

Versión para Evaluadores

**Diseño Simultáneo de Proceso y Control. Uso de
efectos dinámicos en Ingeniería de Procesos.**

Trabajo presentada por

Hernán Alvarez

ante la
Facultad de Minas de la
Universidad Nacional de Colombia
como requisito de

Año Sabático

Escuela de Procesos y Energía

Medellín, 14 de enero de 2010

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	7
2. EQUIPOS, PROCESOS Y PLANTAS	11
2.1. Definiciones Básicas	12
2.2. Procesos en Ingeniería	12
2.3. Tareas Asociadas con los Procesos en Ingeniería	17
3. DESCRIPCIÓN DE PROCESOS EN INGENIERÍA	19
3.1. Definiciones Básicas	19
3.2. Representación de procesos: de lo simple a lo complejo	22
3.2.1. Descripción Estática, Ideal o de Referencia	23
3.2.2. Descripción No Ideal, Dinámica Lineal Sin Perturbaciones	23
3.2.3. Descripción No Ideal, Dinámica Lineal Con Perturbaciones	23
3.2.4. Descripción No Ideal, Dinámica No Lineal Con Perturbaciones	24
3.3. Mecanismos de Representación de Sistemas Dinámicos	25
3.4. Descripción Matemática Dinámica de Procesos	30
3.4.1. Características Dinámicas de un Proceso	31
3.4.2. Modelo de Proceso	31
3.4.3. Clasificación de los Modelos	33
3.4.4. Modelado Dinámico de Procesos	35
3.4.5. Modelado Semifísico de Base Fenomenológica	36
4. DISEÑO DE PROCESOS	53
4.1. El Diseño en Ingeniería	53
4.2. Optimización	55
4.3. Diseño con Optimización Implícita vs. Diseño con Optimización Explícita	57

4.4. Pasos en el Diseño de Procesos	60
4.5. Trazabilidad del Diseño en Ingeniería	62
5. CONTROL DE PROCESOS	67
5.1. Definiciones Básicas	67
5.2. Incentivos para el Control de Procesos	69
5.3. Sistemas de Control y su Clasificación	71
5.4. Control Clásico vs. Control Moderno	74
5.5. Representación de procesos para su control	77
5.5.1. Linealización Exacta o por Realimentación	78
5.5.2. Linealización Aproximada por Expansión en Series	79
5.5.3. Transformada de Laplace y Función de Transferencia	83
6. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL PARA PROCESOS	95
6.1. Definiciones Básicas	95
6.2. Tareas del Diseño de Sistemas de Control	96
6.3. Pasos del Diseño de Sistemas de Control	97
6.3.1. Caracterizar el comportamiento del Proceso a controlar	97
6.3.2. Fijar las especificaciones del Sistema de Control a diseñar	98
6.3.3. Determinar la configuración del Sistema de Control a usar	103
6.3.4. Ajustar los parámetros del Sistema de Control para lograr el desempeño deseado	106
7. DISEÑO SIMULTÁNEO DEL PROCESO Y SU CONTROL. Una propuesta.	113
7.1. Definiciones Básicas	114
7.2. Concepción del Diseño Simultáneo del Proceso y su Control (DSPyC)	115
7.3. Una Ruta para el Diseño Simultáneo de Proceso y Control	117
7.3.1. Observabilidad como Criterio de Selección para la Sensórica	117
7.3.2. Reversibilidad como Criterio para Seleccionar los Actuadores	122
7.3.3. Controlabilidad como Criterio para el Pareamiento de Variables	124
7.3.4. Estabilidad como Indicador de Factibilidad del Diseño	133
7.3.5. Desempeño como Criterio para el Ajuste Paramétrico de Equipo y Control	133
7.4. El Problema de Optimización en el DSPyC	134
7.4.1. Requerimientos del Proceso y del Sistema de Control	135
7.4.2. El Funcional de Costo (FC)	136

7.4.3. Las Restricciones de la Optimización	137
7.4.4. El Procedimiento de Optimización	138
7.5. DSPyC de Procesos por Lotes (PpL). Una Mención.	139
7.5.1. Región Controlable	140
7.5.2. Región de Robustez	140
7.5.3. El Concepto de Invarianza	141
7.5.4. Estabilidad de un PpL, Controlabilidad, Invarianza y Robustez	141
8. EJEMPLO DE APLICACIÓN. Reactor Continuo en Tanque Agitado (CSTR)	143
8.1. Diseño de un CSTR	144
8.1.1. DSPyC: Paso 1	144
8.1.2. DSPyC: Paso 2	161
8.1.3. DSPyC: Paso 3	166
8.1.4. DSPyC: Paso 4	166
8.1.5. DSPyC: Paso 5	171
8.1.6. DSPyC: Paso 6	172
8.1.7. DSPyC: Paso 7	176
8.1.8. DSPyC: Paso 8	176
8.1.9. DSPyC: Paso 9	178
8.1.10. DSPyC: Paso 10	179
8.1.11. DSPyC: Paso 11	188
8.1.12. DSPyC: Paso 12	196
8.2. Conclusiones del Ejemplo	199
BIBLIOGRAFÍA	201
ANEXO A. Factores de Conversión	209
ANEXO B. Nomenclatura sugerida	213
ANEXO C. Listado Alfabético de Definiciones	215

Índice de figuras

2.1. Interacción entre Sustancia y Equipo (o Planta) para generar un Proceso.	14
2.2. La Automática como área mayor y su relación con variables del Proceso, el Equipo y la Planta.	16
2.3. Acciones que se realizan sobre Proceso, Equipo o Planta desde la Automátización y el Control.	16
3.1. Variables que intervienen en la representación gráfica del Proceso como un Sistema.	20
3.2. Diagrama de Bloques (DB) del tanque de tratamiento de Salmuera del ejemplo.	26
3.3. Diagrama de Flujo de Proceso (DFP) del tanque de tratamiento del ejemplo.	26
3.4. Diagrama de Flujo de Información (DFI) del tanque de tratamiento del ejemplo.	29
3.5. Otro DFI para el tanque de tratamiento de salmuera, esta vez en Funciones de Transferencia.	29
3.6. Diagrama de Instrumentación y Tubería (P&ID) del tanque de tratamiento del ejemplo.	30
4.1. Espacios involucrados en una optimización.	57
4.2. Concurrencia de las tareas de Análisis, Síntesis y Optimización en el diseño de un Equipo, Proceso o Planta y su Sistema de Control.	59
4.3. Diferentes tipos de diseño.	60
4.4. Niveles y pasos en el diseño de procesos.	64
5.1. Sistema de Proceso con medición y opciones de control prealimentado y retroalimentado.	68
5.2. Diversos niveles en los que actúa la Automática en el Proceso.	70
5.3. Representación general de un lazo cerrado de control.	72
5.4. Representación de posibles Lazos Abiertos de Control: a) con acción manual desde el Controlador y b) prealimentado.	72
5.5. Estructura de un lazo de control combinado.	74
5.6. Diagrama de Flujo de Proceso para un tanque cónico.	78
5.7. Diagrama de Flujo de Información para el ejemplo del tanque cónico.	79
5.8. Representación geométrica del tanque cónico del ejemplo.	82
5.9. Diagrama de Flujo de Información para la dinámica de Nivel del CSTR.	88

5.10. Diagrama de Bloques para la dinámica de Nivel.	89
5.11. Principio de superposición en un modelo linealizado.	89
5.12. Diagrama del sistema en lazo cerrado con un controlador proporcional.	92
6.1. Diagrama de bloques en lazo cerrado.	101
7.1. Algoritmo general propuesto para el Diseño Simultáneo de Proceso y Control.	118
7.2. Dos tipos de reversibilidad: <i>a</i>) Reversibilidad fuerte y <i>b</i>) Reversibilidad débil.	123
7.3. Relación entre la región de controlabilidad $C(\mathbf{x}^*)$ de un sistema y la región de estabilidad $\Omega_j(\mathbf{x}^*)$ de tres posibles controladores.	140
7.4. “Túnel” de estabilidad de un Proceso por Lotes (PpL) y tres conjuntos Ω_i a tiempo fijo en el lote.	142
8.1. Diagrama de Flujo de Proceso para el CSTR.	145
8.2. Diagrama de Bloques mostrando los dos Sistemas de Proceso para el CSTR y su interacción.	145
8.3. Diagrama de bloques en lazo cerrado del CSTR del ejemplo.	180
8.4. Límites para la ganancia última del lazo de control de concentración.	192
8.5. Primera ganancia última del lazo de control de Temperatura.	193
8.6. Segunda ganancia última del lazo de control de Temperatura.	193
8.7. Acercamiento a la segunda ganancia del lazo de control de Temperatura.	194
8.8. Superficie de respuesta del Funcional de Costo en función de F y D	195
8.9. Respuesta de la concentración de reactivo en el reactor.	197
8.10. Comportamiento del EFC del controlador de Concentración.	197
8.11. Respuesta de la Temperatura en el reactor.	198
8.12. Comportamiento del EFC del controlador de Temperatura.	198

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de Año Sabático tiene como Objetivo General completar con rigor analítico, a partir de los desarrollos publicados y aportes propios, una metodología para la inclusión y uso del concepto de “Dinámicas de un Proceso” en las etapas de Diseño de Equipos de Proceso y Diseño de Sistema de Control. A esto se le denomina Integración Diseño-Control, Diseño Integrado o Diseño Simultáneo del Proceso y su Control (DSPyC). Se pretende mostrar la utilidad de tal inclusión y tal uso, tanto para el diseño del Equipo, como para la enseñanza de la Ingeniería de Procesos. Tal Objetivo General se cumple proponiendo, desde la revisión detallada de la literatura, definiciones unificadoras para los conceptos: dinámicas de un proceso y su jerarquía, controlabilidad y alcanzabilidad en el espacio de estados, punto de operación y régimen de operación en el espacio de estados. Se describe de manera detallada un procedimiento de diseño de equipo de proceso y uno de diseño de sistemas de control, ambos reconocidos en la literatura como procedimientos válidos para dichas tareas. Luego se introducen pasos adicionales a los procedimientos aceptados de diseño (de equipo y de sistema de control), que incluyen el uso de modelos dinámicos de proceso en esas tareas. Eso permite conformar, con elementos de los procedimientos adicionados, una propuesta de diseño de Equipos de Proceso y diseño de su Sistema de Control (DSPyC), y probarla en un equipo con reacción química (reactor continuo en tanque agitado - CSTR).

El material contenido en este trabajo no es totalmente del autor. Buena parte son ideas, desarrollos y métodos tomados de la literatura existente, especialmente de trabajos consolidados en los últimos 15 años, tal y como lo presentan algunos libros de texto modernos en Ingeniería de Procesos e Ingeniería de Control. Sin embargo, hay un aporte importante de desarrollos logrados a través de tres Tesis de Maestría y dos de Doctorado, dirigidas por el Autor entre 2003 y 2009. Por su naturaleza e intención, este texto tiene muchas intersecciones con otras áreas de la Ingeniería de Procesos y la Teoría de Control, incluyendo la optimización como el eje central de las tareas asociadas con el diseño en ingeniería. Aunque ni el diseño ni la optimización son tratadas en detalle, aquí se presentan con una visión particular que da guías al lector para un estudio más detenido de las mismas en libros especializados. Respecto a la audiencia, este libro está principalmente orientado a estudiantes de pregrado en cualquiera de las áreas de la Ingeniería de Procesos, aunque también tiene el nivel suficiente para cualquier curso de posgrado que trate el tema del diseño en procesos. Se planteó autocontenido en la parte básica, aunque no se expliquen en detalle todos los aspectos, por lo que el lector deberá revisar en profundidad los temas básicos, con la matematización propia de tales temas, en otros libros de texto. Precisamente, los aspectos fundamentales se presentan como una introducción simplificada pero completa, que da una guía para afrontar las lecturas necesarias a fin de entender el material posterior de cada capítulo. El material se restringe a Procesos cuya representación pueda hacerse a través de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y algebraicas (sistema de dimensión finita). Por tanto no se tratan sistemas infinito dimensionales representados por ecuaciones diferenciales parciales. En consecuencia, todos los Procesos discutidos aquí se consideran como un número finito de volúmenes perfectamente mezclados, es decir, de parámetros concentrados.

Este trabajo resulta importante tanto desde lo científico como desde lo docente. Desde lo científico, ya que la propuesta integra resultados recientes reportados en la literatura, resultados presentados en Tesis de Posgrado desarrolladas en el ámbito del Grupo de Automática (GAUNAL) y algunos nuevos aportes, con el conocimiento consolidado en las áreas de modelamiento y diseño de equipos de proceso, así como en las de análisis y diseño de sistemas de control. Adicionalmente, el trabajo utiliza Modelos Semifísicos de Base Fenomenológica (MSBF) y parámetros concentrados en el análisis de procesos para el diseño de equipos y de su sistema de control. Desde lo pedagógico, porque los procedimientos reportados en la propuesta muestran una forma de incluir el concepto “Dinámicas de un Proceso” en los cursos del pregrado y posgrado: Ingeniería de Procesos y Control de Procesos; Modelamiento de Sistemas Dinámicos y Control de Procesos Químicos. Además, el tratamiento que se da al equipo de proceso usado como ejemplo, permite su uso como elemento didáctico en los cursos arriba mencionados y en otros de Operaciones Unitarias, con lo cual se incluye de manera natural el concepto de “Dinámicas de un Proceso” en las tareas de diseño de procesos químicos.

La motivación para un trabajo como este surgió de la necesidad evidente de incluir las “Dinámicas del Proceso” como elemento fundamental en las tareas de diseño en Ingeniería de Procesos. Es grande el número de herramientas computacionales que ya ofrecen asistencia para el diseño (CAD - Computer Aided Design), sin que los estudiantes cuenten con soporte escrito que justifique tales usos. Además, la utilización de esas herramientas como cajas negras, no hace más que ocultar un conocimiento de base que resulta fundamental para un buen ejercicio profesional e investigativo del egresado. Por lo tanto, es perentoria la inclusión del concepto de “Dinámicas de un Proceso” como fundamento del análisis y soporte a las tareas de diseño de procesos. En tal sentido, es conveniente recordar que la separación que la literatura (y por tanto los cursos en ingeniería), han hecho de los comportamientos estáticos y dinámicos de un proceso a la hora de elaborar las tareas de diseño, generó un desarrollo independiente de las áreas de Diseño de Equipo de Proceso (DEP) y Diseño de Sistemas de Control (DSC). El análisis de procesos para realizar las tareas de DEP y DSC se ha desarrollado siempre desde una representación del proceso: modelo. Tal modelo debe ser lo más apegado a la realidad, pero también lo más simple posible para que se facilite dicho análisis. Esas condiciones generaron en décadas pasadas diversos tipos de representaciones de proceso, en su mayoría demasiado simplificadas como para garantizar un análisis con mínima incertidumbre. El pre-condicionamiento hacía el uso de un modelo sencillo llevó primero a la proliferación de modelos estáticos y lineales. Luego aparecieron los modelos no lineales, pero las versiones estáticas de tales modelos siguieron siendo las más utilizadas para el DEP. Dicha preferencia no generó malestar entre los analistas del comportamiento de los procesos, en lo fundamental porque sólo había un Punto de Operación (PO) en el que permanecía el proceso: el PO nominal o de diseño. Con esta condición, no era necesario contar con una formulación dinámica para el modelo, debido a que la operación estaba restringida a un entorno normalmente pequeño alrededor del PO. Además, el concepto de Régimen de Operación (RO) resultaba secundario, puesto que también se diseñaba para que el RO no cambiara. Este criterio de diseño asumía que la única fuente de cambio del RO era el cambio del PO, que a su vez ocurría a voluntad del diseñador del equipo y no por presiones del mercado, como hoy.

Desde hace más de una década la investigación en Diseño Simultáneo del Proceso y su Control (DSPyC) empezó a entregar herramientas y procedimientos para abordar el DEP y el DSC de una manera sistemática y coordinada. Todo desde la inclusión de los efectos dinámicos del proceso (dinámicas del proceso) en el DEP, pues ya tales efectos dinámicos eran parte fundamental del DSC. Es así como en años recientes se han desarrollado algunos procedimientos sistemáticos para el diseño integrado de procesos. Sin embargo, estos procedimientos presentan limitaciones como: *i*) abordan solamente modelos de proceso en estado estable o modelos dinámicos simples (lineales), *ii*) no incluyen el análisis del efecto de perturbaciones variables en el tiempo, *iii*) no involucran la selección conjunta del mejor diseño del proceso y la mejor estructura de control, *iv*) se desarrollan en el dominio de la frecuencia o en dominio de Laplace, pocas veces en el dominio del tiempo, y *v*) cuantifican la “Controlabilidad” del proceso únicamente con base en el efecto que tienen las entradas sobre las salidas, desconociendo el efecto sobre los estados del proceso.

Debe mencionarse que desde el punto de vista económico, integrar ambos diseños (DEP y DSC), resulta atractivo puesto que las metodologías de diseño tradicional, al realizar el diseño y el control del proceso de manera secuencial y aislada, muchas veces obligan modificaciones posteriores sobre los equipos de proceso,

de modo que esos equipos puedan ser controlados. Esas modificaciones resultan costosas y generan retrasos considerables en la entrada definitiva en operación de un equipo. En cambio, al integrar los aspectos del DEP y del DSC desde las etapas iniciales, las modificaciones necesarias para garantizar la controlabilidad del equipo tendrán un alto impacto sobre el diseño final, con la ventaja de requerir muy baja inversión de recursos.

El material que se presenta, está organizado como sigue. En el Capítulo 2 se presenta toda la discusión sobre Equipos, Procesos y Plantas, con el fin de aclarar el objeto de estudio de la Ingeniería de Procesos y de la Ingeniería de Control. Luego vienen cuatro capítulos que pueden agruparse en dos partes: la primera dedicada a los Procesos y la segunda dedicada a los Sistemas de Control. En el Capítulo 3 se abordan todos los aspectos asociados con la Descripción de Procesos en Ingeniería, con el fin de fundamentar toda la representación de procesos y arribar al modelado de procesos como un área madura en la Ingeniería. Se propone y discute en detalle una metodología para la obtención de Modelos Semifísicos de Base Fenomenológica (MSBF) para Procesos. De este modo, en el Capítulo 4 se discute el Diseño de Procesos como tarea básica de la Ingeniería, mostrando el papel fundamental que cumple la descripción del proceso (Modelado) y la Optimización. Los Capítulos 5 y 6 son análogos a los Capítulos 3 y 4, pero desde el punto de vista del Control de Procesos. El Capítulo 5 expone todos los aspectos fundamentales del Control de Procesos, permitiendo que el Capítulo 6 presente el Diseño de Sistemas de Control para Procesos de manera global. Con todo este panorama ya cubierto (las dos tareas de manera separada), se pasa al Diseño Simultáneo del Proceso y su Control (DSPyC), que constituye el tema central de este trabajo. Allí se expone y discute en detalle una metodología para el DSPyC. Se finaliza el libro con un ejemplo de aplicación de la metodología propuesta al Diseño de un Reactor Continuo en Tanque Agitado (CSTR por sus siglas en inglés), con lo cual se ilustra perfectamente la capacidad de la metodología y sus ventajas frente al método tradicional de diseño secuencial de Proceso y su Sistema de Control. Se espera que este libro sirva como guía fundamental para afrontar el tema del DSPyC control, tanto desde la investigación como desde la docencia. Se sugiere al lector consultar el listado alfabético de Definiciones del Anexo C, a medida que se encuentren alusiones a un término en particular, con el fin de facilitar la comprensión de lo discutido.

Este trabajo es el fruto de muchas discusiones sobre el tema del Diseño Simultáneo de un Proceso y su Sistema de Control, así como sobre los temas colaterales al mismo. Tales dicusiones se han dado tanto con colegas docentes (Lina Gómez, Rosa E. Correa, Rosalba Lamanna, Pastora Vega, Jaime Aguirre, Héctor Botero y Jairo Espinosa), como con mis estudiantes de posgrado (Maestría y Doctorado) que han trabajado en esos temas: Sonia Morales, Paula Atehortúa, Silvia Ochoa, Luisa P. Gutiérrez, Luz A. Alvarez, Alejandro Muñoz, Mauricio Rincón, Juan C. Calderón y Carlos M. Sierra). A ellas y ellos mi eterno agradecimiento por brindarme el espacio de la charla académica para evidenciar que tras el tema aún faltan muchas cosas por hacer, pero que todos estos años de persistencia en una sola temática de investigación y trabajo no han sido años perdidos. Obviamente debo agradecer a todos mis compañeros de la Escuela de Procesos y Energía, que acomodaron sus cargas académicas durante 2009 para que yo pudiera disfrutar de este Año Sabático.

Capítulo 2

EQUIPOS, PROCESOS Y PLANTAS

Durante todo este trabajo se hará referencia a los Equipos, los Procesos y las Planta (EPP) de producción como una única entidad (Proceso). Aunque como se verá en las definiciones básicas, los tres términos hacen referencia a cosas diferentes, su tratamiento puede unificarse cuando se habla de Diseño, máxime con la idea de una propuesta para la integración del diseño del EPP con su Sistema de Control. El concepto de Proceso, de naturaleza más abstracta que los conceptos de Equipo y Planta, sin embargo es el tema central puesto que condiciona el diseño de Equipos y de Plantas. Si se analiza el papel de cada término, puede decirse que los Equipos están concebidos para realizar un Proceso o parte de este, mientras que las Plantas no son más que la reunión de varios procesos con el fin de obtener productos funcionales o intermedios. Es pues usual en la literatura, y este trabajo no será la excepción, referirse al Proceso a secas cuando se habla de las tareas típicas de la ingeniería aplicada a EPP. Sin embargo, en los lugares que se deba hacer la extensión a los conceptos de Equipo y Planta, se harán las aclaraciones necesarias para que el cubrimiento sea total.

Los procesos de naturaleza química, física o biológica, han sido el centro de la ingeniería moderna casi desde sus inicios en el siglo XVII [Rae and Volti, 1993]. Sin embargo, sólo hasta mediados del siglo XX empiezan a aparecer trabajos que enuncian una “Ingeniería de Procesos” como área emergente. Desde esa nueva visión, los procesos empiezan a indagarse por su naturaleza común y no por sus particularidades. Este cambio de visión, que deja de mirar a los procesos como plantas de producción de productos específicos, busca una estructura común en todos los procesos que permita su estudio general. Antes de eso, los trabajos reportados se enfocaban a la descripción detallada de cada proceso, de acuerdo con el producto que se elaboraba allí. Esto generaba la sensación de una alta diversidad en los procesos y por lo tanto, dificultad en una aproximación a su estudio sistemático y general. Fue sólo hasta que aparecieron los conceptos de cibernética [Wiener, 1948] y teoría general de sistemas [Bertalanffy, 1968], que se generó la inquietud de enmarcar a los procesos dentro de una descripción conceptual y teórica unificada. Los resultados de esta nueva visión fueron muy útiles y persisten en la Ingeniería de Procesos de hoy. Muchos de los conceptos de la cibernética y de la teoría general de sistemas vinieron a ser aplicables al análisis y síntesis de procesos. Eso dio como resultado que la ingeniería de procesos se convirtiera en un área formalizada y sólida [Aguirre, 2004]. A pesar de todo esto, los avances en el control del proceso (un área colateral), nunca pudieron integrarse de manera definitiva con la ingeniería de procesos. Justamente, el tema de este trabajo es presentar una aproximación exitosa para tal propósito integrador. Pero primero, algunas definiciones que permitirán formalizar mejor la propuesta de diseño integrado de procesos o Diseño Simultáneo del Proceso y su Control (DSPyC), contenida en este trabajo.

2.1. Definiciones Básicas

Esta sección aparece en el texto al inicio de varios capítulos, con el fin de permitir al lector comprender completamente las discusiones posteriores. Sólo se incluyen las definiciones generales del tema del capítulo, dejando las definiciones específicas de temas puntuales directamente en la sección que corresponde al tema en cuestión.

Definición 2.1 *Sistema.* *Conjunto de reglas, principios, métodos, técnicas o cosas, ordenadas con arreglo a una ley (Estructura) y para una finalidad determinada o función común (salida del Sistema), que resulta de la interacción parcial (Parámetros funcionales) de dichos elementos.*

Definición 2.2 *Proceso (primera definición).* *Grupo de operaciones o tratamientos de materia, energía o información, organizado de acuerdo con un arreglo dado (Estructura), con el fin de obtener un producto de características específicas (salida del Proceso), que resulta de la interacción (Parámetros funcionales) de las partes del proceso.*

Muchas veces los términos Sistema y Proceso se usan indiscriminadamente como referentes al mismo objeto. Aunque tal igualdad entre los términos no existe, la fuerza de la costumbre y el contexto donde se usa el término, han hecho que no aparezca una confusión significativa cuando los dos términos se conmutan. En este texto, sólo se hará diferencia entre los dos términos cuando el contexto de discusión así lo amerite. Tras estas dos definiciones, siempre surge una pregunta interesante de discutir: ¿Qué se puede decir del nivel de abstracción de Proceso y Sistema? Obviamente, el Proceso tiene más asidero a la realidad que el Sistema. De ahí que la definición de Sistema permita agrupar literalmente cualquier “cosa”, mientras que la definición de Proceso se limita a operaciones o tratamientos de tres insumos: materia, energía o información¹. El Sistema no es más que una construcción mental, siempre abstracta, que intenta representar a un proceso real o a una parte de él. El proceso o la parte pueden ser abstractos, especialmente en procesos sobre la información. Otra diferencia, que acentúa el grado de abstracción mayor de Sistema, es que la aplicación iterativa del concepto Sistema es posible, mientras que no se puede garantizar lo mismo al aplicar iterativamente el concepto de Proceso. Ese grado de abstracción que entraña el concepto de Sistema, permite que en un proceso se puedan definir múltiples sistemas tomando partes, equipos, elementos o incluso secciones de elementos dentro del proceso, de acuerdo a un interés arbitrario. Se verifica por lo tanto la similitud entre los conceptos Sistema y Proceso, pero también queda claro que el concepto Sistema posee más nivel de abstracción que el concepto Proceso. Por eso, debería utilizarse la designación de Sistema siempre que se analiza cualquier Proceso, de modo que las divisiones que se tomen en las partes del Proceso para su análisis no riñan con la división ingenieril de los elementos (equipos) del proceso.

2.2. Procesos en Ingeniería

Definición 2.3 *Equipo.* *Cualquier artefacto o colección de piezas, instrumentos y aparatos organizados para un fin determinado.*

Definición 2.4 *Planta de producción industrial (o simplemente Planta).* *Conjunto de equipos instalados con el fin de producir un bien específico. En la Planta se reconocen grupos de equipos que constituyen Procesos. A su vez, un agrupamiento de Procesos se denomina Línea de Producción.*

Como se ve, una planta de producción está compuesta por uno o más procesos (línea de producción) sobre la materia prima (considérese también como materia prima la información disponible desde medidores y

¹El concepto de información en un Proceso es relativamente nuevo (menos de 70 años), puesto que antes de la década del 40 del siglo XX, los únicos insumos que se consideraban tratables en una planta industrial eran la materia y la energía.

desde conocimiento previo de los ingenieros)². El objetivo de cualquier planta industrial es la producción de bienes: intermedios si son materia prima para otras empresas o finales si pueden ser directamente usados por el consumidor final. Para producir esos bienes, la materia prima sufre múltiples modificaciones, unas de carácter físico, otras de carácter químico e incluso algunas de carácter biológico, que pueden denominarse Operaciones Unitarias.

Definición 2.5 Operación Unitaria. *Es cada una de las etapas básicas de un Proceso, en las cuales se incorporan materiales o insumos al producto a través de acciones determinadas. A pesar de ser una etapa del Proceso, es posible que para realizar una operación unitaria se requiera de uno o más Equipos del Proceso.*

El concepto de Operación Unitaria fue descubierto por George Edward Davis, quien lo utilizó para organizar la temática de la Ingeniería Química en un grupo de 12 conferencias que dictó en la Escuela de Tecnología de Manchester (Manchester School of Technology, UK) en 1887. Coincidentalmente, en 1888 nació también el primer programa de Ingeniería Química en el Instituto de Tecnología de Massachussets (Massachussets Institute of Technology MIT, USA) [Chemical Heritage Foundations, 2009]. Las conferencias de Davis dieron luego origen al primer manual de Ingeniería Química: *G.E. David. A handbook of chemical engineering: illustrated with working examples and numerous drawings from actual installations. Edited by Davis Bross, 1901*. Hubo una edición mejorada en 1904. En tal trabajo, en vez de seguir los lineamientos de los libros previos sobre química industrial, que se dedicaban a un proceso en particular, Davis organizó el texto por las operaciones básicas comunes a muchas industrias. Sin embargo, Davis no formalizó el concepto. Fue sólo hasta 1915 que el profesor Arthur D. Little, en un reporte a la Corporación del ya mencionado MIT, formaliza el concepto. Dice Little textualmente en su reporte: “Cualquier proceso químico, sin importar la escala en la que sea llevado a cabo, puede ser resuelto a través de una serie de lo que podría denominarse ‘acciones unitarias’, como pulverización, mezclado, calentamiento, cocción, absorción, condensación, lixiviación, precipitación, cristalización, filtración, disolución, electrólisis y otras más. El número de estas operaciones unitarias básicas no es muy grande y relativamente sólo unas cuantas de ellas intervienen en un proceso determinado”. [Little, A.D. citado en Chilton, 1951].

Con la definición de Operación Unitaria se dio origen a una clasificación más compacta y útil de las tareas que pueden formar un Proceso. De otro lado, los conceptos de Equipo, Proceso y Planta, permitieron armar una discusión coherente sobre la operación de las fábricas de productos químicos. Sin embargo, cuando se habla del diseño en la Ingeniería Química, el objeto de estudio no ha sido unificado. Esta situación dificulta la valoración de los procedimientos de diseño y su matematización con el fin de lograr procedimientos unificados e integrables con otros tipos de diseños (de Sistemas de Control por ejemplo). Por esta razón, en el presente trabajo se hace una discusión respecto de este punto, buscando entender la relación entre los conceptos: Proceso, Sustancia, Equipo y Planta, que resulta útil para discutir la tarea de Diseño.

El Proceso, a pesar de verse como el Objeto Real³ de todo el trabajo en ingeniería, resulta una combinación abstracta de Operaciones Unitarias, que sólo toma lugar cuando existe un Equipo o Planta y una Sustancia o materia. A su vez, cada Operación Unitaria se lleva a cabo en uno o más Equipos de proceso. Dichos Equipos se agrupan para formar líneas de producción que son las que constituyen una Planta de proceso o fábrica. Con esto en mente, es evidente que Equipos y Plantas no son más que los elementos tangible en los que se realiza el concepto Proceso y que las Operaciones Unitarias son un fraccionamiento del Proceso que puede o no coincidir con la partición de la Planta por Equipos. El Equipo se ve como la baja escala mientras que la Planta se ve como la gran escala. Si se piensa en las diversas opciones, es posible tener en el caso mínimo una Planta con un sólo Proceso llevado a cado en un único Equipo. La contraparte es una Planta con múltiples Procesos, cada uno de los cuales se lleva a cabo en múltiples Equipos. Nótese el papel que desempeña la Sustancia o materia en todo el asunto: sin Sustancia el Equipo o la Planta no son más que un

²En este trabajo, la alusión al procesamiento de información es justamente en este sentido. No se considera la información económica o administrativa de la planta.

³Los diferentes Objetos del trabajo intelectual son: Objeto Real, Objeto Teórico, Objeto Conceptual y Objeto Empírico o Práctico.

conjunto de elementos mecánicos con varios usos potenciales. Es justamente cuando Sustancia y Equipo (o Planta) interactúan que se realiza el Proceso, como se ve en la Figura 2.1, ilustrando la posible interacción de varias opciones de Equipo o Planta con varias opciones de Sustancia. Por lo anterior, se da a continuación una segunda definición de Proceso, que resulta complementaria a la primera, resultando de gran utilidad para todo el tratamiento que se da en este texto a las tareas de diseño sobre el proceso.

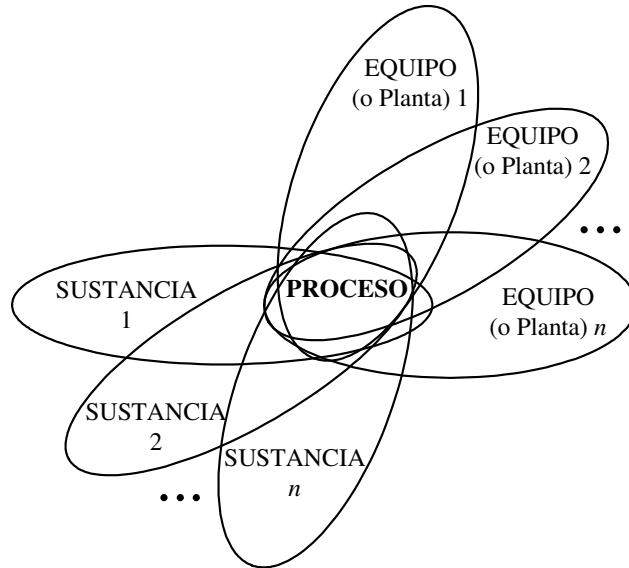


Figura 2.1: Interacción entre Sustancia y Equipo (o Planta) para generar un Proceso.

Definición 2.6 Proceso (definición complementaria). Proceso es el resultado de la interacción Equipo o Planta con la Sustancia que se trata. De manera general, dicha Sustancia puede ser masa, energía o información.

Tras esta definición, resulta evidente que el Proceso tiene un conjunto de variables \mathbf{z} que lo caracterizan. Tales variables deben ajustarse a través de los Sistemas de Control para garantizar el objetivo final del Proceso: obtener un producto con características dentro de un intervalo considerado como aceptable. Mas adelante se definen de manera detallada Parámetro y Variable. Por ahora, baste con aclarar que las Variables \mathbf{z} pueden volverse Parámetros \mathbf{p} para desarrollar las tareas de Diseño y que las variables que no se parametrizan se deben fijar como valores deseados (puntos de ajuste \mathbf{z}_{SP}) o incluso constantes para el Proceso, el Equipo o la Planta. El grado de abstracción del Proceso se evidencia cuando se compara la manera como se diseña el Proceso con la forma en la que se diseñan el Equipo o la Planta. El Proceso se diseña sin tener un Equipo o Planta definidos, esta es la Síntesis de Procesos. El Proceso, como conjunto de Operaciones Unitarias, resulta abstracto durante toda la Síntesis del mismo, Síntesis que no es más que la unión de Operaciones Unitarias en un Diagrama de Flujo en Bloques. Luego, tal Proceso se concreta cuando se procede a diseñar Equipos o Plantas que permitan la realización de la secuencia de Operaciones Unitarias que forman el Proceso. Por ejemplo, la secuencia de Operaciones Unitarias: Calentamiento + Evaporación + Condensación, son un resultado de la Síntesis para un Proceso de separación de una mezcla solvente volátil + soluto no volátil. Esta "idea" se vuelve un Proceso real, por ejemplo, si el calentamiento y evaporación se hacen en un tanque dotado de una calandria, que se llenará con vapor de agua que al condensar transfiere el calor necesario para el calentamiento y la evaporación del solvente. Además, que los vapores de la mezcla así producidos, se condensen en un intercambiador de tubos y coraza, con el vapor circulando por los tubos y agua fría de una torre de enfriamiento por la coraza. Como se evidencia, durante la Síntesis e incluso al final de

esta tarea, el Proceso como idea sólo tiene variables propias de las Operaciones Unitarias que lo componen. Esas variables son los puntos de ajuste o valores deseados de los estados del Proceso, que por lo general en Procesos Químicos y Biológicos son variables de naturaleza continua (incluida la biomasa medida como masa de células y no como número de células). Tales valores actúan como requisitos para la Síntesis y luego son parte de las variables del Proceso susceptibles de ser ajustadas para optimizar su operación o incluso para ajustarse a un cierto Equipo o Planta interactuando con la Sustancia de interés.

Asumiendo que se está en la etapa de Diseño del Equipo o Planta, con una Sustancia de interés ya fija y un Proceso ya sintetizado, sólo se tendrán parámetros de diseño: para el Equipo o Planta y para el Sistema de Control. Como el Proceso real resulta de la interacción entre Equipo o Planta y Sustancia, es obvio que el vector de parámetros que describe tal confluencia tienen tres partes: *i*) parámetros asociados con el Equipo o Planta \mathbf{p}_{E_P} , *ii*) parámetros asociados con la Sustancia \mathbf{p}_S y *iii*) parámetros que aparecen sólo cuando el Equipo o Planta interactúa con la Sustancia, denominados en adelante parámetros del Proceso \mathbf{p}_{Pr} . Los parámetros del Equipo o Planta \mathbf{p}_{E_P} son todos aquellos parámetros que se obtienen en la etapa de diseño, que resultan mayoritariamente geométricos: diámetro, volumen, áreas de intercambio, espesor de pared, diámetro del agitador, densidad y capacidad calorífica de la pared, etc. Los parámetros de la Sustancias \mathbf{p}_S son los que identifican las sustancias en forma individual y colectiva (Mezcla). Tradicionalmente, se han clasificado como parámetros físico-químicos: densidad ρ , viscosidad μ , capacidad calorífica C_P o C_V , conductividad térmica k , energía de activación E_a , factor de frecuencia de colisiones k_0 , entalpía o calor de reacción ΔH_{Rx} . Finalmente, son ejemplos de parámetros del Proceso (o de interacción) \mathbf{p}_{Pr} los siguientes: coeficiente global de transferencia de calor o masa (U , K_g), flujos de entrada ó alimentación, concentraciones iniciales de carga o alimentación, temperatura de alimento, velocidad del agitador, coeficientes de apertura de válvula C_V , volumen de reactivos, etc. De este modo, cuando se enfrenta la tarea de Diseño del Equipo o Planta, los \mathbf{p}_{Pr} actúan como la restricción mientras que los \mathbf{p}_S son datos. Los \mathbf{p}_{E_P} son los grados de libertad para la optimización que dará el diseño final del Equipo o Planta.

Debe resaltarse en esta discusión, que las variables características de un Equipo o Planta deben tomar valores durante su diseño (parámetros de diseño) y durante su operación (variables de operación) en un intervalo dado para que se pueda considerar que el diseño y operación del Equipo o la Planta son exitosas. Por ejemplo, un Proceso se puede realizar de manera correcta en un Equipo o Planta ineficientes energéticamente, pero lo deseable es que parámetros de diseño y variables de operación estén en valores correctos para garantizar que el Proceso se realice en un Equipo o Planta eficientes.

