



UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA

# **Modelamiento del perfil de temperatura dentro del yacimiento durante procesos recobro térmico con inyección de vapor en yacimientos de crudo pesado**

**Carlos Andrés Torres Hernández**

Universidad Nacional de Colombia sede Medellín  
Facultad de Minas, Área Curricular de Ingeniería Química e Ingeniería de Petróleos  
Medellín, Colombia

2018



# **Modelamiento del perfil de temperatura dentro del yacimiento durante procesos recobro térmico con inyección de vapor en yacimientos de crudo pesado**

**Carlos Andrés Torres Hernández**

Tesis de investigación presentada como requisito parcial para optar al título de:  
**Magister en Ingeniería - Ingeniería de Petróleos**

Director:

Guillermo Alzate Espinosa M.Sc.

Codirectora:

Alejandra Arbeláez Londoño M.Sc.

Línea de Investigación:

Geomecánica Aplicada

Grupo de Investigación:

Grupo de Investigación en Geomecánica Aplicada – GIGA

Universidad Nacional de Colombia sede Medellín

Facultad de Minas, Área Curricular de Ingeniería Química e Ingeniería de Petróleos

Medellín, Colombia

2018



*A Dios, por quien todo es posible. Juliana y Ana María, quienes han sido mi inspiración.*

*"Por lo demás, sabemos que en todas las cosas interviene Dios para bien de los que le aman; de aquellos que han sido llamados según su designio" Rm 8,28.*



## **Agradecimientos**

A los profesores Guillermo Alzate y Alejandra Arbeláez, por su paciencia, la confianza que han depositado en mí y por su precisa orientación para el desarrollo de este trabajo.

A los integrantes del grupo GIGA, todos me han acompañado con su experiencia, sus ideas y consejos. A Edson Araujo, por su paciencia y disposición para compartir su conocimiento conmigo. A Jhonatan Carmona por sus aportes a este trabajo.

Al profesor Rick Chalaturnyk y al doctor Gonzalo Zambrano de la Universidad de Alberta en Canadá, por permitirme desarrollar mi pasantía en su grupo de investigación.

A mi familia por todo el apoyo, son mi lugar seguro.

A Colciencias y Ecopetrol por financiar el proyecto en el cual se encuentra enmarcado este trabajo de investigación.





## Resumen

El modelamiento de la temperatura durante procesos de recobro térmico con inyección de vapor, es la base para estudiar la afectación que tiene la temperatura sobre diferentes aspectos de los yacimientos de crudo pesado (productividad, esfuerzos *in situ*, etc.). Estudios anteriores acerca del modelamiento de temperatura en medios porosos, concuerdan con que una buena aproximación del comportamiento de la temperatura se consigue usando la ecuación advección-difusión como modelo constitutivo, teniendo en cuenta que esta ecuación considera los dos mecanismos de transferencia de calor que tienen mayor importancia en yacimientos de crudo pesado: la conducción y la convección. En este trabajo se desarrolla un módulo de simulación en FORTRAN en 3D y en coordenadas cilíndricas que parte de la ecuación advección-difusión y tiene como finalidad calcular el valor de la temperatura dentro de un modelo físico que representa un yacimiento que es intervenido con inyección cíclica o inyección continua de vapor. Un importante reto superado en este trabajo es el tratamiento de las inestabilidades numéricas propias del modelo constitutivo, para lo cual se propone una metodología para que el planteamiento numérico, con el que se soluciona las ecuaciones diferenciales de temperatura, sea convergente, consistente y estable numéricamente. El módulo de temperatura se integra a la plataforma de simulación GIGATHOR, para llevar a cabo el modelamiento de casos de inyección cíclica e inyección continua de vapor. Estos resultados posteriormente son comparados con los de un modelo analítico y resultados de CMG a manera de validación preliminar del modelo. Es posible establecer que con el modelo desarrollado se consigue una buena aproximación del comportamiento de temperatura en yacimientos de crudo pesado durante una inyección de vapor.

**Palabras clave:** Recobro térmico, Temperatura, Ecuación advección-difusión, Modelo numérico.

## Abstract

### **Modeling of the temperature profile inside the reservoir during thermal recovery processes with steam injection in heavy oil reservoirs**

The modeling of temperature during thermal EOR techniques using steam injection is the base to study the temperature effects in different issues of heavy oil reservoir (productivity, in situ stresses etc.). Previous works related to the temperature modeling on porous media agree with that a good approach of temperature behavior is achieved using diffusion-advection equation like temperature constitutive model since this equation takes an account the most important heat transfer mechanisms in heavy oil reservoirs: conduction and convection. In this work, a simulation modulus in FORTRAN is developed, this modulus starts from the 3D diffusion-advection equation at cylindrical coordinates, and it has as purpose to calculate the temperature value in a physical model, which represents a reservoir recovered using cyclic steam stimulation or steam flooding. An important completed challenge is the treatment of numerical instabilities own of the constitutive model, for which a methodology is proposed. This methodology guarantees that numerical approach is convergent, consistent and stable numerically. The temperature modulus is integrated into the simulation platform called GIGATHOR to carry out the modeling of the cyclic steam stimulation and steam flooding cases. Later, the obtained results are compared to the analytical model results and CMG results, this comparison is done in terms of a preliminary validation of the model. It is possible to establish that a good approximation of temperature behavior is achieved using the developed model in a heavy oil reservoir during a steam injection.

**Keywords:** Thermal recovery, Temperature, Diffusion-advection equation, Numerical model.

# Contenido

	Pág.
<b>Resumen</b> .....	<b>IX</b>
<b>Lista de figuras</b> .....	<b>XIII</b>
<b>Lista de tablas</b> .....	<b>XVI</b>
<b>Lista de Símbolos y abreviaturas</b> .....	<b>XVII</b>
<b>Introducción</b> .....	<b>1</b>
<b>1. Marco teórico</b> .....	<b>5</b>
1.1 Técnicas de recobro térmico con inyección de vapor.....	5
1.1.1 Inyección cíclica de vapor (CSS).....	8
1.1.2 Inyección continua de vapor.....	11
1.1.3 <i>Steam Assisted Gravity Drainage</i> – SAGD.....	13
1.2 Mecanismos de transferencia de calor asociados a las técnicas de recobro con inyección de vapor.....	15
1.2.1 Conducción .....	16
1.2.2 Convección .....	18
1.3 Antecedentes del modelamiento de la temperatura durante inyección de vapor .....	19
1.3.1 Modelos analíticos .....	20
1.3.2 Modelos numéricos .....	22
1.4 Ecuación Advección-Difusión.....	23
<b>2. Modelo numérico tridimensional en coordenadas cilíndricas para calcular la temperatura durante inyección de vapor</b> .....	<b>27</b>
2.1 Modelo físico .....	28
2.1.1 Modelo físico para CSS.....	30
2.1.2 Modelo físico para inyección continua de vapor .....	32
2.2 Modelo matemático .....	35
2.2.1 Cálculo de la velocidad de flujo .....	39
2.3 Modelo numérico .....	40
2.4 Modelo computacional.....	42
<b>3. Verificación y validación de los resultados del modelo</b> .....	<b>45</b>
3.1 Caso conductivo .....	46
3.2 Caso acoplado difusión–advección.....	50
3.3 Validación de los resultados del caso acoplado difusión–advección .....	55

<b>4. Casos de estudio de inyección cíclica e inyección continua de vapor.....</b>	<b>59</b>
4.1 Caso de estudio – CSS .....	60
4.2 Caso de estudio – Inyección continua de vapor.....	70
<b>5. Estudio de sensibilidad .....</b>	<b>81</b>
5.1 Número de Péclet.....	81
5.2 Sensibilidad de la conductividad térmica - <i>kb</i> .....	83
5.3 Sensibilidad de la capacidad calorífica - <i>Cp</i> .....	90
5.4 Sensibilidad del caudal de inyección .....	95
<b>6. Conclusiones y recomendaciones .....</b>	<b>99</b>
6.1 Conclusiones y observaciones .....	99
6.2 Recomendaciones.....	100
<b>A. Apéndice: Solución numérica.....</b>	<b>103</b>
<b>B. Apéndice: Gradiente geotérmico .....</b>	<b>125</b>
<b>Bibliografía .....</b>	<b>127</b>

## Lista de figuras

	Pág.
<b>Figura 1-1:</b> Clasificación de las técnicas de recobro térmico. ....	6
<b>Figura 1-2:</b> Comportamiento de la viscosidad de crudos pesados de Venezuela y Canadá. (Ali, 2003). ....	7
<b>Figura 1-3:</b> Etapas del proceso de inyección cíclica de vapor. Modificada de Alboudwarej et al. (2006). ....	9
<b>Figura 1-4:</b> Esquema de la inyección continua de vapor. Modificado de Curtis, et al. (2002). ....	12
<b>Figura 1-5:</b> Esquema teórico de la técnica SAGD. Modificado de Butler (1998). ....	14
<b>Figura 1-6:</b> Perfil de temperatura teórico para caso conductivo en dirección radial a diferentes tiempos. (Yuan, 2015). ....	17
<b>Figura 1-7:</b> Perfil de temperatura teórico para caso con convección dominante en dirección radial a diferentes tiempos. (Yuan, 2015). ....	19
<b>Figura 2-1:</b> Modelo físico. ....	29
<b>Figura 2-2:</b> Esquema de condiciones de frontera para CSS. ....	31
<b>Figura 2-3:</b> Distribución condiciones de frontera para caso de inyección continua de vapor - vista en planta ....	33
<b>Figura 2-4:</b> Distribución condiciones de frontera para caso de inyección continua de vapor - vista lateral ....	34
<b>Figura 2-5:</b> Elemento de control volumétrico. ....	36
<b>Figura 2-6:</b> Procedimiento computacional de T-RECOV. ....	43
<b>Figura 2-7:</b> Procedimiento computacional del módulo de temperatura. ....	44
<b>Figura 3-1:</b> Malla de simulación para el caso de conducción y el caso conducción-convección: <b>(a)</b> vista en planta de la malla, <b>(b)</b> vista lateral de la malla y <b>(c)</b> condición inicial de temperatura dado por el gradiente geotérmico ....	48
<b>Figura 3-2:</b> Perfil de temperatura para caso conductivo en dirección radial a diferentes tiempos ....	49
<b>Figura 3-3:</b> Resultados de temperatura en el caso conductivo 3D a diferentes tiempos: 50	
<b>Figura 3-4:</b> Resultados de temperatura en dirección radial para el caso conducción-convección a diferentes tiempos. ....	52
<b>Figura 3-5:</b> Resultados de temperatura para el caso convección-conducción, plano radial-vertical para diferentes tiempos: <b>(a)</b> $1 \times 10^3$ minutos, <b>(b)</b> $5 \times 10^3$ minutos, <b>(c)</b> $1 \times 10^4$ minutos, <b>(d)</b> $2 \times 10^4$ minutos, <b>(e)</b> $5 \times 10^4$ minutos y <b>(f)</b> $1 \times 10^5$ minutos ....	53

<b>Figura 3-6:</b> Resultados de temperatura para el caso convección-conducción, plano radial-tangencial para diferentes tiempos: <b>(a)</b> $1 \times 10^3$ minutos, <b>(b)</b> $5 \times 10^3$ minutos, <b>(c)</b> $1 \times 10^4$ minutos, <b>(d)</b> $2 \times 10^4$ minutos, <b>(e)</b> $5 \times 10^4$ minutos y <b>(f)</b> $1 \times 10^5$ minutos.....	54
<b>Figura 3-7:</b> Perfil de velocidad radial a partir de un caudal constante = 12 bbl/día.ft. ....	56
<b>Figura 3-8:</b> Comparación de resultados de temperatura en dirección radial del modelo analítico y del modelo numérico.....	57
<b>Figura 4-1:</b> Resultados de temperatura de los simuladores GIGATHOR y CMG en dirección radial obtenidos para las tres etapas del primer ciclo de inyección. ....	63
<b>Figura 4-2:</b> Resultados de temperatura de los simuladores GIGATHOR y CMG en dirección radial obtenidos para las tres etapas del segundo ciclo de inyección.....	64
<b>Figura 4-3:</b> Resultados de temperatura en GIGATHOR en 3D para el caso CSS – vista lateral a diferentes tiempos: <b>(a)</b> Fin de inyección – 1° ciclo. <b>(b)</b> Fin del remojo – 1° ciclo. <b>(c)</b> Fin de producción – 1° ciclo. <b>(d)</b> Fin de inyección – 2° ciclo. <b>(e)</b> Fin del remojo – 2° ciclo. <b>(f)</b> Fin de producción – 2° ciclo.....	66
<b>Figura 4-4:</b> Resultados de temperatura en CMG en 3D para el caso CSS – vista lateral a diferentes tiempos: <b>(a)</b> Fin de inyección – 1° ciclo. <b>(b)</b> Fin del remojo – 1° ciclo. <b>(c)</b> Fin de producción – 1° ciclo. <b>(d)</b> Fin de inyección – 2° ciclo. <b>(e)</b> Fin del remojo – 2° ciclo. <b>(f)</b> Fin de producción – 2° ciclo.....	67
<b>Figura 4-5:</b> Resultados de temperatura en GIGATHOR en 3D para el caso CSS –vista en planta a diferentes tiempos: <b>(a)</b> Fin de inyección – 1° ciclo. <b>(b)</b> Fin del remojo – 1° ciclo. <b>(c)</b> Fin de producción – 1° ciclo. <b>(d)</b> Fin de inyección – 2° ciclo. <b>(e)</b> Fin del remojo – 2° ciclo. <b>(f)</b> Fin de producción – 2° ciclo.....	68
<b>Figura 4-6:</b> Resultados de temperatura en CMG en 3D para el caso CSS –vista en planta a diferentes tiempos: <b>(a)</b> Fin de inyección – 1° ciclo. <b>(b)</b> Fin del remojo – 1° ciclo. <b>(c)</b> Fin de producción – 1° ciclo. <b>(d)</b> Fin de inyección – 2° ciclo. <b>(e)</b> Fin del remojo – 2° ciclo. <b>(f)</b> Fin de producción – 2° ciclo. ....	69
<b>Figura 4-7:</b> Comparación de los perfiles de temperatura en dirección radial obtenidos usando GIGATHOR y CMG para diferentes tiempos de simulación: 14400 minutos, 72000 minutos, 144000 minutos, 216000 minutos y 288000 minutos .....	73
<b>Figura 4-8:</b> Resultados de temperatura en GIGATHOR en 3D en para el caso inyección continua – vista lateral a diferentes tiempos: <b>(a)</b> 14400 minutos, <b>(b)</b> 72000 minutos, <b>(c)</b> 144000 minutos, <b>(d)</b> 216000 minutos, <b>(e)</b> 288000 minutos y <b>(f)</b> 299520 minutos. ....	75
<b>Figura 4-9:</b> Resultados de temperatura en CMG en 3D para el caso inyección continua – vista lateral a diferentes tiempos: <b>(a)</b> 14400 minutos, <b>(b)</b> 72000 minutos, <b>(c)</b> 144000 minutos, <b>(d)</b> 216000 minutos, <b>(e)</b> 288000 minutos y <b>(f)</b> 299520 minutos.....	76
<b>Figura 4-10:</b> Resultados de temperatura en GIGATHOR en 3D para el caso inyección continua – vista en planta a diferentes tiempos: <b>(a)</b> 14400 minutos, <b>(b)</b> 72000 minutos, <b>(c)</b> 144000 minutos, <b>(d)</b> 216000 minutos, <b>(e)</b> 288000 minutos y <b>(f)</b> 299520 minutos. ....	77
<b>Figura 4-11:</b> Resultados de temperatura en CMG en 3D para el caso inyección continua – vista en planta a diferentes tiempos: <b>(a)</b> 14400 minutos. <b>(b)</b> 72000 minutos. <b>(c)</b> 144000 minutos. <b>(d)</b> 216000 minutos. <b>(e)</b> 288000 minutos. <b>(f)</b> 299520 minutos.....	78
<b>Figura 5-1:</b> Comparación de perfil radial de temperatura del caso base y de los 4 casos de la conductividad térmica al tiempo 100000 minutos .....	85

<b>Figura 5-2:</b> Resultados del número de Péclet del caso 1 de la conductividad térmica para el tiempo 100000 minutos: <b>(a)</b> Número de Péclet entre 0–0.9. <b>(b)</b> Número de Péclet entre 0.9–1.1. <b>(c)</b> Número de Péclet entre 1.1–10.....	87
<b>Figura 5-3:</b> Resultados del número de Péclet del caso 2 de la conductividad térmica para el tiempo 100000 minutos: <b>(a)</b> Número de Péclet entre 0–0.9. <b>(b)</b> Número de Péclet entre 0.9–1.1. <b>(c)</b> Número de Péclet entre 1.1–10.....	87
<b>Figura 5-4:</b> Resultados del número de Péclet del caso 3 de la conductividad térmica para el tiempo 100000 minutos: <b>(a)</b> Número de Péclet entre 0–0.9. <b>(b)</b> Número de Péclet entre 0.9–1.1. <b>(c)</b> Número de Péclet entre 1.1–10.....	87
<b>Figura 5-5:</b> Resultados del número de Péclet del caso 4 de la conductividad térmica para el tiempo 100000 minutos: <b>(a)</b> Número de Péclet entre 0–0.9. <b>(b)</b> Número de Péclet entre 0.9–1.1. <b>(c)</b> Número de Péclet entre 1.1–10.....	88
<b>Figura 5-6:</b> Comparación de perfil radial de temperatura del caso base y de los 4 casos de la capacidad calorífica al tiempo 100000 minutos.....	91
<b>Figura 5-7:</b> Resultados del número de Péclet del caso 1 de la capacidad calorífica para el tiempo 100000 minutos: <b>(a)</b> Número de Péclet entre 0–0.9. <b>(b)</b> Número de Péclet entre 0.9–1.1. <b>(c)</b> Número de Péclet entre 1.1–10.....	93
<b>Figura 5-8:</b> Resultados del número de Péclet del caso 2 de la capacidad calorífica para el tiempo 100000 minutos: <b>(a)</b> Número de Péclet entre 0–0.9. <b>(b)</b> Número de Péclet entre 0.9–1.1. <b>(c)</b> Número de Péclet entre 1.1–10.....	93
<b>Figura 5-9:</b> Resultados del número de Péclet del caso 3 de la capacidad calorífica para el tiempo 100000 minutos: <b>(a)</b> Número de Péclet entre 0–0.9. <b>(b)</b> Número de Péclet entre 0.9–1.1. <b>(c)</b> Número de Péclet entre 1.1–10.....	94
<b>Figura 5-10:</b> Resultados del número de Péclet del caso 4 de la capacidad calorífica para el tiempo 100000 minutos: <b>(a)</b> Número de Péclet entre 0–0.9. <b>(b)</b> Número de Péclet entre 0.9–1.1. <b>(c)</b> Número de Péclet entre 1.1–10.....	94
<b>Figura 5-11:</b> Comparación de perfil radial de temperatura del caso base y del caso 4 de la conductividad térmica a diferentes tiempos .....	96
<b>Figura 5-12:</b> Resultados del número de Péclet del caso 1 del caudal de para el tiempo 100000 minutos: <b>(a)</b> Número de Péclet entre 0–0.9. <b>(b)</b> Número de Péclet entre 0.9–1.1. <b>(c)</b> Número de Péclet entre 1.1–10.....	97
<b>Figura 5-13:</b> Resultados del número de Péclet del caso 2 del caudal de para el tiempo 100000 minutos: <b>(a)</b> Número de Péclet entre 0–0.9. <b>(b)</b> Número de Péclet entre 0.9–1.1. <b>(c)</b> Número de Péclet entre 1.1–10.....	97
<b>Figura A-1:</b> Esquema de vecindades del punto $P_0$ .....	107
<b>Figura A-2:</b> Esquema de estenciles.....	114
<b>Figura A-3:</b> Detalle de zona del pozo en modelo de calentamiento hueco entubado. ...	122

## Lista de tablas

	Pág.
<b>Tabla 3-1:</b> Parámetros de malla de simulación para caso conducción y caso conducción-convección.....	46
<b>Tabla 3-2:</b> Variables de simulación para caso conducción y caso conducción-convección .....	47
<b>Tabla 3-3:</b> Parámetros de simulación de flujo de fluidos.....	51
<b>Tabla 3-4:</b> Parámetros de simulación – caso de validación. (Yuan, 2015).....	56
<b>Tabla 3-5:</b> Parámetros de la malla de simulación – caso de validación .....	57
<b>Tabla 4-1:</b> Parámetros de simulación - caso CSS. (Gontijo & Aziz, 1984) .....	62
<b>Tabla 4-2:</b> Condiciones operacionales - caso CSS. (Gontijo & Aziz, 1984).....	63
<b>Tabla 4-3:</b> Datos de entrada para el caso de inyección continua de vapor. ....	72
<b>Tabla 5-1:</b> Valores de sensibilidad de la conductividad térmica. Valores tomados de Chekhonin, <i>et al.</i> (2012).....	84
<b>Tabla 5-2:</b> Valores de sensibilidad de la capacidad calorífica. Valores tomados de Chekhonin, <i>et al.</i> (2012).....	90
<b>Tabla 5-3:</b> Valores de sensibilidad del caudal de inyección .....	95



## Lista de Símbolos y abreviaturas

### Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad
$A$	Área. Coeficiente	$ft^2$
$B$	Esténcil inferior. Coeficiente	
$C$	Esténcil central. Coeficiente	
$C_p$	Capacidad calorífica	$\frac{BTU}{lbm. ^\circ F}$
$D$	Coeficiente	
$E$	Esténcil este. Coeficiente	
$e$	Vector de densidad de flujo de energía combinada	
$F$	Esténcil de variables independientes	
$G$	Coeficiente	
$g$	Gravedad	$\frac{ft}{hr^2}$
$GT$	Gradiente geotérmico	$\frac{^\circ F}{ft}$
$\hat{H}$	Entalpia por unidad de masa	
$K$	Permeabilidad	$mD$
$k$	Conductividad térmica	$\frac{BTU}{ft^2. hr. ^\circ F}$
$l$	Longitud característica	$ft$
$M$	Coeficiente	
$N$	Esténcil norte	
$nr$	Cantidad de bloques en dirección radial	
$nt$	Cantidad de bloques en dirección tangencial	
$nz$	Cantidad de bloques en dirección vertical	
$P$	Presión	$psi$
$Pe$	Número de Péclet	$adim.$
$q$	Flujo de calor	$\frac{BTU}{hr}$
$r$	Radio	$ft$
$rw$	Radio del pozo	$ft$
$re$	Radio externo	$ft$
$S$	Esténcil sur. Aporte de diferentes tipos de energía	
$T$	Temperatura	$^\circ F$

XVI Modelamiento del perfil de temperatura dentro del yacimiento durante procesos  
 II recobro térmico con inyección de vapor en yacimientos de crudo pesado

---

Símbolo	Término	Unidad
$t$	Tiempo	$hr$
$\bar{U}$	Energía interna por unidad de masa	
$U$	Coefficiente de transferencia de calor combinado. Esténcil superior	
$V$	Volumen	$ft^3$
$v$	Velocidad	$\frac{ft}{hr}$
$W$	Esténcil oeste	

### Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad
$\Gamma$	Coefficiente relacionado a los estéciles	
$\Delta$	Incremento	
$\delta$	Tensor unitario	
$\Theta$	Factor de control de discretización numérica	
$\theta$	Dirección tangencial	
$\mu$	Viscosidad	$cp$
$\pi$	Tensor de esfuerzo molecular total	
$\rho$	Densidad	$\frac{lbm}{ft^3}$
$\tau$	Tensor de esfuerzo viscoso	
$\phi$	Porosidad	$adim.$
$\mathcal{L}$	Operador diferencial de 2° orden	
$\nabla$	Gradiente	

### Subíndices

Subíndice	Término
$b$	Bulk
$c$	Calor
$cas$	Revestimiento ( <i>casing</i> )
$cem$	Cemento
$f$	Fluido
$for$	Formación
$i$	Símbolo genérico para indicar una dirección. Relacionado a dirección radial
$iny$	Indicador de inyección
$j$	Símbolo genérico relacionado a dirección tangencial
$k$	Símbolo genérico relacionado a dirección vertical
$P$	Indicador puntual
$r$	Dirección radial
$s$	Sólido

---

<b>Subíndice</b>	<b>Término</b>
$wf$	Indicador de posición en la cara del pozo
$z$	Dirección vertical
0	Indicador puntual

## Superíndices

---

<b>Superíndice</b>	<b>Término</b>
$n$	Nivel de tiempo
$\rightarrow$	Indicador para vectores

## Abreviaturas

---

<b>Abreviatura</b>	<b>Término</b>
Adim.	Adimensional
CSS	<i>Cyclic steam stimulation</i>
EOR	<i>Enhanced oil recovery</i>
SAGD	<i>Steam assisted gravity drainage</i>
TVD	<i>True vertical depth</i>



# Introducción

En los últimos años los crudos pesados han venido ganando importancia en el ámbito internacional, ya que cerca del 70% de las reservas mundiales se encuentran en yacimientos no convencionales (crudos pesados, extrapesados y bitumen), y en el país representan una alternativa para extender los alcances de la producción nacional, dado que más de la mitad del total de barriles producidos en Colombia es de crudos pesados (Ministerio de Minas y Energía, 2013). De la mano del aumento en el interés de producir este tipo de yacimientos, aumenta también la necesidad de optimizar los procesos y tecnologías a través de los cuales es posible su extracción.

Dada su naturaleza, en términos de viscosidad y densidad, los crudos pesados requieren ser producidos mediante técnicas de recobro mejorado, siendo las técnicas térmicas las más usadas actualmente. Los métodos térmicos con inyección de vapor pueden llegar a aumentar el factor de recobro de la formación hasta en un 70%, siendo el SAGD -*Steam Assisted Gravity Drainage*- la técnica más agresiva, seguida de la inyección continua de vapor -*steam flooding*- (entre 50 y 60%), y por último se encuentra la inyección cíclica de vapor -*Cyclic Steam Stimulation* (CSS)- (10-40%) (Alvarez & Han, 2013).

El principal objetivo en estos procesos no isotérmicos es reducir la saturación residual de crudo en el yacimiento a través mecanismos como reducción de la viscosidad del fluido, cambio en la humectabilidad de la roca, y expansión del gas en solución, esto es posible transmitiendo energía térmica al yacimiento por medio de un vapor inmiscible a altas temperaturas. Dichos mecanismos se desarrollan en función de las propiedades de roca y del fluido, por ejemplo el aumento en la movilidad del crudo dentro de la formación es un efecto de la reducción de la viscosidad del fluido (Alboudwarej et al., 2006; Speight, 2013). El vapor inyectado tiene la capacidad de aumentar la temperatura en el yacimiento, lo suficiente para que se dé una considerable disminución de la viscosidad del fluido; en estas técnicas no se busca alcanzar los niveles de temperatura a los cuales ocurre cambio de

fase en el fluido, como si ocurre en la técnica de combustión *in-situ*, aun así, es inevitable que el cambio de fase en el fluido se presente en menor grado. Es por esto que la temperatura de inyección en estas técnicas varía entre 400 y 700°F, dependiendo de la estrategia de inyección escogida (Milhem & Ahmed, 1987; Putra, Rachman, Firmanto, Arsyadanie, & Hafizh, 2011).

Algunos estudios han demostrado que este aumento de la temperatura en el yacimiento no solo afecta las propiedades del fluido, sino que también puede llegar a alterar las propiedades petrofísicas y mecánicas de la roca, además del estado de esfuerzos *in-situ*, lo que podría verse reflejado en cambios en permeabilidad, porosidad y consecuentemente en la movilidad del agua. Incluso en el caso más extremo podría verse comprometida la integridad de la roca sello debido a la concentración de esfuerzos de cizalla que se presenta en la interface con la formación productora, como consecuencia de los procesos de dilatación y expansión térmica que tienen lugar durante la inyección de vapor (Boley & Weiner, 1960; Cicek, 2005b; Civan, 2010; Dusseault, 1993; Hojka & Dusseault, 1990; Hossain, Mousavizadegan, & Islam, 2008; Nowacki, 1962; Schiffman, 1971).

En este sentido, la temperatura se convierte en la variable de mayor incidencia en la fenomenología del proceso de inyección de vapor. Es por esto que desde que se empezaron a implementar los métodos térmicos dentro de las técnicas de recobro mejorado, empezaron a surgir también modelos matemáticos que permiten representar el avance del frente de calor dentro del yacimiento, y poder predecir el efecto de la temperatura tanto en la formación tratada como en las formaciones adyacentes. Los modelos iniciales proponen una distribución de temperatura, considerando principalmente la diferencia entre la temperatura de inyección y la temperatura del yacimiento, y el caudal de inyección de vapor, sin prestar mayor atención a los mecanismos de transferencia de calor que se dan durante el proceso y menos aún a las pérdidas de calor hacia las formaciones vecinas; estas consideraciones generalmente llevaban a subestimar el avance del frente de calor dentro de la formación (Marx & Langenheim, 1959).

Modelos más recientes han ido más allá, y han relacionado el tipo de técnica de inyección usada con el mecanismo de transferencia de calor dominante en el proceso, obteniendo así análisis más realistas del fenómeno que ocurre dentro de una formación que está siendo tratada con inyección de vapor (Hosseini, 2015). En la actualidad la tendencia de

este tipo de desarrollos se centra en diferentes formas de solucionar la ecuación de energía, con la cual es posible representar la distribución de la temperatura dentro del yacimiento durante el proceso de inyección de vapor, levantando algunas suposiciones que antes se tenían debido a limitaciones matemáticas en los modelos.

En este trabajo se desarrolla un modelo numérico en tres dimensiones y en coordenadas cilíndricas para calcular la temperatura en un yacimiento que está siendo intervenido con inyección de vapor. El principal objetivo es construir un módulo de simulación que permita generar los perfiles de temperatura respecto al tiempo y al espacio, y que será integrado a una plataforma de simulación para calcular la variación de la temperatura durante procesos de inyección de vapor en yacimientos de crudo pesado. Para lo cual se presenta un modelo matemático a partir de la ecuación de energía, posteriormente se propone un método numérico implementado de tal forma que se garantiza estabilidad, consistencia y convergencia numérica de la solución. Una vez establecido el esquema numérico de las ecuaciones constitutivas, se aplican a un modelo físico que considera un pozo inyector en el centro y unas condiciones de frontera con las cuales se representa las técnicas de recobro térmico de inyección cíclica e inyección continua de vapor.

Este modelo es desarrollado usando el lenguaje de programación FORTRAN. Una vez se tienen resultados de temperatura se procede a validar de forma parcial dichos resultados ejecutando casos de estudio de inyección cíclica e inyección continua de vapor en un simulador comercial.

El módulo de simulación no resuelve las ecuaciones de flujo de fluidos dentro del yacimiento, por lo cual debe ser alimentado con información de velocidad de un simulador que represente este fenómeno. El principal aporte de este trabajo es la integración de diferentes características del modelamiento de la temperatura que en general no se encuentran juntas en un mismo desarrollo tal como: solución numérica de la ecuación de energía, en tres dimensiones y en coordenadas cilíndricas.

Este trabajo se encuentra enmarcado en el proyecto “Aspectos Geomecánicos de la Producción y Recobro de Crudos Pesados y Extra Pesados” desarrollado por el Grupo GIGA de la Universidad Nacional de Colombia para Colciencias y Ecopetrol. Si bien el enfoque de este proyecto es la geomecánica de los yacimientos de crudo pesado, en este

trabajo no se abordan temas específicos del comportamiento mecánico de este tipo de yacimientos, lo que se pretende entonces es que el modelamiento de la temperatura, de la forma como aquí se presenta, se convierta en un insumo para que otros desarrollos enmarcados en el mismo proyecto, evalúen la afectación geomecánica de los yacimientos de crudo pesado durante procesos no isotérmicos.



# 1. Marco teórico

En este capítulo se presenta la generalidad de las técnicas de recobro térmico con inyección de vapor, además se describe con mayor detalle cada una de las técnicas: inyección cíclica, inyección continua y SAGD. También se hace una revisión de los mecanismos de transferencia de calor que tienen lugar en un medio poroso, haciendo énfasis en los mecanismos de convección y conducción. Posteriormente, se presenta una revisión de modelos analíticos y numéricos presentes en la literatura que han sido desarrollados para calcular la variación de la temperatura en yacimientos que son intervenidos con inyección de vapor. Finalmente se presenta la ecuación advección-difusión, la cual es la base matemática para el desarrollo del modelo que se presenta en este trabajo.

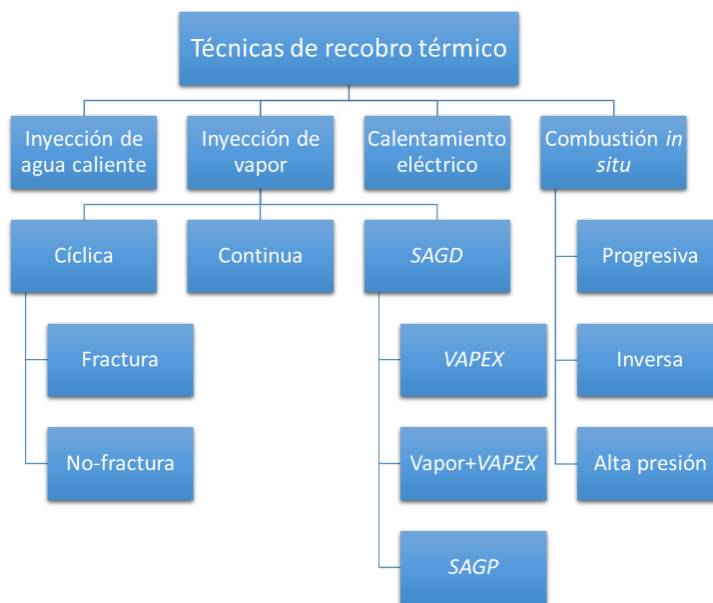
## 1.1 Técnicas de recobro térmico con inyección de vapor

Las técnicas de recobro térmico hacen parte de las técnicas de recobro mejorado (EOR) o recobro terciario y son aplicadas como estrategia de producción a formaciones, donde las técnicas primarias y secundarias no son suficientes, tal es el caso de las formaciones de crudo pesado. El aspecto crítico de estas formaciones es el tipo de crudo que contiene, el cual presenta altos valores de viscosidad a las condiciones de yacimiento, y por consiguiente su movilidad es extremadamente baja. En la [Figura 1-1](#) se presenta la clasificación de las técnicas de recobro térmico, las cuales se diferencian en la forma de llevar el calor desde la superficie hasta la formación de interés y además de la estrategia como se produce el crudo móvil.

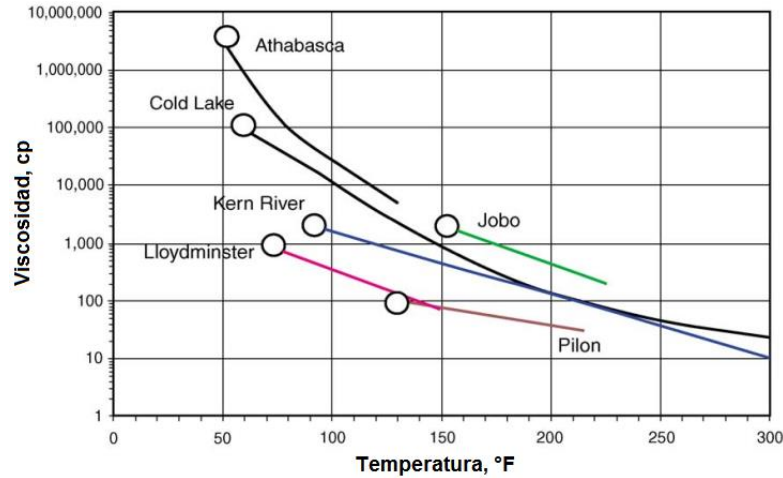
Al igual que las demás técnicas de recobro mejorado, las técnicas térmicas buscan reducir la saturación de aceite por debajo de la saturación residual de aceite, para lo cual se valen de la disminución de la viscosidad de crudo generada a partir de un incremento de la temperatura del yacimiento. Una vez se consigue calentar la formación, la movilidad del

crudo aumenta y es posible producirlo. Ya lo mencionaba Ali (2003), “La clave para producir crudo pesado es reducir su viscosidad, y la mejor forma de lograrlo es con el calor”. El autor hace hincapié en la afectación que tiene la temperatura en el valor de la viscosidad de los crudos pesados, un buen ejemplo de esto es la respuesta a la temperatura, en términos de viscosidad, de algunos crudos de campos venezolanos y canadienses ([Figura 1-2](#)). Estos datos de campo permiten evidenciar que los yacimientos con mayor temperatura en Venezuela (Jobo y Pilón) responden mejor a las técnicas de recobro térmico que los yacimientos en Canadá (Athabasca y Cold Lake), respecto a la disminución de la viscosidad (Ali, 2003). Estos dos países han sido históricamente referentes en la aplicación de técnicas de recobro térmico, como se verá más adelante.

**Figura 1-1:** Clasificación de las técnicas de recobro térmico.  
Modificado de Thomas (2008).



**Figura 1-2:** Comportamiento de la viscosidad de crudos pesados de Venezuela y Canadá. (Ali, 2003).



\* Los círculos representan las condiciones de yacimiento.

Las técnicas de recobro térmico, en las que se usa inyección de vapor como fuente de calor dentro del yacimiento (Figura 1-1), son las más usadas para la explotación de yacimientos de crudo pesado, estas técnicas logran reducir la saturación residual de crudo a través de mecanismos como la reducción la viscosidad del fluido de yacimiento, cambio en la humectabilidad de la roca y expansión del gas en solución. Dichos mecanismos tienen lugar una vez se ha transmitido energía térmica al yacimiento a través de un vapor inmiscible a altas temperaturas y se desarrollan en función de las propiedades de roca y del fluido, por ejemplo la reducción de la viscosidad se hace evidente en la movilidad del crudo, ya que esta última es la relación entre la permeabilidad efectiva y la viscosidad del crudo (Alvarez & Han, 2013; Speight, 2013).

El fin último de las técnicas de recobro térmico es aumentar el factor de recobro del yacimiento, pero tal como se menciona en la introducción, hay otros factores aparte de la disminución de viscosidad que son afectados por la temperatura y deben ser tenidos en cuenta durante estos procesos no-isotérmicos. De tal modo que la temperatura es la variable más importante en los procesos de inyección de vapor, y de su correcta estimación va a depender el entendimiento de la afectación global de la intervención térmica.

Actualmente los crudos pesados en el mundo están siendo producidos principalmente usando inyección cíclica e inyección continua de vapor, y en menor medida usando SAGD.

En países como Brasil, Indonesia y Estados Unidos se ha aplicado exitosamente la inyección continua de vapor, en campos de Venezuela y Canadá ha sido más exitosa la inyección cíclica (Ali, 2003). Por su parte, el uso la técnica de SAGD se ha concentrado en Canadá principalmente, país donde fue desarrollado. En Colombia las intervenciones con inyección de vapor empezaron en los años 60's y han estado limitadas a aplicación de inyección cíclica en los campos del Magdalena Medio principalmente (Teca, Jazmin, Nare). También se han llevado a cabo pilotos de inyección continua, pero el balance energético entre el crudo producido y el combustible usado para la generación de vapor no hacia rentable la operación (Maya *et al.*, 2013).

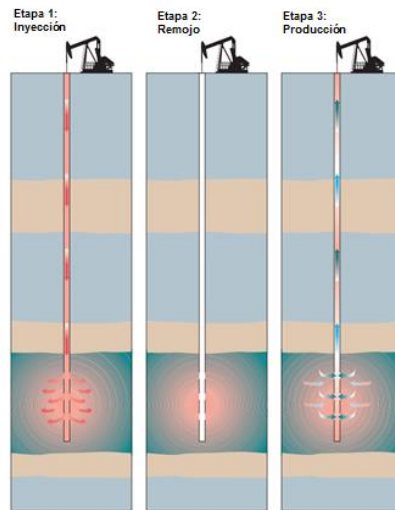
### 1.1.1 Inyección cíclica de vapor (CSS)

Ésta es la técnica de recobro térmico que requiere menos logística para su ejecución, ya que es aplicada en un pozo que cumple las funciones de pozo inyector y pozo productor en momentos diferentes. Considera tres etapas: inyección, remojo y producción, las cuales en conjunto forman un ciclo. Durante la primera etapa se inyecta un volumen de vapor caliente (400 – 600 °F) por un tiempo entre 1 y 4 semanas, tras lo cual sigue un periodo de cierre del pozo, que también es llamado remojo. El periodo de remojo se extiende por algunos días, con lo cual se busca que el aumento de temperatura logrado con el vapor se distribuya hacia los alrededores del pozo para posteriormente poner el pozo en producción. La última etapa del ciclo puede durar algunos meses, inicialmente el pozo produce por flujo natural y luego por levantamiento artificial, si es el caso. La prolongación de la etapa de producción se encuentra limitada por la disminución de la tasa de producción a niveles económicamente inviables, lo cual indicaría que es el momento de llevar a cabo un nuevo ciclo de inyección (Alvarez & Han, 2013). En la [Figura 1-3](#) se presenta un esquema general de cada una de las etapas del proceso de inyección cíclica de vapor.

