td>0</td><td>ξI_{3m}</td><td>0</td><td>e_{3m}</td><td>0</td><td>$\Phi((t^3 + p)^m)$</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>$T(a)$</td><td>e_1</td><td>I_2^\uparrow</td><td>0</td></tr> </table></p>	$R(a)$	0	0	e_3	0	0	0	I_{3m}	0	0	0	I_{3m}	0	ξI_{3m}	0	e_{3m}	0	$\Phi((t^3 + p)^m)$	0	0	$T(a)$	e_1	I_2^\uparrow	0	<p>$\Phi((t^3 + p)^m)$ es la matriz acompañante de la m-ésima potencia del polinomio minimal $t^3 + p$, de ξ sobre F.</p>								
$R(a)$	0	0	e_3	0	0																												
0	I_{3m}	0	0	0	I_{3m}																												
0	ξI_{3m}	0	e_{3m}	0	$\Phi((t^3 + p)^m)$																												
0	0	$T(a)$	e_1	I_2^\uparrow	0																												
Representaciones cuyas dimensiones tienen forma de Tits igual a 1																																	
<p>4) <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> </table> <p>5) <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>$R(a)$</td><td>e_1</td></tr> </table> <p>6) <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>$R(a)$</td><td>I_2^\downarrow</td></tr> </table> <p>7) <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>$T(a)$</td><td>e_1</td></tr> </table></p> </p></p></p>	1	1	$R(a)$	e_1	$R(a)$	I_2^\downarrow	$T(a)$	e_1	<p>8) <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>$T(a)$</td><td>I_2^\downarrow</td></tr> </table> <p>9) <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>$S(a)$</td><td>0</td><td>e_{22}</td></tr> <tr><td>0</td><td>$T(a)$</td><td>I_2^\uparrow</td></tr> </table> <p>10) <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>$S(a)$</td><td>0</td><td>e_{21}</td></tr> <tr><td>0</td><td>$T(a)$</td><td>I_3</td></tr> </table></p> </p></p>	$T(a)$	I_2^\downarrow	$S(a)$	0	e_{22}	0	$T(a)$	I_2^\uparrow	$S(a)$	0	e_{21}	0	$T(a)$	I_3										
1	1																																
$R(a)$	e_1																																
$R(a)$	I_2^\downarrow																																
$T(a)$	e_1																																
$T(a)$	I_2^\downarrow																																
$S(a)$	0	e_{22}																															
0	$T(a)$	I_2^\uparrow																															
$S(a)$	0	e_{21}																															
0	$T(a)$	I_3																															
<p>11) <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>I_2</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>ξI_2</td><td>0</td><td>\vec{I}_2</td></tr> <tr><td>0</td><td>$T(a)$</td><td>I_3</td></tr> </table> <p>12) <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>I_n</td><td>\vec{I}_n</td></tr> <tr><td>ξI_n</td><td>\overleftarrow{I}_n</td></tr> </table> <p>13) <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>I_{n+1}</td><td>I_n^\downarrow</td></tr> <tr><td>ξI_{n+1}</td><td>I_n^\uparrow</td></tr> </table></p> </p></p>	I_2	0	0	ξI_2	0	\vec{I}_2	0	$T(a)$	I_3	I_n	\vec{I}_n	ξI_n	\overleftarrow{I}_n	I_{n+1}	I_n^\downarrow	ξI_{n+1}	I_n^\uparrow	<p>14) <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>$R(a)$</td><td>0</td><td>$e_{3,n+1}$</td></tr> <tr><td>0</td><td>I_n</td><td>\vec{I}_n</td></tr> <tr><td>0</td><td>ξI_n</td><td>\overleftarrow{I}_n</td></tr> </table> <p>15) <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>$R(a)$</td><td>0</td><td>$e_{12} + e_{33}$</td></tr> <tr><td>0</td><td>$S(a)$</td><td>\vec{I}_2</td></tr> </table></p> </p>	$R(a)$	0	$e_{3,n+1}$	0	I_n	\vec{I}_n	0	ξI_n	\overleftarrow{I}_n	$R(a)$	0	$e_{12} + e_{33}$	0	$S(a)$	\vec{I}_2
I_2	0	0																															
ξI_2	0	\vec{I}_2																															
0	$T(a)$	I_3																															
I_n	\vec{I}_n																																
ξI_n	\overleftarrow{I}_n																																
I_{n+1}	I_n^\downarrow																																
ξI_{n+1}	I_n^\uparrow																																
$R(a)$	0	$e_{3,n+1}$																															
0	I_n	\vec{I}_n																															
0	ξI_n	\overleftarrow{I}_n																															
$R(a)$	0	$e_{12} + e_{33}$																															
0	$S(a)$	\vec{I}_2																															

$$16) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline I_{n+1} & 0 & 0 & I_n^\downarrow \\ \hline \xi I_{n+1} & 0 & e_{11} & I_n^\uparrow \\ \hline 0 & T(a) & I_3 & 0 \\ \hline \end{array} \quad 17) \begin{array}{|c|c|c|} \hline I_3 & 0 & e_{24} \\ \hline \xi I_3 & 0 & e_{11} + e_{23} + e_{34} \\ \hline 0 & T(a) & \overrightarrow{I_3} \\ \hline \end{array}$$

$$18) \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline T(a) & 0 & 0 & 0 & I_2^\uparrow \\ \hline 0 & I_{2n} & 0 & I_{2n-2} & 0 \\ \hline 0 & \xi I_{2n} & I_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & 0 & I_{2n-2} & 0 \\ \hline \end{array} \quad 19) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline I_{2n+2} & 0 & 0 & I_{2n}^\downarrow \\ \hline \xi I_{2n+2} & 0 & f_1 & 0 \\ \hline 0 & T(a) & e_{12} & I_{2n}^\uparrow \\ \hline 0 & & I_3 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$20) \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline I_{2n+3} & 0 & 0 & I_{n+1}^\downarrow & 0 \\ \hline \xi I_{2n+3} & 0 & e_{13} & I_{n+1}^\uparrow & 0 \\ \hline 0 & T(a) & e_{11} & 0 & I_n^\uparrow \\ \hline 0 & & I_3 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$21) \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline T(a) & 0 & 0 & 0 & e_1 & 0 & 0 & e_3 \\ \hline 0 & I_{2n+1} & 0 & I_n^\downarrow & e_{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \xi I_{2n+1} & e_1 & I_n^\uparrow & 0 & 0 & I_{n-1}^\downarrow & e_n \\ \hline 0 & & 0 & 0 & 0 & e_1 & I_{n-1}^\uparrow & 0 \\ \hline \end{array}$$