Con la clasificación anterior se pueden discutir los roles del Equipo y la Planta en la realización del Proceso. Si se asocian ahora las tareas típicas de la Automática como área mayor: Instrumentación, Automatización y Control, resulta evidente que las variables propias del Equipo \mathbf{z}_{P_Eq} y de la Planta \mathbf{z}_{P_Pl} , son las que se automatizan, mientras que las variables del Proceso \mathbf{z}_{Pr} son las que se controlan. Brevemente puede decirse que la Instrumentación se encarga de dotar de instrumentos para la medición y la acción al Equipo o la Planta y por lo tanto al Proceso que en ellos se realiza. La Automatización por su parte, tiene como finalidad convertir en automático (sin intervención humana) acciones repetitivas o de vigilancia de puntos extremos. Finalmente, el Control se encarga de mantener una variable en un valor deseado (regulación) o hacer que una variable siga una trayectoria de valores dados (seguimiento). Para la mayoría de los casos, aunque hay excepciones, puede decirse que la Automatización opera sobre variables o modos discretos (conteo de objetos o eventos, secuenciación de acciones o eventos, detección de finales de tarea o recorrido, alarmas por valores extremos de variables continuas o discretas, etc.), mientras que el control se encarga de variables continuas (regulación o seguimiento). En la Figura 2.2 se presenta la Automática como área mayor con sus tres tareas asociadas, en cuyas intersecciones se encuentran las labores realizadas sobre los procesos.

Definición 2.7 Automática. *La Automática es el estudio, diseño y aplicación de la Instrumentación, el Control y la Automatización para lograr comportamientos especificados en procesos productivos.*

Ya con esta clasificación y clarificación de tareas, se puede discutir la utilización corriente del término automatizar. Es frecuente que los Ingenieros de Proceso hablen de automatizar un proceso para referirse a

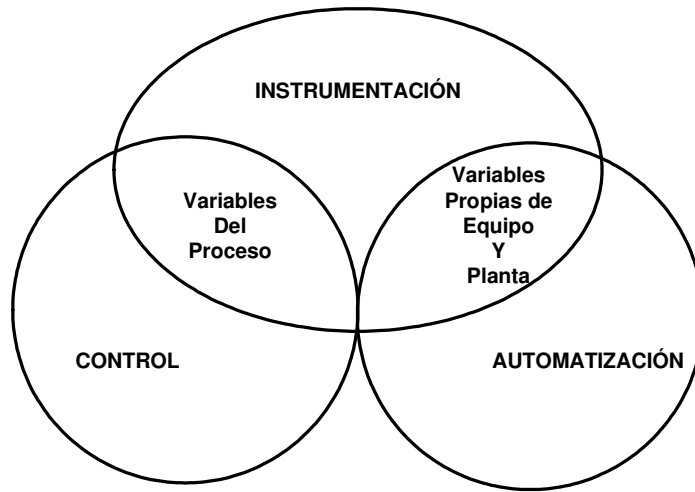


Figura 2.2: La Automática como área mayor y su relación con variables del Proceso, el Equipo y la Planta.

todas las tareas de la Automática: Instrumentación, Automatización y Control. Aunque ese uso ya ha hecho casi universalmente equiparable la automatización con las tres tareas, bien vale la pena aclarar que de acuerdo con lo explicado previamente, se instrumenta el Equipo o la Planta como artefactos tangibles, se automatiza la operación del Equipo o la Planta y se controla el Proceso. Por lo tanto, la instrumentación es tarea básica puesto que no se automatiza o controla si no hay instrumentos para complementar el grupo de acciones que se realizan sobre un Equipo o Planta para garantizar la realización del Proceso de acuerdo con los estándares de calidad y eficiencia establecidos se ven en la Figura 2.3, así como las labores de Automatización y Control realizadas sobre cada tarea.

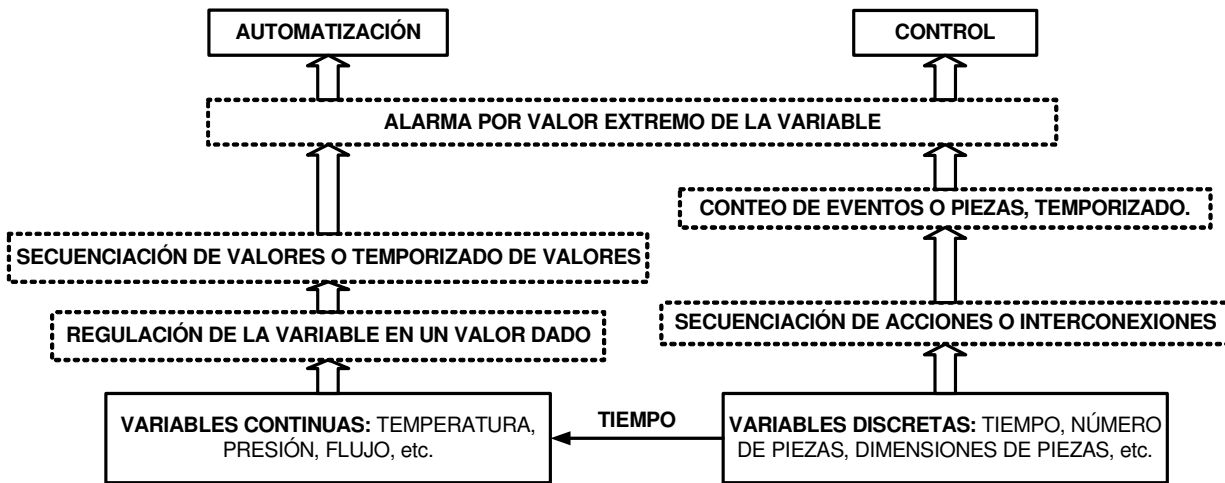


Figura 2.3: Acciones que se realizan sobre Proceso, Equipo o Planta desde la Automátización y el Control.

2.3. Tareas Asociadas con los Procesos en Ingeniería

Finalmente, en esta sección se dan las definiciones para las dos tareas que enmarcan todo el trabajo presentado en este texto: el Análisis y la Síntesis. En el Capítulo 4 se tratan en detalle estas dos tareas en el quehacer de la Ingeniería de Procesos. Las definiciones en este punto buscan facilitar la lectura de todo el material siguiente.

Definición 2.8 *Análisis*. *Tarea consistente en la distinción y la separación de las partes de un todo hasta llegar a conocer sus principios o elementos.*

Definición 2.9 *Síntesis*. *Tarea consistente en la composición de algo a partir del conocimiento previo, mediante el Análisis, de todos sus elementos por separado.*

La Síntesis de un Proceso consiste en la generación de alternativas de diseño y selección de las mejores, todo con base en información que generalmente está incompleta, es inconsistente o incluso redundante. En la aproximación tradicional, la Síntesis de un Proceso tiene una secuencia dada: Síntesis de trayectorias de reacción, Síntesis de secuencias de separación, Síntesis de redes de intercambio calórico, Síntesis de sistemas de control, Síntesis de redes de tubería y Síntesis total de procesos [Aguirre, 2004].

De las dos definiciones previas se evidencia la conexión fuerte entre Análisis y Síntesis, conexión que se expondrá en detalle en los Capítulos 4 y 6, dedicados a los aspectos del diseño en ingeniería (tanto diseño del proceso como diseño de su sistema de control). Además, como se vio, un Proceso tiene una finalidad específica. En particular, en ingeniería se identifica al Proceso con la producción de una determinada respuesta. En procesos industriales tal respuesta es generalmente tangible: ácido sulfúrico, un tornillo, un hilo, etc., pero en otros procesos (por ejemplo sobre la información), puede ser intangible: extraer la raíz cuadrada, obtener el valor medio, realimentar una señal, etc. Puesto que el tema de este trabajo es la integración entre el diseño del proceso y el diseño de su sistema de control, se requieren tanto los aspectos tangibles como los intangibles de los procesos, puesto que los intangibles mayoritariamente están asociados con el control del proceso.

En [Chilton, 1951] se hace cita lo que sigue de un libro de texto de Arthur D. Little: “Todas las operaciones unitarias importantes tienen mucho en común, por lo que si se comprenden los principios de los que depende el diseño y operación de los tipos básicos de equipos usados en ingeniería, su adaptación exitosa a los procesos de manufactura será más un asunto de buen manejo que de buena suerte”. El papel de la representación matemática de la operación unitaria en el diseño del proceso y la relación de dicha representación y el conocimiento de la naturaleza, se refuerza más adelante en el mismo texto: “Se trata de traer a la mente del lector los principios de la ciencia que dan base a los procesos de la ingeniería química y entonces desarrollar métodos para aplicar esos principios a la solución de tales problemas. Para tal fin, se han seleccionado operaciones básicas comunes a toda la industria química más que los detalles de procesos específicos, con lo cual es ahora posible el tratamiento matemático cuantitativo junto con una descripción cualitativa del proceso”.

Capítulo 3

DESCRIPCIÓN DE PROCESOS EN INGENIERÍA

Los procesos pueden ser: intangibles, como los sociales o los que se realizan sobre la información, o tangibles, como los procesos de transformación de la materia y las múltiples formas de energía. Estos últimos pueden a su vez ser naturales o artificiales (hechos por el hombre). La idea fundamental de la Ingeniería de Procesos (IdeP) es controlar los niveles de producción o avance de un proceso natural o generar procesos totalmente nuevos frente a los que existen en la naturaleza. Todo esto a través de Equipos, Procesos o Plantas de producción (EPP), lo que en esta descripción simplemente se denominará Proceso o Sistema. Como se evidenció en el capítulo anterior, en ingeniería es imprescindible contar con una descripción del proceso para poder realizar sobre dicha descripción las tareas de Síntesis y Análisis que permitan su diseño y operación adecuada. Tal descripción no es única y ha sufrido cambios sustanciales de forma a través de la historia de la ingeniería moderna, debido a las herramientas de manejo de información existentes en cada momento. Recuérdese que en realidad el Proceso se abstrae a la manera de un Sistema para poder realizar su Análisis y Síntesis. En lo que sigue, se muestran las aproximaciones a la representación de procesos a la manera de un Sistema, llegando a la representación matemática de Procesos, tal vez la descripción más útil en Ingeniería.

3.1. Definiciones Básicas

Esta sección aparece en este texto al inicio de varios capítulos, con el fin de permitir al lector comprender completamente las discusiones posteriores. Sólo se incluyen las definiciones generales del tema del capítulo, dejando las definiciones específicas de temas puntuales directamente en la sección que corresponde al tema en cuestión.

Definición 3.1 Representación de un Proceso. *Es la combinación de un mecanismo de registro de información (símbolo gráfico, matemático o de texto) y un lenguaje aceptado como válido (con semántica y sintaxis del símbolo), para expresar las características básicas de un Proceso visto como un Sistema.*

Definición 3.2 Variables de interés en un Proceso. *Son todas las variables que se consideran importantes para la tarea de Análisis y Síntesis que se realizarán sobre el Proceso visto como un Sistema.*

Definición 3.3 Formalismo del Proceso como Sistema. *El siguiente es el formalismo de representación matemática y gráfica de un Proceso a la manera de un Sistema. Matemáticamente: i) No Lineal General:*

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{d})$, ii) Versión No Lineal Afin con la entrada y sin perturbación: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) * \mathbf{u}$, y iii) Versión Lineal General: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Dd}$. Gráficamente, se ilustra como se ve en la Figura 3.1.

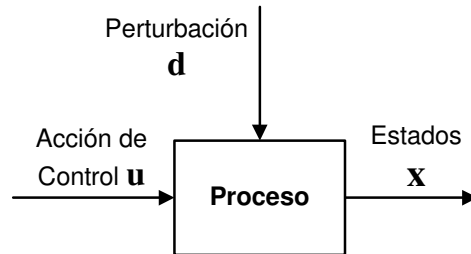


Figura 3.1: Variables que intervienen en la representación gráfica del Proceso como un Sistema.

Definición 3.4 Variables de Entrada. Son las variables que aportan materia, energía o información al Sistema que se analiza. Pueden ser manipuladas \mathbf{u} o no manipuladas \mathbf{d} . Las variables de entrada denotan el efecto del entorno sobre el proceso. Las que son manipuladas pueden ajustarse libremente por un operador o una acción de control, las demás se consideran perturbaciones, aunque durante el diseño se pueden fijar en un valor constante.

Definición 3.5 Variables de Estado o Internas. Son las variables \mathbf{x} que describen el comportamiento interno de un Sistema. Formalmente [Kalman, 1960], el estado \mathbf{x} se define como el conjunto más pequeño de variables de un sistema, de modo que si se conoce su valor en un instante inicial t_0 , y las condiciones de las variables de entrada (\mathbf{u}, \mathbf{d}) desde t_0 hasta t , es posible predecir el valor de \mathbf{x} para todo $t \in [t_0, t]$.

Definición 3.6 Variables de Salida. Son las variables \mathbf{y} que describen los flujos de materia, energía o información saliendo de un Sistema. Se asume que las variables de salida se relacionan con la variables de estado \mathbf{x} a través de una formulación matemática dada. Las variables de salida denotan el efecto del Sistema sobre el entorno. Pueden ser medidas, lo que implica que sus valores se conocen a través de los sistemas de medición, o no medidas, cuando sus valores no se pueden medir de forma directa.

Definición 3.7 Estado Estacionario de un Proceso. Condición en la que ninguna de las variables de interés del proceso está cambiando con el tiempo (sus valores permanecen constantes).

Definición 3.8 Equilibrio Matemático de un Sistema (\mathbf{x}_{EE}). Es la solución de la representación matemática (Sistema) de un Proceso, igualando a cero todas las derivadas (parciales y totales) del sistema matemático que representa al Proceso.

Definición 3.9 Equilibrio Único. Es típico en sistemas lineales, en los cuales los dos casos posibles son: i) un sólo un punto de equilibrio, o ii) ningún punto de equilibrio (el sistema no tiene solución). Para Equilibrio Único, se acostumbra trasladarlo al origen de coordenadas en el espacio de estado $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Algunos Sistemas no lineales especiales también presentan Equilibrio Único.

Definición 3.10 Equilibrios Múltiples. Es lo más frecuente en Sistemas no lineales. Pueden ser continuos (típico en Procesos Químicos y Biológicos) o aislados (sistemas mecánicos y algunos electromecánicos).

Definición 3.11 Equilibrio Aislado. Un equilibrio \mathbf{x}_{EE} en \mathbf{R}^n es un equilibrio aislado si existe un $r \in \mathbf{R}^+$ tal que ningún punto del sistema a una distancia menor que r de \mathbf{x}_{EE} , es otro equilibrio del Sistema.

Definición 3.12 Relación Lineal entre variables. Las variables involucradas se pueden expresar por una formulación matemática sobre la que se puede aplicar el Principio de Superposición: un cambio neto en la salida puede describirse por la suma de cambios parciales de salida producidos por una serie de cambios también parciales de las entradas individualmente.

Definición 3.13 Relación No Lineal entre variables. Las variables involucradas se representan por una formulación matemática sobre la que no se puede aplicar el Principio de Superposición.

Definición 3.14 Comportamiento Estático. Cuando en la descripción matemática del comportamiento de una variable de interés, no aparece ninguna relación con el tiempo.

Definición 3.15 Comportamiento Dinámico o Dinámica de un Proceso. Cuando en la descripción matemática del comportamiento de una variable de interés, aparece el tiempo como variable independiente que influye sobre dicho comportamiento de la variable. Se dice que existe una dinámica cuando la salida (o estado) de un Sistema resulta no sólo una función de las entradas y perturbaciones, sino de valores de la salida (o estado) anteriores (funcionalidad temporal): $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{d})$. La dinámica se asocia con la variación temporal (t) de al menos una variable del Sistema, nunca con la variación espacial (por ejemplo ejes x, y, z).

Definición 3.16 Dinámicas de Interés. Es el comportamiento dinámico de una variable de interés en un proceso bajo análisis. Las Dinámicas pueden clasificarse en: i) Principal, ii) Secundarias y iii) Singulares. El concepto de Dinámica de Interés es más general que el de Variables de Interés, en el mismo sentido que el comportamiento dinámico es más general que el comportamiento estático.

Definición 3.17 Dinámica Principal. Es aquel comportamiento dinámico sin el cual el proceso dejaría de ser lo que es. La dinámica principal es la característica distintiva del proceso que se analiza, que lo diferencia de otros.

Definición 3.18 Dinámicas Secundarias. Son aquellos comportamientos dinámicos que no constituyen la característica distintiva del proceso, pero que complementan el comportamiento principal.

Definición 3.19 Dinámicas Singulares. Son aquellos comportamientos dinámicos que aparecen en el proceso bajo ciertas circunstancias específicas, poco comunes o singulares a la operación normal del proceso que se analiza. Sin embargo, algunas dinámicas singulares cuando aparecen, pueden ser incluso más importantes que la dinámica principal, debido a su efecto nocivo sobre el proceso.

Como ya se definió, los comportamientos dinámicos de un proceso (Dinámicas del Proceso) pueden a su vez catalogarse en Dinámicas Principales, Dinámicas Secundarias y Dinámicas Singulares. El primer tipo de dinámicas intentan contestar la pregunta: ¿Qué aspectos dinámicos del proceso lo caracterizan y diferencian de otros procesos?. Tales comportamientos son las Dinámicas Principales. Los demás comportamientos dinámicos permanentes se denominan Dinámicas Secundarias, puesto que sólo aportan información adicional a las dinámicas principales sin lograr diferenciarlo de otros procesos. El tercer tipo de dinámicas, Denominadas Singulares, se caracterizan por ser de carácter secundario pero con la particularidad de no ser permanentes. Esto significa que dicho efecto dinámico aparece bajo una condición operativa determinada, sin haberse manifestado previamente en el proceso. De ahí su nombre de singular. El siguiente ejemplo aclara un poco esta clasificación.

Ejemplo 3.1 ¿Qué aspectos dinámicos caracterizan y diferencian a un intercambiador de calor de otros equipos de proceso?. Podrían analizarse comportamientos dinámicos en: los flujos del fluido de proceso y del fluido de servicio, el contenido energético de cada uno de los fluidos entre la entrada y la salida,

la caída de presión, entre otras. Sin embargo, la característica principal del intercambiador, y diferenciante frente a otros equipos de proceso, es el cambio en el contenido energético de cada uno de los fluidos. La dinámica de los flujos en cambio no es característica diferenciante del intercambiador, puesto que muchos equipos de proceso también la poseen, además, como no existe acumulación de masa en el intercambiador, tal dinámica es secundaria. Una dinámica singular puede ser un cambio en la viscosidad del fluido de servicio (un aceite térmico), debido a una polimerización parasita que se da bajo ciertas condiciones de temperatura y presión. Se evidencia el efecto notorio que puede tener tal cambio de viscosidad en la transferencia de calor, por lo que su aparición (singular) no es para nada despreciable. Finalmente, de la lista dada arriba, el cambio en la caída de presión, asociada con el nivel de obstrucción o ensuciamiento del interior del intercambiador, tampoco es diferenciadora del equipo y si se analizara resulta ser de tan larga duración (meses o años) en intercambiadores típicos, que puede considerarse una variable estática.

Definición 3.20 Descripción Completa de un Proceso. Es una descripción que en su estructura contiene todos los comportamientos dinámicos de interés en el proceso: dinámica principal, secundarias y singulares.

Definición 3.21 Descripción Parcial de un Proceso. Es una descripción que en su estructura sólo contiene un grupo de comportamientos dinámicos de interés: dinámica principal y al menos una dinámica secundaria. Opcionalmente puede incluir dinámicas singulares.

Es frecuente que la descripción completa del proceso no sea viable por la complejidad que tal modelo tendría. Esto hace que lo más común sea el uso de descripciones parciales del proceso, de acuerdo con el interés particular del ingeniero frente al proceso.

Definición 3.22 Jerarquía Dinámica en un Proceso. Es un ordenamiento que se asigna a las dinámicas de un proceso, de acuerdo con algún criterio de valoración. Si el criterio es funcional, se comienza con la dinámica principal (tal como se definió previamente) y se continúa con las dinámicas secundarias en orden de importancia a la función del proceso. Es opcional adicionar al final del ordenamiento a las dinámicas singulares, asignándoles también un orden de importancia dinámica. Cuando el criterio es efecto dinámico entrada-estado, se utiliza un índice que indica que tan impactable es cada estado (dinámica) del proceso con las entradas manipuladas del proceso tomadas como un todo [Alvarez, 2008].

En este punto debe aclararse que es posible generar varios niveles jerárquicos tomando diferentes niveles de la abstracción, niveles de complejidad o incluso de capacidades en la toma de decisiones [Mesarovic et al., 1970]. También se puede tomar una descomposición funcional del Proceso o una clasificación por duración de los comportamientos temporales [Tatjewski, 2008].

3.2. Representación de procesos: de lo simple a lo complejo

Tradicionalmente los procesos se han descrito en libros de texto desde su comportamiento estático [Peters and Timmerhaus, 1980; Himmelblau, 1997]. Tal descripción surgió en la literatura con la evolución misma de la ingeniería moderna (post revolución industrial), como una primera aproximación a procesos diseñados para funcionar en un único Punto de Operación (PO) durante toda la existencia del proceso mismo. En esa época, se llegó a robustecer¹ el diseño con equipos auxiliares y a través del sobredimensionado de los equipos principales [Peters and Timmerhaus, 1980]. Fue sólo hasta que las plantas de proceso empezaron a requerir la producción de más de un producto en el mismo conjunto de equipos (plantas multipropósito),

¹Robusto en el sentido de tolerancia a cambios ligeros en las variables de operación. Es decir, las salidas del proceso varían muy poco ante tales cambios.

que apareció la necesidad de estudiar las evoluciones dinámicas de las variables de proceso. Sin embargo, el uso de modelos dinámicos cercanos a la realidad del Proceso no fue posible sino hasta finales de los años 90 del siglo XX. Incluso, todavía hoy, en pleno siglo XXI, se sigue enseñando la Ingeniería de Procesos con los antiguos modelos estáticos. A pesar que dicha representación brinda información útil y que por principio de parsimonia (que establece ir de lo simple a lo complejo), es la primera instancia o ideal, ella no posee toda la información necesaria para realizar las tareas de Análisis y Síntesis del Proceso con éxito. En lo que sigue se muestra todo el abanico de posibilidades de representación y su gradación parsimoniosa de lo simple a lo complejo.

3.2.1. Descripción Estática, Ideal o de Referencia

La primera aproximación a la descripción de un proceso es la Descripción Ideal o también denominada Descripción de Referencia. Obviamente se refiere a un proceso hipotético (no real) en contraste con el proceso real que resulta casi siempre no ideal. En general, el término Ideal hace referencia al siguiente grupo de consideraciones:

- Comportamiento Estático (no hay comportamientos dinámicos presentes).
- Relación Lineal entre las variables de interés.
- Las perturbaciones tienen un efecto constante sobre el proceso.

A pesar de que tales descripciones son idealizadas, resultan necesarias a la hora de definir los errores e incertidumbres del proceso, calculando las desviaciones entre el comportamiento actual y el de dicha representación ideal. Las descripciones ideales se toman como descripciones nominales o modelos de referencia. Fue con tales modelos que la ingeniería química de la primera mitad del siglo XX construyó los manuales de diseño. Los libros del tema utilizaban las cartas, nomogramas y tablas para guiar el diseño (que resultaba más una selección) de equipos. Luego, el ingeniero debía realizar pruebas de operación o recurrir a recomendaciones adicionales (de experticia) para ajustar las recomendaciones de diseño de los libros a sus condiciones particulares. Con esto se lograba acercar el caso real del proceso específico al caso ideal dado en los libros como referente.

3.2.2. Descripción No Ideal, Dinámica Lineal Sin Perturbaciones

Esta es la primera aproximación No Ideal que se considera en la representación de procesos. En particular, se refiere a las siguientes consideraciones:

- Comportamiento Dinámico de al menos un estado.
- Relación Lineal entre las variables de interés.
- Las perturbaciones tienen un efecto constante sobre el proceso.

Aparece el efecto dinámico en al menos una de las variables internas del proceso (estados). En este caso la representación debe hacerse con herramientas matemáticas que permitan incluir al tiempo (t) como variable: ecuaciones diferenciales (ordinarias o parciales), ecuaciones en diferencias o soluciones de una ecuación diferencial o en diferencias (expresiones algebraicas con el tiempo como variable independiente). El modelo dinámico que se considera en este caso sigue siendo de carácter Lineal.

3.2.3. Descripción No Ideal, Dinámica Lineal Con Perturbaciones

En esta segunda aproximación No Ideal a la representación de procesos, se considera:

- Comportamiento Dinámico de al menos un estado.
- Relación Lineal entre las variables de interés.
- Un efecto no constante de las perturbaciones sobre el proceso.

Además de la representación dinámica lineal, en este caso se asimila también el efecto de las perturbaciones como variables del proceso. Tanto en el caso ideal como en el primer caso no ideal, las perturbaciones se consideraban de valor constante, por lo que su influencia en el análisis del proceso era nula. Ahora, aparecen las perturbaciones como variables de la representación, por lo que participan totalmente en el análisis del comportamiento. Típicamente, las perturbaciones pueden ser de dos tipos: sistemáticas o aleatorias. En el primer caso, podría incluso determinarse un modelo para el comportamiento de la perturbación, lo que se constituye en un submodelo para la representación principal.

3.2.4. Descripción No Ideal, Dinámica No Lineal Con Perturbaciones

Es la última (tercera) aproximación No Ideal a la representación del proceso, en la cual se incluye todo lo anterior, excepto que la representación dinámica es no lineal:

- Comportamiento Dinámico de al menos un estado.
- Relación No Lineal entre las variables de interés.
- Un efecto no constante de las perturbaciones sobre el proceso.

Hasta este punto se había asumido comportamiento lineal, para el que existen en la literatura métodos matemáticos consolidados, que en algunos pocos casos pueden extenderse a sistemas no lineales. Con el uso de sistemas no lineales aparecen los problemas de multiplicidad de soluciones, invertibilidad analítica o numérica de la representación y estabilidad de la solución, entre otros [Finlayson, 1980; Hangos et al., 2005]. Sin embargo, la representación no lineal será siempre más tratable (matemáticamente) para sistemas multivariable, si se logra expresar en la forma compacta y matricial estándar de la representación en el espacio de estado.

Como se puede apreciar en estas cuatro aproximaciones (una ideal y tres no ideales), aparece como concepto central una diferencia filosófica entre un Proceso real (un “mundo” real) del cual se extrae información importante y un “mundo” virtual de ideas, herramientas y modelos que habilita a quien estudia el Proceso a observar, interpretar y controlarlo en el mundo real. Es evidente que las tareas de Análisis y Síntesis, fundamentales para la Ingeniería, pertenecen al mundo virtual. Nótese además, como el mundo real puede también identificarse con el hardware puesto que se refiere a Equipos, Procesos o Plantas (EPP) que operan con materia y energía. Por su parte, el mundo virtual se asocia con el software debido a que aplica procesos sobre la información, siendo tales procesos y tal información resultado de operaciones mentales del hombre sobre el mundo real. Es justamente a través de tales operaciones mentales que se pueden deducir modelos de los objetos reales a través de observaciones, hipótesis de comportamientos y conocimientos previos generales. Con esto se construye el mundo virtual que replica al mundo real (como su contraparte operativa). Los objetos típicos del mundo virtual son los Sistemas, mientras que los objetos del mundo real son los Procesos. En [Ruhm, 2007] se dice que: “Los Sistemas son modelos de los Procesos del mundo real, las señales son modelos de las cantidades (eventos) del “mundo” real”. Este autor certifica que cuando se planea realizar procesos en el mundo real, siempre se tienen en mente modelos concretos que permiten anticipar la forma en la que se comportará el proceso real, lo que permite actuar de acuerdo con tal predicción.

3.3. Mecanismos de Representación de Sistemas Dinámicos

El término Representación es más general que el término Descripción, puesto que toda descripción es una representación pero lo contrario no es cierto. El trabajo de Análisis que lleva a cabo el ingeniero no se realiza sobre el Proceso mismo. Por el contrario, el ingeniero analiza el Proceso mediante una representación tratable, que puede ser verbal (texto o discurso), gráfica (simbólica) o matemática (numérica). Esto le permite la libertad de acción sobre el Proceso sin tener que intervenir permanentemente por tanteo y error, con materia prima y energía. Utilizando una representación del Proceso es posible su caracterización, tanto desde un punto de vista estático (estados estacionarios) como desde un punto de vista dinámico (estados transientes o trayectorias entre estados estacionarios). Tal representación casi siempre sigue una progresión dada entre diversas formas: primero la representación verbal (una charla informal o la lectura-escritura de una descripción en palabras del proceso), luego una representación gráfica (primero Diagrama de flujo en Bloques (DB), luego Diagrama de Flujo del Proceso (DFP)), después una representación matemática (estática: por ejemplo ecuaciones de balance en estado estacionario o dinámica: por ejemplo modelo o ecuaciones de balance en el transiente), que se complementa con la representación gráfica más acabada: un Diagrama de Flujo de Información (DFI) para el modelo matemático y un Diagrama de Instrumentación y Tubería (P&ID por sus siglas en inglés: Pipe and Instruments Diagram) para el DFP de la planta. En el siguiente ejemplo se ilustran estos tipos de representación, además sirve para dar y clarificar otras definiciones necesarias para completar el tema.

Ejemplo 3.2 *Nombre del Proceso (o equipo): “Tanque de tratamiento de una salmuera”*

1. *Descripción Verbal:* En una planta se deben tratar entre 10 y 15 $\frac{\text{litros}}{\text{min}}$ de una salmuera de NaCl en agua. La solución resultante debe estar a temperatura ambiente (25°C) y contener apenas 3% en peso de NaCl . Para tal fin, se ha diseñado un tanque agitado de 200 litros en acero inoxidable 314, denominado tanque de tratamiento. El tanque utiliza un agitador tipo turbina impulsado por un motor eléctrico de 1,5HP. Para tratar la solución se alimentan al tanque dos corrientes: *i*) agua pura de manera regulada, por una línea de 1" DN y *ii*) la salmuera concentrada (8 a 12% en peso de NaCl) que viene del proceso previo por una línea de $\frac{3}{4}$ " DN. La descarga del tanque de tratamiento hacia el proceso siguiente, se realiza a través de una línea de $1\frac{1}{4}$ " DN ubicada a 4" del fondo del tanque.

Definición 3.23 *Diagrama de Flujo en Bloques o simplemente Diagrama de Bloques (DB).* Un DB es una combinación de cajas (bloques) y flechas, ambos elementos rotulados para indicar el equipo o etapa (los bloques) y los flujos de materia (flechas delgadas) o energía (flechas gruesas) desde y hacia los alrededores y entre los mismos equipos o etapas.

2. *Diagrama de Flujo en Bloques o simplemente Diagrama de Bloques (DB):*

En los DB todavía no aparece el concepto de flujos de información. Es posible en un DB partir un sólo equipo en dos o más bloques, indicando entre ellos intercambio de materia o energía. Los DB pueden indicar en cada Bloque la función genérica del equipo o llegar incluso a especificaciones detalladas de las tareas que realiza el equipo en cuestión. Es posible también llegar a simplificar la representación, indicando dentro de cada bloque la magnitud del aumento (o reducción) que realiza esa etapa del proceso sobre una o más variables de entrada y el tiempo que tarda en efectuar tal cambio ante un cambio en la entrada. A esta información se le denomina Función del Transferencia. Para el tanque de preparación de este ejemplo, el DB se presenta en la Figura 3.2.

Definición 3.24 *Diagrama de Flujo de Proceso (DFP).* Es una combinación de simbolismos pictóricos que recuerdan cada equipo con sus particularidades constructivas, organizados para presentar la estructura del proceso, especificando el tipo de equipo, su ubicación, sus conexiones (líneas y flechas) y el sentido de los flujos de materia y energía en cada uno.



Figura 3.2: Diagrama de Bloques (DB) del tanque de tratamiento de Salmuera del ejemplo.

3. Diagrama de Flujo de Proceso (DFP):

En los DFP la posición de las flechas refleja el conocimiento que el ingeniero tiene del Proceso. Por arriba del equipo van los vapores o gases, por abajo o por los lados los líquidos y por abajo o por el fondo las mezclas líquido-sólido o los flujos de sólidos molidos. Como se evidencia, un DFP posee más nivel de detalle pictórico que el DB, lo que hace al DFP una mejor ilustración de la situación real. Sin embargo y a pesar de su utilidad simbólica, el DFP resulta bastante cargado de información cuando se abordan ciertos Análisis preliminares, por lo que resulta frecuente reducirlo a diagramas más simplificados como el DB. Un DFP se muestra para el tanque de preparación de salmuera en la Figura 3.3.

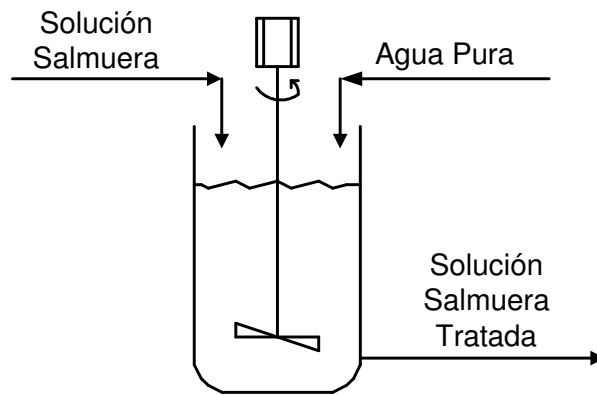


Figura 3.3: Diagrama de Flujo de Proceso (DFP) del tanque de tratamiento del ejemplo.

Definición 3.25 Representación Matemática. Una o más ecuaciones que describen los comportamientos del Proceso, bien sea estáticos (por ejemplo ecuaciones de balance en estado estacionario) o estáticos-dinámicos (por ejemplo ecuaciones de balance en estado transiente).

1. Lo primero es indicar que todo proceso tiene variables que se toman para su representación como un Sistema, tal como fue definido previamente. El Sistema primario es el Proceso, mientras que el sistema de medición es el conjunto de instrumentos utilizados en el monitoreo de las variables. La nomenclatura usada denomina \mathbf{u} al vector de entradas de control al proceso o variables manipuladas, \mathbf{d} al vector de perturbación o entradas no controladas al sistema, \mathbf{w} al vector de ruido en los sensores o entradas no controladas debidas a la incertidumbre en las mediciones; \mathbf{x} al vector que refleja los estados del sistema y \mathbf{y} al vector de salidas. De este modo, cualquier sistema puede representarse de forma general mediante dos formulaciones vectoriales: Una ecuación de Estado, que resulta ser una ecuación diferencial:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{d}(t)] \quad (3.1)$$

función de los estados, las entradas y las perturbaciones. Y una ecuación de Salida, que normalmente es una ecuación algebraica:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{d}(t), \mathbf{w}(t)] \quad (3.2)$$

función del estado, las entradas, las perturbaciones y el ruido en los sensores. Más adelante se mostrará cómo los balances de materia y energía son la base para la construcción de modelos que toman la estructura de sistemas dada en las Ecuaciones 3.1 y 3.2. Finalmente, debe recordarse que pueden existir diferencias entre los estados de este tipo de sistema (variable \mathbf{x}) y las variables de estado en termodinámica.

4. Representación matemática:

Para el ejemplo que se presenta aquí, sólo se obtiene el modelo matemático para el comportamiento de la masa total en el tanque (M), que entrega el modelo para el estado nivel $x_1 = L$. No se considera el modelo para la variable de estado concentración de sal ($x_2 = C_{Sal}$). Para el comportamiento modelado, se integran los cuatro tipos de descripción vistos previamente.

* *Descripción Estática, Ideal o de Referencia.* Balance de Masa Total en estado estacionario:

$$0 = F_{Agua} * \rho_{Agua} + F_{Salmuera} * \rho_{Salmuera} - F_{Solución} * \rho_{Solución}$$

Si se asume que las densidades son aproximadamente iguales: $\rho_{Agua} = \rho_{Salmuera} = \rho_{Solución} = \rho$, entonces la expresión del balance de masa total en estado estacionario queda sólo en función de los flujos F_i :

$$0 = \rho * (F_{Agua} + F_{Salmuera} - F_{Solución})$$

que al considerar que la densidad nunca es cero, constituye la representación estática de las corrientes en el tanque. Esta representación entrega todos los posibles valores de los flujos que conducen a un estado estacionario:

$$0 = F_{Agua} + F_{Salmuera} - F_{Solución}$$

* *Descripción No Ideal, Dinámica Lineal Sin Perturbaciones.* Modelo matemático a través del Balance de Masa Total (M) en estado transiente:

$$\frac{dM}{dt} = F_{Agua} * \rho_{Agua} + F_{Salmuera} * \rho_{Salmuera} - F_{Solución} * \rho_{Solución}$$

que con la misma suposición de densidad constante, queda:

$$\frac{dM}{dt} = \rho (F_{Agua} + F_{Salmuera} - F_{Solución})$$

y recordando que la masa total puede expresarse en términos del volumen de sustancia contenido en el tanque como: $M = \rho * V$, y que a su vez el volumen, para un tanque cilíndrico es función del Area transversal del Tanque (A_{Tanque}) y de la altura del líquido o Nivel (L), $M = \rho * A_{Tanque} * L$, se llega a: $\frac{d(\rho * A_{Tanque} * L)}{dt} = \rho (F_{Agua} + F_{Salmuera} - F_{Solución})$. Para resolver la derivada se recuerda que ρ y A_{Tanque} son constantes, por lo tanto:

$\rho * A_{Tanque} * \frac{dL}{dt} = \rho (F_{Agua} + F_{Salmuera} - F_{Solución})$, que cancelando términos y organizando la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO), entrega el modelo de comportamiento dinámico de la Masa Total en el tanque, asociada directamente con los cambios en el Nivel (L):

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{A_{Tanque}} * (F_{Agua} + F_{Salmuera} - F_{Solución})$$

Nótese que esta ecuación contiene la representación inicial de estado estacionario, pero adiciona nueva información. Para ir de la dinámica a la estática basta con hacer cero los cambios de masa total $\frac{dL}{dt} = 0$.

* *Descripción No Ideal, Dinámica Lineal Con Perturbaciones.*

Para incluir las perturbaciones, se deben considerar las condiciones de diseño y operación asociadas con los tres flujos del tanque. Si el flujo de salmuera $F_{Salmuera}$ es la demanda que el proceso previo hace al tanque de tratamiento, dicho flujo será una perturbación d_1 . Con el fin de mantener el nivel constante, el mecanismo de control que se instale para controlar L debe lograr que ($F_{Solución} = F_{Agua} + F_{Salmuera}$). Por lo tanto, puede considerarse que la acción de control es $u = F_{Solución}$. El flujo de salmuera F_{Agua} depende del controlador de concentración, por lo tanto resulta ser una segunda perturbación d_2 para la dinámica de nivel. Finalmente, se asume que el flujo de descarga del tanque no depende del nivel (por ejemplo se logra a través de una bomba de desplazamiento positivo). De este modo, se mantiene la linealidad de la ecuación del modelo de Nivel, pero ahora si se consideran las perturbaciones:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{A_{Tanque}} * (d_2 + d_1 - u)$$

* *Descripción No Ideal, Dinámica No Lineal Con Perturbaciones.*

Para considerar no linealidades en el modelo de la dinámica de Nivel, tratado en este ejemplo, se asumirá que la descarga de la solución tratada se hace por gravedad (no hay bomba), regulada por una válvula en la descarga. En tal caso, el flujo de solución puede formularse como:

$$F_{Solución} = C_v * \sqrt{g * L}$$

con C_v el coeficiente de apertura de la válvula de descarga y g la constante de la fuerza de la gravedad. Reemplazando esta expresión en el modelo para la dinámica de nivel, se llega a una ecuación diferencial no lineal, que ya incluía las perturbaciones:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{A_{Tanque}} * (d_2 + d_1 - C_v * \sqrt{g * L})$$

Esta es la expresión final del modelo buscado. Sin embargo, en caso de tener expresiones para las dos perturbaciones en función de otras variables del proceso, éstas deben incluirse en este el modelo final.