Las experiencias de campo han marcado el desarrollo de esta técnica de recobro, teniendo en cuenta que su descubrimiento se da a partir de una situación fortuita, en la cual se abrió a producción un pozo inyector de vapor buscando liberar presión de yacimiento, produciendo inesperadas cantidades de crudo menos viscoso. Este suceso tuvo lugar en 1959 en un campo de crudo pesado en Venezuela, tras lo cual se empezó a repetir el proceso en campos cercanos. Estas primeras aplicaciones se realizaron de forma empírica

y con altos niveles de incertidumbre, en los cuales se esperaba que a lo sumo el factor de recobro de la formación incrementara 10%. La experiencia que se iba adquiriendo en cada aplicación permitió que 30 años después el factor de recobro aumentara hasta el 40%, valor que aún se mantiene hoy en día, además fue posible establecer las características que debía tener la formaciones candidatas a ser intervenidas con inyección cíclica de vapor (Temizel, Gorucu, Erdogan, & Tiwari, 2015).

**Figura 1-3:** Etapas del proceso de inyección cíclica de vapor. Modificada de Alboudwarej et al. (2006).



En general se ha encontrado que las probabilidades de éxito de esta técnica incrementan en formaciones de espesores superiores a 30 pies, que se encuentren a una profundidad igual o menor a 3000 pies, además con un valor relativamente alto de porosidad (mayor a 3%) y con saturación de crudo superior al 40%. Ya que este procedimiento ocurre en mayor medida en los alrededores del pozo se consideran ambientes favorables arenas poco o no consolidadas con bajo contenido de arcillas y con permeabilidad menor a 100 mD.

Respecto al fluido también la experiencia de casos de campo permite establecer que son favorables los casos en los cuales la gravedad API del crudo está por encima de 10° API y la viscosidad se encuentra entre 1000 y 4000 cP (Thomas, 2008; Speight, 2006). También se encontró que formaciones someras con profundidad menor a 300 pies no resultan ser buenas candidatas, ya que la presión de fractura de la capa sello en esta

profundidad fácilmente podría ser superada por la presión de inyección, lo que resultaría en problemas de integridad de la roca sello (Temizel *et al.*, 2015).

El principal objetivo de esta técnica es calentar la mayor porción de yacimiento posible, garantizando así la disminución de la viscosidad del crudo presente en el yacimiento. Se ha encontrado que el vapor es más eficiente que el agua caliente para transportar el calor desde la superficie hasta la formación, dadas sus propiedades térmicas (calor específico y calor latente). Existen dos desventajas de la técnica relacionadas con el uso de vapor, la primera tiene que ver con los costos asociados a la generación del vapor en las facilidades en superficie y la segunda se relaciona a las pérdidas de calor que se dan en el recorrido que hace el vapor desde la cabeza del pozo hasta los perforados.

Incluso bajo la última condición desfavorable mencionada, durante el proceso de inyección la formación recibe una gran cantidad de calor a través del vapor, haciendo que su temperatura empiece a incrementar desde el pozo y hacia el interior de la formación. Durante la inyección, el calor se transfiere a través de los mecanismos de conducción y convección principalmente dadas las condiciones de flujo de fluidos en el yacimiento, tal como se verá más adelante. Posteriormente durante el remojo el flujo de fluidos no tiene lugar en la formación por la condición de pozo cerrado, esto hace que durante esta etapa el calor se disipe dentro de la formación principalmente por fenómeno difusivo gobernado por la conductividad térmica de la roca y del fluido de yacimiento. Finalmente, la reducción de la temperatura durante la etapa de producción es proporcional a la tasa de producción de crudo y la zona intervenida no regresa a la temperatura que tenía el sistema antes de la inyección de vapor, por lo que se habla de un remanente de temperatura debido a los ciclos anteriores de inyección (Alvarez & Han, 2013).

En general, se ha definido que el éxito de un ciclo de inyección depende del comportamiento de la tasa de crudo en los momentos tempranos de la etapa de producción, al principio la tasa de producción es alta y declina rápidamente hasta llegar al límite económico de producción, tras lo cual se considera el inicio de un nuevo ciclo de inyección de vapor.

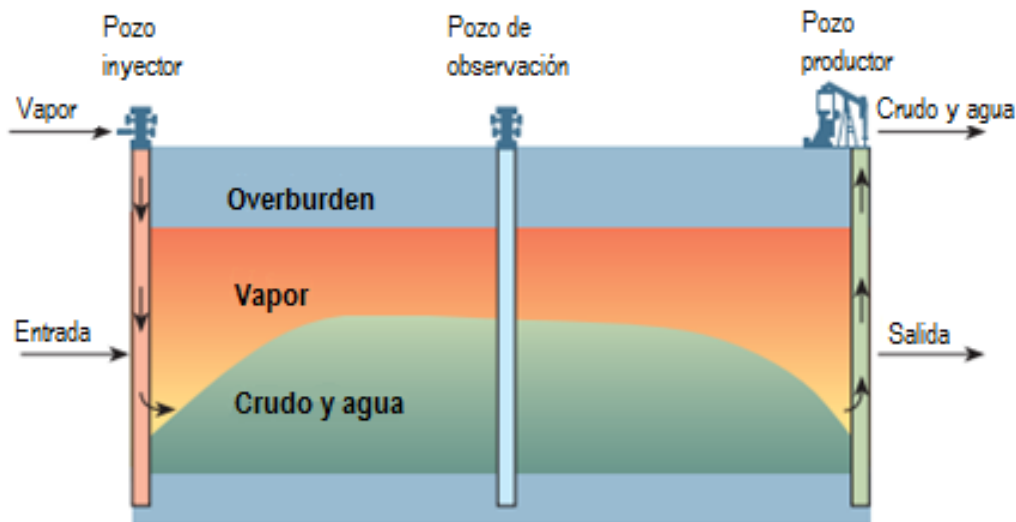
Finalmente, es importante resaltar que esta técnica se realiza teniendo especial cuidado con que la presión de inyección este siempre por debajo de la presión de presión de fractura de la formación, a menos que se pretenda fracturar la roca, en tal caso se habla de un proceso combinado entre fracturamiento e inyección de vapor ([Figura 1-1](#)). Esta última variación de la técnica tiene como objetivo garantizar que el vapor inyectado llegue a una mayor cantidad de lugares dentro del yacimiento, que de otra forma no se lograría (Thomas, 2008).

### 1.1.2 Inyección continua de vapor

Al igual que en la inyección cíclica, el objetivo principal de la inyección continua de vapor es calentar el yacimiento a través de la inyección de vapor caliente, con la intención de hacer móvil el fluido que se encuentra dentro de los poros de la roca, disminuyendo su viscosidad. En particular esta técnica plantea que la inyección de vapor sea continua, es decir que durante todo el proceso de intervención se mantenga una tasa de inyección en el pozo inyector. Consiste en inyectar al yacimiento vapor de agua a alta temperatura a través de un pozo inyector, a la vez que se obtiene el crudo en superficie (con menor viscosidad que la inicial) por uno o varios pozos, llamados los pozos productores. La inyección continua de vapor combina el empuje generado por el frente de condensación con la disminución de la viscosidad del crudo a partir del aumento de la temperatura en el yacimiento. A grandes rasgos se da que el crudo que entra en contacto con el frente de vapor caliente es vaporizado y empujado hacia adelante, la fracción de crudo que no es vaporizado es dejada atrás pero a alta temperatura. Parte del vapor que avanza dentro del yacimiento se condensa debido a la interacción con la zona fría del yacimiento, así se genera un frente de agua condensada caliente, la cual hace las veces de pistón para seguir empujando el crudo hacia el pozo productor.

La [Figura 1-4](#) representa de forma esquemática el avance del frente de calor durante la inyección continua de vapor, la sección del yacimiento que se encuentra entre el pozo inyector y el pozo productor se puede dividir en cuatro zonas: zona de vapor, zona de agua caliente, zona de crudo caliente y zona virgen que aún no ha sido calentada y contiene los fluidos propios del yacimiento.

**Figura 1-4:** Esquema de la inyección continua de vapor. Modificado de Curtis, et al. (2002).



En comparación con la técnica CSS, la inyección continua suele ser más eficiente, Thomas (2008) reporta que el incremento del factor de recobro de la formación puede alcanzar 60%, 20 puntos más que la inyección cíclica. Además, Ali (2003) menciona que el área barrida en la inyección continua es mayor, lo que hace el recobro sea mayor, pero este mismo aspecto hace que las pérdidas de calor a las formaciones adyacentes también sean mayores. Aun así, el también llamado *steamflooding* ha sido probado en algunos campos de Venezuela y Alberta (Canadá), encontrándose que no supera la rentabilidad de la técnica de inyección cíclica (Ali, 2003).

En general, las características de la roca y del fluido con las cuales se han encontrado que aumenta la probabilidad de éxito del proceso son muy similares que en el caso cíclico, de hecho en muchos casos la técnica de inyección continua se aplica después de haber tenido inyección cíclica en el yacimiento. Para que se dé el cambio de CSS a *steamflooding*, se evalúa principalmente que la saturación de aceite sea mayor a 45% y que la presión del yacimiento haya disminuido a valores considerables (Liu, 1997).

Como se menciona anteriormente, la inyección continua de vapor requiere al menos de dos pozos para ser llevada a cabo, pero lo más común es que se usen patrones de cinco, siete y nueve pozos, la principal razón es aumentar la eficiencia de barrido en el



yacimiento. De los patrones mencionados el más usado es el de cinco puntos invertido, es decir, un cuadrado formado por pozos productores y un pozo inyector en medio de ellos, la razón que este arreglo sea el más usado es que fácilmente se puede migrar a los otros arreglos (siete y nueve puntos, invertidos o no). A parte del tipo de arreglo, otro aspecto importante en el diseño de la intervención es la distancia entre pozos, Sheng (2013) menciona que para yacimientos que se encuentren a menos de 1600 pies de profundidad la distancia entre el pozo inyector y productor debe estar alrededor de los 300 pies, si el yacimiento se encuentra entre 2600 y 5200 pies la distancia entre los pozos debe rondar los 500 pies, estos son valores promedio de casos exitosos alrededor del mundo.

En términos operaciones, la inyección continua requiere que la tasa de inyección de vapor sea tan alta como sea posible, con el fin de evitar altas pérdidas de calor, pero teniendo como limitante la presión de fractura de la formación. En casos de campo, se ha encontrado que la probabilidad de éxito supera el 50% cuando se inyecta vapor a 1000 bbls/d en promedio a una presión de 1000 psi (Sheng, 2013).

El *steam drive* (otra forma de llamar la inyección continua de vapor) puede presentar dos problemas, el primero tiene que ver con la migración del vapor a la formación superior, esto se presenta por la diferencia de densidades entre los fluidos fríos y calientes. La segunda situación indeseada es el taponamiento de la formación por el banco de condensados que se forma en el frente de avance. Ambos problemas pueden ser mitigados en cierta medida inyectando vapor a alta tasa en la base o incluso debajo del intervalo de interés a través de zonas de alta permeabilidad al agua o zonas fracturadas. En este caso el calor va a ser transferido a la zona de interés principalmente por conducción y en menor medida por convección (Speight, 2013).

En la inyección continua de vapor, el avance del frente de calor es controlado por el flujo de fluidos dentro del yacimiento, lo que quiere decir que el mecanismo de transferencia de calor dominante es la convección, tal como se verá más adelante.

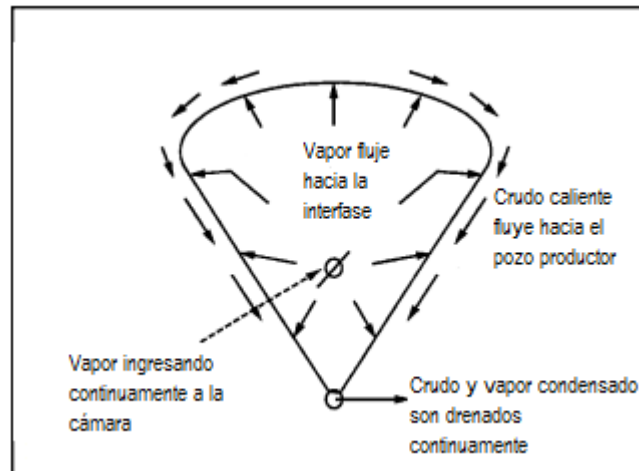
### **1.1.3 Steam Assisted Gravity Drainage – SAGD**

El método de SAGD es una variación de la inyección continua de vapor, en la cual se utilizan dos pozos, un productor y un inyector, para ser llevada a cabo. La particularidad

de la técnica está en que ambos pozos son horizontales en el intervalo de interés y se ubican paralelamente el pozo inyector algunos pies por encima del pozo productor. Fue inicialmente desarrollado para producir campos de crudo pesado en Canadá, pero por su efectividad ha sido extendido a otros campos en el mundo (Butler & Stephens, 1981).

El mecanismo consiste en tener una cámara de vapor alrededor del pozo inyector, en la cual estará fluyendo el vapor a altas temperaturas, y a medida que el crudo va teniendo contacto con la cámara de vapor incrementa su temperatura y como consecuencia reduce su viscosidad. El resto del trabajo lo hace la gravedad, que se encarga de hacer fluir el crudo menos viscoso hacia la parte interior de la formación donde se encuentra el pozo productor. La [Figura 1-5](#) representa gráficamente el mecanismo de SAGD.

**Figura 1-5:** Esquema teórico de la técnica SAGD. Modificado de Butler (1998).



Ali (1997) comenta sobre el concepto original del SAGD que una vez perforados, se inicia una etapa de inyección de vapor por ambos pozos, buscando establecer una comunicación entre el pozo inyector y el pozo productor, este proceso inicial se desarrolla en estado no estable y culmina una vez la cámara de vapor este formada. Tras esto, la presión y la temperatura dentro de la cámara permanecen constantes y la transferencia de calor al crudo viscoso se da por los bordes de la cámara de vapor. Una de las características más importantes de este planteamiento original, y sobre la cual se desarrolló la teoría de predicción de la producción, es que el vapor transfiere su calor latente al crudo a través de los bordes de la cámara de vapor y esto ocurre principalmente por el mecanismo de

conducción, despreciando la convección. Estudios más recientes plantean, a partir de mediciones en campo y simulaciones en 1D y 2D, que en algunos escenarios la suposición de despreciar la convección en la transferencia de calor del vapor al crudo en SAGD, puede resultar en una subestimación de la temperatura dentro del yacimiento (Aghabarati, 2017).

En comparación con las otras dos técnicas de recobro térmico con inyección de vapor, SAGD resulta ser una técnica más agresiva en términos de valores de temperatura dentro de la cámara de vapor, los cuales pueden alcanzar los 700 °F, en consecuencia y como parte del éxito de la técnica se tienen factores de recobro incluso del 70% (Alvarez & Han, 2013).

## **1.2 Mecanismos de transferencia de calor asociados a las técnicas de recobro con inyección de vapor**

La transferencia de calor dentro de un yacimiento de petróleo se difiere de la transferencia de calor en un cuerpo sólido principalmente por el hecho de que el yacimiento es un medio poroso. Dadas estas condiciones, la literatura propone que el calor en la formación se transfiere por la combinación de varios mecanismos, a saber: dispersión hidrodinámica/mecánica, radiación, conducción y convección.

La dispersión hidrodinámica/mecánica resulta de las variaciones de velocidad dentro del yacimiento, lo cual es una respuesta del gradiente de velocidad en cada poro, la diferencia de velocidad entre varios poros y la tortuosidad del medio. La dispersión es usualmente menor en varios órdenes de magnitud que la conductividad térmica, por lo cual en general es posible despreciarla (Kocabas, 2004).

Por otra parte, la radiación se da por las interacciones electromagnéticas dentro de la formación. Dos principales razones hacen que el aporte de la radiación en la estimación de la temperatura sea despreciado, por un lado tanto la roca como los fluidos que saturan la roca tienen bajos niveles de radiación (dado por su emisividad), lo que conlleva a que el aporte de transferencia de calor por este mecanismo es mínimo comparado con el aporte de los mecanismos como la conducción y la convección, la otra razón es que es difícil

estimar el comportamiento electromagnético del sistema roca-fluido durante una inyección de vapor (Obembe, Abu-Khamsin, & Hossain, 2016).

En este orden de ideas la conducción y la convección se convierten en los mecanismos dominantes de la transferencia de calor en medios porosos, por lo cual serán revisados en detalle a continuación.

### 1.2.1 Conducción

Es el fenómeno por el cual se transmite calor entre dos cuerpos que se encuentren en contacto, el flujo de calor se da desde el cuerpo más caliente hacia el cuerpo más frío. Así mismo ocurre entre partes de un mismo cuerpo que se encuentren a diferentes temperaturas. Es importante destacar que en el proceso conductivo ocurre transferencia de calor, pero no transferencia de masa y se debe principalmente al intercambio de energía interna en el material. La energía interna es una propiedad microscópica de los materiales y combina la energía potencial y cinética de las moléculas, átomos y electrones del material en cuestión.

A pesar que la transferencia de calor por conducción puede darse en sólidos, líquidos y gases, resulta más evidente en los sólidos que en los otros dos estados de la materia. En los líquidos y gases es difícil separar el aporte del mecanismo de conducción del aporte de la convección, el cual termina siendo el que gobierna la transferencia en estos estados. Lo que ocurre en los fluidos (líquidos y gases) es que las moléculas colisionan entre sí de forma aleatoria, generando que las moléculas con mayor energía térmica transfieran su energía a moléculas con menor energía térmica. La conducción de calor en los sólidos es el resultado de las vibraciones y el movimiento de los electrones libres dentro del material, es por esto que los materiales metálicos (con mayor contenido de electrones libre) se consideran buenos conductores de energía térmica.

La transferencia de calor por conducción se rige por la ley de Fourier, la cual establece que el flujo de calor por unidad de área  $q$ , es proporcional al cambio de temperatura, tal como lo muestra la Ecuación (1). En dicha ecuación la constante de proporcionalidad  $k$ , se

conoce como conductividad térmica, la cual es una propiedad intrínseca del material y a su vez, en el caso más estricto, cambia con la temperatura.

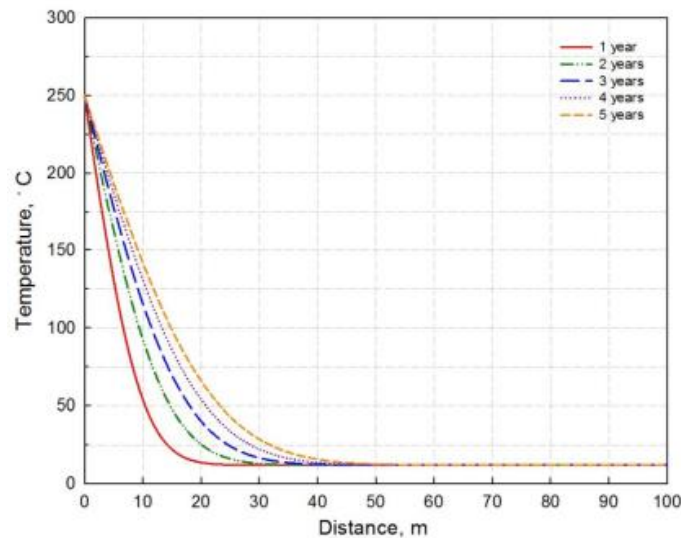
$$q = -\nabla kT \quad (1)$$

En el caso de los yacimientos es necesario considerar la conductividad térmica como el resultado de la combinación de las conductividades de cada uno de los componentes del medio poroso (matriz y fluido). La Ecuación (2) relaciona las conductividades térmicas de la matriz y del fluido, con la porosidad del medio, obteniendo una conductividad *bulk* (Ghannadi, Irani y Chalaturnyk, 2014).

$$k_b = \phi k_f + (1 - \phi)k_s \quad (2)$$

Finalmente, Yuan (2015), presenta la descripción del comportamiento de la temperatura en un yacimiento en el cual solo se considera la conducción como mecanismo de transferencia de calor, específicamente en la [Figura 1-6](#) se presenta la gráfica con la que el autor define el comportamiento de temperatura debido a un calentamiento en un medio poroso debido a la conducción.

**Figura 1-6:** Perfil de temperatura teórico para caso conductivo en dirección radial a diferentes tiempos. (Yuan, 2015).



## 1.2.2 Convección

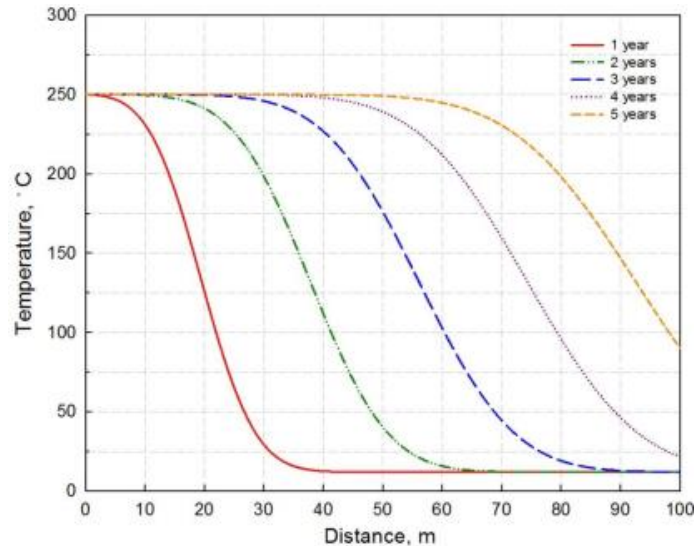
Este mecanismo de transferencia se puede dar de dos formas: libre y forzado. El caso libre se asocia al intercambio de calor que tiene lugar al interior de un fluido debido al movimiento de las partículas, producido por la diferencia de densidades entre zonas calientes y zonas más frías. En medios porosos la convección libre también se presenta en el contacto sólido-líquido, es decir en la interfaz entre el fluido inyectado y las paredes de los poros por los cuales pasa dicho fluido; este fenómeno es gobernado por la diferencia de temperaturas en la interfaz sólido-líquido.

La convección del tipo forzada también se conoce como advección, y se da principalmente por el transporte de calor que lleva consigo el transporte de masa en un flujo de fluidos, en el cual el principal parámetro es la velocidad de flujo (Kocabas, 2004). Ghannadi, Irani y Chalaturnyk (2014), definen el flujo de calor por convección como indica la Ecuación (3).

$$q = \rho_f C_{pf} v_i \frac{\partial T}{\partial i} \quad (3)$$

Durante los procesos de inyección de vapor la transferencia de calor por convección forzada, juega un papel fundamental dado el flujo de fluidos que se presenta dentro del yacimiento. Yuan (2015), también describe cómo se comporta teóricamente la temperatura en dirección radial en un caso en el cual, aparte de la conducción, también se tiene en cuenta la convección como mecanismos de transferencia de calor en un medio poroso. Esto considerando que el mecanismo dominante es la convección. La [Figura 1-7](#) presenta el perfil de temperatura que propone Yuan (2015) para el caso descrito.

**Figura 1-7:** Perfil de temperatura teórico para caso con convección dominante en dirección radial a diferentes tiempos. (Yuan, 2015).



Finalmente, es necesario introducir una suposición respecto a la convección libre entre el sólido y el líquido, descrita anteriormente. Esta suposición se define como equilibrio térmico instantáneo y establece que en un instante dado las temperaturas del sólido y del líquido en contacto son iguales. Esta suposición tiene lugar dado que las velocidades en el yacimiento durante los procesos de inyección de vapor son lo suficientemente bajas (Kocabas, 2004). Kaviany (2001), define el equilibrio térmico instantáneo como una suposición puntual y que en la práctica es posible usarla cuando la diferencia de temperaturas global es mucho más grande que la diferencia de temperaturas local.

### 1.3 Antecedentes del modelamiento de la temperatura durante inyección de vapor

Durante los procesos de inyección de vapor en yacimientos de crudo pesado se busca aumentar la temperatura del yacimiento con el fin disminuir la viscosidad del fluido y con esto mejorar su movilidad dentro de la formación. Las implicaciones de la variación de temperatura dentro del yacimiento se presentan tanto en el fluido como en la roca, es por esto que algunos autores se han centrado en desarrollar modelos que permitan obtener los perfiles que representan la variación de la temperatura del yacimiento durante procesos de inyección de vapor.

Pasando por modelos analíticos hasta modelos numéricos, las propuestas difieren principalmente en el mecanismo de transferencia de calor que consideran, las condiciones de frontera del modelo físico asumido y la dependencia o no con el tiempo. A continuación se presentarán algunos de los modelos más representativos que se encuentran en la literatura, con el fin de identificar el estado actual de la investigación acerca del tema. Se presentan de forma separada las soluciones analíticas y las soluciones numéricas.

### 1.3.1 Modelos analíticos

<p><b>Marx y Langenheim (1959)</b></p>	<p>Parten de un balance de energía entre calor inyectado, perdidas de calor y calor almacenado:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Modelo radial</li> <li>• Caudal de inyección constante</li> <li>• La distribución de la temperatura se comporta según una función de pasos idealizada</li> <li>• Conlleva a una subestimación del avance de la temperatura por no considerar la interacción térmica de la zona calentada y la zona fría.</li> </ul>
<p><b>Ramey (1959)</b></p>	<p>Plantea que las ecuaciones usadas por Marx y Langenheim (1959) hacen que el crecimiento de la zona calentada sea limitado. Para superar esto propone una generalización de la ecuación que define el área calentada, incluyendo la variación en el caudal de inyección.</p>
<p><b>Boberg y Lantz (1966)</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modelo desarrollado para el caso de CSS</li> <li>• Tiene en cuenta el remanente de temperatura de los ciclos anteriores y las pérdidas de calor en dirección horizontal y vertical. Las pérdidas son dependientes de un tiempo adimensional</li> <li>• Geometría cilíndrica.</li> <li>• Permite calcular la temperatura promedio en algún punto del yacimiento a un tiempo cualquiera durante un proceso de inyección cíclica de vapor.</li> </ul>
<p><b>Mandl y Volek (1969)</b></p>	<p>Proponen el “frente de condensación” para estudiar la zona de interacción térmica entre la zona calentada y la zona fría. Dicen que hay un tiempo crítico posterior al inicio de la inyección, que depende del caudal, calidad y temperatura del vapor inyectado y define el momento hasta el cual la transferencia de calor en el frente de condensación es debida puramente a la conducción y en adelante es por el mecanismo de convección.</p>
<p><b>Schiffman (1971)</b></p>	<p>Extiende la teoría poroelástica de Biot y Willis (1957), incluyendo en ella el aporte de la temperatura en la estimación de los esfuerzos debido a una deformación en un medio poroso.</p>
<p><b>Myhill y Stegemeier (1978)</b></p>	<p>Plantean la “eficiencia térmica” para reunir la cantidad de calor que se pierde a las formaciones superior e inferior. Incluyeron esta eficiencia en la estimación del crecimiento de la zona de vapor para tiempos menores que el tiempo crítico, definido en el modelo de Mandl y Volek (1969). El modelo fue validado con casos de campo y laboratorio, por lo que es la base de modelos posteriores.</p>



<b>Jones (1983)</b>	A partir de la interpretación de resultados de 14 proyectos de inyección de vapor propone tres etapas de producción para convertir el desplazamiento de fluido presentado por Myhill y Stegemeier (1978), a tasa de producción. La primera etapa es dominada por la viscosidad inicial del crudo, la segunda por la movilidad del crudo caliente y la permeabilidad de la formación y la tercera por la fracción móvil remanente del fluido de yacimiento.
<b>Gontijo y Aziz (1984)</b>	Proponen relaciones directas para calcular los números adimensionales de pérdidas del modelo presentado por Boberg y Lantz (1966), eliminando el uso de funciones de error. Extendieron el modelo a una geometría cónica.
<b>Booker y Savvidou (1984)</b>	Obtuvieron las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de la temperatura bajo condiciones sensibles a esfuerzos, estas consideraban únicamente el efecto térmico conductivo, despreciando completamente el mecanismo de transferencia convectivo.
<b>Hojka y Dusseault (1990)</b>	Presentaron un modelo en estado estable que acopla los mecanismos de transferencia de calor por conducción y convección, este último relacionado al flujo de fluidos en el yacimiento. Establecen una relación entre el mecanismo de transferencia de calor dominante en proceso de inyección de vapor, con la permeabilidad del yacimiento.
<b>Hojka, Dusseault y Bogobowica (1993)</b>	Extensión a estado transiente del modelo Hojka y Dusseault (1990), esta solución analítica se expresa mediante la ecuación de Bessel modificada de primer orden.
<b>Kocabas (2004)</b>	A partir de la ecuación advección-difusión, plantea un modelo 2D para calcular la temperatura del yacimiento durante procesos no isotérmicos de inyección de fluidos. <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tiene en cuenta pérdidas de calor en las direcciones vertical y horizontal.</li> <li>• Usa un perfil constante de velocidades.</li> <li>• Considera equilibrio térmico instantáneo.</li> </ul>
<b>Barends (2010)</b>	Presentan un modelo basado en el trabajo de Lauwerier (1954), para calcular el transiente de temperatura teniendo en cuenta conducción y convección. <ul style="list-style-type: none"> <li>• Solución analítica usando transformadas de Boltzmann y Laplace.</li> <li>• Evalúa el comportamiento de la temperatura a diferentes condiciones de simetría (plani-simétrico, axi-simétrico)</li> </ul>
<b>Ghannadi, S., Irani, M., &amp; Chalaturnyk, R. (2014)</b>	A partir de un análisis de la conservación de energía térmica y conservación de masa (advección-difusión) plantean un modelo unidireccional para estimar la presurización térmica durante un proceso de SAGD en la capa sello. La principal suposición de este modelo es que el flujo de fluido y el flujo térmico se dan únicamente en la dirección vertical, lo que hace posible su solución de forma analítica.
<b>Wei, Cheng, Huang y Huang (2014)</b>	Los autores proponen un modelo que permite representar el desarrollo de la cámara de vapor en proceso de SAGD. Encontraron que para tasas pequeñas de inyección de vapor, la cámara tiene una forma de parábola convexa y para tasas más altas la cámara toma forma de un triángulo invertido con el pozo productor como vértice. Relacionan la tasa de producción de crudo con la tasa de expansión de la cámara de vapor, la cual a su vez depende de las propiedades del yacimiento y los parámetros de inyección.

### 1.3.2 Modelos numéricos

El planteamiento de soluciones numéricas de la ecuación de energía es relativamente reciente ya que el gasto computacional es alto, por lo que los avances en este tipo de planteamientos han ido de la mano de desarrollos tecnológicos en términos de optimización de procesos computacionales. Los últimos 20 años se ha tenido una cantidad importante de autores que han estudiado este tipo de solución (Obembe et al., 2016).

Los modelos numéricos requieren gran cantidad de información como datos de entrada sobre el yacimiento (geometría y distribución de propiedades), sobre los fluidos (saturación, propiedades, condiciones iniciales), sobre los pozos (distribución, intervalos abiertos) y sobre variables operacionales (tasa, presión de inyección), en comparación con los modelos analíticos que requieren menos información, pero que son variables críticas del proceso. Lo más importante de usar un modelo numérico es la posibilidad de levantar suposiciones que en general son asumidas en los modelos analíticos (Hosseini, 2015).

<b>Cicek (2005a)</b>	Propone un simulador numérico tridimensional con un fluido trifásico (vapor, agua y crudo), para representar el comportamiento de formaciones naturalmente fracturadas durante la inyección de vapor. <ul style="list-style-type: none"><li>• Usa un planteamiento de doble porosidad y doble permeabilidad en la formación.</li><li>• Tiene en cuenta efectos de presión capilar y gravedad.</li><li>• Posteriormente estudia los efectos que tiene las condiciones operaciones (esquemas de inyección) y las propiedades de la formación en el desplazamiento del vapor en una formación con presencia de fracturas naturales (Cicek, 2005b).</li></ul>
<b>Hossain, Mousavizadegan, &amp; Islam (2007)</b>	Desarrollan un modelo unidimensional para representar el patrón de avance de la temperatura dentro del yacimiento mientras se inyecta vapor caliente <ul style="list-style-type: none"><li>• Desarrollo para los dos casos, cuando se considera equilibrio térmico instantáneo y cuando no.</li><li>• Usa como ecuación constitutiva la ecuación advección-difusión en un medio poroso.</li><li>• Esquema explícito y centrado en diferencias finitas.</li><li>• El trabajo permitió establecer la dependencia de la temperatura con la velocidad del fluido y con parámetros operacionales como la tasa de inyección.</li><li>• En trabajos posteriores (Hossain et al., 2008; Hossain, Mousavizadegan, &amp; Islam, 2009), estudian los efectos que tiene el cambio de temperatura durante procesos de inyección de vapor en la permeabilidad, porosidad y estado de esfuerzos de la formación.</li></ul>
<b>Civan (2010)</b>	Centra su estudio en la afectación que tiene el cambio de la temperatura de la formación sobre la permeabilidad.

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Usa la ecuación advección-difusión en una dimensión.</li> <li>• Soluciona el sistema de ecuaciones diferenciales a través del método de diferencias finitas usando un esquema centrado. Y supone equilibrio térmico instantáneo entre la roca y fluido.</li> <li>• Consideró la migración y depositación de finos como causal de disminución de la permeabilidad de la formación productora</li> </ul>
<p><b>Cui, Gawecka, Pott, Taborda y Zdravkovic (2016)</b></p>	<p>Mencionan los problemas de estabilidad numérica en la solución de la ecuación de advección y plantean una solución en elementos finitos aplicando el método de Galerkin.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Usan el número de Péclet como el indicador del mecanismo de transferencia de calor dominante en el proceso de inyección de vapor.</li> <li>• Proponen el método de Galerkin como la mejor opción para resolver problemas en los cuales el fenómeno dominante sea el advectivo.</li> </ul>

## 1.4 Ecuación Advección-Difusión

Teniendo en cuenta los antecedentes y la descripción de los mecanismos de transferencia de calor presentados en secciones anteriores es posible plantear una herramienta matemática para modelar la transferencia de calor en los yacimientos de crudo pesado durante procesos de inyección de vapor.

De acuerdo con Dehghan (2005), la transferencia de calor es descrita por un arreglo de ecuaciones diferenciales parciales, las cuales son formulaciones matemáticas de la ley de conservación de energía térmica. La Ecuación (4) presenta ese conjunto de ecuaciones en términos de la variación de la temperatura y asumiendo: un fluido incompresible, que la densidad del fluido no cambia con la temperatura y que la conductividad térmica permanece constante. Además en esta ecuación no se tienen en cuenta términos que representen fuentes y sumideros

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho C_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (4)$$

La Ecuación (4) es llamada ecuación advección-difusión en tres dimensiones, esta ecuación representa el calor que es transportado por un fluido que se mueve (convección) y el calor que se dispersa en el medio debido a la conducción. El primer término del lado izquierdo de esta ecuación representa el cambio de la temperatura respecto al tiempo, los siguientes tres términos del lado izquierdo contienen la información de la transferencia de

calor por convección en cada una de las direcciones, la cual es función de la velocidad de flujo. Por su parte, el término del lado derecho contiene la información del aporte conductivo a la transferencia de calor en las tres direcciones y están relacionadas con la difusividad térmica del medio.

En otro trabajo Dehghan (2004) menciona diferentes aplicaciones de la ecuación advección-difusión entre las más importantes se encuentran: transporte de agua en sólidos, dispersión de trazadores en medios porosos, intrusión de agua salada en agua dulce en acuíferos, absorción de químicos en lechos, transporte a gran escala de polución en la atmosfera y flujo en medios porosos. Szymkiewicz (2010), menciona sobre la ecuación advección-difusión: “es una de las más retadoras ecuaciones en la física matemática ya que representa la superposición de dos procesos de transporte muy diferentes: la advección y la difusión”.

Separando los dos componentes de la Ecuación (4) (convectivo y conductivo) es posible darse cuenta que el componente convectivo es representado por una ecuación del tipo hiperbólica, mientras que el componente conductivo es representado por una ecuación parabólica. Estas diferencias esenciales hacen que planteamiento acoplado reciba características de ambos fenómenos, los cuales matemáticamente son completamente diferentes. Numéricamente, la ecuación advección presenta serios problemas de inestabilidad y cuando en el fenómeno acoplado la transferencia de calor es dominada por la advección, el modelo acoplado hereda los mismos problemas numéricos de la ecuación hiperbólica. En este mismo orden de ideas, cuando el fenómeno acoplado es dominado por la conducción el modelo acoplado hereda las características numéricas de la ecuación parabólica, la cual a su vez es más estable numéricamente (Szymkiewicz, 2010).

Debido a la complejidad de la ecuación advección-difusión, las soluciones analíticas son limitadas a casos en 1 dimensión y velocidad de flujo constante en el yacimiento. Por otra parte, no cualquier esquema numérico puede ser aplicado para su solución, Appadu, (2013) propone el uso de esquemas numéricos no estándares para minimizar la dispersión y la disipación numérica de los resultados de temperatura usando la ecuación advección-difusión. Otros autores han ido más allá y proponen resolver la ecuación advección-difusión usando el esquema numérico de elementos finitos (FEM), al considerar que este método

es más estable numéricamente que el método de las diferencias finitas (FDM) (Cui et al., 2016; Szymkiewicz, 2010).

Finalmente, el número Péclet es un número adimensional que relaciona la tasa de calor que se transfiere por convección y la tasa de calor que se transfiere por conducción, de tal modo que bajos valores del número de Péclet representan un fenómeno dominado principalmente por la conducción, mientras que altos valores del mismo indican que el mecanismo dominante es la convección. La Ecuación (5) presenta una expresión para el número de Péclet, en dicha expresión  $l_i$  representa una longitud característica,  $v_i$  es la velocidad asociada a la longitud característica,  $\rho$  es la densidad, para este caso específico debe ser la densidad del sistema roca-fluido, al igual que la capacidad calorífica ( $C_p$ ) y la conductividad térmica ( $k$ ) (Cui et al., 2016; Ghannadi, Irani, & Chalaturnyk, 2014; Szymkiewicz, 2010). Sobre el número de Péclet se volverá más adelante.

$$Pe = \frac{l_i v_i \rho C_p}{k} \quad (5)$$



## **2. Modelo numérico tridimensional en coordenadas cilíndricas para calcular la temperatura durante inyección de vapor**

Para desarrollar un módulo de simulación que permita calcular la temperatura en yacimientos de crudo pesado durante procesos de inyección de vapor es necesario tener en cuenta los siguientes componentes:

- Un modelo que represente físicamente el yacimiento y contenga espacialmente el dominio en el cual será calculada la temperatura. Se considera que el modelo físico queda descrito con las características del yacimiento, sus dimensiones y las condiciones de frontera a las que haya lugar.
- Un modelo matemático que a su vez se divide en modelo diferencial y modelo numérico. La parte diferencial integra las expresiones matemáticas que describen el fenómeno, las cuales se obtienen a partir de un balance de energía. Y el componente numérico contiene el desarrollo matemático utilizado para resolver las ecuaciones del modelo diferencial.
- Finalmente, un modelo computacional que reúna las expresiones resultantes del modelo numérico y siguiendo un algoritmo, en algún lenguaje de programación y mediante herramientas computacionales, calcule la temperatura en el dominio definido por el modelo físico.

Este trabajo está enfocado a simular los procesos de inyección cíclica e inyección continua de vapor y a continuación se describen cada uno de los componentes del modelo desarrollado para calcular la variación de la temperatura en yacimientos de crudo pesado durante la aplicación de cada una de las técnicas.

## 2.1 Modelo físico

Se ha definido como modelo físico un modelo del tipo *single well model*, el cual se caracteriza por representar el comportamiento de un yacimiento con un solo pozo. Este esquema resulta apropiado para el modelamiento de la técnica CSS, ya que en esta técnica los procesos de inyección de vapor y de producción de crudo se dan por el mismo pozo. Por otro lado, el concepto de la inyección continua de vapor define un pozo de inyección y al menos otro pozo de producción, lo que hace que hace necesario considerar una zona de producción a parte del pozo inyector. Teniendo en cuenta esta consideración, se elige usar el mismo modelo físico para ambas técnicas pero haciendo una diferenciación en el establecimiento de las condiciones de frontera para cada caso, específicamente en la técnica de inyección continua, esto con el fin de representar en el modelo las zonas por las cuales se produce el petróleo.

La representación física del modelo se presenta en la [Figura 2-1](#) y cumple las siguientes características:

- Debido a la geometría del modelo, el sistema de coordenadas cilíndricas es el más apropiado.
- Está conformado por dos cilindros verticales, que comparten un mismo eje axial. El cilindro interno de radio  $r_w$  representa el pozo, y el cilindro externo de radio  $r_e$  representa la extensión del yacimiento.
- La zona comprendida entre  $r_w$  y  $r_e$  representa un medio poroso que se encuentra saturado con crudo de alta viscosidad y baja gravedad API (crudo pesado).

Además es necesario establecer las siguientes suposiciones:

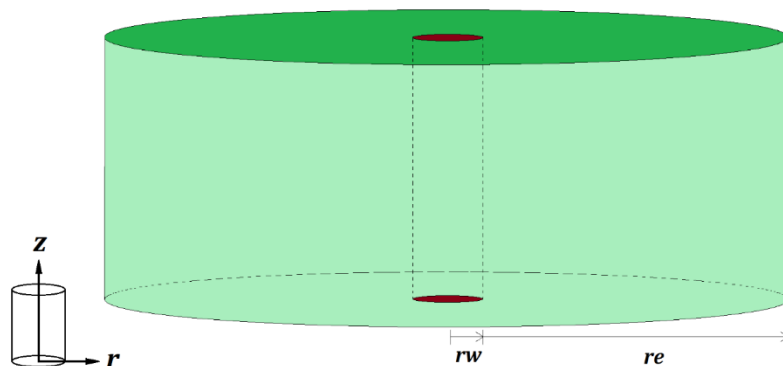
- Existe equilibrio térmico entre la roca y el fluido, es decir que en un instante dado la temperatura del fluido y de la formación son iguales.
- Las propiedades térmicas del fluido y de la formación no cambiarán con la temperatura.
- Las propiedades petrofísicas de la roca no cambian con la temperatura.
- No se considera cambios de fase de los minerales presentes en la roca, ni reacciones químicas por el aumento o reducción de la temperatura.
- Se supone un fluido monofásico dentro del yacimiento. El modelo pretende realizar un acercamiento al comportamiento de la temperatura dentro del yacimiento durante



procesos de inyección de vapor considerando tanto la conducción como la convección como mecanismos de transferencia de calor y no tiene en cuenta las diferentes fases del fluido que tienen lugar dentro del yacimiento durante las técnicas de recobro térmico con inyección de vapor.