Representaciones cuyas dimensiones tienen forma de Tits igual a 3

$$22) \begin{array}{|c|c|} \hline R(a) & I_3 \\ \hline \end{array} \quad 23) \begin{array}{|c|c|c|} \hline I_2 & 0 & \overrightarrow{I_2} \\ \hline \xi I_2 & I_2 & e_{13} \\ \hline \xi^2 I_2 & -\xi I_2 & e_{23} \\ \hline \end{array} \quad 24) \begin{array}{|c|c|} \hline T(a) & I_3 \\ \hline \end{array}$$

$$25) \begin{array}{|c|c|} \hline I_2 & \overrightarrow{I_2} \\ \hline \xi I_2 & e_{13} \\ \hline \xi^2 I_2 & e_{23} \\ \hline \end{array} \quad 26) \begin{array}{|c|c|c|} \hline I_3 & 0 & 0 \\ \hline \xi I_3 & 0 & I_3 \\ \hline 0 & T(a) & I_3 \\ \hline \end{array} \quad 27) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline I_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \xi I_3 & 0 & \overrightarrow{I_3} & e_{33} \\ \hline 0 & I_2 & \overrightarrow{I_2} & 0 \\ \hline 0 & \xi I_2 & e_{13} & e_{21} \\ \hline 0 & \xi^2 I_2 & 0 & \overleftarrow{I_2} \\ \hline \end{array}$$

$$28) \begin{array}{|c|c|c|} \hline R(a) & 0 & e_{31} \\ \hline 0 & I_{3m} & I_{3m} \\ \hline 0 & \xi I_{3m} & \Phi((t^3 + p)^m) \\ \hline \end{array} \quad 29) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline I_{3m} & 0 & 0 & I_{3m} \\ \hline \xi I_{3m} & 0 & e_{3m,1} & \Phi((t^3 + p)^m) \\ \hline 0 & T(a) & I_3 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$30) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline R(a) & 0 & 0 & I_3 \\ \hline 0 & I_{3n} & 0 & I_{3n-3} \\ \hline 0 & \xi I_{3n} & I_3 & 0 \\ \hline 0 & & 0 & I_3 \\ \hline 0 & & 0 & I_{3n-3} \\ \hline 0 & & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad 31) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline I_{3n+3} & 0 & 0 & I_{3n} \\ \hline \xi I_{3n+3} & 0 & I_3 & 0 \\ \hline 0 & T(a) & 0 & I_{3n} \\ \hline 0 & & I_3 & 0 \\ \hline \end{array}$$

32)	I_2	0	0	0	0	e_{23}
	ξI_2	I_2	0	0	0	e_{13}
	$\xi^2 I_2$	$-\xi I_2$	0	0	0	$\overrightarrow{I_2}$
	0	0	I_{3n}	0	I_{3n-3}	0
	0	0	ξI_{3n}	I_3	0	0
	0	0	ξI_{3n}	0	I_{3n-3}	0
33)	I_{3n+3}	0	0	0	0	I_{3n}
	ξI_{3n+3}	0	I_n^\downarrow	e_{31}	e_{23}	0
	0	I_2	I_2	0	0	0
	0	ξI_2	0	I_2	0	0
	0	$\xi^2 I_2$	0	0	I_2	0
	0	$\xi^2 I_2$	0	0	I_2	0

APÉNDICE C

Corepresentaciones matriciales del poset 3-equipado K_{10}

La tabla a continuación contiene las formas matriciales de todas las corepresentaciones indescomponibles sinceras del poset K_{10} , salvo isomorfismo.

En cada representación matricial, la franja izquierda corresponde al punto débil a y la franja derecha al punto fuerte b . Se siguen las convenciones de la nota 20 y la notación del apéndice A.

Corepresentaciones cuyas dimensiones tienen forma de Tits igual a 0	
<p>Una serie</p> <p>1) $\begin{array}{ ccc c } \hline I_n & \xi I_n & \xi^2 I_n & I_n \\ \hline 0 & I_n & -\xi I_n & \Theta \\ \hline \end{array}$ <p>donde Θ es una matriz sobre \mathbb{G}, en forma canónica estándar con respecto a transformaciones de semejanza pseudolineal $(X\Theta X^{-1} + X^\delta X^{-1})$ sobre \mathbb{G}.</p> </p>	<p>2) $\begin{array}{ cc c } \hline \widehat{R}(a) & 0 & \xi^2 \\ \hline 0 & \widehat{T}(a) & 1 \\ \hline \end{array}$</p>
<p>3) $\begin{array}{ ccccc cc } \hline \widehat{R}(a) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi^2 f_1 \\ \hline 0 & I_n & \xi I_n & \xi^2 I_n & 0 & 0 & I_n \\ \hline 0 & 0 & I_n & -\xi I_n & 0 & \xi^2 e_m & J_n^-(0) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \widehat{T}(a) & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$</p>	
Corepresentaciones cuyas dimensiones tienen forma de Tits igual a 3	
<p>4) $\begin{array}{ ccc } \hline 1 & \xi & \xi^2 \\ \hline \end{array}$ 5) $\begin{array}{ cc } \hline I_3 & \xi I_3 \\ \hline \end{array}$ 6) $\begin{array}{ cc } \hline I_3 & \xi I_3 \\ \hline \end{array}$ 7) $\begin{array}{ c } \hline I_3 \\ \hline \end{array}$ $T(b)$</p>	
<p>8) $\begin{array}{ cc } \hline I_3 & R(b) \\ \hline \end{array}$ 9) $\begin{array}{ ccc } \hline \widehat{S}(a) & 0 & e_{22} \\ \hline 0 & I_3 & R(b) \\ \hline \end{array}$ 10) $\begin{array}{ cc } \hline \widehat{S}(a) & 0 \\ \hline 0 & I_3 \\ \hline \end{array}$ $\widehat{Q}(b)$</p>	
<p>11) $\begin{array}{ cccc c } \hline I_2 & \xi I_2 & \xi^2 I_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_2 & -\xi I_2 & 0 & \widehat{S}(b) \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_3 & I_3 \\ \hline \end{array}$ 12) $\begin{array}{ ccc c } \hline I_n & \xi I_n & \xi^2 I_n & \overleftarrow{I}_n \\ \hline 0 & I_n & \xi I_n & \overrightarrow{I}_n \\ \hline \end{array}$</p>	
<p>13) $\begin{array}{ ccc c } \hline I_{n+1} & \xi I_{n+1} & \xi^2 I_{n+1} & I_n^\downarrow \\ \hline 0 & I_{n+1} & \xi I_{n+1} & I_n^\uparrow \\ \hline \end{array}$ 14) $\begin{array}{ ccccc c } \hline I_3 & \xi I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_n & \xi I_n & \xi^2 I_n & \overleftarrow{I}_n \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_n & \xi I_n & \overrightarrow{I}_n \\ \hline \end{array}$</p>	