Definición 3.26 Diagrama de Flujo de Información (DFI). Es una combinación de bloques, flechas y expresiones matemáticas, que simbolizan el flujo y procesamiento de información durante la solución de una representación matemática específica del proceso.

5. Diagramas de Flujo de Información (DFI):

En ocasiones los DFI se confunden con los DB puesto que también utilizan el simbolismo Flechas-Bloques. Sin embargo, es muy importante entender que en el DFI los bloques contienen representaciones matemáticas (ecuaciones) y las flechas transportan valores de variables o parámetros (información), mientras que las flechas en los DB indican transporte de materia o energía. Uno de los usos más frecuentes de los DFI es la representación de sistemas de control de procesos, puesto que todo sistema de control opera con la información del proceso que le dan los sensores. El DFI para la EDO que representa el comportamiento de la variable Nivel (L) en el tanque de preparación de salmuera, se muestra en la Figura 3.4.

Finalmente, y bajo una determinada suposición para el acoplamiento de los comportamientos dinámicos (en este caso se asume linealidad) y una aproximación dada para su representación (en este caso Funciones de Transferencia), se puede representar el comportamiento mediante un DFI también genérico (Figura 3.5). Aparecen los conceptos de variable controlada (L) o salida del proceso y variable manipulada (C_V de la válvula que equivale a variar el F_{Agua}) o entrada manipulable al proceso.

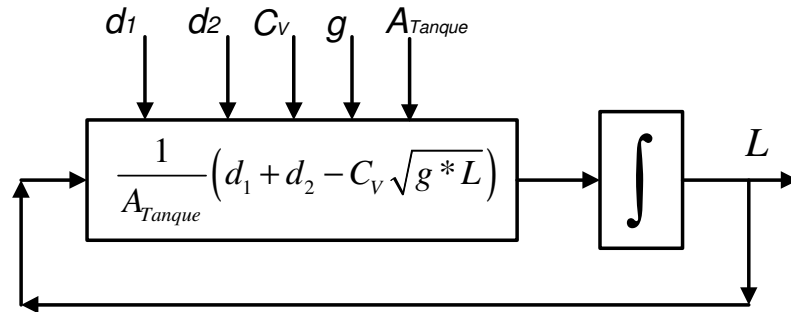


Figura 3.4: Diagrama de Flujo de Información (DFI) del tanque de tratamiento del ejemplo.

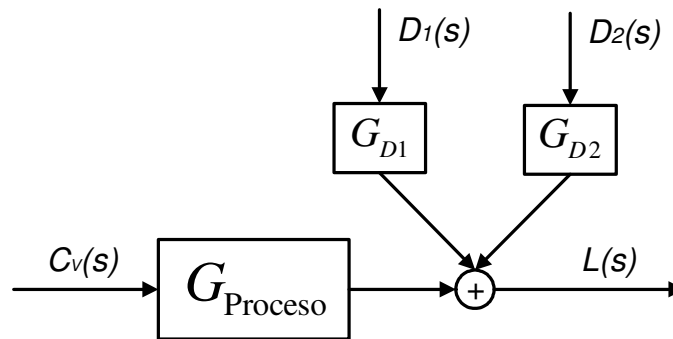


Figura 3.5: Otro DFI para el tanque de tratamiento de salmuera, esta vez en Funciones de Transferencia.

Definición 3.27 Diagrama de Instrumentación y Tubería (P&ID). Constituyen una extensión del DFP, puesto que además de la representación pictórica de los equipos de proceso y sus conexiones reales, presenta todo el manejo de información asociado con la instrumentación y el control del proceso.

6. Diagrama de Instrumentación y Tubería (P&ID):

En los P&ID los símbolos y la nomenclatura que con más frecuencia se utiliza es la que determinó una norma publicada por la *International Society of Automation (ISA)* [Creus, 2005] En la Figura 3.6 se presenta el P&ID para el tanque de preparación de salmuera.

7. *Otros Diagramas.* En la representación de procesos se pueden utilizar gráficos que se concentren en diversos aspectos del proceso o incluso que representen la formulación matemática del mismo, sus secuencias de cálculo, etc. Como ejemplos pueden mencionarse los Grafos Dirigidos, que representan las “influencias” de un equipo a otro, y los Grafos Dirigidos Signados, que además de representar las influencias, muestran el signo de tal influencia: positivo si un aumento en la variable del nodo de origen causa un aumento en la variable del nodo de llegada, negativo en el caso contrario [Grisales y Piedrahita, 1998].

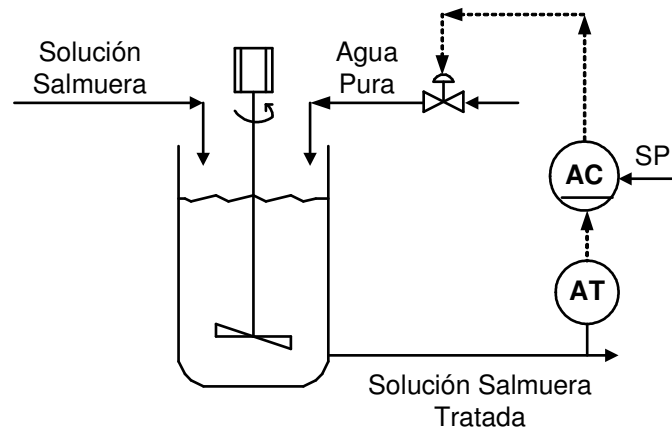


Figura 3.6: Diagrama de Instrumentación y Tubería (P&ID) del tanque de tratamiento del ejemplo.

3.4. Descripción Matemática Dinámica de Procesos

Como se indicó previamente, la descripción estática de los procesos ha sido el común denominador en los textos y en la práctica misma de la Ingeniería de Procesos (IdeP). En cambio, la Ingeniería de Control (IdeC), por su carácter inherentemente dinámico, nació y evolucionó con una descripción dinámica de los procesos (primero como sistemas lineales y luego como sistemas no lineales). Una tercera área de estudio, que podría tomarse como conciliadora de dos posiciones en apariencia irreconciliables, fue la Teoría Matemática de Sistemas. El carácter abstracto de ese cuerpo conceptual y el alto formalismo con el cual se construyó, le permitió mostrar que la descripción dinámica de un proceso es la única completa, puesto que cualquier solución (descripción) estática no es más que una solución particular del sistema matemático que describe el comportamiento dinámico del proceso. En tal sentido, la nueva IdeP del último cuarto del siglo XX, se veía abocada a incluir el análisis dinámico de los procesos dentro de sus procedimientos de diseño, si quería hacer un tratamiento completo del espacio de operación en el cual era posible encontrar al proceso. Sin embargo, la necesidad imperiosa de contar con un modelo dinámico del proceso para poder hacer tales procedimientos de diseño “completo”, produjo un primer cuestionamiento: ¿es fácil obtener esa clase de modelos para los procesos típicos en la industria?. La respuesta pasó primero por un inventario de las herramientas disponibles en aquella época para obtener modelos: conocimientos de fenómenos de transporte, termodinámica clásica, física, química y biología descriptivas. El resultado fue un desánimo generalizado (fuera del ámbito académico) respecto a la obtención de modelos dinámicos de proceso. El primer argumento fue la poca aplicabilidad de tales modelos (luego de un camino largo y tortuoso para su obtención), debido al alto requerimiento de computo para su solución. Fue así como la IdeP ante esa dificultad, volvió al diseño con las ya conocidas representaciones estáticas ideales de proceso. En la IdeC también la complejidad computacional tuvo sus efectos. En vez de usar modelos dinámicos no lineales, más completos y precisos, se popularizó el uso de modelos dinámicos lineales obtenidos por medios empíricos: curvas de respuesta al escalón. Las descripciones dinámicas no lineales de procesos quedaron relegadas a los medios académicos y científicos. En las plantas de producción, se siguieron usando los diseños de sistemas de control basado en información estática del proceso tomada de las funciones de transferencia.

En conclusión, se evidencia tras este breve recorrido por las diversas aproximaciones de representación de procesos, que a pesar de existir herramientas para lograr descripciones completas y con alto grado de exactitud de los procesos que se analizan, tanto la IdeP como la IdeC, siguen utilizando mayoritariamente modelos lineales de origen empírico (estáticos en el primer caso y dinámicos en el segundo) para tratar el diseño de equipos y de sistemas de control. Además, sigue existiendo una cantidad de información contenida en las descripciones dinámicas de proceso, que no se utiliza en los métodos actuales de diseño del proceso

y su control. Tal desperdicio de información hace que la región de credibilidad del diseño realizado con descripciones lineales (robustez del diseño obtenido), resulte bastante pequeña, si se compara con la porción del espacio de estado en la que puede operar el proceso real. Además, siempre quedará la incertidumbre sobre la verdadera optimalidad del Punto de Operación (PO), aprovechamiento máximo que de la materia, energía e información disponibles hacen los equipos diseñados, cuando dicha optimalidad se calcula usando una descripción lineal del proceso.

3.4.1. Características Dinámicas de un Proceso

Como ya se definió, por dinámica de un proceso se entiende cualquier comportamiento que evidencie un cambio temporal, sin importar que su duración sea corta comparada con el tiempo natural de respuesta del sistema ante perturbaciones externas, o larga y por lo tanto poco apreciable cuando se hace una observación muy breve en el tiempo. En tal sentido, los comportamientos dinámicos en un proceso se pueden catalogar de acuerdo con su tiempo de respuesta frente a la respuesta temporal evidente del proceso, de modo que los de duración muy pequeña o muy grande se pueden considerar de manera estática [Smith and Corripio, 1997]. A pesar de la diferenciación entre Dinámicas, es frecuente que al obtener una representación (modelo) de un proceso, coexistan en ese modelo tanto las Dinámicas Principales como algunas Secundarias. Eso no resulta contradictorio puesto que las Dinámicas Principales siempre dan el comportamiento grueso o más significativo del proceso, mientras que las Dinámicas Secundarias aportan la variación fina o más sutil del proceso.

Sea este el punto para retomar la discusión sobre la utilidad de los modelos estáticos y los modelos dinámicos en Ingeniería de Procesos. Si bien en la mayoría de rutinas de diseño de equipos se utiliza el comportamiento en estado estacionario del proceso como punto fundamental, el comportamiento dinámico del proceso que se diseña o analiza es imprescindible cuando se abordan tareas de operación, optimización o control. Recuérdese además, que el comportamiento dinámico de cualquier proceso contiene al comportamiento estático o de estado estacionario como un caso especial. Respecto a estos dos enfoques, el comportamiento dinámico es una función temporal de los valores de las variables del proceso, obtenida como solución al sistema de ecuaciones diferenciales que describen tales dinámicas bajo unas condiciones iniciales y de frontera conocidas. En cambio, el comportamiento estático no es más que un mapeo o función atemporal que relaciona todas las variables entre sí (excepto el tiempo), formando uno o más vectores (solución) con coordenadas conocidas en R^n (n el orden dinámico del proceso), que corresponden a los equilibrios matemáticos del sistema de ecuaciones diferenciales que forman las dinámicas existentes en el proceso. Resulta obvio que las evoluciones temporales que tengan las variables del proceso siempre se harán entre dos de los estados de equilibrio o estados estacionarios del proceso, por lo que el modelo dinámico tiene a tales puntos como soluciones particulares (con todos los términos diferenciales o acumulaciones iguales a cero).

3.4.2. Modelo de Proceso

Se ha insistido sobre lo imprescindible de una representación del proceso a la hora de su Análisis o Síntesis. En realidad lo que se hace es tomar al Proceso como Objeto Real y de acuerdo con la intencionalidad de la tarea que se pretende, representar todo el Proceso o una porción de él como un Sistema. De este modo, se puede aprovechar la mayor abstracción del concepto “Sistema” respecto al concepto “Proceso”, para operar con el Sistema que representa al Proceso o a la parte de este que nos interesa.

Definición 3.28 Modelo de Proceso. *Abstracción útil del Objeto Real, que resulta ser un constructo operable, bien sea tangible o intangible. Un modelo es un conjunto de elementos de representación de información que puestos juntos (como un Sistema), replican las características de un Proceso real o una parte de este, tomado como un Sistema. El modelo de Proceso es en sí mismo un Sistema.*

Puesto que los modelos en realidad representan al Sistema que se tomó por alguna semejanza desde el Proceso, y los modelos son en si mismos Sistemas, se puede decir que todo modelo posee una estructura, unos parámetros y unos términos distinguibles.

Definición 3.29 Estructura de un Modelo. *La Estructura de un Modelo es el conjunto de relaciones entre las partes del modelo: Parámetros, Variables, Términos y Constantes. Dichas relaciones hacen referencia no sólo a la posición de los parámetros y las variables en los diferentes términos, sino a los coeficientes que “gradan” el efecto de tales términos en el modelo global. Estos coeficientes y la comprensión de la estructura del modelo, cuando éste es de base fenomenológica, resultan vital para cualquier análisis de sensibilidad.*

Definición 3.30 Parámetro de un Modelo. *Símbolo que le pertenece al modelo como elemento de configuración (parámetro estructural) o elemento de ajuste (parámetro funcional). Un Parámetro es un valor numérico o simbólico que indica el grado en que se relacionan las partes de un sistema o subsistema. En [Himmelblau and Bischoff, 1968] se dice: “Un parámetro es una propiedad del proceso o de su medio ambiente, que puede ser asignada arbitrariamente mediante valores numéricos”. Un parámetro es un valor constante o una variable que se rige por una ley predeterminada que resulta independiente de los procesos que puedan ocurrir en el Sistema.*

Definición 3.31 Variable de un Modelo. *Es un símbolo que le pertenece al Objeto Real (Proceso o una parte de el), como una de sus características, que puede o no ser conocida. Si el valor de la variable se conoce, su variación no está sujeta al ajuste por parte de quien está identificando el modelo. Ella varía por si misma y bajo la influencia de los demás elementos del modelo. En este caso, es una variable del proceso como la temperatura o la presión. Cuando la variable es desconocida, se dice que su ajuste hace parte de la tarea de diseño cuando es una variable de proceso (por ejemplo, se puede estar determinando la “mejor” temperatura de operación). En este caso, el valor de la variable se tantea o intenta hallar mediante el modelo en si mismo, a través de simulaciones bajo diferentes escenarios posibles de operación.*

Definición 3.32 Constante de un Modelo. *Variable universalmente aceptada como de valor fijo o que el ingeniero acepta de valor fijo para el caso de Análisis de Proceso que está tratando.*

Definición 3.33 Término de un Modelo. *Es el grupo formado por parámetros, constantes, variables y operadores matematicos no lineales (diferentes de suma y resta) presentes en las formulaciones matemática de un modelo. También se puede considerar como Término a un submodelo dentro de un modelo mayor o modelo maestro del Proceso. Los términos se separan por los operadores lineales de suma (+) o resta (-).*

Definición 3.34 Parámetro Funcional. *Es el que es está asociado directamente a la función de cálculo de la salida o resultado del modelo.*

Definición 3.35 Parámetro Estructural. *Es el que está asociado a la configuración o estructura del modelo.*

Definición 3.36 Modelado. *Procedimiento que permite establecer una estructura matemática o simbólica y unos parámetros, que describen de manera cualitativa o cuantitativa los comportamientos característicos de un sistema o proceso.*

Definición 3.37 Identificación. *Procedimiento que permite encontrar los parámetros (funcionales o estructurales) de un modelo a partir de datos tomados del proceso (experimento u operación normal) o desde descripciones mucho más específicas (ecuaciones constitutivas) de los comportamientos y las características particulares del Proceso.*

Definición 3.38 Simulación. *Procedimiento que permite observar la respuesta externa (la salida), o la respuesta interna (el estado) de un modelo de un sistema ante diferentes condiciones de operación (entrada manipulada y perturbación). La simulación requiere de un soporte que permita la solución del modelo (cuantitativamente o cualitativamente) para obtener la respuesta deseada.*

La obtención de un Modelo del Proceso requiere por lo general un esfuerzo considerable. Sin embargo, son muchas las razones que justifican la elaboración de un modelo confiable para un Proceso:

1. Inexistencia total o baja disponibilidad del Proceso real para experimentación.
2. Altos costos en pruebas sobre el Proceso real.
3. Imposibilidad de operar el Proceso real en regiones de riesgo.
4. Tiempos de ensayo en el Proceso real demasiado largos.
5. Determinación de condiciones óptimas de diseño de una etapa o Proceso y delimitación de su región de operación óptima.
6. Diseño de sistemas de monitoreo, automatización, control y diagnóstico de fallas, utilizando los modelos para predecir comportamientos.
7. Caracterización y extracción de conocimiento sobre el comportamiento de un Proceso real.

3.4.3. Clasificación de los Modelos

Entre las múltiples clasificaciones posibles para los modelos, aquí se dan las tres más útiles a la hora de seleccionar un tipo de modelo para una aplicación determinada. Esas clasificaciones son de acuerdo con: *i*) el grado de conocimiento del proceso implícito en el el modelo, *ii*) el tipo de información que puede brindar el modelo, y *iii*) la característica de agrupamiento espacial de los parámetros del modelo. Existen otras clasificaciones de modelos sobre las que no se profundiza aquí, pero que se mencionan a continuación para hacer más completa esta descripción y poder clasificar totalmente el tipo de modelos utilizado en Diseño Simultáneo del Proceso y su Control (DSPyC):

- * Modelos Lineales vs. No Lineales
- * Modelos Continuos vs. Discretos
- * Modelos Causales vs. No Causales
- * Modelos Estáticos vs. Dinámicos
- * Modelos Estocásticos vs. Determinísticos
- * Modelos Variantes en el tiempo vs. Invariantes en el Tiempo.

Se invita al lector interesado en profundizar en estas otras clasificaciones, a consultar textos especializados en modelado [Himmelblay and Bischoff, 1968; Franks, 1972; Aris, 1978; Ljung, 1987; Hangos and Cameron, 2001]. Ahora, veamos con algún detalle las tres clasificaciones mencionadas al principio, puesto que luego serán utilizadas algunas de sus características durante la selección de un modelo para determinada tarea.

- * De acuerdo con el grado de conocimiento del proceso implícito en el modelo:

1. *Modelos de Caja Blanca, Físicos o Fenomenológicos.* Basados en el conocimiento detallado de las variables involucradas en el sistema y de la comprensión de las relaciones entre ellas. La obtención del comportamiento de las Dinámicas a partir de este tipo de modelos se logra generalmente a partir de leyes de conservación (balances de masa total y por componentes, balances de energía total, balances de energía mecánica y balance de cantidad de movimiento). Estas leyes de conservación vienen acompañadas normalmente de ecuaciones auxiliares o constitutivas (ecuaciones cinéticas, termodinámicas, de relaciones de diseño, etc.) que permiten evaluar los parámetros del modelo o bien, establecer relaciones adicionales entre variables de estado.
2. *Modelos de caja negra o Empíricos.* Determinados experimentalmente a partir de los datos disponibles del proceso. Resultan de la experimentación y la observación y son ampliamente usados cuando el fenómeno físico es desconocido o no está bien entendido. Estos modelos no son derivados a partir de leyes físicas, por lo que para su elaboración debe seleccionarse alguna estructura matemática que relacione las variables a predecir con las variables medidas. Esta selección de estructura y variables es sumamente importante, ya que si no se incluye alguna variable crucial o si la relación propuesta no es adecuada, el modelo será incapaz de representar con suficiente exactitud el proceso. Un modelo de esta clase es el que se obtiene con funciones de transferencia en el dominio de Laplace. Las herramientas de control lineal usan esos los modelos para el diseño del sistema de control.
3. *Modelos de caja gris o Semifísicos.* Son una combinación de los modelos de caja negra y los modelos de caja blanca. Existen dos maneras diferentes de obtener estos modelos de caja gris: *i*) Aprovechar la estructura de un modelo fenomenológico (balances de materia y energía) y establecer correlaciones empíricas para algunos parámetros que no pueden ser especificados mediante una estructura explicativa. Estos se denominan Modelos Semifísicos de Base Fenomenológica (MSBF). *ii*) Construir una estructura totalmente empírica, pero durante la identificación de los parámetros algunos de estos se pueden obtener a partir de conocimientos fenomenológicos. Estos se denominan semifísicos de base empírica.

* De acuerdo con el tipo de información que puede brindar el modelo:

1. *Modelos Explicativos.* Estos modelos buscan incrementar el entendimiento de las causas del fenómeno a través de las pruebas empíricas de proposiciones de diversas teorías de apoyo. Normalmente son modelos complejos y basados en leyes y principios. En general, no se basan en modelos empíricos o heurísticos y se utilizan cuando el sistema ya se conoce, pero se desea conocer su comportamiento en una situación específica y las razones de porque determinado fenómeno ha ocurrido de esa forma y no de otra manera. Estos modelos son más usuales en investigación, labor en la que responden a la pregunta: ¿Por qué y de qué forma ocurren determinados mecanismos, eventos o fenómenos en un Sistema?.
2. *Modelos Descriptivos.* Describir un fenómeno implica definir sus características y componentes, así como definir las condiciones en que se presenta y las distintas maneras en que puede manifestarse. En el modelado descriptivo de un sistema se persigue que la representación obtenida sea adecuada para las tareas de diseño. Por tanto, el modelo descriptivo debe ser sencillo y aportar información a la toma de decisiones en las diferentes etapas del diseño. Aunque el ideal para diseño es el modelo explicativo, la complejidad matemática que este trae aparejada resulta prohibitiva a la hora de abordar labores de diseño rutinarias. Los modelos descriptivos en el diseño de ingeniería responden a la pregunta ¿Qué es preciso conocer del sistema para el objetivo de Diseño que se pretende lograr?.
3. *Modelos Puramente Predictivos.* Aunque todos los modelos matemáticos son predictivos, cuando se habla de modelos puramente predictivos se hace referencia a aquellos modelos obtenidos empíricamente, los cuales sintetizan en una estructura sencilla (y generalmente predefinida) las dinámicas de interés del Sistema. Aunque su carácter explicativo es mínimo, su sencillez disminuye la complejidad computacional haciéndolos ideales para su uso en línea, es decir un modelo puramente predictivo es un modelo lo suficientemente preciso para ser manipulado en tareas rutinarias de diseño. Los modelos

AutoRegresivos con entrada eXogena (ARX) son un ejemplo de modelos puramente predictivos. Finalmente, se puede decir que los modelos puramente predictivos en el diseño de ingeniería responden a la pregunta ¿Cómo será el comportamiento del sistema modelado en circunstancias diferentes?

* De acuerdo con la característica de agrupamiento espacial de los parámetros del modelo:

1. *Modelos de Parámetros Distribuidos.* Incorporan la variación espacial de las variables que representan, con lo que la aplicación de las ecuaciones de conservación lleva a modelos que son representados por Ecuaciones Diferenciales Parciales.
2. *Modelos de Parámetros Concentrados.* No incorporan la variación espacial de las variables que representan, con lo cual la representación resulta solo en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias que a menudo se encuentran acopladas con ecuaciones algebraicas lineales y no lineales.

3.4.4. Modelado Dinámico de Procesos

Todas las tareas de ingeniería (excepto el mantenimiento y la reparación), operan sobre alguna representación válida del proceso que se trata. Dicha representación recibe el nombre de Modelo. Los modelos son el elemento más importante en todas las tareas o tratamiento que la ingeniería aplica: concepción, formalización, diseño, control, operación, diagnóstico y optimización, entre las principales. Cuando se aborda el Análisis de un Proceso, aparece un grupo disponible de modelos diferentes, que van desde los simbólico simples (diagrama de bloques) hasta los matemáticos sofisticados (modelo dinámico del Proceso basado su fenomenología). Tal evolución en la complejidad de la representación usada va de la mano con la complejidad de la tarea que se desarrolla. Es así como para la aproximación conceptual al diseño del Proceso basta con un Diagrama de flujo en Bloques (DB), que luego evoluciona hasta un Diagrama de Flujo de Proceso (DFP), justo cuando se ha seleccionado el tipo de equipo a utilizar en cada etapa. Aunque tanto el DFB como el DFP son representaciones gráficas, la adición de elementos pictóricos descriptivos del tipo de equipo usado en una etapa que hace el DFP, aumenta el nivel de detalle de la representación.

Ocurre algo similar con los modelos matemáticos del proceso, que pueden ir incrementado su nivel de detalle y por tanto su complejidad. Sin embargo existe una diferencia: en los modelos matemáticos las simplificaciones pueden hacerse antes de la obtención del modelo mismo, de acuerdo con el uso final que se le piensa dar a dicho modelo. Tales simplificaciones *a priori* del modelo siempre tienen como objetivo hacer que este se ajuste lo mejor posible a la función final para la que está siendo construido. Es decir, el uso futuro del modelo condiciona su grado de representación. Esto no implica que el modelo simplificado sea de menor calidad que el modelo original (sin simplificar), puesto que lo que en la simplificación se retiene es aquello que interesa a la hora de realizar la tarea específica para la que se requiere el modelo. En cambio, un modelo sin simplificar puede requerir tiempos de cómputo muy largos y que resultan inadecuados para la tarea a realizar. Además, es posible que en su estructura más grande (y a lo mejor mucho más exigente en número de parámetros), atrape comportamientos impropios que distorsionen los resultados finales de la tarea de ingeniería que con ese modelo se ejecuta.

El modelo de un proceso no es solamente un grupo de ecuaciones, se necesita de mucha más información para construirlo. En forma general, para la construcción de un modelo, se necesitan:

1. *Suposiciones:* características de tiempo, condiciones de flujo, características espaciales, rango y exactitud requerido para los estados del Proceso a modelar.
2. *Ecuaciones del modelo:* cuando se toman juntas, estas ecuaciones forman el modelo. Pueden ser de dos tipos:

- a) Ecuaciones de conservación: proporcionan ecuaciones diferenciales (balances de materia, energía y momento) que representan matemáticamente la ley básica de la conservación. Siempre proporcionan información sobre la magnitud del cambio en la variables de estado del Proceso.
 - b) Ecuaciones cinéticas: proporcionan información sobre la velocidad con la que se producirán los intercambios de materia, energía y cantidad de movimiento, así como de las reacciones químicas o bioquímicas que ocurran en el Proceso. Este es un tipo de información que se obtiene casi exclusivamente por vía experimental y relaciona la velocidad de los procesos físicos (transporte de materia, energía y cantidad de movimiento) y químicos o bioquímicos, con variables intensivas del sistema, tales como temperatura, pH, concentración, presión, etc.
3. *Condiciones iniciales*: hacen referencia a los valores de las variables del modelo (generalmente los estados) en un momento considerado como el instante inicial para la solución del modelo mismo. Es recomendable, aunque no obligatorio, que las condiciones iniciales correspondan a un estado estacionario o punto de equilibrio del modelo.
 4. *Condiciones de acotamiento o restricciones*: indican los intervalos permitidos, por la física misma de lo que se modela o por el deseo del diseñador, para el movimiento de las diversas variables y parámetros del Sistema que se modela.

3.4.5. Modelado Semifísico de Base Fenomenológica

En ingeniería el hecho de la semejanza entre el Objeto Real y la Representación, cobra mayor fuerza puesto que a partir de las diversas miradas (intenciones), que múltiples ingenieros puedan tener, un Objeto Real produce más de una “representación” válida. Aunque esto puede hacer pensar en un alto grado de subjetividad o arbitrariedad de las “representaciones”, existen procedimientos objetivos y racionales para la obtención de un Modelo que limitan la subjetividad sólo a la intencionalidad con la que el investigador obtiene los modelos del Objeto Real.

Los modelos útiles en las tareas asociadas con los procesos pueden agruparse de manera genérica en dos grandes familias: representaciones gráficas y representaciones matemáticas. A su vez, el primer grupo se subdivide en dos: los gráficos puros y los gráficos con información matemática. Estos últimos modelos tienen mayor contenido de información que los gráficos puros, por lo que son muy útiles cuando se está programando la solución numérica del modelo o se está usando el modelo ya identificado en Análisis. En este trabajo no se hace referencia detallada a los modelos gráficos, aunque como ya se mencionó son útiles como representaciones que incluso permiten operaciones sobre ellos. Ejemplos de tales operaciones en ingeniería de control son la reducción de diagramas de bloques en Funciones de Transferencia [Stephanopolous, 1984] o la extracción de ciclos de nodos fuertemente conectados en Grafo Dirigidos Signados [Grisales y Piedrahita, 1998]. En cambio, en este trabajo si se hace una aproximación detallada a la obtención de Modelos Semifísicos con Base Fenomenológica (MSBF), puesto que sus características permiten el desarrollo eficiente de las tareas básicas en la ingeniería y operación de procesos.

La necesidad de contar con modelos operables y de fácil obtención ha limitado la representación de procesos a herramientas fundamentalmente lineales y de fuerte base empírica. Esto ha frenado la inclusión en la industria del Diseño Simultáneo del Proceso y su Control (DSPyC) y de las técnicas avanzadas de control, ambas vertientes posibles de aplicar si se tienen modelos precisos y computacionalmente amigables. Sin modelos que cumplan éstas dos condiciones, aparentemente contradictorias, resulta imposible la evaluación de índices como eficiencia, controlabilidad, estabilidad y robustez [Marlin, 2000; Hangos et al., 2004]. Otro freno a la disponibilidad de tales modelos es la falta de conocimiento sobre el fenómeno real que ocurre en los equipos de proceso, debido a la dispersión y baja disponibilidad de estudios fenomenológicos sobre el proceso, por su alto costo y las dificultades asociadas con su solución y simulación. Esta falsa apreciación sobre la complejidad de los modelos de base fenomenológica ha hecho que su uso se limite a procesos de alto valor agregado (aeronáutica, farmacéutica, etc.). Hoy es posible sobrepasar esas dificultades a través

de modelos cada vez más precisos y con un costo computacional moderado. Una manera para lograr esto es utilizar modelos con precisión ajustada a la necesidad de la tarea a realizar y que en las simulaciones se ejecuten con rapidez.

Los MSBF son un punto intermedio entre los Empíricos (caja negra) y los Físicos o Fenomenológicos (caja blanca). Su estructura representa las dinámicas del proceso y las relaciones existentes entre ellas. Tal estructura se determina a través de balances de materia, energía y cantidad de movimiento en estado transitorio (balances dinámicos). Con esto se obtiene la parte fenomenológica del modelo (la estructura). Luego se pueden identificar los parámetros a través de métodos empíricos, pero ya con la estructura fija desde los balances. Son entonces estos parámetros la parte empírica del modelo. Este modo de obtener los MSBF, a partir de las leyes de conservación, mas un grupo de ecuaciones constitutivas, permite reducir los tiempos de ejecución de la solución del modelo sin perder apreciablemente precisión en la predicción.

Cuando se intenta la construcción de un modelo Físico o Fenomenológico (caja blanca), suelen presentarse problemas relacionados con el conocimiento detallado de algunos aspectos del fenómeno a modelar. Tales dificultades impiden la obtención de un modelo riguroso completo. Se tienen entonces dos alternativas: *i*) hacer suposiciones fuertes y obtener un modelo simple que preserve su estructura fenomenológica, pero a costa de una capacidad baja para predecir el comportamiento real del proceso, o *ii*) hacer uso de los modelos empíricos (caja negra) para incorporar dicho conocimiento específico al modelo fenomenológico original, desde fuentes heurísticas-experimentales. Por ejemplo, en el área de operaciones unitarias se dispone de numerosas curvas experimentales que describen estáticamente propiedades de sustancias en función de composiciones y temperaturas. Tal información puede incluirse en un modelo dinámico de base fenomenológica, a través de modelos empíricos como los Autorregresivos (ARX), los Borrosos (Fuzzy) o las Redes Neuronales Artificiales (RNA) [Díaz, 1996; Alvarez y Alvarez, 2006]. Al disponer de datos experimentales para las sustancias de interés, validados a nivel industrial y académico, se puede hacer uso de ellos para identificar dicha parte del modelo. De este modo, el modelado empírico se presenta como una excelente herramienta que complementa y sobrepasa esas limitaciones del modelado fenomenológico. De todos modos, el intervalo de validez original del MSBF, que está descrito por la teoría utilizada y no por los datos utilizados para su identificación, se puede alterar por la inclusión de esos submodelos empíricos.

Principio de Conservación: Balances de Materia y Energía

El principio de conservación establece que una propiedad Pr de un Proceso (y sus Sistemas asociados), no se destruye, sólo se transforma. En tal sentido, la Propiedad Pr considerada, debe resultar balanceable, para lo cual se requiere que Pr : *i*) se “transporte o transfiera” dentro-fuera del Sistema de Proceso y *ii*) sea susceptible de generación-consumo al interior del Sistema de Proceso. La expresión genérica de dicho Principio de Conservación matemáticamente se ve como:

$$\frac{dPr}{dt} = \sum_{i=1}^{Num_Entradas} F_i * \pi_i - \sum_{j=1}^{Num_Salidas} F_j * \pi_j + \sum_{k=1}^{Num_Fuentes} \Phi_k - \sum_{l=1}^{Num_Sumideros} \Lambda_l$$

con Pr la Propiedad de interés en el Sistema, F_i i -ésimo flujo de entrada, π_i la razón o proporción (concentración) en la que existe la Propiedad Pr en el i -ésimo flujo, F_j j -ésimo flujo de salida, π_j razón en la que existe la Propiedad Pr en el flujo j -ésimo, Φ_k k -ésima velocidad de aparición de la Propiedad Pr debido a fuentes existentes en el interior del Sistema, Λ_l l -ésima velocidad de consumo de la Propiedad Pr debido a sumideros existentes en el interior del Sistema.

Las ecuaciones de variación permiten obtener los cambios en la cantidad de movimiento, la energía y la masa en un sistema, así como encontrar las distribuciones espaciales y temporales de velocidad, temperatura y concentración [Bird et al., 2002]. Por su parte, la estática de fluidos resuelve un caso particular de tales ecuaciones de variación, por lo que requiere menos esfuerzo para abordar el problema y lograr la descripción estática del sistema [Streeter, 1971]. Desafortunadamente, la estática de fluidos sólo permite abordar sistemas en los cuales los fluidos no están en movimiento o que estando en movimiento están en estado estacionario. En cambio, en el estado transitorio (dinámico) las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema son más complejas debido a los múltiples efectos que se presentan en el movimiento de fluidos. Vale la pena en este punto aclarar la clasificación de los flujos como Estacionarios o en Estado Uniforme.

Definición 3.39 Flujo Estacionario. *Cuando los cambios (derivadas parciales o totales) de la velocidad, la temperatura y la densidad en un Sistema con respecto al tiempo son todos iguales a cero.*

Definición 3.40 Flujo Uniforme. *El cambio (la derivada parcial o total) de la velocidad en un Sistema con respecto a la posición es cero. Es opcional que las derivadas parciales de la temperatura y la densidad con respecto a la posición sean también iguales a cero.*

Como ejemplo de un Flujo Estacionario, puede mencionarse el flujo completamente establecido (desarrollado) de un fluido en una tubería. En este caso, aunque la velocidad cambia punto a punto, la velocidad de cada punto respecto al tiempo no cambia. Entre tanto, un Flujo Uniforme se presenta en un tanque agitado, en el cual aunque la velocidad puede aumentar con el tiempo, el cambio de velocidad de un punto a otro de una trayectoria dada es nulo.

Definición 3.41 Vector Solución de un Balance. *Es el conjunto de valores para los flujos másicos, energéticos, concentraciones y temperaturas que son solución del sistema de ecuaciones de balance (materia y energía) de un Proceso, cuando se hacen cero los términos de acumulación de masa y energía en el balance. Todo vector solución de un balance contiene las componentes (estados) de un punto de equilibrio del modelo matemático del Proceso (ver definición de Punto de Equilibrio).*

Definición 3.42 Partes del Vector Solución de un Balance. *Todo vector solución de un balance puede dividirse en dos partes: 1) Parte Homogénea o escalable, constituida por los flujos de materia y energía, y 2) Parte No Homogénea o no esclable, formada por las concentraciones y temperaturas.*

Definición 3.43 Homogeneidad del Vector Solución de un Balance. *Al multiplicar la Parte Homogénea de un vector solución por un escalar $k \in \mathbb{R}^+$ se genera un nuevo conjunto de valores que resultan solución del balance, asumiendo que la parte No Homogénea no cambia. Por el contrario, tal propiedad no aplica a la Parte No Homogénea, puesto que alteraría las concentraciones y temperaturas del Punto de Operación (PO).*

La homogeneidad puede aplicarse sin restricciones aparentes $\forall k \in \mathbb{R}^+$. Sin embargo, la escalabilidad de un proceso real no es tan simple como la homogeneidad la presenta, puesto que para cada valor de k deben verificarse los cambios en la parte no homogénea del vector solución. Es posible que a ciertos valores de k ya el proceso no sea viable. Además, como la información contenida en el vector sólo describe un estado estacionario del sistema (el estado para el cual se resolvió el sistema matemático de ecuaciones algebraicas resultantes), nada puede decirse de los cambios temporales de los flujos, temperaturas y concentraciones de las corrientes de proceso. Aparecen dos preguntas claves: ¿Resulta tal punto de equilibrio matemático único? y de no ser así, ¿Qué significan múltiples puntos de equilibrio en el proceso real? [Arnold, 1992]. Lo primero es aclarar que la multiplicidad de puntos de equilibrio matemático nunca proviene de la propiedad de homogeneidad del vector solución del problema. Únicamente se considerará la existencia de múltiples puntos de equilibrio

cuando los valores de la parte no homogénea del vector solución (concentraciones y temperaturas) presenten múltiples valores que cumplan con el sistema de ecuaciones algebraicas de los balances de materia y energía haciendo los términos de acumulación iguales a cero. La cuestión de si el punto de equilibrio es único o no, se resuelve desde la solución misma del sistema algebraico de ecuaciones de balance. Si la matriz \mathbf{A} del sistema lineal (o no lineal siempre que pueda expresarse como lineal mediante un cambio de variables), tiene inversa, la solución será única. En los demás casos, hay multiplicidad de estados estacionarios. Puesto que los múltiples puntos de equilibrio aparecen del sistema matemático (representación del proceso real), es necesario verificar muy bien las condiciones operativas que establecen dichos puntos, porque algunas serán no aplicables en la realidad puesto que:

- i)* Prescriben temperaturas muy altas o muy bajas para el proceso, o incluso temperaturas negativas en escalas absolutas Rankine o Kelvin.
- ii)* Concentraciones irrealizables con las sustancias involucradas en el proceso o incluso concentraciones negativas.
- iii)* Flujos de materia muy grandes para el proceso dado o incluso flujos negativos. Una excepción a esto último son las velocidades de reacción r_i , que tomadas como flujos, pueden ser negativas para indicar el sentido inverso de progreso de la reacción química (cuando ésta es reversible).
- iv)* Flujos de energía ($\frac{dQ}{dt}$) negativos o positivos pero con valores muy grandes que indican la imposibilidad física de hacer fluir tal cantidad de energía con un área de transferencia razonable, usando equipos convencionales.