- No se considera cambio de fase de fluido, debido a aumento o disminución de la temperatura.
- El transporte de calor se da principalmente por los mecanismos de conducción y convección, gobernados por la conducción térmica del fluido y la roca y por la velocidad de flujo respectivamente.
- En el modelo no se representará flujo de fluidos, el perfil de velocidades que resulta de este tipo de modelamientos es un insumo y debe actualizarse para cada tiempo. Cabe resaltar que el modelamiento del flujo de fluidos usado para obtener el perfil de velocidades, debe realizarse bajo la condición que la presión de inyección no supere la presión de fractura, esto garantiza que se está modelando un proceso de inyección de vapor sin fracturamiento hidráulico.
- Las propiedades térmicas del medio poroso en la dirección radial y tangencial no tendrán una variación significativa, debido a que de forma general en estas dos direcciones en el modelo se tendría el mismo tipo de roca. Caso contrario ocurre en la dirección vertical, en la cual la variación de la conductividad térmica es considerable debido a los diferentes estratos de roca que puedan ser tenidos en cuenta en el modelo físico a representar y por ende en la simulación.

**Figura 2-1:** Modelo físico.



A continuación se presenta una descripción de las condiciones de frontera que serán usadas en el modelamiento de cada una de las técnicas de inyección de vapor (cíclica y

continua). Las ecuaciones que representan numéricamente estas condiciones de frontera se presentan en el Apéndice A.

### 2.1.1 Modelo físico para CSS

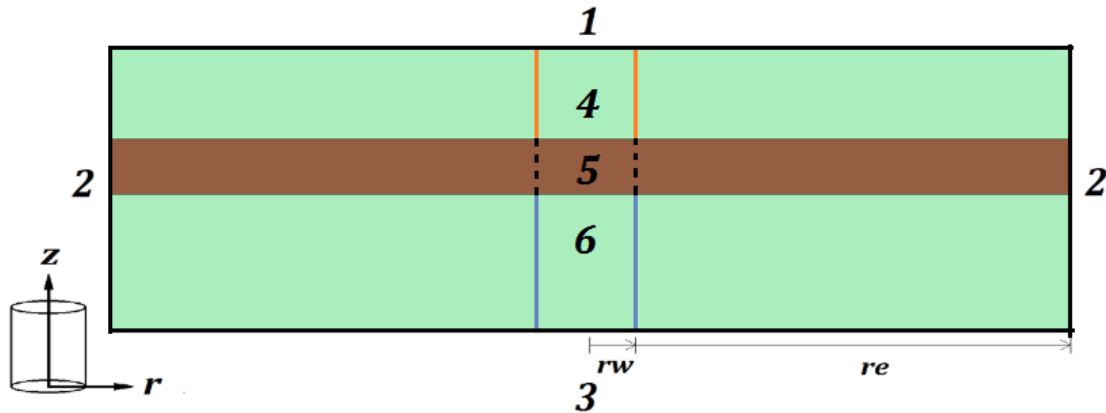
El proceso de inyección cíclica de vapor tiene tres etapas: la primera es la etapa de inyección y consiste en inyectar vapor por un pozo durante un periodo de tiempo, posteriormente se presenta la etapa de remojo en la cual se cierra el pozo durante otra cantidad de tiempo y finalmente en la etapa de producción, como bien lo indica el nombre, el pozo se abre a producción, las tres etapas en conjunto constituyen un ciclo, y se realiza tantos ciclos como económicamente sea posible.

El modelo representa las tres etapas del ciclo. Durante la etapa de inyección tendrá lugar los mecanismos de transferencia de calor por conducción y por convección; durante la etapa de remojo o cierre no se tendrá un perfil de velocidades, lo que implica que solo se tendrá transferencia de calor debido a la conducción térmica de la roca y del fluido y finalmente en la etapa de producción se tendrá de nuevo los dos mecanismos de transferencia de calor conducción y convección.

La condición inicial de temperatura está dada por la temperatura del yacimiento al final de la etapa de producción inmediatamente anterior al ciclo que se va a modelar. En el caso particular del primer ciclo se puede presentar dos situaciones: i) si no ha ocurrido una etapa de producción previa se puede considerar que todo el yacimiento se encuentra a temperatura inicial, dada por el gradiente geotérmico, y ii) si ha ocurrido producción, se debe tener información de la temperatura al finalizar la producción y considerarla para todo el yacimiento.

La [Figura 2-2](#) representa una vista lateral del modelo físico, indicando cada frontera que se considera y a continuación su respectiva descripción.

**Figura 2-2:** Esquema de condiciones de frontera para CSS.



- Las fronteras 1, 2 y 3 representan la frontera superior, lateral e inferior del yacimiento respectivamente, para los tres límites se establece una condición de tipo Neumann, y se definen como fronteras de no flujo, es decir que para 1 y 3 se cumple la Ecuación (6) y para 2 se cumple la Ecuación (7).

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \tag{6}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r_e} = 0 \tag{7}$$

Las fronteras 4, 5 y 6 corresponden a la frontera radial interna ( $r = r_w$ ), en la formación superior, en la formación de interés y en la formación inferior respectivamente. De acuerdo a la fenomenología del proceso de la inyección cíclica es necesario definir condiciones de frontera diferentes en cada una de estas zonas, a la vez que se debe tener en cuenta la etapa (inyección, remojo o producción) que se esté modelando en un momento dado:

- En la zona 4 se considera hueco entubado, esto quiere decir que no se presenta flujo de fluidos del pozo hacia la formación o viceversa, pero si define como una zona de transferencia de calor por conducción. Durante la inyección de vapor la temperatura en los alrededores del pozo aumenta debido a la transferencia calor a través del revestimiento y del cemento, por lo cual es necesario considerar una condición frontera del tipo Neumann, la cual se rige por el flujo de calor entre el interior del revestimiento y la cara de formación. Esta condición será representada por el modelo de transferencia de calor en hueco entubado y se presenta en el Apéndice A.

Durante las etapas de remojo y producción es necesario definir esta frontera como una del tipo Neumann, en la cual la transferencia de calor del pozo hacia la formación es cero, como se presenta en la Ecuación (8), con esto se busca modelar el proceso difusivo de la temperatura dentro del yacimiento.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r_w} = 0 \quad (8)$$

- La frontera 5 se define como zona de conexión entre el pozo y la formación, ya sea por medio de perforados o con una condición de hueco abierto. La transferencia de calor se da por los dos mecanismos de transferencia de calor a considerar, conducción y convección. Durante la inyección se establece como una frontera del tipo Dirichlet con un valor de temperatura igual a la temperatura de inyección ( $T_{frontera} = T_{iny}$ ). Durante el remojo en la frontera no se da flujo de calor, con el fin de modelar el fenómeno de difusión de calor dentro de la formación, para lo cual se establece condición frontera tipo Neumann de no flujo tal como se presenta en la Ecuación (8). Finalmente, durante la etapa de producción se define de nuevo como una frontera del tipo Dirichlet, en la cual la temperatura está dada por la temperatura del bloque contiguo al pozo.
- Por último, en la frontera 6 se considera que no se tendrá flujo de calor a través de ella en ninguna de las tres etapas del proceso. Se establece entonces una condición frontera del tipo Neumann de no flujo, tal como lo presenta la Ecuación (8), en concordancia con las dos zonas anteriores.

### 2.1.2 Modelo físico para inyección continua de vapor

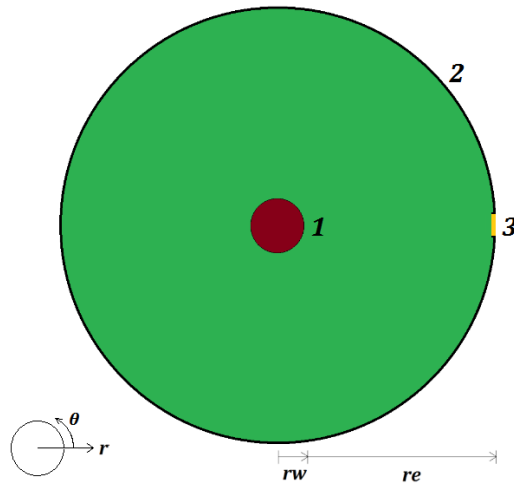
La inyección continua de vapor requiere que en todo momento se esté inyectando vapor por un pozo y al mismo tiempo se de la producción del crudo por uno o más pozos dependiendo de la estrategia de producción, puede ser uno a uno (un pozo inyector y un pozo productor), arreglo de 5 puntos invertido (un pozo inyector y cuatro productores) etc. Considerando el mismo modelo físico de la [Figura 2-1](#) es posible representar el comportamiento de la temperatura dentro del yacimiento durante una inyección continua de vapor, para ello es necesario definir condiciones de frontera que, sin necesidad de

modelar otro pozo, garanticen que las distribuciones de presión y temperatura corresponden al caso que se está modelando.

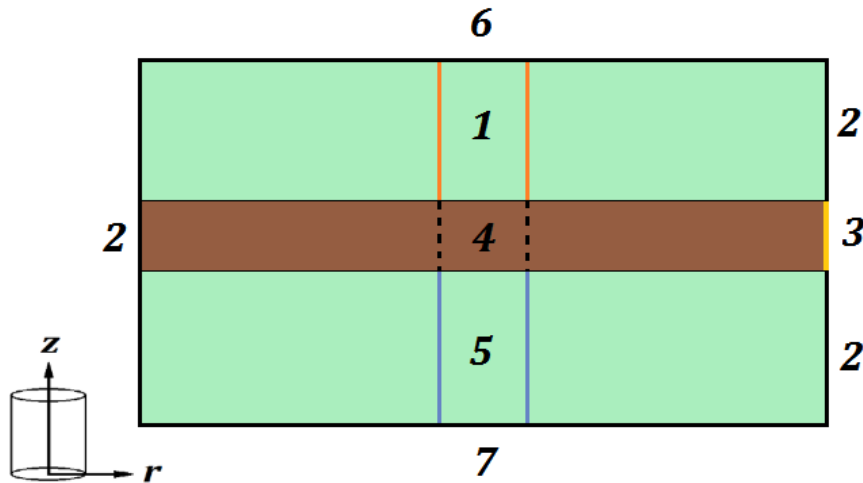
La condición inicial de temperatura estará dada por el valor de la temperatura del yacimiento antes de empezar la inyección, puede darse que la inyección de vapor empiece justo al inicio de la vida productiva del pozo, en este caso se asume que la temperatura del yacimiento está dada por el gradiente geotérmico. Otra posible situación que se puede presentar es que la inyección de vapor empieza después de un periodo considerable de producción, para lo cual es necesario conocer a que valor de temperatura promedio queda el yacimiento, y esta se considera condición inicial de temperatura para el proceso de inyección continua de vapor.

Para el caso de una estrategia uno a uno, en la cual se tiene un pozo inyector y un pozo productor, separados uno del otro por una distancia  $L$ , el esquema de la [Figura 2-3](#) representa la vista en planta del modelo físico y las condiciones de frontera a considerar, y la [Figura 2-4](#) representa la vista lateral del mismo esquema.

**Figura 2-3:** Distribución condiciones de frontera para caso de inyección continua de vapor - vista en planta



**Figura 2-4:** Distribución condiciones de frontera para caso de inyección continua de vapor - vista lateral



Las fronteras 1 y 2 representan la frontera en el radio del pozo y el radio externo del modelo respectivamente, la zona 3, es una zona específica de la frontera externa y las zonas 4 y 5 casos específicos de la frontera 1. Por otra parte las fronteras 6 y 7 representan las fronteras superior e inferior respectivamente, a continuación una descripción de cada una:

- La zona indicada por 1 representa el pozo en las formaciones superiores de la formación de interés. Al igual que en el caso de inyección cíclica, en esta zona se debe implementar un modelo de pérdidas por conducción a través del revestimiento del pozo, este modelo de pérdidas se presenta en el Apéndice A.
- Las zonas indicadas por 2, 6 y 7 comparten la misma condición frontera de no flujo, para lo cual se define en ambos casos una condición del Neumann de no flujo dado por la Ecuación (7) para 2 y por la Ecuación (6) para 6 y 7.
- La zona 3 es un caso específico de la frontera externa, esta zona se encuentra abierta a flujo, lo que permite tener una distribución de velocidades tal como si se tuviera un pozo productor, sin necesidad de modelar el pozo como tal. La zona 3 está determinada espacialmente de la siguiente forma: en la dirección radial se encuentra en  $r = r_e$ , en la dirección vertical se encuentra definido por los límites de la formación de interés y por último en la dirección tangencial es necesario definir un valor de  $\theta$ . Respecto a la temperatura en esta zona se define una condición frontera del tipo Dirichlet, y el valor de temperatura se debe actualizar para cada tiempo, adquiriendo el valor de

temperatura al tiempo anterior del bloque más próximo en dirección radial hacia el pozo inyector.

- Al igual que en el caso de inyección cíclica, la frontera 4 es la zona de perforados, lo que quiere decir que a través de ella se da flujo de calor tanto por conducción como por convección. Para esta frontera se define una condición del tipo Dirichlet con temperatura constante durante la inyección e igual a la temperatura de inyección.
- La frontera 5 define la parte del pozo inyector ubicada en las formaciones inferiores de la formación de interés, se encuentra delimitada por  $r = r_w$  y se establece una condición de no flujo del tipo Neumann, y dada por la Ecuación (8).

## 2.2 Modelo matemático

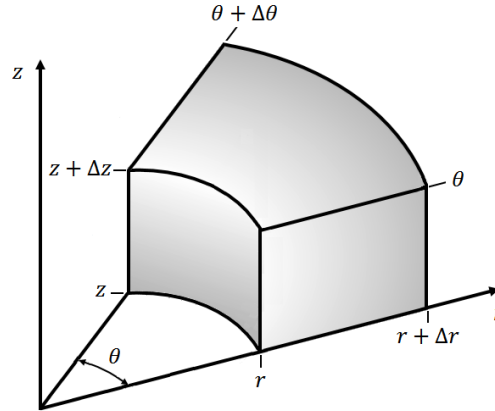
Como se menciona en la Sección 1.4, la ecuación advección-difusión es el resultado de un análisis de conservación de la energía y permite modelar matemáticamente la transferencia de calor por conducción y convección cuando el fenómeno en cuestión involucra flujo de fluidos. En esta sección se pretende encontrar las expresiones matemáticas que representen la variación de la temperatura en un medio poroso durante procesos no-isotérmicos como la inyección de vapor y que sean aplicables al modelo físico descrito en la sección anterior.

Dado que se ha elegido como sistema de referencia un sistema coordenado cilíndrico, la [Figura 2-5](#) representa un elemento volumétrico de análisis, en el cual es aplicado un balance de energía. Bird, Steward y Lightfoot (2006) lo definen como un elemento de control que tiene como característica que sus dimensiones pueden tomarse tan infinitesimalmente pequeñas como sea necesario. El volumen del elemento volumétrico se puede calcular usando la siguiente expresión:

$$V = r\Delta r\Delta\theta\Delta z \quad (9)$$

Este elemento es de tipo estacionario, fijo en el espacio y a través del cual circula un fluido con una temperatura dada, el sistema permite la entrada y salida de energía cinética y energía interna a través del mecanismo de transporte del tipo convectivo, además puede entrar y salir energía por procesos fundamentalmente moleculares, estos últimos pueden ser debido a transporte conductivo, fuerzas de presión y fuerzas viscosas.

Figura 2-5: Elemento de control volumétrico.



Lo anterior se puede representar de forma esquemática con la siguiente ecuación:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Velocidad de} \\ \text{aumento de} \\ \text{energías cinéticas} \\ \text{e internas} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Velocidad neta de} \\ \text{adición de energías} \\ \text{cinéticas e internas} \\ \text{debido al transporte} \\ \text{convectivo} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{Velocidad neta de} \\ \text{adición de calor} \\ \text{debido al transporte} \\ \text{conectivo} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{Velocidad a la que se} \\ \text{realiza trabajo sobre el} \\ \text{sistema por esfuerzos} \\ \text{(presión y viscosidad)} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{Velocidad a la que se} \\ \text{realiza trabajo sobre el} \\ \text{sistema por fuerzas externas} \end{array} \right] \quad (10)$$

Antes de interpretar matemáticamente cada uno de los términos de la ecuación anterior, es necesario definir el vector de densidad de flujo de energía combinada, el cual se representa según la siguiente ecuación:

$$\vec{e} = \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \hat{H} \right) \vec{v} + [\tau \cdot \vec{v}] + q + S \quad (11)$$

Usando esta definición del vector  $e$ , a continuación, se presentan la forma matemática de cada término de la Ecuación (11). La velocidad de aumento de energías cinéticas e interna dentro del elemento de control volumétrico se puede expresar con la siguiente ecuación:

$$\text{Velocidad de aumento de energías} = r \Delta r \Delta \theta \Delta z \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \hat{U} \right)$$

Donde

$$\left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \hat{U} \right) \quad (12)$$

$\frac{1}{2} \rho v^2 = \text{energía cinética por unidad de volumen}$

$\rho \hat{U} = \text{energía interna por unidad de volumen}$

Para conocer cuanta energía entra y sale a través de las caras de elemento volumétrico se plantea la siguiente expresión:



$$\begin{aligned} \Delta \text{Energía} = r\Delta\theta\Delta z(e_r|_r - e_r|_{r+\Delta r}) + \Delta r\Delta z(e_\theta|_\theta - e_\theta|_{\theta+\Delta\theta}) \\ + r\Delta r\Delta\theta(e_z|_z - e_z|_{z+\Delta z}) \end{aligned} \quad (13)$$

Sobre la velocidad a la cual se realiza trabajo sobre el fluido por la fuerza externa (gravedad), está dado por la siguiente expresión:

$$\text{Velocidad de trabajo sobre fluido} = \rho r\Delta r\Delta\theta\Delta z(v_r g_r + v_\theta g_\theta + v_z g_z) \quad (14)$$

Definidos todos sus términos, la Ecuación (11) se puede expresar como:

$$\begin{aligned} r\Delta r\Delta\theta\Delta z \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \hat{U} \right) \\ = - [r\Delta\theta\Delta z(e_r|_r - e_r|_{r+\Delta r}) + \Delta r\Delta z(e_\theta|_\theta - e_\theta|_{\theta+\Delta\theta}) \\ + r\Delta r\Delta\theta(e_z|_z - e_z|_{z+\Delta z})] + \rho r\Delta r\Delta\theta\Delta z(v_r g_r + v_\theta g_\theta + v_z g_z) \end{aligned} \quad (15)$$

Dividendo entre  $r\Delta r\Delta\theta\Delta z$  en la Ecuación (15) y haciendo que  $\Delta r, \Delta\theta, \Delta z$  tiendan a cero se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \hat{U} \right) = - \left[ \frac{\partial e_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial e_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial e_z}{\partial z} \right] + \rho(v_r g_r + v_\theta g_\theta + v_z g_z) \quad (16)$$

Reemplazando la definición del vector de densidad de flujo de energía en la ecuación anterior escrita de forma vectorial, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \hat{U} \right) \\ = - \left( \nabla \cdot \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \hat{U} \right) \vec{v} \right) - (\nabla \cdot q) - (\nabla \cdot P\vec{v}) - (\nabla \cdot [\tau \cdot \vec{v}]) - (\nabla \cdot S) \\ + \rho \cdot (\vec{v}g) \end{aligned} \quad (17)$$

La anterior es considerada la ecuación de energía total (energía térmica y energía mecánica), para obtener una expresión en términos de la variación de la temperatura es necesario retirar el aporte de la energía mecánica y solo considerar la energía térmica, de modo que se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \hat{U}) = -(\nabla \cdot \rho \hat{U} \vec{v}) - (\nabla \cdot q) - P(\nabla \cdot \vec{v}) - (\tau : \nabla \vec{v}) - (\nabla \cdot S) \quad (18)$$

Ahora cambiando la energía interna por la entalpia y usando la suposición que la entalpia es función de la temperatura y la presión se puede llegar a la siguiente expresión:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\rho c_p (\nabla \cdot \vec{v}T) - (\nabla \cdot q) - (\tau : \nabla \vec{v}) - (\nabla \cdot S) - \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\nabla \cdot \vec{v}T) \right) \quad (19)$$

La Ecuación ( 19 ) es la ecuación general de variación de la temperatura, sobre esta ecuación es necesario hacer algunas suposiciones de acuerdo con las características del proceso de inyección de vapor en yacimientos de crudo pesado.

Según la Ley de Fourier el término  $-(\nabla \cdot q)$  se convierte en  $(\nabla \cdot k\nabla T)$ , lo cual expresa el flujo de calor por unidad de volumen como función de la conductividad térmica y el cambio de temperatura.

El término  $(\tau: \nabla v)$  corresponde a la disipación viscosa, este término cobra importancia solo en los casos de gradientes de velocidad enormes, situación que no se da en el flujo de fluidos dentro de yacimientos de crudo pesado, por lo tanto, el aporte de este término se puede despreciar.

El término  $(\nabla \cdot S)$  representa el aporte por energías nuclear, radiactiva, electromagnética y química. Durante los procesos de recobro térmico usando inyección de vapor no se presentan reacciones químicas ni nucleares, por lo tanto, estos aportes de energía se desprecian. Respecto a la energía radiactiva, se considera relevante cuando las trazas de minerales radiactivos como el uranio y el torio en la roca son considerables, de lo contrario este aporte energético también puede ser despreciado. Por último, el aporte de energía electromagnética se relaciona al mecanismo de transporte de calor por radiación, este aporte se puede despreciar por dos razones principalmente: por un lado, tanto la roca como los fluidos saturantes tienen bajos niveles de radiación (dado por su emisividad), lo que conlleva a que el aporte sea mínimo comparado con los otros mecanismos de transferencia. La otra razón para despreciar el aporte de este tipo de energía es la dificultad para estimar el comportamiento electromagnético del sistema roca-fluido durante los procesos de inyección de vapor. Por consiguiente, los aportes por los diferentes tipos de energías se pueden despreciar.

En general, se considera que el fluido dentro del yacimiento permanece con densidad constante, lo que llevaría a que se cumpla la siguiente ecuación:

$$\left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p = 0 \quad ( 20 )$$

Y por lo tanto el último término de la Ecuación (19) sea 0. Teniendo así las cosas, la Ecuación (19) se convierte en:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\rho C_p (\nabla \cdot \vec{v} T) + (\nabla \cdot k \nabla T) \quad (21)$$

Esta expresión es denominada la ecuación advección-difusión para una fase. Cabe recordar que el desarrollo anterior se hizo a partir de un elemento volumétrico homogéneo, para el caso de yacimientos de crudo pesado este elemento debe ser considerado como un medio poroso. Asumiendo equilibrio térmico instantáneo es posible tener una ecuación advección-difusión en un medio poroso:

$$M \frac{\partial T}{\partial t} = -\rho_f C_{pf} (\nabla \cdot \vec{v} T) + (\nabla \cdot k_b \nabla T) \quad (22)$$

Donde

$$M = \phi \rho_f C_{pf} + (1 - \phi) \rho_s C_{ps}$$

$$k_b = \phi k_f + (1 - \phi) k_s$$

La Ecuación (22) es la ecuación advección-difusión para un medio poroso. Entre las principales características de este modelo se encuentran: se supone equilibrio térmico instantáneo entre la roca y el fluido, se considera velocidad de fluido variable y finalmente se considera heterogeneidad en la conductividad térmica. (Kocabas, 2004; Kaviany, 2001 y Hossain, Mousavizadegan, & Islam, 2007).

### 2.2.1 Cálculo de la velocidad de flujo

Como es evidente en la Ecuación (22), es necesario conocer la velocidad con la cual se está moviendo el fluido dentro del yacimiento, para lo cual se recurre a la Ley de Darcy, definida por Aziz y Settari (1979) por la siguiente ecuación:

$$\vec{v} = -\frac{K_i}{\mu} \Delta P \quad (23)$$

Definida para cada dirección

$$v_r = -\frac{K_r}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (24)$$

$$v_\theta = -\frac{K_\theta}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (25)$$

$$v_z = -\frac{K_z}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (26)$$

## 2.3 Modelo numérico

La Ecuación (22) contiene matemáticamente los elementos que se desean incluir en el modelamiento de la temperatura durante procesos de inyección de vapor en yacimientos de crudo pesado, el paso siguiente es resolver ese planteamiento diferencial. Para lo cual, se ha elegido una solución numérica teniendo en cuenta el aporte de varios autores sobre las ventajas de usar este tipo de soluciones sobre las soluciones analíticas (Appadu, 2013; Dehghan, 2004; Hosseini, 2015; Mozaffari, *et al.*, 2013 y Spillette, 1965). A continuación se enumeran algunas de las principales ventajas del uso de los esquemas numéricos para resolver la ecuación advección-difusión:

- Las soluciones numéricas permiten eliminar algunas suposiciones que han sido planteadas con el fin de resolver analíticamente la ecuación advección-difusión, por ejemplo que la transferencia de calor se da en una sola dirección, generalmente se asume que es la dirección radial.
- Las soluciones numéricas permite considerar heterogeneidades en las propiedades petrofísicas y térmicas del yacimiento que está siendo modelado.
- En general las soluciones analíticas definen el frente de calor dado el avance del frente del fluido inyectado, por otro lado los modelos numéricos permiten analizar de forma separada los fenómenos de flujo de fluidos y flujo de calor dentro del yacimiento, pero teniendo en cuenta que la velocidad es una variable que relaciona ambos fenómenos.
- Las condiciones de frontera que pueden ser usadas en modelos numéricos son menos restrictivas que en el caso analítico, lo que hace los modelos numéricos más realistas.

Tal como lo menciona Szymkiewicz (2010), la ecuación advección-difusión describe el acople de dos fenómenos completamente diferentes en su comportamiento matemático, la advección y la difusión. La advección se define por un comportamiento hiperbólico mientras que la difusión es representada por una ecuación parabólica. Entonces, al integrar ambos fenómenos en una expresión matemática, se integran también los retos que separadamente se presenta en el momento de su solución. En el caso particular de yacimientos de crudo pesado la advección tiene el rol dominante en el proceso de transferencia de calor, esto como respuesta los altos valores de porosidad y permeabilidad característicos de este tipo de yacimientos (Uribe-Patiño, Alzate-Espinosa, y Arbeláez-Londoño, 2017). Esta situación se ve reflejada en el modelo matemático y hace que se presenten problemas numéricos, en el momento de resolver la ecuación advección-difusión, exportados de la ecuación de onda (advección). De hecho, algunos autores plantean que para resolver numéricamente la ecuación advección-difusión es necesario considerar esquemas de diferencias finitas más sofisticados que los esquemas estándares (Appadu, 2013 y Dehghan, 2004), mientras que otros proponen que la forma de superar los problemas numéricos de esta ecuación es usando el método de elementos finitos (Cui *et al.*, 2016 y Szymkiewicz, 2010).

Es importante resaltar que usualmente para discretizar en diferencias finitas un modelo diferencial se parte de la ecuación diferencial y se elige un esquema de diferencias finitas, este esquema puede ser tipo estándar como el esquema implícito, explícito o Crank-Nicholson; o puede ser del tipo no estándar (Appadu, 2013). Una vez se tiene una expresión discreta se procede a evaluar tres características fundamentales de los modelos numéricos: la primera es si dicha expresión discreta es consistente con el modelo diferencial, la segunda es si la expresión es estable numéricamente y por último, se debe establecer si los resultados de la expresión numérica convergen a un resultado o no.

El teorema de equivalencia de Lax establece que si un problema está bien definido y para el cual se tiene un esquema consistente, entonces el esquema es convergente si también es estable numéricamente (Tinoco-Guerrero, Domínguez-Mota, Gaona-Arias, Ruiz-Zavala, y Tinoco-Ruiz, 2018). Un problema bien definido se refiere al hecho de que cualquier solución en el tiempo sea función de la condición inicial, situación que en general se presenta para el problema de temperatura en la ecuación advección-difusión. Esto quiere decir que el análisis sobre el esquema de diferencias finitas para una expresión

diferencial de la ecuación advección-difusión debe centrarse en garantizar su consistencia y estabilidad, y por el teorema de Lax se considera que también es convergente.

En este trabajo se plantea un esquema numérico implícito en diferencias finitas para resolver la ecuación advección-difusión (Ecuación ( 22 )) en tres dimensiones y considerando un fluido monofásico. Para lo cual se propone una metodología alternativa a la descrita en los párrafos anteriores con el fin de discretizar la ecuación advección-difusión en diferencias finitas, de tal forma que la expresión discreta resultante se construya garantizando su consistencia y estabilidad numérica desde su concepción y que este no sea un análisis posterior al planteamiento discreto. Dicha metodología es una adaptación del planteamiento de Tinoco-Guerrero, *et al.*, (2018) y el objetivo con su aplicación es que el planteamiento numérico en diferencias finitas para la ecuación advección-difusión sea consistente, estable y convergente. En el Apéndice A se presenta de forma detallada el desarrollo matemático que se propone como metodología.

## 2.4 Modelo computacional

Una vez definidos el modelo físico y el modelo matemático (diferencial y numérico), se desarrolla una lógica computacional en el lenguaje de programación FORTRAN para resolver el sistema de ecuaciones que se presenta en el Apéndice A. Teniendo que el modelo de temperatura requiere como datos de entrada la velocidad de fluido dentro del medio poroso, se presenta inicialmente la integración del modelo de temperatura con un modelo de flujo de fluido y posteriormente el procesamiento que se programa exclusivamente dentro del módulo de temperatura.

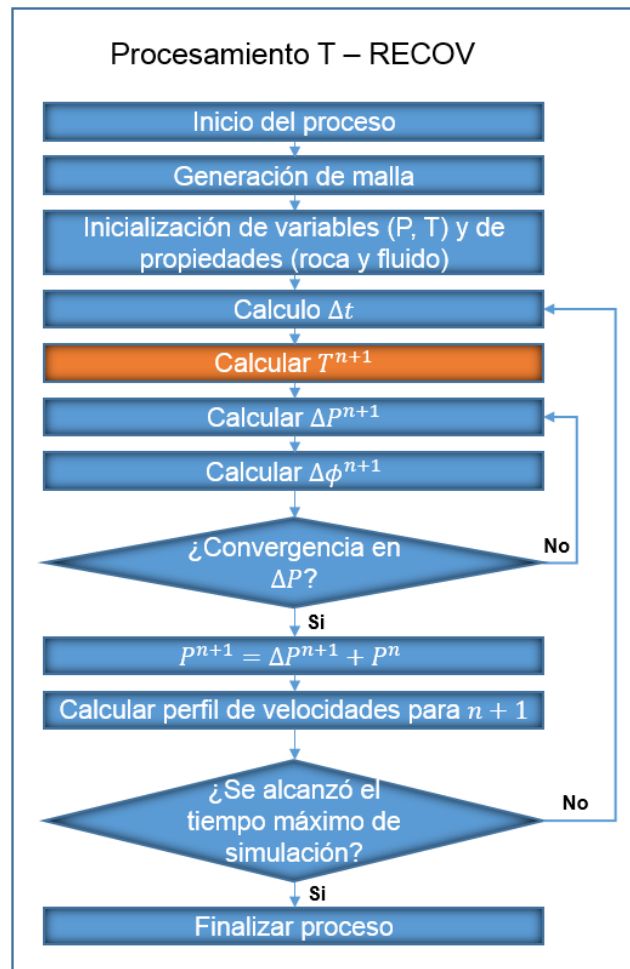
Tal como se menciona anteriormente, el módulo de temperatura no soluciona las ecuaciones de flujo de fluido, por lo cual este módulo es integrado a una herramienta de simulación que se encarga de resolver la presión para el mismo modelo físico planteado en este trabajo. Esta integración se lleva a cabo con el módulo T-RECOV del simulador GIGATHOR<sup>1</sup>, el cual ha sido desarrollado por el grupo GIGA, entre las principales

---

<sup>1</sup> GIGATHOR es una plataforma de simulación para yacimientos de crudo pesado desarrollada en el Grupo GIGA de la Universidad Nacional de Colombia.  
<https://minas.medellin.unal.edu.co/gruposdeinvestigacion/giga/es/in-house-software/giga-thor.html>

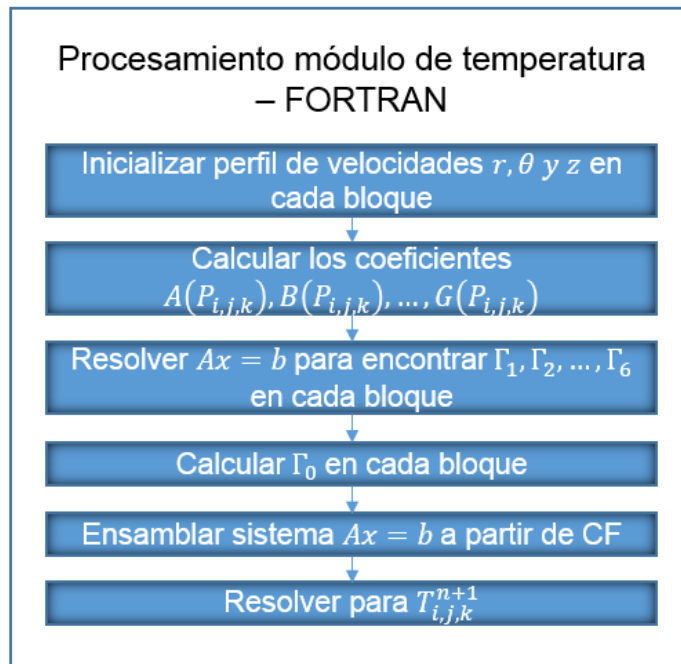
características de esta herramienta de simulación es que es del tipo numérico, en tres dimensiones y desarrollado en coordenadas cilíndricas. El simulador modela el flujo de fluido a partir de la ecuación de difusividad para un fluido monofásico levemente compresible, además considera la expansión térmica del fluido debido al cambio de temperatura. El objetivo entonces es que el módulo de flujo de fluidos del simulador GIGATHOR, dadas unas condiciones de operación, entregue al módulo de temperatura las tres componentes de la velocidad en cada bloque, esto para los diferentes tiempos de simulación. La [Figura 2-6](#) presenta el procesamiento lógico que sigue el módulo de T-RECOV del simulador GIGATHOR, específicamente en esta figura se resalta la integración del módulo de temperatura en T-RECOV.

**Figura 2-6:** Procedimiento computacional de T-RECOV.



Así mismo, en la [Figura 2-7](#) se presenta el algoritmo que permite resolver el sistema de ecuaciones que se presenta en el Apéndice A. Como puede apreciarse en esta figura, el módulo computacional es alimentado tiempo a tiempo con información de la velocidad del fluido y de las propiedades petrofísicas y térmicas tanto de la roca como del fluido de yacimiento y como resultado entrega la variable temperatura en cada nodo de simulación.

**Figura 2-7:** Procedimiento computacional del módulo de temperatura.



Respecto a los datos de entrada del módulo de temperatura es importante destacar que el perfil de velocidad lo calcula el módulo de flujo de fluidos una vez encuentra convergencia en la presión, de esta forma se obtiene las tres componentes de la velocidad en cada bloque de la malla de simulación. Por otra parte, se requiere la porosidad y la densidad de la formación y la densidad del fluido en general esta información se obtiene a partir de registros de pozo o pruebas de laboratorio. Finalmente, las propiedades térmicas del fluido y de la roca (capacidad calorífica y conductividad térmica) pueden ser estimadas a partir de correlaciones o medidas directamente a partir de pruebas de laboratorio (Somerton, 1992). En general para las propiedades térmicas de la roca y del fluido se encuentran valores típicos en la literatura que dependen del tipo de formación y el tipo de fluido que se considere.



### **3.Verificación y validación de los resultados del modelo**

Una vez implementado el modelo computacional se desarrolla la siguiente metodología con el fin de, primero verificar la consistencia de los resultados obtenidos y posteriormente validar de forma preliminar el modelo de temperatura que se desarrolla en este trabajo.

- El primer paso es verificar la respuesta conductiva del modelo. Para lo cual, se simula un caso que solo tenga en cuenta la conducción del fluido y de la roca, esto se logra haciendo cero las tres componentes de la velocidad en cada bloque de la malla. Los resultados obtenidos en este caso se comparan gráficamente con el comportamiento esperado de un modelo analítico conductivo de temperatura.
- El siguiente paso es verificar que el modelo se encuentra en la capacidad de representar el fenómeno acoplado (difusión-advección), para lo cual se implementa un perfil de velocidades que representan la inyección de un fluido caliente en el medio poroso. Con este perfil de velocidades y las propiedades térmicas de la roca y del fluido se obtiene una respuesta acoplada del fenómeno de transferencia de calor. Así como el caso anterior, estos resultados se analizan respecto al resultado gráfico que se espera de un modelo analítico de temperatura convección-conducción.
- Una vez se han encontrado que los resultados obtenidos son consistentes con lo que menciona la literatura, se continúa con la primera parte de validación del modelo. La estrategia de validación es comparar los resultados de un caso que tenga en cuenta la convección y la conducción con los resultados del mismo caso a partir de un modelo analítico. Teniendo en cuenta que los modelos analíticos no permiten considerar el flujo de fluidos en 3D, esta validación se hace en la dirección radial.

### 3.1 Caso conductivo

La intención de modelar este caso es verificar la respuesta del modelo a un caso que solo considera la transferencia de calor en un medio poroso debido a la difusión térmica, dada por la conductividad térmica de la roca y del fluido, y que no presenta flujo de fluidos a través de él. El modelo físico elegido considera un espesor total de 90 ft, dividido en tres capas de 30 ft cada una. La capa central representa la zona de interés en la cual se tienen 10 ft abiertos a flujo, zona por la cual se realiza la inyección de vapor, esta zona abierta es llamada intervalo de inyección. Las otras dos capas representan una formación superior y una formación inferior de la zona de interés, cabe resaltar que es posible que se presente transferencia de calor de una capa a otra, lo cual se espera que sea representado por el modelo. Estas características se eligen teniendo en cuenta las condiciones de frontera descritas en la Sección 2.1.

En el centro del modelo se tiene un pozo de radio 0.5 ft y el radio externo es 100.5 ft. Adicionalmente el yacimiento se representa mediante una malla dividida en pequeños bloques que tienen la forma de la [Figura 2-5](#), en la [Tabla 3-1](#) se describen las dimensiones de estos bloques y además las características del modelo físico de simulación. Una vez definida la malla de simulación, se continúa con la asignación de las propiedades térmicas de la roca y del fluido a cada bloque, estas propiedades se presentan en la [Tabla 3-2](#).

**Tabla 3-1:** Parámetros de malla de simulación para caso conducción y caso conducción-convección

Parámetro de simulación	Valor
Radio del pozo – $r_w$ [ft]	0.5
Radio externo – $r_e$ [ft]	100.5
Espesor [ft]	90
Zona de interés [ft]	30
Intervalo de inyección [ft]	10
Bloques en dirección radial	100
Bloques en dirección tangencial	24
Bloques en dirección vertical	90

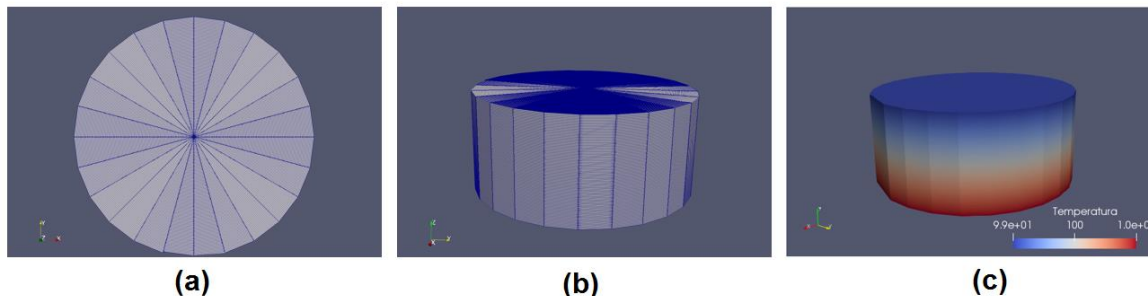
**Tabla 3-2:** Variables de simulación para caso conducción y caso conducción-convección

Parámetro	Valor
Profundidad de referencia [ft]	3045
Temperatura inicial @ profundidad ref. [°F]	100
Temperatura de inyección [°F]	400
Densidad de la roca [lb/ft <sup>3</sup> ]	156
Densidad del fluido [lb/ft <sup>3</sup> ]	30
Capacidad calorífica de la roca [BTU/lb.°F]	0.26
Capacidad calorífica del fluido [BTU/lb.°F]	1.37
Conductividad térmica de la roca [BTU/ ft.hr.°F]	2.50
Conductividad térmica del fluido [BTU/ ft.hr.°F]	1
Porosidad de la roca [adim.]	0.30

Finalmente, el modelo físico queda establecido una vez se define la condición inicial y las condiciones de frontera. La condición inicial de temperatura está dada por la temperatura inicial a la profundidad de referencia y por un gradiente geotérmico de  $0.017 \text{ } ^\circ\text{F}/\text{ft}$ , tal como se describe en el Apéndice B, la [Figura 3-1](#) permite visualizar en tres dimensiones esta condición inicial. Sobre las condiciones de frontera se eligen las mismas condiciones descritas para el caso de inyección cíclica en el Apéndice A, las cuales consideran principalmente que la frontera radial externa, vertical superior y vertical inferior son fronteras de no flujo, y que la frontera radial interna se rige por la temperatura de inyección en la zona abierta a flujo y por el modelo de transferencia de calor en hueco entubado en los bloques superiores al intervalo de inyección. El modelo de transferencia de calor en hueco entubado se propone como condición de frontera para los bloques en la cara del pozo que se encuentran en zonas superiores a la zona de inyección, y tiene en cuenta el calentamiento de dichos bloques debido al calor que se transfiere a través del revestimiento y del cemento hacia la formación.

