UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

El problema de Cauchy asociado a una ecuación del tipo rBO-ZK

Fabián Sánchez Salazar

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2015

El problema de Cauchy asociado a una ecuación del tipo rBO-ZK

Fabián Sánchez Salazar

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Doctor en Ciencias-Matemáticas

Director(a):
Ph.D. Félix Humberto Soriano Méndez

Línea de Investigación:
Ecuaciones Diferenciales Parciales

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2015

A mis padres, Gustavo y Luz Estella
y mis hermanos, Walter y Edwin.

Agradecimientos

A mi director, profesor y amigo, Félix Soriano, por sus valiosas enseñanzas, apoyo y orientación en la realización de este trabajo.

A mis profesores de posgrado de la Universidad Nacional, Germán Fonseca, Guillermo Rodríguez y Serafín Bautista por hacer parte de este proceso de formación.

Agradezco al profesor Felipe Linares por sus consejos, apoyo y orientación durante la pasantia que realicé en el Instituto de Matemática Pura y Aplicada, IMPA, Rio de Janeiro-Brasil.

A mis padres, Gustavo y Luz Estella, y a mis hermanos, Walter y Edwin, gracias por su apoyo durante todo este proceso.

Finalmente, agradezco a Colciencias, que con su programa de Becas para estudios de Doctorados en Colombia hizo posible la culminación de mis estudios.

Resumen

En el presente trabajo se estudia el problema de Cauchy asociado a la ecuación regularizada Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov en espacios Sobolev anisotrópicos con pesos, $F^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2) = H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) \cap L^2([(1+x^2)^{r_1} + (1+y^2)^{r_2}]\,dxdy)$. Se obtiene una propiedad de continuación única, mal planteamiento en espacios de Sobolev de índice negativo, existencia global para dato pequeño, existencia de estados de dispersión y existencia, regularidad y analiticidad de ondas solitarias.

Palabras claves : Ecuación rBO-ZK, buena colocación, espacios de Sobolev con pesos, ondas solitarias

Abstract

In this paper we study the Cauchy problem associated to the Regularized Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznersov equation in anisotropic weigthed Sobolev spaces, $F^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2) = H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) \cap L^2([(1+x^2)^{r_1} + (1+y^2)^{r_2}]\,dxdy)$. It's obtained a result in unique continuation property, ill-posedness in Sobolev spaces with negative indices, global existence for small data, existence of dispersion states and existence, regularity and analyticity of solitary waves

Keywords: rBO-ZK equation, well-posedness, weigthed Sobolev spaces, solitary waves.

Índice general

Notaciones

En este trabajo hacemos uso sistemático de las siguientes notaciones.

1. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de Schwartz. Si $n = 2$, escribiremos simplemente $\mathcal{S}$.

2. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de las distribuciones temperadas. Si $n = 2$, escribiremos simplemente $\mathcal{S}'$.

3. Para $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{f}$ es la transformada de Fourier de f y $\check{f}$ es la transformada inversa de Fourier de f. Recordamos que

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\langle x,\xi\rangle} dx,$$

   para toda $\xi \in \mathbb{R}^n$, cuando $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

4. $\mathscr{H}$ es la transformada de Hilbert. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\mathscr{H} f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y-x} f(y)\, dy \right).$$

5. Para $s \in \mathbb{R}$, $H^s = H^s(\mathbb{R}^2)$ es el espacio de Sobolev de orden s.

6. El producto interno en H^s es $\langle f, g\rangle_s = \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \xi^2 + \eta^2)^s \widehat{f}\overline{\widehat{g}} d\xi d\eta$.

7. Para s_1, y $s_2 \in \mathbb{R}$, denotamos $H^{s_1,s_2} = H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ el espacio de Sobolev anisotrópico definido en la introducción.

8. Para s_1, $s_2 \in \mathbb{R}$ y $p > 1$, denotamos $H_p^{s_1,s_2} = H_p^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ el espacio de Sobolev anisotrópico de las funciones en L^p tales que sus derivadas fraccionarias $D_x^{s_1}$ y $D_y^{s_2}$ están asimismo en L^p.

9. $\Lambda^s = (1 - \Delta)^{s/2}$.

10. $L_{p,s}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \,\big|\, \Lambda^s f \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$.

11. Para $f \in L_{p,s}(\mathbb{R}^2)$, $\|f\|_{p,s} = \|\Lambda^s f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$.

12. $[A, B]$ notará el conmutador de A y B.

1 Introducción

Las ecuaciones no lineales de evolución juegan un importante papel en diferentes áreas de la ciencia y la ingeniería. Cabe mencionar algunas de ellas: la mecánica de fluidos, la física del plasma, la fibra óptica, la física del estado sólido, la cinética química, la física química y la geoquímica, entre otras. A partir del estudio de las soluciones de éstas, se intentan entender los efectos de dispersión, difusión, reacción y convección asociados a los modelos descritos por estas. Por ejemplo, la ecuación Korteweg-de Vries

$$u_t = u_{xxx} + uu_x \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{1.1}$$

que modela el comportamiento de las ondas de aguas en canales poco profundos, tiene como soluciones ondas solitarias que se comportan como partículas, por lo que Kruskal y Zabusky las llamaron *solitones* en su trabajo de 1965 ([42]). Estos solitones son estables, en el sentido de que para una solución de la ecuación KdV (ecuación (1.1)) que difiere, inicialmente, muy poco en su forma de las soluciones tipo solitón, a lo largo del tiempo, su forma mantendrá un aspecto que diferirá muy poco de la forma de una solución tipo solitón (vea [4] y [7]); de hecho, a la larga estas soluciones toman la forma de solitones (vea [35]). Desde el punto de vista práctico, la noción de estabilidad de solitones nos garantiza que, teniendo un meticuloso cuidado, en el laboratorio podremos reproducir estos fenómenos, observados por primera vez por J. Scott Russell en 1834.
La ecuación de Benjamin-Bona-Mahony

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0, \tag{1.2}$$

fue introducida en [5] con la intención de modelar la propagación de ondas largas de pequeña amplitud, donde el efecto dispersión es puramente no lineal. De la manera en que esta fue obtenida, se perseguía llegar a una ecuación equivalente a la ecuación KdV (1.1). Es interesante observar que a pesar de esta intención, desde el punto de vista meramente matemático, estas ecuaciones presentan significativas e interesantes diferencias.
Otras ecuaciones unidimensionales son, una, la introducida independientemente por Benjamin en [3] y Ono en [34],

$$u_t + \mathscr{H} u_{xx} + uu_x = 0. \tag{1.3}$$

la cual modela las ondas internas en fluidos estratificados profundos, donde $\mathcal{H}$ es la transformada de Hilbert. La otra, es la regularizada de Benjamin-Ono

$$u_t + u_x + uu_x + \mathscr{H} u_{xt} = 0 \tag{1.4}$$

donde $u = u(x,t)$ es una función real, con $x, t \in \mathbb{R}$. Está ecuación es un modelo para la evolución en el tiempo de ondas con crestas grandes en la interface entre dos fluidos inmisibles.

Existen versiones bidimensionales que extienden las ecuaciones anteriormente mencionadas. Para el caso de la ecuación KdV tenemos la ecuación Kadomtsev-Petviashvilli, vea [17],

$$(u_t + auu_x + u_{xxx})_x + u_{yy} = 0, \tag{1.5}$$

que describe las ondas en películas delgadas de alta tensión superficial. Otra es la ecuación de Zakharov-Kuznetsov

$$u_t = (u_{xx} + u_{yy})_x + uu_x, \tag{1.6}$$

la cual surge en el estudio de la dinámica de fluidos geofísicos en conjuntos isotrópicos (medios en los cuales las características de los cuerpos no dependen de la dirección) y ondas acústicas iónicas en plasmas magnéticos.

Para el caso de las ecuaciones BBM (1.2), BO (1.3) y rBO (1.4) tenemos las siguientes versiones bidimensionales, la ecuación ZK-BBM

$$u_t = (u_{xt} + u_{yy})_x + uu_x, \tag{1.7}$$

la ecuación ZK-BO

$$u_t = (\mathscr{H} u_x + u_{yy})_x + uu_x, \tag{1.8}$$

y la ecuación rBO-ZK

$$\begin{cases} u_t + a(u^n)_x + (b\mathscr{H} u_t + u_{yy})_x = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u(0,x,y) = \varphi(x,y) \end{cases} \tag{1.9}$$

Existen importantes preguntas que se pueden hacer acerca de estas ecuaciones, y cuyas respuestas ayudan a esclarecer los fenómenos que modelan cada una de éstas. Señalemos las tres siguientes preguntas: el buen planteamiento, la existencia y estabilidad de ondas viajeras, y la continuación única. En este sentido, las ecuaciones KdV, BBM, BO, KP y la ecuación ZK han merecido un amplio estudio. En [18], [28] y [2] se estudia el buen planteamiento de la ecuación rBO. En [2] se examina la existencia y estabilidad de ondas viajeras periódicas para la ecuación rBO. Más escasa es la bibliografía relacionada con la ecuación ZK-BBM. De ésta podemos decir que, muy recientemente, el buen planteamiento ha sido estudiado en [39]. La existencia y estabilidad de ondas solitarias fueron examinadas en [16], [40] y [41]. En [40] (en realidad, en la bibliografía del mismo autor citada en este artículo) se demuestra la existencia de solitones y compactones (solitones con soporte compacto).

En este trabajo examinaremos el buen planteamiento y existencia de ondas solitarias del problema de valor inicial para la ecuación reguralizada Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov (rBO-ZK, (1.9)) donde $u = u(t, x, y)$ es una función de valor real y $\mathscr{H}$ denota la transformada de Hilbert en la variable x, que se define por

$$\mathscr{H} f(x,y) = \frac{1}{\pi}\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda, y)}{x-\lambda}\, d\lambda, \tag{1.10}$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.
Más precisamente mostraremos que (1.9) es localmente bien planteado en los espacios de Sobolev

$$H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) = \{f \in \mathcal{S}' \mid (1 + |\xi|^{s_1} + |\eta|^{s_2})\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^2)\}, \tag{1.11}$$

para s_1 y s_2 reales positivos tales que $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} < 2$, y en los espacios de Sobolev con peso

$$\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2) = H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) \cap L^2_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2), \tag{1.12}$$

donde

$$L^2_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2) = \left\{f \in L^2(\mathbb{R}^2) \mid (|x|^{r_1} + |y|^{r_2})f \in L^2(\mathbb{R}^2)\right\}, \tag{1.13}$$

para $s_2 \geq r_2$, $s_2 \geq 2r_1$ y $r_1 < 5/2$. Mostraremos, además, que la única solución de (1.9) que pertenece a $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)$, para $r_1 \geq 5/2$, en dos tiempos diferentes es 0. Para ésto seguiremos ideas presentadas en [14], [13] y [12]. Dedicaremos un capítulo de este trabajo para examinar el buen planteamiento global para datos pequeños y veremos que dichas soluciones se comportan asintóticamente como soluciones del problema lineal asociado a esta ecuación. Allí nos serviran de apoyo ideas desarrolladas en [20], [29], [36] y [11]. En otro capítulo examinaremos mal-planteamiento (“*ill-posedness*”) para esta ecuación en espacio de Sobolev de índices negativos. Para este propósito se examinaron ideas en [31], [30] y [8]. En el capítulo final mostraremos la existencia de ondas solitarias, usando el método de compacidad-concentración de Lions, usando ideas en [25], [26], [9] y [1]. También se examinará la regularidad y analiticidad de dichas soluciones.

2 Resultados preliminares

En este capítulo presentamos algunos conceptos y resultados preliminares que usaremos como insumos importantes en este trabajo. Veamos.

2.1. Espacios de Sobolev anisotrópicos sin y con peso

En la mayor parte de este trabajo nos moveremos dentro del contexto de los espacios de Sobolev anisotrópicos $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ y espacios de Sobolev anisotrópicos con peso $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)$ (ver (1.11) y (1.12) para su definición). En estos espacios tenemos la siguiente forma del lema de Sobolev.

Lema 2.1 (de Sobolev). Sean s_1 y s_2 dos números reales positivos tales que $\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}<2$. Entonces, $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)\subset C_\infty(\mathbb{R}^2)$ (el conjunto de funciones continuas en $\mathbb{R}^2$ que se anulan en infinito), con inclusión continua.

Demostración. Como

$$\widehat{f}=((1+|\xi|^{s_1}+|\eta|^{s_2})^{-1}\,((1+|\xi|^{s_1}+|\eta|^{s_2})\,\widehat{f},$$

de la fórmula de inversión basta ver que $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R}^2)$, para lo cual es suficiente probar que $(1+|\xi|^{s_1}+|\eta|^{s_2})^{-1}\in L^2(\mathbb{R}^2)$, o, en otras palabras, que $(1+|\xi|^{s_1}+|\eta|^{s_2})^{-2}$ es integrable. Ahora bien, ya que

$$(1+|\xi|^{s_1}+|\eta|^{s_2})^{-2}\simeq\left(1+|\xi|+|\eta|^{s_2/s_1}\right)^{-2s_1}$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|\xi|+|\eta|^{s_2/s_1}\right)^{-2s_1}\,d\xi=\frac{2}{2s_1-1}\left(1+|\eta|^{s_2/s_1}\right)^{-2s_1+1},$$

del teorema de Tonelli tenemos que $(1+|\xi|^{s_1}+|\eta|^{s_2})^{-2}$ es integrable si (y sólo si)

$$\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}<2.$$

□

Examinemos otros resultados de inmersión que usaremos más adelante.

Lema 2.2. Si $f\in L_{p,s}(\mathbb{R}^n)$, con $s\in(0,n/p)$, entonces $f\in L^q(\mathbb{R}^n)$ con $s=n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$, y

$\|f\|_{L^q}\le c_{n,s}\|D^sf\|_{L^p}\le c_{n,s}\|f\|_{p,s}$

donde $D^lf=(-\Delta)^{\frac{l}{2}}=(|\xi|^l\widehat{f})^\vee$.

Demostración. Ver [24] □

Lema 2.3. Sean s_1, s_2 y p números reales con $p > 1$. Si $D^{s_1} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $D^{s_2} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces, para $s \in [s_1, s_2]$, $D^s f \in L^p$ y

$$\|D^s f\|_{L^p} \leq C_s \|D^{s_1} f\|_{L^p}^{1-\theta} \|D^{s_2} f\|_{L^p}^{\theta},$$

donde,

$$\theta = \frac{s - s_1}{s_2 - s_1}$$

Demostración. Probamos el lema para $n = 1$. Cuando $p = 2$ el lema sigue del teorema de Plancherel y de la desigualdad de Hölder. Un poco más delicada es la demostración para los otros p's en las hipótesis del teorema. Para eso haremos uso de cálculo funcional asociado al operador derivada. Sin perdida de generalidad se supondrá que $s_1 = 0$. Como

$$|\xi|^s = \frac{\sin(\pi\theta)}{\pi} \int_0^\infty t^{\theta-1}(t + |\xi|^{s_2})^{-1} |\xi|^{s_2}\, dt,$$

tenemos que si $f \in \bigcup_{s \in \mathbb{R}} H^s = H^{-\infty}$, entonces

$$D^s f = \frac{\operatorname{sen} \pi\theta}{\pi} \int_0^\infty t^{\theta-1}(t + D^{s_2})^{-1} D^{s_2}\, dt f.$$

Veamos que en las hipótesis que la integral existe en L^p en el sentido fuerte. En efecto, del Corolario 3.8 en [10] (más aún de su demostración) se tiene que el operador $(t - D^{s_2})^{-1}$ es acotado en L^p y su norma es la variación total de la función $(t + |\xi|^{s_2})^{-1}$, que es $2C_p/t$. Esto garantiza la integrabilidad de $t^{\theta-1}(t + D^{s_2})^{-1} D^{s_2} f$ en intervalos en $t > \rho$, para cualquier $\rho > 0$. Por otro lado, $(t - D^{s_2})^{-1} D^{s_2}$ es acotado en L^p y su norma es la variación total de la función $(t + |\xi|^{s_2})^{-1} |\xi|^{s_2}$, que es $2C_p$. Luego, $t^{\theta-1}(t + D^{s_2})^{-1} D^{s_2} f$ es integable en intervalos en $t < \rho$, para cualquier $\rho > 0$. Esto demuestra que la integral existe en L^p en el sentido fuerte.
Más aún,

$$\begin{aligned}
\|D^s f\|_{L^p} \leq & \left\| \frac{\operatorname{sen} \pi\theta}{\pi} \int_0^\rho t^{\theta-1}(t + D^{s_2})^{-1} D^{s_2}\, dt f \right\|_{L^p} + \\
& + \left\| \frac{\operatorname{sen} \pi\theta}{\pi} \int_\rho^\infty t^{\theta-1}(t + D^{s_2})^{-1} D^{s_2}\, dt f \right\|_{L^p} \\
\leq & \left| \frac{\operatorname{sen} \pi\theta}{\pi} \right| \int_0^\rho t^{\theta-1} 2C_p \|f\|_{L^p} + \left| \frac{\operatorname{sen} \pi\theta}{\pi} \right| \int_\rho^\infty t^{\theta-2} 2C_p \|D^{s_2} f\|_{L^p} \\
\leq & 2C_p \left(\rho^\theta \|f\|_{L^p} + \rho^{\theta-1} \|D^{s_2} f\|_{L^p} \right),
\end{aligned}$$

para todo ρ. Si $f \neq 0$ y tomamos $\rho = \|D^{s_2} f\|_{L^p} / \|f\|_{L^p}$ se sigue el teorema. □

Lema 2.4. Sea $f \in H_p^s(\mathbb{R})$, $s \geq 1$. Entonces,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}^{1-\frac{1}{sp}} \|D^s f\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{1}{sp}}$$

Demostración. Supongamos primero que $f \in H_p^1$, del teorema fundamental del cálculo y la desigualdad Hölder, tenemos

$$|f|^p(x) = \int_{-\infty}^{x} p|f|^{p-1}(z) \operatorname{sign} f(z) f_x(z)\, dz \leq C\|f\|_{L^p}^{p-1} \|f_x\|_{L^p}.$$

Combinando esta última desigualdad con el lema inmediatamente anterior se muestra el lema. □

Corolario 2.5. Sean $p \geq 1$, $s_1 > 0$ y $s_2 > 0$ tales que $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} < p$. Si $f \in H_p^{s_1,s_2}$ entonces $f \in L^\infty$ y

$$\|f\|_\infty \leq C\|f\|_p^{1-\frac{1}{ps_1}-\frac{1}{ps_2}} \|D_x^{s_1} f\|_p^{\frac{1}{ps_1}} \|D_y^{s_2} f\|_p^{\frac{1}{ps_2}}.$$

Demostración. Sea μ tal que $\frac{1}{\mu s_1} + \frac{1}{\mu s_2} = 1$, y sean $\theta_i = \frac{1}{\mu s_i}$. Entonces, $\theta_i s_i > \frac{1}{p}$, $i = 1, 2$. Luego, del lema anterior tenemos

$$|f(x,y)| \leq \|f(\cdot,y)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{1-\frac{1}{\theta_1 s_1 p}} \|D_x^{\theta_1 s_1} f(\cdot,y)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{1}{\theta_1 s_1 p}}, \tag{2.1}$$

y

$$|f(x,y)| \leq \|f(x,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{1-\frac{1}{\theta_2 s_2 p}} \|D_y^{\theta_2 s_2} f(x,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{1}{\theta_2 s_2 p}}. \tag{2.2}$$

En esta última desigualdad al tomar la norma en L^p, con respecto a x, en ambos lados de la misma y por el Lema 2.3 obtenemos

$$\|f(\cdot,y)\|_p \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^{1-\frac{1}{s_2 p}} \|D_y^{s_2} f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{s_2 p}} \tag{2.3}$$

y

$$\|D_x^{\theta_1 s_1} f(\cdot,y)\|_p \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^{(1-\theta_1)(1-\frac{1}{\theta_2 s_2 p})} \|D_x^{s_1} f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^{\theta_1} \|D_x^{s_1} f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{s_2 p}} \tag{2.4}$$

(para esta última desigualdad hemos usado el siguiente hecho

$$\|D_x^{\theta_1 s_1} D_y^{\theta_2 s_2} f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C\|D_x^{s_1} f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^{\theta_1} \|D_y^{s_2} f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^{\theta_2}$$

demostrado en [33].) Combinando las desigualdades (2.1), (2.3) y (2.4) se obtiene el corolario. □

Corolario 2.6. Sean r, $p \in (1,\infty)$ y $s \geq 1$. Para toda f en el espacio de Schwartz vale la siguiente desigualdad

$$\|f\|_\infty \leq C\|f\|_p^{1-\theta}\|D^s f\|_p^\theta,$$

donde

$$\theta\left(s+\frac{2}{p}-\frac{2}{r}\right)=\frac{2}{p}.$$

Demostración. La prueba sigue inmediatamente del lema anterior y el Lema 2.2. □

De los dos lemas anteriores tenemos las siguientes dos proposiciones.