$$15) \begin{array}{|ccc|cc|} \hline I_3 & \xi I_3 & 0 & e_{3,1} & T(b) \\ \hline 0 & 0 & \widehat{S}(a) & I_2 & 0 \\ \hline \end{array} \quad 16) \begin{array}{|cccc|cc|} \hline I_{n+1} & \xi I_{n+1} & \xi^2 I_{n+1} & 0 & 0 & I_n^\downarrow \\ \hline 0 & I_{n+1} & \xi I_{n+1} & 0 & e_{1,1} & I_n^\uparrow \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_3 & I_3 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$17) \begin{array}{|cccccccc|cccc|} \hline 1 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\xi & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \xi^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$18) \begin{array}{|cccc|cc|} \hline I_3 & \xi I_3 & 0 & 0 & 0 & R(a) \\ \hline 0 & 0 & I_{2n} & \xi I_{2n} & \xi^2 I_{2n} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{2n} & -\xi I_{2n} & I_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{2n} & -\xi I_{2n} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{2n} & -\xi I_{2n} & I_{2n-2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{2n} & -\xi I_{2n} & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$19) \begin{array}{|cccc|cc|} \hline I_{2n+2} & \xi I_{2n+2} & \xi^2 I_{2n+2} & 0 & 0 & I_{2n} \\ \hline 0 & I_{2n} & -\xi I_{2n} & 0 & \widehat{S}(b) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_3 & I_3 & I_{2n} \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_3 & I_3 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$20) \begin{array}{|cccccc|ccc|} \hline I_{n+2} & 0 & \xi I_{n+2} & 0 & \xi^2 I_{n+2} & 0 & 0 & 0 & I_{n+1}^\downarrow & 0 \\ \hline 0 & I_{n+1} & 0 & \xi I_{n+1} & 0 & \xi^2 I_{n+1} & 0 & 0 & 0 & I_n^\downarrow \\ \hline 0 & 0 & I_{n+2} & 0 & -\xi I_{n+2} & 0 & 0 & e_{1,3} & I_{n+1}^\uparrow & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n+1} & 0 & -\xi I_{n+1} & 0 & \widehat{Q}(b) & 0 & I_n^\uparrow \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_3 & I_3 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$21) \begin{array}{|cccccccc|cccc|} \hline 1 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{n+1} \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi f_{n+1} \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{n+2} & \xi^2 f_{n+1} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n+1} & 0 & \xi I_{n+1} & 0 & \xi^2 I_{n+1} & 0 & \overleftarrow{I_{n+1}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_n & 0 & \xi I_n & 0 & \xi^2 I_n & 0 & \overleftarrow{I_n} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n+1} & 0 & -\xi I_{n+1} & 0 & \overrightarrow{I_{n+1}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_n & 0 & -\xi I_n & \overrightarrow{I_n} & 0 \\ \hline \end{array}$$

Corepresentaciones cuyas dimensiones tienen forma de Tits igual a 1

$$22) \begin{array}{|c|c|} \hline \widehat{R}(a) & 1 \\ \hline \end{array} \quad 23) \begin{array}{|cc|c|} \hline I_2 & \xi I_2 & S(b) \\ \hline \end{array} \quad 24) \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad 25) \begin{array}{|c|c|} \hline I_2 & S(b) \\ \hline \end{array}$$

$$26) \begin{array}{|cc|c|} \hline \widehat{S}(a) & 0 & e_2 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad 27) \begin{array}{|ccc|cc|} \hline 1 & \xi & \xi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -\xi & 0 & 0 & 1 & \xi \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

28) <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">$\widehat{R}(a)$</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">$\xi^2 f_n$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">I_n</td> <td style="padding: 5px;">ξI_n</td> <td style="padding: 5px;">$\xi^2 I_n$</td> <td style="padding: 5px;">I_n</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">I_n</td> <td style="padding: 5px;">$-\xi I_n$</td> <td style="padding: 5px;">$J_n^-(0)$</td> </tr> </table>	$\widehat{R}(a)$	0	0	0	$\xi^2 f_n$	0	I_n	ξI_n	$\xi^2 I_n$	I_n	0	0	I_n	$-\xi I_n$	$J_n^-(0)$	29) <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">I_n</td> <td style="padding: 5px;">ξI_n</td> <td style="padding: 5px;">$\xi^2 I_n$</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">I_n</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">I_n</td> <td style="padding: 5px;">$-\xi I_n$</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">e_1</td> <td style="padding: 5px;">$J_n^-(0)$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> </table>	I_n	ξI_n	$\xi^2 I_n$	0	0	I_n	0	I_n	$-\xi I_n$	0	e_1	$J_n^-(0)$	0	0	0	1	1	0															
$\widehat{R}(a)$	0	0	0	$\xi^2 f_n$																																													
0	I_n	ξI_n	$\xi^2 I_n$	I_n																																													
0	0	I_n	$-\xi I_n$	$J_n^-(0)$																																													
I_n	ξI_n	$\xi^2 I_n$	0	0	I_n																																												
0	I_n	$-\xi I_n$	0	e_1	$J_n^-(0)$																																												
0	0	0	1	1	0																																												
30) <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">ξ</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">f_{n+1}</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">I_n</td> <td style="padding: 5px;">$\overleftarrow{I_n}$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">ξI_n</td> <td style="padding: 5px;">$\overrightarrow{I_n}$</td> </tr> </table>	1	ξ	0	f_{n+1}	0	0	I_n	$\overleftarrow{I_n}$	0	0	ξI_n	$\overrightarrow{I_n}$	31) <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">I_{n+1}</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">I_n^\downarrow</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">ξI_{n+1}</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">e_1</td> <td style="padding: 5px;">I_n^\uparrow</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> </table>	I_{n+1}	0	0	I_n^\downarrow	ξI_{n+1}	0	e_1	I_n^\uparrow	0	1	1	0																								
1	ξ	0	f_{n+1}																																														
0	0	I_n	$\overleftarrow{I_n}$																																														
0	0	ξI_n	$\overrightarrow{I_n}$																																														
I_{n+1}	0	0	I_n^\downarrow																																														
ξI_{n+1}	0	e_1	I_n^\uparrow																																														
0	1	1	0																																														
32) <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">ξ</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">f_{n+1}</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">ξ</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">ξf_{n+1}</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">I_n</td> <td style="padding: 5px;">$\overleftarrow{I_n}$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">ξI_n</td> <td style="padding: 5px;">$\overrightarrow{I_n}$</td> </tr> </table>	1	0	ξ	0	0	f_{n+1}	0	1	0	ξ	0	ξf_{n+1}	0	0	0	0	I_n	$\overleftarrow{I_n}$	0	0	0	0	ξI_n	$\overrightarrow{I_n}$	33) <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">I_{n+1}</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">I_n^\downarrow</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">ξI_{n+1}</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">e_1</td> <td style="padding: 5px;">ξe_1</td> <td style="padding: 5px;">I_n^\uparrow</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> </table>	I_{n+1}	0	0	0	0	I_n^\downarrow	ξI_{n+1}	0	0	e_1	ξe_1	I_n^\uparrow	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
1	0	ξ	0	0	f_{n+1}																																												
0	1	0	ξ	0	ξf_{n+1}																																												
0	0	0	0	I_n	$\overleftarrow{I_n}$																																												
0	0	0	0	ξI_n	$\overrightarrow{I_n}$																																												
I_{n+1}	0	0	0	0	I_n^\downarrow																																												
ξI_{n+1}	0	0	e_1	ξe_1	I_n^\uparrow																																												
0	1	0	1	0	0																																												
0	0	1	0	1	0																																												