Usando el visualizador ParaView<sup>2</sup> (Ahrens, Geveci y Law, 2005), es posible representar el modelo de simulación en las 3 dimensiones, en la [Figura 3-1](#) se presenta la malla de simulación definida en la [Tabla 3-1](#) y la condición inicial de temperatura.

**Figura 3-1:** Malla de simulación para el caso de conducción y el caso conducción-convección: **(a)** vista en planta de la malla, **(b)** vista lateral de la malla y **(c)** condición inicial de temperatura dado por el gradiente geotérmico

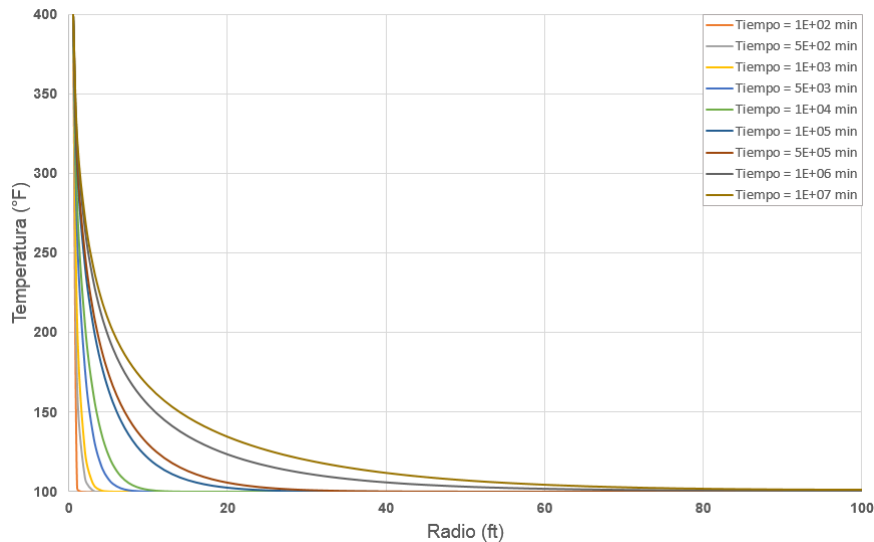


La [Figura 3-2](#) presenta los resultados del modelo para el caso en el cual el mecanismo de transferencia de calor es la conducción térmica únicamente, estos resultados están dados en términos del perfil de temperatura en la dirección radial, obtenidos en el centro del espesor del yacimiento. Estos resultados evidencian el avance del frente de calor desde el pozo y hacia el interior del yacimiento como consecuencia del aumento de temperatura en el pozo. Como se menciona en la descripción del caso, la transferencia de calor en el medio poroso ocurre exclusivamente por difusión térmica, dadas estas circunstancias el fenómeno se encuentra gobernado únicamente por las propiedades térmicas y físicas del medio poroso presentados en la [Tabla 3-2](#).

---

<sup>2</sup> ParaView es una herramienta de visualización libre y puede ser descargado en [www.paraview.org](http://www.paraview.org)

**Figura 3-2:** Perfil de temperatura para caso conductivo en dirección radial a diferentes tiempos



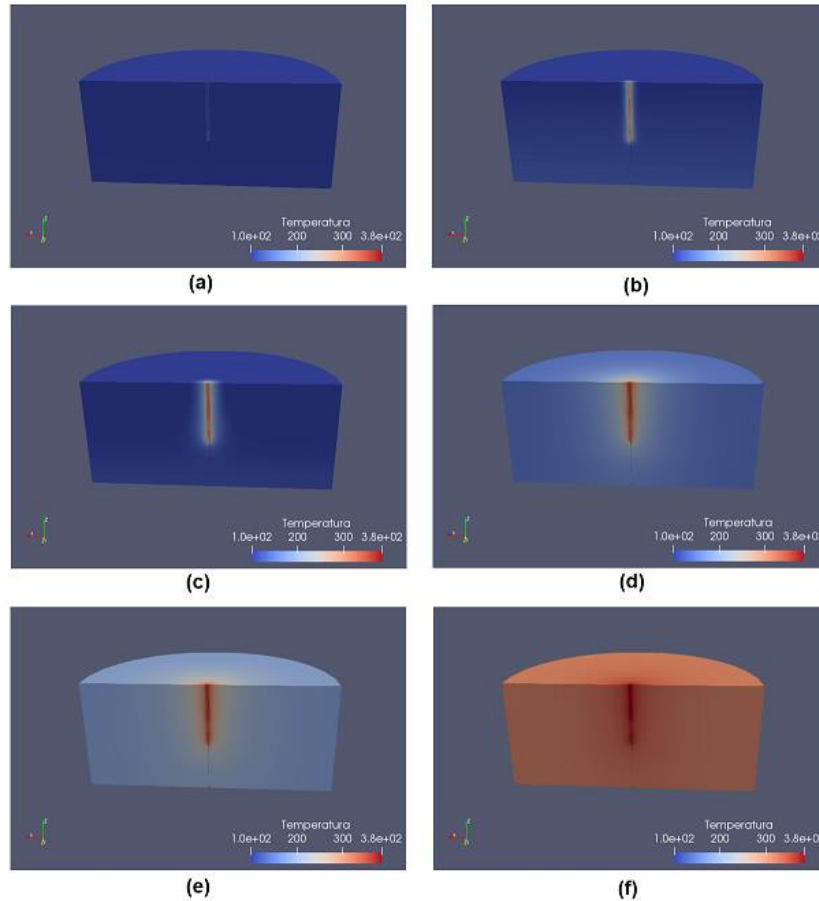
De esta gráfica se tiene que en las cercanías del pozo la temperatura es mayor y decrece en función del radio y a medida que aumenta el tiempo aumenta también la temperatura a un mismo nivel de radio. Por otro lado, se puede evidenciar que el calor se acumula en la frontera radial externa (lado derecho de la gráfica) y esto como resultado de la condición de no flujo de calor que se aplica en esta frontera, por lo cual se espera que a tiempos muy grandes, eventualmente todo el yacimiento tienda a la temperatura de inyección.

Los resultados obtenidos con el modelo desarrollado en este trabajo, que se presentan en la [Figura 3-2](#), se ajustan en buena medida al comportamiento teórico esperado para un caso en cual solo se considere la conducción como mecanismo de transferencia de calor, este comportamiento teórico lo describe Yuan, (2015) en su trabajo y se presenta en la [Figura 1-6](#). Si bien la intención no es modelar el mismo caso que presenta el autor, los resultados de la [Figura 3-2](#) si permiten hacer una comparación con el planteamiento de Yuan, (2015), dado que en ambos casos son respuesta del aumento de temperatura en un yacimiento que se calienta debido a la difusión térmica.

Por otra parte, la [Figura 3-3](#) presenta los resultados de temperatura en las tres dimensiones a diferentes tiempos, cabe aclarar que en esta figura se realiza un corte vertical, esto con el fin visibilizar el comportamiento de la temperatura en el plano que contiene el pozo. Esta figura permite visualizar la cámara de calor que se genera alrededor del pozo debido a la

conductividad térmica de la roca y del fluido, y tal como se menciona anteriormente se evidencia, que dadas las condiciones del modelamiento, todo el yacimiento tiende a la temperatura de inyección a tiempos muy grandes.

**Figura 3-3:** Resultados de temperatura en el caso conductivo 3D a diferentes tiempos: **(a)**  $1 \times 10^2$  minutos, **(b)**  $1 \times 10^4$  minutos, **(c)**  $1 \times 10^5$  minutos, **(d)**  $1 \times 10^7$  minutos, **(e)**  $2 \times 10^7$  minutos y **(f)**  $1 \times 10^8$  minutos



Con los resultados obtenidos se considera que el modelo desarrollado responde de forma satisfactoria al caso de transferencia de calor exclusivamente por conducción dentro de un medio poroso.

### 3.2 Caso acoplado difusión–advección

Una vez se verifica que el modelo responde satisfactoriamente al caso conductivo se continua con la verificación del caso que considere tanto la conducción como la convección

como mecanismos de transferencia de calor dentro del yacimiento. Para lo cual es necesario considerar, además de las propiedades térmicas del medio, un perfil de velocidades que represente el flujo de fluidos que tenga lugar en el yacimiento durante el proceso de inyección de vapor. Como se ha mencionado anteriormente, este modelo de temperatura no abarca el fenómeno de flujo de fluidos y la velocidad del fluido en el medio poroso es un dato de entrada que debe ser provisto para cada tiempo. Por lo cual se hace uso del módulo de flujo de fluidos de la plataforma de simulación GIGATHOR para obtener el perfil de velocidades correspondiente a un caso de inyección de vapor.

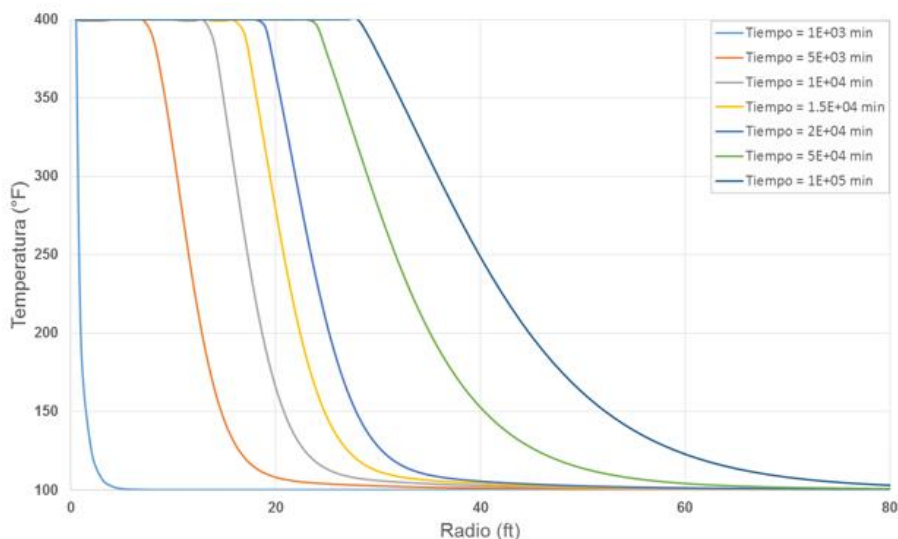
Para este modelamiento se usaron las mismas propiedades físicas y térmicas de la roca y del fluido descritas para el caso conductivo en [Tabla 3-2](#) y se agrega la información requerida para el modelamiento de flujo de fluidos. En la [Tabla 3-3](#) se presenta el valor de presión inicial del yacimiento, la permeabilidad de la roca y la condición de inyección dada por el caudal. Así mismo el modelamiento del caso acoplado de conducción-convección usa el mismo modelo físico (malla de simulación y condiciones de frontera) y la condición inicial de temperatura descritos en la [Tabla 3-1](#) y presentados gráficamente en la [Figura 3-1](#).

**Tabla 3-3:** Parámetros de simulación de flujo de fluidos

Parámetro	Valor
Presión inicial [psi]	1000
Permeabilidad de la roca [mD]	1000
Caudal de inyección [bbl/dia.ft]	36

La [Figura 3-4](#) presenta los resultados de temperatura respecto al radio para diferentes tiempos, para el caso en el cual la conducción y convección están presentes como mecanismos de transferencia de calor. Es importante resaltar que estos resultados se obtienen para el modelo en tres dimensiones, en tal sentido la velocidad del fluido dentro del medio poroso no es constante respecto al tiempo ni respecto al espacio, y está dada por el vector cuyas componentes se calculan a partir de la ley de Darcy descrita en las ecuaciones [\(24\)](#), [\(25\)](#) y [\(26\)](#). Para el modelamiento se usa un delta de tiempo constante de 1000 minutos, en la gráfica se presentan los tiempos de simulación 1000 (0.7 días), 5000 (3.5 días), 10000 (7 días), 15000 (10.4 días), 20000 (13.8 días), 50000 (34.7 días) y 100000 minutos (69.4 días).

**Figura 3-4:** Resultados de temperatura en dirección radial para el caso conducción-convección a diferentes tiempos.

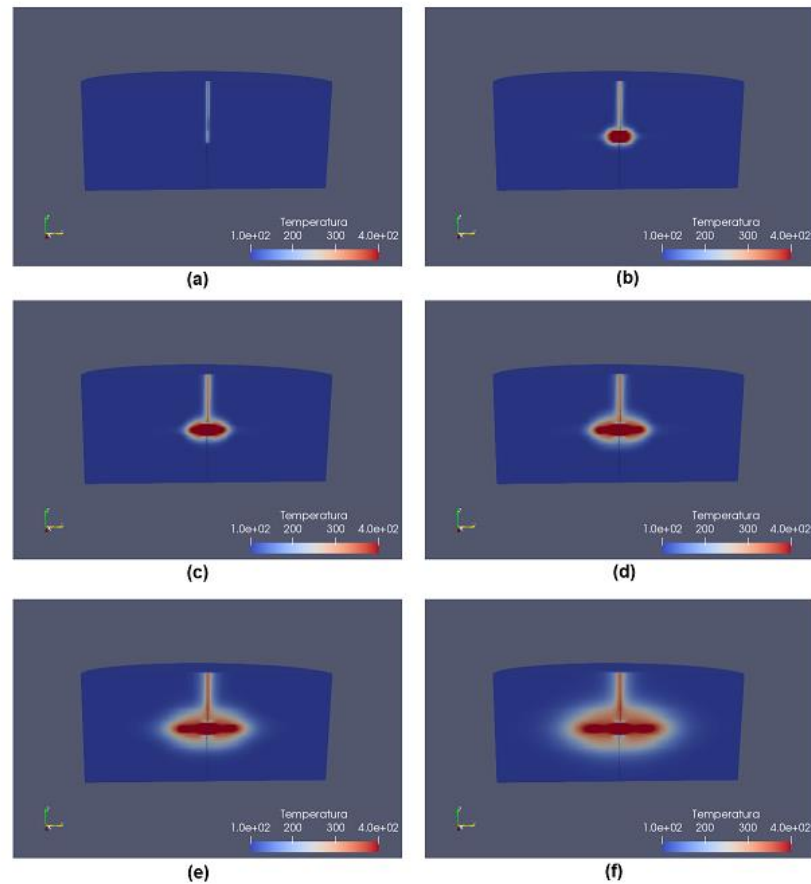


Los perfiles de temperatura de la [Figura 3-4](#) representan el comportamiento de temperatura en dirección radial de un medio poroso que está siendo calentado debido a la conducción y la convección térmica y en el cual el mecanismo de transferencia de calor dominante es la convección. Este planteamiento surge a partir de comparar la [Figura 3-4](#) con la que presenta Yuan (2015) ([Figura 1-7](#)), para un medio poroso en el cual domina la convección como mecanismo de transferencia de calor.

La [Figura 3-5](#) presenta los resultados de temperatura para el caso de conducción-convección para diferentes tiempos de simulación, si bien es una gráfica en tres dimensiones, se ha hecho un corte paralelo al eje radial con el fin de evidenciar lo que pasa en un plano radial-vertical que contenga el pozo. De esta forma es posible ver cómo se va formando la cámara de calor alrededor del pozo en la zona abierta a flujo como respuesta a la inyección de fluido caliente dentro del yacimiento. También es posible comparar lo que pasa en el pozo en la zona abierta a flujo y en la zona superior a esta, recordando que la zona superior se calienta debido a la transferencia de calor por conducción a través del revestimiento y del cemento, si bien se nota que la temperatura aumenta en los alrededores del pozo en esta zona, la convección que se da en la zona abierta impacta en mayor medida la temperatura del yacimiento.

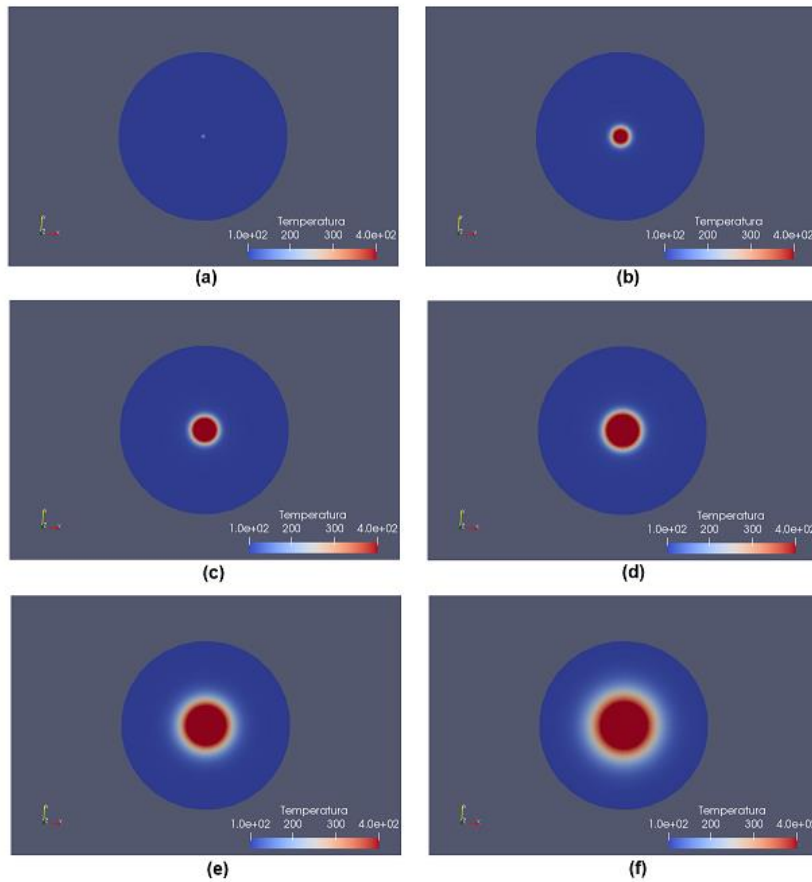


**Figura 3-5:** Resultados de temperatura para el caso convección-conducción, plano radial-vertical para diferentes tiempos: **(a)**  $1 \times 10^3$  minutos, **(b)**  $5 \times 10^3$  minutos, **(c)**  $1 \times 10^4$  minutos, **(d)**  $2 \times 10^4$  minutos, **(e)**  $5 \times 10^4$  minutos y **(f)**  $1 \times 10^5$  minutos



Por otro lado, la [Figura 3-6](#) presenta los resultados de temperatura para el caso conducción-convección en un plano radial tangencial, el corte se hizo en la mitad de la zona de inyección, la cual a su vez es la mitad del modelo físico. De esta gráfica es posible evidenciar la simetría en la dirección tangencial del fenómeno, esta simetría se debe principalmente que se trata de un caso de hueco abierto y por lo tanto no se tienen zonas diferenciadas de inyección en la dirección tangencial. Otra razón por la cual se tiene este comportamiento simétrico es una respuesta a la condición de frontera usada para la frontera radial externa, en el caso del flujo de fluidos se impuso una condición de presión constante y en el de temperatura una condición de no flujo en esta frontera.

**Figura 3-6:** Resultados de temperatura para el caso convección-conducción, plano radial-tangencial para diferentes tiempos: **(a)**  $1 \times 10^3$  minutos, **(b)**  $5 \times 10^3$  minutos, **(c)**  $1 \times 10^4$  minutos, **(d)**  $2 \times 10^4$  minutos, **(e)**  $5 \times 10^4$  minutos y **(f)**  $1 \times 10^5$  minutos



En general, las comparaciones realizadas entre los resultados obtenidos para cada caso (caso conductivo y del caso acoplado conductivo-convectivo) y los perfiles teóricos permiten establecer que el modelo desarrollado en este trabajo se encuentra en la capacidad de representar tanto el fenómeno de la conducción únicamente como el fenómeno acoplado conducción-convección y que estos resultados son gráficamente coherentes con los esperados para cada uno de los casos. De tal forma que se verifica que los resultados del modelo responden satisfactoriamente a lo que plantea la teoría respecto al tipo de gráficos que representan un perfil de temperatura dominado por la conducción térmica y un perfil de temperatura dominado por la convección, dentro de un medio poroso.

### 3.3 Validación de los resultados del caso acoplado difusión–advección

Para la validación del modelo se elige un modelo analítico desarrollado por Yuan (2015) que permite calcular el valor de la temperatura en dirección radial durante procesos no-isotérmicos como la inyección de vapor en yacimientos de crudo pesado. La principal razón por la cual se elige este modelo para validación es que este es desarrollado en coordenadas cilíndricas y considera los fenómenos de difusión y de advección como los mecanismos de transferencia de calor dentro de un medio poroso, características que comparte con el modelo numérico que se desarrolla en este trabajo. También es importante mencionar que en los dos modelos se supone equilibrio térmico instantáneo, es decir que no se calcula un valor de temperatura para el sólido y otro para el fluido, sino que se considera en un instante dado estas temperaturas son la misma.

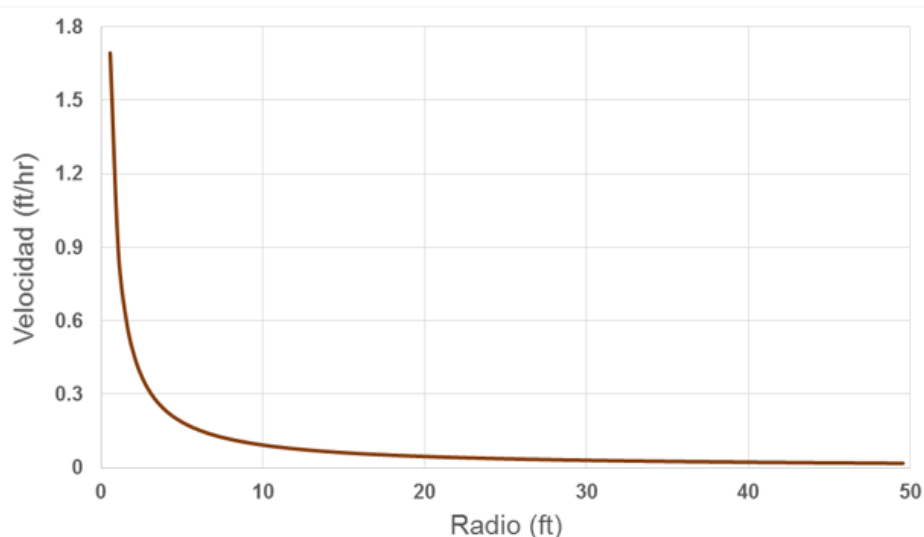
Ambos modelos (numérico y analítico) se diferencian principalmente en dos aspectos: el primero es que el modelo numérico es en tres dimensiones, mientras que el modelo analítico se desarrolla solo para la dirección radial. La segunda diferencia es que el modelo analítico considera que la velocidad del flujo de fluidos cambia con el radio, pero permanece constante con el tiempo, por otra parte el modelo numérico admite que la velocidad cambia tanto espacial como temporalmente. Estas diferencias hacen que la validación se pueda hacer solo en la dirección radial.

La forma de superar la diferencia de los modelos respecto al perfil de velocidades es implementando en el modelo numérico un perfil de velocidad que: i) solo considere la dirección radial de flujo de fluidos dentro del medio poroso, haciendo que la derivada de la velocidad en las direcciones tangencial y vertical sean cero, es decir la velocidad de flujo cambia exclusivamente en dirección radial, y ii) la componente radial de la velocidad sea calculada a partir de la definición de velocidad, en donde se relaciona el caudal de flujo con el área de sección transversal asociada a cada radio. Este perfil de velocidad debe ser constante con el tiempo. La Ecuación (27) define la distribución de velocidad en dirección radial:

$$v_r = \frac{q}{r\Delta\theta\Delta z} \quad (27)$$

La [Figura 3-7](#) presenta gráficamente el comportamiento de velocidad dado por la Ecuación (27) para un caudal constante de 12 bbl/día.ft. Además del valor del caudal constante, Yuan (2015) presenta las propiedades térmicas del roca, las propiedades térmicas del fluido, la temperatura inicial y la temperatura de inyección que usa para obtener el perfil de temperatura a partir de su solución analítica, estos datos se resumen en la [Tabla 3-4](#). En aras de mantener la similitud en los modelos, estas características son los datos de entrada tanto en el modelamiento numérico como en el modelamiento analítico.

**Figura 3-7:** Perfil de velocidad radial a partir de un caudal constante = 12 bbl/día.ft.



**Tabla 3-4:** Parámetros de simulación – caso de validación. (Yuan, 2015)

Parámetro	Valor
Espesor de inyección [ft]	41
Porosidad	0.3
Conductividad térmica bulk [BTU/hr.ft.°F]	1.21
Capacidad calorífica volumétrica del fluido [BTU/ft <sup>3</sup> .°F]	41
Capacidad calorífica volumétrica del sólido [BTU/ft <sup>3</sup> .°F]	21
Tasa de inyección [bbl/día]	500
Temperatura inicial del yacimiento [°F]	93
Temperatura de inyección [°F]	400
Radio del pozo [ft]	0.292

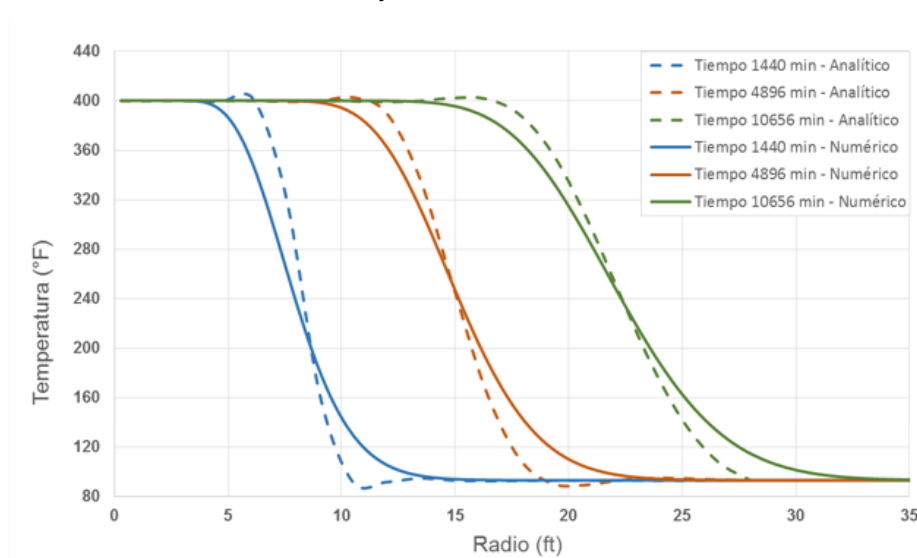
Como información adicional para el modelamiento numérico se usaron los valores descritos en la [Tabla 3-5](#), para la malla de simulación.

**Tabla 3-5:** Parámetros de la malla de simulación – caso de validación

Parámetro	Valor
Radio externo [ft]	100
Bloques en r	100
Bloques en $\theta$	25
Bloques en z	60

La [Figura 3-8](#) presenta una comparación de los resultados de temperatura en dirección radial de los modelos analítico y numérico a tres tiempos diferentes: 1440 minutos (1 día), 4896 minutos (3.4 días) y 10656 minutos (7.4 días). Las líneas punteadas representan los resultados del modelo analítico y las líneas continuas los del modelo numérico. Los resultados del modelo analítico se obtienen aplicando el algoritmo de Stehfest en MATLAB (Yuan, 2015) y los resultados del modelo numérico se obtienen integrando el modelo de temperatura desarrollado en este trabajo en el simulador GIGATHOR.

**Figura 3-8:** Comparación de resultados de temperatura en dirección radial del modelo analítico y del modelo numérico



En la [Figura 3-8](#) es posible apreciar un importante acercamiento de los perfiles de temperatura en un medio poroso, obtenidos usando un modelo analítico y un modelo

numérico para diferentes tiempos de simulación. Ambos modelos parten de la suposición que el medio se está calentando debido principalmente al flujo de un fluido caliente que es inyectado por el pozo y fluye en dirección radial hacia la frontera externa del yacimiento. Los modelos consideran que la difusión térmica, controlada por las propiedades térmicas de la roca y del fluido, también aporta al calentamiento del medio pero en menor medida respecto a la convección. A partir de estos resultados, es posible calcular el error cuadrático medio de la respuesta del modelo numérico respecto al valor teórico, dado por el modelo analítico, para cada tiempo de simulación, así para el tiempo de 1440 minutos el error obtenido es de 6.04%, para el tiempo de 4896 minutos en error es de 6.22% y para el tiempo de 10656 el error es de 5.57%. Evidentemente las principales fuentes de error se encuentran al inicio y al final del transiente de temperatura de la [Figura 3-8](#) y se plantea que se pueden deber a falta de precisión en la aplicación del modelo analítico. Aun así, estos valores permiten considerar que modelo desarrollado es validado al menos de forma preliminar, teniendo en cuenta que la validación se llevó a cabo para un flujo de fluidos en dirección radial.

## **4. Casos de estudio de inyección cíclica e inyección continua de vapor**

Una vez se considera que el modelo de temperatura ha superado una etapa de verificación de los resultados y de validación preliminar, se implementa un caso de inyección cíclica de vapor y un caso de inyección continua de vapor para un arreglo 1-1 usando datos de campo y haciendo uso de la plataforma de simulación GIGATHOR, este simulador permite representar el comportamiento del flujo de fluidos dentro del yacimiento durante las técnicas de recobro térmico inyección cíclica e inyección continua de vapor, de tal forma que el módulo de temperatura usa esta información del flujo de fluidos como datos de entrada y resuelve la temperatura. El módulo de presión recibe la distribución de temperatura calculada y con ello se obtiene una nueva distribución de velocidad para un nuevo tiempo, y el ciclo se repite para cada tiempo de simulación.

Además, los mismos casos que se modelan en GIGATHOR también son implementados en el módulo STARS del simulador CMG<sup>3</sup>, para posteriormente comparar gráficamente los resultados de temperatura en ambos simuladores; estas comparaciones aportan elementos de validación al modelo desarrollado en este trabajo. Estos elementos corresponden a una validación preliminar ya que solo se compara la respuesta de la temperatura de ambos simuladores y una validación más exhaustiva requiere contemplar otras variables de análisis.

Se ha elegido STARS de CMG, ya que al igual que el modelo de temperatura de GIGATHOR, considera que el calor dentro de un medio poroso se transfiere debido a los

---

<sup>3</sup> CMG – Computer Modelling Group Ltd. Es una herramienta comercial de simulación de yacimientos, integrada por diferentes módulos de simulación. El módulo STARS ha sido diseñado para modelar procesos de recobro térmico. <https://www.cmgl.ca/>.

mecanismos de conducción y convección, además permite tener un modelo cilíndrico en 3 dimensiones y calcular la temperatura en cada uno de los bloques de la malla de simulación. Otra característica importante que comparten ambos modelos es suponer equilibrio térmico instantáneo. Finalmente, no menos importante, CMG es desarrollado usando el método de diferencias finitas, al igual que el módulo de temperatura que se presenta en este trabajo, esta característica en particular acerca en gran medida la forma como ambos simuladores (CMG y GIGATHOR) abordan el problema del cálculo de la temperatura en un medio poroso.

Por otro lado, es importante resaltar que el simulador CMG tiene la posibilidad de considerar las diferentes fases y los diferentes tipos de fluidos que tienen lugar en una inyección de vapor, tal es el caso precisamente de poder considerar el vapor como el fluido de inyección y que dentro del yacimiento parte del vapor se condensa debido a la interacción con el crudo. Para mitigar el hecho que el simulador GIGATHOR sea monofásico se considera en el modelamiento en CMG un solo tipo de fluido, en este caso crudo. Así mismo, CMG tiene la posibilidad de que las propiedades físicas y térmicas del fluido varíen con la temperatura, esta opción se desactiva teniendo en cuenta que el caso de estudio se corre en el simulador GIGATHOR sin estas consideraciones.

## **4.1 Caso de estudio – CSS**

La inyección cíclica de vapor es uno de los casos de recobro térmico para los cuales ha sido desarrollado el modelo de temperatura que se presenta en este trabajo, la estrategia que se ha elegido es aplicar un modelo de temperatura basado en la ecuación advección-difusión a un modelo físico que represente un yacimiento que está siendo producido usando la técnica de recobro térmico CSS. Este modelo físico se describe de forma detallada en la Sección 2.1.2, y en la Sección A2.2 del Apéndice A se implementan las condiciones de frontera descritas para el modelamiento de esta técnica de recobro en la ecuación advección-difusión discretizada usando el método numérico de las diferencias finitas.



Con el fin de analizar la respuesta en temperatura del modelo presentado en el modelamiento de un caso de inyección cíclica de vapor, se implementa en el simulador GIGATHOR un caso de campo encontrado en la literatura. El perfil de velocidad en 3D que entrega el simulador GIGATHOR tiempo a tiempo se convierte, junto a las propiedades térmicas de la roca y del fluido, en los datos de entrada del módulo de temperatura. Así mismo se implementa en CMG el mismo caso de campo usando una malla cilíndrica, con el fin de obtener la respuesta de temperatura de este simulador comercial y compararla gráficamente con la obtenida con el simulador GIGATHOR. Se presenta entonces un gráfico que contiene los perfiles radiales de temperatura obtenidos con ambos simuladores para dos ciclos completos de inyección de vapor. Así mismo, se presentan gráficos 3D por separado para cada simulador, uno para un plano radial-vertical y otro para un plano radial-tangencial.

Si bien se ha procurado que el caso de inyección cíclica se modele en ambos simuladores de la forma más similar posible, existe una diferencia en la implementación de la condición de frontera en el pozo durante la etapa de producción en CMG, respecto a esta misma condición en GIGATHOR, que debe ser tenida en cuenta para la comparación de los resultados de ambos simuladores. Como se menciona en la Sección 2.1.2, en la zona abierta a flujo durante la etapa de producción en GIGATHOR, la condición de frontera se establece a partir de la temperatura del bloque frontera en el tiempo anterior, mientras que la estrategia de CMG es considerar la pérdida de temperatura durante la etapa de producción en el término de fuentes y sumideros en los bloques que se han definido como el pozo. Durante las etapas de inyección y remojo la condición de frontera en la zona de pozo abierta a flujo se rige por la temperatura de inyección y por la condición de no flujo respectivamente, por lo que se espera que en estas etapas el comportamiento de la temperatura en esta frontera sea similar en ambos simuladores.

Gontijo y Aziz (1984) desarrollaron un modelo analítico para estimar la respuesta en producción de un pozo que es estimulado con la técnica de inyección cíclica, para lo cual asumen que la cámara de vapor que tiene lugar dentro del yacimiento adopta una forma cónica, y el volumen de dicha cámara es función del caudal de vapor inyectado en cada ciclo. Si bien este modelo está orientado a predecir el comportamiento de la producción del pozo como respuesta de una zona calentada en cada ciclo, el artículo presenta una valiosa información de condiciones operacionales de la técnica de inyección cíclica, que

permite establecer un caso de estudio para estimar la temperatura dentro del yacimiento durante la aplicación de esta técnica de recobro térmico. En la [Tabla 4-1](#) se presentan los datos de entrada usados para el modelamiento del caso de inyección cíclica, generados a partir del caso de campo que presentan Gontijo y Aziz (1984) en su trabajo.

**Tabla 4-1:** Parámetros de simulación - caso CSS. (Gontijo & Aziz, 1984)

<b>Condiciones iniciales</b>	
Temperatura inicial del yacimiento [°F]	110
Profundidad de referencia [ft]	2080
Presión inicial del yacimiento @ profundidad. ref.[psi]	800
<b>Propiedades petrofísicas y térmicas</b>	
Permeabilidad del yacimiento [mD]	1500
Porosidad [adim]	0.32
Densidad de la roca [lb/ft <sup>3</sup> ]	156
Densidad del fluido [lb/ft <sup>3</sup> ]	60
Capacidad calorífica de la roca [BTU/ lb.°F]	0.32
Capacidad calorífica del fluido	0.81
Conductividad térmica de la roca [BTU/hr.ft.°F]	1
Conductividad térmica del fluido [BTU/hr.ft.°F]	1
<b>Parámetros de la malla</b>	
Radio del pozo [ft]	0.3
Radio externo [ft]	90.3
Espesor del yacimiento [ft]	160
Intervalo de inyección [ft]	40
Número de bloques en dirección radial	90
Número de bloques en dirección tangencial	25
Número de bloques en dirección vertical	160

Además, la [Tabla 4-2](#) presenta la información de inyección/producción de dos de los ciclos del caso de campo, esta información completa los datos de entrada para la modelamiento de esta técnica de recobro térmico. La condición inicial de temperatura para el modelamiento del caso de inyección cíclica de vapor en el simulador GIGATHOR, está dada por la temperatura inicial del yacimiento en la profundidad de referencia ([Tabla 4-1](#))

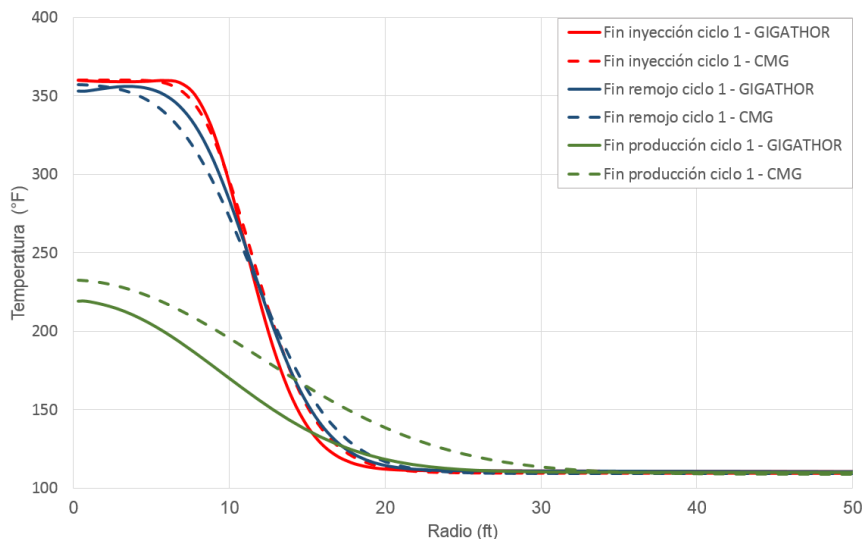
y por el gradiente geotérmico promedio de  $0.017 \text{ } ^\circ\text{F}/\text{ft}$  tal como se describe en el Apéndice B.

**Tabla 4-2:** Condiciones operacionales - caso CSS. (Gontijo & Aziz, 1984).

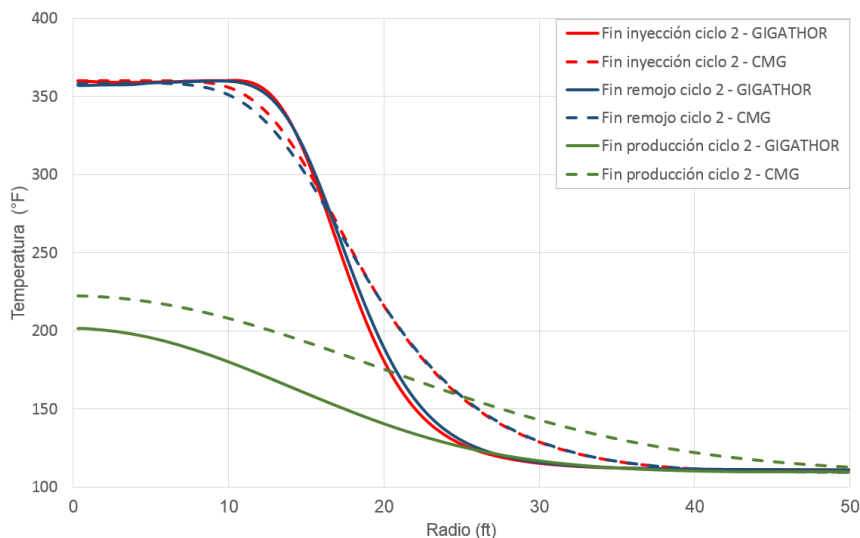
Condición operacional	Ciclo	
	1°	2°
Caudal de inyección [bbl/día]	647	905
Tiempo de inyección [día]	6	9
Tiempo de remojo [día]	5	2
Temperatura de inyección [ $^\circ\text{F}$ ]	360	360
Tiempo de producción [día]	55	146

La [Figura 4-1](#) y la [Figura 4-2](#) presentan los perfiles de temperatura obtenidos a partir del modelamiento del primer ciclo y del segundo ciclo del caso de inyección cíclica de vapor respectivamente. Cabe destacar que las líneas discontinuas representan los perfiles generados a partir de los resultados de temperatura del simulador CMG, y que las líneas continuas son los perfiles de temperatura generados con los resultados del simulador GIGATHOR. Además, es importante mencionar que los diferentes perfiles de temperatura corresponden a diferentes momentos del modelamiento, de forma específica corresponden al final de cada una de las etapas del ciclo de inyección: inyección, remojo y producción.

**Figura 4-1:** Resultados de temperatura de los simuladores GIGATHOR y CMG en dirección radial obtenidos para las tres etapas del primer ciclo de inyección.