Proposición 2.7. Para $0 \leq p \leq 4$, existe una constante C, que depende solo de p, tal que, para cualquier $f \in H^{1/2,1}$,

$$\|f\|_{L^{p+2}}^{p+2} \leq C\|f\|_{L^2}^{\frac{4-p}{2}}\|D_x^{1/2}f\|_{L^2}^p\|\partial_y f\|_{L^2}^{\frac{p}{2}}$$

En particular, si $f \in H^{1/2,1}$

$$\|f\|_{L^{p+2}} \leq C\|f\|_{H^{1/2,1}}.$$

Demostración. Supongamos primero que $p < 4$. En virtud del Lema 2.4, la desigualdad de Hölder y la desigualdad integral de Minkowski se tiene,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2}|f(x,y)|^{p+2}\,dxdy &\leq \int_{-\infty}^{\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}}|f(x,y)|^p\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)^2\,dy\,dx\\
&\leq C\int_{-\infty}^{\infty}\|f(x,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{p/2}\|\partial_y f(x,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{p/2}\|f(x,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\,dx\\
&\leq C\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)^2\,dy\right)^{\frac{p+4}{4}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(\partial_y f(x,y))^2\,dy\right)^{\frac{p}{4}}\,dx\\
&\leq C\|\partial_y f\|_{L^2}^{\frac{p}{2}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)^2\,dy\right)^{\frac{p+4}{4-p}}\,dx\right]^{\frac{4-p}{4}}\\
&\leq C\|\partial_y f\|_{L^2}^{\frac{p}{2}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\|f(\cdot,y)\|_{L^{\frac{2(p+4)}{4-p}}}^2\,dy\right]^{\frac{p+4}{4}}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Ahora, del Lema 2.2,

$$\|f(\cdot,y)\|_{L^{\frac{2(p+4)}{4-p}}}^2 \leq C\|D_x^{\frac{p}{p+4}}f(\cdot,y)\|_{L^2}^2. \tag{2.6}$$

Por otro lado, del Lema 2.3, se sigue que

$$\|D_x^{\frac{p}{p+4}}f(\cdot,y)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C\|f(\cdot,y)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{2(4-p)}{p+4}}\|D_x^{1/2}f(\cdot,y)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{4p}{p+4}}. \tag{2.7}$$

Por lo tanto, de (2.5), (2.6), (2.7) y la desigualdad de Hölder, se concluye que

$$\|f\|_{L^{p+2}}^{p+2} \leq C\|\partial_y f\|_{L^2}^{\frac{p}{2}}\|f\|_{L^2}^{\frac{4-p}{2}}\|D_x^{1/2}f\|_{L^2}^{p} \tag{2.8}$$

Veamos el caso $p = 4$. Del Lema 2.2, para toda $u \in H^1(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\|u\|_{L^6} \leq C\|D^{\frac{1}{12}}u\|_{L^4} \leq \|u\|_{L^4}^{\frac{2}{3}}\|D^{\frac{1}{4}}u\|_{L^4}^{\frac{1}{3}} \leq \|u\|_{L^4}^{\frac{2}{3}}\|D^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2}^{\frac{1}{3}},$$

luego, para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f^6(x,y)\,dxdy \leq C\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f^4(x,y)\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}(D_x^{1/2}f)^2(x,y)\,dx\right)dy.$$

Pero como

$$\begin{aligned} f^4(x,y) =& 4\int_{-\infty}^{y} f^3(x,\tilde{y})f_y(x,\tilde{y})\,d\tilde{y} \\ \leq& 4\left(\int_{-\infty}^{\infty} f^6(x,\tilde{y})\,d\tilde{y}\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_y^2(x,\tilde{y})\,d\tilde{y}\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^4(x,y)\,dx \leq 4\left(\iint_{\mathbb{R}^2} f^6(x,\tilde{y})\,dxd\tilde{y}\right)^{1/2}\left(\iint_{\mathbb{R}^2} f_y^2(x,\tilde{y})\,dxd\tilde{y}\right)^{1/2}.$$

Así pues,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f^6(x,y)\,dxdy \leq C\left(\iint_{\mathbb{R}^2} f^6(x,y)\,dxdy\right)^{1/2}\|D_x^{1/2}f\|^2\|f_y\|,$$

lo que es equivalente a

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f^6(x,y)\,dxdy \leq C\|D_x^{1/2}f\|^4\|f_y\|^2.$$

Esto termina la demostración. $\square$

Proposición 2.8. Para todo $p \geq 0$, existe una constante C, que depende solo de p, tal que, para cualquier $f \in H^{1,2}_{\frac{3}{2}}$,

$$\|f\|_{p+\frac{3}{2}}^{p+\frac{3}{2}} \leq C\|f_x\|_{L^{\frac{3}{2}}}^{\frac{2p}{3}}\|f_{yy}\|_{L^{\frac{3}{2}}}^{\frac{p}{3}}\|f\|_{L^{\frac{3}{2}}}^{\frac{3}{2}}, \tag{2.9}$$

En particular, si $f \in H^{1,2}_{\frac{3}{2}}$

$$\|f\|_{L^{p+3/2}} \leq C\|f\|_{H^{1,2}_{\frac{3}{2}}}.$$

Demostración. En efecto, del Lema 2.4 se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|^{p+\frac{3}{2}}\,dxdy &\le \int_{-\infty}^{\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(x,y)|^{p} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)^{\frac{3}{2}}\,dy\,dx \\ &\le C\int_{-\infty}^{\infty} \|f(x,\cdot)\|_{L^{3/2}(\mathbb{R})}^{2p/3} \|\partial_{yy} f(x,\cdot)\|_{L^{3/2}(\mathbb{R})}^{p/3} \|f(x,\cdot)\|_{L^{3/2}(\mathbb{R})}^{3/2}\,dx\end{aligned}$$

Luego, si $p < 9/2$,

$$\begin{aligned}&\le C\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)^{3/2}\,dy\right)^{\frac{4p+9}{9}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\partial_{yy} f(x,y))^{3/2}\,dy\right)^{\frac{2p}{9}} dx \\ &\le C\|\partial_{yy} f\|_{L^{3/2}}^{\frac{p}{3}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)^{3/2}\,dy\right)^{\frac{4p+9}{9-2p}} dx\right]^{\frac{9-2p}{9}} \\ &\le C\|\partial_{y} f\|_{L^{3/2}}^{\frac{p}{3}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \|f(\cdot,y)\|_{L^{\frac{3(4p+9)}{2(9-2p)}}}^{3/2}\,dy\right]^{\frac{4p+9}{9}}\end{aligned} \tag{2.10}$$

Ahora, del Lema 2.2,

$$\|f(\cdot,y)\|_{L^{\frac{3(4p+9)}{2(9-2p)}}}^{3/2} \le C\|D_x^{\frac{4p}{4p+9}} f(\cdot,y)\|_{L^{3/2}}^{3/2}. \tag{2.11}$$

Por otro lado, del Lema 2.3, se sigue que

$$\|D_x^{\frac{4p}{4p+9}} f(\cdot,y)\|_{L^{3/2}(\mathbb{R})}^{3/2} \le C\|f(\cdot,y)\|_{L^{3/2}(\mathbb{R})}^{\frac{27}{2(4p+9)}} \|\partial_x f(\cdot,y)\|_{L^{3/2}(\mathbb{R})}^{\frac{6p}{4p+9}} \tag{2.12}$$

Por lo tanto, de (2.10), (2.11), (2.12) y la desigualdad de Holder , se concluye que

$$\|f\|_{L^{p+3/2}}^{p+3/2} \le C\|\partial_{yy} f\|_{L^{3/2}}^{\frac{p}{3}} \|f\|_{L^{3/2}}^{3/2} \|\partial_x f\|_{L^2}^{\frac{2p}{3}} \tag{2.13}$$

Ahora bien, como para cualquier $u \in H^2_{3/2}(\mathbb{R})$, con ayuda de los Lemas 2.2 y 2.3,

$$\|u\|_\infty \le \|u\|_{L^q}^{1-\frac{1}{q}} \|Du\|_{L^q}^{\frac{1}{q}} \le \|u\|_{L^q}^{1-\frac{\theta}{q}} \|D^{\frac{4}{3}+\frac{1}{q}} u\|_{L^q}^{\frac{\theta}{q}} \le \|u\|_{L^q}^{1-\frac{\theta}{q}} \|D^2 u\|_{L^{\frac{3}{2}}}^{\frac{\theta}{q}},$$

($\theta = \frac{3q}{4q+3}$) tenemos que, para cualquier $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$,

$$|f(x,y)|^{2q/3+1/2} \le C_q \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,\tilde y)|^q\,d\tilde y\right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_{yy} f(x,\tilde y)|^{3/2}\,d\tilde y\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}|f(x,y)|^{q/3+1} &\le (q/3+1)\int_{-\infty}^{x} |f(\tilde x,y)|^{q/3} |f_x(\tilde x,y)|\,d\tilde x \\ &\le C_q \left(\int_{\mathbb{R}} |f(\tilde x,y)|^q\,d\tilde x\right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_x f(\tilde x,y)|^{3/2}\,d\tilde x\right)^{\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $q \geq 3/2$,

$$\|f\|_{q+3/2}^{q+3/2} \leq C_q \|\partial_x f\|_{3/2} \|\partial_{yy} f\|_{3/2}^{1/2} \|f\|_q^q.$$

Como la proposición es válida para $0 \leq p < 9/2$, esta última desigualdad demuestra que es válida para cualquier $p \geq 0$. □

Antes de examinar la siguiente propiedad de estos espacios, enunciamos el siguiente resultado sobre conmutadores de operadores que hace parte del importante acervo de herramientas de las que se hacen uso en el análisis.

Proposición 2.9 (Desigualdad de Kato-Ponce). Sean $s > 0$, $1 < p < \infty$, $\Lambda = (1 - \Delta^2)^{1/2}$ y M_f el operador de multiplicación por f. Entonces,

$$|[\Lambda^s, M_f]g|_p \leq c \left(|\nabla f|_\infty |\Lambda^{s-1} g|_p + |\Lambda^s f|_p |g|_\infty \right), \tag{2.14}$$

para toda f y $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Corolario 2.10. Para f y $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$|fg|_{s,p} \leq c \left(|f|_\infty |\Lambda^s g|_p + |\Lambda^s f|_p |g|_\infty \right).$$

Proposición 2.11. Si $f \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ y $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, entonces

$$\|[D_x^{1/2}, \rho] f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|\widehat{D_x^{1/2}\rho}\|_{L^1(\mathbb{R})} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{2.15}$$

Demostración. Sea $f \in H^{1/2}(\mathbb{R})$. Entonces,

$$\begin{aligned} |([D^{1/2}, \rho] f)^\wedge(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (|\xi|^{1/2} - |\eta|^{1/2}) |\widehat{\rho}(\xi - \eta) \widehat{f}(\eta)| \, d\eta \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} ||\xi - \eta|^{1/2} \widehat{\rho}(\xi - \eta)| |\widehat{f}(\eta)| \, d\eta. \end{aligned}$$

Luego, de la desigualdad de Young y el teorema de Plancherel se sigue la proposición. □

Corolario 2.12. Sean s_1 y s_2 tales que $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} < 2$. Entonces, el espacio $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$, con el producto usual de funciones, es un álgebra de Banach. En particular,

$$\|fg\|_{s_1,s_2} \leq c \|f\|_{s_1,s_2} \|g\|_{s_1,s_2}.$$

Demostración. Observe que si f y $g \in \mathcal{S}$, del Corolario 2.10, tenemos que, para cualquier $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &\|(1 - \partial_x^2)^{s_1/2} (fg)(\cdot, y)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \\ &\qquad \leq \|f\|_\infty \|(1 - \partial_x^2)^{s_1/2} (g)(\cdot, y)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|(1 - \partial_x^2)^{s_1/2} (f)(\cdot, y)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Luego,

$$\|(1-\partial_x^2)^{s_1/2}(fg)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq$$
$$\leq \|f\|_\infty \|(1-\partial_x^2)^{s_1/2}(g)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|(1-\partial_x^2)^{s_1/2}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|g\|_\infty.$$

De manera análoga,

$$\|(1-\partial_y^2)^{s_2/2}(fg)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq$$
$$\leq \|f\|_\infty \|(1-\partial_y^2)^{s_2/2}(g)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|(1-\partial_y^2)^{s_2/2}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|g\|_\infty.$$

De estas dos desigualdades y el lema de Sobolev (Lema 2.1) se sigue el corolario. □

Corolario 2.13. Bajo las mismas hipótesis del corolario inmediatamente anterior, para cualesquiera r_1 y r_2 números reales positivos, $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}$ es un álgebra de Banach.

Demostración. Sean f y g en $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}$, entonces

$$\begin{aligned}\|fg\|^2_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}} &= \|fg\|^2_{s_1,s_2} + \|fg\|^2_{L^2_{r_1,r_2}}\\ &\leq C\|f\|^2_{s_1,s_2}\|g\|^2_{s_1,s_2} + \|f\|^2_{L^\infty}\|g\|^2_{L^2_{r_1,r_2}}\\ &\leq C\|f\|^2_{s_1,s_2}\|g\|^2_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}}\\ &\leq C\|f\|^2_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}}\|g\|^2_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}}\end{aligned}$$

□

Definición 2.14. Sea ω una función localmente integrable no negativa en $\mathbb{R}$. Diremos que ω *satisface la condición* A_p (ver [10], [15], [32]), para $1 < p < \infty$, si existe C un número real positivo tal que

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq C \tag{2.16}$$

para todo intervalo I abierto acotado no vacío en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1. Un ejemplo inmediato de función que cumple la condición A_p es $w(x) = (\gamma + |x|^\alpha)^r$, para $\gamma > 0$ y $-1 < r\alpha < p-1$.

Un hecho bastante interesante acerca de la condición A_p es el siguiente teorema.

Teorema 2.15. ω satisface la condición A_p si, y sólo si, la transformada de Hilbert es un operador acotado en $L^p(\omega(x)dx)$. En otras palabras, ω satisface la condición A_p si, y sólo si,

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{H} f|^p \omega(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq c^* \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f|^p \omega(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.17}$$

para toda $f \in L^p(\omega(x)dx)$.

Demostración. Ver [15]. □

Insumos bastante importantes en este trabajo nos los dan las propiedades de la derivada fraccionaria y de la derivada de Stein (esta última bastante relacionada con la primera). Recordemos que la derivada fraccionaria viene definida por

$$D^b f = (2\pi|\xi|^b \widehat{f}\,)^\vee. \tag{2.18}$$

para cada distribución temperada f tal que $|\xi|^b\widehat{f}$ sea también una distribución temperada. Si $0 < b < 1$ y $1 < p < \infty$ se tiene que

$$\|D^b(fg)\|_p \leq C(\|g\|_\infty \|D^b f\|_p + \|f\|_\infty \|D^b g\|_p) \tag{2.19}$$

(para una demostración de esta última desigualdad vea [19]). Más aún, tenemos el siguiente resultado demostrado en [21]:

Teorema 2.16. Si $0 < b < 1$, entonces

(I) Para $1 < p < \infty$

$$\|D^b(fg) - fD^b g - gD^b f\|_p \leq c\|f\|_\infty \|D^b g\|_p. \tag{2.20}$$

(II) Para $1 \leq p < \infty$, b_1, b_2 $\in$ $[0, b]$ con $b_1 + b_2 = b$ y p_1, p_2 $\in$ $(1, \infty)$ con $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$

$$\|D^b(fg) - fD^b g - gD^b f\|_p \leq c\|D^{b_1} f\|_{p_1} \|D^{b_2} g\|_{p_2}. \tag{2.21}$$

En particular, para $1 < p < \infty$, de (2.20) tenemos la siguiente mejora de la desigualdad (2.19)

$$\|D^b(fg)\|_p \leq C(\|gD^b f\|_p + \|f\|_\infty \|D^b g\|_p). \tag{2.22}$$

Corolario 2.17. El operador $B = -\partial_x(1 + \mathcal{H}\partial_x)^{-1}$ es un operador acotado sobre $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}$, para $r_1 < 5/2$.

Demostración. Es claro que

$$\|B(\varphi)\|_{s_1,s_2} \leq \|\varphi\|_{s_1,s_2}$$

y que

$$\|(1+y^2)^{\frac{r_2}{2}} B(\varphi)\|_{L^2} = \|B((1+y^2)^{\frac{r_2}{2}}\varphi)\|_{L^2} \leq \|(1+y^2)^{\frac{r_2}{2}}\varphi\|_{L^2}.$$

Examinemos qué pasa con $\||x|^{r_2} B(\varphi)\|_{L^2}$. Ya que

$$\partial_\xi\left(\frac{\xi}{1+|\xi|}\right) = \frac{1}{(1+|\xi|)^2} \quad \text{y} \quad \partial_\xi^2\left(\frac{\xi}{1+|\xi|}\right) = -\frac{2\,\mathrm{sgn}\,\xi}{(1+|\xi|)^3},$$

se tiene que

$$\|x^2 B\varphi\|_{L^2} = \left\|\partial_\xi^2\left(\frac{\xi}{1+|\xi|}\widehat{\varphi}\right)\right\|_{L^2} \leq c\|(1+x^2)\varphi\|_{L^2}.$$

Un simple argumento de interpolación nos muestra que

$$\|(1+x^2)^{\frac{r_1}{2}} B\varphi\|_{L^2} \leq C\|(1+x^2)^{\frac{r_1}{2}}\varphi\|_{L^2}, \tag{2.23}$$

para $r_1 \leq 2$. Supongamos ahora que $2 < r_1 < 5/2$. En este caso $r_1 = 2+b$, para $0 < b < 1/2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\||x|^{r_1} B\varphi\| =& \left\|D_\xi^b \partial_\xi^2\left(\frac{\xi}{1+|\xi|}\widehat{\varphi}\right)\right\|_{L^2}\\ \leq& C\left(\left\|D_\xi^b\left(\frac{\xi}{1+|\xi|}\partial_\xi^2\widehat{\varphi}\right)\right\|_{L^2} + \left\|D_\xi^b\left(\frac{1}{(1+|\xi|)^2}\partial_\xi\widehat{\varphi}\right)\right\|_{L^2}\right.\\ &\left.+\left\|D_\xi^b\left(\frac{-2\operatorname{sgn}\xi}{(1+|\xi|)^3}\widehat{\varphi}\right)\right\|_{L^2}\right).\end{aligned} \tag{2.24}$$

Ahora bien, examinando cada uno de los términos del lado derecho de la anterior desigualdad tenemos, primero, como ya hemos probado que B es un operador acotado en $L^2((1+x^2)^b\,dxdy)$, para $0 < b < 1/2$,

$$\left\|D_\xi^b\left(\frac{\xi}{1+|\xi|}\partial_\xi^2\widehat{\varphi}\right)\right\|_{L^2} = \||x|^b B(x^2\varphi)\|_{L^2} \leq C\|(1+x^2)^{\frac{r_1}{2}}\varphi\|_{L^2}.$$

Segundo, de la desigualdad (2.22) y como $\frac{1}{(1+|\xi|)^2} \in H^1(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\left\|D_\xi^b\left(\frac{1}{(1+|\xi|)^2}\partial_\xi\widehat{\varphi}\right)\right\|_{L^2} \leq& c\left(\left\|D_\xi^b\left(\frac{1}{(1+|\xi|)^2}\right)\right\|_\infty \|\partial_\xi\widehat{\varphi}\|_{L^2} + \|D_\xi^{b+1}\widehat{\varphi}\|_{L^2}\right)\\ \leq& c\|(1+x^2)^{\frac{r_1}{2}}\varphi\|_{L^2},\end{aligned}$$

para $0 < b < 1/2$. Finalmente, de la desigualdad (2.22), del Teorema 2.15 y como $\frac{1}{(1+|\xi|)^3} \in H^1(\mathbb{R})$, tenemos

$$\begin{aligned}\left\|D_\xi^b\left(\frac{-2\operatorname{sgn}\xi}{(1+|\xi|)^3}\widehat{\varphi}\right)\right\|_{L^2} =& 2\left\||x|^b \mathscr{H}\left(\frac{1}{(1+|\xi|)^3}\widehat{\varphi}\right)^\vee\right\|_{L^2}\\ \leq& \left\||x|^b\left(\frac{1}{(1+|\xi|)^3}\widehat{\varphi}\right)^\vee\right\|_{L^2} = \left\|D_\xi^b\left(\frac{1}{(1+|\xi|)^3}\widehat{\varphi}\right)\right\|_{L^2}\\ \leq& c\left(\left\|D_\xi^b\left(\frac{1}{(1+|\xi|)^3}\right)\right\|_\infty \|\widehat{\varphi}\|_{L^2} + \left\|\frac{1}{(1+|\xi|)^3}D_\xi^b\widehat{\varphi}\right\|_{L^2}\right)\\ \leq& c\|(1+x^2)^{\frac{r_1}{2}}\varphi\|_{L^2},\end{aligned}$$

para $0 < b < 1/2$. Luego, de estas últimas estimativas y de (2.24) se sigue (2.23), para $2 < r_1 < 5/2$. Esto demuestra el corolario. $\square$

Recordemos que la derivada de Stein (ver [37]) viene definida así: para $b \in (0,1)$ y f medible en $\mathbb{R}^n$ con valores complejos,

$$\mathcal{D}^b f(x) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+2b}}\, dy \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.25}$$

Definición 2.18. Para $s \in \mathbb{R}$. Denotaremos por $L^p_s(\mathbb{R}^n)$ el espacio de todas las funciones f en $L^p(\mathbb{R}^n)$ tales que $(1-\Delta)^{s/2} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. La norma en este espacio viene dada por

$$\|f\|_{s,p} = \|(1-\Delta)^{s/2} f\|_p,$$

para cada f en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

En el siguiente teorema se da una caracterización de los espacios $L^p_s(\mathbb{R}^n)$ en términos de la derivada de Stein.

Teorema 2.19. Supongamos que $b \in (0,1)$ y $2n/n+2b \leq p < \infty$. Entonces, $f \in L^p_b(\mathbb{R}^n)$ si, y sólo si,

(a) $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

(b) $\mathcal{D}^b f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Además,

$$\|f\|_{b,p} = \|(1-\Delta)^{b/2} f\|_p \cong \|f\|_p + \|D^b f\|_p \cong \|f\|_p + \|\mathcal{D}^b f\|_p$$

Demostración. Ver [37] o [38]. □

El siguiente resultado es un análogo al Teorema 2.16 para el caso de la derivada de Stein.

Teorema 2.20. Sean $b \in (0,1)$ y $1 \leq p < \infty$. Si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ son funciones medibles, entonces

a) $$\mathcal{D}^b(fg)(x) \leq \|f\|_\infty \mathcal{D}^b g(x) + |g(x)| \mathcal{D}^b f(x) \tag{2.26}$$

b) $$\|\mathcal{D}^b(fg)\|_p \leq \|f\|_\infty \|\mathcal{D}^b g\|_p + \|g \mathcal{D}^b f\|_p \tag{2.27}$$

c) $$\|\mathcal{D}^b(fg)\|_2 \leq \|f \mathcal{D}^b g\|_2 + \|g \mathcal{D}^b f\|_2 \tag{2.28}$$

Demostración. Ver [33] □

Lema 2.21. Sean a y b números reales positivos. Si $J_u = (1-\partial_u^2)^{1/2}$ y $\langle v \rangle = (1+v^2)^{1/2}$, entonces, para cualquier $\theta \in (0,1)$,

a) $\|J_u^{\theta a}(\langle v \rangle^{(1-\theta)b} f)\| \leq c \|\langle v \rangle^b f\|^{1-\theta} \|J_u^a f\|^\theta$

b) $\|\langle v \rangle^{(1-\theta)b} J_u^{\theta a} f)\| \leq c \|\langle v \rangle^b f\|^{1-\theta} \|J_u^a f\|^\theta$,

para $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, donde u y v pueden ser x e y indistintamente.

Demostración. La demostración es exactamente la misma del Lema 1 en [13] (Ver también [33], Lema 4); de hecho, resulta más simple cuando u y v son diferentes. $\square$

El siguiente teorema es usado en la demostración de extensión única de las soluciones de la ecuación (1.9).

Teorema 2.22. Sean $p \in (1, \infty)$ y $f \in L^p(\mathbb{R})$. Si para algún $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0+)$ y $f(x_0-)$ existen y son diferentes, entonces, para cualquier $\delta > 0$, $D^{1/p} f \notin L^p_{loc}(B(x_0, \delta))$. En particular, $f \notin L^p_{\frac{1}{p}}(\mathbb{R})$

Demostración. Observese que $D^{1/p} f(x) \sim \dfrac{1}{|x - x_0|^{1/p}}$, cuando $x \to x_0$. $\square$

Para terminar este capítulo enunciaremos un muy interesante resultado que usaremos para demostrar la suavidad de las soluciones tipo onda solitaria. Este es la siguiente generalización del teorema de multiplicadores de Hörmander–Mikhlin debida a Lizorkin [27]

Teorema 2.23 (Lizorkin). Sea $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función C^n para $|\xi_j| > 0$, $j = 1, ..., n$. Supongamos que existe $M > 0$ tal que

$$|\xi_1^{k_1} \cdots \xi_n^{k_n} \frac{\partial^k \Phi}{\partial \xi_1^{k_1} \cdots \partial \xi_n^{k_n}}(\xi)| \leq M$$

con $k_i = 0$ o 1, $k = k_1 + \cdots + k_n = 0, 1, \cdots, n$. Entonces, $\Phi \in M_q(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq q \leq \infty$. En otras palabras, Φ es un multiplicador de Fourier en $L^q(\mathbb{R}^n)$.

3 Buen planteamiento

3.1. El problema lineal en espacios con pesos

En los siguientes dos lemas daremos de manera explícita las derivadas del símbolo (vía transformada de Fourier) del grupo unitario que genera las soluciones de la ecuación lineal asociada a la ecuación (1.9).

Lema 3.1. Sea $F(\xi,\eta,t)=e^{b(\xi,\eta)t}$, donde $b(\xi,\eta)=\frac{i\xi\eta^2}{1+|\xi|}$, entonces

$$\partial_\xi F(t,\xi,\eta)=(it)(1+|\xi|)^{-2}\eta^2F(t,\xi,\eta)$$

$$\begin{aligned}
\partial_\xi^2 F(t,\xi,\eta)=&-2it(1+|\xi|)^{-3}\operatorname{sgn}(\xi)\eta^2F(t,\xi,\eta)+(it)^2(1+|\xi|)^{-4}\eta^4F(t,\xi,\eta)\\
\partial_\xi^3 F(t,\xi,\eta)=&4(it)\delta\eta^2+6it(1+|\xi|)^{-4}\eta^2F(t,\xi,\eta)-\\
&-6(it)^2(1+|\xi|)^{-5}\operatorname{sgn}(\xi)\eta^4F(t,\xi,\eta)+(it)^3(1+|\xi|)^{-6}\eta^6F(t,\xi,\eta)\\
\partial_\xi^4 F(t,\xi,\eta)=&4(it)\delta'\eta^2-6(it)^2\delta\eta^4-24(it)(1+|\xi|)^{-5}\operatorname{sgn}(\xi)\eta^2F(t,\xi,\eta)+\\
&+36(it)^2(1+|\xi|)^{-6}\eta^4F(t,\xi,\eta)-\\
&-12(it)^3(1+|\xi|)^{-7}\operatorname{sgn}(\xi)\eta^6F(t,\xi,\eta)+(it)^4(1+|\xi|)^{-8}\eta^8F(t,\xi,\eta).
\end{aligned}$$

En general, para $j\geq 5$

$$\begin{aligned}
\partial_\xi^j F(t,\xi,\eta)=&4(it)\delta^{(j-3)}\eta^2-6(it)^2\delta^{(j-4)}\eta^4-\\
&-\sum_{k=1}^{j-4}(a_k(it)^k\eta^{2k}+b_k(it)^{k+2}\eta^{2(k+2)})\delta^{(k-1)}+\\
&+\sum_{k=1}^{j}a_k(it)^j(1+|\xi|)^{-(j+k)}(\operatorname{sgn}(\xi))^{j-k}\eta^{2k}F(t,\xi,\eta).
\end{aligned}$$

donde $\delta=\delta_{\xi=0}$ es la función delta de Dirac concentrada en la recta $\xi=0$, y a_k y b_k son constantes que dependen de k.