APÉNDICE D

Representaciones matriciales del poset 3-equipado K_{11}

Las formas matriciales de todas las representaciones indescomponibles sinceras del poset K_{11} , salvo isomorfismo, se presentan en la siguiente tabla.

En cada representación matricial, la franja izquierda corresponde al punto minimal a y la franja derecha al punto maximal b . Se siguen las convenciones de la nota 20 y la notación del apéndice A.

Representaciones cuyas dimensiones tienen forma de Tits igual a 0																					
<p>Una serie</p> <p>1) <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>I_n</td><td>0</td></tr> <tr><td>ξI_n</td><td>I_n</td></tr> <tr><td>$\xi^2 I_n$</td><td>$-\xi I_n + \Theta$</td></tr> </table> </p>	I_n	0	ξI_n	I_n	$\xi^2 I_n$	$-\xi I_n + \Theta$	<p>donde Θ es una matriz sobre \mathbf{G} en forma canónica estándar con respecto a transformaciones de semejanza pseudolineal $(X\Theta X^{-1} + X^\delta X^{-1})$ sobre \mathbf{G}.</p> <p>2) <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>$S(a)$</td><td>$\xi^2 e_2$</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td></tr> </table></p>	$S(a)$	$\xi^2 e_2$	0	1										
I_n	0																				
ξI_n	I_n																				
$\xi^2 I_n$	$-\xi I_n + \Theta$																				
$S(a)$	$\xi^2 e_2$																				
0	1																				
<p>3) <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>$S(a)$</td><td>0</td><td>0</td><td>$\xi^2 e_{21}$</td></tr> <tr><td>0</td><td>I_n</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>ξI_n</td><td>$\xi^2 e_n$</td><td>$J_n^-(0)$</td></tr> <tr><td>0</td><td>$\xi^2 I_n$</td><td>0</td><td>$-\xi J_n^-(\xi^{-1})$</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table></p>		$S(a)$	0	0	$\xi^2 e_{21}$	0	I_n	0	0	0	ξI_n	$\xi^2 e_n$	$J_n^-(0)$	0	$\xi^2 I_n$	0	$-\xi J_n^-(\xi^{-1})$	0	0	1	0
$S(a)$	0	0	$\xi^2 e_{21}$																		
0	I_n	0	0																		
0	ξI_n	$\xi^2 e_n$	$J_n^-(0)$																		
0	$\xi^2 I_n$	0	$-\xi J_n^-(\xi^{-1})$																		
0	0	1	0																		
Representaciones cuyas dimensiones tienen forma de Tits igual a 3																					
<p>4) <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>$R(a)$</td><td>e_3</td></tr> </table></p>	$R(a)$	e_3	<p>5) <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>I_3</td><td>0</td></tr> <tr><td>ξI_3</td><td>$T(b)$</td></tr> </table></p>	I_3	0	ξI_3	$T(b)$	<p>6) <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>I_3</td><td>0</td></tr> <tr><td>ξI_3</td><td>$R(b)$</td></tr> </table></p>	I_3	0	ξI_3	$R(b)$	<p>7) <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>$T(a)$</td><td>e_{22}</td></tr> <tr><td>0</td><td>$R(b)$</td></tr> </table></p>	$T(a)$	e_{22}	0	$R(b)$				
$R(a)$	e_3																				
I_3	0																				
ξI_3	$T(b)$																				
I_3	0																				
ξI_3	$R(b)$																				
$T(a)$	e_{22}																				
0	$R(b)$																				

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} 8) \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \xi & 0 & \xi & \xi^2 \\ \hline \xi^2 & -\xi & -\xi^2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} 9) \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \xi & 0 & 0 & \xi & \xi^2 \\ \hline 0 & \xi & 0 & 0 & -\xi \\ \hline \xi^2 & 0 & -\xi & -\xi^2 & 0 \\ \hline 0 & \xi^2 & 0 & -\xi & \xi^2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} 10) \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline I_{n+1} & 0 \\ \hline \xi I_{n+1} & I_n^\uparrow \\ \hline \xi^2 I_{n+1} & -\xi I_n^\uparrow + I_n^\downarrow \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} 11) \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline I_n & 0 \\ \hline \xi I_n & \overleftarrow{I}_n \\ \hline \xi^2 I_n & \overrightarrow{I}_n - \xi \overleftarrow{I}_n \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} 12) \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline I_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \xi I_2 & 0 & 0 & I_2 \\ \hline 0 & \xi & \widehat{R}(b) & \xi^2 f_1 \\ \hline \xi^2 I_2 & 0 & 0 & J^+(-\xi) \\ \hline 0 & \xi^2 & -\xi \widehat{R}(b) & p f_1 \\ \hline 0 & 0 & I_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & f_1 \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} 13) \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline I_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \xi I_{n+1} & e_{n+1} & \xi e_{n+1} & \xi^2 e_{n+1} & I_n^\downarrow \\ \hline \xi^2 I_{n+1} & \xi e_{n+1} & \xi^2 e_{n+1} & p e_{n+1} & I_n^\uparrow - \xi I_n^\downarrow \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} 14) \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline I_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \xi I_3 & 0 & 0 & T(b) \\ \hline 0 & I_n & 0 & 0 \\ \hline 0 & \xi I_n & I_n & 0 \\ \hline 0 & \xi^2 I_n & J_n^+(-\xi) & 0 \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} 15) \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \xi I_3 & 0 & e_3 & 0 & T(b) \\ \hline 0 & T(a) & e_3 & e_2 - \xi e_3 & 0 \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} 16) \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{2n} & 0 \\ \hline 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & \xi f_{2n} & 1 \\ \hline 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & \xi^2 f_{2n} & -\xi \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{2n} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \xi I_{2n} & e_1 & J_{2n}^-(0) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \xi^2 I_{2n} & -\xi e_1 & J_{2n}^+(0) - \xi J_{2n}^-(0) & e_{2n} \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} 17) \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline I_{2n} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_2 & 0 & 0 \\ \hline \xi I_{2n} & 0 & 0 & I_{2n} \\ \hline 0 & \xi I_2 & \widehat{S}(b) & 0 \\ \hline \xi^2 I_{2n} & 0 & 0 & -\xi I_{2n} + J_{2n-1}^\uparrow(0) \\ \hline 0 & \xi^2 I_2 & -\xi \widehat{S}(b) & e_{1,2n-2} + e_{2,2n} \\ \hline 0 & 0 & I_3 & 0 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