De otro lado, la multiplicidad es indicio de comportamientos no lineales, que tras verificar la viabilidad de las condiciones operativas que ellos indican, generará dos o más estados estacionarios posibles en la operación del proceso. Recuérdese que estos estados estacionarios se diferencian en valores de concentraciones o temperaturas, pero pueden darse con valores constantes para los flujos de materia y energía (parte homogénea del vector solución de los balances estáticos). Sobre la característica de estabilidad o inestabilidad de dichos puntos de equilibrio, el sistema algebraico de ecuaciones que surge al hacer cero los términos de acumulación en los balances de materia y energía, no permite realizar tal análisis, por lo que debe volverse al sistema completo de balances con acumulación (ecuaciones diferenciales), y aplicar allí cualquiera de los métodos de análisis de estabilidad para sistemas dinámicos lineales [Luyben, 1990; Smith and Corripio, 1997] y no lineales [Vidyasagar, 1993, Gu, 1995].

Definición 3.44 Punto de Operación (PO) de un Proceso. *Es un vector numérico (de valor conocido) \mathbf{x}_{PO} que asocia a cada variable del vector de estado \mathbf{x} del proceso, un valor deseado y factible como estado estacionario \mathbf{x}_{EE} o equilibrio matemático de la representación del proceso. Dicho vector \mathbf{x}_{PO} indica el punto en el espacio de estado en el cual operará el proceso.*

Para mayor claridad, denotemos con \mathbf{v} el vector que representa las coordenadas de un Estado Estacionario (EE) de un proceso. Dicho vector se forma por la unión de los vectores que corresponden a los valores de los estados \mathbf{x} , los valores de las variables manipuladas por el sistema de control o el operario \mathbf{u} y los valores de las variables que no son manipulables por ser perturbaciones al proceso \mathbf{d} . Por lo tanto, el vector que representa las coordenadas de un EE de un proceso es más grande que \mathbf{x} , que \mathbf{u} y que \mathbf{d} . Tal vector \mathbf{v} está en un Espacio Expandido \mathbf{V} que se forma con la unión de los tres espacios ya mencionados: $\mathbf{X} \cup \mathbf{U} \cup \mathbf{D}$. Eso evidencia que un mapa de EE expandido sobre \mathbf{V} será diferente a un mapa de Puntos de Operación (PO) sobre \mathbf{X} . Además, permite ver la dificultad de construir un mapa de EE, puesto que al depender de los valores de \mathbf{u} y \mathbf{d} en cada instante de tiempo, hace que cada EE no sea un punto sino una región en el espacio $\forall \mathbf{u}$ y $\forall \mathbf{d}$, alrededor del PO. Es por esta razón que se acostumbra trabajar mejor en el Espacio de Estados \mathbf{X} y no en el espacio de puntos de operación \mathbf{V} . A pesar de esto, en Diseño tradicional de procesos, es frecuente que las tablas, nomogramas y gráficos con datos de los equipos, estén hechos en un Espacio de Operación reducido ($\mathbf{Z} = \mathbf{X} \cup \mathbf{U}$), asumiendo valores fijos para las perturbaciones \mathbf{d} , lo que permite calcular valores adecuados de \mathbf{u} para garantizar el estado estacionario: $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{0}$.

Definición 3.45 Régimen de Operación (RO) de un Proceso. Es una característica cualitativa que indica el orden jerárquico en el cual están organizadas las Dinámicas de Interés del proceso alrededor de un determinado Punto de Operación. Aunque existen varias opciones para jerarquizar las Dinámicas de un Proceso, esta definición asume que se jerarquizan de acuerdo con el efecto dinámico entrada-estado (que tan impactable es cada estado o dinámica del proceso, con las entradas manipuladas del proceso tomadas como un todo).

Las leyes fundamentales de la física proveen un marco de referencia para describir la conducta de un sistema a través de una consideración de la masa, la energía y la cantidad de movimiento del Sistema en un espacio tridimensional. La cuarta dimensión, el tiempo, también se debe considerar debido a su interés en el comportamiento de los sistemas variantes en el tiempo. Para el desarrollo de las ecuaciones que describen el modelo de un proceso se aplican los principios de conservación, los que se basan en un principio fundamental de la física (Primera Ley de la Termodinámica) que afirma que la masa, la energía y la cantidad de movimiento no se crean ni se destruyen, simplemente se transforman. La ecuación general de la conservación se puede escribir de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Acumulación} \\ \text{en el tiempo} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{transporte neto de entrada} \\ \text{a través de la superficie del sistema} \end{array} \right\} \\ - \left\{ \begin{array}{l} \text{transporte neto de salida} \\ \text{a través de la superficie del sistema} \end{array} \right\} \\ + \left\{ \begin{array}{l} \text{generación neta en el} \\ \text{volumen del sistema} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Consumo neto en el} \\ \text{volumen del sistema} \end{array} \right\}$$

Definición 3.46 Superficie o frontera de un Sistema. Es una superficie que genera un cerramiento que delimita a un proceso o a una parte de este para poder tratar todo lo contenido en el interior de tal cerramiento como un Sistema de Proceso. Esta superficie puede coincidir en su totalidad con superficies físicas reales del proceso o puede ser totalmente ficticia o estar formada por sectores reales y sectores ficticios.

Definición 3.47 Sistema de Proceso. Es una abstracción del Proceso o de una parte del mismo, a la manera de un Sistema, con lo cual se pueden aplicar al proceso todas las herramientas de representación y análisis de sistemas matemáticos existentes (Hangos and Cameron, 2001).

La superficie de un sistema provee la conexión de este con los alrededores y con la superficie de otros Sistemas de Proceso. Según el carácter de la conexión con los alrededores y con los otros Sistemas de Proceso, un Sistema de Proceso puede ser:

Abierto, en el que la masa y la energía pueden fluir a través de la superficie del Sistema de Proceso. Ejemplos de estos sistemas son los reactores de flujo continuo o los sistemas de separación de fases líquido-gas.

Cerrado, en el que no hay transferencia de masa a través de la superficie del Sistema de Proceso, pero si puede haber transferencia de energía. Ejemplo de estos procesos son los reactores por lotes con enfriamiento o calentamiento.

Aislado, en el que no hay transferencia de energía o masa a través de la superficie del Sistema de Proceso. En este caso, el espacio bajo consideración es termodinámicamente aislado de sus alrededores. Tales Sistemas de Proceso no son de mucho interés en la Ingeniería práctica, pero si resultan muy útiles para la teoría termodinámica.

La mayor parte del conocimiento de la termodinámica estadística se limita a los procesos de equilibrio. Por ejemplo, sea un Sistema Aislado subdividido en dos compartimientos que se pueden comunicar, considerando

que inicialmente hay un gas en uno de ellos. El sistema tiende rápidamente hacia un estado de equilibrio: el segundo compartimiento se llena para que la densidad (o cualquier cantidad termodinámica intensiva) quede espacialmente uniforme en los dos compartimientos. Ese hecho se deriva de la segunda ley de la termodinámica que indica que la entropía de un sistema aislado debe crecer a lo largo de su evolución temporal. Cuando el sistema alcanza un estado de equilibrio, la entropía alcanza un máximo. La entropía está directamente asociada con la noción de desorden. La situación con los compartimientos bien mezclados es más desordenada que la inicial, debido a que es más uniforme: no hay diferencia de estado o de estructura del gas entre las partes derecha e izquierda. A diferencia de esa condición de equilibrio, los sistemas fuera de equilibrio reciben energía o materia del exterior. En este sentido, se dice a menudo que son sistemas forzados, que por tanto presentan acumulación de materia o energía durante periodos de tiempo (comportamiento transitorio).

Balance de Materia

La expresión general para el balance de materia total desarrollado a partir del principio de la conservación de la materia, puede ser escrita como:

$$\frac{dM_T}{dt} = \sum_{j=1}^p \dot{m}_j - \sum_{k=1}^q \dot{m}_k$$

donde \dot{m} es el flujo másico, p es el número de entradas y q el número de salidas.

La expresión general para el balance de materia de cada componente puede ser escrita como:

$$\frac{dM_i}{dt} = \sum_{j=1}^p \dot{m}_{i,j} - \sum_{k=1}^q \dot{m}_{i,k} + \dot{m}_{gen,i} \quad i = 1, \dots, n$$

donde M_i es la masa total acumulada del componente i , $\dot{m}_{i,j}$ es el flujo másico del componente i en la corriente j , $\dot{m}_{i,k}$ es el flujo másico del componente i en la corriente k y $\dot{m}_{gen,i}$ es la velocidad de generación (signo +) o consumo (signo -) del componente i en el Sistema de Proceso. El balance también se puede escribir en términos molares N_i introduciendo flujos molares ($\dot{n}_{i,j}$ o $\dot{n}_{i,k}$) en lugar de flujos másicos ($\dot{m}_{i,j}$ o $\dot{m}_{i,k}$), al igual que la velocidad $\dot{n}_{gen,i}$ de generación (signo +) o consumo (signo -) molar de los componentes, de la siguiente manera:

$$\frac{dN_i}{dt} = \sum_{j=1}^p \dot{n}_{i,j} - \sum_{k=1}^q \dot{n}_{i,k} + \dot{n}_{gen,i} \quad i = 1, \dots, n$$

Balance de Energía

El balance general de energía para un Sistema de Proceso, se desarrolla desde el principio de conservación, de igual forma que para el balance de materia. Se acostumbra hacer otro balance (el de energía mecánica) para llevar registro de los cambios en la cantidad de movimiento en el Sistema de Proceso. En tal sentido, la energía total de un Sistema de Proceso, en procesos químicos y biológicos, tiene sólo tres componentes principales: *i*) La Energía Interna por unidad de masa \hat{U} , *ii*) La Energía Cinética K_E y *iii*) La Energía Potencial P_E . Así, la ecuación de la Energía Total por unidad de masa (E_T) de un Sistema de Proceso es:

$$E_T = \hat{U} + K_E + P_E$$

Se debe definir en que forma fluye la energía hacia adentro y fuera del Sistema de Proceso, es decir, si fluye por convección, conducción o radiación. El flujo de energía convectivo está asociado con la energía E que viaja (entrando o saliendo) con los flujos \dot{m}_i , por lo que se representa por $E_{\dot{m}_i}$, significando el flujo de energía por unidad de tiempo asociada con el i -ésimo flujo másico. Se expresa en unidades de energía por unidad de tiempo $[\frac{kJ}{s}]$. Por su parte, los flujos de energía por conducción o por radiación no se diferencian (excepto por la ecuación constitutiva que permite su cálculo), por lo que se representan por \dot{Q} .

El balance de energía también puede contener términos que describen el trabajo hecho por el sistema sobre los alrededores o por los alrededores sobre el sistema. El trabajo de eje (\dot{W}_S) da cuenta del flujo de energía mecánica desde o hacia el sistema, el trabajo de expansión o contracción (\dot{W}_{E_C}) del trabajo hecho en la expansión o contracción del volumen sometido al balance y el trabajo por flujo (\dot{W}_F) del trabajo hecho por el fluido o sobre el fluido mientras éste se mueve hacia dentro o fuera del sistema considerado:

$$\dot{W}_F = \sum_{j=1}^p \dot{m}_j * (PV)_j - \sum_{k=1}^q \dot{m}_k * (PV)_k$$

De este modo, el trabajo total se puede expresar como:

$$\dot{W} = \sum_{j=1}^p \dot{m}_j * (PV)_j - \sum_{k=1}^q \dot{m}_k * (PV)_k + \dot{W}_E + \dot{W}_S$$

Finalmente, el balance total de energía sobre un sistema puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \sum_{j=1}^p \dot{m}_j * (\hat{U} + K_E + P_E)_j - \sum_{k=1}^q \dot{m}_k * (\hat{U} + K_E + P_E)_k + \dot{Q} \\ &+ \sum_{j=1}^p \dot{m}_j * (PV)_j - \sum_{k=1}^q \dot{m}_k * (PV)_k + \dot{W}_E + \dot{W}_S \end{aligned}$$

Reorganizando,

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{j=1}^p \dot{m}_j * (\hat{U} + K_E + P_E + PV)_j - \sum_{k=1}^q \dot{m}_k * (\hat{U} + K_E + P_E + PV)_k + \dot{Q} + \dot{W}_E + \dot{W}_S$$

Utilizando la relación termodinámica para la entalpía por unidad de masa dada por:

$$\hat{H} = \hat{U} + PV$$

Es posible escribir el balance general de energía como:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{j=1}^p \dot{m}_j * (\hat{H} + K_E + P_E)_j - \sum_{k=1}^q \dot{m}_k * (\hat{H} + K_E + P_E)_k + \dot{Q} + \dot{W}_E + \dot{W}_S$$

Se aclara que los de la ecuación están escritos en cantidades específicas (por unidad de masa como hasta ahora \hat{U} , \hat{H}) o en su equivalente molar (por unidad de mol \bar{U} , \bar{H}), tal como se sugiere en el Anexo B.

Simplificaciones y Modificaciones al Balance General de Energía.

Consideración 1. Los componentes de energía cinética y potencial pueden ser despreciados, luego $K_E \simeq 0$ y $P_E \simeq 0$. Así, se llega a una forma simplificada del balance de energía. El lado izquierdo de la ecuación representa la energía interna total del sistema.

$$\frac{d\hat{U}}{dt} = \sum_{j=1}^p \dot{m}_j * \hat{H}_j - \sum_{k=1}^q \dot{m}_k * \hat{H}_k + \dot{Q} + \dot{W}_E + \dot{W}_S$$

El cálculo de las entalpías específicas para flujos de entrada y salida es usualmente realizado a través de paquetes de predicción termodinámica, los cuales tienen en cuenta las fases del fluido.

Consideración 2. Las entalpías son evaluadas a las condiciones de temperatura de las corrientes, considerando una temperatura de referencia T_{Ref} .

$$H_j(T_j) = H_j(T_{Ref}) + \int_{T_{Ref}}^{T_j} C_{p_j}(T) dT$$

Consideración 3. Finalmente, la forma más común para expresar el balance de energía para sistemas reaccionantes es la siguiente:

$$V * \rho * C_p \frac{dT}{dt} = \sum_{j=1}^p \dot{m}_j * \hat{H}_j - \sum_{k=1}^q \dot{m}_k * \hat{H}_k + r * V * (-\Delta \bar{H}_R) + \dot{Q} + \dot{W}_E + \dot{W}_S$$

donde los dos primeros términos del lado derecho representan la energía requerida para ajustar todas las corrientes a las condiciones del reactor. El tercer término representa la generación o consumo de energía a la temperatura del reactor debido a la reacción química, siendo r la velocidad de reacción en $[\frac{gmol}{s}]$. Los últimos términos son el calor transferido y el trabajo. En el lado izquierdo, V y ρ representan el volumen y la densidad de la masa del sistema respectivamente. Se asume por convención que si el calor fluye de los alrededores al Sistema de Proceso, es de signo positivo y en sentido contrario es de signo negativo.

El calor de reacción (por kg de reactivo que reacciona) $\Delta \hat{H}_R$ se calcula de la siguiente manera

$$\Delta \hat{H}_R(T, P, \pi) = \left[\sum_{j=1}^{productos} \sigma_j * \bar{H}_j(T, P, \pi_j) - \sum_{i=1}^{reactivos} \sigma_i * \bar{H}_i(T, P, \pi_i) \right] * \frac{1}{\mathfrak{M}}$$

siendo \mathfrak{M} la masa o peso molecular de la sustancia $[\frac{kg}{kgmol}]$, σ el coeficiente estequiométrico de cada sustancia, i los reactivos y j los productos. Para este cálculo se halla primero el calor de reacción estandar en función de los calores de formación de las sustancias que participan en la reacción y a condiciones estandar, es decir, $T^\circ = 25^\circ C$, $P^\circ = 1atm$ y fases químicas de los componentes π° dadas directamente de la ecuación química. Cuando las condiciones del sistema reactivo no son las estándar se debe realizar una compensación en el cálculo de dicho calor de reacción.

Balance de Cantidad de Movimiento

El balance de cantidad de movimiento está basado en la ley de Newton y se escribe de forma general como:

$$\frac{d(M_T * v_i)}{dt} = \sum_{j=1}^N f_{r_{j,i}}$$

donde M_T es la masa total, v_i es la velocidad en la dirección i y $f_{r_{j,i}}$ es la j -ésima fuerza actuando en la dirección i . Como existen tres posibles dimensiones x , y y z , cada sistema tiene tres balances de cantidad de movimiento en cada una de estas direcciones. Al lector interesado en profundizar se le sugiere consultar el trabajo seminal [Bird,1957] y el posterior libro consolidado [Bird et al., 2002].

Ecuaciones Constitutivas

Estas son ecuaciones algebraicas (o diferenciales), que se formulan desde el conocimiento del diseño, el control, la termodinámica fundamental e incluso datos de operación del Proceso real. Las ecuaciones constitutivas se adicionan a los balances para formar el modelo y son específicas de cada fenómeno. Se utilizan para describir velocidades de transferencia de masa, energía y cantidad de movimiento, velocidades de reacción, relaciones y restricciones termodinámicas, relaciones de equilibrio y ecuaciones de estado, relaciones entre los balances, relaciones de control y de construcción del equipo mismo. Las ecuaciones constitutivas pueden dividirse en tres grandes familias: *i*) Ecuaciones de relaciones arbitrarias de diseño u operación, *ii*) Ecuaciones de transporte que siguen la ley de gradiente, y *iii*) Ecuaciones que dan propiedades termodinámicas.

Cuando el flujo de una propiedad balanceable se da de un volumen a otro se habla de flujos convectivos o en bulto (*bulk*). Son ejemplos de este, los flujos de materia expresados como el flujo másico $\dot{m} [=] \frac{kg}{s}$, flujo volumétrico $\dot{v} [=] \frac{m^3}{s}$ o flujo molar $\dot{n} [=] \frac{kgmol}{s}$. También están los flujos de energía, la mayoría de las veces energía térmica $\dot{Q} [=] \frac{kJ}{s}$. En general, tales flujos están indicados como condiciones del problema, bien sea que se conocen desde la operación del Proceso o que se están determinando a través del diseño del Proceso. Este tipo de datos forman las ecuaciones constitutivas de relaciones arbitrarias, las cuales son altamente específicas del Proceso particular que se trata.

Cuando el flujo de una propiedad balanceable se da entre un punto en el espacio y otro, separados por una superficie (dos dimensiones), se habla de flujos de transporte o transferencia. Las expresiones transporte, tránsito, transmisión o transferencia se refieren a la forma como se mueve o pasa, a través de una superficie, cualquier entidad z , que en su movimiento puede cuantificarse como $\frac{dz}{dt}$. Dicho fenómeno sigue la ley de gradiente, que se formula a través de tres términos: una fuerza impulsora, una resistencia al flujo de la entidad z y un flujo neto de z que se produce: *Flujo Neto* = f (*Resistencia*, *Fuerza Impulsora*). Debe destacarse aquí que como se vió, el flujo neto es también un diferencial respecto al tiempo. Sin embargo, su interpretación es la de un flujo y no la de un cambio de una propiedad $\frac{dPr}{dt}$ en un volumen o espacio dado (sistema de proceso) con el tiempo, como pasa con los términos diferenciales de un balance. Aunque los gradientes o fuerzas impulsoras pueden tener múltiples expresiones para su cálculo, dos de las más usadas son: $(Pr_{in} - Pr_{out})$ o $(Pr^* - Pr_{out})$, siendo la primera la diferencia entre el valor de una propiedad Pr en la entrada y la salida del sistema de proceso. La segunda indica la diferencia entre el valor de una propiedad en el equilibrio o saturación (*) y la propiedad en la salida del sistema de proceso. Ambas asumen agitación perfecta dentro del sistema de proceso; de ahí que se pueda tomar el valor de la propiedad en la salida como representación de la propiedad dentro del sistema de proceso. En consecuencia la expresión para calcular dichos flujos, utilizando el Principio de Gradiente, será:

Aunque el origen del principio del gradiente (llamado también de gradiente de velocidad) se remonta a los trabajos de los primeros filósofos y físicos de la historia, puede citarse como referencia detallada al mismo

en un texto más reciente, el trabajo del profesor Alexander Fradkov del *Institute of Machine Engineering Problems of the Russian Academy of Sciences*. Allí se propuso el Principio del Gradiente de Velocidad (*Speed Gradient Principle*) [Fradkov, 1980], para explicar el principio de evolución de los sistemas naturales. Específicamente, un gran número de modelos dinámicos de sistemas físicos pueden ser interpretados como un algoritmo de gradiente de velocidad, que cumple con una meta específica. Es decir, existe un enlace entre las leyes de control en sistemas técnicos y las leyes de sistemas físicos dinámicos [Fradkov et al., 1999]. Este principio puede formularse de manera más específica si se considera que todo transporte o transferencia está regido por un coeficiente de transferencia. Por ejemplo, para la transferencia de Calor se tiene:

$$\dot{Q}_{a_b} = A_T * U * (T_a - T_b)$$

con \dot{Q}_{a_b} el flujo neto de calor entre los puntos a y b , A_T es el área a través de la cual se está dando la transferencia de calor, U es el coeficiente global de transferencia de calor y T_j es la temperatura en el punto $j = a, b$.

Para la transferencia de masa, se tiene:

$$\dot{m}_{i,a_b} = A_T * K_i * (\Pi_a - \Pi_b)$$

con \dot{m}_{i,a_b} el flujo neto de la sustancia i entre los puntos a y b , A_T es el área a través de la cual se está dando la transferencia, K_i es el coeficiente de transferencia de masa para la sustancia i y Π_j es el potencial químico en el punto $j = a, b$. En este caso, se habla de potencial químico puesto que la transferencia de masa puede formularse en función de diversas variables de proceso. Ejemplos de tales fuerzas impulsoras son la concentración, la presión e incluso la temperatura.

Finalmente, las ecuaciones para determinar la velocidad de una reacción química o bioquímica también puede formularse con base en este principio. En general, la velocidad de reacción r_A para un especie A será función de una constante de reacción k_A y de las concentraciones de los compuestos que reaccionan C_A, C_B, \dots, C_Z : $r_A = k_A * f(C_A^\alpha, C_B^\beta, \dots, C_Z^\omega)$. El orden de la reacción es dado por la suma de los coeficientes $\alpha, \beta, \dots, \omega$. Por su parte, la constante de reacción k_A depende generalmente de la temperatura, por ejemplo, escrita como una expresión tipo Arrhenius: $k_A = k_0 * e^{-\frac{E_a}{RT}}$, en la que E_a es la energía de activación para la reacción, R es la constante universal de los gases y T la temperatura del Sistema de Proceso en el que está ocurriendo la reacción.

El grupo final de ecuaciones constitutivas está formado por relaciones termodinámicas. Las propiedades termodinámicas son absolutamente esenciales para el modelamiento de sistemas de proceso. En casi todos los procesos se tiene la necesidad de predecir densidades, viscosidades, conductividades térmicas y capacidades caloríficas para líquidos, vapores o mezclas, por mencionar algunas propiedades. Para esto se utilizan correlaciones simples aplicables al rango de validez del modelo. En otros casos se puede recurrir a paquetes de software para el cálculo de dichas propiedades físicas. Existen también expresiones que van desde simples relaciones lineales hasta relaciones polinomiales más complicadas, formuladas en términos de las principales propiedades termodinámicas intensivas del sistema como la temperatura, presión o la concentración. La aplicación de las relaciones polinomiales depende fuertemente del rango de operación del Proceso. Las relaciones de equilibrio, tanto en sistemas reactivos (equilibrio químico) como en sistemas con cambio de fase (equilibrio de fase), se usan con frecuencia como ecuaciones constitutivas. Para equilibrio de fases en sistemas líquido-vapor, los estados son a menudo relacionados a través de estimaciones como punto de burbuja y punto de rocío para calcular las concentraciones, presiones o temperaturas de equilibrio. Para representar el equilibrio de fases también se utiliza el concepto de Volatilidad Relativa α_{ij} .

Un Procedimiento para Obtener Modelos Semifísicos de Base Fenomenológica (MSBF)

Existen en la literatura varias formas de obtener MSBF. Las aproximaciones más destacadas, y que se invita al lector interesado a mirar en detalle, son: [Himmelblau and Bischoff, 1968; Aris, 1978; Ogunnaike and Ray, 1994; Bequette, 1998; Hangos and Cameron, 2001; Bird et al., 2002; Alvarez et al., 2009]. Sin embargo, algunos aspectos importantes del método quedan bajo la determinación total del modelador, a pesar de que desde el conocimiento de la Ingeniería de Procesos pueden darse lineamientos claros para asegurar un buen modelo. El método que se propone en este trabajo parte de la base de que un problema de modelado puede formularse con los pasos formales de un algoritmo [Hangos and Cameron, 2001]:

ALGORITMO:

Dados: *i) un Sistema de Proceso, ii) un Objetivo para el modelado y iii) un Criterio de Validación.*

Encontrar: *un modelo para el “Sistema de Proceso”.*

De acuerdo con: *un método objetivo y racional, que confine la subjetividad del que modela a la mera intencionalidad del modelo.*

Aparecen cuatro conceptos básicos, que deben definirse con claridad para que el método aquí complementado sea útil. El primero que es el Sistema de Proceso, definido previamente. Los otros tres se definen y exponen a continuación.

Definición 3.48 *Objetivo para el modelado.* *Es la intencionalidad de quien modela respecto de al menos una semejanza que quiere preservar entre el Objeto Real (Proceso) y el Objeto Práctico-Empírico (Modelo o Sistema). Normalmente tal Objetivo se expresa en el deseo de predecir (usando el modelo) el comportamiento de al menos una variable del Objeto Real, ante cambios en una o más de sus variables de entrada o internas. El uso del modelo se funde con el Objetivo para el Modelado, aunque el uso impone luego restricciones fuertes para la validación del modelo.*

Definición 3.49 *Criterio de validación para un modelo.* *Es al menos una manera de probar la fidelidad del modelo respecto de la semejanza tomada entre Objeto Real (Proceso) y Objeto Práctico (Sistema o Modelo). Si no existe, no habrá manera de darle al modelo legalidad ante sus potenciales usuarios. La validación da al modelo existencia en una comunidad, pero no lo hace poseedor de la verdad sobre el Objeto Real y mucho menos sobre toda la verdad.*

Finalmente, el aspecto que el algoritmo da como complemento final es el Procedimiento de Modelado. En este trabajo se cubren aspectos que en metodologías previas [Ljung and Glad, 1997; Bequette, 1998; Hangos and Cameron, 2001] han quedado poco claros. En tal sentido, y siguiendo una orientación didáctica frente a esos aspectos que siempre han resultado esquivos al ingeniero de industria y al estudiante que apenas empieza con los modelos semifísicos, aquí se adicionan pasos complementarios y se explica en detalle su ejecución. El que sigue, es el procedimiento que se propone para la obtención de MSBF [Alvarez et al., 2009]:

1. *Elaborar una Descripción Verbal y un Diagrama de Flujo de Proceso que se complementen.* Este paso implica la descripción de forma escrita del Proceso (objeto de estudio), con todas sus características. El texto debe contener una descripción fiel de lo que ocurre en el Proceso y de las características más importantes del mismo, dependiendo del objetivo del modelo, de forma que cualquier persona que lo lea pueda entender el Proceso. Si esto se logra, es posible armar un Diagrama de Flujo del Proceso que esté acorde con lo que se quiere modelar.
2. *Fijar un Nivel de Detalle para el Modelo, de acuerdo con su utilización: ¿Qué preguntas contestará el modelo?.* El Nivel de Detalle se refiere a como se verán geométrica y espacilamente las variables en el Proceso. Para este paso se tienen dos insumos: las características del proceso y el resultado que se

espera que el modelo entregue. Las características pueden ampliarse para abarcar el nivel de detalle que ya se utilizó en el paso inicial para lograr el tratamiento del Proceso como un Sistema. Se debe revisar si existe homogeneidad en el Sistema tomado, o si hay regiones homogéneas que ayuden a identificar posibles particiones del Sistema. En cuanto al objetivo del modelo, éste define qué variables e interacciones son de mas importancia que otras (que muy posiblemente deban descartarse). El nivel de detalle hace alusión a los alcances que se quieren del modelo teniendo en cuenta las características importantes del sistema y el deseo del modelador. Por eso, la clave en este paso es listar las preguntas que luego contestará el modelo.

3. *Definir tantos Sistemas de Proceso (SdeP) sobre el Proceso que se modelará como los exija el Nivel de Detalle y representar la relación de todos los SdeP en un Diagrama de flujo en Bloques (DB).* Los Sistemas de Proceso, tal y como se definieron previamente, resultan similares a los típicos “volúmenes de control” de las operaciones unitarias. En este paso se deben definir los SdeP en los que residen los comportamientos a modelar. Se definen por tanto las fronteras para cada SdeP, lo que permite visualizar mejor los balances aplicables y el tipo de interacciones que se dan en las fronteras. Las siguientes tres consideraciones pueden ayudar en la identificación de los SdeP: *i)* Buscar separaciones físicas en el equipo de proceso tales como paredes, membranas, etc., *ii)* Detectar la existencia de diferentes fases en el equipo de proceso: líquido, gas, sólido, etc., y *iii)* Suponer límites arbitrarios cuando una porción del proceso requiera atención especial: capa límite. Cada SdeP definido se representa como una caja en un DB, procurando reflejar en tal diagrama la secuencia real del proceso.
4. *Aplicar el Principio de Conservación sobre cada uno de los Sistemas de Proceso (SdeP).* Se trata de plantear balances dinámicos (considerando acumulación en cada SdeP) de alguna propiedad en el sistema (masa, energía (térmica), cantidad de movimiento, otras). Verificar siempre que todas las suposiciones hechas para la deducción de las ecuaciones de balance sean razonables y estén de acuerdo con el comportamiento del Proceso real. Este paso entrega la estructura fenomenológica del modelo dinámico: Ecuaciones Dinámicas de Balance (EDB). En procesos químicos y biotecnológicos se sugiere tomar para cada SdeP al menos los siguientes balances: *i)* Balance total de masa, si existe acumulación detectable o significativa. La masa total en el sistema de proceso puede luego reescribirse en términos de variables de proceso que reflejen la acumulación, tales como Presión para gases o vapores o Nivel para líquidos, sólidos o lechadas. *ii)* Balance por componente, si al menos una sustancia está cambiando su concentración en el SdeP. Si existen dos o más sustancias que cambian, debe buscarse una relación entre ellas (ecuación constitutiva) o en caso de no existir tal relación, recurrir a la formulación de un balance para cada una. *iii)* Balance general de energía, que puede ser tomado desde al menos dos sistemas de proceso: el que entrega la energía y el que la recibe. Ambas ecuaciones tienen la misma información sobre el Proceso, pero expresadas con diferentes variables.
5. *Seleccionar entre las Ecuaciones Dinámicas de Balance (EDB) aquellas con información valiosa para cumplir con el objetivo del modelo.* Algunas ecuaciones de balance resultan redundantes y por tanto superfluas, por lo que la estructura (EDB) debe confrontarse con lo que se pedirá luego al modelo y de este modo depurar la estructura del mismo. Adicionalmente, entre dos expresiones del mismo balance general de energía (como se mencionó en el punto anterior), se debe escoger aquella con variables para las que se tenga mas información. De este modo, la solución del modelo será más fácil.
6. *Definir para las EDB esenciales, los parámetros, las variables y las constantes conocidas en cada SdeP.* Nótese que esta definición está directamente asociada con el uso pensado para el modelo: cuáles son las variables que debe calcular o predecir el modelo (salidas del modelo) y cuáles no debe calcular porque son externas (variables de entrada o perturbaciones del Proceso). Además, algunas variables de proceso pueden ser tomadas como parámetros buscando un punto de operación óptimo (por ejemplo cuando el modelo se usa para diseño).
7. *Hallar ecuaciones constitutivas que permitan calcular el mayor número de parámetros en cada Sistema de Proceso.* Se trata de encontrar expresiones que describan los parámetros del modelo de forma que se cumpla con el objetivo y el nivel de detalle del mismo. Ésta es una de las etapas más laboriosas

de la metodología. Se recurre a todo el conocimiento de base fenomenológica que se tiene del proceso, en cuanto a cinéticas de reacciones químicas y biológicas, descripción de fenómenos de transporte, equilibrios entre fases, etc. Esto se complementa con ajustes empíricos a datos de operación (modelos empíricos) u otros conocimientos *a priori* sobre el proceso cuando sea necesario. Recuérdese que todas las ecuaciones del modelo deben escribirse en un orden que permita luego la formulación de la solución del sistema de ecuaciones. En tal sentido, los Diagramas de Flujo de Información (DFI) son una herramienta útil para esta tarea.

En [Hangos et al., 2005], se establece como recomendación general para la búsqueda de ecuaciones constitutivas, la determinación de los mecanismos de transporte de energía, masa o transformación de la materia (física o química). Se dan cuatro mecanismos principales: *i*) Convección, en la que el flujo de masa global (en bulto) transporta masa y energía (ejemplo típico son los flujos de entrada y salida a un proceso), *ii*) Transferencia, mecanismo de transporte de masa (componentes específicos) o energía entre dos fases en contacto directo o a través de una pared de cualquier clase (sólida, porosa, con permeabilidad selectiva, etc.), independientemente de que exista o no flujo convectivo entre ellas, *iii*) Reacción química (o bioquímica), en la que se transforma la constitución física (molecular) de al menos un componente, con eventual liberación (exotermia) o absorción (endotermia) de energía respecto a los alrededores, y *iv*) Cambio de fase, que implica la transformación física de uno o más componentes de la masa contenida en un proceso, sin que aparezcan sustancias nuevas (no hay reacción química).

8. *Verificar los Grados de Libertad del modelo ($GL = \# \text{ Ecuaciones} - \# \text{ Incógnitas}$)*. Cuando los GL del modelo matemático en cada SdeP no se cumplen (generalmente hay más incógnitas que ecuaciones), es necesario eliminar “incógnitas”, es decir, existen parámetros del modelo que aún deben hacerse explícitos. Se deben identificar parámetros desde datos experimentales o conocimiento *a priori* hasta anular los Grados de Libertad (GL) del modelo. La identificación implica la obtención de un submodelo para tal parámetro. Dicho submodelo resulta generalmente de carácter empírico. Al cumplir esta etapa de verificación se dice que el modelo es “coherente” y está listo para su resolución. Es entonces posible realizar el Diagrama de Flujo de Información (DFI) del modelo, el cual permite ver la forma de calcular las salidas del modelo a partir solamente de las variables de entrada al modelo (y de los valores numéricos fijos que se hayan tomado para otros parámetros del modelo).
9. *Obtener el modelo computacional o solución del modelo matemático*. La solución del modelo matemático del proceso generalmente será numérica, por la presencia de ecuaciones diferenciales no lineales. Por lo tanto, se debe seleccionar y programar un método de solución del modelo matemático, lo que produce un modelo computacional del Proceso. Es necesario verificar que el modelo computacional y el modelo matemático coincidan en comportamiento, puesto que algunos ajustes de la solución computacional pueden producir resultados que no son del proceso real (por ejemplo la aparición de oscilaciones por mala selección del tamaño del paso de integración).
10. *Validar el modelo para diferentes condiciones y evaluar su desempeño*. La validación del modelo matemático del proceso implica resolver el modelo computacional ya verificado y analizar su desempeño respecto a datos reales tomados del Proceso real o datos de la literatura (validación cuantitativa) o respecto al comportamiento esperado de este tipo de procesos (validación cualitativa con conocimiento previo). Las diferentes condiciones para las que se valida el modelo dan una medida de su alcance o grado de generalización. Dichos límites de validez del modelo deben dejarse explícitos en la documentación del mismo. Si la validación fue cuantitativa, es muy importante indicar los errores máximos y promedio del modelo frente a los datos reales en el intervalo de validez establecido.

Otro tipo de validación, más exhaustiva incluye la verificación experimental de las suposiciones realizadas, lo que implica comparar el comportamiento del modelo con el comportamiento del proceso real. Se acostumbra también comparar el modelo construido con otros modelos aplicables al mismo problema. En esta etapa no es posible modificar los valores de los parámetros para obtener un mejor ajuste, ya que en dicho caso se podría deducir que el proceso de identificación del modelo ha sido incorrecto o que el modelo no es capaz de describir la situación. Habría que tener en cuenta en esta etapa que las

condiciones de trabajo correspondan a unos valores en el intervalo en que se ha identificado el modelo, ya que variaciones importantes no incluidas en el mismo pueden alterar el comportamiento de éste. Si los resultados de la validación muestran que el modelo desarrollado no es apropiado para el objetivo propuesto, entonces se devuelve al paso 2 y se ejecuta la secuencia de nuevo, con la ventaja que los resultados de la validación pueden indicar cómo mejorar el modelo.

Hay finalmente dos definiciones muy útiles a la hora de formular MSBF: la interacción másica y la interacción energética. A partir de ellos, es posible determinar la validez o no de la partición de un Proceso en dos o más Sistemas de Procesos, sobre los cuales se establecen los balances de materia, energía y cantidad de movimiento necesarios para obtener el modelo [Reklaitis and Schneider, 1986].

Definición 3.50 Interacción Másica en un Sistema de Proceso. *Se presenta interacción másica en un Proceso siempre que al menos una de sus corrientes (de entrada o de salida) tenga concentraciones diferentes a las demás. Si existe interacción másica el número de balances independientes de materia en el Sistema es igual al número de sustancias que participan del mismo. Si no existe interacción másica, sólo es posible plantear un balance independiente de materia: El balance total.*

Las sustancias a las que hace mención la anterior Definición pueden ser componentes puros o mezclas que preserven sus características al pasar por el sistema, como ocurre, por ejemplo, con el aire (mezcla en proporción molar 21 % O_2 , 79 % N_2) que interviene en un secador de sólidos. En este caso, el aire mantiene su integridad como si fuera un compuesto puro, pasando por el secador sin que la proporción de sus componentes sufra cambio. Caso contrario se presenta en un quemador al cual se alimenta aire pero se consume parte de su oxígeno en la combustión, con lo que cambia la proporción (O_2 , N_2).