Corolario 3.2. Sean $A=\partial_x(1+\mathcal{H}\partial_x)^{-1}\partial_{yy}$ y $E(t)=e^{At}$. Para s_1, $s_2\in\mathbb{R}$ y $r\in\mathbb{N}$ tal que $s_2\geq 2r$, tenemos que:

1. Si $r=1$ o 2,

   $$\|E(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r,0}}\leq P_r(t)\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r,0}},$$

   donde $P_r(t)$ es un polinomio en t de grado r con coeficientes positivos.

2. Si $r \geq 3$ y $\varphi \in \mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s_2}$, $E(t)\varphi \in C([0,\infty); \mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s_2})$ si, y sólo si,

   $\partial_\xi^j \widehat{\varphi}(0,\eta) = 0,$ para todo η y $j = 0, 1, 2 \ldots r-3$

Demostración. Para $r = 1$, del lema anterior tenemos,

$$
\begin{aligned}
\|E(t)\varphi\|^2_{\mathcal{F}_{1,0}^{s_1,s_2}} &= \|E(t)\varphi\|^2_{s_1,s_2} + \|xE(t)\varphi\|^2_{L^2} \\
&\leq \|\varphi\|^2_{s_1,s_2} + \int_{\mathbb{R}^2} |xE(t)\varphi|^2 \, dxdy \\
&= \|\varphi\|^2_{s_1,s_2} + \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_\xi (F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi})|^2 \, d\xi d\eta \\
&\leq \|\varphi\|^2_{s_1,s_2} + \int_{\mathbb{R}^2} |(\partial_\xi F(t,\xi,\eta))\widehat{\varphi}|^2 + |F(t,\xi,\eta)\partial_\xi \widehat{\varphi}|^2 \, d\xi d\eta \\
&\leq \|\varphi\|^2_{s_1,s_2} + \int_{\mathbb{R}^2} |\frac{it\eta^2}{(1+|\xi|)^2} F(t,\xi,\eta))\widehat{\varphi}|^2 + |\partial_\xi \widehat{\varphi}|^2 \, d\xi d\eta \\
&\leq (1+t^2)\|\varphi\|^2_{s_1,s_2} + \|\varphi\|^2_{L^2_{1,0}} \\
&\leq P_1^2(t) \|\varphi\|^2_{\mathcal{F}_{1,0}^{s_1,s_2}} .
\end{aligned}
$$

Si $r = 2$

$$
\begin{aligned}
\|E(t)\varphi\|^2_{\mathcal{F}_{2,0}^{s_1,s_2}} =& \|E(t)\varphi\|^2_{s_1,s_2} + \|x^2 E(t)\varphi\|^2_{L^2} \\
=& \|\varphi\|^2_{s_1,s_2} + \int_{\mathbb{R}^2} |x^2 E(t)\varphi|^2 \, dxdy \\
=& \|\varphi\|^2_{s_1,s_2} + \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_\xi^2 (F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi})|^2 \, d\xi d\eta \\
\\
\leq& \|\varphi\|^2_{s_1,s_2} + \int_{\mathbb{R}^2} \left(|(\partial_\xi^2 F(t,\xi,\eta))\widehat{\varphi}|^2 + |(\partial_\xi F(t,\xi,\eta))\partial_\xi \widehat{\varphi}|^2 \right) d\xi d\eta + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2} |F(t,\xi,\eta)\partial_\xi^2 \widehat{\varphi}|^2 \, d\xi d\eta \\
\leq& \|\varphi\|^2_{s_1,s_2} + \int_{\mathbb{R}^2} \left| \left(\frac{2it\eta^2 \operatorname{sgn}(\xi)}{(1+|\xi|)^3} + \frac{(it)^2\eta^4}{(1+|\xi|)^4} \right) F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi} \right|^2 \, d\xi d\eta + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{2it\eta^2}{(1+|\xi|)^2} F(t,\xi,\eta)\partial_\xi \widehat{\varphi} \right|^2 \, d\xi d\eta + \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_\xi^2 \varphi|^2 \, d\xi d\eta \\
\leq& \|\varphi\|^2_{s_1,s_2} + 4t^2 \|\partial_y \varphi\|^2_{L^2} + t^4 \|\partial_y^4 \varphi\|^2_{L^2} + 4t^2 \|x\partial_y^2 \varphi\|^2_{L^2} + \|x^2 \varphi\|^2_{L^2} .
\end{aligned}
$$

Ahora bien, como del Lema 2.21

$$
\begin{aligned}
\|x\partial_y^2 \varphi\|^2 &\leq \|\langle x \rangle J_y^2 \varphi\|^2 \\
&\leq c \|\langle x \rangle^2 \varphi\| \|J_y^4 \varphi\| \\
&\leq c (\|\varphi\|^2_{s_1,s_2} + \|\varphi\|^2_{L^2_{2,0}}),
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

se tiene que

$$\|E(t)\varphi\|^2_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{2,0}} \leq P_2^2(t)\|\varphi\|^2_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{2,0}} .$$

Supongamos que $r=3$ y que $\widehat{\varphi}(0,\eta)=0$. Como $t\delta F\widehat{\varphi}=t\delta F(t,0,\eta)\widehat{\varphi}(0,\eta)=0$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|E(t)\varphi\|^2_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{3,0}} =&\|E(t)\varphi\|^2_{s_1,s_2}+\|x^3E(t)\varphi\|^2_{L^2}\\
\leq&\|\varphi\|^2_{s_1,s_2}+\int_{\mathbb{R}^2}|x^3E(t)\varphi|^2\,dxdy2\\
\leq&\|\varphi\|^2_{s_1,s_2}+\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_\xi^3(F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi})|^2\,d\xi d\eta\\
\leq&\|\varphi\|^2_{s_1,s_2}+\int_{\mathbb{R}^2}|(\partial_\xi^3F(t,\xi,\eta))\widehat{\varphi}|^2d\xi d\eta+|3(\partial_\xi^2F(t,\xi,\eta))\partial_\xi\widehat{\varphi}|^2d\xi d\eta+\\
&+\int_{\mathbb{R}^2}|3\partial_\xi F(t,\xi,\eta)\partial_\xi^2\widehat{\varphi}|^2\,d\xi d\eta+\int_{\mathbb{R}^2}|F(t,\xi,\eta)\partial_\xi^3\widehat{\varphi}|^2\,d\xi d\eta\\
\leq&\|\varphi\|^2_{s_1,s_2}+\\
&+\int_{\mathbb{R}^2}\left|\left(\frac{6it\eta^2}{(1+|\xi|)^4}+\frac{6(it)^2\eta^4}{(1+|\xi|)^5}+\frac{(it)^3\eta^6}{(1+|\xi|)^6}\right)F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi}\right|^2\,d\xi d\eta+\\
&+9\int_{\mathbb{R}^2}\left|\left(\frac{2it\eta^2\operatorname{sgn}(\xi)}{(1+|\xi|)^3}+\frac{(it)^2\eta^4}{(1+|\xi|)^4}\right)F(t,\xi,\eta)\partial_\xi\widehat{\varphi}\right|^2\,d\xi d\eta\\
&+9\int_{\mathbb{R}^2}\left|\frac{2it\eta^2}{(1+|\xi|)^2}F(t,\xi,\eta)\partial_\xi^2\widehat{\varphi}\right|^2\,d\xi d\eta+\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_\xi^3\varphi|^2\,d\xi d\eta\\
\leq&\|\varphi\|^2_{s_1,s_2}+36t^2\|\partial_y^2\varphi\|^2_{L^2}+36t^4\|\partial_y^4\varphi\|^2_{L^2}+9t^6\|\partial_y^6\varphi\|^2_{L^2}+\\
&+36t^2\|x\partial_y^2\varphi\|^2_{L^2}+9t^4\|x\partial_y^4\varphi\|^2_{L^2}+36t^2\|x^2\partial_y^2\varphi\|^2_{L^2}+\|x^3\varphi\|^2_{L^2}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, argumentando como en (3.1), tenemos

$$\begin{aligned}
\|x\partial_y^4\varphi\|&\leq c(\|\langle x\rangle^3\varphi\|+\|J_y^6\varphi\|),\\
\|x^2\partial_y^2\varphi\|&\leq c(\|\langle x\rangle^3\varphi\|+\|J_y^6\varphi\|).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|E(t)\varphi\|^2_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{3,0}} \leq P_3^2(t)\|\varphi\|^2_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{3,0}}.$$

Supongamos ahora que $E(t)\varphi\in C([0,\infty);\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r,0})$. Como

$$\partial_\xi^3(F\varphi)=\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}\partial_\xi^kF\partial_\xi^{3-k}\widehat{\varphi},$$

y empleando los mismos argumentos que usamos en esta demostración podemos ver que $\partial_\xi^kF\partial_\xi^{3-k}\widehat{\varphi}\in L^2(\mathbb{R}^2)$, para $k=0,1$ y 2, y que $\partial_\xi^3F\widehat{\varphi}-4(it)\eta^2\widehat{\varphi}(0,\eta)\delta\in L^2(\mathbb{R}^2)$, se sigue que $4(it)\eta^2\widehat{\varphi}(0,\eta)\delta\in L^2(\mathbb{R}^2)$, lo cual muestra que $\widehat{\varphi}(0,\eta)=0$, para todo η.

La demostración para $r\geq 4$ es básicamente la misma que para $r=3$ con la ayuda de un argumento de inducción. $\square$

Veamos ahora las derivadas del grupo con respecto a la variable η.

Lema 3.3. Sea $F(t,\xi,\eta) = e^{b(\xi,\eta)t}$, donde $b(\xi,\eta) = \frac{i\xi\eta^2}{1+|\xi|}$, entonces, para $j \geq 1$,

$$\partial_\eta^{2j} F(t,\xi,\eta) = \sum_{k=0}^{j} a_k \eta^{2k} \left(\frac{2it\xi}{1+|\xi|} \right)^{j+k} F(t,\xi,\eta)$$

y

$$\partial_\eta^{2j+1} F(t,\xi,\eta) = \sum_{k=0}^{j} a_k \eta^{2k+1} \left(\frac{2it\xi}{1+|\xi|} \right)^{j+1+k} F(t,\xi,\eta)$$

Ahora tenemos el siguiente corolario análogo al Corolario 3.2, pero a diferencia de éste no se exige una condición tan restrictiva como la dada en su numeral 2.

Corolario 3.4. Sea E como en el Corolario 3.2. Entonces, para $s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{N}$ con $s_2 \geq r$, tenemos que

$$\|E(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r}} \leq P_r(t)\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r}}, \tag{3.2}$$

donde $P_r(t)$ es un polinomio de grado r con coeficientes positivos.

Demostración. Para $r \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|E(t)\varphi\|^2_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r}} &= \|E(t)\varphi\|^2_{s_1,s_2} + \|E(t)\varphi\|^2_{L^2_{0,r}} \\
&\leq c\|\varphi\|^2_{s_1,s_2} + c\int_{\mathbb{R}^2} |y^r E(t)\varphi|^2\, dxdy \\
&= c\|\varphi\|^2_{s_1,s_2} + \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_\eta^r (F(t,\xi,\eta)\widehat{\varphi})|^2\, d\xi d\eta \\
&\leq c\|\varphi\|^2_{s_1,s_2} + \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=0}^{r} |c_j \partial_\eta^j F(t,\xi,\eta)\partial_\eta^{r-j}\widehat{\varphi}|^2\, d\xi d\eta \\
&\leq c\|\varphi\|^2_{s_1,s_2} + \sum_{j=0}^{r} \int_{\mathbb{R}^2} |c_j (\partial_\eta^j F(t,\xi,\eta)\partial_\eta^{r-j}\widehat{\varphi}|^2\, d\xi d\eta \\
&\leq c\|\varphi\|^2_{s_1,s_2} + \sum_{j=0}^{r} \int_{\mathbb{R}^2} |c_j p_j(t,\eta)\partial_\eta^{r-j}\widehat{\varphi}|^2\, d\xi d\eta\,. \\
&\leq \|\varphi\|^2_{s_1,s_2} + Q(t)\|\varphi\|^2_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r}} \\
&\leq P_j^2(t)\|\varphi\|^2_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r}}\,.
\end{aligned}$$

donde $p_j(t,\eta)$ es un polinomio en η de grado j (cuyos coeficientes de las potencias de diferente paridad que la de j son cero) y P_j es un polinomio en t de grado j. Aquí, para estimar las integrales donde aparecen $p_j(t,\eta)\partial_\eta^{r-j}\widehat{\varphi}$, $j = 0, 1, \cdots, r$, procedemos como en (3.1). $\square$

Gracias a que $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2} = \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,0} \cap \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r_2}$, de los Corolarios 3.4 y 3.2, se sigue inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 3.5. Sea E como en los Corolarios 3.2 y 3.4. Si $s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 = 0, 1, 2$ y $r_2 \in \mathbb{N}$ con $s_2 \geq \text{máx}(2r_1, r_2)$, tenemos

$$\|E(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}} \leq P_r(t)\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}},$$

donde $P_r(t)$ es un polinomio de grado $r = \text{máx}(r_1, r_2)$ con coeficientes positivos.

Examinemos, ahora, el problema de Cauchy de la ecuación lineal asociada a la ecuación (1.9) en los espacios con peso $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}$ donde r_1 y r_2 son reales no enteros. En este caso usaremos de manera sistemática la derivada de Stein. De hecho, en los tres siguientes lemas estimamos las derivadas de Stein de algunas funciones que aparecerán a lo largo de nuestra discusión en la parte final de esta sección.

Lema 3.6. Sea $b \in (0, 1)$. Para todo $t > 0$,

$$\mathcal{D}^b_x(F(t, x, \eta)) = \mathcal{D}^b_x(e^{\frac{it\eta^2 x}{1+|x|}}) \leq C(b)t^b\eta^{2b} \tag{3.3}$$

Demostración. Por la definición de la derivada homogénea tenemos

$$\mathcal{D}^b_x(e^{\frac{it\eta^2 x}{1+|x|}})^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{\frac{it\eta^2 x}{1+|x|}} - e^{\frac{it\eta^2 y}{1+|y|}}|^2}{|x-y|^{n+2b}}\,dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{|1 - e^{it\eta^2(\frac{x-y}{1+|x-y|} - \frac{x}{1+|x|})}|^2}{|y|^{1+2b}}\,dy.$$

Supongamos que $x > 0$. Entonces, haciendo un cambio de variable tenemos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} \frac{|1 - e^{it\eta^2(\frac{x-y}{1+x-y} - \frac{x}{1+x})}|^2}{|y|^{1+2b}}\,dy &= \int_{-\infty}^{\eta^2 tx} \frac{|1 - e^{\overline{\frac{-iy}{(1+x-\frac{y}{\eta^2 t})(1+x)}}}|^2}{|y|^{1+2b}}\,dy = \\ &= (\eta^2 t)^{2b} \int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^{\eta^2 tx} \frac{|1 - e^{\overline{\frac{-iy}{(1+x-\frac{y}{\eta^2 t})(1+x)}}}|^2}{|y|^{1+2b}}\,dy.\end{aligned}$$

Examinemos cada una de las integrales que aparecen en la anterior igualdad. Como $|1-e^{ix}| < 2$, tenemos

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{|1 - e^{\overline{\frac{-iy}{(1+x-\frac{y}{\eta^2 t})(1+x)}}}|^2}{|y|^{1+2b}}\,dy \leq \int_{-\infty}^{-1} \frac{4}{|y|^{1+2b}}\,dy = \frac{2}{b}\,. \tag{3.4}$$

Si $\eta^2 tx \leq 1$, del teorema del valor medio,

$$\int_{-1}^{\eta^2 tx} \frac{|1 - e^{\overline{\frac{-iy}{(1+x-\frac{y}{\eta^2 t})(1+x)}}}|^2}{|y|^{1+2b}}\,dy \leq \int_{-1}^{1} \frac{y^2}{|y|^{1+2b}}\,dy = \frac{1}{1-b}.$$

Si $\eta^2 xt > 1$, combinando los argumentos usados anteriormente, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{\eta^2 xt} \frac{|1-e^{\frac{-iy}{(1+x-\frac{y}{\eta^2 t})(1+x)}}|^2}{|y|^{1+2b}}\,dy &\leq \int_{-1}^{1} + \int_{1}^{\eta^2 xt} \frac{|1-e^{\frac{-iy}{(1+x-\frac{y}{\eta^2 t})(1+x)}}|^2}{|y|^{1+2b}}\,dy \\ &\leq \frac{1}{1-b} + \frac{2}{b}.\end{aligned}$$

Así pues,

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{|e^{\frac{it\eta^2 x}{1+|x|}} - e^{\frac{it\eta^2 y}{1+|y|}}|^2}{|x-y|^{1+2b}}\,dy \leq \left(\frac{2}{1-b} + \frac{4}{b}\right)(\eta^2 t)^{2b}. \tag{3.5}$$

Por otro lado, haciendo un cambio de variable, tenemos

$$\int_{x}^{\infty} \frac{|1-e^{it\eta^2(\frac{x-y}{1-x+y} - \frac{x}{1+x})}|^2}{|y|^{1+2b}}\,dy = (\eta^2 t)^{2b} \int_{\eta^2 tx}^{\infty} \frac{|1-e^{\frac{i(2x^2\eta^2 t - 2xy - y)}{(1-x+\frac{y}{\eta^2 t})(1+x)}}|^2}{|y|^{1+2b}}\,dy$$

Si $t\eta^2 x > 1$,

$$\int_{\eta^2 tx}^{\infty} \frac{|1-e^{\frac{i(2x^2\eta^2 t - 2xy - y)}{(1-x+\frac{y}{\eta^2 t})(1+x)}}|^2}{|y|^{1+2b}}\,dy \leq \int_{1}^{\infty} \frac{4}{|y|^{1+2b}}\,dy = \frac{2}{b}.$$

Ahora bien, si $x > 0$ y $y \geq x\eta^2 t$, se tiene que $1 - x + \frac{y}{\eta^2 t} \geq 1$ y, por consiguiente,

$$\begin{aligned}\left|\frac{i(2x^2\eta^2 t - 2xy - y)}{(1-x+\frac{y}{\eta^2 t})(1+x)}\right| &\leq \left|\frac{2x}{1+x}\right|\left|\frac{x\eta^2 t - y}{(1-x+\frac{y}{\eta^2 t})}\right| + \left|\frac{y}{(1-x+\frac{y}{\eta^2 t})(1+x)}\right| \\ &\leq 2|x\eta^2 t - y| + |y| \leq 3|y|.\end{aligned}$$

Luego, si $t\eta^2 x < 1$,

$$\begin{aligned}\int_{x\eta^2 t}^{\infty} \frac{|1-e^{\frac{i(2x^2\eta^2 t - 2xy - y)}{(1+x-\frac{y}{\eta^2 t})(1-x)}}|^2}{|y|^{1+2b}}\,dy &= \int_{x\eta^2 t}^{1} + \int_{1}^{\infty} \frac{|1-e^{\frac{i(2x^2\eta^2 t - 2xy - y)}{(1-x+\frac{y}{\eta^2 t})(1+x)}}|^2}{|y|^{1+2b}}\,dy \\ &\leq \int_{0}^{1} \frac{9y^2}{|y|^{1+2b}}\,dy + \int_{1}^{\infty} \frac{4}{|y|^{2b+1}}\,dy = \frac{9}{2(1-b)} + \frac{2}{b}.\end{aligned}$$

Así pues,

$$\int_{x}^{\infty} \frac{|e^{\frac{it\eta^2 x}{1+|x|}} - e^{\frac{it\eta^2 y}{1+|y|}}|^2}{|x-y|^{1+2b}}\,dy \leq \left(\frac{9}{2(1-b)} + \frac{2}{b}\right)(\eta^2 t)^{2b}. \tag{3.6}$$

Por lo tanto, si $x > 0$, de (3.5) y (3.6), tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|e^{\frac{it\eta^2 x}{1+|x|}} - e^{\frac{it\eta^2 y}{1+|y|}}|^2}{|x-y|^{1+2b}}\,dy \leq \left(\frac{13}{2(1-b)} + \frac{6}{b}\right)(\eta^2 t)^{2b}.$$

La demostración de la estimativa en el caso en que $x < 0$ es totalmente análoga. $\square$

Corolario 3.7. Sea $b \in (0,1)$. Para todo $t > 0$,

$$\mathcal{D}_x^b(\operatorname{sgn}(x)(F(t,x,\eta)-1)) = \mathcal{D}_x^b(\operatorname{sgn}(x)(e^{\frac{it\eta^2 x}{1+|x|}}-1)) \leq C(b)t^b\eta^{2b} \tag{3.7}$$

Demostración. Sin perdida de generalidad supondremos que $x > 0$. Luego,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_x^b(\operatorname{sgn}(x)(e^{\frac{it\eta^2 x}{1+|x|}}-1)) &= \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|\operatorname{sgn}(x)(e^{\frac{it\eta^2 x}{1+|x|}}-1)-\operatorname{sgn}(y)(e^{\frac{it\eta^2 y}{1+|y|}}-1)|^2}{|x-y|^{n+2b}}\,dy\right)^{1/2}\\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{\frac{it\eta^2 x}{1+|x|}}-e^{\frac{it\eta^2 y}{1+|y|}}|^2}{|x-y|^{1+2b}}\,dy\right)^{1/2} + 2\left(\int_{-\infty}^{0} \frac{|e^{\frac{it\eta^2 y}{1+|y|}}-1|^2}{|x-y|^{1+2b}}\,dy\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Como $|y| < |x-y|$, para $y < 0$, del lema anterior se sigue el corolario. ☐

Lema 3.8. Si $0 < b < 1$, entonces

$$\mathcal{D}_x^b\left(\frac{1}{(1+|x|)^n}\right) \leq \frac{C}{(1+|x|)^{1/2}} \tag{3.8}$$

Demostración. Es claro que

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{D}_x^b\left(\frac{1}{(1+|x|)^n}\right)\right)^2 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|\frac{1}{(1+|x|)^n}-\frac{1}{(1+|y|)^n}\right|^2}{|y-x|^{1+2b}}\,dy\\ &\leq \frac{1}{(1+|x|)^{2n}}\int_{\mathbb{R}} \frac{(2+|y|+|x|)^{2(n-1)}|y-x|^{1-2b}}{(1+|y|)^{2n}}\,dy\\ &\leq \frac{1}{(1+|x|)^{2n}}\left(\int_{|x-y|<1} \frac{(2+|y|+|x|)^{2(n-1)}|y-x|^{1-2b}}{(1+|y|)^{2n}}\,dy+\right.\\ &\qquad \left.+\int_{|y-x|\geq 1} \frac{(2+|y|+|x|)^{2(n-1)}|y-x|^{1-2b}}{(1+|y|)^{2n}}\,dy\right)\end{aligned}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}\int_{x-1}^{x+1} \frac{(2+|y|+|x|)^{2(n-1)}|y-x|^{1-2b}}{(1+|y|)^{2n}}\,dy &\leq 2(2+|x|)^{2(n-1)}\int_0^1 y^{1-2b}\,dy\\ &\leq C\frac{(1+|x|)^{2(n-1)}}{1-b}\end{aligned}$$

Por otro lado, si $b \in (0,1/2)$,

$$\int_{|y-x|\geq 1} \frac{(2+|y|+|x|)^{2(n-1)}|y-x|^{1-2b}}{(1+|y|)^{2n}}\,dy \leq \int_A + \int_B \frac{(2+|y|+|x|)^{2(n-1)}|y-x|^{1-2b}}{(1+|y|)^{2n}}\,dy$$

donde $A = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq |y - x| \leq |y|\}$ y $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq |y - x|$ y $|y| < |y - x|\}$. Como

$$\begin{aligned}\int_A \frac{(2+|y|+|x|)^{2(n-1)}|y-x|^{1-2b}}{(1+|y|)^{2n}}\,dy \leq& \int_A \frac{(2+|y|+|x|)^{2(n-1)}|y|^{1-2b}}{(1+|y|)^{2n}}\,dy\\ \leq& C(1+|x|)^{2(n-1)}\int_{\mathbb{R}}(1+|y|)^{-1-2b}\,dy\\ \leq& \frac{C}{b}(1+|x|)^{2(n-1)}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\int_B \frac{(2+|y|+|x|)^{2(n-1)}|y-x|^{1-2b}}{(1+|y|)^{2n}}\,dy \leq& 2^{2b}\int_A \frac{(2+|y|+|x|)^{2(n-1)}(|y|+|x|)(1+|y|)^{-2b}}{(1+|y|)^{2n}}\,dy\\ \leq& C(1+|x|)^{2n-1}\int_{\mathbb{R}}(1+|y|)^{-1-2b}\,dy\\ \leq& \frac{C}{b}(1+|x|)^{2n-1},\end{aligned}$$

en este caso tenemos

$$\int_{|y-x|\geq 1} \frac{(2+|y|+|x|)^{2(n-1)}|y-x|^{1-2b}}{(1+|y|)^{2n}}\,dy \leq \frac{C}{b}(1+|x|)^{2n-1}.$$

Si $b \in [1/2, 1)$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{|x-y|\geq 1} \frac{(2+|y|+|x|)^{2(n-1)}|y-x|^{1-2b}}{(1+|y|)^{2n}}\,dy \leq& \int_{\mathbb{R}} \frac{(2+|y|+|x|)^{2(n-1)}}{(1+|y|)^{2n}}\,dy\\ \leq& C(1+|x|)^{2(n-1)}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1+|y|)^2}\,dy\\ \leq& C(1+|x|)^{2(n-1)}.\end{aligned}$$

Luego,

$$\left(\mathcal{D}_x^b\left(\frac{1}{(1+|x|)^n}\right)\right)^2 \leq \frac{C}{b(1+|x|)}.$$

$\square$

Lema 3.9. Sea $0 < b < 1$. Para $t > 0$

$$\mathcal{D}_\eta^b(e^{\frac{it\xi\eta^2}{(1+|\xi|)}}) \leq c\left(\left(\frac{t\xi}{(1+|\xi|)}\right)^{b/2} + \left(\frac{t\xi}{(1+|\xi|)}\right)^b |\eta|^b\right) \tag{3.9}$$

Demostración. Ver Proposición 2 de [33]. $\square$

Ahora, demostraremos dos proposiciones que extienden los Corolarios 3.2 y 3.4 al caso en que el exponente de los pesos es real.