**Figura 4-2:** Resultados de temperatura de los simuladores GIGATHOR y CMG en dirección radial obtenidos para las tres etapas del segundo ciclo de inyección.



Lo que ocurre en la [Figura 4-1](#) es que durante la etapa de inyección el frente de calor avanza desde el pozo y hacia el interior del yacimiento llegando al final de la etapa a un radio promedio cercano a los 15 ft. Posteriormente, ocurre el cierre del pozo (remojado) y la temperatura, si bien disminuye un poco en la primera parte del perfil y aumenta un poco en la parte final del perfil, se puede considerar que mantiene el nivel alcanzado durante la etapa de inyección. Este comportamiento se presenta igualmente para los resultados de ambos simuladores. Por otra parte, durante la etapa de producción se presenta una disminución de temperatura en las cercanías del pozo, esta disminución de temperatura en los resultados de GIGATHOR es de alrededor de 160°F mientras que en CMG es cercana a los 130°F. De los resultados presentados en la [Figura 4-1](#) es posible comentar que en las etapas de inyección y remojado (líneas rojas y azules) el comportamiento de la temperatura es casi idéntico entre los resultados de ambos simuladores, CMG y GIGATHOR, mientras que en la etapa de producción se presenta una diferencia considerable entre los perfiles de temperatura, cercana a 30°F en la zona más cercana al pozo.

Una vez finaliza la etapa de producción del primer ciclo, inmediatamente se comienza la etapa de inyección del segundo ciclo, los perfiles de la [Figura 4-2](#) representa el

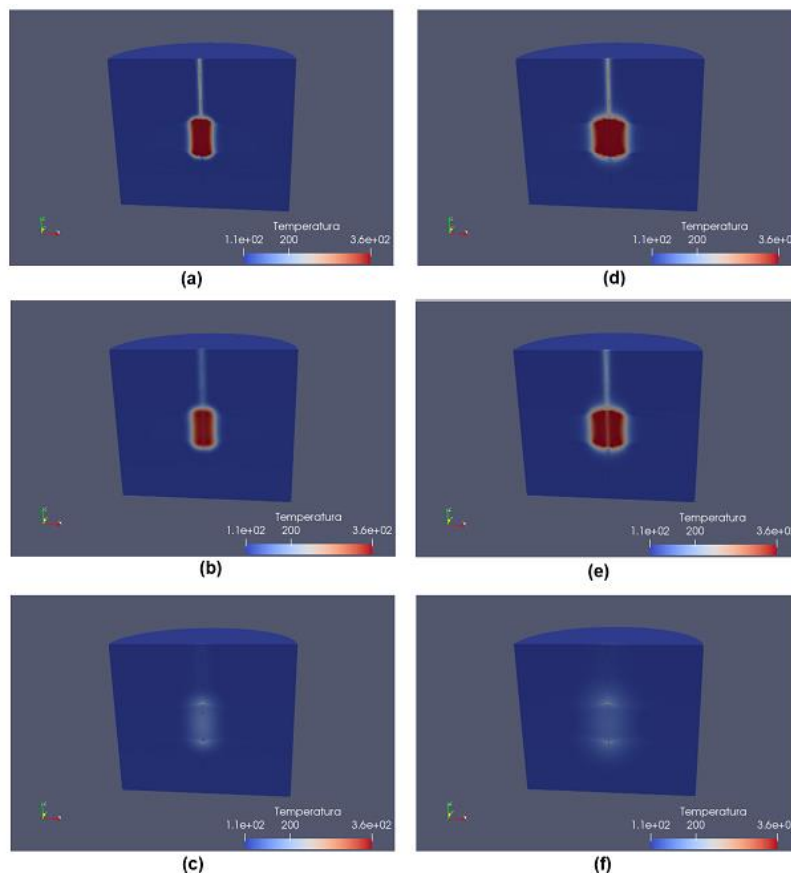
comportamiento de la temperatura durante este segundo ciclo. De esta gráfica es posible comentar que los perfiles de temperatura al final de la etapa de inyección (líneas rojas) si bien son cercanos, no lo son al mismo nivel que en el primer ciclo, la principal diferencia se presenta cuando el perfil se acerca a la temperatura inicial del yacimiento, los resultados de CMG (línea discontinua) generan un perfil con menor pendiente que los resultados de GIGATHOR (línea continua), esta diferencia posiblemente sea consecuencia de que el remanente de temperatura al final del primer ciclo es mayor en los resultados de CMG que los de GIGATHOR. Aun así, los perfiles siguen estando muy cercanos. Respecto a la etapa de remojo (líneas azules) se puede considerar que la temperatura se mantiene respecto al nivel alcanzado durante la inyección para ambos simuladores. Finalmente, durante la producción (líneas verdes) el comportamiento de la temperatura es similar al del primer ciclo en esta misma etapa, la temperatura en la cara del pozo disminuye drásticamente, y esta disminución se presenta en mayor medida en los resultados de GIGATHOR. Cabe resaltar que en ambos ciclos durante la etapa de producción, la temperatura en el yacimiento no regresa al valor inicial, este es un comportamiento que se esperaba se diera de esa forma.

Como se menciona en la descripción del caso, existe una diferencia en la forma de cómo se define la condición de frontera radial interna durante la etapa de producción en ambos simuladores. Esta diferencia precisamente explica que la respuesta de la temperatura durante la etapa de producción de ambos simuladores se encuentren alejadas (líneas verdes de la [Figura 4-1](#) y de la [Figura 4-2](#)). De hecho, es posible relacionar este comportamiento con que en el segundo ciclo los perfiles de temperatura para etapa de inyección se encuentren más alejados el uno del otro, que los perfiles al final de la misma etapa en el primer ciclo. Esto supondría que la condición de frontera que se ha establecido en el simulador GIGATHOR en la zona del pozo abierta a flujo durante la etapa de producción estaría subestimando la temperatura del medio poroso durante esta etapa y consecuentemente en los ciclos de inyección posteriores.

Por otra parte, la [Figura 4-3](#) y la [Figura 4-4](#) presentan los resultados de temperatura en 3D del simulador GIGATHOR y de CMG respectivamente, por temas de visualización se ha realizado un corte vertical, permitiendo tener una vista en un plano radial-vertical de todo el yacimiento. En ambas figuras, cada gráfica representa el final de cada una etapas de los dos ciclos de inyección, en ellas es posible apreciar cómo se genera inicialmente la

cámara de calor durante la etapa de inyección, se mantiene durante el remojo y finalmente se desvanece durante la etapa de producción, para luego repetir el ciclo, pero esta vez generando una cámara de calor más grande que la del primer ciclo. El hecho de que en el segundo ciclo la cámara de calor sea de mayor tamaño que la del primer ciclo se debe principalmente a que tanto el caudal de inyección como el tiempo de inyección para el segundo ciclo son más mayores que para el primer ciclo, también tiene que ver, pero en menor medida, el hecho que tras el primer ciclo se tenga en el yacimiento un remanente de temperatura que hace que este no se encuentre a la temperatura inicial.

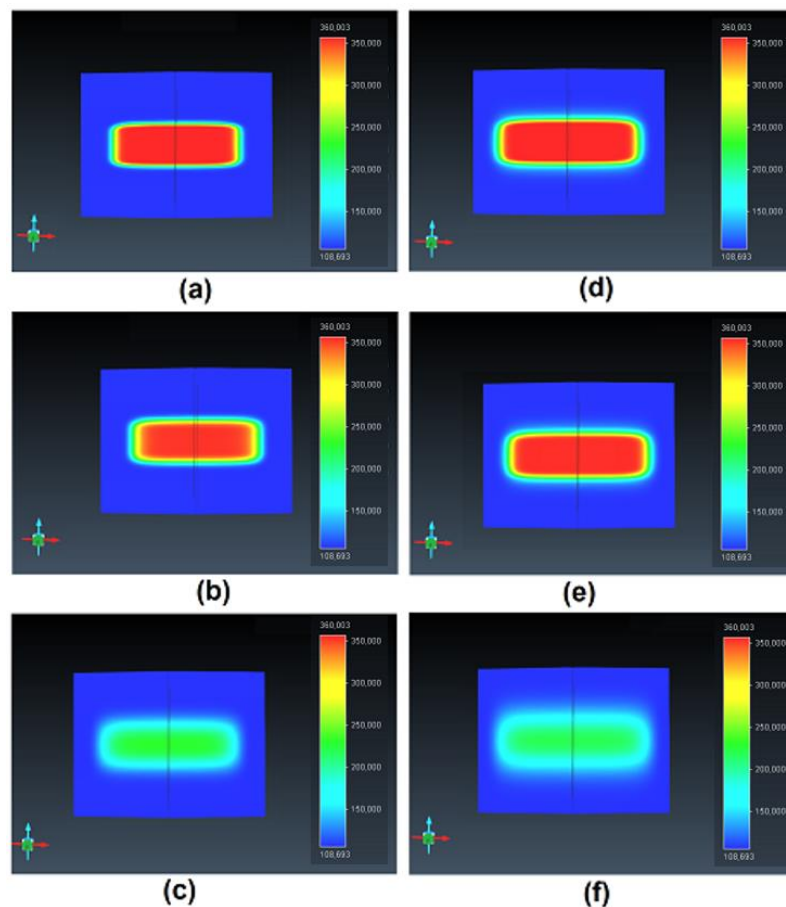
**Figura 4-3:** Resultados de temperatura en GIGATHOR en 3D para el caso CSS – vista lateral a diferentes tiempos: **(a)** Fin de inyección – 1° ciclo. **(b)** Fin del remojo – 1° ciclo. **(c)** Fin de producción – 1° ciclo. **(d)** Fin de inyección – 2° ciclo. **(e)** Fin del remojo – 2° ciclo. **(f)** Fin de producción – 2° ciclo.



Al hacer una comparación entre las dos figuras, es posible identificar que la cámara de calor generada a partir de los resultados de temperatura del simulador GIGATHOR ([Figura](#)

[4-3](#)) es más redondeada que la cámara generada con los resultados de CMG ([Figura 4-4](#)), la cual a su vez tiene una forma más rectangular. Cabe mencionar que estas gráficas deben ser vistas en contexto con los perfiles presentados en la [Figura 4-1](#) y la [Figura 4-2](#) y con las vistas en planta de los gráficos 3D que se presentan en la [Figura 4-5](#) y la [Figura 4-6](#).

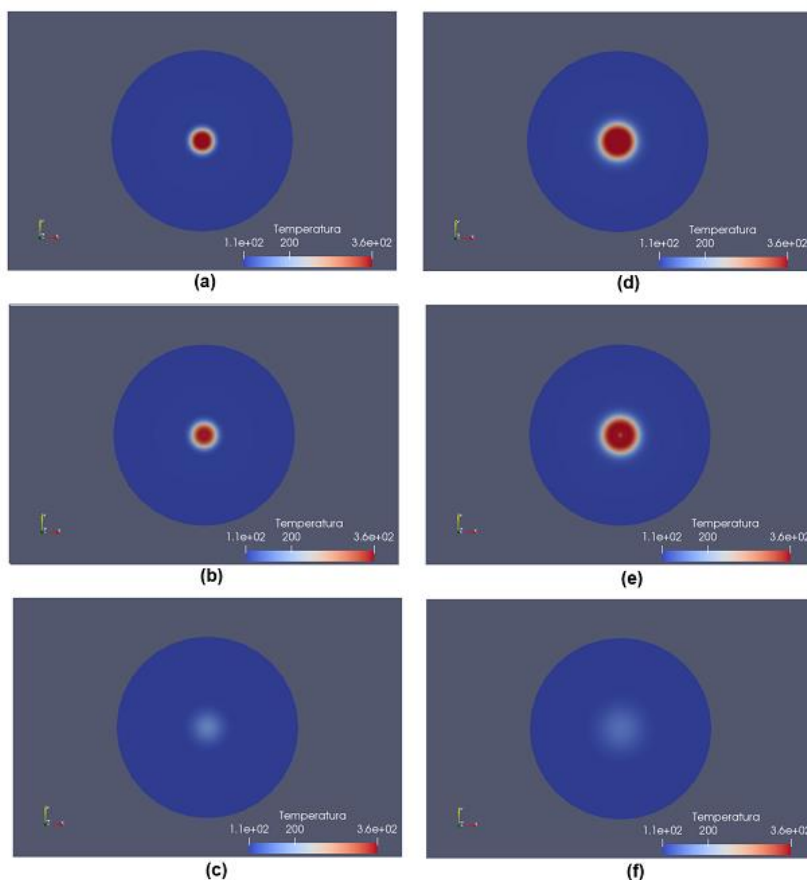
**Figura 4-4:** Resultados de temperatura en CMG en 3D para el caso CSS – vista lateral a diferentes tiempos: **(a)** Fin de inyección – 1° ciclo. **(b)** Fin del remojo – 1° ciclo. **(c)** Fin de producción – 1° ciclo. **(d)** Fin de inyección – 2° ciclo. **(e)** Fin del remojo – 2° ciclo. **(f)** Fin de producción – 2° ciclo.



Las últimas gráficas que se presentan para el caso de inyección cíclica de vapor son la [Figura 4-5](#) y la [Figura 4-6](#), las cuales representan las vistas en planta de los resultados en 3D del simulador GIGATHOR y del simulador CMG respectivamente. Estas gráficas permiten tener en un plano radial-tangencial el comportamiento de la temperatura durante cada una de las etapas de los dos ciclos de inyección modelados. Al igual que las figuras

anteriores es posible visualizar la generación de la cámara de calor durante la etapa de inyección, como se mantiene durante la etapa de remojo, y finalmente su desvanecimiento como consecuencia de la etapa de producción.

**Figura 4-5:** Resultados de temperatura en GIGATHOR en 3D para el caso CSS –vista en planta a diferentes tiempos: **(a)** Fin de inyección – 1° ciclo. **(b)** Fin del remojo – 1° ciclo. **(c)** Fin de producción – 1° ciclo. **(d)** Fin de inyección – 2° ciclo. **(e)** Fin del remojo – 2° ciclo. **(f)** Fin de producción – 2° ciclo.

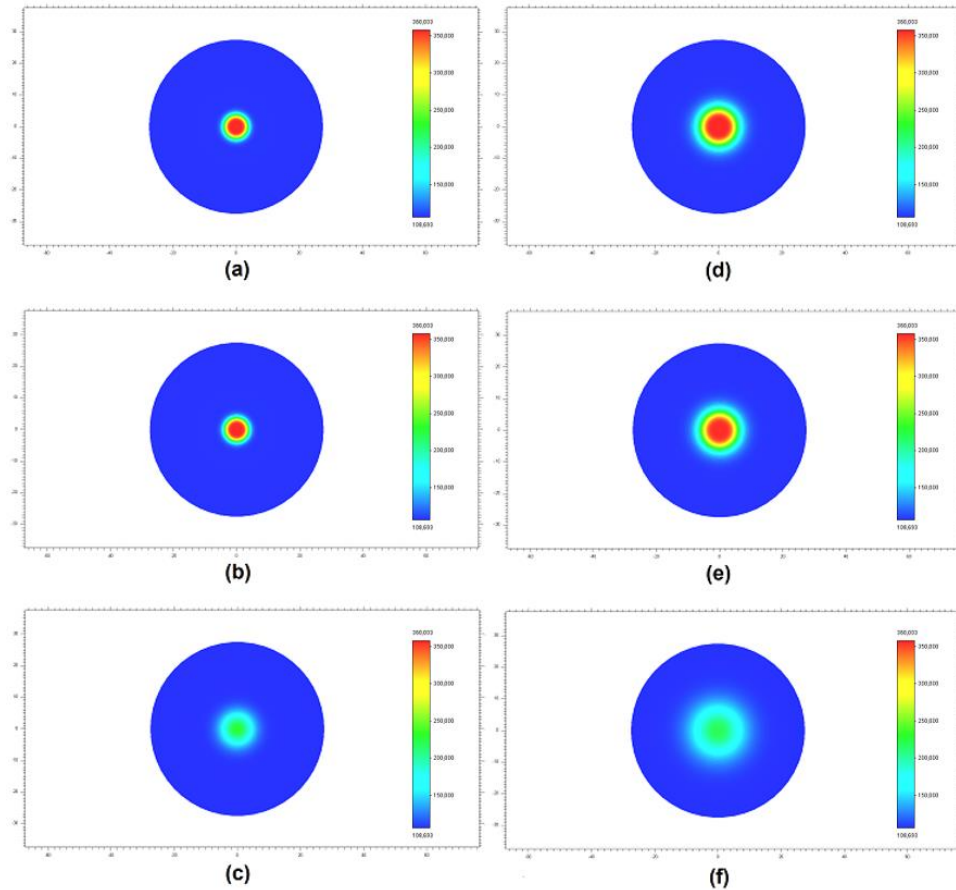


En general, se tiene que el comportamiento de ambas figuras es similar principalmente en las gráficas que representan el final de las etapas de inyección y remojo en los dos ciclos, pero en las gráficas (c) y (f) que representan el final de la etapa de producción en ambas figuras se puede apreciar una diferencia de temperatura en la zona más cercana al pozo. Este comportamiento se menciona en la descripción de los perfiles radiales y se debe a que durante la producción los resultados del simulador GIGATHOR presentan una mayor disminución de la temperatura que los resultados de CMG, como respuesta a la condición



de frontera implementada en el simulador GIGATHOR en la zona del pozo abierta a flujo durante la etapa de producción.

**Figura 4-6:** Resultados de temperatura en CMG en 3D para el caso CSS –vista en planta a diferentes tiempos: **(a)** Fin de inyección – 1° ciclo. **(b)** Fin del remojo – 1° ciclo. **(c)** Fin de producción – 1° ciclo. **(d)** Fin de inyección – 2° ciclo. **(e)** Fin del remojo – 2° ciclo. **(f)** Fin de producción – 2° ciclo.



En general se considera que los resultados obtenidos con el modelo de temperatura desarrollado en este trabajo son buenos respecto a los resultados obtenidos para el mismo caso de inyección cíclica en CMG. Se encuentra que la principal diferencia entre los resultados se da durante la etapa de producción y se debe en mayor medida a las diferentes estrategias de condiciones de borde implementadas en cada modelo durante la etapa de producción.

## 4.2 Caso de estudio – Inyección continua de vapor

Usando datos del caso de campo presentado por Mozaffari, *et al.*(2013), se diseña un caso de estudio de inyección continua uno a uno, es decir con un pozo inyector y un pozo productor, y se implementa en el simulador GIGATHOR con el fin de obtener la distribución de la temperatura en cada uno de los bloques de la malla de simulación a diferentes tiempos, como respuesta al flujo de fluidos y a las propiedades térmicas propios del caso de estudio implementado. Este mismo caso se implementa en el simulador CMG, igualmente usando una malla cilíndrica con el fin de obtener la distribución de temperatura en cada bloque de la malla para este caso específico. Es posible generar a partir de los resultados de cada simulador perfiles radiales de temperatura para comparar ambas respuestas, se elige el perfil radial ya que en esta dirección es en la cual se hace más evidente el cambio de temperatura durante el proceso de inyección de calor. Dado que ambos simuladores son en 3D, también se pueden presentar los gráficos que permiten visualizar la generación de la cámara de calor a partir de los resultados de cada simulador, estas gráficas se presentan de forma separada.

Para la implementación del caso de inyección continua de vapor 1-1 en el simulador GIGATHOR se han definido en la Sección 2.1.2 el modelo físico y las condiciones de frontera específicas para este caso. Por otra parte, con la intención de alinear los modelos respecto al caso de inyección continua, se define en CMG un pozo ubicado en la frontera radial externa. En este punto es importante mencionar que dadas las características de CMG es posible hacer un modelamiento de más de un pozo, un *sector model* por ejemplo, mientras que GIGATHOR se ha desarrollado para un *single well model*, y la forma de modelar la zona de producción en el radio externo en GIGATHOR es modificando las condiciones de frontera de forma que tanto en el módulo de presión como el de temperatura consideren flujo de fluido y de calor a través de una zona específica de la frontera externa. De tal forma que CMG simplemente asigna un pozo productor en uno de los bloques de la frontera radial externa, así la condición de frontera en el radio externo sigue siendo una frontera de no flujo y las pérdidas de calor (y de fluido) debido a la presencia del pozo productor se calculan modificando el término de fuentes y sumideros en las ecuaciones constitutivas de los bloques que definen el pozo productor.

Es decir, que CMG no modifica la frontera radial externa de no flujo para flujo de fluidos y temperatura, pero si modifica las ecuaciones constitutivas en los bloques específicos en los que se encuentre ubicado el pozo productor, de tal forma que se considere un sumidero dentro de esos bloques. Por lo demás, al igual que en el caso de inyección cíclica, se ha buscado que la implementación del caso de inyección continua en ambos simuladores sea lo más similar posible.

Mozaffari, *et al.* (2013), desarrollaron un modelo numérico 3D en diferencias finitas para simular la inyección de vapor en yacimientos de crudo pesado, este modelo considera las fases agua, aceite y vapor y tiene la particularidad que resuelve simultáneamente las ecuaciones para flujo de fluidos y flujo de calor dentro del yacimiento durante un proceso de inyección de vapor. A diferencia del modelo que se presenta en este trabajo, el planteamiento de Mozaffari, *et al.* (2013) es desarrollado en un sistema coordenado cartesiano y no considera una zona de producción de fluidos. Los autores presentan la aplicación de su modelo en un caso de campo, si bien no es posible representar este mismo caso de campo, se toma como punto de partida para la generación de los datos de entrada de simulación del caso de inyección continua de vapor para ambos simuladores (GIGATHOR y CMG); el principal aporte de información del caso de campo es la caracterización de la roca y del fluido. En la [Tabla 4-3](#) se presentan los datos de entrada que se usan para el modelamiento de inyección continua de vapor.

La condición inicial de temperatura para el modelamiento en el simulador GIGATHOR está dada por la aplicación de un gradiente geotérmico de  $0.017 \text{ } ^\circ\text{F}/\text{ft}$  (Apéndice B) a partir del valor de la temperatura inicial de yacimiento en la profundidad de referencia presentada en la [Tabla 4-3](#).

**Tabla 4-3:** Datos de entrada para el caso de inyección continua de vapor.

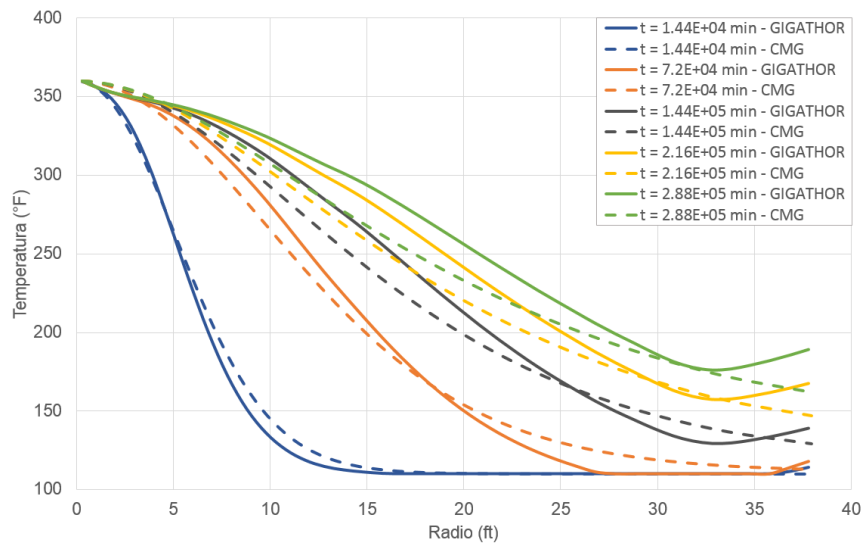
<b>Condiciones iniciales</b>	
Temperatura inicial del yacimiento [°F]	110
Profundidad de referencia [ft]	690
Presión inicial del yacimiento @ profundidad. Ref. [psi]	300
<b>Propiedades petrofísicas y térmicas</b>	
Permeabilidad del yacimiento [mD]	1000
Porosidad [adim]	0.33
Densidad de la roca [lb/ft <sup>3</sup> ]	109
Densidad del fluido [lb/ft <sup>3</sup> ]	60
Capacidad calorífica de la roca [BTU/ lb.°F]	0.3
Capacidad calorífica del fluido	0.5
Conductividad térmica de la roca [BTU/hr.ft.°F]	1
Conductividad térmica del fluido [BTU/hr.ft.°F]	1
<b>Condiciones de inyección</b>	
Temperatura de inyección [°F]	360
Caudal de inyección [bbl/día]	60
<b>Condiciones de producción</b>	
Presión constante [psi]	300
<b>Parámetros de la malla</b>	
Radio del pozo [ft]	0.3
Radio externo [ft]	40.3
Espesor del yacimiento [ft]	60
Intervalo de inyección [ft]	20
Número de bloques en dirección radial	40
Número de bloques en dirección tangencial	25
Número de bloques en dirección vertical	60

La [Figura 4-7](#) presenta una gráfica comparativa de los perfiles de temperatura obtenidos para el caso de inyección con el simulador GIGATHOR (modelo presentado en este trabajo) y con el simulador comercial CMG, estos perfiles se presentan en dirección radial y a diferentes tiempos de simulación: 14400 minutos (10 días), 72000 minutos (50 días),

144000 minutos (100 días), 216000 minutos (150 días) y 288000 minutos (200 días). Las líneas discontinuas representan los perfiles de temperatura obtenidos con CMG y las líneas continuas representan los perfiles obtenidos con el modelo que aquí se presenta.

De esta figura es posible comentar que ambos perfiles presentan una forma propia de un perfil de temperatura principalmente convectivo, si bien tanto CMG como el modelo presentado consideran que la transferencia de calor dentro del yacimiento tiene lugar debido a los mecanismos de transferencia de calor de conducción y de convección, es evidente que en el caso simulado el mecanismo dominante es la convección, esto de acuerdo a la forma del perfil de temperatura radial obtenido.

**Figura 4-7:** Comparación de los perfiles de temperatura en dirección radial obtenidos usando GIGATHOR y CMG para diferentes tiempos de simulación: 14400 minutos, 72000 minutos, 144000 minutos, 216000 minutos y 288000 minutos



Ahora bien, como se menciona en la descripción del caso, existen diferencias sustanciales en la forma de implementar la condición de frontera en la zona definida como de producción en la frontera radial externa, CMG define un pozo de producción en el radio externo, mientras que GIGATHOR modifica la condición de frontera en algunos bloques específicos de la frontera radial externa, permitiendo así flujo de fluidos y de calor a través de ella. Esta diferencia es la razón por la que los perfiles de temperatura de la [Figura 4-7](#) presentan un comportamiento diferenciado dependiendo del simulador. Y probablemente sea la misma razón por la que los perfiles, a un mismo tiempo, presenten algunas diferencias de

pendiente, y que esta diferencia aumente con el tiempo; ya que ambos modelos de temperatura (CMG y GIGATHOR) son numéricos y responden en gran medida a las condiciones de frontera implementadas en cada caso.

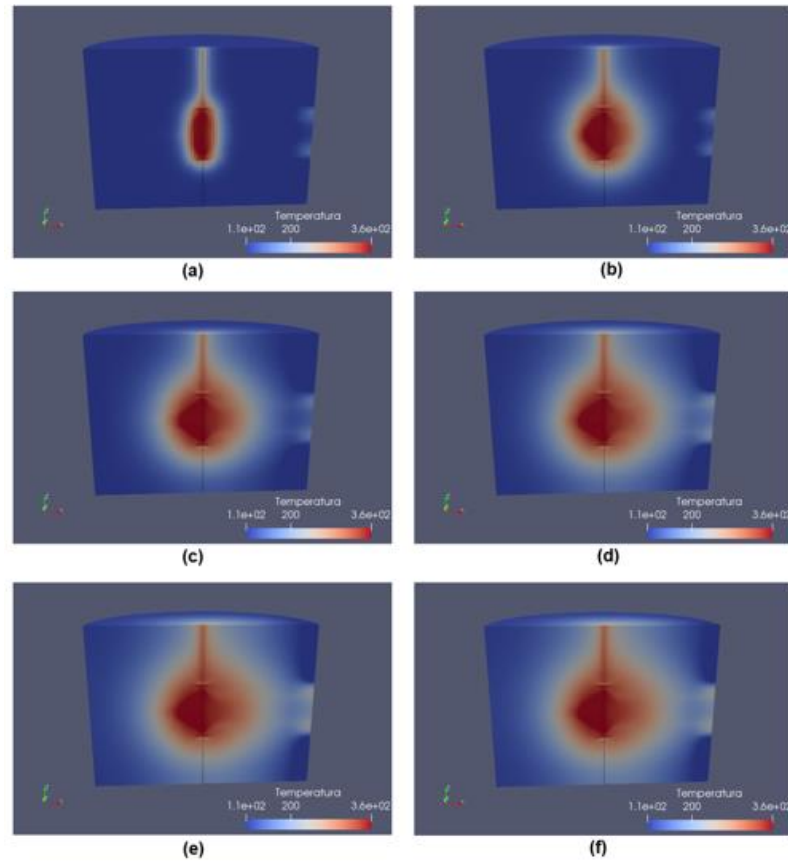
Así mismo, es posible obtener la distribución de temperatura en las tres dimensiones como resultados de ambos simuladores. Para efectos de visualización, se presentan una gráfica de GIGATHOR y una de CMG con un corte vertical para un plano que contiene el pozo y que también contiene la zona de producción para GIGATHOR y el pozo productor para CMG. De igual forma, para cada simulador se presenta un gráfica con un corte horizontal realizado en la mitad del espesor del yacimiento, esta gráfica permite tener una vista en planta del fenómeno en el plano en el cual ocurren los principales cambios de temperatura. Ambos tipos de gráficas se presentan para diferentes tiempos de simulación.

La [Figura 4-8](#) presenta los resultados de temperatura obtenidos a partir de la implementación del módulo de temperatura descrito en este trabajo en el simulador GIGATHOR para seis tiempos de simulación diferentes, como se menciona en el párrafo anterior esta gráfica permite visualizar el fenómeno de aumento de temperatura en un plano radial-vertical, generándose una cámara de calor en los alrededores del pozo inyector y a medida que pasa el tiempo, el frente de calor llega a la frontera radial externa, aumentando la temperatura en las cercanías de la zona definida como zona de producción en esta frontera.

En la misma [Figura 4-8](#) es posible comparar el efecto del calentamiento de los bloques cercanos al pozo inyector debido a los mecanismos de transferencia de calor por conducción y por convección. Como se menciona en el modelo físico (Sección 2.1.2), para este modelamiento se tiene en cuenta el modelo de transferencia de calor en hueco entubado, la principal característica de este modelo de calentamiento es que considera el calor que se transfiere a la formación debido a la conductividad térmica del revestimiento y del cemento a los bloques del radio interno que se encuentran por encima del intervalo de inyección. En esta figura, se puede reconocer esta zona y notar como a pesar que se calienta considerablemente no lo hace en la misma proporción que lo hace la zona del intervalo de inyección, esto se debe a que la zona de inyección considera tanto la conducción como la convección debido al fluido caliente que se está inyectando, mientras

la zona superior a la de inyección considera solo la conducción a través de los diferentes medios entre el interior del revestimiento y formación.

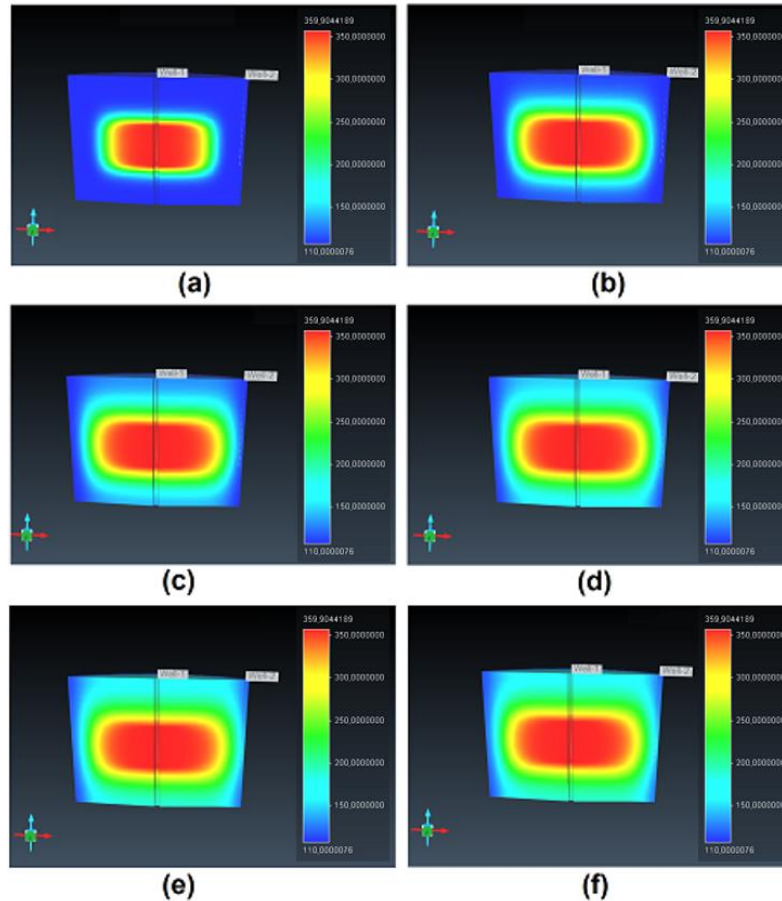
**Figura 4-8:** Resultados de temperatura en GIGATHOR en 3D en para el caso inyección continua – vista lateral a diferentes tiempos: **(a)** 14400 minutos, **(b)** 72000 minutos, **(c)** 144000 minutos, **(d)** 216000 minutos, **(e)** 288000 minutos y **(f)** 299520 minutos.



Por su parte, la [Figura 4-9](#) presenta los mismos gráficos de la figura anterior pero esta vez obtenidos usando el simulador CMG. Estas gráficas se deben analizar en contexto con los perfiles de temperatura en dirección radial de la [Figura 4-7](#), dado que podría parecer que la cámara de calor que se genera con los resultados de CMG ([Figura 4-9](#)) es más grande que la que se genera con los resultados de GIGATHOR ([Figura 4-8](#)). Y es que los perfiles de temperatura precisamente indican el avance en la dirección radial de la cámara de calor dado por el aumento de temperatura en las cercanías del pozo y su flujo en dirección del radio externo. Una razón de esta apreciación estaría relacionada con lo mencionado sobre la diferencia de la implementación de la zona de producción entre ambos simuladores. Además, parece que el simulador CMG presenta una distribución más uniforme de

temperatura en dirección vertical, lo que hace que la cámara de calor tienda a una figura rectangular. Mientras que la cámara de calor generada con los resultados de temperatura del simulador GIGATHOR tiene una forma más redondeada.

**Figura 4-9:** Resultados de temperatura en CMG en 3D para el caso inyección continua – vista lateral a diferentes tiempos: **(a)** 14400 minutos, **(b)** 72000 minutos, **(c)** 144000 minutos, **(d)** 216000 minutos, **(e)** 288000 minutos y **(f)** 299520 minutos.

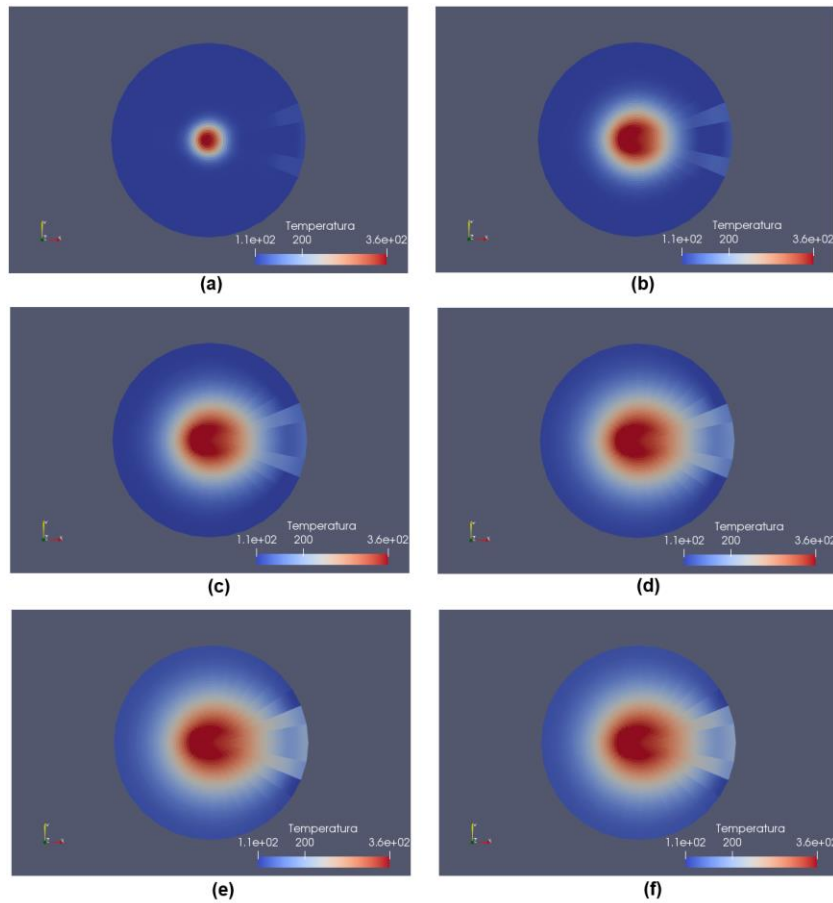


Con el fin de tener otros elementos de comparación entre los resultados de temperatura de los dos simuladores, en la [Figura 4-10](#) y la [Figura 4-11](#) se presentan las vistas en planta de la cámara de calor obtenida a partir del simulador GIGATHOR y del simulador CMG respectivamente a diferentes tiempos. Esta vista en planta se obtiene en un plano radial-tangencial ubicado en la mitad del intervalo de inyección y permite evidenciar como el aumento de temperatura se presenta inicialmente en las cercanías del pozo y a medida que aumenta el tiempo, la cámara de calor también aumenta su tamaño en la dirección



radial. También es posible notar el aumento de temperatura en una dirección preferencial, esta dirección es precisamente en la cual se encuentra definida la zona de producción en la frontera radial externa, lo que quiere decir es que el fluido tiene una dirección preferencial de flujo y la temperatura responde a este comportamiento del flujo del fluido.

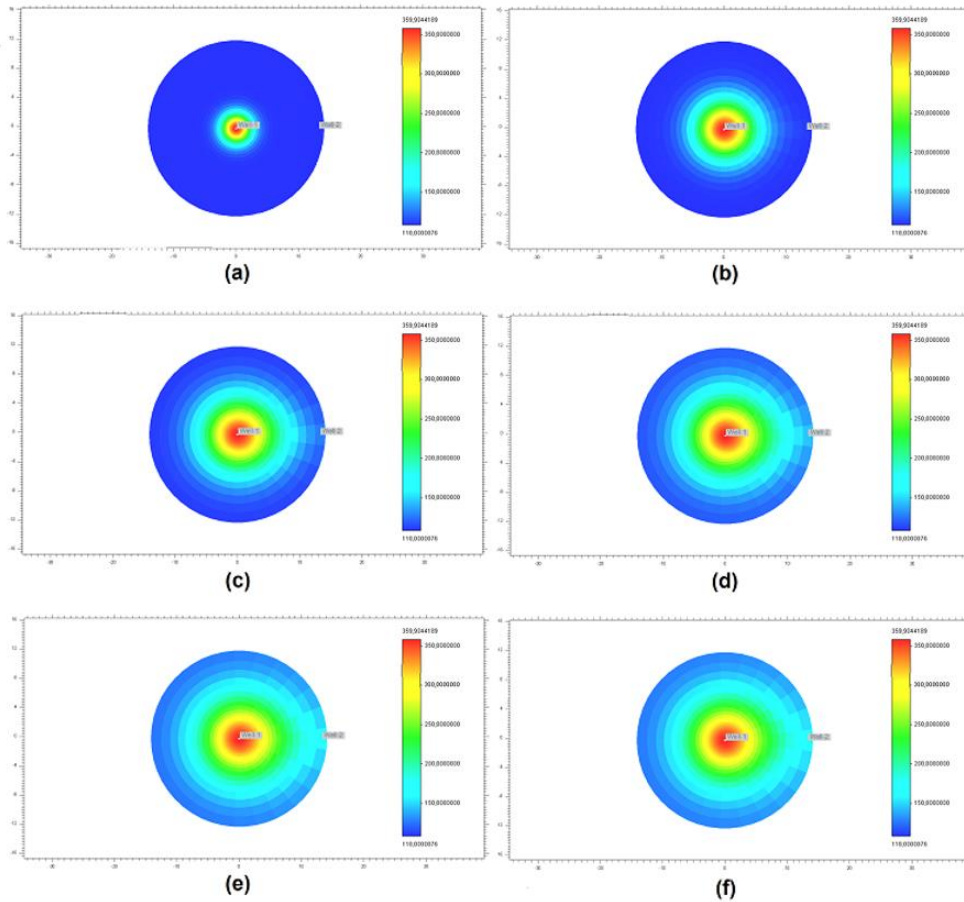
**Figura 4-10:** Resultados de temperatura en GIGATHOR en 3D para el caso inyección continua – vista en planta a diferentes tiempos: **(a)** 14400 minutos, **(b)** 72000 minutos, **(c)** 144000 minutos, **(d)** 216000 minutos, **(e)** 288000 minutos y **(f)** 299520 minutos.



Al igual que en los perfiles de temperatura ([Figura 4-7](#)) entre la [Figura 4-10](#) y la [Figura 4-11](#) es posible identificar una diferencia del comportamiento de la temperatura entre las respuestas de ambos simuladores, principalmente en los bloques cercanos a la zona de producción en la frontera radial externa, estas diferencias responden principalmente al uso de condiciones de frontera diferentes para representar la zona de producción en el caso de inyección continua de vapor 1-1 y como consecuencia en el caso de CMG la llegada

del frente de calor a la zona de producción es más uniforme que en el caso de los resultados de GIGATHOR.