$$18) \begin{array}{c|cc} \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 & \xi I_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi I_n \\ 0 & 0 & 0 & \xi^2 I_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi^2 I_n \end{array} & \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & f_{n+1} \\ 0 & \xi f_{n+1} \\ f_{n+2} & \xi^2 f_{n+1} \\ 0 & 0 \\ \overrightarrow{I_{n+1}} & 0 \\ 0 & \overrightarrow{I_n} \\ \overleftarrow{I_{n+1}} - \xi \overrightarrow{I_{n+1}} & 0 \\ 0 & \overleftarrow{I_n} - \xi \overrightarrow{I_n} \end{array} \end{array}$$

$$19) \begin{array}{c|cc} \begin{array}{cc} I_{n+2} & 0 \\ 0 & I_{n+1} \\ \xi I_{n+2} & 0 \\ 0 & \xi I_{n+1} \\ \xi^2 I_{n+2} & 0 \\ 0 & \xi^2 I_{n+1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & I_{n+1}^\uparrow & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & \xi e_1 & \xi^2 e_1 & 0 & I_n^\uparrow \\ 0 & 0 & -\xi e_1 & I_{n+1}^\downarrow - \xi I_{n+1}^\uparrow & 0 \\ -\xi e_1 & -\xi^2 e_1 & p e_1 & 0 & I_n^\downarrow - \xi I_n^\uparrow \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \end{array}$$

Representaciones cuyas dimensiones tienen forma de Tits igual a 1

$$20) \begin{array}{c|c} S(a) & \begin{array}{c} 0 \\ Q(b) \end{array} \end{array} \quad 21) \begin{array}{c|c} I_2 & \begin{array}{c} 0 \\ S(a) \end{array} \end{array} \quad 22) \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 1 \\ \xi \\ \xi^2 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -\xi \\ 1 \end{array} \end{array}$$

$$23) \begin{array}{c|cc} \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \xi & 1 & \xi \\ \xi^2 & -\xi & -\xi^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} & & \end{array} \quad 24) \begin{array}{c|cc} \begin{array}{cc} S(a) & 0 \\ 0 & I_n \\ 0 & \xi I_n \\ 0 & \xi^2 I_n \end{array} & \begin{array}{c} e_{2,n} \\ 0 \\ J_n^-(0) \\ I_n - \xi J_n^-(0) \end{array} \end{array}$$

$$25) \begin{array}{c|cc} \begin{array}{ccc} I_n & 0 & 0 \\ \xi I_n & e_n & J_n^-(0) \\ \xi^2 I_n & -\xi e_n & I_n - \xi J_n^-(0) \\ 0 & Q(b) & 0 \end{array} & & \end{array}$$

$$26) \begin{array}{c|cc} \begin{array}{cc} S(a) & 0 \\ 0 & I_n \\ 0 & \xi I_n \\ 0 & \xi^2 I_n \end{array} & \begin{array}{c} e_{2,n+1} \\ 0 \\ \overrightarrow{I_n} \\ \overleftarrow{I_n} - \xi \overrightarrow{I_n} \end{array} \end{array}$$

$$27) \begin{array}{c|cc} \begin{array}{ccc} I_{n+1} & 0 & 0 \\ \xi I_{n+1} & e_{n+1} & I_n^\downarrow \\ \xi^2 I_{n+1} & \xi e_{n+1} & I_n^\uparrow - \xi I_n^\downarrow \\ 0 & 1 & 0 \end{array} & & \end{array}$$

$$28) \begin{array}{|ccc|c} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 & e_{n+1} \\ 0 & \xi & 0 & \xi e_{n+1} \\ 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & \xi I_n & \vec{I}_n \\ 0 & 0 & \xi^2 I_n & \overleftarrow{I}_n - \xi \vec{I}_n \\ \hline \end{array}$$

$$29) \begin{array}{|ccc|c} \hline I_{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ \xi I_{n+1} & e_{n+1} & \xi e_{n+1} & I_n^\downarrow \\ \xi^2 I_{n+1} & -\xi e_{n+1} & -\xi^2 e_{n+1} & I_n^\downarrow - \xi I_n^\uparrow \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

APÉNDICE E

Corepresentaciones matriciales del poset 3-equipado K_{11}

Las formas matriciales de todas las corepresentaciones indescomponibles sinceras del poset K_{11} , salvo isomorfismo, se presentan en la siguiente tabla.

En cada corepresentación matricial, la franja izquierda corresponde al punto minimal a y la franja derecha al punto maximal b . Se siguen las convenciones de la nota 20 y la notación del apéndice A.