Proposición 3.10. Sea E como en el Corolario 3.2. Para s_1, $s_2 \in \mathbb{R}$ y $0 < r < \frac{5}{2}$ tal que $s_2 \geq 2r$, tenemos que

$$\|E(t)\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s_2}} \leq C(t)\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s_2}}, \tag{3.10}$$

donde $C(t)$ es una función continua y creciente en t.

Demostración. Supongamos, primero, que $r = b$, con $0 < b < 1$. De las propiedades de la derivada de Stein y los Lemas 3.6 y 3.8, tenemos

$$\begin{aligned}
\||x|^r E(t)\varphi\|_{L^2} &= \|D_\xi^b(F\widehat{\varphi})\|_{L^2} \\
&\leq c(\|F\widehat{\varphi}\|_{L^2} + \|\mathcal{D}_\xi^b(F\widehat{\varphi})\|_{L^2}) \\
&\leq c(\|\varphi\|_{L^2} + \|F\mathcal{D}_\xi^b(\widehat{\varphi})\|_{L^2} + \|\widehat{\varphi}\mathcal{D}_\xi^b F\|_{L^2}) \\
&\leq c(\|\varphi\|_{L^2} + \|\mathcal{D}_\xi^b(\widehat{\varphi})\|_{L^2} + \|c(b)t^b\eta^{2b}\widehat{\varphi}\|_{L^2}) \\
&\leq c(\|\varphi\|_{L^2} + \|\widehat{|x|^b\varphi}\|_{L^2} + c(b)t^b\|\widehat{D_y^{2b}\varphi}\|_{L^2}) \\
&\leq c(\|\varphi\|_{L^2} + \||x|^b\varphi\|_{L^2} + c(b)t^b\|D_y^{2b}\varphi\|_{L^2}) \\
&\leq c\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s_2}}
\end{aligned}$$

Ahora bien, si $1 < r < 2$, tenemos que $r = 1 + b$, para algún $0 < b < 1$. Así pues, ya que, del Lema 2.21,

$$\||x|^b D_y^2\varphi\|_{L^2}^2 \leq c(\|\langle x\rangle^{1+b}\varphi\|_{L^2}^2 + \|J_y^{2+2b}\varphi\|_{L^2}^2)$$

y

$$\|xD_y^{2b}\varphi\|_{L^2} \leq c(\|\langle x\rangle^{1+b}\varphi\|_{L^2}^2 + \|J_y^{2+2b}\varphi\|_{L^2}^2),$$

de nuevo, de las propiedades de la derivada de Stein y los Lemas 3.1, 3.6 y 3.8, tenemos

$$
\begin{aligned}
\||x|^r E(t)\varphi\|_{L^2} =&\|D_\xi^b(\partial_\xi(F\widehat{\varphi}))\|_{L^2}\\
\leq& c(\|\partial_\xi(F\widehat{\varphi})\|_{L^2}+\|\mathcal{D}_\xi^b(\partial_\xi(F\widehat{\varphi}))\|_{L^2}\\
\leq& c(\|xE(t)\varphi\|_{L^2}+\|\mathcal{D}_\xi^b(\widehat{\varphi}\partial_\xi F)\|_{L^2}+\|\mathcal{D}_\xi^b(F\partial_\xi\widehat{\varphi})\|_{L^2}\\
\leq& c\Bigg(P_1(t)\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s2}}+\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(\widehat{\varphi}\frac{it\eta^2}{(1+|\xi|)^2}F\right)\right\|_{L^2}+\|\partial_\xi\widehat{\varphi}\mathcal{D}_\xi^b F\|_{L^2}+\\
&+\|F\mathcal{D}_\xi^b(\partial_\xi\widehat{\varphi})\|_{L^2}\Bigg)\\
\leq& c(t)\Bigg(\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s2}}+\left\|\frac{1}{(1+|\xi|)^2}\right\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^b(\eta^2 F\widehat{\varphi})\|_{L^2}+\\
&+\left\|\eta^2F\widehat{\varphi}\mathcal{D}_\xi^b\left(\frac{1}{(1+|\xi|)^2}\right)\right\|_{L^2}+\|c(b)t^b\eta^{2b}\partial_\xi\widehat{\varphi}\|_{L^2}+\|\mathcal{D}_\xi^{1+b}\widehat{\varphi}\|_{L^2}\Bigg)\\
\leq& c(t)\left(\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s_2}}+\|\mathcal{D}_\xi^b(\eta^2F)\widehat{\varphi}\|_{L^2}+\|\eta^2F\mathcal{D}_\xi^b\widehat{\varphi}\|_{L^2}+\|xD_y^{2b}\varphi\|_{L^2}\right)\\
\leq& c(t,b)(\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s_2}}+\|D_y^{2+2b}\varphi\|_{L^2}+\||x|^bD_y^2\varphi\|_{L^2}+\|J_y^{2b+2}\varphi\|_{L^2}+\\
&+\|\langle x\rangle^{1+b}\varphi\|_{L^2})\\
\leq& c(t)\left(\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s_2}}+\|J_y^{2b+2}\varphi\|_{L^2}+\|\langle x\rangle^{1+b}\varphi\|_{L^2}\right)\\
\leq& c(t)\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s_2}}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, supongamos $2<r<\dfrac{5}{2}$, o, en otras palabras, supongamos $r=2+b$ con $0<b<\frac{1}{2}$. Entonces, del Lema 3.1,

$$
\begin{aligned}
\||x|^{2+b}E(t)\varphi\|_{L^2} =&\|D_\xi^b(\partial_\xi^2(F\widehat{\varphi}))\|_{L^2}\\
\leq&\left\|D_\xi^b\left(\frac{2it\eta^2\operatorname{sgn}(\xi)}{(1+|\xi|)^3}F\widehat{\varphi}\right)\right\|_{L^2}+\left\|D_\xi^b\left(\frac{t^2\eta^4}{(1+|\xi|)^4}F\widehat{\varphi}\right)\right\|_{L^2}+\\
&+\left\|D_\xi^b\left(\frac{2it\eta^2}{(1+|\xi|)^2}F\partial_\xi\widehat{\varphi}\right)\right\|_{L^2}+\left\|D_\xi^b\left(F\partial_\xi^2\widehat{\varphi}\right)\right\|_{L^2}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Estimemos cada uno de los términos del lado derecho de esta última desigualdad. Procediendo como en el anterior caso, la estimativa del cuarto término queda así

$$
\begin{aligned}
\|D_\xi^b(F\partial_\xi^2\widehat{\varphi})\|_{L^2} &\leq c(\|F\partial_\xi^2\widehat{\varphi}\|_{L^2}+\|\mathcal{D}_\xi^b(F\partial_\xi^2\widehat{\varphi})\|_{L^2})\\
&\leq c(\|\partial_\xi^2\widehat{\varphi}\|_{L^2}+\|F\mathcal{D}_\xi^b(\partial_\xi^2\widehat{\varphi})\|_{L^2}+\|\partial_\xi^2\widehat{\varphi}\mathcal{D}_\xi^bF\|_{L^2})\\
&\leq c(\|x^2\varphi\|_{L^2}+\||x|^{2+b}\varphi\|_{L^2}+\|c(b)t^b\eta^{2b}\partial_\xi^2\widehat{\varphi}\|_{L^2})\\
&\leq c(\|x^2\varphi\|_{L^2}+\||x|^r\varphi\|_{L^2}+c(b)t^b\|x^2D_y^{2b}\varphi\|_{L^2})\\
&\leq c(t)\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s_2}},
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

donde usamos la siguiente desigualdad, que sigue del Lema 2.21 y la desigualdad de Young,

$$\|x^2 D_y^{2b}\varphi\|_{L^2} \leq \|\langle x\rangle^{2+b}\varphi\|_{L^2} + \|J_y^{4+2b}\varphi\|_{L^2}$$

De la misma manera tenemos para el segundo y tercer términos las siguientes estimativas

$$\left\| D_\xi^b \left(\frac{t^2\eta^4}{(1+|\xi|)^4} F\widehat{\varphi} \right) \right\|_{L^2} \leq c(t)\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s_2}} \tag{3.13}$$

y

$$\left\| D_\xi^b \left(\frac{2t\eta^2}{(1+|\xi|)^2} F\widehat{\varphi} \right) \right\|_{L^2} \leq c(t)\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s_2}} \tag{3.14}$$

El tratamiento del primer término tiene la siguiente ligera diferencia, gracias al Ejemplo 1 y al Teorema 2.15, para $0 < b < \frac{1}{2}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\left\| D_\xi^b \left(\frac{2t\,\mathrm{sgn}(\xi)\eta^2}{(1+|\xi|)^3} F\widehat{\varphi} \right) \right\|_{L^2} &\leq 2t \left\| |x|^b \mathscr{H} \left(\frac{\eta^2}{(1+|\xi|)^3} F\widehat{\varphi} \right)^\vee \right\|_{L^2} \\
&\leq ct \left\| |x|^b \left(\frac{\eta^2}{(1+|\xi|)^3} F\widehat{\varphi} \right)^\vee \right\|_{L^2} \\
&\leq ct \left\| D_\xi^b \left(\frac{\eta^2}{(1+|\xi|)^3} F\widehat{\varphi} \right) \right\|_{L^2}
\end{aligned}$$

Ahora si, procediendo como antes, tenemos

$$\left\| D_\xi^b \left(\frac{2t\,\mathrm{sgn}(\xi)\eta^2}{(1+|\xi|)^3} F\widehat{\varphi} \right) \right\|_{L^2} \leq c(t)\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s_2}} \tag{3.15}$$

Luego, de (3.11), (3.12), (3.13), (3.14) y (3.15), se sigue (3.6), para $2 < r < \frac{5}{2}$. Esto términa la demostración de la proposición. □

Proposición 3.11. Sea E como en el Corolario 3.2. Para s_1, $s_2 \in \mathbb{R}$ y $0 < r$ tal que $s_2 \geq r$, tenemos que

$$\|E(t)\varphi\|_{\mathcal{F}_{0,r}^{s_1,s_2}} \leq C(t)\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{0,r}^{s_1,s_2}}, \tag{3.16}$$

donde $C(t)$ es una función continua y creciente en t.

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $0 < b < 1$ tal que $r = n + b$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\||y|^r E(t)\varphi\|_{L^2} &\leq c(\|\phi\|_{\mathcal{F}_{0,r}^{s_1,s_2}} + \|\mathcal{D}_\eta^b(\partial_\eta^n(F\widehat{\varphi}))\|_{L^2}) \\
&\leq c\left(\|\phi\|_{\mathcal{F}_{0,r}^{s_1,s_2}} + \sum_{m=0}^{n} \|\mathcal{D}_\eta^b(\partial_\eta^m F \partial_\eta^{n-m}\widehat{\varphi})\|_{L^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Examinemos cada uno de los términos de la sumatoria del lado derecho de la anterior desigualdad. Supondremos sin perdida de generalidad que m es par, osea, que $m = 2j$. Del Lema 3.3 y las propiedades de la derivada de Stein se sigue que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{D}_\eta^b(\partial_\eta^m F \partial_\eta^{n-m}\widehat{\varphi})\|_{L^2} \leq& \sum_{k=0}^{j} a_k \left\| \mathcal{D}_\eta^b \left(\eta^{2k} \left(\frac{2it\xi}{1+|\xi|} \right)^{j+k} F\partial_\eta^{n-m}\widehat{\varphi} \right) \right\|_{L^2} \\
\leq& c(t) \sum_{k=0}^{j} \left(\left\| \mathcal{D}_\eta^b F \eta^{2k} \partial_\eta^{n-m}\widehat{\varphi} \right\|_{L^2} + \left\| F\mathcal{D}_\eta^b(\eta^{2k}\partial_\eta^{n-m}\widehat{\varphi}) \right\|_{L^2} \right) \\
\leq& c(t) \sum_{k=0}^{j} \left(\left\| \eta^{2k+b} \partial_\eta^{n-m}\widehat{\varphi} \right\|_{L^2} + \left\| \mathcal{D}_\eta^b(\eta^{2k}\partial_\eta^{n-m}\widehat{\varphi}) \right\|_{L^2} \right).
\end{aligned}$$

Como, del Lema 2.21

$$\begin{aligned}
\|\eta^{2k+b}\partial_\eta^{n-m}\widehat{\varphi}\|_{L^2} &\leq \|\langle\eta\rangle^{2k+b} J_\eta^{n-m}\widehat{\varphi}\|_{L^2} \leq \|\langle\eta\rangle^{m+b} J_\eta^{n-m}\widehat{\varphi}\|_{L^2} \\
&\leq \|J_y^{n+b}\varphi\|_{L^2}^{\frac{m+b}{n+b}} \|\langle\eta\rangle^n \varphi\|_{L^2}^{\frac{n-m}{n+b}} \\
&\leq c(\|\langle y\rangle^{n+b}\varphi\|_{L^2} + \|J_y^{n+b}\varphi\|_{L^2})
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{D}_\eta^b(\eta^{2k}\partial_\eta^{n-m}\widehat{\varphi})\right\|_{L^2} &\leq \|J_\eta^b\langle\eta\rangle^{2k} J_\eta^{n-m}\widehat{\varphi}\|_{L^2} \\
&\leq \|J_y^{n-m+2k+b}\varphi\|_{L^2}^{\frac{2k}{2k+b}} \|\langle\eta\rangle^{2k+b} J_\eta^{n-m}\varphi\|_{L^2}^{\frac{b}{2k+b}} \\
&\leq \|J_y^{n+b}\varphi\|_{L^2}^{\frac{2k}{2k+b}} \|\langle\eta\rangle^{m+b} J_\eta^{n-m}\varphi\|_{L^2}^{\frac{b}{2k+b}} \\
&\leq \|J_y^{n+b}\varphi\|_{L^2}^{(\frac{2k}{2k+b}+\frac{(n-m)b}{(n+b)(2k+b)})} \|\langle\eta\rangle^{m+b} J_\eta^{n-m}\varphi\|_{L^2}^{\frac{(m+b)b}{(n+b)(2k+b)}} \\
&\leq c(\|\langle y\rangle^{n+b}\varphi\|_{L^2} + \|J_y^{n+b}\varphi\|_{L^2}),
\end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{D}_\eta^b(\partial_\eta^m F\partial_\eta^{n-m}\widehat{\varphi})\|_{L^2} &\leq c(\|\langle y\rangle^{n+b}\varphi\|_{L^2} + \|J_y^{n+b}\varphi\|_{L^2}) \\
&\leq c\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{0,r}^{s_1,s_2}}
\end{aligned}$$

Luego, de (3.17), se sigue la proposición. □

De las anteriores dos proposiciones obtenemos el siguiente corolario análogo al Corolario 3.5, de la misma forma que obtuvimos este último.

Corolario 3.12. Sea E como en los Corolario 3.2. Si s_1, $s_2 \in \mathbb{R}$, $0 \leq r_1 < 5/2$ y $r_2 \geq 0$ con $s_2 \geq \text{máx}(2r_1, r_2)$, tenemos

$$\|E(t)\varphi\|_{\mathcal{F}_{r_1,r_2}^{s_1,s_2}} \leq c(t)\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r_1,r_2}^{s_1,s_2}},$$

donde $c(t)$ es una función continua creciente.

3.2. Buen planteamiento de (1.9)

Gracias a la discusión en la sección anterior tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.13. Sean s_1 y s_2 números reales positivos, y r_1 y r_2 números reales no negativos tales que $r_1 < \frac{5}{2}$, $s_2 \geq \text{máx}(2r_1, r_2)$ y $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} < 2$. Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}$, existen $T > 0$, que depende de $\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}}$, y una única $u \in C([0,T]; \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2})$ solución del problema de valor inicial (1.9).
Más aún, la aplicación $\psi \mapsto v$, v solución de (1.9) con condición inicial ψ, es continua de un abierto en $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}$, que contiene a φ, en $C([0,T]; \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2})$.

Demostración. Es claro que (1.9) es equivalente a la ecuación integral

$$u = E(t)\varphi + \int_0^t E(t-\tau)B(u^n(\tau))\, d\tau, \tag{3.18}$$

donde

$$E(t) = e^{tA} \qquad \text{y} \qquad A = -\partial_x(1 + \mathcal{H}\partial_x)^{-1}\partial_y^2. \tag{3.19}$$

Así pues, mostraremos que esta ecuación tiene solución en $C([0,T]; \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2})$, para T suficientemente pequeña. Sea Φ definida por

$$\Phi u = E(t)\varphi + \int_0^t E(t-\tau)B(u^n(\tau))\, d\tau,$$

para cada función $u \in C([0,T]; \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2})$. Veamos que, para algún T, Φ es una contracción en el espacio

$$\mathcal{X}(T,M) = \{u \in C([0,T]; \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}) \mid \|E(t)\varphi - u(t)\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}} \leq M\}, \tag{3.20}$$

donde M es un real positivo arbitrario. Es claro que $\mathcal{X}(T,M)$ es un espacio métrico completo con la métrica $d_{T,M}$ definida por

$$d_{T,M}(u,v) = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - v(t)\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}}.$$

Escojamos T tal que Φ vaya de $\mathcal{X}(T,M)$ en sí mismo. Gracias a los Corolarios 2.13, 2.17 y

3.12, para $u \in \mathcal{X}(T, M)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t) - E(t)\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}} &= \left\| \int_0^t E(t-\tau)B(u^n(\tau))\,d\tau \right\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}} \\
&\leq \int_0^t \|E(t-\tau)B(u^n(\tau))\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}}\,d\tau \\
&\leq \int_0^t c(t-\tau)\|u^n(\tau)\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}}\,d\tau \\
&\leq c(T)\int_0^t \|u(\tau)\|^n_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}}\,d\tau \\
&\leq c(T)\int_0^t (M + \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}})^n\,d\tau \\
&\leq c(T)(M + \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}})^n T,
\end{aligned}$$

donde c es una función continua creciente. Luego, si escogemos T de tal modo que

$$Tc(T) \leq \frac{M}{(M + \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}})^n},$$

entonces $\Phi(u) \in \mathcal{X}(T, M)$. Por otro lado, como

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}} &\leq \int_0^t \|E(t-\tau)B(u^n(\tau)) - v^n(\tau))\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}}\,d\tau \\
&\leq c(T)\int_0^t \|u^n(\tau) - v^n(\tau))\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}}\,d\tau \\
&\leq \tilde{c}(T)\int_0^t \|u(\tau) - v(\tau)\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}}(\|u(\tau)\|^{n-1}_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}} + \|v(\tau)\|^{n-1}_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}})\,d\tau \\
&\leq \tilde{c}(T)(M + \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}})^{n-1} T d_{T,M}(u, v)
\end{aligned}$$

para alguna función continua creciente $\tilde{c}$, si tomamos T tal que asimismo se satisfaga

$$\tilde{c}(T)(M + \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}})^{n-1} T < 1,$$

tenemos, en efecto, que Φ es una contracción en $\mathcal{X}(T, M)$. Luego, del teorema de punto fijo de Banach, existe una función $u \in \mathcal{X}(T, M)$ solución de (3.18), y por ende de (1.9). Finalmente, si u y v son soluciones de (1.9) en el intervalo $[0, T]$, tenemos que

$$\|u(t) - v(t)\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}} \leq c(t)\|\varphi - \psi\| + \int_0^t M^{n-1} c(t-\tau)\|u(\tau) - v(\tau)\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}}\,d\tau.$$

De esta desigualdad y del lema de Gronwall se sigue el teorema. $\square$

3.3. Continuación única de las soluciones de (1.9)

Veamos ahora que si $r_1 = 5/2$ no hay persistencia de las soluciones de (1.9). Más precisamente tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.14. Supongamos que se satisfacen las condiciones del Teorema 3.13 para s_1, s_2, r_1 y r_2, con $s_2 \geq 5$. Sea $u \in C([0,T];\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2})$ solución del problema (1.9) tal que $\int_{\mathbb{R}} \partial_y^2 u(0,x,y)\,dx \geq 0$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Si para dos tiempos $t_1 = 0 < t_2 < T$ se tiene que $u(t_j) \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{\frac{5}{2},r_2}$, $j = 1, 2$, entonces u es identicamente cero.