**Figura 4-11:** Resultados de temperatura en CMG en 3D para el caso inyección continua – vista en planta a diferentes tiempos: **(a)** 14400 minutos. **(b)** 72000 minutos. **(c)** 144000 minutos. **(d)** 216000 minutos. **(e)** 288000 minutos. **(f)** 299520 minutos.



A pesar de las diferencias mencionadas tanto en los perfiles de temperatura como en los gráficos 3D, debidos principalmente a diferencias en la implementación de algunas condiciones de frontera, es posible establecer los resultados del modelo de temperatura implementado en el simulador GIGATHOR, son una buena aproximación del comportamiento de temperatura durante un proceso de inyección continua de vapor uno a uno

---

Los resultados obtenidos en este caso, al igual que en el caso cíclico, cobran importancia toda vez que se convierten en un insumo para estudios más avanzados del comportamiento del yacimiento con variaciones de temperatura. Es decir, que una vez se conoce una buena aproximación del comportamiento de la temperatura durante procesos de inyección de vapor es posible estudiar con más precisión aquellos fenómenos que tienen lugar dentro de yacimientos de crudo pesado y que son sensibles a la variación de la temperatura durante algún proceso de recobro térmico con vapor, como por ejemplo la afectación del estado de esfuerzos *in situ* en yacimientos de crudo pesado como respuesta al aumento de temperatura durante una inyección de vapor.



## 5. Estudio de sensibilidad

La intención de este estudio es identificar en qué medida la transferencia de calor en un medio poroso durante un proceso como la inyección de vapor, se ve afectada por variaciones de las propiedades térmicas de la roca y del fluido y por la velocidad del fluido dentro del medio. Además, se pretende analizar para diferentes casos de estudio las zonas del yacimiento en las cuales domina alguno de los dos mecanismos de transferencia de calor abordados en este trabajo durante la inyección de vapor. En tal sentido, las variables a sensibilizar son: la capacidad calorífica tanto de la roca como del fluido, la conductividad térmica de la roca y del fluido y la velocidad del fluido dentro del medio poroso a partir del caudal de inyección. Por otra parte, las variables de análisis de dichas sensibilidades son por su puesto la temperatura y además el número de Péclet.

Inicialmente se tiene una descripción del número de Péclet y la forma como se aborda para este análisis de sensibilidad, y posteriormente se presentan las secciones correspondientes a la sensibilidad de la conductividad térmica, de la capacidad calorífica y finalmente la sección de la sensibilidad del caudal de inyección. El caso base para estas sensibilidades es el caso acoplado de difusión-advección presentado en la Sección 3.2, el cual es el caso de estudio con el que se llevaron a cabo la verificación y la validación del modelo.

### 5.1 Número de Péclet

Como se describe en la Sección 1.4 el número de Péclet es un número adimensional que permite relacionar el flujo de calor por conducción y el flujo de calor por convección que se transfiere durante un proceso no-isotérmico que considere ambos mecanismos de transferencia de calor. La Ecuación (5) establece una forma de calcular el número de Péclet, la estrategia entonces es calcular esta relación en cada bloque de la malla de

simulación. La Ecuación (28) presenta el planteamiento del número de Péclet, recordando que este es función de una longitud característica, la velocidad de flujo, la densidad, la capacidad calorífica y la conductividad térmica del sistema roca-fluido.

$$Pe = \frac{l_i v_i \rho C_p}{k} \quad (28)$$

En cada bloque se tiene como dato la magnitud de la velocidad del fluido y es posible calcular una longitud característica asociada al vector de velocidad definido en cada bloque. Además, cabe recordar que la conductividad térmica, la capacidad calorífica y la densidad deben ser calculadas como propiedades *bulk*, es decir que tenga en cuenta tanto el aporte de la roca como del fluido. La Ecuación (2) presenta un esquema para calcular la conductividad térmica *bulk*, este esquema se extiende a las otras dos propiedades y se presentan en las siguientes dos ecuaciones, en las cuales los subíndices *f* y *s* indican fluido y sólido respectivamente y  $\phi$  hace referencia a la porosidad del medio poroso.

$$\rho_b = \phi \rho_f + (1 - \phi) \rho_s \quad (29)$$

$$C_{pb} = \phi C_{pf} + (1 - \phi) C_{ps} \quad (30)$$

Tal como se describe en la Sección 1.2.1 y en la Sección 1.2.2, la transferencia de calor por conducción se rige por la conductividad térmica tanto de la roca como del fluido que la satura, y a su vez la transferencia de calor por convección se rige por la velocidad del fluido que se mueve dentro del medio poroso. Por otra parte la capacidad calorífica es la propiedad térmica que establece la capacidad de una sustancia de almacenar calor respecto a una temperatura dada. Las capacidades caloríficas de la roca y del fluido aparecen en escena como coeficientes del modelo constitutivo de temperatura (Ecuación (A - 1)) y se encuentran acompañando conjuntamente los términos del aporte convectivo y conductivo de la transferencia de calor.

La estrategia entonces para este estudio es sensibilizar las variables que por la teoría se sabe que dominan cada uno de los mecanismos de transferencia de calor y revisar el resultado de cada sensibilidad en el valor del número de Péclet, estableciendo a través de esta relación adimensional cuál de los mecanismos de transferencia de calor es el dominante en cada bloque para un instante dado del proceso de inyección de vapor.

Por definición el número de Péclet es una relación de la cantidad de calor que se transfiere por convección respecto al calor que es transferido debido a la conducción, este planteamiento permite deducir que si el número de Péclet tiene un valor entre 0 y 1 inclusive el 0, la cantidad de calor debido a la conducción es mayor que la cantidad de calor que transfiere debido a convección. De igual forma, si esta relación es cercana a 1 entonces las cantidades de calor transferido debido a los dos mecanismos de transferencia de calor son cercanas o incluso iguales. Y finalmente, si el número de Péclet es mayor a 1 entonces la relación se invierte, lo que indica que el mecanismo que está dominando el fenómeno de transferencia de calor es la convección. Entonces, con base en esta deducción se han elegido tres rangos de análisis en los gráficos del número de Péclet para cada una de las sensibilidades: el primer rango es entre 0 y 0.9, el segundo entre 0.9 y 1.1 y finalmente entre 1.1 y 10. Si bien en los casos se obtienen valores superiores a 10, lo que teóricamente es completamente válido, no representan un cambio significativo a este análisis, y también por motivos de visualización se toma como valor máximo 10.

## 5.2 Sensibilidad de la conductividad térmica - $k_b$

Para analizar el efecto de la variación de la conductividad térmica de la roca y del fluido en la transferencia de calor dentro del yacimiento se parte del valor calculado de la conductividad térmica *bulk* del caso base, y a partir de este se diseñan los 4 casos de sensibilidad, la respuesta de cada caso es analizada a partir de dos gráficas, la primera contiene una comparación de los perfiles de temperatura en dirección radial del caso base y de los casos de sensibilidad, estos perfiles se presentan al tiempo de simulación de 100000 minutos (70 días). La segunda gráfica representa la distribución espacial del número de Péclet y se encuentra dividida en tres gráficas, una por cada rango de análisis del número de Péclet descrito en la sección anterior.

Así pues, aplicando la Ecuación [\(2\)](#) a los datos de conductividad térmica de la roca y del fluido del caso acoplado de difusión-advección definidas en la [Tabla 3-2](#), es posible obtener un valor para la conductividad térmica *bulk* del caso base. A partir del valor de conductividad térmica, se propone el siguiente esquema de sensibilidades en la [Tabla 5-1](#), considerando la variación de la conductividad térmica de la roca para los casos 1 y 2 y la variación de la conductividad térmica del fluido para los casos 3 y 4. Cabe resaltar que la

porosidad en los 4 casos de sensibilidad permanece constante en 0.3 tal como se presenta en la [Tabla 3-2](#).

**Tabla 5-1:** Valores de sensibilidad de la conductividad térmica. Valores tomados de Chekhonin, *et al.* (2012).

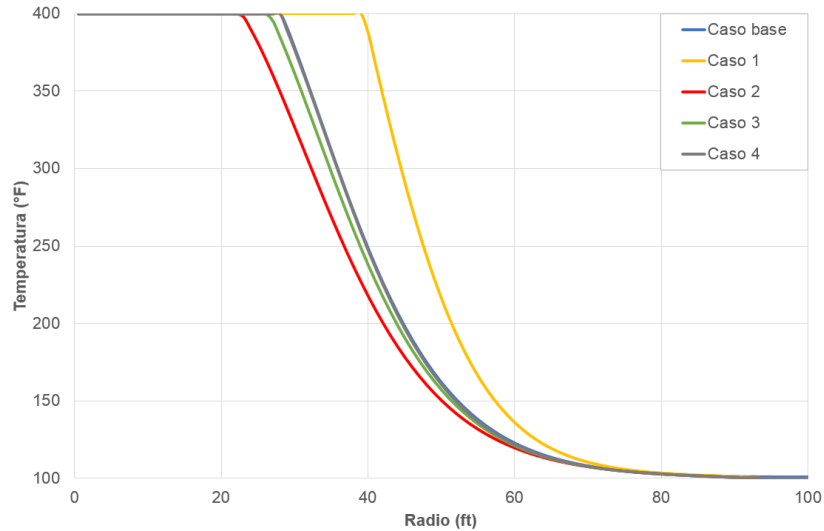
Propiedad	Caso base	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
$k_f$ [BTU/ ft.hr.°F]	1.00	1.00	1.00	1.40	0.60
$k_s$ [BTU/ ft.hr.°F]	2.50	0.30	3.70	2.50	2.50
$k_b$ [BTU/ ft.hr.°F]	2.05	0.51	2.89	2.17	1.93

Los valores de la conductividad térmica de la roca del caso 1 y el caso 2 son el valor máximo y el valor mínimo del rango que presentan Chekhonin, *et al.* (2012), en el cual se definen los valores de conductividad térmica en areniscas. Por su parte, los valores de la conductividad térmica del fluido en los casos 3 y 4 se han elegido teniendo en cuenta que los valores típicos de conductividad térmica de los crudos se encuentran entre 0.03 – 0.06 BTU/ ft.hr.°F, los cuales son valores muy bajos y no permiten un análisis más amplio de la incidencia de esta propiedad en la transferencia de calor; entonces se elige como valor mínimo (caso 4) la conductividad térmica del agua y el valor máximo (caso 3) un valor que represente un fluido más conductivo que el agua, por el ejemplo el vapor (Chekhonin, *et al.*, 2012). De la [Tabla 5-1](#) se tiene que dos de los casos de sensibilidad consideran una conductividad térmica *bulk* mayor que la del caso base y dos consideran una conductividad térmica *bulk* menor que la del caso base.

En la [Figura 5-1](#) se presentan el perfil de temperatura de los cuatro casos de la sensibilidad de la conductividad térmica y del caso base, todos para el tiempo de 100000 minutos, en esta gráfica, el perfil del caso con conductividad térmica de la roca menor (caso 1) se encuentra por delante, espacialmente hablando, del perfil del caso base, los casos de mayor conductividad térmica de la roca (caso 2) y de mayor conductividad térmica del fluido (caso 3) se encuentran detrás del perfil del caso base y finalmente, el caso de menor conductividad térmica del fluido (caso 4) se encuentra sobrepuesto con el perfil de temperatura del caso base.



**Figura 5-1:** Comparación de perfil radial de temperatura del caso base y de los 4 casos de la conductividad térmica al tiempo 100000 minutos



De la [Figura 5-1](#), es posible resaltar que en el caso de menor conductividad térmica de la roca (curva amarilla), la transferencia de calor por convección tiene más relevancia durante el proceso de calentamiento de la formación, esto a partir de la posición del frente de calor del caso 1 respecto del frente de calor del caso base. Por la teoría se sabe que en este tipo de procesos de calentamiento el fenómeno se encuentra dominado por la transferencia de calor debido al flujo de fluidos (advección), en este caso en particular se hace evidente este comportamiento una vez se reduce el aporte del mecanismo de conducción dado por la disminución de la conductividad térmica de la roca.

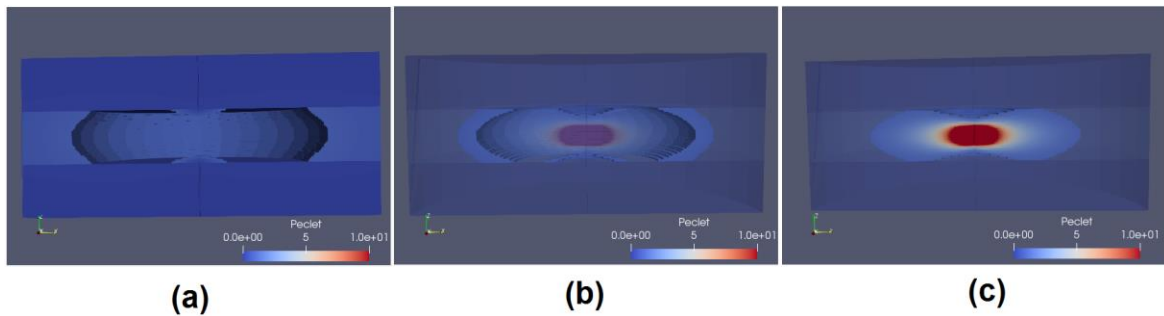
Los resultados para el caso 2 (curva roja) son opuestos a los del caso 1, lo cual es completamente coherente dado que este caso considera una conductividad térmica de la roca mayor que la del caso base, lo que a su vez genera una conductividad térmica *bulk* mayor en este caso que la del caso base. Es de resaltar entonces que el frente de calor del caso 2 es un poco más lento que el frente de calor del caso base, por lo que el primero se encuentra levemente retrasado respecto al segundo. Con estos resultados se refuerza entonces que un frente más convectivo es más rápido que un frente más conductivo, esto como se menciona anteriormente debido a que el caso convectivo es controlado por la velocidad del fluido dentro del medio poroso.

Las siguientes sensibilidades a analizar corresponden a los casos en los cuales se varía la conductividad térmica del fluido respecto al caso base. La curva verde representa el perfil de temperatura para el caso en el cual la conductividad térmica del fluido es mayor a la conductividad térmica del fluido del caso base y la curva gris representa el perfil de temperatura como resultado de una conductividad térmica del fluido más baja que la del caso base. En comparación con el caso base, la variación de estos dos perfiles de temperatura es baja, incluso en el caso 4 la curva es idéntica a la del caso base. Lo que permite establecer que la conductividad térmica del fluido no es una propiedad determinante en el dominio de uno u otro mecanismo de transferencia de calor. Si bien en el cálculo del número de Péclet se considera la conductividad térmica *bulk*, en el modelo constitutivo esta propiedad si se encuentra diferenciada, esto para decir que los resultados del caso 3 y caso 4 resaltan el hecho de que en el fluido el mecanismo de transferencia de calor dominante es la convección, y la conducción pasa a un segundo plano; contrario a lo que ocurre en el sólido, donde el mecanismo dominante es la conducción y la convección no se presenta.

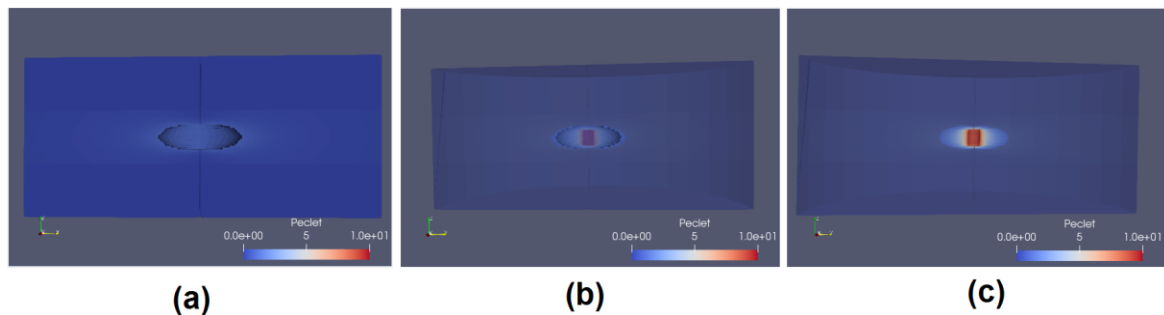
Por otra parte, la [Figura 5-2](#), la [Figura 5-3](#), la [Figura 5-4](#) y la [Figura 5-5](#) presentan el comportamiento del número de Péclet, para cada uno de los casos de sensibilidad calculado en cada bloque del dominio físico de simulación. La particularidad de estas gráficas es que permiten dividir la visualización del dominio a partir de los rangos de análisis del número de Péclet, así, las gráficas (a) presentan la distribución de bloques que obtienen un valor de número de Péclet entre 0 - 0.9, las gráficas (b) contienen los bloques que se encuentran en el rango entre 0.9 - 1.1, y finalmente las gráficas (c) permiten visualizar el rango entre 1.1 - 10, los tres casos para un tiempo de 100000 minutos (70 días). Las tres gráficas son excluyentes entre sí, es decir que los bloques del primer rango aparecen resaltados en la gráfica (a) y la zona de los bloques que no se encuentran en este rango del número de Péclet se aprecia como un hueco en la gráfica, así mismo la gráfica (b) resalta los bloques del rango intermedio y las demás zonas aparecen opacas y finalmente (c) resalta una zona cercana al pozo en la parte media de la malla en la cual se concentran los bloques de obtienen un numero de Péclet que se encuentra en el tercer rango.

Si bien estos mismos gráficos se obtienen para más tiempos de simulación, se encuentra poca variación en el comportamiento de la distribución de bloques por los rangos dados, entonces se elige un tiempo arbitrario en el cual se tiene suficiente tiempo de calentamiento para realizar este análisis.

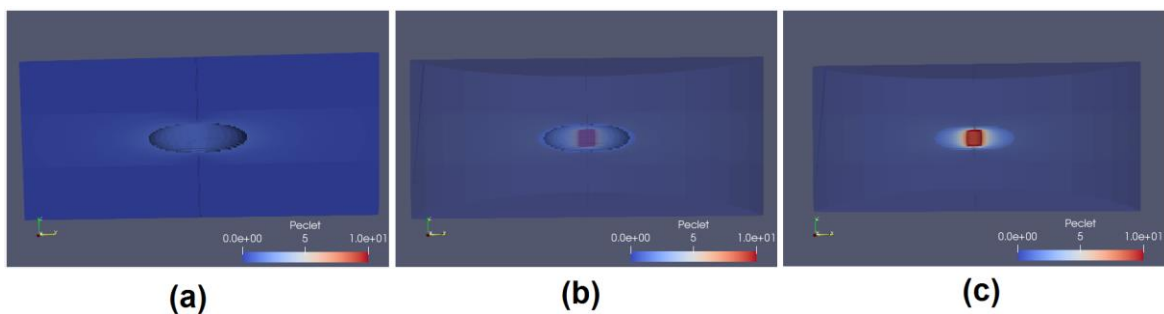
**Figura 5-2:** Resultados del número de Péclet del caso 1 de la conductividad térmica para el tiempo 100000 minutos: **(a)** Número de Péclet entre 0–0.9. **(b)** Número de Péclet entre 0.9–1.1. **(c)** Número de Péclet entre 1.1–10.



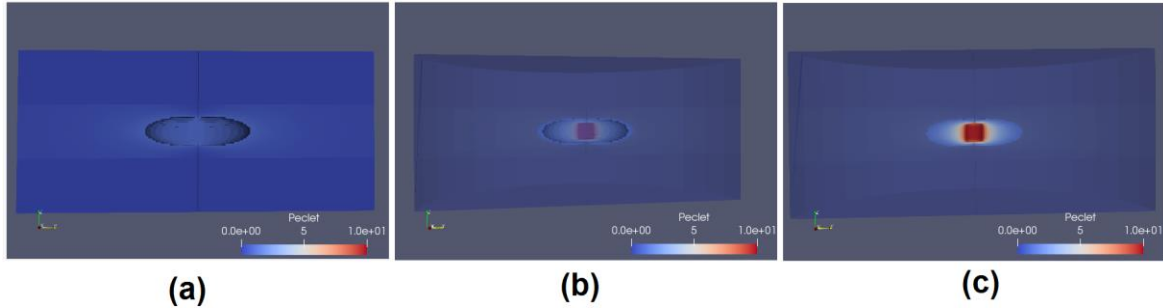
**Figura 5-3:** Resultados del número de Péclet del caso 2 de la conductividad térmica para el tiempo 100000 minutos: **(a)** Número de Péclet entre 0–0.9. **(b)** Número de Péclet entre 0.9–1.1. **(c)** Número de Péclet entre 1.1–10.



**Figura 5-4:** Resultados del número de Péclet del caso 3 de la conductividad térmica para el tiempo 100000 minutos: **(a)** Número de Péclet entre 0–0.9. **(b)** Número de Péclet entre 0.9–1.1. **(c)** Número de Péclet entre 1.1–10.



**Figura 5-5:** Resultados del número de Péclet del caso 4 de la conductividad térmica para el tiempo 100000 minutos: **(a)** Número de Péclet entre 0–0.9. **(b)** Número de Péclet entre 0.9–1.1. **(c)** Número de Péclet entre 1.1–10.



Así pues, de acuerdo a la distribución de los rangos del número de Péclet en las figuras anteriores es posible identificar los bloques en los cuales domina la conducción como mecanismo de transferencia de calor y están representados por el primer rango del número de Péclet, es decir gráficas (a). Así es posible identificar los bloques en los cuales se presenta en aproximadamente iguales proporciones los mecanismos de conducción y de convección, están definidos por el segundo rango del número de Péclet y son las gráficas (b). Por último, es posible identificar la distribución de los bloques en los cuales el mecanismo de transferencia de calor dominante es la convección, estos los define el tercer rango del número de Péclet y representados por las gráficas (c). En general, de estos resultados se puede establecer que la convección aporta más en la transferencia de calor en los bloques que se encuentran cercanos al pozo y en los que hacen parte del intervalo de inyección, y que progresivamente se da una transición del mecanismo dominante desde las cercanías del pozo y de la zona de inyección hacia el exterior del yacimiento, llegando a tener en las zonas más alejadas del pozo bloques en los cuales la conducción representa el mayor aporte en la transferencia de calor.

El comportamiento descrito en el párrafo anterior es consecuente con el comportamiento del flujo de fluidos en el medio poroso, el cual es el fenómeno que controla la convección, en el que las velocidades de flujo más altas se presentan en las cercanías del pozo y van disminuyendo en la medida que se alejan del mismo.

Haciendo una comparación entre las gráficas anteriores, evidentemente la gráfica (c) de la [Figura 5-2](#) presenta una zona mucho más grande que la misma gráfica de las otras tres figuras, esta gráfica representa los bloques en los cuales la convección es el mecanismo de transferencia de calor dominante en el caso en el cual la conductividad térmica de la roca es menor que la del caso base, y así mismo como este hecho se traduce en un perfil de temperatura más rápido que los perfiles de los demás casos, es completamente coherente que sea mayor la zona dominada por la convección que en los demás casos. Por supuesto, el hecho de que la zona de convección sea más grande conlleva a que la zona de transición (gráfica (b)) también sea más grande para este caso que para los demás, así mismo que la zona principalmente conductiva (gráfica (a)) sea menor en este caso.

Por otra parte, la [Figura 5-3](#), la [Figura 5-4](#) y la [Figura 5-5](#) son muy similares entre sí, este comportamiento se explica precisamente con que la conductividad térmica *bulk* en los tres casos es cercana a la del caso base, y además mucho mayores en los tres casos que la del caso 1, esto significa que los casos que representan estas figuras son más conductivos que el caso representado con la [Figura 5-2](#), confirmando así lo que se había evidenciado en los perfiles de temperatura.

De los resultados de esta sensibilidad, es posible concluir que la conductividad térmica de la roca es más influyente que la conductividad térmica del fluido en un proceso de calentamiento de un medio poroso con inyección de vapor. Lo anterior, se debe a que el perfil de temperatura en los casos de diferentes conductividad térmicas de la roca (casos 1 y 2) responde a los cambios en esta propiedad, mientras que en los casos en los cuales se modifica el valor de la conductividad térmica del fluido, respecto al caso base (casos 3 y 4), los perfiles de temperatura no representaron un cambio considerable. Es de esperarse entonces, como lo mencionan Hojka y Dusseault (1990), que en un medio menos poroso, en el cual la transferencia de calor está dominada por las características de la matriz, la conductividad térmica juega un papel dominante en el calentamiento del yacimiento.

### 5.3 Sensibilidad de la capacidad calorífica - $C_p$

Siguiendo la línea trazada para realizar la sensibilidad de la conductividad térmica, se define, a partir de los datos de la [Tabla 3-2](#) y la Ecuación (30), el valor de la capacidad calorífica *bulk* que representa esta propiedad térmica en el sistema roca-fluido para el caso base. Partiendo de este valor, se propone en la [Tabla 5-2](#) las variaciones de la capacidad calorífica de la roca y del fluido: los casos 1 y 2 se obtienen manteniendo la capacidad calorífica del fluido igual al caso base y variando la capacidad calorífica de la roca y los casos 3 y 4 variando la capacidad calorífica del fluido y mantenido constante la capacidad calorífica de la roca respecto al valor del caso base.

**Tabla 5-2:** Valores de sensibilidad de la capacidad calorífica. Valores tomados de Chekhonin, *et al.* (2012).

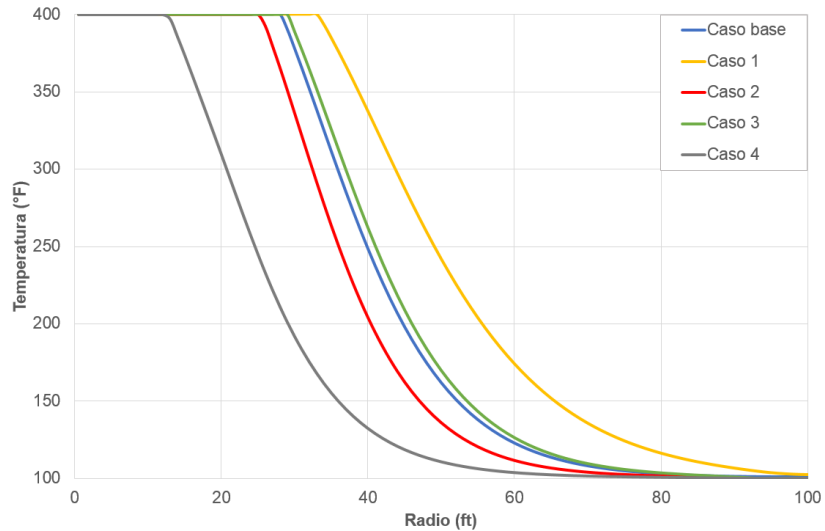
Propiedad	Caso base	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
$C_{pf}$ [BTU/lb.°F]	1.37	1.37	1.37	1.50	0.50
$C_{ps}$ [BTU/lb.°F]	0.26	0.09	0.38	0.26	0.26
$C_{pb}$ [BTU/lb.°F]	0.59	0.47	0.68	0.63	0.33

Los valores de capacidad calorífica de la roca corresponden a los valores mínimo y máximo del rango de valores que presentan Chekhonin, *et al.* (2012) de capacidad calorífica para areniscas. Por su parte, el valor mínimo de la capacidad calorífica del fluido (caso 4) corresponde a la capacidad calorífica del agua y el valor máximo corresponde al valor de la capacidad calorífica promedio para crudos que reporta el mismo autor. Como resultado de las variaciones de las capacidades caloríficas de la roca y del fluido se presentan en la [Tabla 5-2](#) los valores correspondientes a la capacidad calorífica *bulk*, valores con los cuales es calculado el número de Péclet en cada caso. En los casos 1 y 4 la propiedad *bulk* es menor que en el caso base y en los casos 2 y 3 la capacidad calorífica es mayor a la del caso base.

La [Figura 5-6](#) representa los resultados de los cuatro casos de sensibilidad y del caso base para el tiempo 100000 minutos. En esta gráfica el perfil más adelantado corresponde al caso con menor capacidad calorífica del sólido (caso 1) y el perfil más lento se obtiene

para el menor valor de la capacidad calorífica del fluido (caso 4). Los otros casos generan un perfil de temperatura sin mayor variación respecto al perfil del caso base.

**Figura 5-6:** Comparación de perfil radial de temperatura del caso base y de los 4 casos de la capacidad calorífica al tiempo 100000 minutos



De la [Figura 5-6](#), la principal razón por la que el perfil de temperatura del caso 1 (curva amarilla) se encuentra por delante del perfil del caso base (línea azul) es que en la ecuación constitutiva de temperatura (Ecuación [\(A - 1\)](#)) la capacidad calorífica de la roca es inversamente proporcional al coeficiente que acompaña los términos de convección y de conducción, esto quiere decir que si el valor de la capacidad calorífica de la roca disminuye, entonces este coeficiente hace que el aporte de transferencia de calor tanto por conducción como por convección aumente, y el resultado es que a un mismo tiempo el frente de calor avance más, especialmente hablando, que el caso con mayor capacidad calorífica de la roca.

El perfil resultante del caso 2 (curva roja) es completamente opuesto a lo que pasa en el caso 1, es decir, el frente de calor del caso 2 se encuentra retrasado especialmente respecto al frente de calor del caso base. Este comportamiento se debe principalmente a la capacidad calorífica de la roca es inversamente proporcional a los coeficientes que controlan la variación de la temperatura, de modo que al ser mayor la capacidad calorífica de la roca, el coeficiente  $M_1$  de la Ecuación [\(A - 1\)](#) que controla el aporte de la convección

al aumento de temperatura y el coeficiente  $M_2$  de la misma ecuación, que hace lo propio con la conducción, disminuyen, generando que la temperatura en este caso no aumente en la misma medida que el caso base.

Los resultados de los casos 1 y 2 responden a la fenomenología del proceso, dado que como se ha mencionado este tipo de calentamiento del medio poroso se debe en mayor medida a la convección, la cual a su vez depende del fluido en movimiento, tanto de sus propiedades como de su velocidad. Entonces lo que se puede apreciar en los casos 1 y 2 es que la variación de la capacidad calorífica de la roca afecta principalmente el tipo de mecanismo de transferencia de calor que se da en la parte sólida del medio poroso, la cual es la conducción.

A continuación se analizan los resultados de los casos de variación de la capacidad calorífica del fluido, el caso 3 para un valor de esta propiedad mayor que el del caso base y el caso 4 para un valor menor que el del caso base. En la [Figura 5-6](#) se puede evidenciar que los perfiles se comportan de forma similar y están muy cercanos al perfil del caso base, aun así, es posible notar un ligero avance del frente de calor dado por la temperatura del caso con mayor capacidad calorífica del fluido (caso 3).

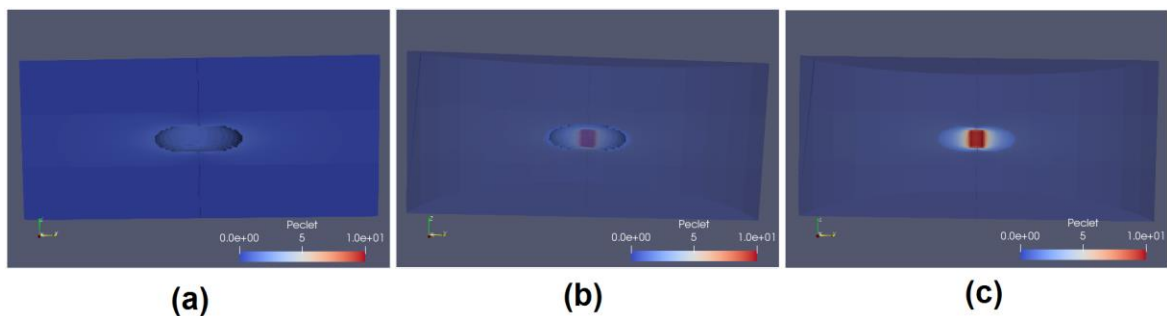
Como se menciona anteriormente, la capacidad calorífica del fluido modifica de forma inversa el coeficiente  $M_1$ , (parte convectiva) y el coeficiente  $M_2$  (parte conductiva), en la Ecuación [\(A - 1\)](#), por lo cual se esperaría que al igual que el caso 2 el frente de calor del caso base vaya delante del frente obtenido en el caso 3, ya que al aumentar la capacidad calorífica del fluido los coeficientes  $M_1$  y  $M_2$  disminuyen en su valor y por lo tanto ambos aportes (conductivo y convectivo) también disminuyen. Sin embargo, la curva verde de la [Figura 5-6](#) presenta un comportamiento ligeramente contrario al esperado, este comportamiento tiene razón de ser ya que el coeficiente  $M_1$  de la Ecuación [\(A - 1\)](#) también contiene capacidad calorífica del fluido en su numerador, es decir que también lo modifica de forma directa. Lo que quiere decir que el aumento en el valor de esta propiedad contrarresta el efecto sobre la variable  $M_2$  mencionado en el caso 2. Lo que pasa en este caso es que la capacidad calorífica del fluido suma y resta en los términos convectivos, pero solo resta en los términos conductivos, a diferencia del caso 2 donde la capacidad calorífica de la roca resta en ambos términos.



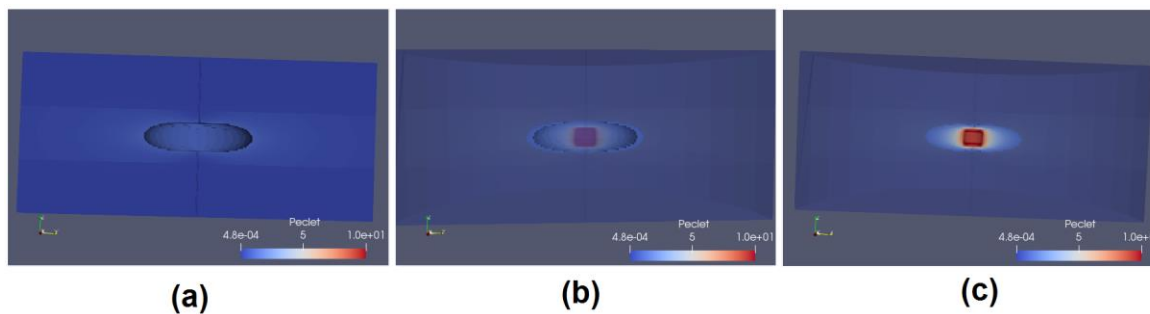
En el último caso que se representa en la [Figura 5-6](#) con la curva gris, es posible notar un retraso del perfil del caso 4 (menor capacidad calorífica del fluido que el del caso base) respecto al perfil del caso base. La razón de este comportamiento tiene que ver con lo que se plantea en el caso anterior y es que la capacidad calorífica del fluido es directamente proporcional al coeficiente  $M_1$  de la Ecuación [\(A - 1\)](#), el cual es que controla los términos convectivos del modelo, de tal forma que si se disminuye sustancialmente el valor de capacidad calorífica del fluido el efecto es que se presenta una disminución de la transferencia de calor por convección en el medio poroso. Esta disminución del aporte convectivo en la transferencia de calor se traduce en un perfil de temperatura más lento que el perfil del caso base.

La [Figura 5-7](#), la [Figura 5-8](#), la [Figura 5-9](#) y la [Figura 5-10](#) presentan la distribución de los bloques en las malla de simulación de acuerdo a los tres rangos de análisis del número de Péclet para los 4 casos de la sensibilidad respectivamente, las gráficas (a) definen las zonas más conductivas, las gráficas (b) las zonas de transición y las gráficas (c) zonas más convectivas; de nuevo y al igual que en la sensibilidad de la conductividad térmica, la distribución de estas zonas responde en mayor medida a la distribución de la velocidad del fluido dentro del yacimiento.

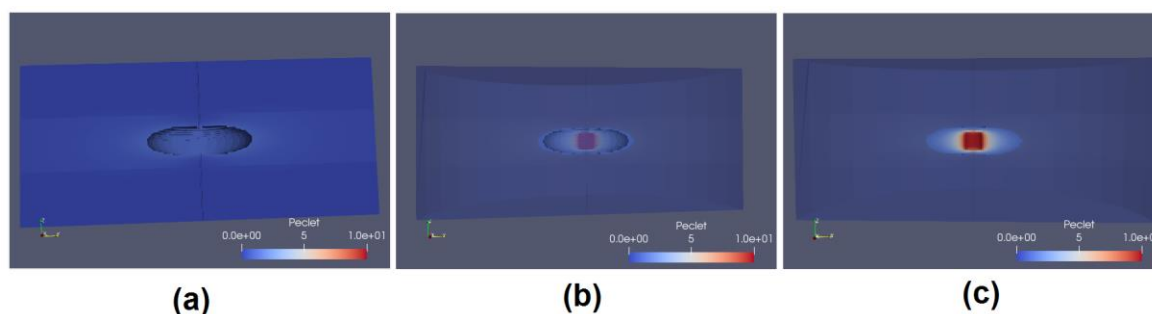
**Figura 5-7:** Resultados del número de Péclet del caso 1 de la capacidad calorífica para el tiempo 100000 minutos: **(a)** Número de Péclet entre 0–0.9. **(b)** Número de Péclet entre 0.9–1.1. **(c)** Número de Péclet entre 1.1–10.



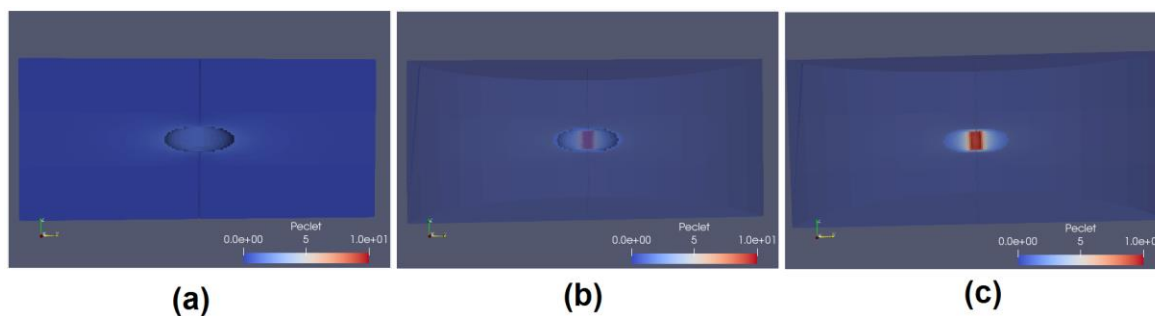
**Figura 5-8:** Resultados del número de Péclet del caso 2 de la capacidad calorífica para el tiempo 100000 minutos: **(a)** Número de Péclet entre 0–0.9. **(b)** Número de Péclet entre 0.9–1.1. **(c)** Número de Péclet entre 1.1–10.



**Figura 5-9:** Resultados del número de Péclet del caso 3 de la capacidad calorífica para el tiempo 100000 minutos: **(a)** Número de Péclet entre 0–0.9. **(b)** Número de Péclet entre 0.9–1.1. **(c)** Número de Péclet entre 1.1–10.



**Figura 5-10:** Resultados del número de Péclet del caso 4 de la capacidad calorífica para el tiempo 100000 minutos: **(a)** Número de Péclet entre 0–0.9. **(b)** Número de Péclet entre 0.9–1.1. **(c)** Número de Péclet entre 1.1–10.



Haciendo una comparación de las 4 figuras se puede notar que la distribución de cada una de las zonas no varía y el principal cambio se encuentra para el caso 4, en la cual se puede evidenciar una disminución de la zona del yacimiento en la cual domina principalmente la convección (gráfica (c)) respecto a la misma zona de los otros tres casos. El hecho que las figuras sean muy parecidas responde precisamente a que la capacidad calorífica *bulk* en

los 4 casos no presenta un cambio considerable, como por ejemplo el cambio que se presenta en el caso 1 de la sensibilidad de la conductividad térmica. Por otro lado, el caso en el que más se aleja la capacidad calorífica *bulk* del caso base es el caso 4 y como respuesta se tiene lo que se menciona sobre la disminución de la zona convectiva respecto a los demás casos.

Finalmente, de los resultados obtenidos para la sensibilidad de la capacidad calorífica se establece que la mayor afectación del perfil de temperatura se tiene cuando la capacidad calorífica del fluido disminuye drásticamente respecto al caso base (caso 4), además, que la capacidad calorífica de la roca no es una propiedad determinante en la variación de la temperatura, haciendo evidente la importancia de la capacidad calorífica del fluido principalmente en la transferencia de calor debida a la convección. Esto se relaciona con lo que se menciona al final de la sensibilidad de la conductividad térmica y evidenciar que el fluido el mecanismo de transferencia de calor que domina es la convección, mientras que en la parte sólido del medio poroso, la transferencia de calor se encuentra dominada por la conducción.

## 5.4 Sensibilidad del caudal de inyección

La última sensibilidad pretende analizar la respuesta del modelo a diferentes valores de velocidad de flujo de fluidos a partir de dos casos diferentes de caudal de inyección, uno mayor y otro menor respecto al caudal de inyección del caso base. La [Tabla 5-3](#) presenta los valores de esta sensibilidad dados en unidades de caudal por cada pie de espesor del intervalo de inyección. Cabe resaltar que las demás variables de simulación para el flujo de fluidos permanecen constante respecto a las presentadas en la [Tabla 3-3](#) en la Sección 3.2.