Definición 3.51 Interacción Energética en un Sistema de Proceso. *Aparece interacción energética siempre que: i) por lo menos una corriente presente una temperatura diferente a las demás, ii) exista interacción másica, iii) exista un flujo neto de energía entre los alrededores y el sistema, bien sea como trabajo o como calor. Si existe interacción energética se dice que el balance de energía en dicho Sistema de Proceso es una ecuación que brinda información en la solución de los balances del SdeP. En cambio, cuando no existe interacción energética, la formulación del balance de energía del SdeP no aporta información puesto que conduce a la igualdad $0 = 0$.*

Los flujos de energía en un proceso aparecen bajo determinadas circunstancias, totalmente caracterizables. Esto permite una clasificación de las posibles interacciones energéticas en un proceso, y por lo tanto su cuantificación de manera muy precisa. Tales interacciones son: calentamiento-enfriamiento sin cambio de fase, cambios de fase, disolución-concentración y finalmente reacción química.

Mecanismos y Dinámicas en un Proceso

Si bien cualquier comportamiento dinámico se asocia con la variación temporal de al menos una variable, el concepto “Dinámica” se usa en este trabajo con la acepción de una variable específica, cuya variación temporal está claramente identificada directamente con el tiempo. Esto implica que a pesar de que todas las demás variables o parámetros del proceso estén fijos, si la variable se deja en un punto diferente a uno de los equilibrios del sistema (Estados Estacionarios EE), evolucionará en el tiempo hasta alcanzar un entorno de uno de esos EE . Todos los comportamientos dinámicos del Proceso se agrupan en el conjunto Γ de las dinámicas del proceso. Para cada x_i de un sistema continuo en Γ , existe una expresión directa en función del tiempo:

$$\begin{aligned} x_i &\in \Gamma \Leftrightarrow \exists f_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{v}) \text{ ó } g_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{v}, t) \text{ tal que:} \\ \frac{dx_i}{dt} &= f_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{v}) \text{ ó } x_i = g_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{v}, t) \end{aligned}$$

con \mathbf{x} el grupo de dinámicas Γ del proceso, también denominado vector de Estados, f y g funciones escalares, \mathbf{p} y \mathbf{v} respectivamente el vector de Parámetros y el vector de variables de entrada al proceso. No se consideran “Dinámicas” del proceso aquellas variables z_i cuyo cambio temporal está asociado con el cambio temporal de los estados, parámetros u otras variables del proceso, sin que el tiempo aparezca de manera explícita en su formulación: $z_i = h(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{v})$, con h una función escalar. Es conveniente denominar a z_i “Mecanismo”, con el fin de permitir que algunos parámetros de proceso puedan describirse mediante esos mecanismos. Es muy importante comprender la diferencia entre el concepto de mecanismo (y su calificativo usual “controlante”) y el de dinámica principal. Por ejemplo, es posible que el mecanismo controlante en una reacción heterogénea sea difusivo siempre que la cinética de la reacción dependa fundamentalmente de la difusión de reactivos o productos, mientras que la “Dinámica” es la reacción química. Un sinónimo común en diseño es el de “etapa controlante”, como referencia al fenómeno que está limitando el avance dinámico de un proceso en el sentido que se desea.

Modelos en el Espacio de Estados

Con el trabajo pionero de Jules Henri Poincaré nuevos métodos de la mecánica celeste [Poincaré, 1892], se inició la formulación de una teoría general de los sistemas dinámicos en función de conjuntos de ecuaciones diferenciales. Fue Poincaré quien introdujo la idea de considerar el conjunto relevante de variables del sistema como la trayectoria de un punto en un espacio n -dimensional. Ese enfoque al estudio de problemas dinámicos se convirtió en lo que hoy se conoce como método del Espacio de Estado. Así, el concepto de estado se hace dominante en el estudio de los sistemas dinámicos, en lo que es fundamental considerar que la conducta actual está influenciada por la historia previa del sistema y su comportamiento no puede por lo tanto especificarse simplemente como una relación instantánea entre conjuntos de variables de entrada y de salida. Se necesita por tanto, un conjunto adicional de variables cuyo objetivo es tomar en cuenta la historia pasada del sistema. Estas variables son las variables de estado, que representan la mínima cantidad de información que resume todo el pasado dinámico del Sistema. Por lo tanto es todo lo que se necesita conocer para poder predecir su evolución futura frente a cualquier señal de entrada que se aplique. Dicha predicción será la solución de un modelo del Proceso en el Espacio de Estados.

Los modelos en el Espacio de Estados pueden formularse desde cualquiera de las tres clases posibles de modelo: caja blanca, caja gris o caja negra. Los de caja blanca corresponden directamente a los Modelos Fenomenológicos, tomando como estados las variables que tienen ecuación diferencial. Los de caja gris, se obtienen directamente del Modelo Semifísicos de Base Fenomenológica del proceso, tomando como variables de estado las variables relevantes (dinámicas) que aparecen en los diferenciales de los balances en estado transitorio. Esto demuestra que cualquier MSBF puede llevarse a la forma de un modelo en el Espacio de Estado. Finalmente, los de caja negra son formulaciones estándar (tipo plantilla), a las cuales se les deben identificar los parámetros por algún método de identificación de modelos. La plantilla más conocida de modelo en el espacio de estado es la lineal afín con la entrada:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}; \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

con las matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} y \mathbf{D} , las que contienen la información propia del Proceso, \mathbf{x} el vector de estado, \mathbf{y} el vector de salida y \mathbf{u} el vector de variables manipuladas. Algunos autores incluyen una matriz asociada con las perturbaciones, no considerada en la formulación anterior [Ogata, 1998].

Unicidad de Estructuras de Modelo de las Operaciones Unitarias

Cuando se desarrollan Modelos Semifísicos de Base Fenomenológica (MSBF) para un proceso, es evidente que los balances de materia y energía aplicados durante el modelado, producen una estructura de modelo que resulta común a cada operación unitaria. La razón es simple: los balances de materia, energía y cantidad de movimiento sobre un equipo de proceso resultan independientes de las dimensiones y forma del equipo. Tales balances están asociados a la tarea que el equipo desarrolla en términos de las transferencias que en él se dan: calor, masa, cantidad de movimiento e información cuando se modela también el Sistema de Control. Por lo tanto, la estructura matemática que proviene de los balances será única para cada tipo de transferencia que se realice. Ese hecho tiene implicaciones interesantes a la hora tanto del modelado como del uso del modelo para las tareas de análisis y síntesis. Por ejemplo, en [Marín et al., 2004] se desarrolló un modelo general para los Intercambiadores de Calor (IC) de contacto indirecto y sin cambio de fase. Se consideraron como variables a controlar tanto la temperatura de salida del fluido de proceso como la de salida del fluido de servicio. En la realización del modelo se consideraron las siguientes suposiciones: *i*) Los coeficientes de transferencia de calor y las propiedades de los fluidos y del material de la pared del intercambiador son constantes, *ii*) Los fluidos utilizados son líquidos incompresibles y no hay acumulación de la masa a lo largo del IC, *iii*) No hay pérdidas de calor al ambiente, *iv*) El IC no realiza ni recibe ningún tipo de trabajo de los alrededores, y *v*) Sólo se tiene en cuenta el cambio en la energía interna del fluido, despreciando los cambios en la energía cinética y potencial. Con esto se logró un MSBF para la Operación Unitaria Intercambio Calórico realizada en IC en contacto indirecto, para todas las configuraciones de flujo, la diferencia de temperatura tomada como el *LMTD* y la geometría considerada con el área de transferencia de calor A_T . Aunque las ecuaciones del modelo están en términos de los parámetros más generales de los IC, al especificar un tipo de intercambiador las ecuaciones del modelo quedan en términos de aquellos parámetros más relevantes para tal intercambiador. Por ejemplo, en un intercambiador de tubos concéntricos el volumen se puede expresar en términos de la longitud y el área transversal.

Sobre las Herramientas de Simulación

Cuando ya el modelo está listo, se debe buscar la manera de resolverlo (simularlo). Para ello, generalmente se escribe un programa de computador propio o se utiliza un paquete de solución de ecuaciones apropiado. En el primer caso, el usuario es libre de escoger la plataforma. Tal vez la única recomendación es que dicha plataforma sea la más “potente” y “ajustada” posible al tipo de modelo a usar. Ejemplos son: Fortran, C++, Matlab, Basic, Excel, entre otros. En el caso de utilizar un paquete comercial, es importante verificar la disponibilidad de cajas de herramientas (toolboxes) para tareas matemáticas y estadísticas específicas. Es indispensable elegir el paquete más especializado, si todos los modelos van a ser sobre el mismo Objeto Real, o elegir el paquete más general, si su uso permitirá simular modelos de diversos Objetos Reales. Los paquetes que ya tienen incluidos modelos de equipos, por lo general disponen de Modelos Semifísicos de Base Fenomenológica, por lo que el valor de tales modelos está en su estructura “genérica” (heredada de los balances de masa, energía y cantidad de movimiento) y en los bancos de propiedades de sustancias. Ejemplos son: ChemCAD, HySim, Aspen, entre otros.

Capítulo 4

DISEÑO DE PROCESOS

El diseño es tal vez la tarea central en el quehacer ingenieril. Todo diseño intenta modificar ciertas condiciones de una situación actual de modo que se pueda producir una nueva situación lo más cercana posible a la considerada ideal. Por lo tanto, el diseño contempla la búsqueda de una cierta estructura con un cierto grupo de parámetros, que bajo la estructura planteada, den un resultado cercano al esperado. Se considera como situación ideal aquella que maximiza la productividad minimizando el consumo de energía. En tal sentido, el diseño de un Equipo o Planta en la cual realizar un Proceso, implica el conocimiento de los principios y mecanismos por los que ocurren las Operaciones Unitarias que conforman ese Proceso. En este capítulo, se describe de manera detallada un procedimiento de diseño de equipo de proceso, reconocido en la literatura como procedimiento aceptable para dicha tarea. Además, se introducen pasos adicionales al procedimiento de diseño de equipo, que incluyen los aspectos de: Observabilidad, Controlabilidad, Reversibilidad del Proceso.

4.1. El Diseño en Ingeniería

De manera rápida (más adelante se da una definición más formal), podría decirse que el diseño consiste en pensar y describir una estructura que posea ciertas características y funciones deseables, de modo que resulte solución a un problema. La ingeniería tiene como finalidad la toma de decisión para solucionar problemas con base en la especificación precisa del problema mismo, de un grupo dado de conocimientos y de unos procedimientos apropiados para tal fin. Para ello, se debe transformar la información de las condiciones, necesidades y requerimientos establecidos en al menos una estructura que los satisfaga. Asociadas con cualquier diseño existen varias tareas: solución de problemas, toma de decisiones, creatividad, búsqueda, heurística, evolución, aprendizaje, negociación, conocimiento, optimización, organización, satisfacción de necesidades, etc. Todas ellas necesarias pero no suficientes por si solas para diseñar [Eder and Hosnedl, 1992]. Sin embargo, hay dos grandes acciones mentales involucradas en cualquier diseño: el Análisis y la Síntesis.

Por lo general los planes de estudio en Ingeniería privilegian el Análisis, dejando a la Síntesis con un tratamiento meramente enunciativo. Tal vez el supuesto de fondo es que enseñar Síntesis de Procesos es un imposible y que sólo la experiencia real del ingeniero en su ejercicio profesional le dará la formación definitiva en esa Síntesis. Ese es un error crucial puesto que es justamente la Síntesis la que exige el mayor desarrollo de la creatividad. Tal vez dicho error provenga de la aproximación al diseño de procesos desde los textos clásicos, llenos de nomogramas, tablas y cartas para la selección de equipos de proceso, más que de diseño en si mismo. En esa aproximación no se dejaba mucho lugar a la Síntesis y se pasaba directamente del análisis de los requerimientos del proceso al diseño (mejor decir selección), de los equipos necesarios para cumplir tales requerimientos [Baasel, 1975; Ray and Johnston, 1989]. Todo, usando las tablas, cartas y nomogramas

allí consignados y por muchos años reputados como la mejor herramienta para desarrollar tal “diseño” de Proceso. Afortunadamente eso ha venido cambiando y justamente este trabajo pretende ser parte de dicho cambio de enfoque.

Tanto el Análisis como la Síntesis requieren de una representación del problema de diseño. Aunque dicha representación puede tener formatos tan diferentes como el verbal, el gráfico, el matemático o combinación de los anteriores, se busca que dicha representación deje explícitos los grados de libertad y las variables de diseño [Pahl and Beitz, 1984; Sinnott, 2005]. Si bien la representación matemática no es la única con tales atributos, si es la más utilizada en ingeniería. En ella se pueden reconocer las relaciones de dependencia entre las diferentes variables propias del problema de diseño. Generalmente tales representaciones matemáticas (formalizadas previamente como modelos), están constituidas por α ecuaciones independiente que involucran β incógnitas. Matemáticamente, se pueden presentar tres situaciones cuando se intenta resolver ese sistema de ecuaciones (sistema que no es más que la representación del problema de diseño):

1. $\alpha > \beta$, más ecuaciones que incógnitas. El problema está sobre-especificado, por lo que debe revisarse la representación matemática y hasta la descripción del problema, disponibles.
2. $\alpha = \beta$, igual número de ecuaciones que de incógnitas. El problema está totalmente especificado. Tendrá solución única si la representación matemática es lineal, aunque podría no tener ninguna solución si la matriz \mathbf{A} no tiene inversa, o puede tener soluciones múltiples si la representación es no lineal.
3. $\alpha < \beta$, más incógnitas que ecuaciones. El problema requiere la especificación de al menos $\beta - \alpha$ variables o al menos $\beta - \alpha$ ecuaciones adicionales, que permitan llegar a la condición $\alpha = \beta$.

Definición 4.1 Grados de Libertad. *Es la diferencia entre el número de incógnitas β y el número de ecuaciones α de una representación matemática de cualquier sistema. En adelante, se abreviará como Grados de Libertad $GL = \beta - \alpha$.*

Cómo se puede apreciar, la situación 3. es justamente la asociada con el Diseño en Ingeniería. Al existir más incógnitas que ecuaciones, el diseñador debe especificar los GL , bien sea dando valores a algunas incógnitas o relacionándolas con otras variables conocidas o incluso con relaciones entre las mismas incógnitas (así sean todavía desconocidas). Esto no es más que un problema de Optimización, lo que le da complementariedad a lo dicho al inicio de este apartado y permite una definición más completa del Diseño en Ingeniería.

Definición 4.2 Diseño en Ingeniería. *Es una actividad que permite proponer una estructura para un sistema y optimizar sus parámetros estructurales (asociados a la configuración) y funcionales (asociados al resultado) respecto de ciertas características y funciones deseables en el sistema, tomando como restricciones las condiciones, necesidades y requerimientos establecidos por la naturaleza del sistema y por el futuro uso que de él se haga.*

No todas las variables del problema de diseño pueden considerarse como variables de diseño, así como no todas las variables de diseño son grados de libertad. Tal condición está determinada por las restricciones físicas, químicas, biológicas, económicas, sociales, etc. que definen el problema de diseño. Por ejemplo para el caso de un proceso físico-químico, composición, temperatura y presión son variables intensivas (independientes de la cantidad de materia o del valor de los flujos)¹, lo que las convierte en las restricciones en el diseño, puesto que los valores que dichas variables pueden alcanzar está acotado por la operación y naturaleza misma del proceso. Esta es justamente la información que un balance en estado estacionario no contiene, puesto que en dicho balance la “escalabilidad” del resultado aparenta no tener límites. Las representaciones del proceso en estado estacionario justamente adolecen de tal limitación, que no resulta tan obvia cuando se miran cartas,

¹En equipos de proceso que acumulan vapores o gases, la presión depende del número de moles contenido en esa fase del proceso, del mismo modo que el nivel en un tanque depende de la cantidad de sustancia que contiene.

tablas o nomogramas de diseño (que son soluciones estáticas del problema de diseño). Pero si se indaga más sobre la aplicabilidad de tales cartas, tablas o nomogramas, se verá que los autores explícitamente dan intervalos de validez para las variables de diseño. Es justamente esa la decisión que el diseñador debe tomar cuando enfrenta la solución de un problema de diseño: ¿cuáles de todas las variables del problema serán las variables de diseño y en que intervalos pueden moverse?.

Definición 4.3 Variables de Diseño. *Son aquellas variables que al ser manipuladas permiten producir la respuesta deseada del sistema que se está diseñando.*

La elección de las variables de diseño es una de las tareas más importantes en el diseño en ingeniería. Una buena selección de tales variables puede simplificar el diseño, mientras que la selección poco cuidadosa de las mismas generará dificultades artificiales al diseño. Todo porque unas buenas variables de diseño generan cálculos fáciles, que conducen al resultado final tras un procedimiento paso a paso. En cambio, una mala selección de las variables de diseño obliga a la solución de ecuaciones simultáneas, incluso a realizar procesos iterativos con alta incertidumbre en las condiciones iniciales. Esto último implica recirculación de información durante el diseño, con los típicos efectos de acumulación de errores e incremento en la incertidumbre del resultado final. Se vuelve a lo dicho previamente: cuando $GL: \alpha < \beta$, más incógnitas que ecuaciones, el problema requiere la especificación de manera óptima de al menos $(\beta - \alpha)$ variables.

4.2. Optimización

Debido al papel fundamental de esta tarea en el Diseño en Ingeniería, aquí se trata de manera independiente. Como se advirtió desde la introducción de este texto, la alusión a tareas típicas de la Ingeniería pretende mostrar el panorama completo, resaltado aspectos de interés para el tema central: el Diseño Simultáneo del Proceso y su Control (DSPyC). Existen en la literatura excelentes libros de texto que presentan en detalle a la optimización como problema general. Se recomienda al lector seguir por ejemplo: “Optimization of chemical processes” de [Edgar, Himmelblau and Lasdon, 2001].

Definición 4.4 Optimización en la Vida Diaria. *Es la búsqueda de las mejores condiciones y forma para llevar a cabo una tarea o labor.*

Definición 4.5 Optimización Matemática o Numérica. *Es la búsqueda de la mejor solución posible (condiciones y forma) para una tarea usando una formulación matemática de la tarea, su condición deseada, las restricciones propias de la tarea y los recursos disponibles para la solución, todo siguiendo un método de solución numérica riguroso.*

Definición 4.6 El Problema de Optimización. *Es el mapeo o traducción de un comportamiento deseado, matematizado en el Funcional de Costo (FC), a un grupo de parámetros \mathbf{p} (estructurales o funcionales) del Sistema sobre el que se optimiza. El problema de optimización se formula de manera estándar como:*

min (o max) $FC = J$ sobre un grupo de parámetros \mathbf{p} .

Sujeto a (s.a.): i) Restricciones asociadas con el modelo del Sistema, ii) Restricciones de igualdad, iii) Restricciones de desigualdad.

El Sistema sobre el que se optimiza debe contar con alguna representación matemática de su comportamiento, que puede ser: *i)* un modelo dinámico o estático del proceso, y de su desempeño o *ii)* un modelo o ecuaciones que permiten calcular índices de calidad de las tareas de interés atribuibles al proceso. El modelo dinámico o estático contiene variables propias del proceso, como las entradas, los estados y las salidas. En cambio,

las ecuaciones sobre el desempeño del proceso, reflejan valoraciones que el optimizador realiza a través de relaciones (índices) aceptadas en ingeniería o propias del problema y proceso en particular. El FC para la optimización, es el que se encarga de componer tales índices y el comportamiento (dinámico y estático) del proceso en una sola valoración, que se buscará hacer mínima o máxima. El FC debe formarse con términos siempre positivos, por lo que es frecuente que dichos términos estén elevados al cuadrado o entre valores absolutos de expresiones matemáticas que incluyen al menos un parámetro para la optimización. Cada término del FC está ponderado por una constante o coeficiente γ , de modo que se pueden privilegiar ciertos comportamientos, representados por uno o más términos específicos del FC, sobre otros.

Las restricciones pueden incluirse en el FC y asociarles un índice de penalidad, siempre que tal penalidad para todos los posibles puntos, contribuya a mejorar la solución global. De otro modo, pueden dejarse en la parte asociada con las restricciones, simplemente como condiciones de borde a cumplir: de igualdad o de desigualdad (intervalo). En este último caso, la penalización para cualquier posible solución que viole las restricciones, queda totalmente implícita en el problema. En cambio, cuando se incluyen en el FC, a las restricciones se les asignan coeficientes que las ponderan respecto a los demás índices de optimalidad considerados en el FC. Esos coeficientes deben ajustarse para lograr la solución más adecuada a la condición deseada (ideal) para el proceso que se optimiza. Esa “sintonía” de coeficientes no es tarea fácil, por lo que la experiencia frente a la tarea que se optimiza juega un papel importante.

La optimización del FC se realiza sobre un grupo de parámetros de la optimización \mathbf{p} , también llamados grados de libertad para la optimización. Ese grupo de parámetros no necesariamente coincide totalmente con los parámetros \mathbf{r} del Sistema o con sus estados \mathbf{x} . Son posibles las siguientes opciones para ese vector \mathbf{p} de parámetros: *i*) $\mathbf{p} = \mathbf{r}_{i=1,k}$ con \mathbf{r} vector de l entradas y $k \leq l$, que contiene todos los parámetros del Sistema, *ii*) $\mathbf{p} = \mathbf{x}_{j=1,m}$ con \mathbf{x} el vector de estados del Sistema de orden n (n estados y $m \leq n$), y *iii*) $\mathbf{p} = \mathbf{r}_{i=1,k} \cup \mathbf{x}_{j=1,m}$, mezclando parámetros y estados del sistema. Por su parte, el FC (función matemática que se optimiza) se nutre de dos fuentes de información: *i*) El Sistema en el que reside lo que se optimiza (dimensiones, forma, estados, etc.), que aporta términos directos asociados con los parámetros \mathbf{p} de la optimización, y *ii*) El deseo o ideal de quien optimiza, que aporta índices indirectos s_i propios de un conocimiento externo al Sistema mismo (desempeño, costo, etc). En la Figura 4.1 se ilustra lo discutido previamente sobre los diferentes espacios involucrados en una optimización y sus fuentes de conocimiento.

Definición 4.7 Dominio del Problema de Optimización. Es el espacio en el cual existen los grados de libertad para la optimización o parámetros \mathbf{p} a optimizar.

Las variables \mathbf{p} que se usan como grados de libertad en una optimización (sobre las que se maximiza o minimiza el FC), pueden ser de dos tipos: continuas o discretas. Eso genera una clasificación del tipo de optimización en continua, entera o Mixta-Entera [Bansal et al., 2002].

Definición 4.8 Variable Continua en Optimización. Cuando el grado de libertad para la optimización o parámetro a optimizar p_i sobre el cual se maximiza o minimiza el Funcional de Costo (FC) es una variable continua ($p_i \in \mathbb{R}$) en el dominio del problema de optimización.

Definición 4.9 Variable Discreta en Optimización. Cuando el grado de libertad para la optimización o parámetro a optimizar p_i sobre el cual se maximiza o minimiza el Funcional de Costo (FC) es una variable discreta, que sólo puede tomar valores enteros ($p_i \in \mathbb{Z}$), en el dominio del problema de optimización.

Definición 4.10 Optimización Continua. Es la que se realiza sobre grados de libertad para la optimización o parámetros a optimizar \mathbf{p} continuos ($p_i \in \mathbb{R}, \forall i$) en el dominio del problema de optimización.

Definición 4.11 Optimización Entera. Es la que se realiza sobre grados de libertad para la optimización o parámetros a optimizar \mathbf{p} discretos o enteros ($p_i \in \mathbb{Z}, \forall i$) en el dominio del problema de optimización.

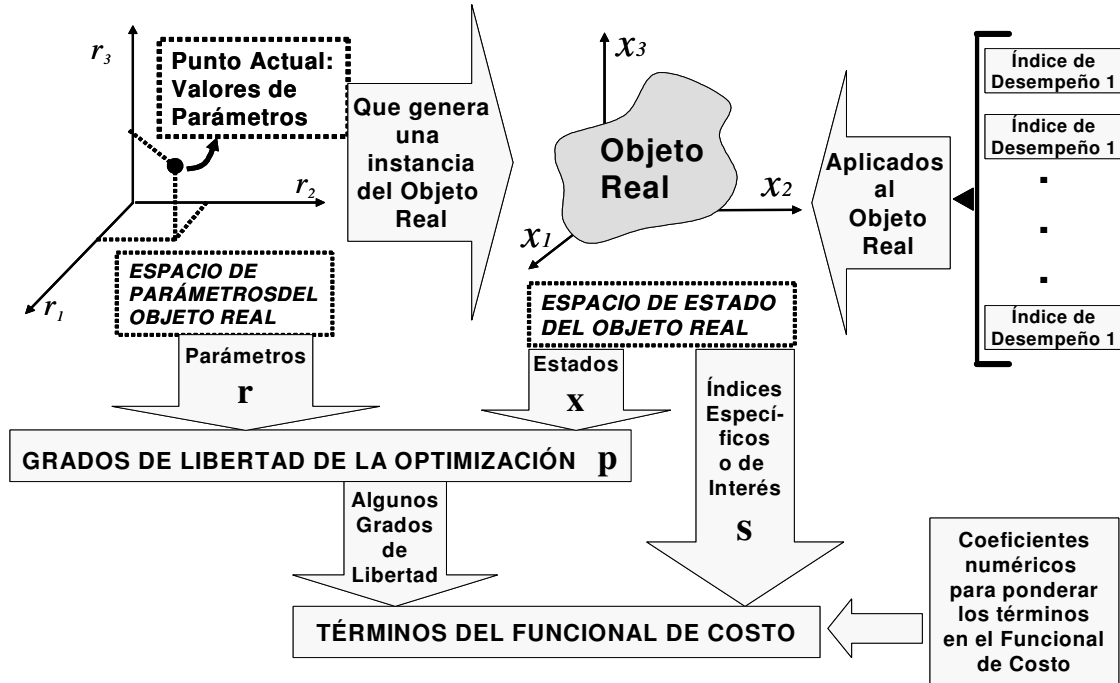


Figura 4.1: Espacios involucrados en una optimización.

Definición 4.12 Optimización Mixta-Entera. Es la que se realiza sobre grados de libertad para la optimización o parámetros a optimizar \mathbf{p} que son tanto continuos ($p_i \in \mathbb{R}, \forall i \in [1, n], n < m$) como discretos o enteros ($p_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in [(n+1), m]$) en el dominio del problema de optimización.

Los métodos matemáticos y la complejidad para solucionar el problema de optimización es mayor en la Optimización Mixta Entera, debido a la combinación de un subespacio continuo con uno discreto para formar el espacio de los parámetros.

Tres aspectos definen una solución a un problema de optimización: *i*) Valores para los parámetros a optimizar que producen un mínimo o un máximo en el FC, *ii*) Tanto el conjunto de parámetros $\mathbf{r}_{i=1,k}$ propios del Sistema, como el conjunto de índices \mathbf{s} asociados con el desempeño y costo (monetario) del Sistema, cumplen con las restricciones del problema de optimización. Tales restricciones pueden surgir de los límites operativos del equipo o planta (capacidad, presión, etc.), de límites en la materia prima (punto de ebullición, concentraciones comerciales, etc.), requerimientos del producto (calidad, propiedades en la aplicación, etc.) y recursos (disponibilidad, calidad, etc.). *iii*) Existe un compromiso entre efectos opuestos al analizar la sensibilidad del funcional de costo en el punto óptimo hallado. Por ejemplo, disminuciones en el costo de inversión inicial en equipos, aumenta los costos operativos de la planta y viceversa. Si este último punto no se cumple, la solución del problema no es aplicable en ingeniería: el óptimo está en $+\infty$ o $-\infty$.

4.3. Diseño con Optimización Implícita vs. Diseño con Optimización Explícita

Como se vio en la Sección SDKSKS, el Equipo y la Planta tienen asociadas variables propias de su operación como artefactos. Algunas de estas variables pueden cambiar de valor durante el funcionamiento,

mientras que otras son parámetros para el diseño del Equipo o la Planta. Cuando se analiza el Modelo de Proceso desde el punto de vista del Diseño, pueden distinguirse tres grupos de parámetros: *i*) Vector de parámetros del Equipo o Planta \mathbf{p}_{E_P} , *ii*) Vector de parámetros de la Sustancia tratada \mathbf{p}_S , y *iii*) Vector de parámetros del proceso \mathbf{p}_{Pr} (que aparecen por la interacción entre Equipo o Planta y la Sustancia tratada). Por lo general las especificaciones de diseño lo que fijan son los \mathbf{p}_{Pr} , de modo que los \mathbf{p}_{E_P} sean grados de libertad que el diseñador ajusta hasta cumplir los requerimientos de los \mathbf{p}_{Pr} , tratando una Sustancia dada. Es precisamente sobre los \mathbf{p}_{E_P} sobre los que se aplica un procedimiento de optimización a fin de llegar al Diseño del Equipo o Planta que logre realizar de la mejor manera el Proceso deseado. Para llegar a tal diseño se puede recurrir a la experticia del diseñador o seguir un procedimiento aceptado de diseño. Tal procedimiento, aunque se verá con detalle más adelante, puede formularse como sigue de manera breve tomando como ejemplo el diseño de un Intercambiador de Calor (IC):

Clarificación de la tarea que realizará el Equipo. Se define la temperatura que se desea obtener a la salida del Fluido de Proceso (FP), los caudales disponibles de los diferentes fluidos (FP y Fluido de Servicio (FS)) y la temperatura de entrada del FS que garantice la transferencia de calor de acuerdo con las necesidades planteadas.

Diseño Conceptual. Se indica la configuración del IC: tipo de IC, dirección de flujos, etc. En este ejemplo se trabaja con un IC de doble tubo (tubos concéntricos) en flujo paralelo, por su sencillez para ilustrar lo discutivo.

Diseño Preliminar. Se especifican los materiales de las diferentes partes del IC, aislantes, etc. Además, se realiza un análisis básico que conduce a una estructura de intercambiador específica. Así, en este ejemplo se trabaja con un sólo paso de los fluidos por el intercambiador.

Diseño de detalle. Incluye el dimensionado detallado de las diferentes partes del IC, para lo cual, se puede recurrir a tablas, cartas o ecuaciones que relacionan las características energéticas de las dos corrientes en el estado estacionario con los parámetros de diseño, o formular un Funcional de Costo o Función Objetivo a optimizar, la cual incluirá las variables de desempeño del IC en la Función Objetivo y los parámetros de diseño como variables a optimizar: diámetro de los tubos, longitud del intercambiador, etc. Con esto queda diseñado el IC.

Aunque en el presente texto sólo se considera la optimización aplicada durante el diseño del Proceso, por claridad y completez debe indicarse que en la Ingeniería de Procesos la optimización puede realizarse en diferentes ámbitos:

1. Durante el Diseño. Implica la síntesis del proceso, del equipo o de las operaciones, cada uno analizado como un sistema. Por lo tanto, se busca optimizar la estructura y parámetros del sistema que representa al proceso, al equipo o a la operación que se diseña.
2. Durante la Compra, Construcción y Ensamble. Hace referencia a las tareas que se realizan para optimizar los recursos económicos y los tiempos de ejecución.
3. Durante la Operación. Busca que la operación del proceso (o de la planta) produzca el mayor beneficio con el menor costo (dinero y tiempo). Se realiza tanto optimización de la operación estática (momentánea: puntos de ajuste de las variables), como optimización de la operación dinámica (largo plazo: trayectorias temporales de las variables). Por lo general la optimización de la operación de un proceso tiene que ver con la optimización de la operación de cada una de las unidades continuas o discontinuas que lo forman. Eso lleva a la operación óptima de la planta, tanto en una corrida completa del proceso, como en la operación óptima de los modos de conmutación entre corridas. En los procesos por lotes (Batch en inglés), la operación óptima implica la existencia de recetas (Recipes en inglés) flexibles y el mejoramiento continuo de tales recetas.

Para lograr el objetivo de este texto, en adelante se asume que el diseño de procesos trata de lograr un

Equipo, Proceso o Planta y su Sistema de Control (EPP/SC)², con un desempeño y un costo acordes con unas especificaciones, recurriendo al Análisis y la Síntesis como tareas básicas. Estas dos últimas son tareas complementarias, puesto que la Síntesis permite definir la estructura del EPP/SC, armando tal estructura con partes de las que; a través del Análisis, se conoce previamente su comportamiento. En cuanto a los parámetros del EPP/SC (dimensiones, condiciones operativas y ajustes), vuelve el Análisis a ser herramienta fundamental, puesto que proporciona los datos del comportamiento de las partes que forman la estructura y brinda elementos para modelar la estructura como un todo (modelos del EPP/SC).

Toda optimización tiene dos partes, aquí aplicadas directamente a la tarea de diseño: *i*) El Funcional de Costo (FC) o matematización de la situación ideal del EPP o SC, y *ii*) Las restricciones que delimitan el conjunto de soluciones factibles (posibles EPP o SC) para el problema de diseño. El funcional de costo usado en diseño incluye siempre términos que valoran el costo económico del EPP/SC: costo operativo y costo de capital (inversión inicial), y términos asociados con el desempeño del EPP/SC, que reflejan el deseo del diseñador por obtener el mejor comportamiento posible del EPP/SC. Por lo tanto, la optimización en diseño no es más que la minimización de costos y la maximización de desempeño del EPP/SC, teniendo como grados de libertad los parámetros estructurales (Síntesis del EPP/SC) y los parámetros funcionales del EPP/SC que se diseña. Si ya la estructura está fija, sólo resta ajustar los parámetros funcionales (dimensiones y condiciones operativas). La Figura 4.2 muestra la concurrencia de las tres tareas: Análisis, Síntesis y Optimización durante el diseño de un EPP/SC.

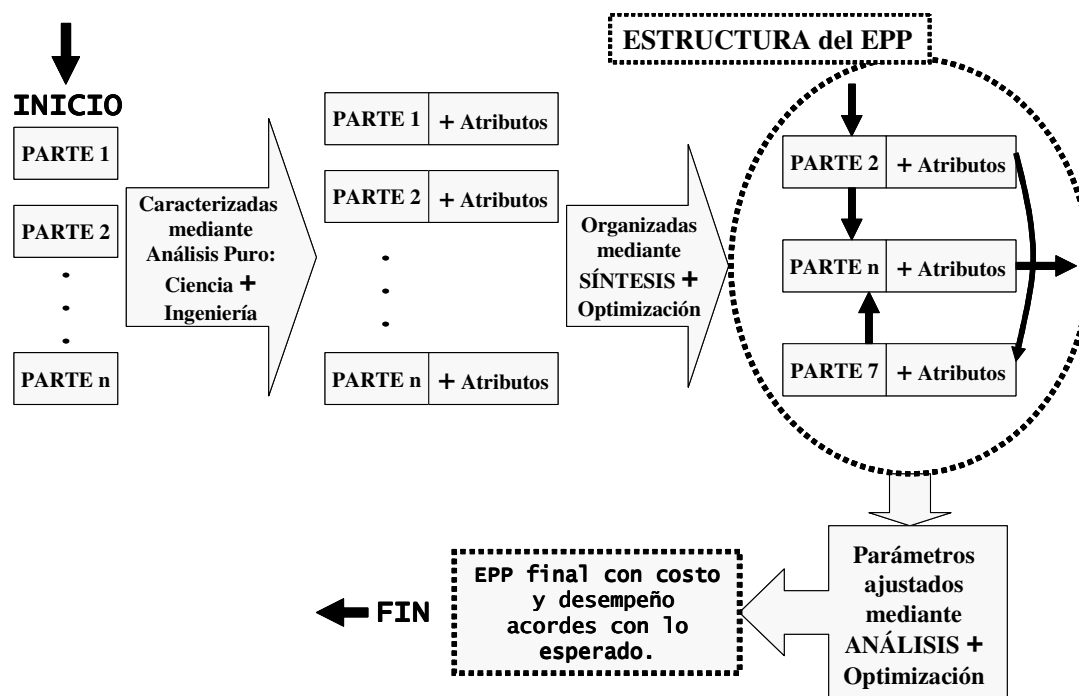


Figura 4.2: Concurrencia de las tareas de Análisis, Síntesis y Optimización en el diseño de un Equipo, Proceso o Planta y su Sistema de Control.

De acuerdo con todo lo anterior, el diseño siempre incluye una Optimización. Sin embargo, dicha optimización puede estar implícita o explícita. Surgen dos tipos de diseño: el Diseño con Optimización Implícita (DOI) o por Experticia y el Diseño con Optimización Explícita (DOE). El primer tipo de diseño corresponde al diseño

²El paradigma tradicional separa el diseño del Equipo, Proceso o Planta (EPP) del diseño de su Sistema de Control (SC). Justamente el Diseño Simultáneo del Proceso y su Control (DSPyC), busca unificar las dos tareas en una sola, que se ejecuta de manera simultánea. Por eso, es posible decir que se diseña el EPP y su SC.

COMPONENTES DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN	DISEÑO CON OPTIMIZACIÓN IMPLÍCITA	DISEÑO CON OPTIMIZACIÓN EXPLÍCITA
CARACTERIZACIÓN DE CADA PARTE POSIBLE DEL EPP/SC	Desempeño dado en Tabla, Nomograma, Gráfico o Carta	Ecuación que evalúa el comportamiento y desempeño
CARACTERIZACIÓN DEL EPP/SC COMO UN TODO: MODELO	Existe como Nomograma, Tabla o Carta de Selección	Modelo que representa el comportamiento y desempeño
FUNCIONAL DE COSTO ASOCIADO AL EPP/SC	Implícito y genérico para el tipo de EPP/SC que se diseña	Siempre Explícito y ajustable a las particularidades del EPP/SC que se diseña
RESTRICCIONES PARA EL DISEÑO DEL EPP/SC	Implícitas y genéricas para el tipo de EPP/SC que se diseña	Explícitas y ajustables al EPP/SC particular que se diseña

Figura 4.3: Diferentes tipos de diseño.

tradicional de equipos, basado en la experiencia y pericia de un grupo de ingenieros pioneros y expertos en una determinada operación unitaria o proceso. Esta rama del diseño opera sobre dicho conocimiento experto, consignado en nomogramas, cartas, tablas y hasta reglas de experiencia. Ahí se recolecta toda la heurística y la experiencia de los que previamente han hecho el diseño de EPP o de SC similares. En este caso, se cuenta con el respectivo Análisis y caracterización de las partes que posiblemente formarán el EPP y el SC, extractado previamente por otros diseñadores a través de optimizaciones que ellos armaron y solucionaron previamente de manera parcial o total.