Demostración. Sea $u \in C([0,T] : \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{2,r_2})$ como en el enunciado del teorema. Sean $\varphi(x,y) = u(0,x,y)$ y $v = u^2$.
Primero vamos a examinar cuidadosamente los términos del lado derecho de la ecuación que se obtiene al multiplicar por x^2 en ambos lados de (3.18).
Para el primer término que aparece allí, del Lema 3.1, tenemos

$$\begin{aligned}\partial_\xi^2(F\widehat{\varphi}) &= F\left[\frac{-2it\eta^2\,\mathrm{sgn}(\xi)}{(1+|\xi|)^3}\widehat{\varphi} - \frac{t^2\eta^4}{(1+|\xi|)^4}\widehat{\varphi} + \frac{2it\eta^2}{(1+|\xi|)^2}\partial_\xi\widehat{\varphi} + \partial_\xi^2\widehat{\varphi}\right]\\ &= B_1 + B_2 + B_3 + B_4,\end{aligned}$$

donde cada B_i, $i = 1, \cdots, 4$, son los sumandos que se obtienen al distribuir F en la suma entre paréntesis en el lado derecho de la ecuación de encima. Como las estimativas (3.12), (3.13) y (3.14) son válidas para $0 < b < 1$, $D_\xi^{1/2} B_i \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $i = 2$, 3 y 4. Ahora bien, para B_1 tenemos

$$\begin{aligned}B_1 =&\frac{-2it\eta^2}{(1+|\xi|)^3}\widehat{\varphi}\,\mathrm{sgn}(\xi)(F-1) - 2it\,\mathrm{sgn}(\xi)\eta^2\left(\frac{1}{(1+|\xi|)^3} - 1\right)\widehat{\varphi} -\\ &- 2it\,\mathrm{sgn}(\xi)\eta^2\widehat{\varphi}\\ =&C_1 + C_2 + C_3\end{aligned} \tag{3.21}$$

Razonando de la misma manera en que obtuvimos (3.12) se demuestra que $D_\xi^{\frac{1}{2}} C_2 \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Es ligeramente más complicado ver que $D_\xi^{\frac{1}{2}} C_1 \in L^2(\mathbb{R}^2)$, pero gracias al Corolario 3.7, se puede hacer ésto con el mismo argumento. Luego,

$$D_\xi^{1/2}\left(B_1 - 2it\eta^2\,\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{\varphi}\right) \in L^2(\mathbb{R}^2). \tag{3.22}$$

Así pues, se tiene que

$$D_\xi^{1/2}\left((x^2 E(t)\varphi)\widehat{\ } + 2it\eta^2\,\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{\varphi}\right) \in L^2(\mathbb{R}^2). \tag{3.23}$$

Para examinar el término de la integral, examinemos la segunda derivada con respecto a ξ de la transformada de Fourier de la expresión que aparece dentro de la integral. Con este propósito, tenemos

$$
\begin{aligned}
\partial_\xi^2\left(\frac{i\xi F\widehat{v}}{1+|\xi|}\right) =&F(t,\xi,\eta)\Bigg(\frac{2t|\xi|\eta^2}{(1+|\xi|)^4}\widehat{v}-\frac{2t\eta^2}{(1+|\xi|)^4}\widehat{v}-\frac{it^2\eta^4}{(1+|\xi|)^5}\xi\widehat{v}-\\
&-\frac{2t\xi\eta^2}{(1+|\xi|)^3}\partial_\xi\widehat{v}-\frac{2i\,\mathrm{sgn}(\xi)}{(1+|\xi|)^3}\widehat{v}+\frac{2i}{(1+|\xi|)^2}\partial_\xi\widehat{v}+\frac{i\xi}{1+|\xi|}\partial_\xi^2\widehat{v}\Bigg)\\
=&A_1+\cdots+A_7
\end{aligned}
$$

Procediendo como antes podemos ver que $D_\xi^{1/2}(A_i)\in C([0,T]:L^2(\mathbb{R}^2))$, para $i\neq 5$, y que

$$
\left(D_\xi^{1/2}(A_5-2i\,\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{v})\right)\in C([0,T]:L^2(\mathbb{R}^2)). \tag{3.24}
$$

Por lo tanto,

$$
D_\xi^{1/2}\left(\left(x^2\int_0^t E(t-\tau)B(u^n(\tau))\,d\tau\right)^{\widehat{}}+2i\,\mathrm{sgn}(\xi)\int_0^t\widehat{v}d\tau\right)\in C([0,T]:L^2(\mathbb{R}^2)). \tag{3.25}
$$

Así pues, de (3.23) y (3.25), se tiene que

$$
D_\xi^{1/2}\left(\widehat{x^2u(t)}+2it\eta^2\,\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{\varphi}+2i\,\mathrm{sgn}(\xi)\int_0^t\widehat{v}d\tau\right)\in L^2(\mathbb{R}^2), \tag{3.26}
$$

para todo $t\in[0,T]$. Como $u(t_2)\in\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{\frac{5}{2},r_2}$

$$
D_\xi^{\frac{1}{2}}\left[\mathrm{sgn}(\xi)\left(2t_2\eta^2\widehat{\varphi}+\int_0^{t_2}\widehat{v}\,d\tau\right)\right]\in L^2(\mathbb{R}^2).
$$

En particular,

$$
D_\xi^{\frac{1}{2}}\left[\mathrm{sgn}(\xi)\left(2t_2\widehat{\partial_y^2\varphi}^x+\int_0^{t_2}\widehat{v}^x\,d\tau\right)\right]\in L^2(\mathbb{R})
$$

(en ξ) para casi todo $y\in\mathbb{R}$, donde $\widehat{\ }^x$ denota la tranformada de Fourier solo en x. Por el Teorema 2.22

$$
2t_2\widehat{\partial_y^2\varphi}^x(0,y)+\int_0^{t_2}\widehat{v}^x(\tau,0,y)\,d\tau=0,
$$

para casi todo $y\in\mathbb{R}$. Como

$$
\widehat{\partial_y^2\varphi}^x(0,y)=\int_{\mathbb{R}}\partial_y^2\varphi(x,y)\,dx\geq 0
$$

para casi todo y,

$$
\int_0^{t_2}\widehat{v}^x\,d\tau=\int_0^{t_2}\int_{-\infty}^{\infty}u^2(\tau,x,y)dx\,d\tau=0,
$$

para casi todo y. En otras palabras, $u\equiv 0$. □

4 Mal planteamiento de la ecuación (1.9)

En esta capítulo demostraremos algunos resultados de mal planteamiento para el problema de Cauchy asociado con la ecuación (1.9), con $n = 2$, en espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$, con $s < 0$, siguiendo las ideas presentadas en [8], [31], [22].

4.1. Mal planteamiento

A continuación enunciamos algunos lemas que se usarán más adelante en el presente capítulo.
Lema 4.1. Sea $p(\xi, \eta) = \frac{\xi\eta^2}{1+|\xi|}$.

$$\int_0^t E(t-\tau)(1+\mathscr{H}\partial_x)^{-1}\partial_x[(E(t)\varphi)^2]d\tau =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^4} e^{ix\xi+iy\eta+itp(\xi,\eta)}K(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)\,d\xi_1 d\eta_1 d\xi d\eta$$

donde

$$K(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1) = \frac{\xi}{1+|\xi|}\widehat{\varphi}(\xi_1,\eta_1)\widehat{\varphi}(\xi-\xi_1,\eta-\eta_1)\left(\frac{e^{it\theta(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)}-1}{i\theta(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)}\right),$$

y

$$\theta(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1) = p(\xi_1,\eta_1) + p(\xi-\xi_1,\eta-\eta_1) - p(\xi,\eta) \tag{4.1}$$

Demostración. La demostración de este lema es un procedimiento común que aparece en la literatura relacionada con ecuaciones dispersivas (vea por ejemplo el Lema 4 en [30], [31] y [8]). Por completez, veamos su demostración. De la definición de la convolución entre funciones y el teorema de Fubini, tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^t E(t-\tau)(1+\mathscr{H}\partial_x)^{-1}\partial_x[(E(t)\varphi)^2]d\tau = \\
&\quad= \int_0^t \left[\int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\xi+iy\eta}((1+\mathscr{H}\partial_x)^{-1}\partial_x E(t-\tau)[(E(t)\varphi)^2])^\wedge(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\right] d\tau \\
&\quad= \int_0^t \left[\int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\xi+iy\eta}e^{i(t-\tau)p(\xi,\eta)}\frac{\xi}{1+|\xi|}[e^{i\tau p(\cdot,\cdot)}\widehat{\varphi} * e^{i\tau p(\cdot,\cdot)}\widehat{\varphi}](\xi,\eta)\,d\xi d\eta\right] d\tau \\
&\quad= \int_{\mathbb{R}^4} e^{ix\xi+iy\eta+itp(\xi,\eta)}\frac{\xi}{1+|\xi|}\Psi(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)\left(\int_0^t e^{i\tau\theta(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)}d\tau\right) d\xi_1 d\eta_1 d\xi d\eta \\
&\quad= \int_{\mathbb{R}^4} e^{ix\xi+iy\eta+itp(\xi,\eta)}K(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)\,d\xi_1 d\eta_1 d\xi d\eta
\end{aligned}$$

donde

$$\Psi(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1) = \widehat{\varphi}(\xi_1,\eta_1)\widehat{\varphi}(\xi-\xi_1,\eta-\eta_1)$$

$\square$

La función $\theta(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)$ que definimos en (4.1) es denominada *resonante*.
Los siguientes dos lemas, que se pueden probar con un sencillo cálculo directo, serán de gran utilidad en la demostración del resultado principal de este capítulo.

Lema 4.2. Sean $s<0$, $\alpha>0$, $N>0$ y

$$\widehat{\varphi}(\xi,\eta) = \alpha^{-1}N^{-s}(\chi_{I_1}(\xi,\eta)+\chi_{I_2}(\xi,\eta)) \tag{4.2}$$

donde

$$I_1 = [-N-\alpha,-N]\times[\alpha,2\alpha], \qquad I_2 = [N,N+\alpha]\times[\alpha,2\alpha]$$

y χ_I es la función característica del conjunto I. Entonces, $\|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \le 2$.

Lema 4.3. Si $(\xi_1,\eta_1)\in I_1$ y $(\xi-\xi_1,\eta-\eta_1)\in I_2$ se tiene que

$$|\theta(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)| \le C\alpha^2$$

Teorema 4.4. Supongamos que $n=2$ en (1.9) y sean $s<0$ y $T>0$. Entonces, no existe un subespacio $\mathscr{X}_T$ incluido continuamente en $C([0,T];H^s(\mathbb{R}^2))$ tal que, para alguna constante $C>0$, se tenga que

$$\|E(t)\varphi\|_{\mathscr{X}_T} \le C\|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}, \tag{4.3}$$

para toda $\varphi\in H^s(\mathbb{R}^2)$, y

$$\left\|\int_0^t E(t-\tau)[(1+\mathscr{H}\partial_x)^{-1}\partial_x(u^2(\tau))]\,d\tau\right\|_{\mathscr{X}_T} \le C\|u\|^2_{\mathscr{X}_T}, \tag{4.4}$$

para $u\in\mathscr{X}_T$.

Demostración. Por contradicción, supongamos que existe un subespacio $\mathscr{X}_T$ incluido continuamente en $C([0,T];H^s(\mathbb{R}^2))$ tal que se satisfacen (4.3) y (4.4). Si hacemos $u(t)=E(t)\varphi$ en (4.4), de la inclusión continua de $\mathscr{X}_T$ en $C([0,T];H^s(\mathbb{R}^2))$ y de (4.3), se sigue que

$$\left\|\int_0^t E(t-\tau)[(1+\mathscr{H}\partial_x)^{-1}\partial_x(E(\tau)\varphi)^2]\,d\tau\right\|_{H^s} \le C\|\varphi\|^2_{H^s}. \tag{4.5}$$

Veamos que la función φ definida en el Lema 4.2 no satisface (4.5) si escogemos N suficientemente grande. Del Lema 4.1, tenemos que

$$\int_0^t E(t-\tau)(1+\mathscr{H}\partial_x)^{-1}\partial_x[(E(\tau)\varphi)^2]d\tau = g_1(t,x,y)+g_2(t,x,y)+g_3(t,x,y) \tag{4.6}$$

donde g_i, $i = 1, 2, 3$, son tales que

$$\widehat{g_1}(t,\xi,\eta) = \frac{1}{\alpha^2 N^{2s}} e^{itp(\xi,\eta)} \frac{\xi}{1+|\xi|} \int_{I_{11}(\xi,\eta)} \frac{e^{it\theta(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)}-1}{i\theta(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)}\, d\xi_1 d\eta_1,$$

$$\widehat{g_2}(t,\xi,\eta) = \frac{1}{\alpha^2 N^{2s}} e^{itp(\xi,\eta)} \frac{\xi}{1+|\xi|} \int_{I_{22}(\xi,\eta)} \frac{e^{it\theta(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)}-1}{i\theta(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)}\, d\xi_1 d\eta_1$$

y

$$\widehat{g_3}(t,\xi,\eta) = \frac{1}{\alpha^2 N^{2s}} e^{itp(\xi,\eta)} \frac{\xi}{1+|\xi|} \int_{I_{12}(\xi,\eta)\cup I_{21}(\xi,\eta)} \frac{e^{it\theta(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)}-1}{i\theta(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)}\, d\xi_1 d\eta_1,$$

con

$$I_{ij}(\xi,\eta) = \{(\xi_1,\eta_1) \in \mathbb{R}^2 \mid (\xi_1,\eta_1) \in I_i, (\xi-\xi_1, \eta-\eta_1) \in I_j\} \quad i,j = 1,2 \tag{4.7}$$

Puede verse que

$$\operatorname{supp}(\widehat{g_1}) \subset [2N, 2N+2\alpha] \times [2\alpha, 4\alpha],$$

$$\operatorname{supp}(\widehat{g_2}) \subset [-2N-2\alpha, -2N] \times [2\alpha, 4\alpha],$$

y

$$\operatorname{supp}(\widehat{g_3}) \subset [-\alpha, \alpha] \times [2\alpha, 4\alpha]$$

Para N suficientemente grande y α suficientemente pequeño estos soportes resultan ser disyuntos. Consideremos N y α con esta propiedad. Luego,

$$\left\| \int_0^t E(t-\tau)(1+\mathscr{H}\partial_x)^{-1}\partial_x[(E(t)\varphi)^2] d\tau \right\|_{H^s} \geq \|g_i(t,\cdot,\cdot)\|_{H^s} \tag{4.8}$$

para $i = 1, 2, 3$. Si escogemos $\alpha = N^{-\epsilon}$, con $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, tenemos que para $(\xi,\eta) \in \operatorname{supp}(\widehat{g_3})$ y $(\xi_1,\eta_1) \in I_{12} \cup I_{21}$,

$$\left| \frac{e^{it\theta(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)}-1}{i\theta(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)} \right| = |t| + O(N^{-\epsilon}), \tag{4.9}$$

ya que, del Lema (4.3),

$$|\theta(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)| \leq CN^{-2\epsilon} \leq CN^{-\epsilon}.$$

De este modo

$$\begin{aligned}
\|g_3(t,\cdot,\cdot)\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathrm{supp}(\widehat{g_3})} (1+\xi^2+\eta^2)^s |\widehat{g_3}(t,\xi,\eta)|^2 \, d\xi d\eta \\
&= \frac{1}{\alpha^4 N^{4s}} \int_{\mathbb{R}^2} (1+\xi^2+\eta^2)^s \frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|)^2} \left| \int_{I_{12}\cup I_{21}} \frac{e^{it\theta}-1}{i\theta} \, d\xi_1 d\eta_1 \right|^2 d\xi d\eta \\
&\geq C \frac{|t|^2\alpha^4}{\alpha^4 N^{4s}} \int_{-\alpha/2}^{3\alpha/2} \int_0^{3\alpha/4} (1+\xi^2+\eta^2)^s \frac{\xi^2}{(1+|\xi|)^2} \, d\xi d\eta \\
&\geq C \frac{|t|^2}{N^{4s}} \int_{-\alpha/2}^{3\alpha/2} \int_0^{3\alpha/4} \xi^2 \, d\xi d\eta \\
&\geq C \frac{|t|^2}{N^{4s}} \int_{-\alpha/2}^{3\alpha/2} \int_0^{3\alpha/4} \xi^2 \, d\xi d\eta \\
&\geq C|t|^2 N^{-4s}\alpha^4 \\
&\geq C|t|^2 N^{-4(s+\epsilon)}
\end{aligned}$$

Finalmente, de (4.5), (4.8), la desigualdad anterior y el Lema 4.2, se sigue que

$$4 \geq \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}^2 \geq \|g_3(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \geq CN^{-4(s+\epsilon)},$$

lo cual es una contradicción, pues $s<0$ y N lo podemos escoger muy grande. □

Teorema 4.5. Sea $s<0$. Entonces no existe $T>0$ tal que (1.9) tenga una única solución en el intervalo $[0,T]$ y tal que su flujo sea de clase C^2 en cero de $H^s(\mathbb{R}^2)$ en $H^s(\mathbb{R}^2)$.

Demostración. Considere el siguiente problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + (u^2)_x + (\mathscr{H} u_t + u_{yy})_x = 0, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2, t>0 \\ u_\epsilon(0,x,y) = \epsilon\varphi(x,y), \end{cases} \tag{4.10}$$

ϵ suficientemente pequeño. Suponga que $u_\epsilon(t,x,y)$ es solución local única de (4.10) y que el flujo asociado es de clase C^2 en el origen de $H^s(\mathbb{R}^2)$ en $H^s(\mathbb{R}^2)$. Entonces

$$u_\epsilon(t,x,y) = \epsilon E(t)\varphi(x,y) + \int_0^t E(t-\tau)(1+\mathscr{H}\partial_x)^{-1}\partial_x(u_\epsilon^2(\tau,x,y))d\tau \tag{4.11}$$

Derivando con respecto a ϵ los términos que aparecen en esta última ecuación, tenemos

$$\frac{\partial^2 u_\epsilon(t,x,y)}{\partial\epsilon^2}\Big|_{\epsilon=0} = 2\int_0^t E(t-\tau)(1+\mathscr{H}\partial_x)^{-1}\partial_x(E(\tau)\varphi)^2 d\tau \tag{4.12}$$

Como el flujo es de clase C^2, se sigue que

$$\left\| \int_0^t E(t-\tau)[(1+\mathscr{H}\partial_x)^{-1}\partial_x(E(\tau)\varphi)^2] \, d\tau \right\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \leq C\|\varphi\|_{H^s}^2(\mathbb{R}^2).$$

Esto contradice el teorema anterior. □

5 Comportamiento asintótico de soluciones con dato inicial pequeño

En este capítulo mostraremos que la solución de la ecuación es global cuando el dato inicial es suficientemente pequeño, de una forma que precisaremos más adelante. También mostraremos que la solución, en un tiempo suficientemente grande, se comporta como la solución de la ecuación lineal asociada. A estas soluciones se les suele llamar los *estados de dispersión de la onda* (*scattering states* en inglés).

5.1. Solución global para dato pequeño

En esta sección examinaremos primero dos lemas y dos corolarios que serán muy importantes en la demostración del teorema principal al final de la misma.
Para $A > 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$, sea

$$I_A(x, y, t) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{it\xi\eta^2}{1+|\xi|}+ix\xi+iy\eta}\chi_{[-A,A]}(\xi)\, d\xi d\eta.$$

Lema 5.1. Si $A > 1$, existe una constante C, independiente de t y (x, y), tal que

$$|I_A(x, y)| \leq Ct^{-\frac{1}{2}}A. \tag{5.1}$$

Demostración. Haciendo $\eta' = \sqrt{\frac{|t\xi|}{1+|\xi|}}\eta$ y completamdo cuadrados en el exponente de e se tiene que

$$\begin{aligned}
I_A(x, y, t) &= \int_{-A}^{A} e^{ix\xi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\xi\eta^2}{1+|\xi|}+iy\eta}\, d\eta \right) d\xi \\
&= \int_{-A}^{A} e^{ix\xi} e^{-iy^2(\frac{1+|\xi|}{4t\xi})} \left(\frac{1+|\xi|}{t|\xi|} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\mathrm{sgn}(\xi)\eta'^2}\, d\eta' \right) d\xi \\
&= \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{4} \int_{-A}^{A} e^{ix\xi-iy^2(\frac{1+|\xi|}{4t\xi})} \left(\frac{1+|\xi|}{|\xi|} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}sgn(\xi)}\, d\xi.
\end{aligned}$$

De aquí es inmediato el lema. $\square$

Observación 5.1. Tomar la integral I_A con la restricción dada sobre ξ es necesario. En efecto, procediendo como en lema tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{it\xi\eta^2}{1+|\xi|}+ix\xi+iy\eta}\,d\xi d\eta = \lim_{A\to\infty} \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{4}\int_{-A}^{A} e^{ix\xi-iy^2(\frac{1+|\xi|}{4t\xi})}\left(\frac{1+|\xi|}{|\xi|}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}sgn(\xi)}\,d\xi.$$

Ya que la parte real del integrando es

$$\cos\left(\frac{\pi\,\mathrm{sgn}(\xi)}{4}\right)\cos\left(z^2\,\mathrm{sgn}(\xi)+\frac{z^2}{\xi}\right)+\sin\left(\frac{\pi\,\mathrm{sgn}(\xi)}{4}\right)\sin\left(z^2\,\mathrm{sgn}(\xi)+\frac{z^2}{\xi}\right),$$

donde $z^2 = y^2/4t$. Si $z^2 = 2\pi k$, esta parte real es

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{2\pi k}{\xi}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{2\pi k}{\xi}\right).$$

Como, para ξ suficientemente grande, $\sin\left(\frac{2\pi k}{\xi}\right)\approx\frac{2k\pi}{\xi}$, se tiene que

$$\int_{\xi>1}\sin\left(\frac{2\pi k}{\xi}\right)\left(\frac{1+|\xi|}{\xi}\right)^{\frac{1}{2}}d\xi<\infty.$$

Por otro lado, para $k=1$ y $\xi>8$, se sigue que

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\xi>8}\left(\frac{1+|\xi|}{\xi}\right)^{\frac{1}{2}}d\xi \le \int_{\xi>8}\cos\left(\frac{2\pi k}{\xi}\right)\left(\frac{1+|\xi|}{\xi}\right)^{\frac{1}{2}}d\xi \le \int_{\xi>8}\left(\frac{1+|\xi|}{\xi}\right)^{\frac{1}{2}}d\xi$$

De aquí, se concluye que la integral no es acotada.

Lema 5.2. Sean s_1, s_2 y A tales que $\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}<2$ y $A>1$. Existe una constante C_s, que depende únicamente de s_1 y s_2, tal que para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ y toda $\phi\in H^{s_1,s_2}$,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{it\xi\eta^2}{1+|\xi|}+ix\xi+iy\eta}(1-\chi_{[-A,A]}(\xi))\widehat{\varphi}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\right| \le C_s\|\varphi\|_{H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)}A^{-\beta}, \tag{5.2}$$

donde $\beta=\frac{s_2}{2}(2-\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s_2})$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{it\xi\eta^2}{1+|\xi|}+ix\xi+iy\eta}(1-\chi_{[-A,A]}(\xi))\widehat{\varphi}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\right| &\le \int_{|\xi|\ge A}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{\varphi}(\xi,\eta)|\,d\eta d\xi\\ &\le 2\left(\int_A^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+|\xi|^{s_1}+|\eta|^{s_2})^2}\,d\eta d\xi\right)^{1/2}\|\varphi\|_{H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)}\\ &\le C_sA^{-\beta}\|\varphi\|_{H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)}.\end{aligned}$$

□

Corolario 5.3. Existe una constante C_{s_1,s_2} que solo depende de s_1 y s_2, tal que para todos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$ y para toda $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{it\xi\eta^2}{1+|\xi|}+ix\xi+iy\eta} \widehat{\varphi}(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \right| \leq C_{s_1,s_2}(\|\varphi\|_{L^1} + \|\varphi\|_{H^{s_1,s_2}})(1+t)^{-\frac{\beta}{2(1+\beta)}}$$

Demostración. Para $0 < t \leq 1$ tenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{it\xi\eta^2}{1+|\xi|}+ix\xi+iy\eta} \widehat{\varphi}(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \right| \leq & C\|\varphi\|_{H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)} \\ \leq & C(\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^2)})(1+t)^{-\frac{\beta}{2(1+\beta)}}. \end{aligned}$$

Para $t > 1$, sea $A = t^{\frac{1}{2(\beta+1)}}$. De los Lemas 5.1 y 5.2, tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{it\xi\eta^2}{1+|\xi|}+ix\xi+iy\eta} \widehat{\varphi}(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \right| \leq & |I_A(\cdot,\cdot,t) * \varphi| + \\ & + \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{it\xi\eta^2}{1+|\xi|}+ix\xi+iy\eta} (1-\chi_{[-A,A]}(\xi)) \widehat{\varphi}(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \right| \\ \leq & C_{s_1,s_2}\|I_A\|_\infty \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + C_{s_1,s_2}\|\varphi\|_{H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)} t^{-\frac{\beta}{2(1+\beta)}} \\ \leq & C_{s_1,s_2}(\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \|\varphi\|_{H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)})(1+t)^{-\frac{\beta}{2(1+\beta)}}. \end{aligned}$$

□

Corolario 5.4. Existe una constante C_{s_1,s_2} que solo depende de s_1 y s_2 tal que para toda función $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^2) \cap H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$, con $1 \leq p \leq 2$, y todos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $t > 0$,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{it\xi\eta^2}{1+|\xi|}+ix\xi+iy\eta} \widehat{\varphi}(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \right\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq & \\ \leq C_s(\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|\varphi\|_{H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)})(1+t)^{-\frac{\beta(q-2)}{2q(\beta+1)}}, & \end{aligned} \tag{5.3}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Demostración. Sea A como en la demostración del corolario anterior. Es claro que

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{it\xi\eta^2}{1+|\xi|}+ix\xi+iy\eta} \widehat{\varphi}(\xi,\eta)\, d\xi d\eta = I_A(t) * \varphi + B_A(\varphi), \tag{5.4}$$

donde

$$B_A(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{it\xi\eta^2}{1+|\xi|}+ix\xi+iy\eta} (1-\chi_{[-A,A]}(\xi)) \widehat{\varphi}(\xi,\eta)\, d\xi d\eta.$$

Ya que, gracias al teorema de Plancherel

$$\|I_A(t) * \varphi)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|e^{\frac{it\xi\eta}{1+|\xi|}} \widehat{\varphi}(\xi,\eta)\chi_{[-A,A]}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

del Lema 5.1 y el teorema de Riesz-Thorin, obtenemos

$$\|I_A(t) * \varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq C_{s_1,s_2}(1+t)^{-\frac{\beta(q-2)}{2q(\beta+1)}}\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}. \tag{5.5}$$

para toda $\phi \in L^p(\mathbb{R}^2)$.
Por otro lado, como, haciendo, de nuevo, uso del teorema de Plancherel

$$\|B_A(\varphi)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|\varphi\|_{H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)},$$

del Lema 5.2 y la desigualdad de Hölder, se sigue que

$$\|B_A(\varphi)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq C_{s_1,s_2}(1+t)^{-\frac{\beta(q-2)}{2q(\beta+1)}}\|\varphi\|_{H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)} \tag{5.6}$$

De (5.4), (5.5) y (5.6) se sigue el corolario. □

Ahora sí, veamos el teorema principal en esta sección.