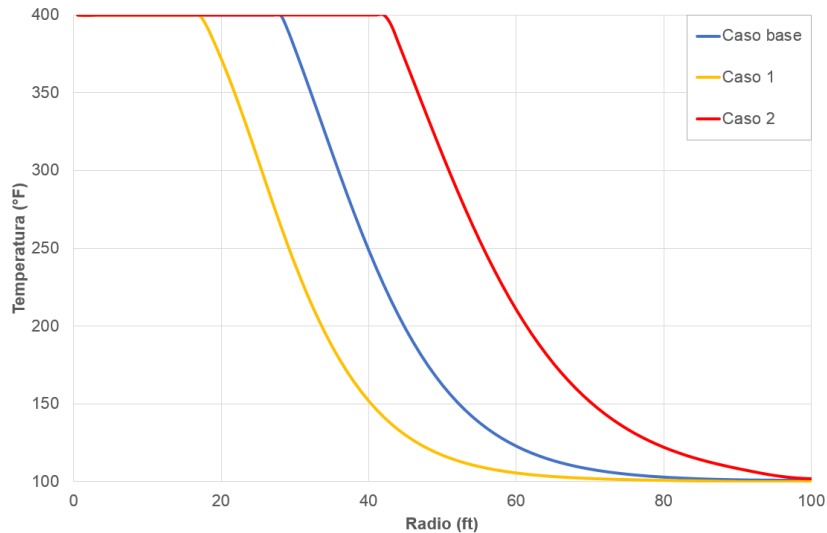
**Tabla 5-3:** Valores de sensibilidad del caudal de inyección

Propiedad	Caso base	Caso 1	Caso 2
Caudal de inyección [bbl/día.ft]	36	20	72

Al igual que las sensibilidades anteriores, en la [Figura 5-11](#) se presentan en conjunto los resultados de los dos casos de sensibilidad del caudal de inyección y del caso base para el tiempo 100000 minutos. La curva amarilla presenta el perfil del caso, en el cual se

considera un caudal de inyección menor que el caudal del caso base, la curva roja presenta el perfil del caso 2, en el cual se considera un caudal de inyección mayor que el caudal del caso base y por último la curva azul representa el perfil de temperatura del caso base.

**Figura 5-11:** Comparación de perfil radial de temperatura del caso base y del caso 4 de la conductividad térmica a diferentes tiempos

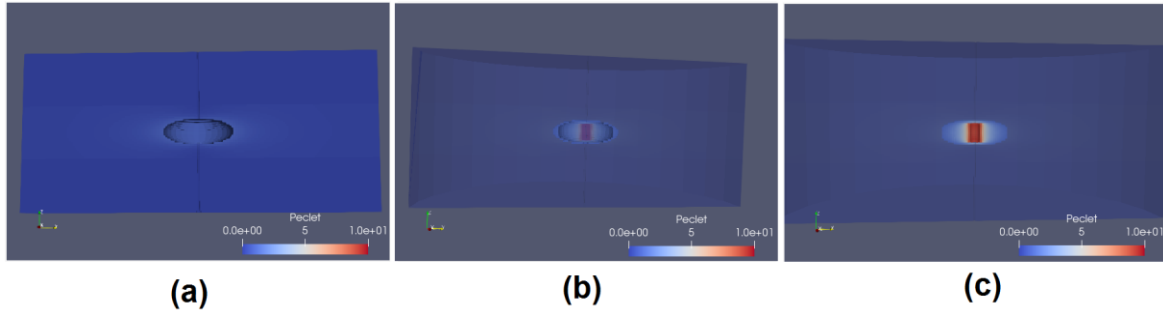


Los resultados de la [Figura 5-11](#) evidencian un comportamiento esperado en términos de que un caudal de inyección menor (caso 1), genere un frente de calor más lento respecto al del caso base. Este comportamiento refuerza aún más el hecho de que los grandes cambios de temperatura dentro del yacimiento responden a la velocidad y dirección de fluido caliente que se mueve en el medio poroso. Así mismo, para el caso 2 los resultados son completamente esperados respecto al incremento del avance del frente de calor como respuesta a un incremento de la velocidad de flujo, dado por un caudal de inyección mayor que el del caso base. Lo que se está evidenciando en este caso es que con el aumento de velocidad se está potenciando el mecanismo de transferencia de calor por convección en el proceso de calentamiento, hecho que genera que a un tiempo dado el frente del caso 2 este por delante del caso base en términos espaciales.

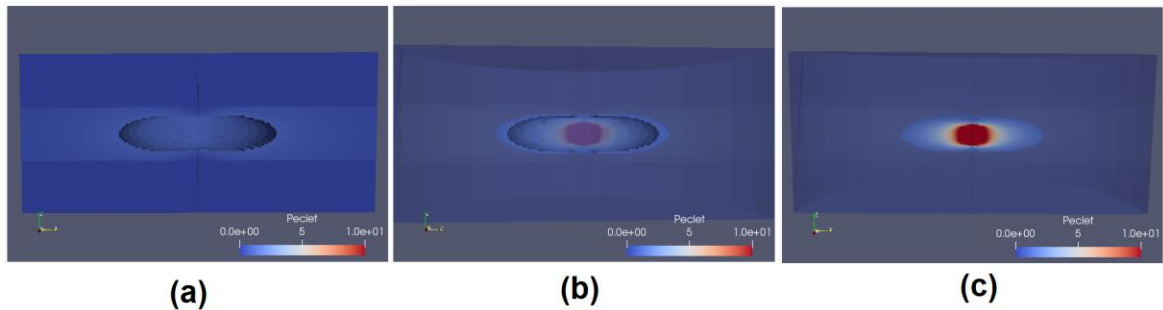
Siguiendo el esquema de los casos de sensibilidad de la conductividad térmica y la capacidad calorífica, la [Figura 5-12](#) y la [Figura 5-13](#) presentan la distribución de bloques en la malla de presión teniendo en cuenta el valor del número de Péclet en cada bloque. Así

mismo, cada rango de análisis representa una zona en la cual el mecanismo de transferencia de calor dominante es la conducción para las gráficas (a), la convección para las gráficas (c) o ambas en similar medida en las gráficas (b).

**Figura 5-12:** Resultados del número de Péclet del caso 1 del caudal de para el tiempo 100000 minutos: **(a)** Número de Péclet entre 0–0.9. **(b)** Número de Péclet entre 0.9–1.1. **(c)** Número de Péclet entre 1.1–10.



**Figura 5-13:** Resultados del número de Péclet del caso 2 del caudal de para el tiempo 100000 minutos: **(a)** Número de Péclet entre 0–0.9. **(b)** Número de Péclet entre 0.9–1.1. **(c)** Número de Péclet entre 1.1–10.



El comportamiento del número de Péclet en la [Figura 5-12](#) es el esperado, teniendo en cuenta que un menor caudal de inyección genera una menor velocidad de flujo, y la magnitud de la velocidad es directamente proporcional al número de Péclet (Ecuación [\(28\)](#)). Así pues, los mayores valores de número de Péclet se presentan en las zonas de mayor velocidad de flujo (cercanías del pozo), pero la extensión de esta zona se encuentra limitada a la rápida disminución de la velocidad de flujo en la medida que se aleje del pozo en dirección del radio externo del yacimiento.

Finalmente, en la [Figura 5-13](#) es de resaltar que debido al aumento de caudal de inyección la zona de preferencia convectiva tiene un incremento considerable en comparación con

el caso 1, lo que indica que el número de Péclet es una variable sensible a cambios en la velocidad de flujo, lo que se traduce en aumentar el aporte de la convección en el fenómeno de la transferencia de calor dentro del medio poroso.

Por último, los resultados de esta sensibilidad evidencian la importancia que tiene la velocidad de flujo, controlada por el caudal de inyección, en la transferencia de calor dentro de un medio poroso, de hecho esta sensibilidad permite confirmar lo que de acuerdo a la teoría se esperaba, en el modelamiento de transferencia de calor a partir de la ecuación difusión-advención en un medio poroso la variable que domina el fenómeno es la velocidad del fluido que se mueve dentro del medio.

## **6. Conclusiones y recomendaciones**

### **6.1 Conclusiones y observaciones**

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en este trabajo de investigación, se presentan a continuación algunos aspectos que permiten relacionar los hallazgos y desarrollos conseguidos con los objetivos que fueron planteados en la introducción de este documento.

En respuesta al objetivo principal de la investigación se construye un módulo computacional que parte de la ecuación advección-difusión en 3 dimensiones y en coordenadas cilíndricas, como modelo matemático, que además es implementado para un modelo físico que representa un yacimiento que está siendo intervenido con inyección de vapor como técnica de recobro térmico. Esta implementación se lleva a cabo con el fin de obtener la variación de los perfiles de temperatura dentro del yacimiento en cuestión como repuesta a la técnica de recobro térmico que está siendo aplicada. Los resultados obtenidos a partir de este módulo computacional, logran acercarse en buena medida a los resultados de un modelo analítico elegido para validación, obteniendo errores cercanos al 6% respecto a los resultados de este modelo. Además, la comparación de los resultados obtenidos con el modelo desarrollado con los resultados de CMG, para los casos de estudio de inyección cíclica e inyección continua de vapor, permite establecer que el modelo de temperatura consigue una buena aproximación del comportamiento de la temperatura dentro de yacimientos de crudo pesado durante una inyección de vapor, y los resultados del modelo se convierten en un insumo para mejorar la precisión de estudios sobre la afectación que tiene la temperatura en diferentes aspectos de los yacimientos de crudo pesado.

Por otra parte, se encuentra que los mecanismos de transferencia de calor que tienen lugar en yacimientos de crudo pesado son la conductividad térmica y la convección. Si bien,

otros mecanismos podrían presentarse en este medio poroso no representan un aporte significativo en comparación con los dos mecanismos de transferencia de calor mencionado. A partir de la revisión teórica sobre mecanismos de transferencia de calor, y sobre el modelamiento de la temperatura durante procesos de inyección de vapor en yacimientos de crudo pesado, es posible concluir que la ecuación advección-difusión es una buena aproximación de la ecuación de energía y logra representar el comportamiento de la temperatura durante procesos de calentamiento de un medio poroso a través de la inyección de un fluido caliente. Además se considera que en un modelo de temperatura regido por la ecuación advección-difusión, la variable que domina la transferencia de calor dentro del medio poroso es la velocidad del fluido en el medio. Se llega a esta apreciación tanto a partir de elementos teóricos como del análisis de la sensibilidad llevada a cabo para el caudal de inyección, el cual domina la velocidad del fluido en el medio poroso. Así mismo se demuestra que la conducción como mecanismo de transferencia de calor es dominante en la parte sólida del medio poroso, mientras que la convección domina en la transferencia de calor en el fluido que satura el mismo medio.

Finalmente, para resolver numéricamente las ecuaciones constitutivas de temperatura se implementa una estrategia de discretización que si bien no es novedosa, no es la forma habitual para conseguir las expresiones numéricas en este tipo de modelamientos. Esta estrategia garantiza que los resultados obtenidos a partir de la solución numérica son consistentes, convergentes y estables numéricamente. Además, a partir del análisis de estabilidad numérica desarrollado en este trabajo es posible determinar que para el problema de la ecuación advección-difusión en 3 dimensiones y en coordenadas cilíndricas los esquemas de Crank-Nicholson y explícito de diferencias finitas no son estables numéricamente.

## 6.2 Recomendaciones

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los casos de inyección cíclica e inyección continua de vapor, se recomienda evaluar formas alternativas de abordar la condición de frontera en las zonas que se definen como abiertas a flujo para producción. En el caso de CSS esta zona es la misma zona de inyección en el pozo y se activa durante la etapa de



producción y para el caso de inyección continua la zona de producción se encuentra definida en la frontera radial externa. Con esta recomendación se busca disminuir la tendencia que tiene el modelo de subestimar la temperatura en las cercanías a la zona de producción.

Otra recomendación importante es integrar la variación de la viscosidad con la temperatura en el modelamiento del flujo de fluidos, esta particularidad permitiría realizar estudios de productividad en los yacimientos de crudo pesado, como respuesta a la técnica de recobro térmico con inyección de vapor que sea implementada.



# A. Apéndice: Solución numérica

## A.1 Discretización en diferencias finitas

Esta sección contiene el desarrollo matemático que describe la metodología mencionada en la Sección 2.3 y parte de la expresión diferencial que permite modelar el fenómeno de la variación de la temperatura durante la inyección de vapor en yacimientos de crudo pesado (Ecuación (22)). Cabe recordar en este punto importantes características del modelo matemático: es un modelo en tres dimensiones, el sistema de referencia usado es cilíndrico y considera que la velocidad puede variar espacial y temporalmente. Dadas estas características la Ecuación (22) se puede expresar de la siguiente forma (Dehghan, 2004):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + M_1 \left[ \left( v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + T \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] \\ - M_2 \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial k_b}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial k_b}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial k_b}{\partial z} \right) \right. \\ \left. + k_b \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (A - 1)$$

Donde:

$$M_1 = \frac{\rho_f C_{pf}}{M}$$
$$M_2 = \frac{1}{M}$$

El término  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$  de la Ecuación (A - 1) puede escribirse así:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (A - 2)$$

Entonces la Ecuación (A - 1) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + M_1 T \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \left( -M_1 v_r + M_2 \frac{\partial k_b}{\partial r} + \frac{M_2 k_b}{r} \right) \frac{\partial T}{\partial r} \\ + \left( \frac{v_\theta M_1}{r} - \frac{M_2}{r} \frac{\partial k_b}{\partial \theta} \right) \frac{\partial T}{\partial \theta} + \left( M_1 v_z - M_2 \frac{\partial k_b}{\partial z} \right) \frac{\partial T}{\partial z} \\ = M_2 k_b \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{M_2 k_b}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + M_2 k_b \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (\text{A - 3})$$

Recordando el último enunciado de las características del modelo físico, las propiedades térmicas en la dirección radial y tangencial permanecen constantes, pero no en la dirección vertical, esta particularidad del modelo hace que los siguientes términos de la Ecuación (A - 3) sean iguales a cero:

$$\frac{\partial k_b}{\partial r} = \frac{\partial k_b}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{A - 4})$$

Teniendo así las cosas, la Ecuación (A - 3) puede expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} = \left( \frac{M_2 k_b}{r} - M_1 v_r \right) \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{v_\theta M_1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \left( M_2 \frac{\partial k_b}{\partial z} - M_1 v_z \right) \frac{\partial T}{\partial z} + M_2 k_b \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \\ + \frac{M_2 k_b}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + M_2 k_b \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - M_1 T \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (\text{A - 5})$$

Discretizando explícitamente el término de la variación de la temperatura con el tiempo de la Ecuación (A - 5) se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} T^{n+1} = T^n + \Delta t \left[ \left( \frac{M_2 k_b}{r} - M_1 v_r \right) \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{v_\theta M_1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \left( M_2 \frac{\partial k_b}{\partial z} - M_1 v_z \right) \frac{\partial T}{\partial z} \right. \\ \left. + M_2 k_b \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{M_2 k_b}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + M_2 k_b \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right. \\ \left. - M_1 T \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A - 6})$$

Es necesario recordar en este punto que la solución numérica resuelve el sistema diferencial planteado para cada punto del dominio discreto, dominio que está definido por el modelo físico. Para este trabajo se considera una discretización en la cual se generan bloques similares a la Figura 2-5 con la particularidad de que el tamaño de bloque en cada dirección es constante, es decir:

$$\Delta r = \text{constante} \quad (\text{A - 7})$$

$$\Delta\theta = \text{constante} \quad (\text{A - 8})$$

$$\Delta z = \text{constante} \quad (\text{A - 9})$$

Pero no necesariamente los deltas son iguales, es decir:

$$\Delta r \neq \Delta\theta \neq \Delta z \quad (\text{A - 10})$$

El esquema de discretización es del tipo nodo centrado, es decir que la Ecuación [\(A - 6\)](#) se resuelve para el punto medio de cada bloque. Dada esta consideración, en adelante para la aplicación de la metodología de solución cada vez que se hable de la solución en un punto en realidad se estará hablando de un bloque.

Tal como se describió en la sección correspondiente al modelo numérico, la intención de aplicar la metodología usada por Tinoco-Guerrero, *et al.* (2018) es construir una expresión discreta que sea consistente con la expresión continua dada por Ecuación [\(A - 6\)](#), esto quiere decir que diferencia entre la expresión discreta y continua tienda a cero. Para esto, se presenta en la Ecuación [\(A - 11\)](#) el operador diferencial de segundo orden ( $\mathcal{L}$ ) para la función temperatura ( $T$ ). Este operador es continuo y representa la forma canónica de la ecuación diferencial de temperatura:

$$\mathcal{L}T = A \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + B \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + C \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + D \frac{\partial T}{\partial r} + E \frac{\partial T}{\partial \theta} + F \frac{\partial T}{\partial z} + GT \quad (\text{A - 11})$$

Donde  $A, B, C, D, E, F$  y  $G$  son funciones dadas.

El siguiente paso es definir una discretización particular alrededor del punto arbitrario  $P_0$  dentro de la malla discreta en el cual se encuentra definida la función temperatura  $T$ . En ese orden de ideas es posible definir el esquema discreto para cada punto de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_0 = \Gamma_0 T(P_0) + \Gamma_1 T(P_1) + \dots + \Gamma_q T(P_q) \quad (\text{A - 12})$$

Donde  $P_1 \cdots P_q$  son los puntos (bloques) contiguos al punto  $P_0$  en cada una de las tres direcciones. Ahora, por consistencia se busca que la diferencia entre el esquema en diferencias finitas (Ecuación (A - 12)) y el esquema continuo dado por la Ecuación (A - 11) tienda a cero a medida que los puntos  $P_1 \cdots P_q$  tiendan a  $P_0$ . Matemáticamente se expresa de la siguiente forma (Strikwerda, 2004):

$$\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}T \rightarrow 0 \quad \text{conforme} \quad P_1 \cdots P_q \rightarrow P_0 \quad (\text{A - 13})$$

Para satisfacer la Ecuación (A - 13) se utiliza una expansión en series de Taylor para la función  $T$  alrededor del punto  $P_0$ , lo cual lleva al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \Delta r_1 & \cdots & \Delta r_q \\ 0 & \Delta \theta_1 & \cdots & \Delta \theta_q \\ 0 & \Delta z_1 & \cdots & \Delta z_q \\ 0 & (\Delta r_1)^2 & \cdots & (\Delta r_q)^2 \\ 0 & (\Delta \theta_1)^2 & \cdots & (\Delta \theta_q)^2 \\ 0 & (\Delta z_1)^2 & \cdots & (\Delta z_q)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(P_0) \\ D(P_0) \\ E(P_0) \\ F(P_0) \\ A(P_0) \\ B(P_0) \\ C(P_0) \end{pmatrix} \quad (\text{A - 14})$$

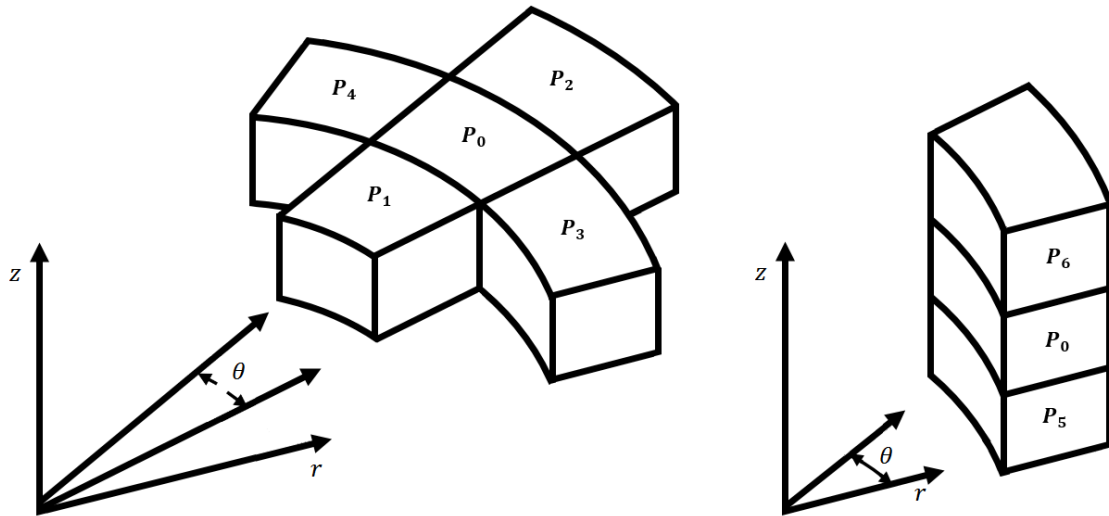
Para el cual los elementos del lado izquierdo se definen a partir de los coeficientes que acompañan las diferentes derivadas de la temperatura en la Ecuación de la (A - 6) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} G(P_0) &= -M_1 \Delta t \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ D(P_0) &= \Delta t \left( \frac{M_2 k_b}{r} - M_1 v_r \right) \\ E(P_0) &= -\Delta t \frac{v_\theta M_1}{r} \\ F(P_0) &= \Delta t \left( M_2 \frac{\partial k_b}{\partial z} - M_1 v_z \right) \\ A(P_0) &= 2\Delta t M_2 k_b \\ B(P_0) &= 2\Delta t \frac{M_2 k_b}{r^2} \\ C(P_0) &= 2\Delta t M_2 k_b \end{aligned} \quad (\text{A - 15})$$

El sistema de ecuaciones definido por la Ecuación (A - 14), no es un sistema cuadrado, dado que no se tienen tantas variables a resolver como términos independientes. Para que el sistema tenga solución debe ser cuadrado, es decir que la cantidad de términos

independientes y de incógnitas debe ser la misma. Para resolver esta situación se debe elegir un arreglo de bloques que contenga al bloque para el cual se define la discretización particular, de tal modo que cada bloque del arreglo se relacione con una incógnita del sistema de ecuaciones de la Ecuación (A - 14). En la Figura A-1 se presenta el arreglo de bloques vecinos al bloque  $P_0$ , que se ha elegido para el modelo numérico y con el cual el sistema de ecuaciones resultante es cuadrado.

**Figura A-1:** Esquema de vecindades del punto  $P_0$



Ahora, cada uno de los elementos del vector  $\Gamma$  se relaciona con un bloque que hace parte de la vecindad de  $P_0$ , tal como lo presenta la Ecuación (A - 16), con el fin de hacer más clara esta relación, se establecen las variables  $i, j, k$  para definir la posición de los bloques en cada una de las direcciones  $r, \theta, z$  respectivamente:

$$\begin{aligned}
 &\text{Sea } P_0 = P_{i,j,k} \text{ entonces} \\
 &\Gamma_0 \text{ se relaciona con } P_{i,j,k} \text{ y sucesivamente} \\
 &\Gamma_1 \rightarrow P_{i-1,j,k} \\
 &\Gamma_2 \rightarrow P_{i+1,j,k} \\
 &\Gamma_3 \rightarrow P_{i,j-1,k} \\
 &\Gamma_4 \rightarrow P_{i,j+1,k} \\
 &\Gamma_5 \rightarrow P_{i,j,k-1} \\
 &\Gamma_6 \rightarrow P_{i,j,k+1}
 \end{aligned}
 \tag{A - 16}$$

Aplicando las relaciones de la Ecuación (A - 16) en el sistema descrito por la Ecuación (A - 14), se tiene el sistema cuadrado dado por la Ecuación (A - 17).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\Delta r & \Delta r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta\theta & \Delta\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta z & \Delta z \\ 0 & (\Delta r)^2 & (\Delta r)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\Delta\theta)^2 & (\Delta\theta)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\Delta z)^2 & (\Delta z)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \Gamma_4 \\ \Gamma_5 \\ \Gamma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(P_0) \\ D(P_0) \\ E(P_0) \\ F(P_0) \\ A(P_0) \\ B(P_0) \\ C(P_0) \end{pmatrix} \quad (\text{A - 17})$$

El sistema de ecuaciones de la Ecuación (A - 17) puede reducirse a un sistema 6x6, ya que la primera ecuación puede expresarse en términos de las otras seis, tal como lo muestran la Ecuación (A - 18) y la Ecuación (A - 19):

$$\begin{pmatrix} -\Delta r & \Delta r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta\theta & \Delta\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta z & \Delta z \\ (\Delta r)^2 & (\Delta r)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\Delta\theta)^2 & (\Delta\theta)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\Delta z)^2 & (\Delta z)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \Gamma_4 \\ \Gamma_5 \\ \Gamma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(P_0) \\ E(P_0) \\ F(P_0) \\ A(P_0) \\ B(P_0) \\ C(P_0) \end{pmatrix} \quad (\text{A - 18})$$

$$\Gamma_0 = G(P_0) - \Gamma_1 - \Gamma_2 - \Gamma_3 - \Gamma_4 - \Gamma_5 - \Gamma_6 \quad (\text{A - 19})$$

El sistema anterior considera que  $\Delta r, \Delta\theta$  y  $\Delta z$  son constantes como se mencionó anteriormente en las ecuaciones (A - 7), (A - 8) y (A - 9), lo cual es consistente con el modelo físico definido para el problema.

Entonces las ecuaciones (A - 18) y (A - 19) deben resolverse en cada bloque para  $\Gamma_0 \cdots \Gamma_6$ . Con esto el esquema discreto de la Ecuación (A - 12) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_0 = \Gamma_0 T(P_0) + \Gamma_1 T(P_1) + \Gamma_2 T(P_2) + \Gamma_3 T(P_3) + \Gamma_4 T(P_4) + \Gamma_5 T(P_5) + \Gamma_6 T(P_6) \quad (\text{A - 20})$$

El esquema discreto definido por la Ecuación (A - 20) para el punto  $P_0$  depende de la obtención de los coeficientes  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$  y  $\Gamma_6$ , con los cuales se garantiza que este esquema es consistente con el planteamiento continuo, lo que por definición es el concepto de consistencia de una solución numérica.



### A.1.1 Estabilidad numérica

El siguiente paso es garantizar la estabilidad numérica de la solución, para lo cual se parte del análisis de estabilidad numérica de Von Neumann que presenta Tinoco-Guerrero, *et al.* (2018) para 2D y se extiende para el caso tridimensional.

La estrategia entonces es llevar el esquema de la Ecuación (A - 20) a la Ecuación (A - 6), lo cual, siguiendo el planteamiento de Tinoco-Guerrero, *et al.* (2018) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 T_{i,j,k}^{n+1} = T_{i,j,k}^n + \theta & \left( \Gamma_0^n T_{i,j,k}^n + \Gamma_1^n T_{i-1,j,k}^n + \Gamma_2^n T_{i+1,j,k}^n + \Gamma_3^n T_{i,j-1,k}^n + \Gamma_4^n T_{i,j+1,k}^n \right. \\
 & \left. + \Gamma_5^n T_{i,j,k-1}^n + \Gamma_6^n T_{i,j,k+1}^n \right) \\
 & + (1 - \theta) \left( \Gamma_0^{n+1} T_{i,j,k}^{n+1} + \Gamma_1^{n+1} T_{i-1,j,k}^{n+1} + \Gamma_2^{n+1} T_{i+1,j,k}^{n+1} + \Gamma_3^{n+1} T_{i,j-1,k}^{n+1} \right. \\
 & \left. + \Gamma_4^{n+1} T_{i,j+1,k}^{n+1} + \Gamma_5^{n+1} T_{i,j,k-1}^{n+1} + \Gamma_6^{n+1} T_{i,j,k+1}^{n+1} \right)
 \end{aligned} \tag{A - 21}$$

La Ecuación (A - 21) representa las posibles combinaciones del esquema de discretización implícito-explicito de diferencias finitas en el espacio para un solo paso en el tiempo. Esto se puede evidenciar asignando diferentes valores entre cero y uno al término  $\theta$ . Por ejemplo, si:

$$\theta = \frac{1}{2} \tag{A - 22}$$

La Ecuación (A - 21) se convierte en un esquema del tipo Crank-Nicholson dado por la Ecuación (A - 23):

$$\begin{aligned}
 T_{i,j,k}^{n+1} = T_{i,j,k}^n + \frac{1}{2} & \left( \Gamma_0^n T_{i,j,k}^n + \Gamma_1^n T_{i-1,j,k}^n + \Gamma_2^n T_{i+1,j,k}^n + \Gamma_3^n T_{i,j-1,k}^n + \Gamma_4^n T_{i,j+1,k}^n \right. \\
 & \left. + \Gamma_5^n T_{i,j,k-1}^n + \Gamma_6^n T_{i,j,k+1}^n \right) \\
 & + \frac{1}{2} \left( \Gamma_0^{n+1} T_{i,j,k}^{n+1} + \Gamma_1^{n+1} T_{i-1,j,k}^{n+1} + \Gamma_2^{n+1} T_{i+1,j,k}^{n+1} + \Gamma_3^{n+1} T_{i,j-1,k}^{n+1} \right. \\
 & \left. + \Gamma_4^{n+1} T_{i,j+1,k}^{n+1} + \Gamma_5^{n+1} T_{i,j,k-1}^{n+1} + \Gamma_6^{n+1} T_{i,j,k+1}^{n+1} \right)
 \end{aligned} \tag{A - 23}$$

Así mismo, si  $\theta$  recibe un valor de 1, el resultante es un esquema explícito de diferencias finitas en el espacio:

$$\begin{aligned}
 T_{i,j,k}^{n+1} = T_{i,j,k}^n + & \left( \Gamma_0^n T_{i,j,k}^n + \Gamma_1^n T_{i-1,j,k}^n + \Gamma_2^n T_{i+1,j,k}^n + \Gamma_3^n T_{i,j-1,k}^n + \Gamma_4^n T_{i,j+1,k}^n \right. \\
 & \left. + \Gamma_5^n T_{i,j,k-1}^n + \Gamma_6^n T_{i,j,k+1}^n \right)
 \end{aligned} \tag{A - 24}$$

Dado que la Ecuación (A - 21) representa un esquema general, el análisis de estabilidad se aplica para este planteamiento y se usa la siguiente convención de números para representar la posición de los bloques vecinos al bloque  $P_0$ :

$$\begin{aligned}
 0 &= i, j, k \\
 1 &= i - 1, j, k \\
 2 &= i + 1, j, k \\
 3 &= i, j - 1, k \\
 4 &= i, j + 1, k \\
 5 &= i, j, k - 1 \\
 6 &= i, j, k + 1
 \end{aligned} \tag{A - 25}$$

Según la propuesta de Von Neumann, la respuesta numérica de la temperatura en un bloque 0 al tiempo  $n$  se puede escribir en términos del factor de amplificación  $R$  y de la función exponencial compleja, tal como se presenta en la siguiente expresión:

$$T_0^n = R^n e^{i(sr_0 + u\theta_0 + wz_0)} \tag{A - 26}$$

El lado derecho de la Ecuación (A - 26) es llamado la función de amplificación y la expresión que acompaña el termino complejo  $\hat{i}$  de la función exponencial, relaciona las coordenadas del espacio de Fourier con las coordenadas cilíndricas del bloque 0 (Strikwerda, 2004).

Lo siguiente es evaluar la Ecuación (A - 26) en la Ecuación (A - 21), de lo que se obtiene:

$$\begin{aligned}
 R^{n+1} e^{i(sr_0 + u\theta_0 + wz_0)} \\
 &= R^n e^{i(sr_0 + u\theta_0 + wz_0)} + \Theta \sum_{l=0}^6 \Gamma_l^n R^n e^{i(s(r_0 + \Delta r_l) + u(\theta_0 + \Delta \theta_l) + w(z_0 + \Delta z_l))} \\
 &+ (1 - \Theta) \sum_{l=0}^6 \Gamma_l^{n+1} R^{n+1} e^{i(s(r_0 + \Delta r_l) + u(\theta_0 + \Delta \theta_l) + w(z_0 + \Delta z_l))}
 \end{aligned} \tag{A - 27}$$

Haciendo las respectivas operaciones se puede obtener:

$$R = 1 + \Theta \sum_{l=0}^6 \Gamma_l e^{i(s\Delta r_l + u\Delta \theta_l + w\Delta z_l)} + (1 - \Theta) \sum_{l=0}^6 \Gamma_l R e^{i(s\Delta r_l + u\Delta \theta_l + w\Delta z_l)} \tag{A - 28}$$

Haciendo

$$N = \sum_{l=0}^6 \Gamma_l e^{i(s\Delta r_l + u\Delta \theta_l + w\Delta z_l)} \tag{A - 29}$$

La Ecuación (A - 28) se puede escribir de la siguiente forma:

$$R = 1 + \Theta N + R(1 - \Theta)N \quad (\text{A - 30})$$

Y despejando  $R$ :

$$R = \frac{1 + \Theta N}{1 + (\Theta - 1)N} \quad (\text{A - 31})$$

Ahora llevando la función exponencial a una expresión en términos de senos y cosenos:

$$e^{i(s\Delta r_l + u\Delta\theta_l + w\Delta z_l)} = \cos(s\Delta r_l + u\Delta\theta_l + w\Delta z_l) + i \sin((s\Delta r_l + u\Delta\theta_l + w\Delta z_l)) \quad (\text{A - 32})$$

Es posible reemplazar  $N$  en la Ecuación (A - 31):

$$R = \frac{1 + \Theta [\sum_{l=0}^6 \Gamma_l \cos(s\Delta r_l + u\Delta\theta_l + w\Delta z_l) + i \sum_{l=0}^6 \Gamma_l \sin((s\Delta r_l + u\Delta\theta_l + w\Delta z_l))]}{1 + (\Theta - 1) [\sum_{l=0}^6 \Gamma_l \cos(s\Delta r_l + u\Delta\theta_l + w\Delta z_l) + i \sum_{l=0}^6 \Gamma_l \sin((s\Delta r_l + u\Delta\theta_l + w\Delta z_l))]} \quad (\text{A - 33})$$

Teniendo en cuenta que el criterio de estabilidad de Von Neumann establece que el módulo del factor de amplificación al cuadrado debe ser menor o igual a uno:

$$|R|^2 \leq 1 \quad (\text{A - 34})$$

Se debe cumplir entonces que:

$$\frac{[1 + \Theta \sum_{l=0}^6 \Gamma_l \cos(s\Delta r_l + u\Delta\theta_l + w\Delta z_l)]^2 + \Theta^2 [\sum_{l=0}^6 \Gamma_l \sin((s\Delta r_l + u\Delta\theta_l + w\Delta z_l))]^2}{[1 + (\Theta - 1) \sum_{l=0}^6 \Gamma_l \cos(s\Delta r_l + u\Delta\theta_l + w\Delta z_l)]^2 + (\Theta - 1)^2 [\sum_{l=0}^6 \Gamma_l \sin((s\Delta r_l + u\Delta\theta_l + w\Delta z_l))]^2} \leq 1 \quad (\text{A - 35})$$

Ahora, definiendo

$$\alpha = \sum_{l=0}^6 \Gamma_l \cos(s\Delta r_l + u\Delta\theta_l + w\Delta z_l) \quad (\text{A - 36})$$

$$\beta = \sum_{l=0}^6 \Gamma_l \sin((s\Delta r_l + u\Delta\theta_l + w\Delta z_l)) \quad (\text{A - 37})$$

La Ecuación (A - 35) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{[1 + \Theta\alpha]^2 + \Theta^2\beta^2}{[1 + (\Theta - 1)\alpha]^2 + (\Theta - 1)^2\beta^2} \leq 1 \quad (\text{A - 38})$$

Despejando  $\Theta$  de la Ecuación (A - 38) se obtiene:

$$\theta \leq \frac{1}{2} - \left| \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \right| \quad (\text{A - 39})$$

La Ecuación (A - 39) permite obtener una expresión para  $\theta$  en términos de  $\alpha$  y  $\beta$ . Es importante resaltar en este punto que la intención de este análisis de estabilidad es encontrar un valor de  $\theta$  que llevado a la Ecuación (A - 21) defina un esquema de diferencias finitas numéricamente estable, lo anterior significa que se deben encontrar valores de  $\alpha$  y  $\beta$  que cumplan la Ecuación (A - 39). Teniendo en cuenta que  $\alpha$  y  $\beta$  dependen de cada punto del dominio y no es posible tener un esquema de diferencia finitas para cada punto, es necesario definir  $\alpha$  y  $\beta$  de tal modo que generen un intervalo unificado de valores de  $\theta$  que sea aplicable para todos los bloques del dominio físico. Queda claro entonces que sin importar el valor de  $\alpha$  y  $\beta$ , es necesario contemplar el intervalo más amplio posible para  $\theta$  de modo que garantice que la estabilidad numérica se cumple en todos los bloques del dominio, esto se logra minimizando el término que resta a  $\frac{1}{2}$  en la Ecuación (A - 39), que matemáticamente es lo siguiente:

$$\left| \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \right| \approx 0 \quad (\text{A - 40})$$

La Ecuación (A - 40) se consigue aplicando para  $\alpha$  y  $\beta$  la expansión en series de Taylor en 3 dimensiones y el criterio de consistencia desarrollado anteriormente. Ahora llevando la Ecuación (A - 40) a la Ecuación (A - 39) es posible establecer que  $\theta$  debe ser menor estrictamente que  $\frac{1}{2}$ :

$$\theta < \frac{1}{2} \quad (\text{A - 41})$$

Como se menciona anteriormente el caso específico de que  $\theta$  sea  $\frac{1}{2}$  conlleva a que la Ecuación (A - 21) represente un esquema del tipo Crank-Nicholson, y que si  $\theta$  es cero corresponde a un esquema implícito de diferencias finitas, esto quiere decir que no tiene sentido que  $\theta$  tenga valores negativos. De esta forma es posible establecer que la Ecuación (A - 21) es estable numéricamente si se cumple que:

$$0 \leq \theta < \frac{1}{2} \quad (\text{A - 42})$$

Y de forma particular cuando:

$$\Theta = 0 \quad (\text{A - 43})$$

Así la Ecuación (A - 21) se puede escribir de acuerdo a la Ecuación (A - 44)

$$T_{i,j,k}^{n+1} = T_{i,j,k}^n + \left( \Gamma_0^{n+1} T_{i,j,k}^{n+1} + \Gamma_1^{n+1} T_{i-1,j,k}^{n+1} + \Gamma_2^{n+1} T_{i+1,j,k}^{n+1} + \Gamma_3^{n+1} T_{i,j-1,k}^{n+1} \right. \\ \left. + \Gamma_4^{n+1} T_{i,j+1,k}^{n+1} + \Gamma_5^{n+1} T_{i,j,k-1}^{n+1} + \Gamma_6^{n+1} T_{i,j,k+1}^{n+1} \right) \quad (\text{A - 44})$$

Con este análisis de estabilidad es posible determinar entonces que para el problema de la ecuación advección-difusión en 3 dimensiones y en coordenadas cilíndricas los esquemas de Crank-Nicholson y explícito de diferencias finitas no son estables numéricamente.

Finalmente, recordando el teorema de Lax presentado en la Sección 2.3 se establece que: dado que la Ecuación (A - 44) representa un planteamiento numérico en diferencias finitas para la ecuación advección-difusión en 3 dimensiones y en coordenadas cilíndricas que es consistente y que es estable numéricamente, entonces este planteamiento también es convergente.

### A.1.2 Planteamiento de los estéciles

Hasta este punto se ha definido un planteamiento numérico para la ecuación advección-difusión en 3 dimensiones y en coordenadas cilíndricas que es consistente, estable y convergente, dado por la Ecuación (A - 44). A continuación, haciendo uso del concepto de estéciles, se definen los coeficientes que alimentan la matriz dispersa que resulta del planteamiento numérico para resolver implícitamente la temperatura. Así, la Ecuación (A - 44) puede escribirse de la siguiente forma:

$$C_{i,j,k} T_{i,j,k}^{n+1} + W_{i,j,k} T_{i-1,j,k}^{n+1} + E_{i,j,k} T_{i+1,j,k}^{n+1} + S_{i,j,k} T_{i,j-1,k}^{n+1} + N_{i,j,k} T_{i,j+1,k}^{n+1} + B_{i,j,k} T_{i,j,k-1}^{n+1} \\ + U_{i,j,k} T_{i,j,k+1}^{n+1} = F_{i,j,k} \quad (\text{A - 45})$$

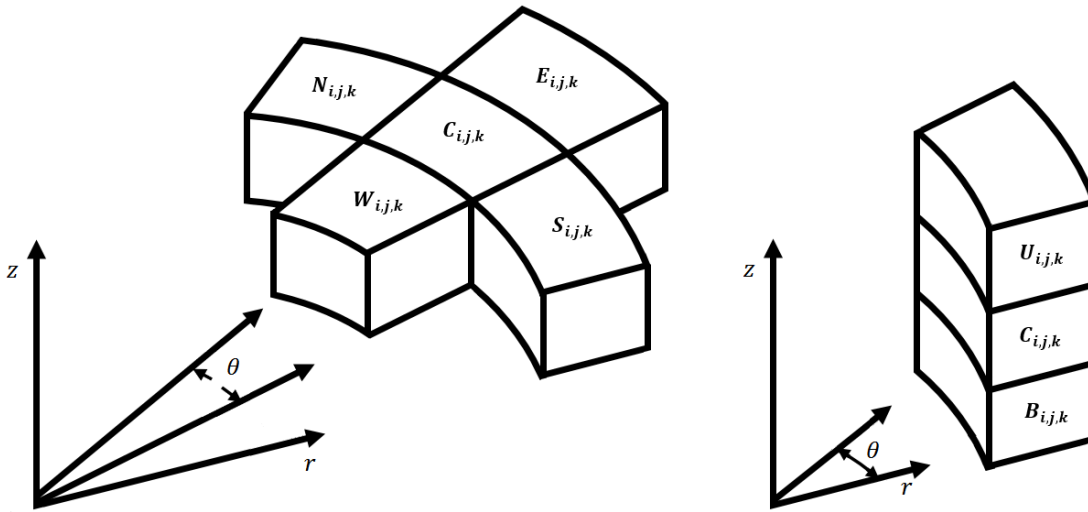
Donde cada uno de los estéciles se definen:

$$C_{i,j,k} = 1 - \Gamma_0^{n+1} \\ W_{i,j,k} = -\Gamma_1^{n+1} \\ E_{i,j,k} = -\Gamma_2^{n+1} \\ S_{i,j,k} = -\Gamma_3^{n+1} \\ N_{i,j,k} = -\Gamma_4^{n+1} \quad (\text{A - 46})$$

$$\begin{aligned}
 B_{i,j,k} &= -\Gamma_5^{n+1} \\
 U_{i,j,k} &= -\Gamma_6^{n+1} \\
 F_{i,j,k} &= T_{i,j,k}^n
 \end{aligned}$$

Aplicando el mismo concepto de estenciles, la vecindad del punto  $P_0$  en la [Figura A-1](#) puede renombrarse de la siguiente forma:

**Figura A-2:** Esquema de estenciles.



Como se mencionó anteriormente, la Ecuación [\(A - 45\)](#) se plantea para cada bloque; entonces es posible generar un sistema de ecuaciones del tipo:

$$AX = B \tag{A - 47}$$

Este sistema de ecuaciones describe el problema para todo el dominio de estudio, donde  $A$  es una matriz dispersa que contiene los términos del lado derecho de la Ecuación [\(A - 45\)](#),  $X$  es un vector que contiene la variable temperatura en cada bloque del dominio y  $B$  es el vector de términos independientes descrito por el lado izquierdo de la misma Ecuación [\(A - 45\)](#).