Por su parte, el Diseño con Optimización Explícita (DOE) se soporta en el hecho de ver el Diseño del Proceso como el arreglo o acomodo de mecanismos y dinámicas para el procesamiento de materia, energía e información “cruda” a fin de obtener un producto con especificaciones prescritas. En tal sentido, si se dispone de un modelo que describa los mecanismos y dinámicas factibles para realizar el Proceso, sobre dicho modelo pueden optimizarse uno o más parámetros asociados con el logro del producto deseado. Obviamente, el modelo debe permitir la visibilidad de esos parámetros de modo que un procedimiento de optimización busque los valores acertados para el proceso dado. En el DOE son evidentes el modelo del proceso y el Funcional de Costo (FC), además del análisis y caracterización de las partes que posiblemente formarán el EPP o el SC, de modo que el diseñador es quien arma totalmente el problema de optimización más adecuado a los requerimientos del EPP/SC que diseña. En la Figura 4.3 se puede apreciar la diferenciación entre estos dos tipos de Diseño.

En este texto sólo se aborda el DOE puesto que resulta el de mayor versatilidad y por tanto, el más adecuado para las tareas de DSPyC. En ese sentido, el modelo resulta una herramienta útil cuando se abordan labores de diseño puesto que es posible volcar en él ciertas suposiciones sobre el comportamiento del equipo que se diseña. Por ejemplo, es común que los términos asociados con la acumulación de materia o energía estén regidos por una dimensión física del equipo (su volumen). Tal dimensión aparece como resultado del diseño, pero conociendo los requerimientos de la variable de interés el modelo la puede asumir constante liberando a la variable de diseño (el volumen) para que pueda cambiar durante las simulaciones. De este modo se puede ver el efecto de diversas magnitudes de la variable de diseño sobre el comportamiento general del equipo o proceso y proceder a una “optimización” del valor de dicha variable.

4.4. Pasos en el Diseño de Procesos

¿Qué se diseña en Ingeniería de Procesos (IdeP)? En un orden ascendente con respecto al tamaño y complejidad, en IdeP se diseñan:

1. Una Operación Unitaria y los Equipos para realizarla.

2. Una Secuencia de Operaciones Unitarias, es decir un Proceso.
3. Una Secuencia de Procesos, es decir una Línea de Producto.
4. Un Grupo de Líneas de Producto, es decir una Planta de Producción Industrial.

Para completar esta pregunta: ¿Qué se diseña en Ingeniería de Control (IdeC)? Siguiendo un orden ascendente con respecto a la complejidad, en IdeC se diseñan:

1. Lazos de control locales por Equipo, de una entrada y una salida (Single Input-Single Output o SISO), de múltiples entradas y múltiples salidas (Multiple Input-Multiple Output o MIMO) o combinación de estas opciones.
2. Lazos de control supervisorio para una Operación Unitaria o Proceso, para una Línea de Producto e incluso para una Planta completa.

En el presente texto, la tarea de diseño se asume realizada simultáneamente para el Equipo, Proceso o Planta (EPP) y para su Sistema de Control (SC), por lo que nos referimos a EPP/SC como un todo. Como ya se mencionó, cuando se enfrenta el diseño de un EPP/SC, se reconocen varias metodologías aplicables. Sin tener que realizar una clasificación exhaustiva de tales metodologías, se pueden ver dos grandes tendencias históricas: *i*) Metodologías de Diseño con Optimización Implícita (MDOI), que son las más antiguas y tradicionales, por lo que se encuentran en los libros de Ingeniería de Procesos editados antes de la década de los 90 del siglo XX, y *ii*) Metodologías de Diseño con Optimización Explícita (MDOE). En ambas vertientes de aproximaciones metodológica se consideran tres pasos fundamentales (y comunes) para afrontar el diseño:

1. Determinar de forma precisa todos los requerimientos del EPP/SC a diseñar. Estos son los objetivos del Problema de Diseño (PdeD).
2. Listar y caracterizar completamente todas las opciones de EPP y SC viables que pueden ser solución al PdeD.
3. Definir un índice de calidad o Funcional de Costo (FC) que permita medir que tan ajustado a los objetivos del PdeD son un EPP dado y un SC especificado para dicho EPP.
4. El paso cuarto, final, es diferente de acuerdo con la aproximación metodológica que se tome:
 - 4a. En las MDOI (basadas en heurística), el cuarto paso es la contrastación entre las opciones de solución al PdeD y los objetivos del PdeD. Dicha contrastación puede hacerse considerando un FC, propio del diseñador, para cada opción de solución y con este valor seleccionar entre varios candidatos que cumplan con los criterios de experiencia que guían el diseño. Estos criterios de experiencia no son más que el FC implícito de los expertos que suministran la información. Deben recalcar que los primeros libros de diseño no evaluaban explícitamente el FC puesto que asumían que tal FC era aceptable para todas las opciones consignadas en la carta, tabla o nomograma guía del diseño que allí se presentaba.
 - 4b. Cuando se usa la MDOE, el cuarto paso del procedimiento es la optimización de los parámetros de diseño a través de la evaluación del FC establecido por el diseñador de acuerdo con su concepto del comportamiento deseado del EPP/SC. Esta es la optimización que se resuelve durante la solución al PdeD.

Se insiste sobre la dedicación exclusiva del presente trabajo a las Metodologías de Diseño con Optimización Explícita (MDOE). En estas, se evidencia que el diseño procede a la manera de un Problema como el siguiente:

PROBLEMA:

Dada: una descripción del Equipo, Proceso o Planta y su Sistema de Control (EPP/SC) y una serie de comportamientos y productos deseados del EPP/SC.

Encontrar: una estructura y parámetros para dicho EPP/SC, que logren maximizar un índice de calidad (maximizar un Funcional de Costo (FC)) que mida el grado de cumplimiento de los comportamientos y productos deseados del EPP o SC.

Sujeto a: las restricciones naturales del EPP(SC) y las restricciones artificiales impuestas por el conocimiento previo (heurística) disponible sobre dicha clase de EPP/SC.

Se ve que las metodologías de Diseño con Optimización Explícita no hacen más que plantear y resolver explícitamente un Problema de Optimización (PdeO). Con esto se logra matematizar el Problema de Diseño (PdeD) y volverlo un PdeO, que puede resolverse por los métodos matemáticos disponibles para optimizar funciones o relaciones matemáticas. Vale la pena en este punto aclarar que dependiendo de la magnitud del PdeD, el PdeO análogo que surge puede ser fácilmente soluble o presentar dificultades matemáticas para su solución. Obviamente, si se incluye la Síntesis de Proceso como etapa del PdeD, aparecerán variables discretas mezcladas con las variables continuas, lo que implica una optimización mixta entera. Esas variables discretas se asocian con la optimización del número y ubicación de las unidades, mientras que las variables continuas se asocian con la optimización de los parámetros de las unidades que se diseñan.

La Síntesis del EPP/SC está incluida en el PdeD cuando no se tiene conocimiento previo (heurística) sobre dicha clase de EPP/SC o se desean explorar nuevas estructuras para ese tipo de EPP o SC. En ese caso, la estructura del EPP/SC no está definida. En cambio, cuando se tiene información creíble sobre la estructura del EPP/SC en cuestión, la Síntesis no está incluida en el PdeD, por lo que sólo deben determinarse parámetros que hagan óptimos los aspectos considerados en el FC establecido para la optimización a realizar al resolver el PdeD. Vuelve a evidenciarse que la Síntesis de Procesos trata fundamentalmente de generar una estructura para el EPP/SC, dejando el ajuste de parámetros para la estructura propuesta como tarea del Diseño (Optimización).

4.5. Trazabilidad del Diseño en Ingeniería

Puesto que este no es un texto sobre Diseño de Procesos en Ingeniería, no se dan todos los detalles de los procedimientos estándar para diseñar procesos. Al lector interesado se le remite a textos especializados [Walas, 1988; Aguirre, 2004]. Sin embargo, a continuación se presenta un enfoque general y muy útil para el seguimiento de cualquier diseño en ingeniería: la trazabilidad. El concepto de trazabilidad está asociado con el seguimiento y la documentación de los procedimientos aplicados durante el desarrollo de una determinada tarea. Una definición formal es como sigue.

Definición 4.13 Trazabilidad. Capacidad o habilidad que posee un método de diseño de tener memoria de los procedimientos de interés que llevan desde los requisitos del Equipo, Proceso o Planta y su Sistema de Control (EPP/SC) que se diseña hasta la especificación y validación formal del EPP/SC diseñado.

En ingeniería de software hay una definición formal de trazabilidad establecida por la IEEE: “grado en el cual se puede establecer una relación entre dos o más productos del proceso de desarrollo, especialmente productos que tienen relaciones de predecesor-sucesor o maestro-subordinado entre uno y otro” [IEEE 1991]. La que se propone aquí se adapta al objeto de estudio de la Ingeniería de Procesos, desde trabajos sobre Trazabilidad en Ingeniería de Software [Amar et al., 2008; Tabares, 2009].

Definición 4.14 Modelo de Trazado. Representación de todas las transformaciones que sufren los requisitos especificados para un Equipo, Proceso o Planta y su Sistema de Control (EPP/SC) en su evolución hasta convertirse en un EPP/SC especificado y validado. Los Modelos de Trazado son vistas versionadas que

muestran la traza de los requisitos y los elementos de modelo que los representan en diferentes niveles de abstracción.

Definición 4.15 Método de Trazado. *Pasos secuenciales que permiten construir un Modelo de Trazado de acuerdo con unos lineamientos de trazabilidad deseados para un tipo de diseño dado. El modelo se basa en una semántica de trazado que define los elementos de trazado o rastreo y los vínculos de trazado.*

El método de trazado permite la construcción de un modelo de trazado que registra tanto las evoluciones entre niveles (relaciones verticales), como las interacciones que presentan los requisitos al interior de un nivel (relaciones horizontales). Un diseño que posea modelo de trazado, se dice que tiene trazabilidad. Para obtener el modelo de trazado debe considerarse que el elemento mínimo constitutivo de un requisito es el “concepto” y que es posible especificar relaciones de abstracción que conectan dos o más elementos o conjunto de elementos que representan el mismo concepto en diferentes niveles de abstracción. La relación se usa principalmente para rastrear los requisitos y su desarrollo a través de la ejecución del diseño. Las relaciones fundamentales en un mapa de trazado son: *i*) realización que se refiere a la implementación de un elemento en otro, *ii*) refinación que especifica un mejoramiento entre elementos en diferentes niveles, *iii*) mapeo que especifica una funcionalidad entre los dos elementos o conjuntos de elementos, que puede ser computable, unidireccional o bidireccional.

Los modelos de trazado facilitan la estimación del impacto que sobre el EPP/SC final tienen los cambios en cualquier nivel del desarrollo del diseño. Además, la trazabilidad es una práctica de control que facilita la verificación y la validación de la exactitud de los requisitos durante el proceso de desarrollo. Tal verificación y validación está asociada con cuatro criterios básicos de calidad de cualquier diseño: consistencia, completitud, viabilidad y comprobabilidad. En lo que corresponde al uso de la trazabilidad en la Ingeniería de Procesos (IdeP), el problema se puede centrar en el desconocimiento de los ingenieros del valor agregado que esta práctica provee para realizar tareas complementarias de gestión del cambio y la verificación de criterios de calidad de consistencia y completez. No es usual en IdeP que el grupo de diseño formalice esta práctica durante todo el desarrollo del diseño, en especial para hacer las tareas de verificación o gestionar el cambio de los requisitos en los modelos de desarrollo. En lo que corresponde a la adopción, el problema se puede centrar en dos aspectos. Primero está el esfuerzo, continuidad y mantenimiento que la práctica exige: los métodos rápidos de diseño la excluyen como práctica de control por el costo en tiempo asociado a ella. El otro aspecto es el desconocimiento de mecanismos de trazabilidad útiles para un diseño dado.

En el ámbito del diseño en Ingeniería de Procesos, los diferentes niveles de desarrollo (todos abstractos), presentan una secuencia conocida de pasos propios del método de diseño. Podría decirse que cada uno de estos niveles de desarrollo representa a un EPP/SC intermedio (abstracto y en fase de mejoramiento), sobre el cual se aplican los cuatro pasos del diseño. Esto puede representarse como movimientos entre un nivel de desarrollo y otro superior que lo sigue en la secuencia que va de requisitos a EPP/SC final. Todo nivel intermedio siempre es un refinamiento de los niveles que lo preceden. Los niveles de refinamiento reconocibles en cualquier desarrollo son: requisitos, análisis, diseño e implementación. En la Figura 4.4 se muestra la estructura general de tales niveles de desarrollo en el diseño de un EPP/SC. Se incluye la Síntesis buscando una representación general de la tarea de diseño, aunque para un diseño que no implique Síntesis el diagrama es válido saltando los niveles asociados con esa tarea.

1. Primer Nivel en el Diseño para Trazabilidad. Está en la base de la secuencia y corresponde al nivel de requisitos o requerimientos del usuario del EPP/SC que se diseña. Existen requisitos funcionales y operativos. Es fundamental utilizar una “semántica” (aspectos del significado, sentido o interpretación del significado de un determinado elemento, símbolo, palabra o texto) dada en la especificación de requisitos. Tal semántica debe corresponder al cuerpo de conocimiento que contiene al EPP/SC, con la posibilidad de verificación de consistencia, completez y corrección. Debe anotarse en este punto que a pesar de ciertas similitudes, generalmente los requisitos para un Equipo, difieren de los requisitos para un Proceso y para una Planta, todos con su Sistema de Control (SC). Sin embargo, en esta descripción se agruparán siempre con la sigla EPP/SC para facilitar la redacción.

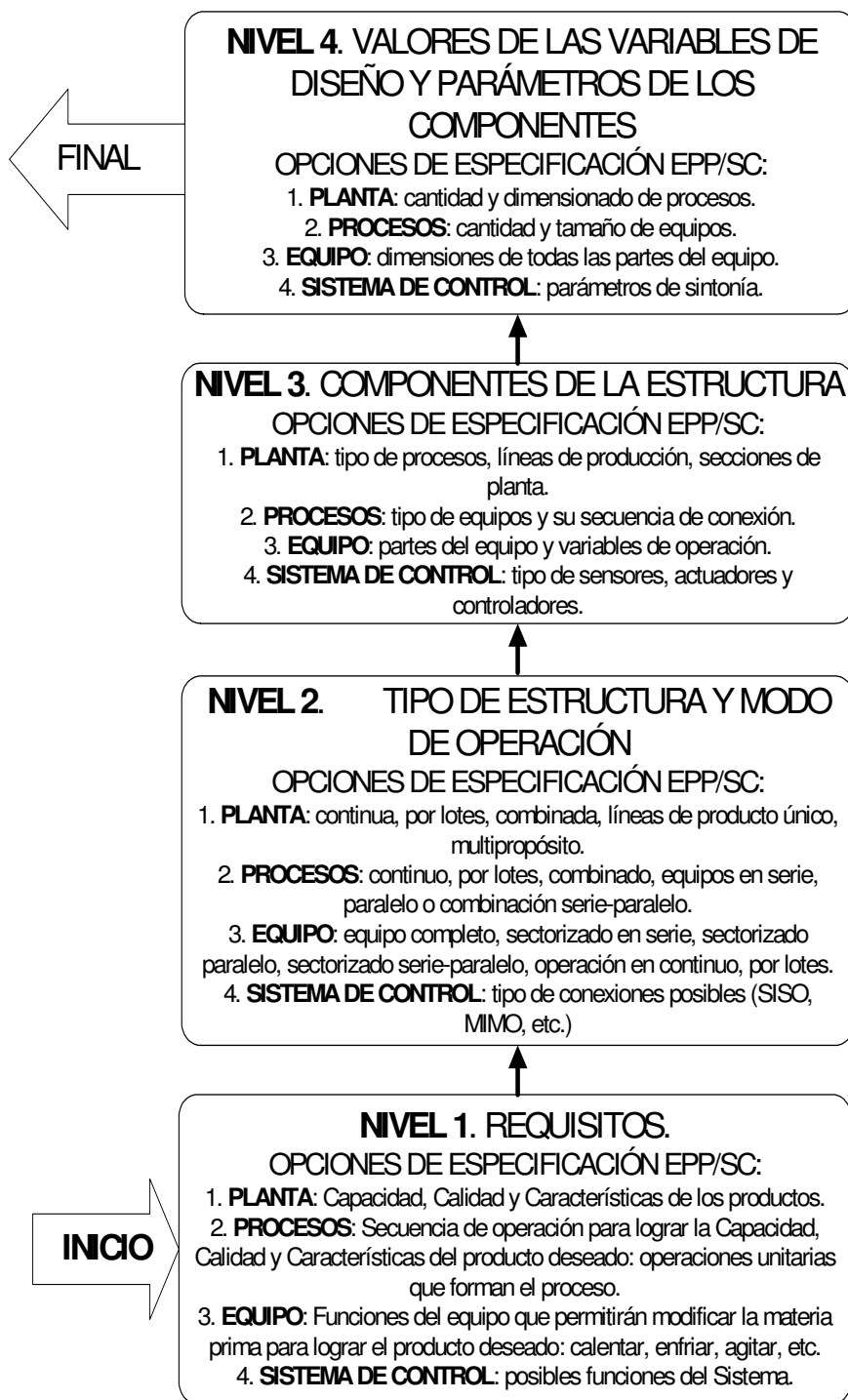


Figura 4.4: Niveles y pasos en el diseño de procesos.

La Consistencia en los requisitos implica que mantienen su significado a través de los modelos que los representan en diferentes niveles de abstracción durante el desarrollo del diseño. Por su parte, la Completez de los requisitos para un diseño exige que cualquier elemento de entrada a un nivel, debe ser incluido en los elementos del nivel superior de abstracción, por tanto, hay una respuesta específica para cada entrada posible. Finalmente, la Corrección de los requisitos de un diseño se refiere a la capacidad de especificar con dichos requisitos aspectos de configuración, operación o desempeño acordes (correctos) con el EPP/SC que se diseña.

2. Segundo Nivel en el Diseño para Trazabilidad. Presenta la primera transformación entre niveles, al especificar un tipo de estructura y un modo de operación para el EPP/SC. El tipo de estructura hace referencia a la organización que tendrán los componentes del EPP/SC. Por su parte, el modo de operación debe resultar óptimo para el cumplimiento de los requisitos asignados al EPP/SC y a su vez brindar un abanico de posibilidades para el tercer nivel.
3. Tercer Nivel en el Diseño para Trazabilidad. Este nivel implica la transformación de modo de operación a componentes determinados o especificaciones operativas aceptables para lograr el objetivo del diseño.
4. Cuarto Nivel en el Diseño para Trazabilidad. En este nivel final, se realiza la conversión de un tipo de componente o especificación operativa, en un grupo de parámetros que los caracteriza: dimensiones, valores de las variables operativas, etc.

Toda la información obtenida por transformación de la información del nivel previo o por adquisición de nueva información para responder a un requisito, conforma un modelo del EPP/SC en proceso de desarrollo. Un modelo que satisface todos los requisitos de su nivel de desarrollo, puede ser considerado una realización del diseño del EPP/SC. Obviamente, las realizaciones intermedias son inviables porque no han alcanzado el nivel de madurez total, indicado por el cumplimiento de todos los requisitos del diseño. A su vez, un Sistema (equipo, operación unitaria, proceso o línea de producción) resulta crítico si reside como un artefacto intermedio entre múltiples caminos de trazado de requisitos, puesto que si no se logra su realización será imposible mantener otros EPP/SC en niveles del mismo camino de trazado. Por su parte, los caminos de trazado pueden ser verticales cuando se refieren a la posibilidad de vincular EPP/SC de etapas subsecuentes de desarrollo (relación predecesor-sucesor), o pueden ser horizontales cuando vinculan EPP/SC dentro de la misma fase de desarrollo (relación maestro-subordinado).

Durante el desarrollo de un diseño, se evoluciona en tres espacios: *i*) Espacio tecnológico, que define los EPP y SC disponibles en cada nivel, *ii*) Espacio del problema de diseño, en el que se realiza el trazado de los requisitos a cumplir con el EPP/SC, evolucionando de un nivel de diseño al siguiente a través de Modelos de Requisitos, y *iii*) Espacio de la solución, en el que se realiza el trazado de los EPP/SC logrados, evolucionando entre niveles tanto con Modelos de Diseño como con Modelos de Análisis, ambos fundamentados en la disponibilidad de EPP/SC en el espacio tecnológico disponible (o seleccionado). Siempre los modelos destino (de un nivel superior) tienen modelos predecesores que marcan las transformaciones y la gestión de los cambios que suceden durante el proceso de desarrollo.

Desde el momento en que se generan los requisitos primitivos, se inicia la tarea de análisis que implica la viabilidad del desarrollo de tales requisitos en un EPP/SC dado. Cuando tal etapa de viabilidad se supera, se inicia la de diseño propiamente dicha, el cual a su vez tiene categorizaciones, siendo el diseño aproximado el más cercano a la etapa de análisis de viabilidad de requisitos. Luego viene el diseño de detalle que es el final para pasar a la implementación, que implica la selección de una tecnología y un tamaño de equipos que sea estándar y comercial, o decidir la fabricación de un EPP/SC a la medida o modificado desde tamaños estándar.

Finalmente en este apartado, debe decirse que el tema de Trazabilidad en la Ingeniería de Procesos es todavía un tema en desarrollo. Por eso, se invita al lector a consultar los avances en Trazabilidad logrados por la Ingeniería de Software, campo en el que se tienen ya formalizaciones claras al respecto [Clealand-Huang et al., 2003; Clarke and Baniassad, 2005; Amar et al., 2008; Tabares, 2009].

Capítulo 5

CONTROL DE PROCESOS

El deseo del hombre de poner las fuerzas de la naturaleza en beneficio propio con el fin de aumentar el nivel de confort de su existencia en la tierra, ha sido el motor de los desarrollos científicos y tecnológicos de la humanidad. En tal sentido, aunque los Procesos tienen comportamientos naturales (dinámicas naturales), los productos que se obtienen tras la aparición (espontánea) de tales comportamientos no son ni suficientes en cantidad ni temporalmente convenientes para aumentar el confort de la vida. Es preciso entonces forzar tales comportamientos para que ocurran a velocidades mayores y produzcan más cantidad de producto. En tal “forzamiento” es indispensable contar con una “fuerza de acción” que conduzca o mantenga el Proceso en las condiciones de mayor eficiencia posible. Como ya se dijo, tales condiciones no son las mismas en las que ocurre el fenómeno naturalmente, por lo que la acción forzante es la única manera de lograr mantener la operación del fenómeno en las nuevas condiciones impuestas por la voluntad humana. Del Análisis, Síntesis y Diseño de mecanismos para lograr esto, se ocupa el Control de Procesos.

5.1. Definiciones Básicas

Esta sección aparece en este texto al inicio de varios capítulos, con el fin de permitir al lector comprender completamente las discusiones posteriores. Sólo se incluyen las definiciones generales del tema del capítulo, dejando las definiciones específicas de temas puntuales directamente en la sección que corresponde al tema en cuestión.

Definición 5.1 *Dinámica Natural.* *Es el comportamiento propio de los fenómenos que toman lugar en un comportamiento dinámico específico de un Proceso (Dinámica de un Proceso), cuando todas las variables de entrada cambian debido a efectos naturales.*

Definición 5.2 *Dinámica Forzada o Controlada.* *Es el resultado que sobre una Dinámica Natural de un Proceso tienen una o más intervenciones humanas sobre las entradas que afectan tal Dinámica, de modo que se logra alterar el orden e intensidad en que las fuerzas de la naturaleza actúan para configurar dichos fenómenos.*

Definición 5.3 *Objetivo de Control.* *Es lo que se espera, se quiere o se debe controlar del proceso, de tal forma que éste se mantenga en un punto lo más cercano posible al definido para la operación eficiente, tanto en características del producto (o proceso) como en condiciones de operación segura. Es cualquier variable del Proceso, medida o no medida, que refleje: i) Condiciones de operación segura para el Personal, el Medio*

Ambiente o el Equipo, ii) Calidad o valor agregado del Producto, y iii) Condiciones de operación rentable del Proceso.

Los objetivos de control son los aspectos de interés para el diseñador, desde el punto de vista de la Ingeniería de Procesos. Aunque pueden ser las salidas del proceso, algunas veces existen salidas que por sí solas no son objetivo de control. Lo ideal sería que todos los objetivos de control correspondieran con los Estados del proceso y que todos esos estados se pudieran “mapear” con funciones escalares, a las salidas del proceso (medidas).

Definición 5.4 Representación del Proceso con Medición y Control. *Es una representación estandarizada en la que se indica de manera gráfica la relación entre las Variables de Entrada al Sistema (manipuladas u , perturbaciones d y ruido w), las Variables de Estado x del Proceso y las Variables de Salida y del Sistema. Véase la Figura 5.1.*

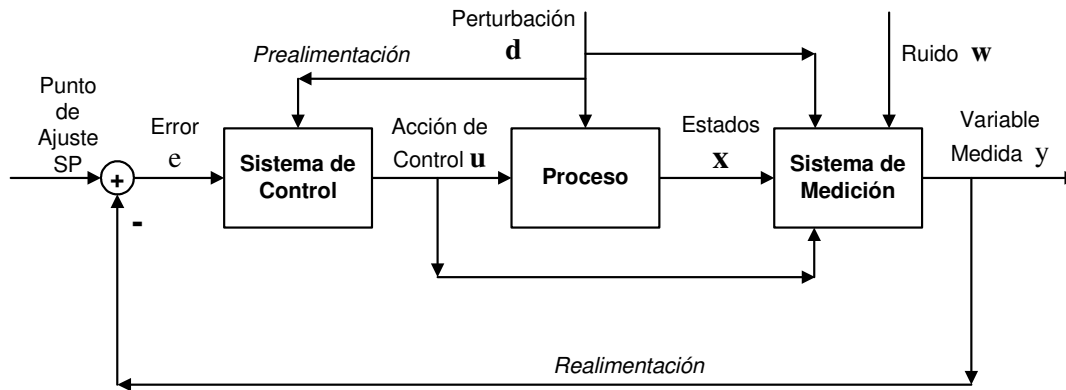


Figura 5.1: Sistema de Proceso con medición y opciones de control prealimentado y retroalimentado.

Definición 5.5 Variable Controlada. *Es la variable que se debe mantener en un valor deseado (control regulatorio) o conducir sobre una trayectoria de valores (control de seguimiento). Frecuentemente la variable controlada coincide con la salida “y” del proceso pero puede no coincidir directamente con el Objetivo de Control.*

Definición 5.6 Control Regulatorio (Regulatory). *Es el control en el cual se desea mantener por un periodo de tiempo apreciable, la Variable Controlada en un punto de ajuste fijo.*

Definición 5.7 Control de Seguimiento (Trancking). *Es el control en el cual se desea que la Variable Controlada siga una trayectoria de puntos de ajuste variables en el tiempo.*

Definición 5.8 Punto de Ajuste (SP de Set-Point). *Es el valor que se desea tenga la variable controlada en un instante de tiempo.*

Definición 5.9 Variable Manipulada (u). *Es la variable que se cambia de valor para mantener a la variable controlada en el valor deseado.*

Definición 5.10 Variable de Estado (x): *Es cada una de las variables que componen el Vector de Estado x.*

Definición 5.11 Perturbación (d): Es aquella señal que tiende a afectar de manera no controlada el valor de la variable controlada. Si la perturbación se genera dentro del sistema se denomina interna, si se genera fuera del sistema se denomina externa y es considerada como una variable de entrada al Sistema. Las perturbaciones internas normalmente alteran los coeficientes de transferencia al interior del proceso mismo (cinéticas). En cambio, las perturbaciones externas se asocian con cambios en las variables de entrada al proceso (flujos de materia o energía).

Definición 5.12 Error (e). Es la diferencia entre el valor deseado SP para la variable controlada y el valor actual de la variable controlada. Asumiendo (como en la mayoría de los casos), que la variable controlada coincide con la variable medida: $e = SP - y$.

Definición 5.13 Señal en Ingeniería de Control. Es cualquier cantidad física transmitible y medible que transporta y transmite información sobre una variable de proceso.

Definición 5.14 Variable de Desviación (μ'). Es la diferencia entre el valor actual de la variable μ y el valor del estado estacionario μ_{EE} . Las variables de desviación se representan con los mismos nombres de las variables originales pero con un apóstrofe superior: $\mu' = (\mu - \mu_{EE})$.

Definición 5.15 Variable Adimensionalizada. Es una variable sin unidades que aparece tras dividir la variable original μ por cualquier otra variable φ que tiene idénticas unidades que μ . Lo más frecuente es que la variable que se usa en el divisor sea la misma variable μ pero evaluada en otro punto de operación o en un valor conocido dado como referencia, por ejemplo su valor medio: $\mu_{Adim} = \frac{\mu}{\varphi} = \frac{\mu}{\mu_{Medio}}$.

Definición 5.16 Variable Normalizada. Es la misma variable μ original, pero con valores limitados al intervalo $[0, 1]$ o al intervalo $[-1, 1]$, lo que se logra al restarle un valor inicial y dividir el resultado por un valor constante de la misma variable μ . Matemáticamente, una de las maneras más intuitivas de normalización es: $\mu_{Normalizada} = \frac{\mu - \mu_{mínima}}{(\mu_{Máxima} - \mu_{mínima})}$.

5.2. Incentivos para el Control de Procesos

Como ya se mencionó, cuando se habla de “Automatizar” un Proceso, en realidad se está hablando de la aplicación completa de la Automática (Instrumentación, Control y Automatización) al proceso. Tal aplicación busca objetivos directos como: *i*) control de calidad, *ii*) gestión energética, *iii*) utilización óptima de materias primas, *iv*) mejora de la productividad, *v*) optimización del proceso global, *vi*) satisfacción de requisitos medioambientales, *vii*) integración empresarial y *viii*) seguridad en todos sus niveles. A su vez, la Automática como área mayor de estudio genera niveles de Análisis, Síntesis, Diseño y aplicación sobre el Equipo, el Proceso, la Planta y la empresa, tal como se muestra en la Figura 5.2. Las tres tareas de la Automática pueden definirse brevemente como sigue.

Definición 5.17 Instrumentación. Dotación de instrumentos de medición y actuación en el Equipo o Planta donde se está realizando el Proceso.

Definición 5.18 Control. Manipulación de información para garantizar condiciones un grupo de condiciones específicas en un Equipo o Planta donde se está realizando el Proceso.

Definición 5.19 Automatización. Provisión de algoritmia de decisión sobre tareas rutinarias que pueden tornarse automáticas y algoritmia de verificación de límites de variables para alarmar por cualquier sobrepasso.

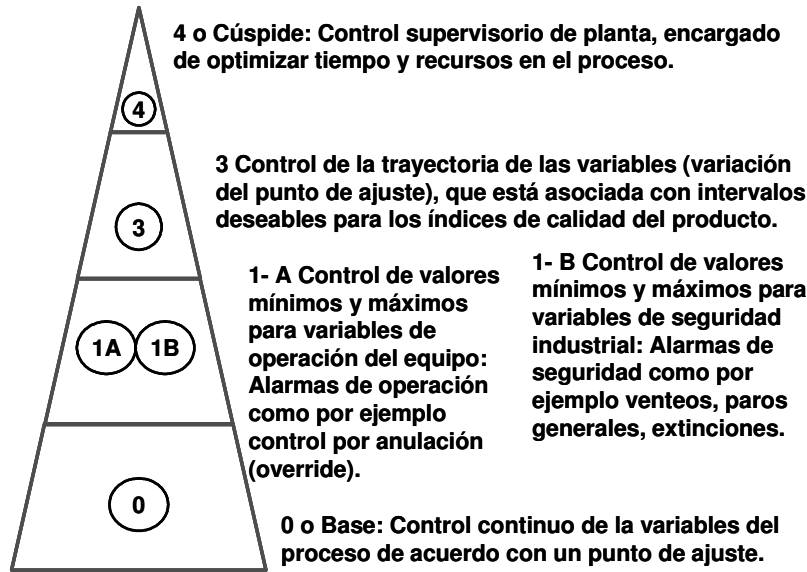


Figura 5.2: Diversos niveles en los que actúa la Automática en el Proceso.

Cualquier variable del Proceso, medida o no medida, que refleje condiciones de: operación segura para el personal, operación segura para el medio ambiente, operación segura para el equipo, calidad o valor agregado del producto y operación rentable del Proceso, cae en el ámbito de la Automática. Existe una jerarquía en las condiciones mencionadas. Primero está la seguridad del personal, de lo que se encarga la Automatización. En segundo lugar está la seguridad del medio ambiente, de lo que también se hace cargo la Automatización. El tercer lugar lo ocupa la seguridad del equipo, en lo que la Automatización esta vez se encarga de garantizar la operación dentro de intervalos de diseño. En el quinto lugar está la calidad del producto, en lo cual el Control garantiza que los índices de calidad del producto estén en un intervalo de aceptación por el cliente. El sexto lugar lo ocupa el logro de una operación con bajos costos energéticos y de materia prima, de lo cual nuevamente se encarga el control, pero esta vez con un control de trayectorias. Finalmente, se debe garantizar suficiente flexibilidad, que permita incluso conmutar la estructura de control para mejorar el desempeño. Como se ve, estos niveles se corresponden casi siempre con los jerárquicos de la plataforma de automatización vista arriba.

Un objetivo de control puede estar en los tres primeros niveles, siendo su grado de pertenencia a cada uno directamente relacionado con la magnitud de la variable y el tiempo de proceso (este último en el caso de procesos por lotes o Batch). Cuando un objetivo pertenece a los tres niveles es porque el valor de dicha variable está vigilada por tres estructuras de control diferentes. En este trabajo la discusión principal se centra en el nivel 0 o Base, puesto que los demás son superestructuras que asumen que estos controles continuos de base están operando siempre bien. Además, los niveles superiores de la pirámide operan de modo intermitente (niveles 1 y 2), en múltiplos del tiempo del nivel base. En cambio, los niveles supervisorios de calidad (niveles 3 y 4) operan de manera continua pero en un ciclo de tiempo más largo que el nivel base.

Definición 5.20 Variables de Control. Es un grupo de variables formado por: i) las variables que dan cuenta de las condiciones del medio ambiente que el Equipo o Planta brindan a la Sustancia para realizar el Proceso, como la temperatura, la presión, el grado de agitación, etc., y ii) las variables propias de la calidad del producto, puesto que quedan presentes en el producto terminado, como la viscosidad, el pH, la concentración, etc. Estas variables por lo general coinciden con los estados x del Proceso o con parte de sus salidas (variables medidas y).

Definición 5.21 Variables de Automatización. *Son variables que determinan eventos, secuencias o condiciones de alarma. Dichas variables pueden coincidir con Variables de Control pero tratadas de manera discreta o como detección de sobrepaso de valores umbrales.*

Un Sistema de Control debe satisfacer tres necesidades, que constituyen los mayores incentivos a la hora de decidir sobre la Automatización del proceso:

1. Suprimir la influencia de perturbaciones externas, que denotan el efecto que el entorno tiene sobre el Proceso. Es por eso que se necesita introducir un mecanismo de control que realice los cambios adecuados en el proceso para cancelar el impacto negativo que las perturbaciones produzcan.
2. Asegurar la estabilidad del Proceso. Se dice que un sistema es estable en lazo abierto, si en un tiempo $t = t_0$ el valor constante de la variable de interés en el proceso (estado x o salida y) se ve perturbado por algún factor externo y vuelve a su valor original a medida que pasa el tiempo (sistema autorregulado que no requiere sistema de control). Pero si el sistema llega a un nuevo estado estacionario, aunque se dice que es estable en lazo abierto requiere de un mecanismo de control. En el caso contrario: cuando t aumenta, x o y se desvían más y más, y se necesita algún mecanismo de control para que vuelva a su valor inicial, pues el sistema original (en lazo abierto=sin control) es inestable.
3. Optimizar el rendimiento del Proceso. Las condiciones en la operación de una planta no son siempre las mismas, por lo que deben alterarse las entradas para conseguir que el objetivo económico (beneficio) sea máximo. Esto no es una tarea trivial, por lo que necesita resolverse un problema de optimización.

En este punto es preciso enfatizar que si el único objetivo del control fuera comprar e instalar componentes, el trabajo de los Ingenieros de Proceso sería demasiado sencillo. El Ingeniero de Procesos más que ningún otro, tiene la responsabilidad de suministrar los análisis dinámicos y estáticos del Procesos, puesto que sus conocimientos son esenciales para aplicar de manera adecuada el control automático al Equipo o Planta dónde se lleva a cabo el Proceso. El análisis no sólo es la etapa fundamental para diseñar un Sistema de Control, sino que también es el soporte para optimizar costos de inversión/operación y para elaborar manuales de arranque, parada y emergencia.

5.3. Sistemas de Control y su Clasificación

La parte complementaria de cualquier implantación de un Proceso es su Sistema de Control. Aunque el Sistema de Control realiza tanto las tareas de Automatización como las tareas de Control, en este trabajo sólo se enfocan las tareas de control. El diseño de las tareas de Automatización se trata en detalle en libros especializados, que se dejan al lector interesado como lecturas complementarias [Chacón y Sarrazin, 2000]. En la industria todavía existen casos extremos en los que el control del Proceso lo realiza un operador humano. Sin embargo, la tendencia mayoritaria es hacia la autonomía total del Proceso, incluso en algunos modos de operación bajo condiciones de falla. En esa línea, vienen apareciendo hace más de una década trabajos en sistemas de control reconfigurable [Maciejowski, 1997] y en sistemas de control tolerantes a fallas [Chen and Patton, 1999]. El Sistema de Control es por lo tanto el complemento del Proceso para llegar a tener un Proceso Controlado. Como tal, el Sistema de Control debe pasar por las etapas de Síntesis y Análisis para lograr su Diseño.

Definición 5.22 Sistema de Control. *Es un conjunto de dispositivos mecánicos, neumáticos, eléctricos, electrónicos o de cualquier otra índole, organizados de una manera específica (Sistema) que le permita comparar, indicar, calcular (computar) y transmitir información en forma de señal para lograr como objetivo la regulación o guía de una variable determinada. Las tres características principales que posee cualquier sistema de control son: i) Sensar-Estimar, ii) Comparar-Calcular y iii) Accionar.*

Un Sistema de Control puede operar en dos modos: seguimiento o regulación. Sin embargo, la regulación resulta ser una tarea subordinada de la operación del Proceso. Es precisamente la operación del Proceso la que dicta los cambios de punto de ajuste típicos del modo Seguimiento.

Definición 5.23 Lazo de Control. Es el circuito o trayectoria que siguen una señal correspondiente a una variable individual en un Sistema de Control, desde un sensor hasta un actuador o Elemento Final de Control (EFC).

Definición 5.24 Lazo Cerrado de Control o Lazo Cerrado (Closed Loop). Es un Lazo de Control en el cual las señales involucradas tienen alguna relación entre ellas. Es un Lazo de Control que se establece entre un punto de acción u sobre el proceso y un punto de medición x o y de una variable que se ve afectada por la acción u . En la Figura 5.3 se ve el Lazo Cerrado típico por realimentación de estado o salida. Los círculos punteados muestran los lugares de contacto con el Proceso.