Teorema 5.5. Sean s_1, s_2 y β como en el Lema 5.2, $\theta = \frac{(n-1)\beta}{2(n+1)(\beta+1)}$, $s' > 1$ y

$$a = \frac{2}{(n+1)(s'-1)+2}$$

Entonces, si $((1-a)(n-1)-1)\theta > 1$, existe $\delta > 0$ y $C > 0$ tales que si $\varphi \in H^{s'}(\mathbb{R}^2) \cap H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$, con $\|\varphi\|_{H^{s'}} + \|\varphi\|_{H^{s_1,s_2}} + \|\varphi\|_{L^{\frac{n+1}{n}}} < \delta$, la solución u de (1.9) está en $C(\mathbb{R} : H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2))$ y satisface

$$\|u\|_{L^{n+1}} \leq C(1+t)^{-\theta}.$$

Demostración. Del lema de Sobolev y como $s' > 1$ se tiene que la solución u es una función continua de $[0,T]$ en L^{n+1} y en $H^{s'}$, para algún T. Sea $\mathscr{H}$ como en 1.10, la transformada de Hilbert en la variable x. Entonces

$$\partial_x(I + \mathscr{H}\partial_x)^{-1} = -\mathscr{H}(I - (I + \mathscr{H}\partial_x)^{-1}). \tag{5.7}$$

Por otro lado, para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ se tiene que,

$$(I + \mathscr{H}\partial_x)^{-1}f = \left(\frac{1}{1+|\xi|}\right)^{\vee} *_x f = g *_x f, \tag{5.8}$$

donde g es la función integrable

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{te^{-t}}{x^2+t^2}\,dt,$$

y $*_x$ es la convolución en la variable x. (La función g viene sugerida por estas dos observaciones, ver [24],

$$\frac{1}{1+|\xi|} = \int_0^\infty e^{-t}e^{-t|\xi|}\,dt$$

y

$$\left(\frac{t}{t^2+x^2}\right)^{\wedge} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-t|\xi|}.$$

Así pues, haciendo uso del teorema de Fubini, ya que $\dfrac{te^{-t}}{x^2+t^2}$ es integrable en $\mathbb{R}^2$,

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{1+|\xi|}.)$$

Ahora bien, de 5.7 y 5.8 se sigue que $\partial_x(I+\mathscr{H}\partial_x)^{-1}$ es un operador lineal continuo sobre L^p, para todo $1<p<\infty$. En efecto, si $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned}
\|\partial_x(I+\mathscr{H}\partial_x)^{-1}f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} &= \|\mathscr{H}(I-(I+\mathscr{H}\partial_x)^{-1})f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \\
&\leq \|\mathscr{H}f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|\mathscr{H}(I+\mathscr{H}\partial_x)^{-1})f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \\
&\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|\|(I+\mathscr{H}\partial_x)^{-1}f\|_{L^p_x(\mathbb{R})}\|_{L^p_y(\mathbb{R})} \\
&\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|\|g *_x f(\cdot,y)\|_{L^p_x(\mathbb{R})}\|_{L^p_y(\mathbb{R})} \\
&\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \\
&\leq c\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}
\end{aligned}$$

Si $E(t)$ es el operador definido por

$$[E(t)f]^{\wedge} = e^{\frac{it\xi\eta^2}{1+|\xi|}}\widehat{f}$$

la solución u de (1.9) satisface

$$u = E(t)\varphi + \int_0^t E(t-\tau)\partial_x(I+\mathscr{H}\partial_x)^{-1}(u^n)\,d\tau. \tag{5.9}$$

Luego, del Corolario 5.4, el Lema 2.1 y la desigualdad de Gagliardo Niremberg, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^{n+1}} \leq& \|E(t)\varphi\|_{L^{n+1}} + \int_0^t \|E(t-\tau)\partial_x(I+\mathscr{H}\partial_x)^{-1}(u^n)\|_{L^{n+1}}\,d\tau \\
\leq& C(1+t)^{-\theta}(\|\varphi\|_{L^{\frac{n+1}{n}}} + \|\varphi\|_{H^{s_1,s_2}}) + \\
&+ C\int_0^t (1+t-\tau)^{-\theta}\left(\|u^n\|_{L^{\frac{n+1}{n}}} + \|u^n\|_{H^{s_1,s_2}}\right)\,d\tau \\
\leq& C(1+t)^{-\theta}(\|\varphi\|_{L^{\frac{n+1}{n}}} + \|\varphi\|_{H^{s_1,s_2}}) + \\
&+ C\int_0^t (1+t-\tau)^{-\theta}\left(\|u\|^n_{L^{n+1}} + \|u\|^{n-1}_{L^\infty}\|u\|_{H^{s_1,s_2}}\right)\,d\tau \\
\leq& C(1+t)^{-\theta}(\|\varphi\|_{L^{\frac{n+1}{n}}} + \|\varphi\|_{H^{s_1,s_2}}) + \\
&+ C\int_0^t (1+t-\tau)^{-\theta}\left(\|u\|^n_{L^{n+1}} + \|u\|^{(1-a)(n-1)}_{L^{n+1}}\|u\|^{a(n-1)}_{H^{s'}}\|u\|_{H^{s_1,s_2}}\right)\,d\tau,
\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^{s'}} \leq & \|E(t)\varphi\|_{H^{s'}} + \int_0^t \|E(t-\tau)u^n\|_{H^{s'}}\, d\tau \\
\leq & \|\varphi\|_{H^{s'}} + \int_0^t \|u^n\|_{H^{s'}}\, d\tau \\
\leq & \|\varphi\|_{H^{s'}} + C\int_0^t \|u\|_{L^\infty}^{n-1}\|u\|_{H^{s'}}\, d\tau \\
\leq & \|\varphi\|_{H^{s'}} + C\int_0^t \|u\|_{L^{n+1}}^{(1-a)(n-1)}\|u\|_{H^{s'}}^{a(n-1)}\|u\|_{H^{s'}}\, d\tau
\end{aligned} \tag{5.11}$$

y, de la misma manera que esta última,

$$\|u\|_{H^{s_1,s_2}} \leq \|\varphi\|_{H^{s_1,s_2}} + C\int_0^t \|u\|_{L^{n+1}}^{(1-a)(n-1)}\|u\|_{H^{s'}}^{a(n-1)}\|u\|_{H^{s_1,s_2}}\, d\tau \tag{5.12}$$

Ahora, sea

$$k(t) = (1+t)^\theta\|u\|_{L^{n+1}} + \|u\|_{H^{s'}} + \|u\|_{H^{s_1,s_2}}$$

y

$$M(t) = \sup_{0\leq s\leq t} k(t)$$

Entonces, de (5.10), (5.11) y (5.12)

$$\begin{aligned}
k(t) \leq & C(\|\varphi\|_{L^{\frac{n+1}{n}}} + \|\varphi\|_{H^{s_1,s_2}} + \|\varphi\|_{H^{s'}}) + \\
& + C\int_0^t \left((1+t)^\theta(1+t-\tau)^{-\theta} + 2\right)(1+\tau)^{-\theta(1-a)(n-1)}k^n(\tau)\, d\tau \\
\leq & C\delta + CM^n(t)
\end{aligned}$$

ya que

$$\int_0^t \left((1+t)^\theta(1+t-\tau)^{-\theta} + 2\right)(1+\tau)^{-\theta(1-a)(n-1)}\, d\tau \leq C$$

para todo $t > 0$. Luego, como M es creciente,

$$M(t) \leq C\delta + CM^n(t)$$

en el intervalo $[0,T]$. Así que, gracias a que $Cx^n < x$ para x positivo pequeño, podemos encontrar $\delta > 0$ suficientemente pequeño de tal modo que

$$C\delta + Cx^n < x,$$

en algún intervalo (ϵ, ϵ_0), $0 < \epsilon < \epsilon_0$, y en los reales no negativos fuera de dicho intervalo

$$x \leq C\delta + Cx^n.$$

Ahora bien, $\delta \leq C\delta \leq \epsilon$. Así pues, como $M(t)$ es continua y $M(0) < \delta$, $M(t) \leq \epsilon$ en intervalo $[0, T]$. Finalmente, sea $T^* = \sup\{T > 0|\ u$ es una solución continua de ecuación integral de $[0, T]$ en $H^{s'} \cap H^{s_1,s_2}$ tal que $M(T) \leq \epsilon\}$. Si $T^* < \infty$, gracias a (5.10), (5.11) y (5.12), el integrando en la ecuación (5.9) es acotado en $H^{s'} \cap H^{s_1,s_2}$ por la función

$$\begin{aligned}\left((1+t)^{\theta}(1+t-\tau)^{-\theta}+2\right)(1+\tau)^{-\theta(1-a)(n-1)}k^n(\tau) \leq \\ \leq \left((1+t)^{\theta}(1+t-\tau)^{-\theta}+2\right)(1+\tau)^{-\theta(1-a)(n-1)}\epsilon^n. \quad (5.13)\end{aligned}$$

Luego, cambiando t por T^*, dicho integrando es integrable (en el sentido impropio y en el sentido de Bochner) en $[0, T^*]$, por lo que podemos extender u al intervalo $[0, T^*]$ a una función continua que satisface la ecuación integral. El teorema de existencia local y lo anteriormente discutido nos garantiza que aún para u se puede extender T más allá de T^* con $M(T) \leq \epsilon$, lo que es absurdo. Por lo tanto $T^* = \infty$ □

5.2. Comportamiento asintótico

Con lo hecho hasta aquí en el presente capítulo, nuestro próximo paso, naturalmente, es buscar soluciones estados de dispersión de la ecuación (1.9), e. d., soluciones u para las cuales existen $\phi_\pm$ tales que $u(t) \sim E(t)\phi_\pm$ cuando $t \to \infty$.
Veamos que las soluciones globales garantizadas por el teorema anterior son estados de dispersión para la ecuación (1.9).

Teorema 5.6. Con las hipótesis del teorema anterior existen $\phi_\pm \in H^{s_1,s_2}$ tales que

$$\|u(t) - E(t)\phi_\pm\|_{H^{s_1,s_2}} \to 0$$

cuando $t \to \pm\infty$.

Demostración. Es claro que, para cualquier T, se tiene que la solución u de (1.9) satisface

$$u = E(t-T)u(T) + \int_T^t E(t-\tau)\partial_x(I + \mathscr{H}\partial_x)^{-1}(u^n)\,d\tau. \quad (5.14)$$

Al aplicar $E(-t)$ en ambos lados de la anterior ecuación, y suponiendo que los límites cuando $T \to \infty$ existen, obtenemos la ecuación de Yang-Feldman

$$E(-t)u(t) = \lim_{T\to\infty} E(-T)u(T) + \int_\infty^t E(-\tau)\partial_x(I + \mathscr{H}\partial_x)^{-1}(u^n)\,d\tau \quad (5.15)$$

$$= \phi_+ - \int_t^\infty E(-\tau)\partial_x(I + \mathscr{H}\partial_x)^{-1}(u^n)\,d\tau. \quad (5.16)$$

Esta última ecuación nos invita a definir a ϕ_+ como

$$\phi_+ = \phi + \int_0^\infty E(-\tau)\partial_x(I + \mathscr{H}\partial_x)^{-1}(u^n)\,d\tau. \quad (5.17)$$

Ya que

$$\begin{aligned}\|u^n\|_{H^{s_1,s_2}} \leq& \|u\|_{L^\infty}^{n-1}\|u\|_{H^{s_1,s_2}} \leq \|u\|_{L^{n+1}}^{(1-a)(n-1)}\|u\|_{H^{s'}}^{a(n-1)}\|u\|_{H^{s_1,s_2}} \\ \leq& C(1+t)^{-(1-a)(n-1)},\end{aligned} \tag{5.18}$$

la integral en la ecuación (5.17) existe. Gracias a la ecuación integral (5.14), de (5.17), se verifica la ecuación de Yang-Feldman (5.16). De la integrabilidad ya mostrada y de (5.16) se tiene que

$$\|u(t) - E(t)\phi_+\|_{H^{s_1,s_2}} \to 0,$$

cuando $t \to \infty$. De manera análoga se demuestra la existencia de ϕ_- $\square$

6 Ondas Solitarias

En este capítulo demostraremos la existencia de ondas solitarias soluciones de la ecuación (1.9), cuando a y b son números reales positivos. Para ésto, observemos que si $u(x,t) = \phi(x-ct, y)$ es solución de la ecuación (1.9) tenemos

$$-c\phi_x + a(\phi^p)_x + (-bc\mathscr{H}\phi_x + \phi_{yy})_x = 0. \tag{6.1}$$

Suponiendo que ϕ y las derivadas que aparecen en la anterior ecuación están en $L^2(\mathbb{R}^2)$, esta se puede escribir como

$$-c\phi + a\phi^p - bc\mathscr{H}\phi_x + \phi_{yy} = 0. \tag{6.2}$$

Luego, para mostrar la existencia de ondas solitarias, es suficiente mostrar que esta última ecuación tiene solución no trivial. Para ésto haremos uso del principio de compacidad concentrada de Lions.

6.1. Problema de minimización

Observemos que la ecuación (6.2) es la ecuación el Euler-Lagrange del siguiente problema de minimización:

$$E(\phi) = I_q = \text{ínf}\{E(\psi) \mid \psi \in \mathcal{G}_q\} \tag{6.3}$$

donde

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}^2} -a\frac{u^{p+1}}{p+1} + \frac{(\partial_y u)^2}{2}\, dxdy, \qquad Q(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} u^2 + b(D_x^{1/2}u)^2\, dxdy \tag{6.4}$$

y

$$\mathcal{G}_q = \{\psi \in H^{1/2,1} \mid Q(\psi) = q\} \tag{6.5}$$

Se puede verificar que la ecuación (1.9) se puede escribir como

$$u_t = BE'(u),$$

donde E' es la derivada Frechet de E y B es el operador definido en el Capítulo 2. Ya que B es un operador antisimétrico, se sigue inmediatamente que E es conservada por el flujo

de soluciones de (1.9). Al multiplicar en ambos lados de (1.9) por u e integrando en ambos lados, tenemos asimismo que Q es también una cantidad conservada por este flujo.
Por razones que se harán evidentes al final de esta sección, también consideraremos el problema de minimización

$$E^{\beta}(\phi) = I_q^{\beta} = \text{ínf}\{E^{\beta}(\psi) \mid \psi \in \mathcal{G}_q^1\}, \tag{6.6}$$

donde

$$E^{\beta}(u) = \int_{\mathbb{R}^2} -a\frac{u^{p+1}}{p+1} + \beta\frac{(\partial_x u)^2}{2} + \frac{(\partial_y u)^2}{2}\, dxdy \tag{6.7}$$

y

$$\mathcal{G}_q^1 = \{\psi \in H^1 \mid Q(\psi) = q\} \tag{6.8}$$

Usaremos el Principio de Compacidad Concentrada de Lions (vea [25]) para probar que (6.3) y (6.6) tienen soluciones. Para ésto, seguiremos ideas de Albert en [1] y de Cazenave y Lions en [9]. Veamos.
Sea $\{\phi_n\}$ una sucesión minimizante. Definimos $M_n : [0,\infty) \to [0,q]$, $n = 1, 2, \dots,$ por

$$M_n(r) = \frac{1}{2}\sup_{(c,d)\in\mathbb{R}^2} \int\limits_{\Omega(c,d,r)} \phi_n^2 + b(D_x^{1/2}\phi_n)^2\, dxdy \tag{6.9}$$

para cada $r \in [0,\infty)$, donde $\Omega(c,d,r) = (c,d)+[-r,r]^2$. Es claro que $\{M_n\}$ es una sucesión de funciones crecientes uniformemente acotada. Gracias al principio de selección de Helly (vea por ejemplo [23]) existe una subsucesión de ésta que converge puntualmente a una función creciente $M : [0,\infty) \to [0,q]$, y que, sin riesgo a confusión alguna, denotaremos asimismo por $\{M_n\}$. Sea

$$\alpha = \lim_{r\to\infty} M(r). \tag{6.10}$$

Se verifica inmediatamente que $0 \le \alpha \le q$.

Lema 6.1. Para todo $q > 0$ y $1 \le p < 5$, $-\infty < I_q < 0$ y para algún β_0, $-\infty < I_q^{\beta} < 0$, para todo $0 < \beta \le \beta_0$.

Demostración. Sea $\phi \in H^{1/2,1}$ una función no negativa tal que $Q(\phi) = q$. Para $\theta > 0$ tomemos

$$\phi_\theta(x,y) = \theta^{1/2}\phi(x,\theta y).$$

Evidentemente $Q(\phi_\theta) = Q(\phi) = q$. Veamos que $E(\phi_\theta) < 0$

$$\begin{aligned} E(\phi_\theta) &= \int_{\mathbb{R}^2} -a\frac{\phi_\theta^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2}(\partial_y\phi_\theta)^2\, dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} -a\theta^{\frac{p-1}{2}}\frac{\phi^{p+1}}{p+1} + \frac{\theta^2}{2}\partial_y\phi^2\, dxdy \\ &= -a\frac{\theta^{\frac{p-1}{2}}}{p+1}\|\phi\|_{L^{p+1}}^{p+1} + \frac{\theta^2}{2}\|\partial_y\phi\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Como $1 \leq p < 5$, $\frac{p-1}{2} < 2$. Luego, de esta última ecuación para θ suficientemente pequeño, $E(\phi_\theta) < 0$. En particular, $I_q < 0$.
Ahora veamos que I_q no puede ser $-\infty$. De la Proposición 2.7 y la desigualdad de Young,

$$\begin{aligned}
E(\phi) &= \int_{\mathbb{R}^2} -a\frac{\phi^{p+1}}{p+1} + \frac{(\partial_y\phi)^2}{2}\, dxdy \geq -\frac{a}{p+1}\|\phi\|_{L^{p+1}}^{p+1} + \frac{1}{2}\|\partial_y\phi\|_{L^2}^2 \\
&\geq -\frac{a}{p+1}\|\partial_y\phi\|_{L^2}^{\frac{p-1}{2}}\|\phi\|_{L^2}^{\frac{5-p}{2}}\|D_x^{1/2}\phi\|_{L^2}^{p-1} + \frac{1}{2}\|\partial_y\phi\|_{L^2}^2 \\
&\geq -\frac{ca}{(p+1)b^{\frac{p-1}{2}}}\|\partial_y\phi\|_{L^2}^{\frac{p-1}{2}} q^{\frac{p+3}{2}} + \frac{1}{2}\|\partial_y\phi\|_{L^2}^2 \\
&\geq -C(b)q^{\frac{2(p+3)}{5-p}} + \frac{1}{4}\|\partial_y\phi\|_{L^2}^2 \\
&\geq -C(b)q^{\frac{2(p+3)}{5-p}}.
\end{aligned}$$

Para finalizar la demostración del lema, de la densidad de H^1 en $H^{1/2,1}$ y la continuidad de E en este espacio, existe $\varphi \in H^1$ tal que $E(\varphi) < \frac{3}{4}I_q$. De aquí es claro que $E^{\beta_0}(\varphi) = E(\varphi) + \beta_0\int_{\mathbb{R}^2}\frac{(\partial_x\varphi)^2}{2}\, dxdy \leq \frac{1}{2}I_q$, para β_0 suficientemente pequeño. Como $I_q < I_q^\beta$, para todo $\beta > 0$, de aquí se sigue el lema. $\square$

Lema 6.2. Si $\{\phi_n\}$ es una sucesión minimizante para I_q (o I_q^β), entonces existen constantes $B > 0$ y $\delta > 0$ tales que

1. $\|\phi_n\|_{H^{1/2,1}} \leq B$ y
2. $\|\phi_n\|_{L^{p+1}} \geq \delta$, para n suficientemente grande.

Además, en el caso de que $\{\phi_n\}$ sea una sucesión minimizante de I_q^β, $0 < \beta \leq \beta_0$,

1'. $\|\phi_n\|_{H^1} \leq B^\beta$,

para algún B^β.