Corepresentaciones cuyas dimensiones tienen forma de Tits igual a 0	
<p>Una serie</p> <p>1) $\boxed{I_n \mid \xi I_n + \xi^2 \Theta}$</p> <p style="text-align: center;">donde Θ es una matriz sobre F en forma canónica estándar con respecto a transformaciones de semejanza ordinaria $(X^{-1}\Theta X)$ sobre F.</p>	<p>2) $\boxed{\begin{array}{c c} \widehat{S}(a) & e_{23} \\ \hline 0 & \widehat{Q}(b) \end{array}}$</p>
<p>3) $\boxed{\begin{array}{cc cc} \widehat{S}(a) & 0 & e_{23} & 0 \\ 0 & I_{3m} & e_{3m,3} & \xi I_{3m} + \xi^2 \Phi((t^3 + p)^m) \\ 0 & 0 & \widehat{Q}(b) & 0 \end{array}}$</p>	<p>$\Phi((t^3 + p)^m)$ es la matriz acompañante de la potencia m del polinomio minimal $t^3 + p$ de ξ sobre F.</p>
Corepresentaciones cuyas dimensiones tienen forma de Tits igual a 1	
<p>4) $\boxed{\widehat{R}(a) \mid \xi^2}$</p>	<p>5) $\boxed{\widehat{S}(a) \mid e_2}$</p>
<p>6) $\boxed{\widehat{S}(a) \mid \begin{array}{c} 0 \\ \widehat{R}(b) \end{array}}$</p>	<p>7) $\boxed{\begin{array}{c c c} 1 & \xi & 0 \\ \hline 0 & 1 & \xi \end{array}}$</p>
<p>8) $\boxed{\begin{array}{c c} 1 & \xi f_1 \\ \hline 0 & \widehat{Q}(b) \end{array}}$</p>	<p>9) $\boxed{I_2 \mid \begin{array}{c} \xi \vec{I}_2 \\ \widehat{Q}(b) \end{array}}$</p>
<p>10) $\boxed{I_{n+1} \mid \xi I_n^\uparrow + \xi^2 I_n^\downarrow}$</p>	<p>11) $\boxed{I_n \mid \xi \vec{I}_n + \xi^2 \overleftarrow{I}_n}$</p>
<p>12) $\boxed{I_3 \mid \begin{array}{c} \xi^2 J_3^{\uparrow\uparrow}(0) & \xi^2 e_1 + \xi e_2 \\ \hline 0 & \widehat{Q}(b) & 0 \end{array}}$</p>	<p>13) $\boxed{\begin{array}{c c c} I_{n+1} & \xi^2 e_{n+1,3} & \xi I_n^\uparrow + \xi^2 I_n^\downarrow \\ \hline 0 & \widehat{Q}(b) & 0 \end{array}}$</p>
<p>14) $\boxed{\begin{array}{c c c} \widehat{S}(a) & 0 & e_{2,n+1} \\ \hline 0 & I_n & \xi \overleftarrow{I}_n + \xi^2 \vec{I}_n \end{array}}$</p>	

15)	$\begin{array}{ c c c c } \hline \widehat{S}(a)^\downarrow & e_3 & \xi J_2^{\uparrow+}(\xi^2) & e_2 \\ \hline \end{array}$
16)	$\begin{array}{ c c c c c } \hline \widehat{S}(a) & 0 & 0 & e_{2,2n} & \xi e_2 \\ \hline 0 & I_{2n} & \xi^2 e_1 & \xi J_{2n}^+(0) + \xi^2 J_{2n}^-(0) & \xi e_{2n} \\ \hline \end{array}$
17)	$\begin{array}{ c c c c c } \hline I_{2n+2} & 0 & 0 & 0 & \xi^2 f_1 \\ \hline & 0 & e_{2n} & 0 & \xi J_{2n}^-(0) + \xi^2 J_{2n}^+(0) \\ \hline & 0 & 0 & 1 & \xi f_{2n} \\ \hline 0 & 1 & \xi & \xi^2 & 0 \\ \hline \end{array}$
18)	$\begin{array}{ c c c c c c c } \hline 1 & \xi & \xi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -\xi & 0 & 0 & \xi^2 f_{n+2} & f_{n+1} \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n+1} & 0 & \xi \overleftarrow{I_{n+1}} + \xi^2 \overrightarrow{I_{n+1}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I_n & 0 & \xi \overleftarrow{I_n} + \xi^2 \overrightarrow{I_n} \\ \hline \end{array}$
19)	$\begin{array}{ c c c c c c c } \hline I_{n+2} & 0 & \xi^2 e_{n+2} & 0 & 0 & \xi I_{n+1}^\uparrow + \xi^2 I_{n+1}^\downarrow & 0 \\ \hline 0 & I_{n+1} & 0 & 0 & \xi^2 e_{n+1} & 0 & \xi I_n^\uparrow + \xi^2 I_n^\downarrow \\ \hline 0 & 0 & 1 & \xi & \xi^2 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$
Corepresentaciones cuyas dimensiones tienen forma de Tits igual a 3	
20)	$\begin{array}{ c c } \hline \widehat{S}(a) & 0 \\ \hline \widehat{Q}(b) & \widehat{Q}(b) \\ \hline \end{array}$
21)	$\begin{array}{ c c c c } \hline I_2 & \xi I_2 & \xi^2 I_2 & 0 \\ \hline 0 & I_2 & -\xi I_2 & \widehat{S}(a) \\ \hline \end{array}$
22)	$\begin{array}{ c c } \hline I_3 & \xi I_3 \\ \hline 0 & \widehat{S}(b) \\ \hline \end{array}$
23)	$\begin{array}{ c c c c } \hline I_3 & \xi I_2^\uparrow & \xi e_{12} & \xi e_{12} \\ \hline 0 & I_2 & \xi I_2 & \xi^2 I_2 \\ \hline \end{array}$
24)	$\begin{array}{ c c c } \hline \widehat{S}(a) & 0 & e_{2,3m} \\ \hline 0 & I_{3m} & \xi I_{3m} + \xi^2 \Phi((t^3 + p)^m) \\ \hline \end{array}$
25)	$\begin{array}{ c c c } \hline I_{3m} & e_{3m,3} & \xi I_{3m} + \xi^2 \Phi((t^3 + p)^m) \\ \hline 0 & \widehat{Q}(b) & 0 \\ \hline \end{array}$
26)	$\begin{array}{ c c c c } \hline \widehat{S}(a) & 0 & 0 & \xi^2 e_2 \\ \hline 0 & I_{3n} & \xi^2 e_1 & \xi J_{3n}^+(0) + \xi^2 J_{3n}^-(0) \\ \hline \end{array}$
27)	$\begin{array}{ c c c c c } \hline I_{3n+3} & 0 & 0 & 0 & \xi^2 f_1 \\ \hline & e_{3n} & e_{3n+1} & 0 & \xi J_{3n}^{\uparrow-}(0) + \xi^2 J_{3n}^{\uparrow+}(0) \\ \hline & 0 & 0 & 1 & \xi f_{3n} \\ \hline 0 & 1 & \xi & \xi^2 & 0 \\ \hline \end{array}$
28)	$\begin{array}{ c c c c c c c c } \hline 1 & 0 & \xi & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \xi & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & -\xi & 0 & 0 & 0 & f_{3n} + \xi f_{3n+1} & \xi^2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\xi & 0 & 0 & f_{3n+1} & -\xi \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{3n} & \xi^2 e_1 & \xi J_{3n}^+(0) + \xi^2 J_{3n}^-(0) & \xi e_{3n} \\ \hline \end{array}$
29)	$\begin{array}{ c c c c c c c c } \hline I_{3n+3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi^2 f_1 \\ \hline & 0 & e_{3n} & e_{3n} & 0 & e_{3n+1} & 0 & \xi J_{3n}^{\uparrow-}(0) + \xi^2 J_{3n}^{\uparrow+}(0) \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi f_{3n} \\ \hline 0 & 1 & 0 & \xi & 0 & \xi^2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & \xi & 0 & \xi^2 & 0 \\ \hline \end{array}$

Trabajo futuro

Los posets 3-equipados y sus representaciones y corepresentaciones abren, con el presente trabajo, una línea de investigación que puede llegar a ser interesante. A continuación se presentan algunos de los pasos a seguir en esta misma dirección, así como algunos interrogantes que surgen de temas aquí considerados.