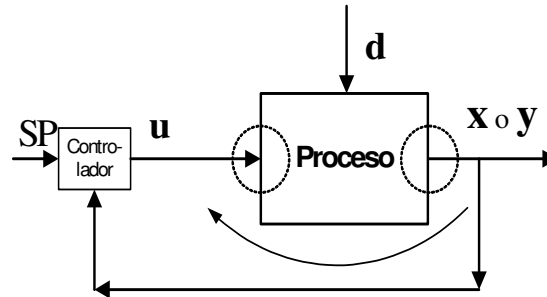


Figura 5.3: Representación general de un lazo cerrado de control.

Definición 5.25 Lazo Abierto de Control o Lazo Abierto (Open Loop). Es un Lazo de Control en el cual las señales involucradas no tienen ninguna relación entre ellas. Dos ejemplos típicos de este tipo de Lazo de Control se ven en la Figura 5.4: a) el control sin medición y b) el control prealimentado, en el que es evidente que ni la perturbación d ni el punto de ajuste (y_{SP}) dependen de la acción de control u . Los círculos punteados muestran los lugares de contacto con el Proceso.

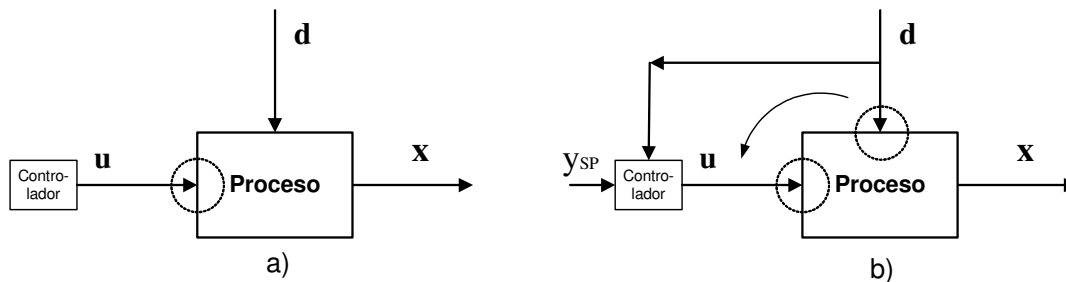


Figura 5.4: Representación de posibles Lazos Abiertos de Control: a) con acción manual desde el Controlador y b) prealimentado.

Definición 5.26 Control SISO o de Una Entrada y Una Salida (Single Input-Single Output). Es un Sistema de Control en el que la entrada es una variable escalar y la salida es una variable también escalar.

Definición 5.27 Control MIMO o de Entrada Múltiple y Salida Múltiple (Multiple Input-Multiple Output). Es un Sistema de Control en el que la entrada es una variable vectorial (dos o más señales) y la salida es una variable también vectorial (dos o más señales).

Como se mostró desde las definiciones básicas, en un Lazo de Control intervienen diferentes variables: controlada (normalmente coincide con la medida), manipulada y de perturbación. Cómo seleccionar que variables del Proceso serán las que ocupen esos lugares en un lazo de control, será parte del Capítulo ??: Diseño de Sistemas de Control para Procesos. Dicha labor se denomina pareamiento de variables para un lazo de control. Debe resaltarse, en consonancia con lo dicho al inicio de esta sección, que un Sistema de Control va desde un único lazo de control de entrada simple y salida simple (SISO del inglés Single-Input Single-Output), hasta múltiples lazos de control en una misma estructura (MIMO). Siempre, en el Sistema de Control, la sensórica y la acción son ejecutadas por los instrumentos industriales mientras que la comparación y el cálculo del valor de la acción de control, la realiza el controlador mediante un algoritmo de control. Dicho algoritmo puede ser una ley o formulación matemática que involucra valores de las variables y valores de sus puntos de ajuste, o puede ser un procedimiento de optimización del valor de la acción de control. Como ya se definió, la estructura que presenta un sistema de control es en forma de lazo cerrado sobre el Proceso (toma información del proceso y envía información al proceso). Esto permite que el Proceso opere en modo manual (lazo abierto o sin que el controlador actúe) o en modo automático (lazo cerrado o con el controlador actuando). Los Sistemas de Control pueden clasificarse, de acuerdo con la cantidad y calidad de la información utilizada en el Sistema de Control, en: *i*) Anticipativo o prealimentado, *ii*) Reactivo o Retroalimentado, y *iii*) Combinado [Alvarez et al., 2002].

Prealimentado (*Feedforward*)

El objetivo del control Prealimentado es tratar de compensar la perturbación antes de que ésta afecte la variable controlada. Para ello, se mide la perturbación y de acuerdo con el valor de esa medición, se actúa sobre la variable manipulada para compensar el efecto que tendrá la perturbación, logrando que el efecto total sobre la variable controlada sea nulo. Este tipo de controlador no verifica si tal anulación del efecto de la perturbación sobre la variable controlada tuvo éxito, puesto que no mide la variable controlada (la salida). Es por lo tanto un control que asume certeza total sobre su acción. Además, es un controlador que se anticipa a los efectos de la perturbación. El control prealimentado resulta ventajoso cuando se tiene disponible una medida de la perturbación al sistema. Este tipo de sistema de control implica la existencia dentro del controlador de un modelo del efecto de la perturbación sobre la variable controlada, asumiendo que no existe cambio temporal de los parámetros y propiedades del Proceso. A partir de tal modelo se puede calcular la cantidad de acción de control u a aplicar al Proceso para contrarrestar el efecto de la perturbación d medida. En la parte *b*) de la Figura 5.4, se observa la estructura de control prealimentado. El modelo que tiene este tipo de controlador debe ser matemáticamente invertible.

Retroalimentado (*Feedback*)

El objetivo del control Retroalimentado es mantener la variable controlada en el punto de operación deseado ejerciendo acciones sobre la variable manipulada, de acuerdo con el valor leído de la variable controlada. Se pretende compensar el efecto de todas las perturbaciones con base en el error que éstas generan en la variable controlada. No tiene ninguna medición de las perturbaciones. Sólo mide su efecto sobre la variable controlada. En tal sentido, es un control totalmente reactivo, que reacciona ante el error. Por este motivo siempre habrá un periodo de tiempo en el que la variable manipulada presente error. En la Figura 5.3, vista arriba, se observa la estructura de control realimentado. Existen fundamentalmente dos aproximaciones a la realimentación en control. Realimentación de la Salida o realimentación del Estado. En este último caso, también puede regularse la salida, como consecuencia directa del Control del Estado. Debe mencionarse que existe en muchos procesos realimentación positiva totalmente inherente al ciclo de energía y materia. La

contraparte es la realimentación negativa que aplica el sistema de control. La realimentación positiva tiene tendencia natural a desestabilizar, mientras que la realimentación negativa tiene la posibilidad de estabilizar incluso sistemas inherentemente inestables.

Combinado retroalimentado-prealimentado

El control combinado es un sistema de control que aprovecha las ventajas tanto de la realimentación como de la prealimentación [Camacho and Bordons, 1995]. La prealimentación compensa el efecto de perturbaciones medibles sobre la variable controlada, mientras que la realimentación aporta su efecto estabilizante sobre el sistema y compensa los efectos de las perturbaciones no medidas sobre la variable controlada. En la Figura 5.5 se ve la estructura de un control combinado. En este tipo de esquema existen dos opciones básicas: la primera es sin Funcional de Costo (FC), en la cual sólo se realiza una precompensación de las perturbaciones al sistema seguida por un ajuste por realimentación, siempre repitiendo la misma secuencia cuando se detecta una variación en la perturbación medida. La segunda es con FC, caso en el cual el sistema de control (denominado “predictivo”) utiliza un modelo del proceso para realizar predicciones acerca del efecto final de distintas acciones de control probadas y con el FC penaliza aquellas respuestas del Proceso que se daría por fuera de las especificaciones del diseñador del controlador.

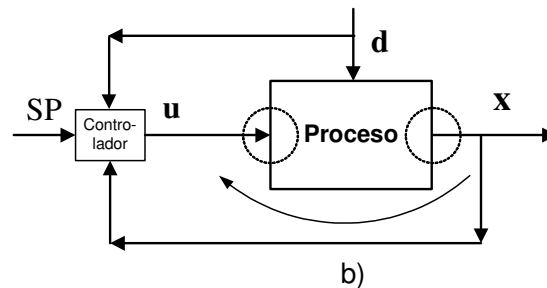


Figura 5.5: Estructura de un lazo de control combinado.

En este trabajo se abordará sólo el uso de Sistemas de Control Retroalimentados y en particular se trabajará sólo con el Controlador PID, por ser el más intuitivo y más utilizado a nivel industrial. Don Morrison [Morrison, 2004], dice: “hoy más del 99% de todos los lazos de regulación simples en la industria están configurados con controladores PID”.

5.4. Control Clásico vs. Control Moderno

Para avanzar con la intención de este trabajo de utilizar sólo control retroalimentado, es necesario especificar que señal será la que se realimente: la Salida y o el Estado x . Para resolver esta pregunta, es necesario discutir sobre las diferencias entre cada una de estas aproximaciones, tan importantes en la historia del control, que cada una ha generado una corriente de trabajo. La realimentación de la salida fue la primera en utilizarse, por lo que dió origen a toda una corriente de trabajo denominada Control Clásico. Sólo hasta la década del 60 del siglo XX se empezó a utilizar la realimentación del estado para realizar control, lo que generó la corriente de trabajo denominada todavía Control Moderno.

La filosofía del Control Clásico se deriva mayoritariamente de sus implantaciones iniciales a través de amplificadores electrónicos (al principio con tubos de vacío y luego armados con transistores). Tal implantación hizo que la técnica de Análisis para los Sistemas de Control fuera el dominio de la frecuencia en el plano s , al cual se llegaba operando con la transformada de Laplace. En un principio, ese Análisis fue aplicable sólo

a sistemas lineales invariantes en el tiempo, aunque luego algunas extensiones permitieron su aplicación a sistemas no lineales. En el análisis en frecuencia, siguiendo los métodos de Harry Nyquist [Nyquist, 1932] y Hendrik Wade Bode [Bode, 1945], los dos atributos del modelo del Sistema que se requieren son la magnitud y la fase de su respuesta en frecuencia. Esto representa una ventaja puesto que la respuesta en frecuencia puede ser medida de manera experimental¹ sobre el sistema en operación y calcular así el modelo completo en términos de funciones de transferencia. Con esta información se puede hacer diseño del controlador a través de los diagramas de Nyquist y Bode o el método del lugar de las raíces. Para sistemas compuestos, se puede operar sobre el diagrama de bloques para determinar la función de transferencia global a través de manipulación de esos grafos. Las características más importantes del Control Clásico son:

1. No requiere una descripción exacta de las dinámicas internas del Proceso. Basta con su comportamiento entrada-salida para el análisis y diseño del Sistema de Control.
2. El diseño del Sistema de Control se puede realizar mediante técnicas gráficas o cálculos nemotécnicos como el algoritmo de Hurwitz [Stephanopolous, 1984].
3. Provee Sistemas de Control robustos frente a incertidumbres en las perturbaciones y en el ruido, utilizando en el diseño las nociones de margen de fase y margen de ganancia.
4. Los Sistemas de Control que se obtiene son de fácil sintonía en línea.
5. Describe las propiedades de Lazo Cerrado en términos de propiedades del Sistema en Lazo Abierto que resultan de fácil medición experimental.
6. Los controladores más exitosos son los PID (Proporcional Integral Derivativo), sintonizados con índices de desempeño tales como ITSE (Integral Temporal del Error Cuadrático) o ITAE (Integral Temporal del valor Absoluto del Error).
7. Brinda una estructura simple de relación de cada variable controlada con la entrada, con lo cual se logra un diseño dinámico particular de la estructura del controlador.
8. Diseña con un modelo aproximado del Proceso, del cual deduce matemáticamente el controlador. Eso le brinda una buena robustez ante incertidumbres en las perturbaciones y la existencia de ruido en las señales.
9. Su aplicación no es sencilla para sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO) o sistemas de múltiples lazos de control.

Por su parte, la filosofía del Control Moderno se fundamenta en técnicas de descripción y análisis en el dominio del tiempo, por lo que requiere un modelo del sistema a controlar en el espacio de estado, que debe ser expresable como un sistema vectorial de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y un sistema algebraico para describir la relación estado-salida:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Dd} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} \end{aligned} \quad (5.1)$$

con \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} y \mathbf{D} matrices de términos constantes, \mathbf{x} el vector de estado, \mathbf{u} el vector de acciones de control, \mathbf{d} el vector de las perturbaciones y \mathbf{y} el vector de variables medidas o de salida. Las técnicas de diseño del Control Moderno fueron inicialmente desarrolladas para sistemas lineales como el mostrado, pero su extensión a sistemas no lineales resultó casi directa a través de las ideas de Lyapunov [Lyapunov, 1982]. Las características más importantes del Control Moderno son:

¹Aplicando señales senoidales en la entrada del Sistema, mientras se registran las ondas de salida.

1. Los modelos en el espacio de estado son aplicables de manera directa a sistemas MIMO.
2. Permite la realimentación directa de las variables internas del Proceso, lo que da origen al Control por Realimentación de Estado: $\mathbf{u} = -\mathbf{K} * \mathbf{x}$. A través del Control por Realimentación de Estado se pueden manejar sistemas MIMO puesto que \mathbf{K} es un matriz y se realimenta todo el estado \mathbf{x} para calcular todas las acciones de control \mathbf{u} .
3. Permite el diseño de sistemas de control óptimos en lazo abierto (acciones de control precalculadas) para sistemas no lineales, lo que dió origen al Control Óptimo.
4. Algunos aspectos del desempeño en lazo cerrado se pueden analizar a través de las propiedades en lazo abierto, siempre que se cuente con buen conocimiento de algebra matricial.
5. En Control con Realimentación de Estado, \mathbf{K} puede ajustarse para que optimice un índice de desempeño cuadrático: $J = \int_{t=t_o}^{t=t_F} (\mathbf{xQx} + \mathbf{uRu})dt$, lo que dió lugar al Regulador Cuadrático Lineal (LQR del inglés Linear Quadratic Regulator), como una extensión MIMO de los controladores PID sintonizados con índices de desempeño tales como ITSE (Integral Temporal del Error Cuadratico) o ITAE (Integral Temporal del valor Absoluto del Error).
6. Brinda a través del LQR una forma de calcular todas las componentes de la matriz de ganancias \mathbf{K} de manera simultánea en términos de cantidades evaluables en lazo abierto: \mathbf{A}, \mathbf{B} , en contraste con el diseño de cada lazo individual (uno a la vez) del Control Clásico. Sin embargo, las técnicas de diseño formal del LQR no proporcionan ningún conocimiento intuitivo respecto del sistema en lazo cerrado.
7. El Control por Realimentación de Estado exige un conocimiento completo del valor de los estados, lo que muchas veces no es posible. Aunque es viable una realimentación de salida: $\mathbf{u} = -\mathbf{K} * \mathbf{y}$, pero el diseño formal resulta matemáticamente más complejo.
8. La realimentación de estado, al relacionar todas los estados con todas las entradas a través de \mathbf{K} , no brinda una estructura simple de relación de cada estado con la entrada, a diferencia de la realimentación de salida del Control Clásico, que permita un diseño dinámico particular de la estructura clara entre cada salida y cada acción de control.
9. Asume que el modelo del Proceso es exacto y de dicho modelo deduce matemáticamente el controlador. Eso hace que la robustez ante incertidumbres en las perturbaciones y el ruido sea menor que la de los controladores entrada-salida.

Tras esta clasificación, y viendo las diferencias y similitudes entre las dos aproximaciones, es evidente que son los aspectos teóricos los que marcan la diferencia. Nótese que si se hacen todas las salidas iguales a los estados ($y_i = x_i, \forall i$), el control moderno y el clásico coincidirían en la aplicación, pero no en las herramientas de análisis que cada uno brinda para el diseño del controlador. Por eso, en el resto de este trabajo se operará con la realimentación como una tarea genérica, mostrando al lector en cada punto las opciones que brindan el control clasico y el control moderno para el análisis y diseño del sistema de control. Obviamente, se prefiere la realimentación de estado puesto que brinda información más precisa sobre el comportamiento real del proceso. En contraste, la aproximación por control de la salida siempre incluye en el lazo de control los efectos de todos los estados sobre la sensórica. Como se dijo arriba, es evidente de la representación dada por la ecuación 5.1 que todo lo hecho en entrada-estado puede entenderse como entrada-salida, si la matriz \mathbf{C} es la identidad. Es decir, si para cada estado se tiene un sensor o estimador. Finalmente en este apartado, debe resaltarse otra vez la utilidad de un modelo o representación del Proceso, para poder abordar las tareas de Diseño de su Sistema de Control.

5.5. Representación de procesos para su control

Si en un Proceso todos los estados fueran medibles, los objetivos de control se traducirían directamente en salidas para el proceso y entradas para el Sistema de Control. Sin embargo, es frecuente que algunas características del producto no sean medibles directamente (en línea, *on-line*), así como tampoco algunas condiciones operativas pueden ser determinadas en todo momento por el costo de los medidores o incluso la inexistencia en el mercado de los mismos. Esto hace que muchas veces los objetivos de control se trasladen a lo que se puede medir, obligando a un mapeo (una traducción) entre el espacio (idioma) original de los objetivos y un espacio (idioma) en el cual sea posible vigilar su cumplimiento. Estas dos traducciones deben quedar explícitas en el modelo del Proceso. El objetivo de control se alcanza en el momento en que se asegura que tanto las variables de Control como las variables de Automatización, están controladas y en el intervalo de sus valores normales.

Generalmente las representaciones dinámicas del Proceso usuales en el Análisis, Síntesis y Diseño de Sistemas de Control son:

1. Ecuaciones Diferenciales (ED) ordinarias no lineales $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{d})$ que representan las dinámicas del sistema en el espacio de estados y en el dominio temporal (t). Como caso especial, el sistema no lineal puede organizarse como un sistema no lineal afín con la entrada, de parámetros y perturbaciones constantes², por lo que su expresión final es: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) * \mathbf{u}$. Hay otras formas características de sistemas no lineales, como la bilineal, pero no se tratan en este trabajo. A la característica de parámetros contrantes, también se le denomina invarianza temporal a secas.
2. ED ordinarias lineales: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$, que asumen parámetros constantes (invariante en el tiempo) y perturbaciones constantes. Tales modelos se obtiene mediante linealización del modelo en ED no lineal afín con la entrada, de parámetros y perturbaciones constantes o mediante identificación de un modelo lineal desde datos del proceso, con las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} de términos numéricos (constantes).
3. Funciones de transferencia obtenidas desde linealizaciones de modelos en ED ordinarias, que se transforman a través de Laplace, del dominio temporal (t) al dominio de Laplace (s).
4. Representaciones en Fase y Ganancia que se obtienen al transformar el dominio de Laplace (s) al dominio de la Frecuencia ($i\omega$).

Como se pudo apreciar, a partir del segundo tipo de representación con ED ordinarias lineales, existe una simplificación del modelo original con la única intención de facilitar las tareas de Análisis, Síntesis y Diseño del Sistema de Control. Esto implica que si se usan Funciones de Transferencia o su representación en el dominio de la Frecuencia, no hace falta solucionar el modelo completo para hallar las características del Proceso y su Sistema de Control que resultan útiles en el Diseño. Existe en tales simplificaciones el concepto de linealización.

En este punto surge una pregunta: si la mayoría de Procesos tienen respuestas no lineales, ¿no es una pérdida de tiempo linealizar y operar con el sistema lineal simplificado?. La respuesta es no, puesto que para sistemas continuos, con un punto de operación definido, es posible linealizar alrededor de ese punto (Estado Estacionario EE) y operar con la representación lineal que aparece. Ese Sistema lineal representa bien el comportamiento del proceso en un entorno del EE. El tamaño de dicho entorno o región dependerá de la agrevisividad de la no linealidad y del tamaño de las perturbaciones a las que se ve sometido el Proceso. Para solucionar el problema que representa tener un entorno muy estrecho, pueden tomarse EE contiguos y linealizar sobre cada uno de ellos para obtener múltiples modelos locales. Esto demuestra la utilidad de la linealización para el análisis de sistemas complejos, puesto que cuando estos sistemas se linealizan a tramos

²La consideración de Perturbaciones constantes asume valores nominales de la perturbaciones durante el diseño, dejando todas las variaciones posteriores de las perturbaciones para que las maneje el Sistema de Control con su robustez.

es posible una integración posterior de los modelos locales (lineales) en un modelo global no lineal. Para lograr esto se requiere de una ley de conmutación entre los modelos locales. La linealización puede ser de dos tipos: *i*) Exacta o por realimentación, *ii*) Aproximada o por Expansión en Series.

5.5.1. Linealización Exacta o por Realimentación

Este tipo de linealización se denomina exacta porque su validez no se limita a un entorno alrededor de un punto. Por el contrario, en cada punto la linealización se recalcula, con lo cual resulta exacta para un conjunto amplio de puntos. En esta linealización se realimenta la señal del estado del Proceso, de modo que matemáticamente dicha señal ayude a anular las no linealidades. Tras esto, se impone un comportamiento lineal a todo el proceso mediante una realimentación del estado mismo o de la salida del Sistema. Con el siguiente ejemplo sencillo se muestran las fortalezas del método.

Ejemplo 5.1 Sea un tanque cónico con descarga por el fondo a través de una tubería, como el mostrado en la Figura 5.6, al cual se le quiere controlar su nivel a través del flujo de entrada. A partir de un Balance de Cantidad de Movimiento, entre la superficie libre del líquido y la boca de descarga en el fondo, se llega al siguiente modelo dinámico para la acumulación de masa, expresada aquí como nivel:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{A(L)} \left[u - a * \sqrt{2 * g * L} \right]$$

con L el nivel del líquido en el tanque en m , A el área transversal del tanque (que depende del nivel en el que se mida) en m^2 , u la acción de control (que en este caso es el flujo de entrada) en $\frac{m^3}{s}$, a es el área del orificio de descarga del tanque por el fondo en m^2 y g es la aceleración de la gravedad $9,8\frac{m}{s^2}$. Puesto que el sistema que representa a este Proceso es un Sistema No Lineal (L está dividiendo en una expresión del área $A(L)$ y además, L está elevada a la $\frac{1}{2}$), debe linealizarse.

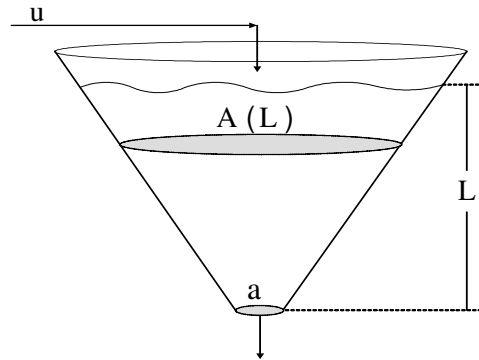


Figura 5.6: Diagrama de Flujo de Proceso para un tanque cónico.

Solución: Para su linealización exacta, se deduce de la estructura matemática del modelo que si se hace: $u = A(L) * v + a\sqrt{2gL}$, se logran anular las no linealidades:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{1}{A(L)} \left[A(L) * v + a\sqrt{2gL} - a\sqrt{2gL} \right] \\ \Rightarrow \frac{dL}{dt} &= v \end{aligned}$$

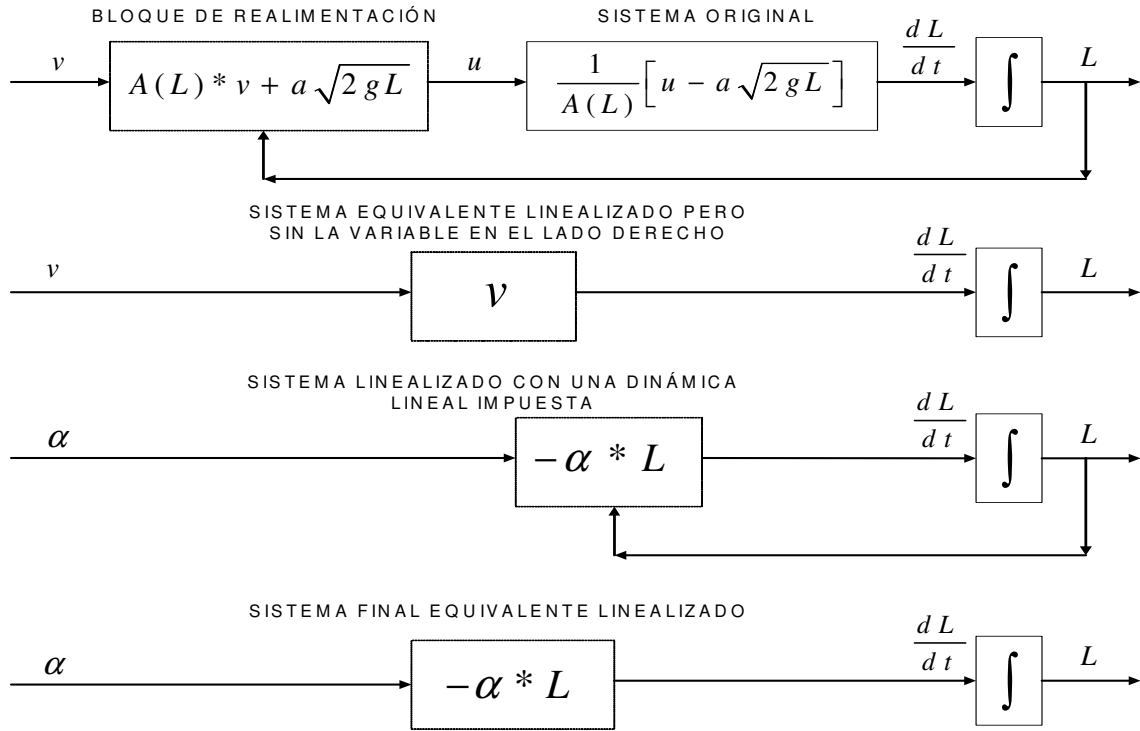


Figura 5.7: Diagrama de Flujo de Información para el ejemplo del tanque cónico.

Para que el bloque de realimentación funcione, deberá realimentarse el valor del estado (en este caso solo $x = L$) en todo momento. Además, como el sistema que queda, aunque lineal no contiene a la variable en el lado derecho, se debe imponer una dinámica que incluya al estado, para lo cual se hace: $v = -\alpha * L$, que resulta asintóticamente estable si $\alpha > 0$. De este modo, el Proceso queda linealizado y estable. Todo el procedimiento se ilustra mediante Diagramas de Flujo de Información en la Figura 5.7.

El método de Linealización exacta tiene como desventajas: *i*) Requiere la medición completa del Estado, para realizar la realimentación interna que logra la anulación de las no linealidades, *ii*) El modelo debe ser lo más preciso posible, o de lo contrario al realimentar se generan nuevas no linealidades, más perjudiciales incluso que las originales, y *iii*) Como se anulan todas las no linealidades, también desaparecen las no linealidades buenas, por lo que es posible que el control original del sistema no lineal sea más sencillo que el control del sistema linealizado por realimentación.

5.5.2. Linealización Aproximada por Expansión en Series

Este tipo de linealización opera con una expansión en una serie de la función no lineal alrededor de un punto dado, pero solamente toma los términos lineales de dicha expansión. En lo que sigue se muestra el procedimiento de la linealización jacobiana. Con el fin de ilustrar el procedimiento, sea el siguiente sistema general No Lineal:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{d}) + \mathbf{b}$$

en el cual se sigue la misma nomenclatura usada hasta ahora: \mathbf{x} es el vector de estado, $\boldsymbol{\theta}$ el vector de

parámetros, \mathbf{u} el vector de acciones de control o variables manipuladas, \mathbf{d} el vector de perturbaciones y \mathbf{b} el vector de términos constantes de las ecuaciones diferenciales o términos afines. De este sistema, para ilustración, se toma la ED para el primer estado:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{d}) + b_1 \quad (5.2)$$

Puesto que x_i EE es el punto de operación seleccionado para realizar la linealización, es decir x_i EE es una constante, el diferencial de x_i se puede calcular despejando x_i de la ecuación 5.2 y luego aplicando el operador diferencial, recordando la Definición de Variables de Desviación dada previamente:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i' + x_i \text{ EE} \\ \frac{dx_i}{dt} &= \left(\frac{dx_i}{dt} \right)' + \frac{dx_i}{dt} \Big|_{EE} \end{aligned}$$

$$\frac{dx_i}{dt} \Big|_{EE} = 0 \therefore$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \left(\frac{dx_i}{dt} \right)'$$

Aunque este procedimiento es matemáticamente correcto, deja oculta una relación interesante para prescindir de los términos constantes de la ED, aspecto útil de las expresiones en variables de desviación. Recordando que las variables de desviación se calculan en el estado estacionario y que en dicho estado la variable no cambia con el tiempo: $\frac{dx_i}{dt} = 0$, la ED original se convierte en la siguiente EA:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} \Big|_{EE} &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{d}) \Big|_{EE} + b_i = 0 \\ \frac{dx_i}{dt} \Big|_{EE} &= f_i(x_1 \text{ EE}, x_2 \text{ EE}, \dots, x_n \text{ EE}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}_{EE}, \mathbf{d}_{EE}) + b_i = 0 \end{aligned}$$

Ahora, utilizando la definición de variables de desviación, pero aplicada al término diferencial, y reemplazando la equivalencia anterior se llega a:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx_i}{dt} \right)' &= \frac{dx_i}{dt} - \frac{dx_i}{dt} \Big|_{EE} \\ \left(\frac{dx_i}{dt} \right)' &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{d}) + b_i - [f_i(x_1 \text{ EE}, x_2 \text{ EE}, \dots, x_n \text{ EE}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}_{EE}, \mathbf{d}_{EE}) + b_i] \\ \left(\frac{dx_i}{dt} \right)' &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{d}) - f_i(x_1 \text{ EE}, x_2 \text{ EE}, \dots, x_n \text{ EE}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}_{EE}, \mathbf{d}_{EE}) \end{aligned}$$

De este modo se llega a la expresión para la linealización, en la cual ya se tomó su diferencial en variables de desviación:

$$\left(\frac{dx_i}{dt} \right)' = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{d}) - f_i(x_1 \text{ EE}, x_2 \text{ EE}, \dots, x_n \text{ EE}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}_{EE}, \mathbf{d}_{EE})$$

Como se nota, en esta expresión no existe término independiente b_i . Ahora, es posible aplicar la linealización a la función no lineal $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{d})$ del lado derecho. La linealización de esta función se realiza mediante expansión en series de Taylor, recordando que deben tenerse derivadas parciales de $f_i(\cdot)$ respecto a todas y cada una de las variables que se consideren cambian con el tiempo en $f_i(\cdot)$, en este caso el estado \mathbf{x} , las acciones de control \mathbf{u} y las perturbaciones \mathbf{d} . No se consideran los términos de orden superior de la expansión: $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2}, \frac{\partial^3 f_i}{\partial x_i^3}, \dots, \frac{\partial^n f_i}{\partial x_i^n}$, bajo el supuesto (generalmente evidente) que: $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|f_{OS}(t, \mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \rightarrow 0, \forall t$.

$$\begin{aligned}
f_{i, \text{linealizada}}(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{d}) &= f_i(x_{1 \text{ EE}}, x_{2 \text{ EE}}, \dots, x_{n \text{ EE}}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}_{\text{EE}}, \mathbf{d}_{\text{EE}}) \\
&+ \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{d})}{\partial x_1} \Big|_{(\mathbf{x}_{\text{EE}}, \mathbf{u}_{\text{EE}}, \mathbf{d}_{\text{EE}})} * (x_1 - x_{1 \text{ EE}}) \\
&+ \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{d})}{\partial x_2} \Big|_{(\mathbf{x}_{\text{EE}}, \mathbf{u}_{\text{EE}}, \mathbf{d}_{\text{EE}})} * (x_2 - x_{2 \text{ EE}}) \\
&+ \dots + \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{d})}{\partial x_n} \Big|_{(\mathbf{x}_{\text{EE}}, \mathbf{u}_{\text{EE}}, \mathbf{d}_{\text{EE}})} * (x_n - x_{n \text{ EE}}) \\
&+ \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{d})}{\partial u_1} \Big|_{(\mathbf{x}_{\text{EE}}, \mathbf{u}_{\text{EE}}, \mathbf{d}_{\text{EE}})} * (u_1 - u_{1 \text{ EE}}) \\
&+ \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{d})}{\partial u_2} \Big|_{(\mathbf{x}_{\text{EE}}, \mathbf{u}_{\text{EE}}, \mathbf{d}_{\text{EE}})} * (u_2 - u_{2 \text{ EE}}) \\
&+ \dots + \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{d})}{\partial u_m} \Big|_{(\mathbf{x}_{\text{EE}}, \mathbf{u}_{\text{EE}}, \mathbf{d}_{\text{EE}})} * (u_m - u_{m \text{ EE}}) \\
&+ \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{d})}{\partial d_1} \Big|_{(\mathbf{x}_{\text{EE}}, \mathbf{u}_{\text{EE}}, \mathbf{d}_{\text{EE}})} * (d_1 - d_{1 \text{ EE}}) \\
&+ \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{d})}{\partial d_2} \Big|_{(\mathbf{x}_{\text{EE}}, \mathbf{u}_{\text{EE}}, \mathbf{d}_{\text{EE}})} * (d_2 - d_{2 \text{ EE}}) \\
&+ \dots + \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{d})}{\partial d_k} \Big|_{(\mathbf{x}_{\text{EE}}, \mathbf{u}_{\text{EE}}, \mathbf{d}_{\text{EE}})} * (d_k - d_{k \text{ EE}})
\end{aligned}$$

y reemplazando f_i por su linealización $f_{i, \text{linealizada}}$ da:

$$\left(\frac{dx_i}{dt} \right)' = f_{i, \text{linealizada}}(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{d}) - f_i(x_{1 \text{ EE}}, x_{2 \text{ EE}}, \dots, x_{n \text{ EE}}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}_{\text{EE}}, \mathbf{d}_{\text{EE}})$$

que escrita de manera abreviada para variables de desviación, nótese que el término constante

$f_i(x_{1 \text{ EE}}, x_{2 \text{ EE}}, \dots, x_{n \text{ EE}}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}_{\text{EE}}, \mathbf{d}_{\text{EE}})$ al final desaparece, entrega la expresión de la ED linealizada alrededor del Estado Estacionario EE seleccionado:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{dx_i}{dt} \right)'_{\text{Linealizada}} = \\
&\sum_{j=1}^{\text{NumEstados}} \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{d})}{\partial x_j} \Big|_{(\mathbf{x}_{\text{EE}}, \mathbf{u}_{\text{EE}}, \mathbf{d}_{\text{EE}})} * x'_j \\
&+ \sum_{k=1}^{\text{NumVarManip}} \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{d})}{\partial u_k} \Big|_{(\mathbf{x}_{\text{EE}}, \mathbf{u}_{\text{EE}}, \mathbf{d}_{\text{EE}})} * u'_k \\
&+ \sum_{l=1}^{\text{NumPert}} \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}, \mathbf{d})}{\partial d_l} \Big|_{(\mathbf{x}_{\text{EE}}, \mathbf{u}_{\text{EE}}, \mathbf{d}_{\text{EE}})} * d'_l
\end{aligned}$$

En la expresión lineal la evaluación de las derivadas parciales en el respectivo EE hace que se pueda aplicar la misma formulación, en variables de desviación, en cualquier punto del espacio de validez del modelo. Sin embargo, para reconstruir las variables reales, debe recordarse la definición de variable de desviación: ($x'_i = x_i - x_{i EE}$) y a partir de ella calcular la variable real como: $x_i = x'_i + x_{i EE}$. Es importante por lo tanto, mencionar que con frecuencia se prescinde del apóstrofe para indicar variables de desviación. Por tal razón, debe vigilarse el contexto para entender si la variable es la normal o es una variable de desviación.

Ejemplo 5.2 Sea el mismo tanque cónico del ejemplo anterior, con ángulo interior 2β y con modelo no lineal para la acumulación (nivel L): $\frac{dL}{dt} = \frac{1}{A(L)} [u - a\sqrt{2gL}]$, que se debe linealizar, pero ahora por expansión en series. Sólo se considerará el estado $x = L$ y la acción de control u para tomar las derivadas parciales. El tanque se ve en la Figura 5.8.

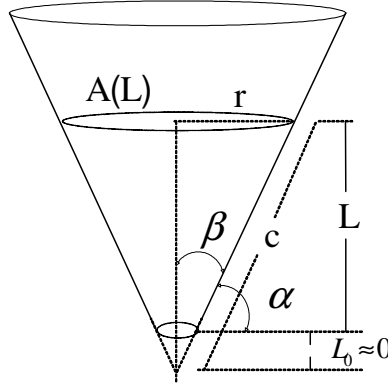


Figura 5.8: Representación geométrica del tanque cónico del ejemplo.

Solución: Se asume que la perturbación está constante en su valor nominal:

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)'_{\text{Linealizada}} = \frac{\partial \left(\frac{1}{A(L)} [u - a\sqrt{2gL}] \right)}{\partial L} \Big|_{(L_{EE}, u_{EE})} * L' + \frac{\partial \left(\frac{1}{A(L)} [u - a\sqrt{2gL}] \right)}{\partial u} \Big|_{(L_{EE}, u_{EE})} * u'$$

Reemplazando los cálculos de las derivadas parciales, con el área transversal del cono, calculada de acuerdo con la nomenclatura de la Figura 5.8, en función de la altura como³:

$$\begin{aligned} \cos\beta &= \frac{L}{c} \Rightarrow c = \frac{L}{\cos\beta}; \quad \text{sen}\beta = \frac{r}{c}; \quad \text{reemplazando y despejando:} \\ r &= c * \text{sen}\beta = \frac{L \text{sen}\beta}{\cos\beta} = L \tan\beta; \quad \text{y por área de un círculo:} \\ A(L) &= \pi r^2 = \pi \tan^2\beta * L^2 \end{aligned}$$

Con este resultado, el modelo se puede expresar sólo en términos de L como:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{1}{\pi \tan^2\beta * L^2} [u - a\sqrt{2gL}] \Rightarrow \\ \frac{dL}{dt} &= \frac{1}{\pi \tan^2\beta} u * L^{-2} - \frac{a\sqrt{2g}}{\pi \tan^2\beta} L^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

³El cono se considera generado por un triángulo rectángulo con lados Altura (L) y Diámetro (D) del círculo que forma el área transversal. Dicho triángulo tiene un ángulo en su vértice igual al complemento de la inclinación de los datos del cono.

y por lo tanto las derivadas parciales respecto al estado y a la acción de control serán:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_i(L, u)}{\partial L} &= -\frac{2}{\pi \tan^2 \beta} u * L^{-3} + \frac{3a\sqrt{2g}}{2\pi \tan^2 \beta} L^{-\frac{5}{2}} \\ \frac{\partial f_i(L, u)}{\partial u} &= \frac{1}{\pi \tan^2 \beta} L^{-2}\end{aligned}$$

Reemplazando en la expresión de la linealización, se llega al modelo linealizado del nivel en el tanque cónico:

$$\begin{aligned}\left(\frac{dL}{dt}\right)'_{Linealizada} &= -\frac{2}{\pi \tan^2 \beta} u_{EE} * L_{EE}^{-3} + \frac{3a\sqrt{2g}}{2\pi \tan^2 \beta} L_{EE}^{-\frac{5}{2}} * L' \\ &+ \frac{2}{\pi \tan^2 \beta} L_{EE}^{-2} * u'\end{aligned}$$

La linealización por expansión en series no es exacta, puesto que ligeras desviaciones del punto en el cual se linealizó presentan diferencias apreciables entre la respuesta del sistema no lineal real y el sistema linealizado.