Demostración. Probemos 1. De la desigualdad de Young, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|\phi_n\|_{H^{1/2,1}}^2 &\leq E(\phi_n) + \frac{b+1}{b}Q(\phi_n) + \frac{a}{p+1}\|\phi_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} \\
&\leq A + \frac{b+1}{b}q + \frac{a}{p+1}\|\partial_y\phi_n\|_{L^2}^{\frac{p-1}{2}}\|\phi_n\|_{L^2}^{\frac{5-p}{2}}\|D_x^{1/2}\phi_n\|_{L^2}^{p-1} \\
&\leq A + \frac{b+1}{b}q + C(b)q^{\frac{2(p+3)}{5-p}} + \frac{1}{4}\|\partial_y\phi_n\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\|\phi_n\|_{H^{1/2,1}} \leq \sqrt{4\left(A + \frac{b+1}{b}q + C(b)q^{\frac{2(p+3)}{5-p}}\right)} = B$$

Ahora probemos 2. Supongamos que no existe $\delta > 0$ tal que $\|\phi_n\|_{L^{p+1}} \geq \delta$. Entonces,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\phi_n|^{p+1}\,dxdy = 0,$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0 > I_q = \lim_{n\to\infty} E(\phi_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} -a\frac{\phi_n^{p+1}}{p+1} + \frac{(\partial_y \phi_n)^2}{2}\,dxdy \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^2} -a\frac{\phi_n^{p+1}}{p+1}\,dxdy \right) \geq -a \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\phi_n|^{p+1}\,dxdy = 0. \end{aligned}$$

Esta contradicción demuestra 2.
La prueba de 1' es muy semejante a la de 1. □

Lema 6.3. Supongamos que B y γ son números reales positivos. Entonces, existe $\eta = \eta(B,\gamma)$ tal que, para $f \in H^{1/2,1}$ con $\|f\|_{H^{1/2,1}} \leq B$ y $\int_{\mathbb{R}^2} |f|^{p+1}\,dxdy \geq \gamma$, se tiene que

$$\sup_{(c,d)\in\mathbb{R}^2} \int\limits_{\Omega(c,d)} |f(x,y)|^{p+1}\,dxdy \geq \eta,$$

donde $\Omega(c,d) = (c,d) + [-1,1]$

Demostración. Sea $\psi : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ una función C^∞, tal que $\mathrm{supp}(\psi) \subseteq [-1,1]^2$ y

$$\sum_{k,j\in\mathbb{Z}} \psi(x-j, y-k) = 1,$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}$. Definimos $\psi_{j,k}(x,y) = \psi(x-j, y-k)$, para todo $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$. El operador $T : H^{1/2,1} \to l^2(H^{1/2,1})$ definido por

$$T(f) = \{\psi_{j,k} f\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$$

para $f \in H^{1/2,1}$, es acotado. En efecto, como

$$\|Tf\|^2_{l^2(L^2)} \leq \int_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|^2 \left(\sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} |\psi_{j,k}(x,y)|^2 \right) dxdy \leq \|f\|^2_{L^2}$$

y

$$\begin{aligned} \|\{\partial_u(\psi_{j,k} f)\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}\|^2_{l^2(L^2)} \leq & 2\Bigg[\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_u f(x,y)|^2 \left(\sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} |\psi_{j,k}(x,y)|^2 \right) dxdy + \\ & + \int_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|^2 \left(\sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} |\partial_u \psi_{j,k}(x,y)|^2 \right) dxdy \Bigg] \\ \leq & 2c(\|f\|^2_{L^2} + \|\partial_u f\|^2_{L^2}), \end{aligned}$$

para $u = x$ o y, se tiene que T es un operador acotado tanto de $H^{0,1}$ en $l^2(H^{0,1})$ como de H^1 en $l^2(H^1)$. Del Teorema 5.6.2 en [6], se sigue que el operador T es acotado de $H^{1/2,1}$ en $l_2(H^{1/2,1})$. En particular, existe una constante $A_0 > 0$ tal que

$$\sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} \|\psi_{j,k} f\|^2_{H^{1/2,1}} \leq A_0 \|f\|^2_{H^{1/2,1}}$$

Ahora, sea $A_1 > 0$ tal que $\sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} |\psi(x-j, y-k)|^{p+1} \geq A_1$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Veamos que para toda función $f \in H^{1/2,1}$ no nula, existen j_0 y $k_0 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\|\psi_{j_0,k_0} f\|^2_{H^{1/2,1}} \leq \left(1 + A_2 \|f\|^{-(p+1)}_{L^{p+1}}\right) \|\psi_{j_0,k_0} f\|^{p+1}_{L^{p+1}}, \tag{6.11}$$

donde $A_2 = \frac{A_0 B^2}{A_1}$. En efecto, supongamos que no. Luego, para todo k y j en $\mathbb{Z}$,

$$\|\psi_{j,k} f\|^2_{H^{1/2,1}} > \left(1 + A_2 \|f\|^{-(p+1)}_{L^{p+1}}\right) \|\psi_{j,k} f\|^{p+1}_{L^{p+1}}.$$

Sumando en j y k, se sigue que

$$\sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} \|\psi_{j,k} f\|^2_{H^{1/2,1}} > \left(1 + A_2 \|f\|^{-(p+1)}_{L^{p+1}}\right) \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} \|\psi_{j,k} f\|^{p+1}_{L^{p+1}}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
A_0 B^2 \geq A_0 \|f\|^2_{H^{1/2,1}} &\geq \sum_{k,j\in\mathbb{Z}} \|\psi_{k,j} f\|^2_{H^{1/2,1}} \\
&> \left(1 + A_2 \|f\|^{-(p+1)}_{L^{p+1}}\right) \sum_{k,j\in\mathbb{Z}} \|\psi_{k,j} f\|^{p+1}_{L^{p+1}} \\
&\geq \left(1 + A_2 \|f\|^{-(p+1)}_{L^{p+1}}\right) A_1 \|f\|^{p+1}_{L^{p+1}} \\
&= A_1 \|f\|^{p+1}_{L^{p+1}} + A_0 B^2
\end{aligned}$$

lo que es absurdo. Por lo tanto, para algún par de enteros j_0 y k_0 se tiene (6.11) para toda $f \in H^{1/2,1}$ no nula.
Luego, para este par de enteros j_0 y k_0, gracias a la Proposición 2.7, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\psi_{j_0,k_0} f\|^2_{L^{p+1}} \leq C^2 \|\psi_{j_0,k_0} f\|^2_{H^{1/2,1}} &\leq C^2 \left(1 + A_2 \|f\|^{-(p+1)}_{L^{p+1}}\right) \|\psi_{j_0,k_0} f\|^{p+1}_{L^{p+1}} \\
&\leq C^2 \left(1 + \frac{A_2}{\gamma^{p+1}}\right) \|\psi_{j_0,k_0} f\|^{p+1}_{L^{p+1}}.
\end{aligned}$$

Así pues,

$$\|\psi_{j_0,k_0} f\|^{p+1}_{L^{p+1}} \geq \left[C^2 (1 + \frac{A_2}{\gamma^{p+1}})\right]^{-\frac{p+1}{p-1}}.$$

En particular,

$$\int_{\Omega(j_0,k_0,1/2)} |f|^{p+1}\,dxdy \geq \|\psi_{j_0,k_0} f\|_{L^{p+1}}^{p+1} \geq \left[C^2(1+\frac{A_2}{\gamma^{p+1}})\right]^{-\frac{p+1}{p-1}} = \eta$$

□

Lema 6.4. Para toda sucesión minimizante (tanto de I_q como de I_q^β), $\alpha > 0$

Demostración. Sea ϕ_n una sucesión minimizante. Del lema inmediatamente anterior, existen $\eta > 0$ y una sucesión (a_n, b_n) en $\mathbb{R}^2$ tales que

$$\int_{\Omega(a_n,b_n,1)} |\phi_n(x,y)|^{p+1}\,dxdy \geq \eta \tag{6.12}$$

para todo n. Ahora, sea ρ una función en C_0^∞ tal que $0 \leq \rho \leq 1$, $\rho \equiv 1$ en $\Omega(0,0,1)$, $\rho \equiv 0$ en $\mathbb{R}^2 - \Omega(0,0,2)$. Denotaremos por $r^* \geq 1$ un número real que seleccionaremos más adelante, y que dependerá solamente de ρ, η y B. De la Proposición 2.7,

$$\begin{aligned}\eta &\leq \int_{\Omega(a_n,b_n,1)} |\phi_n(x,y)|^{p+1}\,dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^2} |\rho_n(x,y)\phi_n(x,y)|^{p+1}\,dxdy \\ &\leq C\|\rho_n\phi_n\|_{L^2}^{\frac{5-p}{2}} \|D_x^{1/2}(\rho_n\phi_n)\|_{L^2}^{p-1} \|\partial_y(\rho_n\phi_n)\|_{L^2}^{\frac{p-1}{2}} \\ &\leq C\left(\|\rho_n\phi_n\|_{L^2}^2 + b\|D_x^{1/2}(\rho_n\phi_n)\|_{L^2}^2\right)^{\frac{p+3}{4}} \|\partial_y(\rho_n\phi_n)\|_{L^2}^{\frac{p-1}{2}},\end{aligned} \tag{6.13}$$

donde $\rho_n = \rho\left(\dfrac{\cdot - (a_n,b_n)}{r^*}\right)$. Ahora bien, como

$$\begin{aligned}&\|D_x^{1/2}(\rho_n\phi_n)\|_{L^2}^2 = \\ &\qquad = \|\rho_n D_x^{1/2}\phi_n\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^2} ([D_x^{1/2},\rho_n]\phi_n)([D_x^{1/2},\rho_n]\phi_n + 2\rho_n D_x^{1/2}\phi_n)\,dxdy,\end{aligned} \tag{6.14}$$

de la Proposición 2.11,

$$\begin{aligned}&\|\rho_n\phi_n\|_{L^2}^2 + b\|D_x^{1/2}(\rho_n\phi_n)\|_{L^2}^2 \leq \\ &\quad \leq \|\rho_n\phi_n\|_{L^2}^2 + b\|\rho_n D_x^{1/2}\phi_n\|_{L^2}^2 + \|\widehat{D_x^{1/2}\rho_n}\|_{L^1} q^2(\|\widehat{D_x^{1/2}\rho_n}\|_{L^1} + 2/b) \\ &\quad \leq 2M_n(2r^*) + \frac{q^2\|\widehat{D_x^{1/2}\rho}\|_{L^1}(\|\widehat{D_x^{1/2}\rho}\|_{L^1} + 2/b)}{r^{*1/2}}\end{aligned} \tag{6.15}$$

Por otro lado,

$$\|\partial_y(\rho_n\phi_n)\|_{L^2} \leq (1 + \|\partial_y\rho\|_\infty)B = K. \tag{6.16}$$

Luego, de (6.13), (6.15) y (6.16) se tiene que

$$\left(\frac{\eta}{CK^{\frac{p-1}{2}}}\right)^{\frac{4}{p+3}} \leq 2M_n(2r^*) + \frac{q^2\|\widehat{D_x^{1/2}\rho}\|_{L^1}(\|\widehat{D_x^{1/2}\rho}\|_{L^1} + 2/b)}{{r^*}^{1/2}}.$$

Así pues, si escogemos $r^* = \text{máx}\{r_0, 1\}$, donde r_0 es tal que

$$\frac{q^2\|\widehat{D_x^{1/2}\rho}\|_{L^1}(\|\widehat{D_x^{1/2}\rho}\|_{L^1} + 2/b)}{{r_0}^{1/2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{CK^{\frac{p-1}{2}}}\right)^{\frac{4}{p+3}},$$

se tiene que

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\eta}{CK^{\frac{p-1}{2}}}\right)^{\frac{4}{p+3}} \leq M_n(2r^*),$$

para n suficientemente grande. Por lo tanto,

$$0 < \frac{1}{4}\left(\frac{\eta}{CK^{\frac{p-1}{2}}}\right)^{\frac{4}{p+3}} \leq M(2r^*) \leq \alpha$$

$\square$

Veamos ahora la subaditividad de I_q

Lema 6.5. Para todo $q_1\,, q_2 > 0$, se tiene

$$I_{q_1+q_2} < I_{q_1} + I_{q_2} \tag{6.17}$$

y

$$I^{\beta}_{q_1+q_2} < I^{\beta}_{q_1} + I^{\beta}_{q_2}, \tag{6.18}$$

para $0 < \beta \leq \beta_0$.

Demostración. Para $\theta > 1$, sea $u_\theta = \theta u$. Es claro que $Q(u_\theta) = \theta^2 Q(u)$ y

$$E(u_\theta) = \int_{\mathbb{R}^2} -\frac{a\theta^{p+1}u^{p+1}}{p+1} + \theta^2\frac{(\partial_y u)^2}{2}\,dxdy. \tag{6.19}$$

Como $p+1 \geq 2$,

$$E(u_\theta) < \theta^{p+1}E(u)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I_{\theta^2 q} &= \text{ínf}\{E(u_\theta) \mid Q(u_\theta) = \theta^2 q\} \\ &\leq \theta^{p+1} I_q \\ &< \theta^2 I_q. \end{aligned}$$

Luego, si $q_1 > q_2 > 0$,

$$\begin{aligned} I_{q_1+q_2} &= I_{q_1(1+\frac{q_2}{q_1})} < \left(1+\frac{q_2}{q_1}\right) I_{q_1} \\ &= I_{q_1} + \frac{q_2}{q_1} I_{q_1} = I_{q_1} + \frac{q_2}{q_1} I_{q_2 \frac{q_1}{q_2}} \\ &< I_{q_1} + I_{q_2}. \end{aligned}$$

Ahora bien, si $q_1 = q_2$

$$I_{q+q_2} = I_{2q_1} < 2I_{q_1} = I_{q_1} + I_{q_2}.$$

(6.18) se muestra de la misma manera. Esto termina la demostración del lema. □

Ahora, describamos el comportamiento de las sucesiones minimizantes cuando $0 < \alpha < q$.

Lema 6.6. Para cada $\epsilon > 0$, existen $N \in \mathbb{N}$ y dos sucesiones de funciones $\{g_N, g_{N+1}, g_{N+2}, \dots\}$ y $\{h_N, h_{N+1}, h_{N+1}, \dots\}$ en $H^{1/2,1}$ (o H^1) tales que, para $n \geq N$

(a) $|Q(g_n) - \alpha| < \epsilon$,

(b) $|Q(h_n) - (q - \alpha)| < \epsilon$,

(c) $|E(\phi_n) - (E(g_n) + E(h_n))| < \epsilon$

(o

(c') $|E^\beta(\phi_n) - (E^\beta(g_n) + E^\beta(h_n))| < \epsilon$

para $0 < \beta \leq \beta_0$.)

Demostración. Sean ρ y η funciones $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tales que $0 \leq \rho \leq 1$, $\rho \equiv 1$ en $\Omega(0,0,5/4)$, $\operatorname{supp} \rho \subset \Omega(0,0,7/4)$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ en $\mathbb{R}^2 - \Omega(0,0,7/4)$, $\operatorname{supp} \eta \subset \mathbb{R}^2 - \Omega(0,0,5/4)$ y $\rho^2 + \eta^2 \equiv 1$ en $\mathbb{R}^2$. Además, sea $\tilde{\rho}$ una función tal que $0 \leq \tilde{\rho} \leq 1$, $\tilde{\rho} \equiv 1$ en $(\mathbb{R}^2 - \Omega(0,0,5/4)) \cap \Omega(0,0,7/4)$ y $\operatorname{supp} \tilde{\rho} \subset (\mathbb{R}^2 - \Omega(0,0,1)) \cap \Omega(0,0,2)$, y sean $\rho_r(x,y) = \rho\left(\frac{(x,y)}{r}\right)$, $\eta_r(x,y) = \eta\left(\frac{(x,y)}{r}\right)$ y $\tilde{\rho}_r(x,y) = \tilde{\rho}\left(\frac{(x,y)}{r}\right)$. Como

$$M(r) = \lim_{n\to\infty} M_n(r) = \lim_{n\to\infty} \sup_{(c,d)\in\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega(c,d,r)} \phi_n^2 + b(D_x^{1/2}\phi_n)^2 \, dxdy,$$

para $\epsilon_1 > 0$ y r suficientemente grande,

$$\alpha - \epsilon_1 < M(r) \leq M(2r) \leq \alpha. \tag{6.20}$$

Aunque más adelante diremos con más precisión como tomamos a r, lo fijaremos de éstos últimos, y escogeremos N suficientemente grande tal que

$$\alpha - \epsilon_1 < M_n(r) \leq M_n(2r) < \alpha + \epsilon_1, \tag{6.21}$$

para todo $n \geq N$. Ahora bien, para cada $n \geq N$ se puede encontrar un (c_n, d_n) tal que

$$\alpha - \epsilon_1 \leq \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega(c_n,d_n,r)} \phi_n^2 + b(D_x^{1/2}\phi_n)^2 \, dxdy \leq$$
$$\leq \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega(c_n,d_n,2r)} \phi_n^2 + b(D_x^{1/2}\phi_n)^2 \, dxdy < \alpha + \epsilon_1 \tag{6.22}$$

Ahora, sean, para $n \geq N$,

$$g_n = \rho_r(\cdot - (c_n, d_n))\phi_n = \rho_{rn}\phi_n,$$
$$h_n = \eta_r(\cdot - (c_n, d_n))\phi_n = \eta_{rn}\phi_n.$$

En virtud de la Proposición 2.7 y (6.14) tenemos que

$$\begin{aligned} Q(g_n) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\rho_{rn}\phi_n)^2 + b(D_x^{1/2}(\rho_{rn}\phi_n))^2 \, dxdy \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho_{rn}^2\phi_n^2 + b\rho_{rn}^2(D_x^{1/2}\phi_n)^2 \, dxdy + \frac{A_1}{r^{1/2}} \end{aligned}$$

donde $A_1 = q^2\|\widehat{D_x^{1/2}\rho}\|_{L^1}(\|\widehat{D_x^{1/2}\rho}\|_{L^1} + 2/b)$. De (6.22)

$$|Q(g_n) - \alpha| < \epsilon_1 + \frac{A_1}{r^{1/2}}. \tag{6.23}$$

De la misma forma tenemos

$$\begin{aligned} Q(h_n) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\eta_{rn}\phi_n)^2 + b(D_x^{1/2}(\eta_{rn}\phi_n))^2 \, dxdy \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \eta_{rn}^2\phi_n^2 + b\eta_{rn}^2(D_x^{1/2}\phi_n)^2 \, dxdy + \frac{A_2}{r^{1/2}} \end{aligned}$$

donde $A_2 = q^2\|\widehat{D_x^{1/2}\eta}\|_{L^1}(\|\widehat{D_x^{1/2}\eta}\|_{L^1} + 2/b)$. De (6.22)

$$|Q(h_n) - (q - \alpha)| < \epsilon_1 + \frac{A_2}{r^{1/2}}. \tag{6.24}$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
|E(\phi_n) - E(g_n) - E(h_n)| & \\
\leq & \left| \frac{a}{p+1} \int_{\mathbb{R}^2} -\phi_n^{p+1} + g_n^{p+1} + h_n^{p+1}\, dxdy \right| + \\
& + \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_y \phi_n)^2 - (\partial_y g_n)^2 - (\partial_y h_n)^2\, dxdy \right| \\
\leq & \left| \frac{a}{p+1} \int_{\mathbb{R}^2} (1 - \rho_{rn}^{p+1} - \eta_{rn}^{p+1}) \phi_n^{p+1}\, dxdy \right| + \\
& + \left| \int_{\mathbb{R}^2} (\phi_n \partial_y \rho_{rn})(\rho_{rn} \partial_y \phi_n) + (\phi_n \partial_y \eta_{rn})(\eta_{rn} \partial_y \phi_n)\, dxdy \right| + \\
& + \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_y \rho_{rn})^2 \phi_n^2 + (\partial_y \eta_{rn})^2 \phi_n^2\, dxdy \right|
\end{aligned} \tag{6.25}
$$

Ahora bien, vamos a examinar cada uno de los 3 últimos términos en la última desigualdad. Sean $\tilde{\Omega}(x,y,r) = \Omega(x,y,2r) - \Omega(x,y,r)$ y $\tilde{\rho}_{rn} = \tilde{\rho}_r(\cdot - (c_n, d_n))$. De la Proposición 2.7, (6.14) y (6.22),

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^2} (1 - \rho_{rn}^{p+1} - \eta_{rn}^{p+1}) \phi_n^{p+1}\, dxdy \right| & \leq \|\tilde{\rho}_{rn} \phi_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} \\
& \leq C \|\tilde{\rho}_{rn} \phi_n\|_{L^2}^{\frac{5-p}{2}} \|D_x^{1/2} (\tilde{\rho}_{rn} \phi_n)\|_{L^2}^{p-1} \|\partial_y (\tilde{\rho}_{rn} \phi_n)\|_{L^2}^{\frac{p-1}{2}} \\
& \leq C \left(\|\tilde{\rho}_{rn} \phi_n\|_{L^2}^2 + b \|D_x^{1/2} (\tilde{\rho}_{rn} \phi_n)\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{p+3}{4}} \|\partial_y (\tilde{\rho}_{rn} \phi_n)\|_{L^2}^{\frac{p-1}{2}} \\
& \leq C B^{\frac{p-1}{2}} \left(\int_{\tilde{\Omega}} \phi_n^2 + b (D_x^{1/2} \phi_n)^2\, dxdy + \frac{A_3}{r^{1/2}} \right)^{\frac{p+3}{4}} \\
& \leq C B^{\frac{p-1}{2}} \left(\epsilon_1 + \frac{A_3}{r^{1/2}} \right)^{\frac{p+3}{4}}
\end{aligned} \tag{6.26}
$$

donde $A_3 = \|\widehat{D_x^{1/2} \tilde{\rho}}\|_{L^1} q^2 (\|\widehat{D_x^{1/2} \tilde{\rho}}\|_{L^1} + 2/b)$. Por otro lado,

$$
\left| \int_{\mathbb{R}^2} [(\partial_y \rho_{rn})^2 + (\partial_y \eta_{rn})^2] \phi_n^2\, dxdy \right| \leq \frac{\|\partial_y \rho\|_\infty^2 + \|\partial_y \eta\|_\infty^2}{r^2} \int_{\tilde{\Omega}} \phi_n^2\, dxdy \leq \frac{A_4^2 B^2}{r^2} \tag{6.27}
$$

y

$$
\left| \int_{\mathbb{R}^2} (\phi_n \partial_y \rho_r)(\rho_r \partial_y \phi_n) + (\phi_n \partial_y \eta_r)(\eta_r \partial_y \phi_n) \right| \leq \frac{2 A_4 B^2}{r}, \tag{6.28}
$$

donde $A_4^2 = \|\partial_y \rho\|_\infty^2 + \|\partial_y \eta\|_\infty^2$. De (6.26), (6.27) y (6.28)

$$
|E(\phi_n) - (E(g_n) + E(h_n))| < C B^{\frac{p-1}{2}} \left(\epsilon_1 + \frac{A_3}{r^{1/2}} \right)^{\frac{p+3}{4}} + \frac{A_4^2 B^2}{r^2} + \frac{4 A_4 B^2}{r}. \tag{6.29}
$$

De (6.23), (6.24) y (6.29), tomando ϵ_1 suficientemente pequeño y r suficientemente grande, se sigue el lema. (Para probar (c') basta con observar lo siguiente

$$\begin{aligned} E^{\beta}(\phi_n) - E^{\beta}(g_n) - E^{\beta}(h_n) &= E(\phi_n) - E(g_n) - E(h_n) + \\ &+ \frac{\beta}{2}\bigg(\int_{\mathbb{R}^2} (\phi_n \partial_x \rho_{rn})(\rho_{rn}\partial_x \phi_n) + (\phi_n \partial_x \eta_{rn})(\eta_{rn}\partial_x \phi_n)\, dxdy + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x \rho_{rn})^2 \phi_n^2 + (\partial_x \eta_{rn})^2 \phi_n^2 \, dxdy \bigg). \end{aligned} \tag{6.30}$$

Los dos últimos términos en el lado derecho de la última desigualdad se estiman de la misma manera que en (6.27) y (6.28).) □

Corolario 6.7. Para toda sucesión minimizante ϕ_n (tanto para I_q como para I_q^{β}), se tiene que $\alpha = q$

Demostración. Lo probaremos para una sucesión minimizante para I_q, el otro caso es totalmente similar. Supongamos que $\alpha < q$. Del Lema (6.6), se sigue que existen subsucesiones $\{\phi_{n_k}\}$, $\{g_{n_k}\}$ y $\{h_{n_k}\}$ tales que

$$|Q(g_{n_k}) - \alpha| < \frac{1}{k} \tag{6.31}$$

$$|Q(h_{n_k}) - (q-\alpha)| < \frac{1}{k} \tag{6.32}$$

y

$$|E(\phi_{n_k}) - (E(g_{n_k}) + E(h_{n_k}))| < \frac{1}{k} \tag{6.33}$$

Sean

$$B_k = \sqrt{\frac{\alpha}{Q(g_{n_k})}} \quad y \quad C_k = \sqrt{\frac{q-\alpha}{Q(h_{n_k})}} \tag{6.34}$$

Entonces,

$$I_{\alpha} \le E(B_k g_{n_k}) = B_k^2 E(g_{n_k}) + (B_k^2 - B_k^{p+1}) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{a g_{n_k}^{p+1}}{p+1}\, dxdy \tag{6.35}$$

y

$$I_{q-\alpha} \le E(C_k h_{n_k}) = C_k^2 E(h_{n_k}) + (C_k^2 - C_k^{p+1}) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{a h_{n_k}^{p+1}}{p+1}\, dxdy \tag{6.36}$$

Como $\|g_{n_k}\|_{L^{p+1}}$ y $\|h_{n_k}\|_{L^{p+1}}$ son acotadas y

$$\lim_{k\to\infty} B_k = 1 \quad y \quad \lim_{k\to\infty} C_k = 1,$$

de (6.33) , (6.35) y (6.36),

$$I_{q-\alpha} + I_\alpha \leq \lim_{k\to\infty} (E(g_{n_k}) + E(h_{n_k})) = \lim_{k\to\infty} E(\phi_{n_k}) = I_q$$

Esto contradice el Lema 6.5. Se sigue entonces que $\alpha = q$. □

Ahora veamos que el problema (6.6) tiene solución para $0 < \beta \leq \beta_0$.