- Describir el carcaj de Auslander-Reiten para las categorías de representaciones y corepresentaciones de los posets 3-equipados.
- Estudiar corepresentaciones de posets 3-equipados sobre extensiones cúbicas de campos, separables (anotamos que el caso de representaciones para tales extensiones fue de hecho resuelto en [63]).
- Obtener otros criterios de tipo de representación y corerepresentación para posets 3-equipados (de n parámetros, de crecimiento finito, manso, salvaje, etc.).
- Describir representaciones y corepresentaciones indescomponibles para algunas clases de posets 3-equipados.
- Describir los posets 3-equipados sinceros no necesariamente de un parámetro.
- Establecer relaciones entre dimensiones de representaciones y corepresentaciones indescomponibles y las raíces de la forma y coforma cuadráticas asociadas a algunas clases de posets 3-equipados.
- Estudiar la existencia de una construcción directa que permita obtener las representaciones de un poset, a partir de sus corepresentaciones, y viceversa.
- Definir y clasificar corepresentaciones para el rombo de Kronecker de la forma (4.4).
- Definir y clasificar representaciones para el rombo pseudolineal de la forma (4.6).

Bibliografia

- [1] D. M. Arnold, *Abelian groups and representations of finite partially ordered sets*, CMS Books in Mathematics, 2000.
- [2] ———, *Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings*, Springer Lecture Notes **931** (1982).
- [3] M. Auslander, I. Reiten, and S. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [4] H. Bass, *Algebraic K-Theory*, W. A. Benjamin Inc., New York, 1968.
- [5] K. I. Belousov, L. A. Nazarova, and A. V. Roiter, *Finitely represented tryadic sets*, Alg. and Analis. **9:4** (1997), 3–27.
- [6] K. I. Belousov, L. A. Nazarova, A. V. Roiter, and V. V. Sergeichuk, *Elementary and multielementary representations of vectroids*, Ukr. Math. J. **47:11** (1995), 1661–1687.
- [7] G. Belitskii and V. V. Sergeichuk, *Complexity of matrix problems*, Linear Algebra Appl. **361** (2003), 203–222.
- [8] V. M. Bondarenko, *Faithful partially ordered sets of infinite growth (in Russian)*, Linear Algebra and Representation Theory (1983), 68–85.
- [9] V. M. Bondarenko, A. G. Zavadskij, and L. A. Nazarova, *On representations of tame partially ordered sets. Representations and quadratic forms (in Russian)*, Akad. Nauk UkSSR Inst. Mat. (1979), 75–106; English transl., Amer. Math. Soc. Transl. **128** (1986), 57–78.
- [10] V.M. Bondarenko and A.G. Zavadskij, *Posets with an equivalence relation of tame type and of finite growth*, Can. Math. Soc. Conf. Proc. **11** (1991), 67–88.
- [11] ———, *Tame posets with equivalence relation*, Contemporary Math. **131:2** (1992), 237–251.
- [12] D. Bünermann, *Auslander-Reiten köcher von einparametrischen teilweise geordneten mengen*, Dissertation (1981).
- [13] M. C. R. Butler, *Torsion-free modules and diagrams of vector spaces*, Proc. Lond. Math. Soc. **18** (1968).
- [14] W. W. Crawley-Boevey, *Matrix problems and Drozd’s theorem*, In: *Topics in Algebra, Part I: Rings and Representations of Algebras*, Banach Center Publications **26** (1990), 199–222.
- [15] P. M. Cohn, *Free Rings and Their Relations*, Acad. Press, London-NY, 1971.
- [16] P.M. Cohn, *Skew Fields*, Encyclopedia of Math. and its Appl., **57**, Cambridge Univ. Press, 2003.
- [17] V. Dlab and C. M. Ringel, *Indecomposable representations of graphs and algebras*, Memoirs Amer. Math. Soc. **173** (1976), 1–57.
- [18] ———, *Normal forms of real matrices with respect to complex similarity*, Linear Algebra Appl. **17** (1977), 107–124.
- [19] I. Dorado, *Three-equipped posets and their representations and corepresentations (inseparable case)*, Linear Algebra Appl. **433** (2010), 1827–1850.
- [20] Yu. A. Drozd, *Matrix problems and categories of matrices*, LOMI **28** (1972), 144–153.
- [21] Yu.A. Drozd, *Coxeter transformations and representations of partially ordered sets*, Funkts. Anal. Prilozh. **8:3** (1974), 34–42.