Este tipo de sistemas no simétricos pueden ser resueltos usando métodos numéricos, en el caso particular se usa el método numérico PARDISO<sup>4</sup> de Intel, ya que el modelo computacional es desarrollado en el lenguaje de programación FORTRAN. Cabe recordar que la Ecuación (A - 45) es aplicable a todos los bloques del dominio que no hagan parte de una frontera, para los bloques frontera es necesario reescribir la Ecuación (A - 45) a partir de la condición de frontera que sea aplicable en cada caso. Las condiciones de frontera son descritas en el modelo físico y en la próxima sección se desarrollan matemáticamente cada una de ellas.

## A.2 Condiciones de frontera

Esta sección contiene las formulaciones matemáticas que describen las condiciones de frontera que fueron presentadas en el modelo físico, la idea es presentar como debe ser modificada la Ecuación (A - 45) en cada bloque frontera. Dado que cada técnica de recobro térmico define de forma diferente las condiciones de frontera del modelo, es necesario plantear también las expresiones matemáticas para las fronteras en cada técnica de recobro.

### A.2.1 Técnica de inyección cíclica de vapor (CSS)

Tal como se presenta en el modelo físico, para la técnica de inyección cíclica se definen frontera radial interna, frontera radial externa, frontera superior y frontera inferior, la primera depende de la etapa (inyección, remojo o producción) del proceso a la cual corresponda el  $\Delta t$  en curso y las otras tres fronteras no dependen de la etapa. A continuación se presentará como se define cada frontera y como se ven afectados los estenciles  $C_{i,j,k}$  y  $F_{i,j,k}$  en cada caso.

---

<sup>4</sup> PARDISO – *Parallel Direct Sparse Solver Interface*, es un método de solución de sistemas simétricos y no simétricos y hace parte de la librería numérica MKL de Intel.  
<https://software.intel.com/en-us/mkl-developer-reference-fortran-intel-mkl-pardiso-parallel-direct-sparse-solver-interface>

▪ **Condición de frontera para  $r = rw$  ( $i = 1$ )**

La condición de temperatura en esta frontera durante la etapa de inyección se rige por la temperatura de inyección en la cara de pozo:

$$T_{wf} = T_{iny} \quad (A - 48)$$

Teniendo en cuenta que la distribución de los radios considera  $\Delta r = constante$  desde el pozo hasta la frontera externa del yacimiento, y haciendo uso del concepto de bloque fantasma, se establece un promedio para calcular la temperatura justo en medio del bloque frontera ( $T_{1,j,k}$ ) y el bloque fantasma ( $T_{0,j,k}$ ), el valor de esta temperatura está dado por la temperatura de inyección.

$$T_{wf} = \frac{T_{1,j,k} + T_{0,j,k}}{2} \quad (A - 49)$$

La idea entonces es poder despejar la temperatura en el bloque fantasma en términos de las temperaturas conocidas, llevando la Ecuación (A - 48) a la Ecuación (A - 49), esta última se puede escribir de la siguiente forma:

$$T_{0,j,k} = 2T_{iny} - T_{1,j,k} \quad (A - 50)$$

Ahora reemplazando la Ecuación (A - 50) en la Ecuación (A - 45) se tiene:

$$C_{i,j,k}T_{i,j,k}^{n+1} + W_{i,j,k}(2T_{iny} - T_{i,j,k}^{n+1}) + E_{i,j,k}T_{i+1,j,k}^{n+1} + S_{i,j,k}T_{i,j-1,k}^{n+1} + N_{i,j,k}T_{i,j+1,k}^{n+1} + B_{i,j,k}T_{i,j,k-1}^{n+1} + U_{i,j,k}T_{i,j,k+1}^{n+1} = F_{i,j,k} \quad (A - 51)$$

Agrupando términos, los estenciles  $C_{i,j,k}$  y  $F_{i,j,k}$  se redefinen de la siguiente forma:

$$C_{i,j,k}^*T_{i,j,k}^{n+1} + E_{i,j,k}T_{i+1,j,k}^{n+1} + S_{i,j,k}T_{i,j-1,k}^{n+1} + N_{i,j,k}T_{i,j+1,k}^{n+1} + B_{i,j,k}T_{i,j,k-1}^{n+1} + U_{i,j,k}T_{i,j,k+1}^{n+1} = F_{i,j,k}^*$$

Donde: (A - 52)

$$C_{i,j,k}^* = C_{i,j,k} - W_{i,j,k}$$

$$F_{i,j,k}^* = T_{i,j,k}^n - W_{i,j,k}2T_{iny}$$

Durante la etapa de producción, en la zona del pozo abierta a flujo se define la frontera de la siguiente forma:



$$T_{wf}^{n+1} = T_{i,j,k}^n \quad (\text{A - 53})$$

Esta expresión indica que se toma la temperatura de la frontera, en un tiempo dado, igual a la temperatura en el bloque contiguo en el tiempo anterior. Conociendo la temperatura en la frontera se repiten los pasos de las ecuaciones [\(A - 48\)](#), [\(A - 50\)](#), [\(A - 51\)](#) y [\(A - 52\)](#).

Durante la etapa de remojo se define condición de frontera de no flujo en todo el pozo. Esta condición está dada por la siguiente expresión:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r_w} = 0 \quad (\text{A - 54})$$

Para que la condición anterior se cumpla, se hace:

$$T_{i,j,k} = T_{i-1,j,k} \quad (\text{A - 55})$$

Llevando la Ecuación [\(A - 55\)](#) a la Ecuación [\(A - 45\)](#), se tiene

$$\begin{aligned} C_{i,j,k}^* T_{i,j,k}^{n+1} + E_{i,j,k} T_{i+1,j,k}^{n+1} + S_{i,j,k} T_{i,j-1,k}^{n+1} + N_{i,j,k} T_{i,j+1,k}^{n+1} + B_{i,j,k} T_{i,j,k-1}^{n+1} \\ + U_{i,j,k} T_{i,j,k+1}^{n+1} = F_{i,j,k} \end{aligned} \quad (\text{A - 56})$$

Donde:

$$C_{i,j,k}^* = C_{i,j,k} + W_{i,j,k}$$

Finalmente, la condición de frontera en la sección del pozo que se encuentra por encima de la zona abierta a flujo se define por el modelo de transferencia de calor en hueco entubado que se describe en la Sección A.3.

- **Condición frontera para  $r = re$  ( $i = nr$ )**

En la frontera radial externa se definió que en todo momento se cumple la siguiente condición:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r_e} = 0 \quad (\text{A - 57})$$

Para que la Ecuación [\(A - 57\)](#) se cumpla es necesario que

$$T_{nr,j,k} = T_{nr+1,j,k} \quad (\text{A - 58})$$

Esto hace que la Ecuación (A - 45) se escriba de la siguiente forma:

$$C_{i,j,k}^* T_{i,j,k}^{n+1} + W_{i,j,k} T_{i-1,j,k}^{n+1} + S_{i,j,k} T_{i,j-1,k}^{n+1} + N_{i,j,k} T_{i,j+1,k}^{n+1} + B_{i,j,k} T_{i,j,k-1}^{n+1} + U_{i,j,k} T_{i,j,k+1}^{n+1} = F_{i,j,k} \quad (\text{A - 59})$$

Donde:

$$C_{i,j,k}^* = C_{i,j,k} + E_{i,j,k}$$

- **Condición frontera superior ( $k = nz$ )**

En la dirección vertical, según el modelo físico, ésta es una frontera de no flujo, y se define de forma similar que la frontera radial externa:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=tope} = 0 \quad (\text{A - 60})$$

Para que la Ecuación (A - 60) se cumpla es necesario que

$$T_{i,j,nz} = T_{i,j,nz+1} \quad (\text{A - 61})$$

Esto hace que la Ecuación (A - 45) se escriba de la siguiente forma:

$$C_{i,j,k}^* T_{i,j,k}^{n+1} + W_{i,j,k} T_{i-1,j,k}^{n+1} + E_{i,j,k} T_{i+1,j,k}^{n+1} + S_{i,j,k} T_{i,j-1,k}^{n+1} + N_{i,j,k} T_{i,j+1,k}^{n+1} + B_{i,j,k} T_{i,j,k-1}^{n+1} = F_{i,j,k} \quad (\text{A - 62})$$

Donde:

$$C_{i,j,k}^* = C_{i,j,k} + U_{i,j,k}$$

- **Condición frontera inferior ( $k = 1$ )**

De forma similar que en la frontera superior, se define la inferior como una frontera de no flujo tal que:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=base} = 0 \quad (\text{A - 63})$$

Para que la Ecuación (A - 63) se cumpla es necesario que

$$T_{i,j,1} = T_{i,j,0} \quad (\text{A - 64})$$

Esto hace que la Ecuación (A - 45) se escriba de la siguiente forma:

$$C_{i,j,k}^* T_{i,j,k}^{n+1} + W_{i,j,k} T_{i-1,j,k}^{n+1} + E_{i,j,k} T_{i+1,j,k}^{n+1} + S_{i,j,k} T_{i,j-1,k}^{n+1} + N_{i,j,k} T_{i,j+1,k}^{n+1} + U_{i,j,k} T_{i,j,k+1}^{n+1} = F_{i,j,k} \quad (\text{A - 65})$$

Donde:

$$C_{i,j,k}^* = C_{i,j,k} + B_{i,j,k}$$

- **Condición de periodicidad en la dirección tangencial**

Cabe destacar que en la dirección tangencial no se tiene condición frontera, por lo que es necesario considerar la periodicidad de la temperatura, es decir que cuando:

$$j = 1 \quad (\text{A - 66})$$

Entonces,

$$j - 1 = j_{nt} \quad (\text{A - 67})$$

De igual forma cuando:

$$j = j_{nt} \quad (\text{A - 68})$$

Entonces:

$$j + 1 = 1 \quad (\text{A - 69})$$

## A.2.2 Técnica de inyección continua de vapor

Las condiciones de frontera del modelo para el caso de una inyección continua son descritas en la sección del modelo físico. A continuación se presenta el desarrollo matemático de las condiciones para las fronteras radial interna y radial externa. Para las fronteras en la dirección vertical se replican las condiciones descritas en la técnica de inyección cíclica para esta dirección. Así mismo, en la dirección tangencial se aplica la misma condición de periodicidad descrita para técnica de inyección cíclica.

- **Condición frontera para  $r = r_w$  ( $i = 1$ )**

Dado que en esta técnica no se tiene diferentes etapas de inyección, sino que en todo momento se está inyectado vapor por la zona abierta a flujo del pozo, se define que la condición frontera en esta zona es la temperatura de inyección, de modo que:

$$T_{wf} = T_{iny} \quad (A - 70)$$

La Ecuación [\(A - 70\)](#), describe la misma condición frontera que en el caso de inyección cíclica para la zona del pozo abierta a flujo durante la etapa de inyección, por lo cual esta condición frontera es representada matemáticamente por la misma Ecuación [\(A - 52\)](#).

Otra de las zonas descritas en la frontera radial interna es la que representa las formaciones superiores a la formación de interés, para definir esta frontera, al igual que en la etapa de inyección de CSS, se usa el modelo de transferencia de calor por conducción en hueco entubado descrito en el Apéndice B.

Finalmente se tiene la frontera que representa las formaciones inferiores a la formación de interés, para la cual se usa también una condición de flujo, tal que:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{rw} = 0 \quad (A - 71)$$

Y las ecuaciones [\(A - 55\)](#) y [\(A - 56\)](#) son usadas para representar esta condición.

- **Condición frontera para  $r = re$  ( $i = nr$ )**

Tal como se presenta en la [Figura 2-3](#) y [Figura 2-4](#) esta frontera se puede dividir en dos zonas: una zona abierta a flujo con el fin de representar un eventual pozo productor y el resto como una frontera de no flujo. La condición de no flujo se cumple:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{re} = 0 \quad (A - 72)$$

Y la Ecuación [\(A - 59\)](#), representa matemáticamente la aplicación de esta condición en el modelo.

La condición usada en los bloques abiertos a flujo en la frontera radial externa es del tipo Dirichlet y se presenta a continuación:

$$T_{re}^{n+1} = T_{nr,j,k}^n \quad (A - 73)$$

Conociendo la temperatura se procede de la siguiente forma:

$$T_{re} = \frac{T_{nr+1,j,k} + T_{nr,j,k}}{2} \quad (\text{A - 74})$$

Despejando  $T_{nr+1,j,k}$  de la Ecuación (A - 74) y llevando a la Ecuación (A - 45) se obtiene la siguiente expresión:

$$C_{i,j,k}T_{i,j,k}^{n+1} + W_{i,j,k}T_{i-1,j,k}^{n+1} + E_{i,j,k}(2T_{re} - T_{i,j,k}^{n+1}) + S_{i,j,k}T_{i,j-1,k}^{n+1} + N_{i,j,k}T_{i,j+1,k}^{n+1} + B_{i,j,k}T_{i,j,k-1}^{n+1} + U_{i,j,k}T_{i,j,k+1}^{n+1} = F_{i,j,k} \quad (\text{A - 75})$$

Organizando términos:

$$C_{i,j,k}^*T_{i,j,k}^{n+1} + W_{i,j,k}T_{i-1,j,k}^{n+1} + S_{i,j,k}T_{i,j-1,k}^{n+1} + N_{i,j,k}T_{i,j+1,k}^{n+1} + B_{i,j,k}T_{i,j,k-1}^{n+1} + U_{i,j,k}T_{i,j,k+1}^{n+1} = F_{i,j,k}^*$$

Donde: (A - 76)

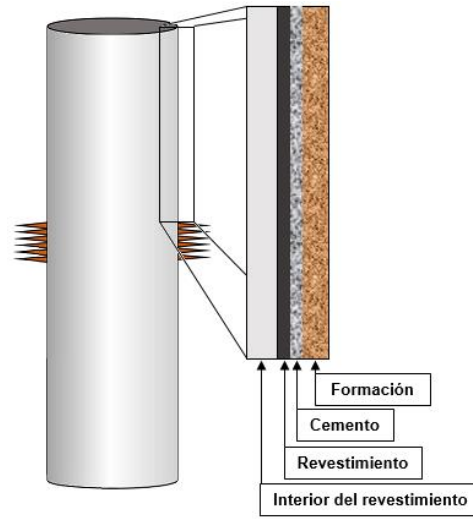
$$C_{i,j,k}^* = C_{i,j,k} + E_{i,j,k}$$

$$F_{i,j,k}^* = T_{i,j,k}^n - E_{i,j,k}2T_{re}$$

### A.3 Modelo de transferencia de calor en hueco entubado

Dadas las condiciones del modelo físico, explicadas en las condiciones de frontera, es necesario definir un modelo de transferencia de calor del pozo a la formación en las zonas que se considera hueco entubado, es decir, el intervalo del pozo que no se encuentra abierto a flujo. Cabe resaltar que en las zonas de hueco entubado se asume que para que el calor llegue desde el interior del pozo hasta la cara de la formación, debe atravesar el espesor del revestimiento y el espesor del cemento, asumiendo para ambos casos que se trata de un medio continuo, la [Figura A-3](#) representa la zona descrita. La inclusión de este modelo permitirá tener una representación más realista del calentamiento de los bloques contiguos al pozo principalmente en las etapas de inyección de vapor.

**Figura A-3:** Detalle de zona del pozo en modelo de calentamiento hueco entubado.



Bird, Steward y Lightfoot (2006), describen el fenómeno de transferencia de calor por conducción en una placa compuesta. La Ecuación (A - 77) representa el flujo de calor que atraviesa una sección transversal  $A_{cas1}$  en el radio interno del revestimiento ( $r_{cas1}$ ), en función de la diferencia de temperaturas entre la temperatura de inyección ( $T_{iny}$ ) y la temperatura en la cara de la formación ( $T_{for}$ ), y que es gobernada por un coeficiente de transferencia de calor combinado  $U_c$ .

$$q_c = U_c A_{cas1} (T_{iny} - T_{for})$$

Donde:

$$A_{cas1} = r_{cas1} \Delta\theta \Delta z$$

(A - 77)

$$U_c = \frac{1}{\left( \frac{r_{cas2}}{r_{cas1} h_f} + \frac{r_{cas1} \ln(r_{cas2}/r_{cas1})}{k_{cas}} + \frac{r_{cas1} \ln(r_{cem}/r_{cas2})}{k_{cem}} \right)}$$

El coeficiente de transferencia de calor combinado  $U_c$ , tiene en cuenta el coeficiente de película que se da entre el flujo de vapor y la pared interna del revestimiento  $h_f$ , las conductividades térmicas del revestimiento ( $k_{cas}$ ) y del cemento ( $k_{cem}$ ) y finalmente los radios interno ( $r_{cas1}$ ) y externo ( $r_{cas2}$ ) del revestimiento y el radio externo de la capa de cemento ( $r_{cem}$ ) (Willhite, 1967).

La intención es conocer la temperatura que alcanza la cara de la formación debido al calor que está fluyendo al interior del pozo, por lo cual de la Ecuación (A - 77) se despeja  $T_{for}$  y se consigue la siguiente expresión:

$$T_{for} = T_{iny} - \frac{q_c}{U_c A_{cas1}} \quad (A - 78)$$

Para el caso específico de la aplicación de este modelo se usa una condición frontera del tipo Neumann, en la cual la transferencia de calor por conducción en la cara del pozo ( $A_{rw}$ ) en el modelo numérico estará gobernado por la ley de Fourier, teniendo en cuenta la conductividad térmica del medio ( $k_b$ ). Para este planteamiento se hace uso del concepto de bloque fantasma y en la nomenclatura usada  $i = 1$  hace referencia a la posición del bloque frontera mientras que  $i = 0$  hace referencia al bloque fantasma.

$$q_c = -k_b A_{rw} \frac{T_{i=1} - T_{i=0}}{\Delta r}$$

Donde: (A - 79)

$$\Delta r = r_{i=1} - r_{i=0}$$

$$A_{rw} = rw \Delta \theta \Delta z$$

Haciendo  $C_1 = -\frac{k_b A_{rw}}{\Delta r}$  la Ecuación a-60 puede escribirse

$$q_c = C_1 (T_1 - T_0) \quad (A - 80)$$

Además, se define que la temperatura en la cara de formación está dado por el promedio entre la temperatura en el bloque  $i = 1$  y la temperatura en el bloque  $i = 0$ .

$$T_{for} = \frac{T_1 + T_0}{2} \quad (A - 81)$$

Aplicando las ecuaciones (A - 80) y (A - 81) en la Ecuación (A - 78) se tiene

$$\frac{T_1 + T_0}{2} = T_{iny} - \frac{C_1 (T_1 - T_0)}{U_c A_{cas1}} \quad (A - 82)$$

Haciendo  $C_2 = -\frac{C_1}{U_c A_{cas1}}$  la Ecuación (A - 82) puede escribirse como

$$\frac{T_1 + T_0}{2} = T_{iny} + C_2(T_1 - T_0) \quad (A - 83)$$

Ahora despejando  $T_0$  se tiene

$$T_0 = \frac{2}{(1 + 2C_2)} T_{iny} + \frac{(2C_2 - 1)}{(1 + 2C_2)} T_1 \quad (A - 84)$$

La Ecuación (A - 84) permite representar la transferencia de calor por conducción desde el interior del revestimiento hasta la cara de la formación, y es considerada condición frontera para los bloques que se encuentran en  $rw$  y en las formaciones superiores a la formación de interés. Las siguientes ecuaciones evidencian como debe ser modificada la Ecuación (A - 45) para estos bloques frontera.

Llevando la Ecuación (A - 84) a la Ecuación (A - 45) se obtiene:

$$C_{i,j,k} T_{i,j,k}^{n+1} + W_{i,j,k} \left( \frac{2}{(1 + 2C_2)} T_{iny} + \frac{(2C_2 - 1)}{(1 + 2C_2)} T_{i,j,k}^{n+1} \right) + E_{i,j,k} T_{i+1,j,k}^{n+1} + S_{i,j,k} T_{i,j-1,k}^{n+1} \quad (A - 85)$$

$$+ N_{i,j,k} T_{i,j+1,k}^{n+1} + B_{i,j,k} T_{i,j,k-1}^{n+1} + U_{i,j,k} T_{i,j,k+1}^{n+1} = F_{i,j,k}$$

Organizando términos:

$$C_{i,j,k}^* T_{i,j,k}^{n+1} + E_{i,j,k} T_{i+1,j,k}^{n+1} + S_{i,j,k} T_{i,j-1,k}^{n+1} + N_{i,j,k} T_{i,j+1,k}^{n+1} + B_{i,j,k} T_{i,j,k-1}^{n+1} \quad (A - 86)$$

$$+ U_{i,j,k} T_{i,j,k+1}^{n+1} = F_{i,j,k}^*$$

Donde:

$$C_{i,j,k}^* = C_{i,j,k} + W_{i,j,k} \left( \frac{(2C_2 - 1)}{(1 + 2C_2)} \right)$$

$$F_{i,j,k}^* = F_{i,j,k} - W_{i,j,k} \left( \frac{2}{(1 + 2C_2)} T_{iny} \right)$$

La principal restricción para implementar esta condición frontera es poder calcular el coeficiente de transferencia de calor combinado  $U_c$ , dado que no es común tener información del coeficiente de película. Willhite (1967), presenta valores del coeficiente de película entre el flujo de vapor y la pared interna del revestimiento y las conductividades térmicas del revestimiento y del cemento, valores que pueden ser usados como referencia, en el caso que no se conozcan.



## B. Apéndice: Gradiente geotérmico

Por definición el gradiente geotérmico es la tasa a la cual aumenta la temperatura con la profundidad dentro de la corteza terrestre. Este gradiente es de gran importancia en zonas de actividad volcánica, ya que los procesos volcánicos están relacionados a altas temperaturas, por lo que la temperatura en las formaciones cercanas a estas zonas también se verá afectada en gran medida (Peters, Kacewicz & Curry, 2012). Solo en estos casos es importante tener una forma rigurosa en la estimación del gradiente geotérmico, de lo contrario una buena aproximación para estimar la temperatura en las diferentes formaciones es asumir que esta sigue una tendencia lineal, donde el factor de crecimiento está dado por el gradiente geotérmico (Moses, 1961). La Ecuación (B - 1) permite calcular la temperatura en un punto, dada su profundidad y con el gradiente geotérmico conocido.

$$T_p = (GT * TVD) + T_0 \quad (B - 1)$$

Donde  $T_p$  es la temperatura en el punto a estimar,  $GT$  es el gradiente geotérmico,  $TVD$  es la profundidad real (*True Vertical Depth*) y  $T_0$  corresponde a la temperatura en superficie. Alrededor del mundo el gradiente geotérmico varía en un rango promedio entre 0.013 y 0.022 °F/ft con casos extremos en zonas de alta influencia volcánica (Peters, Kacewicz y Curry, 2012).

Para el caso específico del modelo, el gradiente geotérmico será considerado como condición inicial de temperatura, es decir, el estado en el cual se encuentra la temperatura una vez es perforado el pozo y aún no se ha llevado a cabo un proceso de producción ni de inyección en él, en adelante la temperatura está dada en cada instante por los procesos que se desarrollen en el pozo. En el caso que no se conozca el gradiente geotérmico se asumirá que es 0.017 °F/ft en la profundidad de referencia (mitad del intervalo de inyección).



## Bibliografía

- Aghabarati, M. (2017). Reanalyzing Thermocouple Temperature Response for Evidence of Convective Flow (Tesis de Maestría). University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.
- Ahrens, J., Geveci, B., & Law, C. (2005). ParaView: An End-User Tool for Large Data Visualization. En C. Hansen & C. Johnson (Eds.), *The Visualization Handbook* (pp. 717 – 731). Burlington, Massachusetts, USA: Elsevier.
- Alboudwarej, H., Badry, R., Baker, A., Beshry, M., Bremner, C., Brough, B., ... West, C. (2006). Highlighting Heavy Oil. *Oilfield Review*, 18(2), 34–53.
- Ali, F. (2003). Heavy Oil - Evermore Mobile. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 37(1-2), 5-9. [https://doi.org/10.1016/S0920-4105\(02\)00307-8](https://doi.org/10.1016/S0920-4105(02)00307-8).
- Ali, F. (1997). Is There Life After SAGD?. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 36(6), 20-23. <https://doi.org/10.2118/97-06-DAS>.
- Alvarez, J. & Han, S. (2013). Current Overview of Cyclic Steam Injection Process. *Journal of Petroleum Science Research*, 2(3), 116-127.
- Appadu, A. (2013). Numerical Solution of the 1D Advection-Diffusion Equation Using Standard and Nonstandard Finite Difference Schemes. *Journal of Applied Mathematics*, 2013, 1-14. <http://dx.doi.org/10.1155/2013/734374>.
- Aziz, K. & Settari, A. (1979). *Petroleum Reservoir Simulation*. Londres: Applied Science Publishers Ltd.
- Barends, F. (2010). Complete Solution for Transient Heat Transport in Porous Media, Following Lauwerier's Concept. Artículo presentado en *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, 19–22 Septiembre, Florencia, Italia: Society of Petroleum Engineers. <http://doi.org/10.2118/134670-MS>.
- Biot, M. & Willis, D. (1957). The elastic coefficients of the theory of consolidation. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 24, 594-601.
- Bird, R., Stewart, W., & Lightfoot, E. (2006). *Fenómenos de Transporte*. 2a ed. México D.F.: Limusa Wiley.

- Boberg, T., & Lantz, R. (1966). Calculation of the Production Rate of a Thermally Stimulated Well. *Journal of Petroleum Technology*, 18(12), 1613-1623. <http://dx.doi.org/10.2118/1578-PA>.
- Boley, B., & Weiner, J. (1960). *Theory of Thermal Stresses*. New York, USA: Dover Publications, Inc.
- Booker, J., & Savvidou, C. (1983). Consolidation around a Spherical Heat Source. *International Journal of Solids and Structures*, 20(11), 1079-1090. [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683\(84\)90091-X](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683(84)90091-X).
- Butler, R., & Stephens, D. (1981). The Gravity Drainage of Steam-heated Heavy Oil to Parallel Horizontal Wells. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 20(02), 90-96. <https://doi.org/10.2118/81-02-07>.
- Butler, R. (1998). SAGD Comes of AGE!. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 37(7), 9-12. <https://doi.org/10.2118/98-07-DA>.
- Caputo, M. (1999). Diffusion of Fluids in Porous Media with Memory. *Geothermics*, 28(1), 113-130. [http://dx.doi.org/10.1016/S0375-6505\(98\)00047-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0375-6505(98)00047-9).
- Chekhonin, E., Parshin, A., Pissarenko, D., Popov, Y., Romushkevich, R., Safonov, S., Spasennykh, M., Chertenkov, M., & Stein, V. (2012). When Rocks Get Hot: Thermal Properties of Reservoir Rocks. *Oilfield Review*, 24(3), 20-37.
- Cicek, O. (2005a). Numerical Simulation of Steam Displacement of Oil in Naturally Fractured Reservoirs Using Fully Implicit Compositional Formulation: A Comparative Analysis of the Effects of Capillary and Gravitational Forces in Matrix/Fracture Exchange Term. Artículo presentado en *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, 9–12 Octubre, Dallas, Texas, USA: Society of Petroleum Engineers. <https://doi.org/10.2118/97005-MS>.
- Cicek, O. (2005b). A Parametric Study of the Effects of Reservoir and Operational Properties on the Performance of Steam Displacement of Heavy Oil in Naturally Fractured Reservoirs. Artículo presentado en *SPE International Thermal Operations and Heavy Oil Symposium*, 1–3 Noviembre, Calgary, Alberta, Canada: Society of Petroleum Engineers. <https://doi.org/10.2118/97896-MS>.
- Civan, F. (2010). Non-Isothermal Permeability Impairment by Fines Migration and Deposition in Porous Media Including Dispersive Transport. *Transport in Porous Media*, 85(1), 233-258. <https://doi.org/10.1007/s11242-010-9557-0>.

- Cui, W., Gawecka, K., Pott, D., Taborda, D., & Zdravkovic, L. (2016). Numerical Analysis of Coupled Thermo-Hydraulic Problems in Geotechnical Engineering. *Geomechanics for Energy and the Environment*, 6, 22-34. <http://doi.org/10.1016/j.gete.2016.03.002>.
- Curtis, C., Kopper, R., Decoster, E., Guzmán-Carcia, A., Huggins, C., Knauer, L., ... Waite, M. (2002). Heavy-Oil Reservoirs. *Oilfield Review*, 14(3), 30–51.
- Dehghan, M. (2004). Numerical Solution of the Three-Dimensional Advection-Diffusion Equation. *Applied Mathematics and Computation*, 150(1), 5-19. [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(03\)00193-0](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00193-0).
- Dehghan, M. (2005). On the numerical solution of the one-dimensional convection-diffusion equation. *Mathematical Problems in Engineering*, 2005(1), 61-74. <http://dx.doi.org/10.1155/MPE.2005.61>.
- Dusseault, M. (1993). Stress Changes in Thermal Operations. Artículo presentado en *International Thermal Operations Symposium*, 8-10 Febrero, Bakersfield, California, USA: Society of Petroleum Engineers. <http://doi.org/10.2118/25809-MS>.
- Elam, S., Tokura, I., Saito, K., & Altenkirch, R. (1989). Thermal conductivity of crude oils. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 2(1), 1-6. [https://doi.org/10.1016/0894-1777\(89\)90043-5](https://doi.org/10.1016/0894-1777(89)90043-5).
- Ghannadi, S., Irani, M., & Chalaturnyk, R. (2014). Understanding the Thermo-Hydro-Mechanical Pressurization in Two-Phase (Steam/Water) Flow and its Application in Low-Per Caprock Formation in SAGD Project. *SPE Journal*, 19(6), 1126 - 1150. <https://doi.org/10.2118/165544-PA>.
- Gontijo, J., & Aziz, K. (1984). A Simple Analytical Model for Simulating Heavy Oil Recovery by Cyclic Steam in Pressure-Depleted Reservoirs. Artículo presentado en *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, 16-19 Septiembre, Houston, Texas, USA: Society of Petroleum Engineers. <http://dx.doi.org/10.2118/13037-MS>.
- Hojka, K., & Dusseault, M. (1990). An Analytical Solution for the Steady-State Temperature and Stress Fields around a Borehole during Fluid Injection. Society of Petroleum Engineers. SPE-21632-MS.
- Hojka, K., Dusseault, M., & Bogobowicz, A. (1993). Analytical Solutions for Transient Thermoelastic Stress Fields around a Borehole during Fluid Injection into Permeable Media. *The Journal of Canadian Petroleum Technology*, 32(4), 49-57. <http://dx.doi.org/10.2118/93-04-03>.
- Hossain, M., Mousavizadegan, S., & Islam, M. (2007). Rock and Fluid Temperature Changes during Thermal Operation in EOR Process. *Journal of Nature Science and Sustainable Technology*, 2(3), 347-378.

- Hossain, M., Mousavizadegan, S., & Islam, M. (2008). The Effects of Thermal Alterations on Formation Permeability and Porosity. *Petroleum Science and Technology*, 26(10-11), 1282-1302. <http://dx.doi.org/10.1080/10916460701834028>.
- Hossain, M., Mousavizadegan, S., & Islam, M. (2009). Effects of Memory on the Complex Rock-Fluid Properties of a Reservoir Stress-Strain Model. *Petroleum Science and Technology*, 27(10), 1109-1123. <http://dx.doi.org/10.1080/10916460802455970>.
- Hossain, M., & Abu-Khamsin, S. (2012). Utilization of Memory Concept to Develop Heat Transfer Dimensionless Numbers for Porous Media Undergoing Thermal Flooding with Equal Rock-Fluid Temperatures. *Journal of Porous Media*, 15(10), 937-953. <http://dx.doi.org/10.1615/JPorMedia.v15.i10.50>.
- Hosseini, B. (2015). Use of Streamline Simulation in Large Scale Reservoir-Geomechanical Modeling of Reservoirs (Tesis de doctorado). University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.
- Jones, J. (1981). Steam Drive Model for Hand-Held Programmable Calculators. *Journal of Petroleum Technology*, 33(9), 1583-1598. <https://doi.org/10.2118/8882-PA>.
- Kaviany, M. (2001). *Principles of Convective Heat Transfer*. 2a ed. New York: Springer.
- Kocabas, I. (2004). Thermal Transients during Nonisothermal Fluid Injection into Oil Reservoirs. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 42(2-4), 133-144. <http://doi.org/10.1016/j.petrol.2003.12.006>.
- Lauwerier, H. (1954). The Transport of Heat in an Oil Layer Caused by the Injection of Hot Fluid. *Applied Scientific Research*, 5(2), 145-150. <http://dx.doi.org/10.1007/BF03184614>.
- Liu, W. (1997). *Steam Injection Technology to Produce Heavy Oils*. Beijing, China: Petroleum Industry Press.
- Mandl, G., & Volek, C. (1969). Heat and Mass Transport in Steam-Drive Processes. *Society of Petroleum Engineers Journal*. 9(01), 59-79. <http://dx.doi.org/10.2118/2049-PA>.
- Marx, J., & Langenheim, R. (1959). Reservoir Heating by Hot Fluid Injection. *Petroleum Transactions*, 216(1), 312-315. SPE-1266-G.
- Maya, G., Mercado, D., Castro, R., Trujillo, M., Soto, C., Perez, H., Lobo, A., Ordoñez, A., Sandoval, J. (2013). Enhanced Oil Recovery (EOR) Status - Colombia. Artículo presentado en *SPE Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference*, 1-3 Diciembre, Lima, Perú: Society of Petroleum Engineers. <https://doi.org/10.2118/139199-MS>.

- Milhem, M., & Ahmed, K. (1987). Performance of a Pilot Cyclic Steam Stimulation Project in Kuwait. Artículo presentado en *Fifth SPE Middle East Oil Show*, 7-10 Marzo, Manama, Bahrein: Society of Petroleum Engineers. <http://doi.org/10.2118/15733-MS>.
- Ministerio de Minas y Energía. (2013). *Memorias al Congreso de la República 2012-2013*. Recuperado de <https://www.minminas.gov.co/documents/10180/614096/2-Hidrocarburos.pdf/75855d82-def9-4ccb-9fe4-2d4ee97f9123>.
- Moses, P. (1961). Geothermal Gradients. Artículo presentado en *The Spring Meeting of the Southern District, Division of Production*, Marzo, Shreveport, Louisiana, USA: American Petroleum Institute.
- Mozaffari, S., Nikookar, M., Ehsani, M., Sahranavard, L., Roayaie, E., & Mohammadi A. (2013). Numerical Modeling of Steam Injection in Heavy Oil Reservoirs. *Fuel*, 112, 185-192. <https://doi.org/10.1016/j.fuel.2013.04.084>.
- Myhill, N., & Stegemeier, G. (1978). Steam-drive Correlation and Prediction. *Journal of Petroleum Technology*, 30(2), 173-182. <http://dx.doi.org/10.2118/5572-PA>.
- Nowacki, W. (1962). *Thermo-Elasticity*. 2nd ed. Varsovia, Polonia: Pergamon Press.
- Obembe, A., Abu-Khamsin, S., & Hossain, M. (2016). A Review of Modeling Thermal Displacement Processes in Porous Media. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 41(12), 4719-4741. <http://dx.doi.org/10.1007/s13369-016-2265-5>.
- Peters, K., Kacwicz, M., & Curry, D. (2012). An Overview of Basin and Petroleum System Modeling: Definitions and Concepts. En Peters, K., Kacwicz, M., & Curry, D. (Eds.), *Hedberg 4 - Basin Modeling: New Horizons in Research and Applications* (1-16), Tulsa, Oklahoma, USA: AAPG.
- Prats, M. (1969). The Heat Efficiency of Thermal Recovery Processes. *Journal of Petroleum Technology*, 21(3), 323-332. <https://doi.org/10.2118/2211-PA>.
- Prats, M. (1992). The Heat Efficiency of Thermal Recovery Processes Resulting From Non-Uniform Vertical Temperature Profiles. Artículo presentado en *SPE Latin America Petroleum Engineering Conference*, 8-11 Marzo, Caracas, Venezuela: Society of Petroleum Engineers. <https://doi.org/10.2118/23744-MS>.
- Putra, E., Rachman, Y., Firmanto, T., Arsyadanie, R., & Hafizh, G. (2011). Case Study: Cyclic Steam Stimulation in Sihapas Formation. Artículo presentado en *SPE Asia Pacific Oil and Gas Conference and Exhibition*, 20-22 Septiembre, Jakarta, Indonesia: Society of Petroleum Engineers. <http://doi.org/10.2118/147811-MS>.
- Ramey, H. (1959). Discussion of Reservoir Heating by Hot Fluid Injection. *Petroleum Transactions*, 216(1), 363-365. SPE-1266-G.

- Schiffman, R. (1971). A Thermoelastic Theory of Consolidation. Artículo presentado en *The Winter Annual Meeting of the ASME*, 30 Noviembre, Washington D.C., USA: American Society of Mechanical Engineers.
- Sheng, J. (2013). *Enhanced Oil Recovery Field Case Studies*. Waltham, Massachusetts, USA: Elsevier.
- Speight, J. (2006). *The Chemistry and Technology of Petroleum*. 4a ed. Boca Raton, Florida, USA: Taylor and Francis Group.
- Speight, J. (2013). *Heavy Oil Production Processes*. Waltham, Massachusetts, USA: Elsevier.
- Spillette, A. (1965). Heat Transfer During Hot Fluid Injection Into an Oil Reservoir. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 4(4), 213-218. <https://doi.org/10.2118/65-04-06>.
- Somerton, W. (1992). *Thermal properties and temperature-related behavior of rock/fluid systems*. Amsterdam, Países Bajos: Elsevier.
- Strikwerda, J. (2004). *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. 2a ed. Madison, Wisconsin, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Szymkiewicz, R. (2010). *Numerical Modeling in Open Channel Hydraulics*. Dordrecht, Países Bajos: Springer.
- Temizel, C., Gorucu, S., Erdogan, S., & Tiwari, A. (2015). Optimization of Cyclic Steam Stimulation (CSS) Under Geomechanics-Dependent Permeability. Artículo presentado en *SPE Russian Petroleum Technology Conference*, 26-28 Octubre, Moscú, Rusia: Society of Petroleum Engineers. <https://doi.org/10.2118/176716-MS>.
- Thomas, S. (2008). Enhanced Oil Recovery – An Overview. *Oil & Gas Science and Technology*, 63(1), 9-19. <https://doi.org/10.2516/ogst:2007060>.
- Tinoco-Guerrero, G., Domínguez-Mota, F., Gaona-Arias, A., Ruiz-Zavala, M y Tinoco-Ruiz, J. (2018). A Stability Analysis for a Generalized Finite-difference Scheme Applied to the Pure Advection Equation. *Mathematics and Computers in Simulation*, 147, 293-300. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2017.06.001>.
- Uribe-Patiño, J., Alzate-Espinosa, G., & Arbeláez-Londoño, A. (2017). Geomechanical Aspects of Reservoir Thermal Alteration: A Literature Review. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 152, 250-266. <http://doi.org/10.1016/j.petrol.2017.03.012>.
- Wei, S., Cheng, L., Huang, S., & Huang, W. (2014). Steam Chamber Development and Production Performance Prediction of Steam Assisted Gravity Drainage. Artículo



presentado en *SPE Heavy Oil Conference-Canada*, 10-12 Junio, Calgary, Alberta, Canadá: Society of Petroleum Engineers. <https://doi.org/10.2118/170002-MS>.

Willhite, G. (1967). Over-all Heat Transfer Coefficients in Steam and Hot Water Injection Wells. *Journal of Petroleum Technology*, 19(5), 607-616. <https://doi.org/10.2118/1449-PA>.

Willman, B., Valleroy, V., Runberg, G., Cornelius, A., & Powers, L. (1961). Laboratory Studies of Oil Recovery by Steam Injection. *Journal of Petroleum Technology*, 13(7), 681-690. <https://doi.org/10.2118/1537-G-PA>.

Yuan, W. (2015). Analytical Model for Fluid Flow Coupling with Heat Transfer Integrating Heat Conduction and Convection in Radial System (Tesis de Maestría). University of Regina, Saskatchewan, Regina, Canada.