Lema 6.8. Sea $\{\phi_n\}$ una sucesión minimizante para I_q^β. Existe una sucesión de puntos $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \cdots, (u_n, v_n), \cdots$ tal que

1. Para todo $z < q$ existe $r = r(z)$ tal que

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega(u_n,v_n,r)} \phi_n^2 + b(D_x^{1/2}\phi_n)^2 \, dxdy > z$$

para n suficientemente grande.

2. La sucesión $\{\tilde{\phi}_n\}$ definida por

$$\tilde{\phi}_n(x,y) = \phi_n((x,y) - (u_n, v_n)) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

tiene una subsucesión que converge en H^1 a una función ϕ solución de (6.6).

Demostración. Veamos la parte 1. Como

$$q = \alpha = \lim_{r\to\infty} M(r) = \lim_{r\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sup_{(u,v)\in\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} \int_{\Omega(u,v,r)} \phi_n^2 + b(D_x^{1/2}\phi_n)^2 \, dxdy,$$

existe un r_0, tal que para n suficientemente grande

$$\sup_{(u,v)\in\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} \int_{\Omega(u,v,r_0)} \phi_n^2 + b(D_x^{1/2}\phi_n)^2 \, dxdy > \frac{q}{2}$$

Para estos n se puede encontrar un (u_n, v_n) tal que,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega(u_n,v_n,r_0)} \phi_n^2 + b(D_x^{1/2}\phi_n)^2 \, dxdy > \frac{q}{2}$$

Sea z tal que $\frac{q}{2} < z < q$. Como $\alpha = q$ existen $r_0(z)$ y $N(z)$ suficientemente grandes tales que si $n \geq N(z)$,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega(u_n(z),v_n(z),r_0(z))} \phi_n^2 + b(D_x^{1/2}\phi_n)^2 \, dxdy > z,$$

para algún $(u_n(z), v_n(z))$. Como $\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \phi_n^2 + b(D_x^{1/2}\phi_n)^2\,dxdy = q$, entonces

$\Omega(u_n, v_n, r_0) \cap \Omega(u_n(z), v_n(z), r_0(z)) \neq \emptyset$.

Tomando $r = r(z) = 2r_0(z) + r_0$ podemos garantizar que

$\Omega(u_n(z), v_n(z), r_0(z)) \subset \Omega(u_n, v_n, r)$.

Esto demuestra 1.
Veamos 2. De 1 tenemos que para todo $k \in \mathbb{N}$, existe un r_k tal que para n suficientemente grande

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega(u_n,v_n,r_k)} \phi_n^2 + b(D_x^{1/2}\phi_n)^2\,dxdy > q - \frac{1}{k},$$

o en otras palabras

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega(0,0,r_k)} \tilde{\phi}_n^2 + b(D_x^{1/2}\tilde{\phi}_n)^2\,dxdy > q - \frac{1}{k} \tag{6.37}$$

Como $\tilde{\phi}_n = \phi_n(\cdot + (u_n, v_n))$, del Lema 6.2, $\{\tilde{\phi}_n\}$ es una sucesión acotada en H^1. En particular, $\{D_x^{1/2}\tilde{\phi}_n\}$ también es una sucesión acotada en $H^{1/2}$. Ya que la inclusión de $H^1 \times H^{1/2}$ en $L^2_{loc} \times L^2_{loc}$ es compacta, existe una subsucesión de $\{(\tilde{\phi}_n, D_x^{1/2}\tilde{\phi}_n)\}$, que notaremos de la misma manera, que converge a una pareja de funciones (ϕ, ψ) en la norma de $L^2(\Omega(0,0,r)) \times L^2(\Omega(0,0,r))$, para todo r real positivo. Además se satisface

$$q - \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega(0,0,r_k)} \phi^2 + b\psi^2\,dxdy \leq q, \tag{6.38}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. De (6.38), y como $\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{\phi}_n|^2 + b(D_x^{1/2}\tilde{\phi}_n)^2\,dxdy = q$ para todo n, entonces $\int_{\mathbb{R}^2} \phi^2 + b\psi^2\,dxdy = q$ y la sucesión $\{(\tilde{\phi}_n, D_x^{1/2}\tilde{\phi}_n)\}$ converge en norma a la pareja de funciones (ϕ, ψ) en $L^2 \times L^2$. Dado que $D_x^{1/2}$ es un operador cerrado, $\psi = D_x^{1/2}\phi$. Más aún, $\phi \in H^1$ y $\tilde{\phi}_n$ converge débilmente a ϕ en H^1 y, gracias a la Proposición 2.7, converge fuertemente en L^{p+1}. Como

$$\|\phi\|_{H^1}^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|\tilde{\phi}_n\|_{H^1}^2,$$

un simple argumento de equivalencia de normas nos permite mostrar que

$$E^\beta(\phi) \leq \lim_{n\to\infty} E^\beta(\tilde{\phi}_n) = I_q^\beta.$$

Por lo tanto,

$$E^\beta(\phi) = I_q^\beta.$$

Además, el mismo argumento de equivalencia de normas nos permite demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{\phi}_n\|_{H^1}^2 = \|\phi\|_{H^1}^2$$

y, en particular, que $\{\tilde{\phi}_n\}$ converge ϕ en H^1. Esto termina la demostración del lema. $\square$

Como corolario tenemos el resultado principal de esta sección, en el cual mostramos la existencia de soluciones del problema (6.3), y por ende existencia de ondas solitarias asociadas a la ecuación (1.9).

Teorema 6.9. Para cada β, sea ϕ^β la solución del problema (6.6), para $0 < \beta \leq \beta_0$. La red $\{\phi^\beta\}$ es una red minimizante de I_q. Más aún, existe una sucesión $\{\beta_n\}$ que converge a 0 y una sucesión de puntos (u_n, v_n) para los que se satisfacen

1. Para todo $z < q$ existe $r = r(z)$ tal que

   $$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega(u_n,v_n,r)} \phi_n^2 + b(D_x^{1/2}\phi_n)^2 \, dxdy > z$$

   para n suficientemente grande.

2. La sucesión $\{\tilde{\phi}_n\}$ definida por

   $$\tilde{\phi}_n(x,y) = \phi_n((x,y) + (u_n, v_n)) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

   tiene una subsucesión que converge en $H^{1/2,1}$ a una función ϕ solución de (6.3),

donde $\phi_n = \phi^{\beta_n}$.

Demostración. Veamos primero que $I_q = \lim_{\beta\to 0+} I_q^\beta$. Como I_q^β es decreciente y $I_q^\beta \geq I_q$ el límite existe y se tiene que $I_q \leq \lim_{\beta\to 0+} I_q^\beta$. De la densidad de H^1 en $H^{1/2,1}$ y la continuidad del funcional E en $H^{1/2,1}$, se puede ver que existe $\phi \in H^1$ tal que $E(\phi) < I_q + \epsilon/2$. Luego, para β suficientemente pequeño se tiene que

$$I_q^\beta \leq E^\beta(\phi) = E(\phi) + \frac{\beta}{2}\|\partial_x\phi\|^2 \leq I_q + \epsilon.$$

Por lo tanto, $I_q = \lim_{\beta\to 0+} I_q^\beta$. En particular, se tiene que $\{\phi^\beta\}$ es una red minimizante.
Obsérvemos que si mostramos que $\{\phi^\beta\}$ es una red acotada en H^1, la demostración del lema anterior muestra el presente teorema. El punto culminante en dicha demostración es el uso de la inclusión compacta cuando se demuestra 2. Así que, para terminar la demostración del presente teorema, basta mostrar que $\{\phi^\beta\}$ es una red acotada en H^1.
Es claro que ϕ^β satisface la ecuación

$$-c_\beta\phi^\beta - bc_\beta\mathscr{H}\phi_x^\beta = -a(\phi^\beta)^p - \beta\phi_{xx}^\beta - \phi_{yy}^\beta, \tag{6.39}$$

para algún $c_\beta \in \mathbb{R}$. Multiplicando ϕ^β en ambos lados de la ecuación e integrando tenemos que

$$-c_\beta q = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{p+1}\right) a \int_{\mathbb{R}^2} (\phi^\beta)^{p+1} + I_q^\beta < I_q^\beta \leq I_q^{\beta_0},$$

o en otras palabras,

$$c_\beta \geq -I_q^{\beta_0}/q > 0.$$

Observe que de (6.39) se sigue que

$$\phi^\beta = a(c_\beta + bc_\beta \mathscr{H}\partial_x - \beta\partial_x^2 - \partial_y^2)^{-1}\left((\phi^\beta)^p\right). \tag{6.40}$$

Si $p \leq 3$, $(\phi^\beta)^p \in L^2$ con norma menor o igual $C_p B^p$ y, gracias al teorema de Plancherel, de (6.40) se sigue que

$$\|\partial_x \phi^\beta\|_{L^2} \leq -\frac{q}{I_q} C_p B^p \qquad \text{y} \qquad \|\partial_y^2 \phi^\beta\|_{L^2} \leq -\frac{q}{I_q} C_p B^p.$$

En particular, se sigue que la red $\{\phi^\beta\}$ es acotada en H^1 en este caso.
Si $p = 4$, $(\phi^\beta)^p \in L^{3/2}$. Gracias al teorema de Lizorkin, de nuevo de (6.40), se sigue que

$$\|\partial_x \phi^\beta\|_{L^{3/2}} \leq C(-\frac{q}{I_q}, B) \qquad \text{y} \qquad \|\partial_y^2 \phi^\beta\|_{L^{3/2}} \leq C(-\frac{q}{I_q}, B).$$

Luego, de la Proposición 2.8, tenemos que $\phi^\beta \in L^8$ con norma acotada por una constante positiva que depende de B y de $-q/I_q$. Así pues, $(\phi^\beta)^p \in L^2$ con norma acotada por una constante positiva que depende de B y de $-q/I_q$. Por lo tanto, como antes,

$$\|\partial_x \phi^\beta\|_{L^2} \leq C(-\frac{q}{I_q}, B) \qquad \text{y} \qquad \|\partial_y^2 \phi^\beta\|_{L^2} \leq C(-\frac{q}{I_q}, B).$$

En este caso también tendríamos que la red $\{\phi^\beta\}$ es acotada en H^1. Esto termina la demostración. □

6.2. Regularidad y analiticiadad de las ondas solitarias

Ene esta seccion probaremos que las ondas solitarias asociadas a la ecuación (1.9) son funciones C^∞

Teorema 6.10. Si $\phi \in H^{1/2,1}$ es solución de (6.2), $\phi \in H^\infty = \bigcap_0^\infty H^n$. Además, ϕ es analítica.

Demostración. De la ecuación (6.2) se tiene que

$$\phi = a(c + bc\mathscr{H}\partial_x - \partial_y^2)^{-1}(\phi^p). \tag{6.41}$$

Si $p \leq 3$, de la Proposición 2.9 $\phi^p \in L^2$. Por lo tanto, del teorema de Plancherel, $\phi \in H^{1,2}$. Supongamos que hemos probado que $\phi \in H^{n,2n}$. Entonces, de nuevo, de la ecuación (6.41),

gracias a que $H^{n,2n}$ es un álgebra de Banach, del teorema de Plancherel se tiene que $\phi \in H^{n+1,2(n+1)}$. Esto prueba que $\phi \in H^{\infty}$.
Si $p = 4$, $\phi^p \in L^{3/2}$. De la ecuación (6.41) y el teorema de Lizorkin, $\phi \in H^{1,2}_{3/2}$. Luego, de la Proposición 2.10, $\phi^p \in L^2$. Así pues, de la ecuación (6.41) y del teorema de Plancherel, llegamos a que $\phi \in H^{1,2}$. Procediendo como en el caso anterior se tiene que $\phi \in H^{\infty}$.
Para ver la analiticidad de ϕ es suficiente probar que

$$\|\partial^\beta \phi\|_{H^2} \leq C|\beta|!\Big(\frac{R}{2}\Big)^{|\beta|}, \tag{6.42}$$

para algún $R > 0$ y todo $\beta \in \mathbb{N}^2$. Solo consideramos el caso $\alpha \neq 0$ (el caso $\alpha = 0$ es tratado de manera similar). Demostraremos que existe $R > 0$ tal que para todo $\beta \in \mathbb{N}^2$

$$\|\partial^\beta \phi\|_{H^2} \leq C\frac{(|\beta|-1)!}{(|\beta|+1)^s}\Big(\frac{R}{2}\Big)^{|\beta|-1}, \tag{6.43}$$

donde $s > 1$. Veamos ésto por inducción. Para $|\beta| = 1$ la desigualdad (6.43) es evidente; es suficiente elegir C suficientemente grande. Supongamos ahora que (6.43) es válida para $|\beta| = 1, \cdots, n$ y R (que elegiremos convenientemnte después). De la ecuación (6.2), tenemos

$$(c + bc\mathscr{H}\partial_x - \partial_y^2)\phi = a\phi^p. \tag{6.44}$$

Aplicando $\partial^\beta(1-\Delta)$ en ambos lados de la ecuación y haciendo uso del teorema de Plancherel se tiene que

$$\|\partial_x \partial^\beta \phi\|_{H^2} \leq C\left\|\partial^\beta(\phi^p)\right\|_{H^2},$$

por un lado. De nuevo, aplicando ∂^β en ambos lados de la ecuación pero, ahora, haciendo el producto interno en H^2 con $\partial^\beta\phi$ en la ecuación (6.44) podemos obtener

$$\|\partial_y \partial^\beta \phi\|_{H^2} \leq C\left\|\partial^\beta(\phi^p)\right\|_{H^2}.$$

Por lo tanto,

$$\|\nabla \partial^\beta \phi\|_{H^2} \leq C\left\|\partial^\beta(\phi^p)\right\|_{H^2}. \tag{6.45}$$

Para terminar la demostración necesitamos el siguiente lema.

Lema 6.11. (a) Si f y $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, entonces

$$\partial^\beta\Big(f(\phi)\Big) = \sum_{j=1}^{|\beta|}\frac{f^{(j)}(\phi)}{j!}\sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_j=\beta\\ |\beta_i|\geq 1,\ \forall\ 1\leq i\leq j}}\frac{\beta!}{\beta_1!\cdots\beta_j!}\partial^{\beta_1}\phi\cdots\partial^{\beta_j}\phi.$$

(b) para cada $(n_1, \ldots, n_j) \in \mathbb{N}^j$ tenemos que

$$|\beta|! = \sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_j=\beta\\ |\beta_i|=n_i,\ \forall\ 1\leq i\leq j}}\frac{\beta!|\beta_1|!\cdots|\beta_j|!}{\beta_1!\cdots\beta_j!}.$$

(c) Para $s > 1$ existe C_2 tal que para todo j e $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k_1+\cdots+k_j=k} \frac{1}{(k_1+1)^s \cdots (k_j+1)^s} \leq \frac{C_2^{j-1}}{(k+1)^s}$$

Regresemos a la demostración del teorema. Por la parte *(a)* del Lema 6.11, la desigualdad (6.45) y del hecho que H^2 es una álgebra de Banach, se sigue

$$\|\nabla\partial^\beta\phi\|_{H^2} \leq C_1 \sum_{j=1}^{p} \sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_j=\beta \\ |\beta_i|\geq 1,\ \forall\ 1\leq i\leq j}} \frac{\beta!}{\beta_1!\cdots\beta_j!} \|\partial^{\beta_1}\phi\|_{H^2}\cdots\|\partial^{\beta_j}\phi\|_{H^2}.$$

De la hipótesis de inducción y la parte *(b)* de el mismo lema, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\nabla\partial^\beta\phi\|_{H^2} \leq & C_1 \sum_{j=1}^{p} C^j A^{|\beta|-j} \sum_{\substack{n_1+\cdots+n_j=|\beta| \\ n_i\geq 1,\ \forall\ 1\leq i\leq j}} \sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_j=\beta \\ |\beta_i|=n_i,\ \forall\ i}} \frac{\beta!}{\beta_1!\cdots\beta_j!} \frac{(|\beta_1|-1)!\cdots(|\beta_j|-1)!}{(|\beta_1|+1)^s\cdots(|\beta_j|+1)^s} \\
\leq & C_1 \sum_{j=1}^{p} \tilde{C}^j A^{|\beta|-j} \sum_{\substack{n_1+\cdots+n_j=|\beta| \\ |n_i|\geq 1,\ \forall\ 1\leq i\leq j}} \frac{|\beta|!}{(n_1+1)^{s+1}\cdots(n_j+1)^{s+1}},
\end{aligned}$$

donde $A = \frac{R}{2}$. De esta desigualdad y la parte *(c)* de el Lema 6.11, obtenemos que

$$\|\nabla\partial^\beta\phi\|_{H^2} \leq C_1 \frac{|\beta|!}{(|\beta|+2)^s} A^{|\beta|} \sum_{j=1}^{p} (\tilde{C}C_2)^j A^{-j}.$$

Ahora elijamos R. Tomamos A suficientemente grande tal que

$$C_1 \sum_{j=1}^{p} (\tilde{C}C_2)^j A^{-j} \leq C.$$

Es claro que esta elección no depende de β. Por lo tanto, con $R = 2A$,

$$\|\nabla\partial^\beta\phi\|_{H^2} \leq C \frac{|\beta|!}{(|\beta|+2)^s} \left(\frac{R}{2}\right)^{|\beta|},$$

demostramos (6.43). Esto completa la demostración. $\square$

Bibliografía

[1] Albert, J. P. Concentration compactness and the stability of solitary-wave solutions to nonlocal equations. In *Applied analysis (Baton Rouge, LA, 1996)*, vol. 221 of *Contemp. Math.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 1–29.

[2] Angulo, J., Scialom, M., and Banquet, C. The regularized Benjamin-Ono and BBM equations: well-posedness and nonlinear stability. *J. Differential Equations 250*, 11 (2011), 4011–4036.

[3] Benjamin, T. B. Internal waves of permanent form in fluids of great depth. *J. Fluid Mech. 29* (1967), 559–592.

[4] Benjamin, T. B. The stability of solitary waves. *Proc. Roy. Soc. (London) Ser. A 328* (1972), 153–183.

[5] Benjamin, T. B., Bona, J. L., and Mahony, J. J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 272*, 1220 (1972), 47–78.

[6] Bergh, J., and Löfström, J. *Interpolation spaces: an introduction.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1976.

[7] Bona, J. On the stability theory of solitary waves. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A 344*, 1638 (1975), 363–374.

[8] Bona, J. L., and Tzvetkov, N. Sharp well-posedness results for the BBM equation. *Discrete Contin. Dyn. Syst. 23*, 4 (2009), 1241–1252.

[9] Cazenave, T., and Lions, P.-L. Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations. *Comm. Math. Phys. 85*, 4 (1982), 549–561.

[10] Duoandikoetxea Zuazo, J. *Análisis de Fourier.* Colección de Estudios. Universidad Autónoma de Madrid, 1990.

[11] Esfahani, A. Scattering of solutions and stability of solitary waves for the generalized BBM-ZK equation. *Commun. Math. Sci. 12*, 2 (2014), 293–315.

[12] Fonseca, G., Linares, F., and Ponce, G. The IVP for the Benjamin-Ono equation in weighted Sobolev spaces II. *J. Funct. Anal. 262*, 5 (2012), 2031–2049.

[13] Fonseca, G., and Ponce, G. The IVP for the Benjamin-Ono equation in weighted Sobolev spaces. *J. Funct. Anal. 260*, 2 (2011), 436–459.

[14] Fonseca, G., Rodríguez-Blanco, G., and Sandoval, W. Well-posedness and ill-posedness results for the regularized Benjamin-Ono equation in weighted Sobolev spaces. *Preprint* (2013). Arxiv, math.AP, 1304.6454.

[15] Hunt, R., Muckenhoupt, B., and Wheeden, R. Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform. *Trans. Amer. Math. Soc. 176* (1973), 227–251.

[16] Johnson, M. A. The transverse instability of periodic waves in Zakharov-Kuznetsov type equations. *Stud. Appl. Math. 124*, 4 (2010), 323–345.

[17] Kadomtsev, B. B., and Petviashvili, V. I. On the Stability of Solitary Waves in Weakly Dispersing Media. *Soviet Physics Doklady 15* (Dec. 1970), 539.

[18] Kalisch, H., and Bona, J. L. Models for internal waves in deep water. *Discrete Contin. Dynam. Systems 6*, 1 (2000), 1–20.

[19] Kato, T., and Ponce, G. Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations. *Comm. Pure Appl. Math. 41*, 7 (1988), 891–907.

[20] Kenig, C. E., Ponce, G., and Vega, L. Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations. *Indiana Univ. Math. J. 40*, 1 (1991), 33–69.

[21] Kenig, C. E., Ponce, G., and Vega, L. Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle. *Comm. Pure Appl. Math. 46*, 4 (1993), 527–620.

[22] Kenig, C. E., Ponce, G., and Vega, L. On the ill-posedness of some canonical dispersive equations. *Duke Math. J. 106*, 3 (2001), 617–633.

[23] Kolmogorov, A., and Fomin, S. *Introductory Real Analysis.* Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 1975.

[24] Linares, F., and Ponce, G. *Introduction to nonlinear dispersive equations.* Universitext (1979). Springer, 2009.

[25] Lions, P.-L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I. *Annales de L'Institut Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire 1*, 2 (1984), 109–145.

[26] Lions, P.-L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. II. *Annales de L'Institut Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire 1*, 4 (1984), 223–283.

[27] Lizorkin, P. I. Multipliers of Fourier integrals in the spaces $l_{p,\theta}$. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 89* (1967), 269–290.

[28] Mammeri, Y. Long time bounds for the periodic Benjamin-Ono-BBM equation. *Nonlinear Anal. 71*, 10 (2009), 5010–5021.

[29] Milanés, A. Some results about a bidimensional version of the generalized BO. *Commun. Pure Appl. Anal. 2*, 2 (2003), 233–250.

[30] Molinet, L., Saut, J. C., and Tzvetkov, N. Ill-posedness issues for the Benjamin-Ono and related equations. *SIAM J. Math. Anal. 33*, 4 (2001), 982–988 (electronic).

[31] Molinet, L., Saut, J.-C., and Tzvetkov, N. Well-posedness and ill-posedness results for the Kadomtsev-Petviashvili-I equation. *Duke Math. J. 115*, 2 (2002), 353–384.

[32] Muckenhoupt, B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. *Trans. Amer. Math. Soc. 165* (1972), 207–226.

[33] Nahas, J., and Ponce, G. On the persistent properties of solutions to semi-linear Schrödinger equation. *Comm. Partial Differential Equations 34*, 10-12 (2009), 1208–1227.

[34] Ono, H. Algebraic solitary waves in stratified fluids. *J. Phys. Soc. Japan 39*, 4 (1975), 1082–1091.

[35] Pego, R. L., and Weinstein, M. I. Asymptotic stability of solitary waves. *Comm. Math. Phys. 164*, 2 (1994), 305–349.

[36] Preciado, G., and Soriano, F. H. On the existence and analycity of solitary waves solutions to a two-dimesional Benjamin-Ono equation. To be submitted.

[37] Stein, E. M. The characterization of functions arising as potentials. *Bull. Amer. Math. Soc. 67* (1961), 102–104.

[38] Stein, E. M. *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[39] Vega, I. El problema de Cauchy asociado a una ecuación del tipo ZK-BBM. Master's thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2011.

[40] Wazwaz, A.-M. Compact and noncompact physical structures for the ZK-BBM equation. *Appl. Math. Comput. 169*, 1 (2005), 713–725.

[41] Wazwaz, A.-M. The extended tanh method for new compact and noncompact solutions for the KP-BBM and the ZK-BBM equations. *Chaos Solitons Fractals 38*, 5 (2008), 1505–1516.

[42] Zabusky, N., and Kruskal, M. Interaction of "Solitons" in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States. *Phys. Rev. Lett. 15* (Aug 1965), 240–243.