-
- [22] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen I*, Manuscripta Math. **6** (1972), 71–103.
- [23] ———, *Représentations indécomposables des ensembles ordonnés*, Semin. P. Dubreil, 26 annee 1972/73, *Algebre*, Expose **13** (1973), 301–304.
- [24] P. Gabriel and A. V. Roiter, *Representations of Finite-Dimensional Algebras*, Algebra VIII, Encyclopedia of Math. Sc., **73**, Springer, 1992.
- [25] P. Gabriel, L. A. Nazarova, A. V. Roiter, V.V. Sergeichuk, and D. Vossieck, *Tame and wild subspace problems*, Ukrainian J. Math. **45** (1993), 335–372.
- [26] T. Guidon, *Representations of dyadic sets 2*, Diss. Univ. Zurich (1996), 1–47.
- [27] U. Hassler, *Representations of dyadic sets 1*, Diss. Univ. Zurich (1996), 1–62.
- [28] N. Jacobson, *Pseudo-linear transformations*, Annals of Mathematics **38** (1937), 484–507.
- [29] M. M. Kleiner, *Partially ordered sets of finite type (in Russian)*, Zap. Nauchn. Semin. LOMI **28** (1972), 32–41; English transl., J. Sov. Math. **3** (1975), 607–615.
- [30] ———, *On faithful representations of partially ordered sets of finite type (in Russian)*, Zap. Nauchn. Semin. LOMI **28** (1972), 42–59; English transl., J. Sov. Math. **3** (1975), 616–628.
- [31] B. Klemp and D. Simson, *Schurian sp-representation-finite right peak PI-rings and their indescomposable socle projective modules*, Journal of Algebra **134:2** (1990), 390–468.
- [32] L. Kronecker, *Algebraische Reduction der Scharen bilinearer Formen*, Sitzungsber. Akad. Berlin, Jbuch. 22, 169 (1890), 1225–1237.
- [33] L. A. Nazarova, *Partially ordered sets of infinite type (in Russian)*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **39:5** (1975), 963–991; English transl. in Math. USSR Izv. **9** (1975).
- [34] L. A. Nazarova, V. M. Bondarenko, and A. V. Roiter, *Representations of posets with involution (in Russian)*, Preprint Inst. Math. AN UkSSR **86.80** (1986), 1–26.
- [35] L. A. Nazarova and A. V. Roiter, *Representations of partially ordered sets (in Russian)*, Zap. Nauchn. Semin. LOMI **28** (1972), 5–31; English transl., J. Sov. Math. **3** (1975), 585–606.
- [36] ———, *Categorical matrix problems and the Brauer-Thrall conjecture (in Russian)*, Preprint Inst. Math. AN UkSSR **73.9** (1973), 1–100; English transl. in Mitt. Math. Semin. Giessen **115** (1975).
- [37] ———, *On a problem of I. M. Gelfand (in Russian)*, Funkz. Anal. i Priložen. **7:4** (1973), 64–69; English transl., Function. Anal. Appl. **7** (1973), 299–311.
- [38] ———, *Representations and forms of weakly completed partially ordered sets (in Russian)*, Linear Algebra and Representation Theory, Collect. sci. Works, Kiev (1983), 19–54.
- [39] ———, *Representations of bipartite completed posets*, Comment. Math. Helv. **63** (1988), 498–526.
- [40] ———, *Finitely represented dyadic sets*, Ukr. Math. J. **52:10** (2000), 1561–1596.
- [41] ———, *Functors and dyadic sets of finite type*, Functional Analysis and Its Applications **34:2** (2000), 148–150.
- [42] ———, *The norm of a relation, separating functions and representations of marked quivers (in Russian)*, Ukr. Math. J. **54:6** (2002), 808–840, available at [arXiv:math.RT/0206052v1](https://arxiv.org/abs/math.RT/0206052v1).
- [43] L. A. Nazarova, A. V. Roiter, and M. N. Smirnova, *Antimonotonous quadratic forms and partially ordered sets* (2005), available at [arXiv:math.RT/0501374v1](https://arxiv.org/abs/math.RT/0501374v1).
- [44] O. Ore, *Theory of non-commutative polynomials*, Ann. of Math. **34** (1933), 480–508.
- [45] V. V. Otrashevskaya, *On one-parameter partially ordered sets*, Ukrainian Math. Journal **28:3** (1976), 334–341.
- [46] ———, *On representations of one-parameter partially ordered sets in “Matrix problems”*, Akad. Nauk Ukrain. SSR Inst. Mat. (in Russian) (1977), 144–149.
- [47] C. M. Ringel, *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*, LNM, **1099**, Springer, 1984.
- [48] C. Rodríguez and A. G. Zavadskij, *On corepresentations of equipped posets and their differentiation*, página de revista **41** (2007), 117–142, available at <http://www.emis.de/journals/RCM/Articulos/820.pdf>.
- [49] C. Rodríguez, *On corepresentations of one parametric equipped posets*, São Paulo Journal of Mathematical Sciences **4** (2010), 141–175.
- [50] D. Simson, *Vector space categories, right peak rings and their socle projective modules*, J. Algebra **92** (1985), 532–571.

-
- [51] ———, *Linear representations of partially ordered sets and vector space categories*, Algebra Logic Appl., Vol. 4, Gordon & Breach Sci. Publ., New York, 1992.
- [52] V. V. Sergeichuk, *Pseudolinear matrix pencils and systems of linear differential equations with meromorphic coefficients (in Russian)*, Differ. Uravneniya **25** (1989), 1721–1727; English transl., Differ. Equations **25** (1989), 1201–1206.
- [53] ———, *Canonical matrices for linear matrix problems*, Linear Algebra Appl. **317** (2000), 53–102.
- [54] A. V. Zabarilo and A. G. Zavadskij, *Representations of one-parameter equipped posets*, I, II, *Matematychni Studii* (in Russian), **11** (1999), No. 1, 3–16 and No. 2, 119–134; Unabridged version in: Preprint 98.1 (in Russian) KSTUCA, Kiev (1998), 1–44.
- [55] ———, *One-parameter equipped partially ordered sets and their representations (in Russian)*, Funktsional. Anal. i Prilozhen **34** (2000), 72–75; English transl., Funct. Anal. Appl. **34** (2000), 138–140.
- [56] A. G. Zavadskij, *Differentiation with respect to a pair of points (in Russian)*, Matrix Problems, Collect. sci. Works, Kiev (1977), 115–121.
- [57] ———, *The Auslander-Reiten quiver for posets of finite growth*, Topics in Algebra, Part 1, Banach Center Publ. **26** (1990), 569–587.
- [58] ———, *Differentiation algorithm and classification of representations (in Russian)*, Izv. AN SSSR, Ser. Mat. **55:5** (1991), 1007–1048; English transl., Math. USSR Izvestia **39:2** (1992), 975–1012.
- [59] ———, *An algorithm for posets with an equivalence relation*, Can. Math. Soc. Conf. Proc. **11** (1991), 299–322.
- [60] ———, *Tame equipped posets*, Linear Algebra Appl. **365** (2003), 389–465.
- [61] ———, *Equipped posets of finite growth*, Representations of Algebras and Related Topics, AMS, Fields Inst. Comm. Ser. **45** (2005), 363–396.
- [62] ———, *A matrix problem over a central quadratic skew field extension*, Linear Algebra and its Applications **428** (2008), 393–399.
- [63] ———, *Representations of generalized equipped posets and posets with automorphisms over Galois field extensions*, Journal of Algebra **332** (2011), 386–413.
- [64] A. G. Zavadskij and V. V. Kirichenko, *Torsion-free modules over primary rings (in Russian)*, Zap. Nauchn. Semin. LOMI **57** (1976), 100–116; English transl., J. Soviet Math. **11:4** (1979), 598–612.
- [65] ———, *Semimaximal rings of finite type (in Russian)*, Mat. Sbornik **103(145):3** (1977), 323–345; English transl., Math. USSR Sbornik **32:3** (1977), 273–291.
- [66] A. G. Zavadskij and L. A. Nazarova, *Partially ordered sets of finite growth (in Russian)*, Funkz. Anal. i Priložen. **19** (1982), 72–73; English transl., Function. Anal. Appl. **16** (1982), 135–137.
- [67] Y. B. Zhang and Y.G. Xu, *Unified tame theorem*, Science in China **52** (2009), 2036–2068.