5.5.3. Transformada de Laplace y Función de Transferencia

Como se vió previamente, ya se dispone de un modelo linealizado del Proceso que se analiza con miras a sintetizar y diseñar un Sistema de Control para el. Aunque el análisis podría hacerse mediante la solución de las ED y algebraicas que describen el Proceso, tal solución resulta larga comparada con métodos de Análisis que facilitan no requieren la solución del sistema de ecuaciones de marea explícita. Dichos métodos se apoyan en transformaciones del modelo original en el dominio del tiempo a otros dominios. Aquí se verá la transformación del dominio t al dominio s , mediante la Transformada de Laplace. En tal dominio, es posible utilizar el concepto de Función de Transferencia (FT) como herramienta de análisis del comportamiento dinámico del Procesos, con y sin Sistemas de Control. Debe recalcarse la importancia de usar unidades de % sobre % a la hora de expresar las FT y extraer de ellas información para el análisis y diseño (sintonía) del sistema de control. Todo el modelo normalmente está expresado en unidades del Proceso: m , $^{\circ}C$, $\frac{J}{s}$, etc. Sin embargo, tales unidades dificultan el análisis cuando se quiere analizar, sintetizar y diseñar un Sistema de Control. Por lo tanto, es mejor convertir todas las unidades a % de la variable, contando con los valores mínimos y máximos de dicha variable en el Proceso. Tales mínimos y máximos los dan los alcances (span) de los sensores y Elementos Finales de Control (EFC) usados en el Proceso. Este hecho pone en evidencia la integralidad del diseño de Sistemas de Control: la selección misma de sensores y EFC empieza a influenciar la calidad del resultado final del diseño.

La representación de procesos usando Funciones de Transferencia (FT) y Diagramas de Bloques (DB) ha sido una de las herramientas más usuales en la teoría de control. A pesar de que la mayoría de procesos presentan comportamientos fuertemente no lineales, la aproximación a través de FT y DB resulta útil cuando se analiza el comportamiento del proceso en lazo abierto y en lazo cerrado, operando alrededor (muy cerca) de un Estado Estacionario (EE) dado. Sin embargo, debe advertirse que cambios en las condiciones de proceso (entradas o perturbaciones) que impliquen excursiones de los estados del proceso o sus salidas, lejos del EE, quedarán muy mal representados por el modelo linealizado, que obligatoriamente debió usarse para obtener la FT y el DB. A continuación se presenta una discusión sobre este método de análisis.

Método de Solución ED lineales usando Laplace y Funciones de Transferencia

Es importante recordar en este punto que la transformada de Laplace en la forma usada aquí sólo es aplicable a sistemas lineales. El procedimiento a seguir cuando se quiere resolver una ED lineal usando la transformada de Laplace es:

1. Tomando Transformada de Laplace \mathcal{L} , convertir la ED en una Ecuación Algebraica (EA) en la variable s . Para esto, se usan conversiones como las mostradas a continuación (hay tablas más extensas en todos los textos de Teoría de Control, por espacio aquí sólo se dan las más usuales):

$$f(t) = y \longrightarrow \mathcal{L}[f(t) = y] = F(s) = Y(s)$$

$$f(t) = \text{unit}(t) = \text{Escalón Unitario}(t) \longrightarrow F(s) = \frac{1}{s};$$

$$f(t) = g = \text{Constante} \longrightarrow F(s) = \frac{g}{s};$$

$$f(t) = t \longrightarrow F(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$f(t) = t^n \longrightarrow F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}};$$

$$f(t) = b * e^{-at} \longrightarrow F(s) = \frac{b}{s+a};$$

$$f(t) = t * e^{-at} \longrightarrow F(s) = \frac{1}{(s+a)^2};$$

$$f(t) = \frac{dy(t)}{dt} \longrightarrow F(s) = sY(s) - Y(0).$$

$$f(t) = \int y(t) \longrightarrow F(s) = \frac{Y(s)}{s}$$

$$f(t) = y(t - D) \text{ Retardo "D"} \longrightarrow F(s) = Y(s) = e^{-Ds}U(s)$$

2. Operar sobre la EA resultante para obtener una expresión explícita de la Salida $Y(s)$.
3. El paso final es invertir, usando la inversa de la Transformada de Laplace \mathcal{L}^{-1} , la expresión anterior para hallar la solución en el dominio de t de la ED.

Para la representación con Funciones de Transferencia y Diagramas de Bloques, aplicables en el Análisis, Síntesis y Diseño de Sistemas de Control, basta con llegar hasta el segundo paso. Obviamente, lograr una expresión para las trayectorias temporales de la variable de salida (soluciones a la ED) da información para otros análisis.

Ejemplo 5.3 Sea la siguiente la ED que representa la dinámica del Nivel L en un reactor continuo en tanque agitado (CSTR). La deducción de este modelo está detallada más adelante, puesto que corresponde a una de las dinámicas del CSTR del Capítulo final.

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{A_{\text{Tanque}}} F_0 - \frac{C_v \sqrt{g}}{A_{\text{Tanque}}} L^{1/2}$$

En este modelo, A_{Tanque} es el área transversal del tanque cilíndrico del CSTR en m^2 , que resulta constante (a diferencia del tanque cónico del ejemplo anterior), F_0 es el flujo de entrada volumétrico de líquido entrante en $\frac{m^3}{s}$, C_v es el coeficiente de apertura de la válvula en m^2 , que expresa la cantidad de área abierta para el flujo a través de la válvula, g es la constante de la gravedad $9,8 \frac{m}{s^2}$. Se debe hallar la representación en Funciones de Transferencia y Diagrama de Bloques para poder diseñar un Sistema de Control para la dinámica del Nivel en el CSTR.

Solución: Este modelo no lineal (L está elevado a la $\frac{1}{2}$), debe linealizarse para hacer todo el análisis en el dominio s . Linealizando alrededor de un punto de operación L_{EE} y tomando variables de desviación, se llega a:

$$\frac{dL'}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{C_v EE \sqrt{g}}{A_{\text{Tanque}} L_{EE}^{1/2}} * L' - \frac{\sqrt{g} L_{EE}^{1/2}}{A_{\text{Tanque}}} * C'_v + \frac{1}{A_{\text{Tanque}}} * F'_0$$

Nótese que declarando las siguientes constantes: $\theta_1 = \frac{1}{2} \frac{C_v EE \sqrt{g}}{A_{Tanque} L_{EE}^{1/2}}$, $\theta_2 = \frac{\sqrt{g} L_{EE}^{1/2}}{A_{Tanque}}$ y $\theta_3 = \frac{1}{A_{Tanque}}$, se llega a una expresión más compacta para esta linealización del comportamiento del Nivel en el CSTR, en variables de desviación.

$$\frac{dL'}{dt} = -\theta_1 L' - \theta_2 C'_v + \theta_3 F'_0$$

Sobre esta ecuación se aplicará el procedimiento descrito arriba para hallar la función de transferencia.

Tomar Transformada de Laplace (TL) de cada término:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dL'}{dt}\right] = sL'(s) - L'(0)$$

$$\mathcal{L}[\theta_1 L'] = \theta_1 L'(s)$$

$$\mathcal{L}[\theta_2 C'_v] = \theta_2 \mathcal{L}[C'_v] = \theta_2 C'_v(s)$$

$$\mathcal{L}[\theta_3 F'_0] = \theta_3 \mathcal{L}[F'_0] = \theta_3 F'_0(s)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores se obtiene:

$$sL'(s) - L'(0) = -\theta_1 L'(s) - \theta_2 C'_v(s) + \theta_3 F'_0(s)$$

agrupando términos:

$$(s + \theta_1) * L'(s) - L'(0) = -\theta_2 C'_v(s) + \theta_3 F'_0(s)$$

Si se asume que el proceso inicia en estado estacionario, el valor del Nivel en variables de desviación en el instante inicial es cero $L'(0) = 0$. Por lo tanto, la ecuación queda:

$$(s + \theta_1) * L'(s) = -\theta_2 C'_v(s) + \theta_3 F'_0(s) \quad (5.3)$$

Utilizando la definición de Función de Transferencia (FT), que indica la manera en la que se transfiere información de un dominio dado a otro dominio, deberíamos buscar como se transfiere información desde el dominio de la entrada manipulada C'_v hasta el dominio de la salida o variable controlada L' , es decir, hallar el valor de $\frac{L'(s)}{C'_v(s)}$ y como se transfiere información desde la perturbación F'_0 hasta la salida o variable controlada L' , es decir, hallar el valor de $\frac{L'(s)}{F'_0(s)}$. Nótese como aparecerán dos (2) FT, con lo cual se ve que para cualquier sistema lineal, el número de FT posibles es igual al número de entradas (manipuladas o perturbaciones). Es importante en este punto indicar que intentar despejes totales desde la ecuación anterior puede resultar no conveniente si antes no se realiza la siguiente simplificación, totalmente válida y apoyada en el Principio de Superposición de los sistemas lineales: “Para hallar una Función de Transferencia, debe primero asumirse que las demás entradas al sistema (manipuladas o perturbaciones) están en su estado estacionario, por lo tanto sus valores en variables de desviación son cero”. De este modo, para hallar la primera FT, se asume la perturbación en su EE $F'_0(s) = 0$ en la Ecuación 5.3 y se llega a:

$$L'(s) = -\frac{\theta_2}{(s + \theta_1)} C'_v(s) \Rightarrow \frac{L'(s)}{C'_v(s)} = \frac{-\theta_2}{(s + \theta_1)}$$

en la cual, la función $\frac{-\theta_2}{(s+\theta_1)}$ es la Función de Transferencia que describe la relación C'_v a L' de la dinámica linealizada del Nivel, en variables de desviación. Haciendo algo similar, se llega a la segunda FT asumiendo la acción de control en su EE, es decir $C'_v(s) = 0$:

$$L'(s) = \frac{\theta_3}{(s+\theta_1)} F'_0(s) \Rightarrow \frac{L'(s)}{F'_0(s)} = \frac{\theta_3}{(s+\theta_1)}$$

en la cual, la función $\frac{\theta_3}{(s+\theta_1)}$ es la Función de Transferencia que describe la relación F'_0 a L' de la dinámica linealizada del Nivel en variables de desviación. Una cosa evidente de las dos FT es que tienen el mismo denominador, lo que se explica por el hecho de que tal denominador es la representación del comportamiento dinámico natural o no forzado (solución homogénea) de la ED, la cual no se ve afectada por las entradas.

Existen formas canónicas para representar Funciones de Transferencia. Para este caso, la forma canónica implica que el término independiente del denominador sea 1,0: $\frac{K}{(\tau s+1)}$, con K la ganancia estática del sistema y τ la constante de tiempo del sistema. Para llevar las dos FT halladas a dicha forma canónica, basta con dividir numerador y denominador por θ_1 , dando como resultado las dos FT en forma canónica:

$$\frac{L'(s)}{C'_v(s)} = \frac{-\frac{\theta_2}{\theta_1}}{(\frac{1}{\theta_1}s+1)} \quad \text{y} \quad \frac{L'(s)}{F'_0(s)} = \frac{\frac{\theta_3}{\theta_1}}{(\frac{1}{\theta_1}s+1)}$$

de donde se puede concluir que las ganancias estáticas de la linealización del Nivel respecto a la entrada manipulada $u = C_v$ y la perturbación $d = F_0$ son:

$$K_u = -\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{-\frac{\sqrt{g}L_{EE}^{1/2}}{A_{Tanque}}}{\frac{1}{2} \frac{C_{vEE}\sqrt{g}}{A_{Tanque}L_{EE}^{1/2}}} = -\frac{2L_{EE}}{C_{vEE}} = -2L_{EE} * \frac{1}{C_{vEE}}$$

$$K_d = \frac{\theta_3}{\theta_1} = \frac{\frac{1}{A_{Tanque}}}{\frac{1}{2} \frac{C_{vEE}\sqrt{g}}{A_{Tanque}L_{EE}^{1/2}}} = \frac{2L_{EE}^{1/2}}{C_{vEE}\sqrt{g}} = 2\sqrt{\frac{L_{EE}}{g}} * \frac{1}{C_{vEE}}$$

mientras que la constante de tiempo de la linealización del Nivel (constante que es única, puesto que le pertenece a la dinámica natural o no forzada del sistema) es:

$$\tau = \frac{1}{\theta_1} = \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{C_{vEE}\sqrt{g}}{A_{Tanque}L_{EE}^{1/2}}} = 2A_{Tanque}\sqrt{\frac{L_{EE}}{g}} \frac{1}{C_{vEE}}$$

Si se toman valores de un CSTR real (como los reportados en la página 112), para calcular dichos parámetros, se obtiene que la ganancia estática del sistema con respecto a la acción de control u es:

$$K_u = -2 * 1,1m * \frac{1}{0,0001269m^2} = -17336,48 \left[\frac{m}{m^2} \right]$$

que indica que tantos metros cambia el nivel cuando cambia de manera unitaria ($1,0m^2$) la apertura de la válvula⁴. Como se nota, las unidades son demasiado grandes para apreciar el efecto real. Por lo tanto, pasando el nivel a cm y la apertura de la válvula a mm^2 , se llega a un valor más interpretable: $-1,73 \left[\frac{cm \text{ Nivel}}{mm^2 \text{ Apertura Válvula}} \right]$.

⁴Obviamente el área de flujo de una válvula industrial normal (hasta 10") nunca cambiará $1,0m^2$, pero este valor es matemáticamente correcto por el sistema de unidades en las que está el modelo originalmente: m^2 para el área.

$$K_d = 2\sqrt{\frac{1,1m}{9,8\frac{m}{s^2}}} * \frac{1seg}{0,0001269m^2} = 5280,2\frac{seg}{m^2} = 5280,2 \left[\frac{m}{\frac{m^3}{\frac{l}{min}}} \right] = 8,8 \left[\frac{cm}{\frac{l}{min}} \right]$$

$$\tau = 2A_{Tanque} \sqrt{\frac{L_{EE}}{g}} \frac{1}{C_v} = 2 * 0,1963m^2 \sqrt{\frac{1,1m}{9,8\frac{m}{s^2}}} * \frac{1}{0,0001269m^2} = 1035,5 [seg]$$

El τ es la velocidad de respuesta del proceso. Mientras más lenta es la respuesta de un proceso a una entrada, más grande es el valor de τ . Entre más rápida es la respuesta del proceso a una entrada, más pequeño es el valor de τ .

Recuérdese que todo este procedimiento puede realizarse sin usar variables de desviación, llegando a una ED linealizada pero que contiene un término independiente. Son estos términos los que dificultan luego la obtención de la FT. Como se vio arriba, todos los términos independientes deben anularse al tomar variables de desviación, siempre que la linealización esté correcta.

Retomando el análisis sobre la ED linealizada en variables de desviación, se puede partir de cada una de las FT halladas (luego de aplicar la Transformada de Laplace) para encontrar la solución de la ED, siempre que se establezca una forma para la variable manipulada C_v y para la perturbación $F_0(s)$. En este caso, para ambas se fija un escalón como su forma, de amplitud $10mm^2$ para C_v y $5 l/min$ para $F_0(s)$, respectivamente. Nótese que no son escalones unitario en las unidades de las FT como lo sugiere la literatura, puesto que resultarían variaciones muy grandes (m^2 para apertura de válvula C_v y m^3/s para el caudal de entrada F_0). Convirtiendo unidades, las amplitudes de los escalones serán $0,00001m^2$ y $8,333x10^{-5}m^3/s$ para F_0 . Volviendo a las FT:

$$L'(s) = \frac{K_u}{(\tau s + 1)} C'_v(s) \quad y \quad L'(s) = \frac{K_d}{(\tau s + 1)} F'_0(s)$$

con C'_v =Escalón de $0,00001m^2$ y F'_0 =Escalón de $8,333x10^{-5}m^3/s$, se tiene que las Transformadas de Laplace de los escalones son $\frac{1,0 \times 10^{-5}}{s}$ y $\frac{8,333 \times 10^{-5}}{s}$, que al reemplazarse en las FT en el lugar de las entradas ($C'_v(s)$ y $F'_0(s)$) produce:

$$L'(s) = \frac{K_u \frac{m}{m^2}}{(\tau s + 1)} \frac{1,0 \times 10^{-5} \frac{m^3}{s}}{s} = \frac{-17336,48 * 1,0 \times 10^{-5}}{(1035,5s + 1)s}$$

$$L'(s) = \frac{(\Delta C_v) \times K_u [m]}{(\tau s + 1)s} = -\frac{0,17336m}{(1035,5s + 1)s}$$

$$L'(s) = \frac{K_d \frac{m}{m^3}}{(\tau s + 1)} \frac{8,333x10^{-5} \frac{m^3}{s}}{s} = \frac{5280,2 * 8,333x10^{-5}}{(1035,5s + 1)s}$$

$$L'(s) = \frac{(\Delta F_0) \times K_d [m]}{(\tau s + 1)s} = \frac{0,44m}{(1035,5s + 1)s}$$

Para hallar la función temporal del Nivel que soluciona la ED linealizada, se toma la Transformada Inversa de Laplace \mathcal{L}^{-1} (también existen Tablas sobre transformadas inversas) [Marlin, 2000] de ambos lados de las FT y se recurre nuevamente al principio de superposición para conformar el efecto total de las entradas sobre el nivel. En este caso se llega a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{b}{(as+1)s}\right) &= b(1 - e^{-\frac{t}{a}}) \Rightarrow \\ \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{0,17336}{(1035,5s+1)s}\right) &= -0,17336 * (1 - e^{-\frac{t}{1035,5}}) \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{0,44}{(1035,5s+1)s}\right) &= 0,44 * (1 - e^{-\frac{t}{1035,5}}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución será la suma de los dos efectos:

$$L'(t) = (\Delta C_v) \times K_u * (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + (\Delta F_0) \times K_d * (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Recordando que esta es la solución para el Nivel en variables de desviación, y finalmente lo que deseamos es la solución para la variable medida real, se utiliza la definición $L' = L - L_{EE}$, llegando a:

$$L(t) = L_{EE} + (\Delta C_v) \times K_u * (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + (\Delta F_0) \times K_d * (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

que al reemplazar los valores de las constantes y el estado estacionario, proporciona la función solución de la ED linealizada:

$$L(t) = 1,1m - 0,17336 * (1 - e^{-\frac{t}{1035,5}}) + 0,44 * (1 - e^{-\frac{t}{1035,5}})$$

Representación en Diagrama de Bloques

Una primera aproximación a los Diagramas de Bloques son los Diagramas de Flujo de Información, como el que se usó en el Ejemplo 5.1. A manera de ilustración, la ED que representa la dinámica del Nivel, cuando se descarga por el fondo a través de una válvula de control, se muestra en la Figura 5.9:

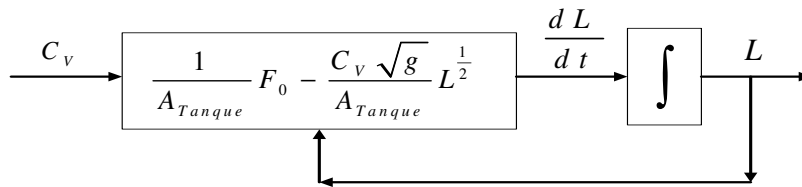


Figura 5.9: Diagrama de Flujo de Información para la dinámica de Nivel del CSTR.

Nótese que las flechas transportan información a los bloques, bloques que a su vez representan operaciones. Por lo general los valores constantes son propios del bloque (no vienen del exterior), mientras que las variables vienen del exterior.

Toda la representación a través de ecuaciones puede también ser acoplada con la representación a través de Diagramas de Bloques, de modo que se logra un representación más explícita e ilustrativa de toda la dinámica linealizada del Nivel en el CSTR. Para lograrlo, se debe representar gráficamente la relación de causalidad que tiene cada una de las entradas (manipuladas o perturbaciones) sobre el nivel L del CSTR (en variables de desviación para ser consistente con nuestra discusión previa). Para cada relación causa-efecto se produce un diagrama de bloques como el mostrado en la Figura 5.10:

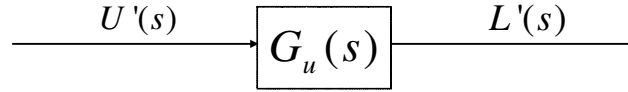


Figura 5.10: Diagrama de Bloques para la dinámica de Nivel.

En el que G_u representa la Función de Transferencia de la entrada u al nivel L . Luego, aprovechando que para un sistema lineal o linealizado, el principio de superposición permite sumar efectos individuales para obtener la salida total, se llega a la Figura 5.11.

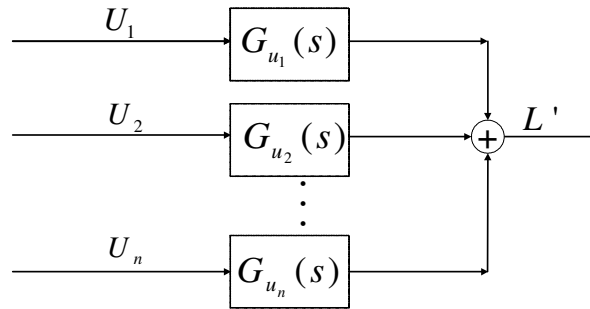


Figura 5.11: Principio de superposición en un modelo linealizado.

Como se aprecia de la Figura 5.11, para que se produzca un cambio en el nivel cuando hay un cambio en alguna de las entradas, debe ocurrir alguna transformación de información dentro del proceso. Como su nombre lo indica, la Función de Transferencia (FT) del proceso, representa directamente tal transformación para cada pareja entrada-salida, tomando siempre la misma salida, por lo que el proceso quedará completamente representado sólo cuando se formulen todas las FT para las diversas parejas entrada (manipulada o perturbación)-salida. Para hallar cada una de estas FT se debe expresar la ED con sus entradas genéricas.

Primer Ejemplo: Función de Transferencia Genérica para un Proceso de Nivel

Retomemos la ED que describe de manera genérica la dinámica del Nivel en el CSTR.

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{A_{Tanque}} F_0(t) - \frac{1}{A_{Tanque}} F(t)$$

Puesto que esta ED es lineal, se pueden tomar directamente variables de desviación, obteniendo:

$$\frac{dL'}{dt} = \frac{1}{A_{Tanque}} F_0'(t) - \frac{1}{A_{Tanque}} F'(t)$$

Al tomar transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dL'}{dt}\right] = sL'(s) - L'(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{A_{Tanque}} F_0'\right] = \frac{1}{A_{Tanque}} F_0'(s)$$

$$\mathcal{L} \left[\frac{1}{A_{Tanque}} F' \right] = \frac{1}{A_{Tanque}} F'(s)$$

se obtiene agrupando:

$$sL'(s) - L'(0) = \frac{1}{A_{Tanque}} F'_0(s) - \frac{1}{A_{Tanque}} F'(s)$$

Recordando que $L'(0)$ es cero, se llega a:

$$sL'(s) = \frac{1}{A_{Tanque}} F'_0(s) - \frac{1}{A_{Tanque}} F'(s)$$

que despejando $L'(s)$ para obtener las FT es:

$$L'(s) = \frac{\left(\frac{1}{A_{Tanque}}\right)}{s} F'_0(s) - \frac{\left(\frac{1}{A_{Tanque}}\right)}{s} F'(s)$$

Por lo tanto, las FT buscadas son: $\frac{L'(s)}{F'_0(s)} = \frac{\left(\frac{1}{A_{Tanque}}\right)}{s}$ y $\frac{L'(s)}{F'(s)} = \frac{-\left(\frac{1}{A_{Tanque}}\right)}{s}$. Para estas dos FT, las ganancias son idénticas en magnitud más no en signo: $K_{F_0} = \theta_1 = \left(\frac{1}{A_{Tanque}}\right)$ y $K_F = -\theta_1 = \left(\frac{-1}{A_{Tanque}}\right)$, ¿cuanto vale el τ ? (Recuérdese que la FT $\frac{1}{s}$ es un integrador puro!) [Shinsky, 1996].

Segundo Ejemplo: Función de Transferencia cuando se Descarga por Gravedad a través de una Válvula de Apertura Fija $C_{v\ cte}$

Sea nuevamente el CSTR pero con la condición de descarga por gravedad a través de una válvula de control, pero para este análisis tomada de apertura fija, lo que significa que se está operando en lazo abierto. En este caso $F = C_v \sqrt{g} L^{1/2}$, con $C_v = C_{v\ cte}$. Esto convierte el término de F en uno No Lineal, debiendo linealizarse (como se mostró en el Ejemplo 5.3), para hallar, en variables de desviación que:

$$F' = \frac{1}{2} \frac{C_{v\ cte} \sqrt{g}}{L_{EE}^{1/2}} * L'$$

Al aplicar transformada de Laplace se obtiene:

$$F'(s) = \frac{1}{2} \frac{C_{v\ cte} \sqrt{g}}{L_{EE}^{1/2}} * L'(s)$$

que reemplazada en la ecuación original: $sL'(s) - L'(0) = \frac{1}{A_{Tanque}} F'_0(s) - \frac{1}{A_{Tanque}} F'(s)$, produce la ya conocida ecuación diferencial lineal

$$\frac{dL'}{dt} = \frac{1}{A_{Tanque}} * F'_0 - \frac{1}{2} \frac{C_{v\ cte} \sqrt{g}}{A_{Tanque} L_{EE}^{1/2}} * L'$$

para la cual ya se obtuvo Transformada de Laplace, tomando las constantes: $\theta_1 = \frac{1}{A_{Tanque}}$ y $\theta_2 = \frac{1}{2} \frac{C_{v\ cte} \sqrt{g}}{A_{Tanque} L_{EE}^{1/2}}$ y recordando que la variable de desviación del Nivel en el instante inicial se puede hacer cero asumiendo que el sistema inicial está en EE :

$$(s + \theta_2) * L'(s) = \theta_1 F'_0(s)$$

que como se ve, hace desaparecer de manera explícita el efecto del Flujo de Salida F sobre el nivel, debido a que precisamente se hizo $F = C_{v\ cte}\sqrt{g}L^{1/2} = f(L)$. Nótese la diferencia con el caso anterior en el que F se tomó de modo genérico (independiente de L como por ejemplo cuando se usa una bomba de velocidad variable en la descarga). La FT para el caso que nos ocupa ya se halló previamente:

$$L'(s) = \frac{\frac{2L_{EE}^{1/2}}{C_{v\ cte}\sqrt{g}}}{\left(\frac{2A_{Tanque}L_{EE}^{1/2}}{C_{v\ cte}\sqrt{g}}s + 1\right)} F'_0(s)$$

que representa la Respuesta en Lazo Abierto (válvula de descarga con apertura constante $C_{v\ cte}$) del Nivel L frente a la Perturbación F_0 .

Tercer Ejemplo: Función de Transferencia cuando se Descarga haciendo Control Proporcional con un (Elemento Final de Control) EFC Lineal a la Salida

En este caso se considera que se tiene un EFC que permite un caudal de salida $F = f(L)$, pero de forma lineal proporcional al error, es decir $F' = K_P * (L_{SP} - L)$. Si se hace $L_{EE} = L_{SP}$ y recordando la definición de variables de desviación $L' = L - L_{EE}$, se llega a $F' = -K_P * L'$. Tomando Transformada de Laplace se obtiene: $F'(s) = -K_P L'(s)$, que al reemplazarse en la ecuación original, da (nótese que se pudo aplicar directamente Transformada de Laplace debido a que el nuevo flujo F también es lineal):

$$\begin{aligned} sL'(s) - L'(0) &= \frac{1}{A_{Tanque}} F'_0(s) + \frac{1}{A_{Tanque}} K_P L'(s) \implies \\ sL'(s) - \frac{K_P}{A_{Tanque}} L'(s) &= \theta_1 F'_0(s) \implies \\ \left(s - \frac{K_P}{A_{Tanque}}\right) L'(s) &= \theta_1 F'_0(s) \implies \\ L'(s) &= \frac{\theta_1}{\left(s - \frac{K_P}{A_{Tanque}}\right)} F'_0(s) \implies \\ L'(s) &= \frac{\frac{1}{K_P}}{\left(\frac{A_{Tanque}}{K_P} s - 1\right)} F'_0(s) \end{aligned}$$

de donde se ve que: $K^* = \frac{1}{K_P}$ y $\tau = \frac{A_{Tanque}}{K_P}$. Se puede hacer una deducción similar si se toma $\hat{K}_P = \frac{1}{A_{Tanque}} K_P$, llegando a $K^* = \frac{\theta_1}{K_P}$ y $\tau = \frac{1}{K_P}$. El diagrama de bloques que representa esta situación se ve en la Figura 5.12.

Si se halla el valor de $L'(s)$ desde el diagrama de bloques, partiendo desde el segundo punto de suma, se tendría que:

$$L'(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{A_{Tanque}} * F'_0(s) - \frac{1}{s} \frac{1}{A_{Tanque}} * F'(s)$$

que es idéntico al resultado previamente hallado. Si nos seguimos moviendo hacia la izquierda en el diagrama de bloques, se tendría:

$$L'(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{A_{Tanque}} * F'_0(s) - \frac{1}{s} \frac{1}{A_{Tanque}} * E(s) * K_P$$

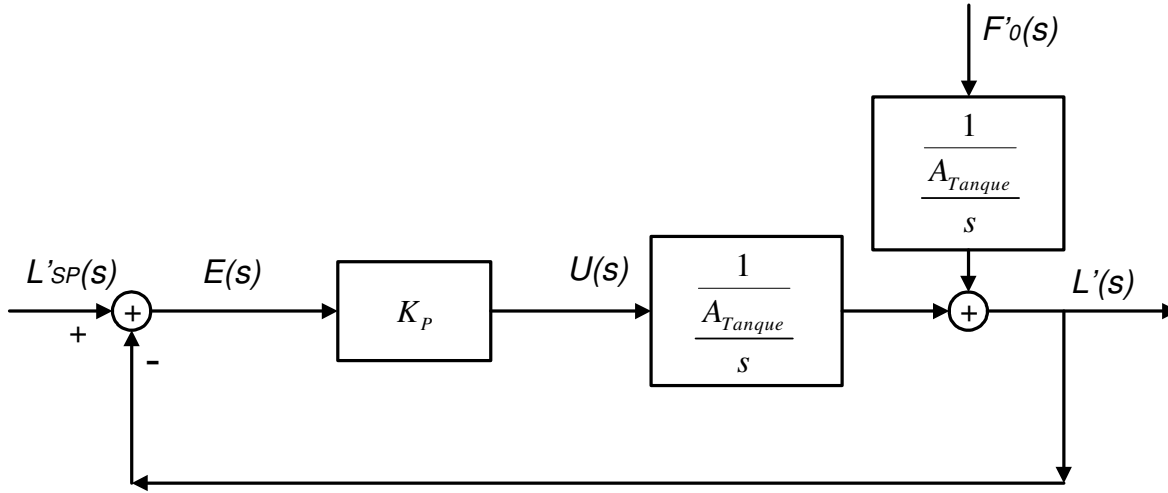


Figura 5.12: Diagrama del sistema en lazo cerrado con un controlador proporcional.

Si ahora se reemplaza $E(s)$ por su equivalencia (tomada desde el diagrama), se llega a:

$$L'(s) = \frac{1}{A_{Tanque} s} * F'_0(s) - \frac{1}{A_{Tanque} s} * (L'_{SP}(s) - L'(s)) * K_P$$

Nótese el cambio de signo que produce el reemplazo $L'(s) = -(L'_{SP}(s) - L'(s))$, si $L_{SP} = L_{EE}$.

$$\begin{aligned} L'(s) &= \frac{1}{A_{Tanque} s} * F'_0(s) + \frac{1}{A_{Tanque} s} * L'(s) * K_P \implies \\ sL'(s) &= \frac{1}{A_{Tanque}} * F'_0(s) + \frac{K_P}{A_{Tanque}} * L'(s) \implies \\ sL'(s) - \frac{K_P}{A_{Tanque}} * L'(s) &= \frac{1}{A_{Tanque}} * F'_0(s) \implies \\ L'(s) &= \frac{1}{s - \frac{K_P}{A_{Tanque}}} * F'_0(s) \end{aligned}$$

Ahora llevando a la forma estándar, se obtiene:

$$L'(s) = \frac{\frac{1}{K_P}}{\left(\frac{A_{Tanque}}{K_P} s - 1\right)} * F'_0(s)$$

que como se ve, es el mismo resultado previamente mostrado. Recuérdese que en este controlador, el flujo de descarga depende de L a través del error y no por efecto de la variable directamente en el cálculo del flujo, como sucede en la situación siguiente por efecto de la descarga por gravedad. ¿Podría el lector pensar en cual es la implementación de este tipo de controlador? [Aström and Hägglund, 1995].

Otra cosa a resaltar es que resulta evidente que la perturbación del Flujo de Entrada F_0 es una perturbación aditiva a la entrada. Compárese el concepto de entrada para los flujos y el concepto de entrada para las

señales, puesto que para el proceso marcado en el DB anterior, lo que se ve como entrada es el flujo neto, con signo (¿tiene sentido en este caso un flujo neto negativo?). Es precisamente ese flujo neto el que se convierte en un cambio negativo de nivel en el tanque. Ahora viene una reflexión interesante: ¿Puede un DB para un proceso lineal mostrar una perturbación directa al proceso? [Desoer and Vidyasagar, 1975].

Cuarto Ejemplo: Función de Transferencia cuando se Descarga por Gravedad Haciendo Control Proporcional con un Válvula (C_v variable)

Nuevamente se toma $F = f(L)$, pero esta vez el caudal se logra por gravedad ($F = C_v \sqrt{g} L^{1/2}$), pero variando la apertura de la válvula de modo proporcional al error: $C_v = C_{vEE} + K_P * (L_{SP} - L)$. Si se hace $L_{EE} = L_{SP}$ y usando la definición de variables de desviación $L' = L - L_{EE}$ y $C_v' = C_v - C_{vEE}$, se llega a $C_v' = -K_P * L'$. Al reemplazar en la ED original $\frac{dL}{dt} = \frac{1}{A_{Tanque}} F_0 - \frac{C_v \sqrt{g}}{A_{Tanque}} L^{1/2}$, se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{1}{A_{Tanque}} F_0 - \frac{(C_{vEE} + K_P * (L_{SP} - L)) \sqrt{g}}{A_{Tanque}} L^{1/2} \implies \\ \frac{dL}{dt} &= \frac{1}{A_{Tanque}} F_0 - \frac{C_{vEE} \sqrt{g}}{A_{Tanque}} L^{1/2} - \frac{K_P * L_{EE} \sqrt{g}}{A_{Tanque}} L^{1/2} + \frac{K_P \sqrt{g}}{A_{Tanque}} L^{3/2} \end{aligned}$$

Esta última expresión debe linealizarse para poder realizar el análisis de comportamiento y hallar la FT del nuevo sistema:

$$\frac{dL'}{dt} = \frac{1}{A_{Tanque}} * F_0' - \frac{1}{2} \frac{1}{A_{Tanque}} \frac{C_{vEE} \sqrt{g}}{L_{EE}^{1/2}} * L' + \frac{\sqrt{g} L_{EE}^{1/2}}{A_{Tanque}} * K_P * L'$$

Declarando $\eta_1 = \frac{1}{2} \frac{C_{vEE} \sqrt{g}}{A_{Tanque} L_{EE}^{1/2}}$, $\eta_2 = \frac{\sqrt{g} L_{EE}^{1/2}}{A_{Tanque}}$ y usando la definición de $\theta_1 = \frac{1}{A_{Tanque}}$, declarada previamente, se llega a una expresión más compacta:

$$\frac{dL'}{dt} = \theta_1 F_0' - \eta_1 L' + \eta_2 K_P L'$$

Tomando Transformada de Laplace se obtiene:

$$\begin{aligned} sL'(s) - L'(0) + \eta_1 L'(s) - \eta_2 K_P L'(s) &= \theta_1 F_0' \implies \\ (s + \eta_1 - \eta_2 K_P) L'(s) &= \theta_1 F_0' \end{aligned}$$

que expresado en la forma de una FT, es:

$$\begin{aligned} L'(s) &= \frac{\theta_1}{(s + \eta_1 - \eta_2 K_P)} F_0' \implies \\ L'(s) &= \frac{\frac{\theta_1}{\eta_1 - \eta_2 K_P}}{\left(\frac{1}{\eta_1 - \eta_2 K_P} s + 1\right)} F_0' \end{aligned}$$

de donde se ve que: $K^* = \frac{\theta_1}{\eta_1 - \eta_2 K_P}$ y $\tau = \frac{1}{\eta_1 - \eta_2 K_P}$.

Para finalizar este ejemplo, se plantea la siguiente pregunta: ¿Podría el lector analizar en que difieren los comportamientos del proceso con relación al rechazo de perturbación, bajo las condiciones presentadas?:

*Respuesta en lazo abierto con Flujo de Salida indefinido: $L'(s) = \frac{(\frac{1}{A_{Tanque}})}{s} F'_0(s)$

*Respuesta en lazo abierto con Flujo de Salida a través de válvula manual: $L'(s) = \frac{\frac{2L_{EE}^{1/2}}{C_v cte \sqrt{g}}}{(\frac{2A_{Tanque} L_{EE}^{1/2}}{C_v cte \sqrt{g}} s + 1)} F'_0(s)$

*Respuesta en lazo cerrado con Flujo de Salida función lineal del nivel: $L'(s) = \frac{\frac{1}{K_P}}{(\frac{A_{Tanque}}{K_P} s - 1)} * F'_0(s)$

*Respuesta en lazo cerrado con Flujo de Salida función de apertura de válvula y nivel:

$$L'(s) = \frac{\frac{\frac{1}{A_{Tanque}}}{\frac{1}{2} \frac{C_v EE \sqrt{g}}{A_{Tanque} L_{EE}^{1/2}} - \frac{\sqrt{g} L_{EE}^{1/2}}{A_{Tanque}} K_P}}{\left(\frac{1}{\frac{1}{2} \frac{C_v EE \sqrt{g}}{A_{Tanque} L_{EE}^{1/2}} - \frac{\sqrt{g} L_{EE}^{1/2}}{A_{Tanque}} K_P} \right) s + 1} F'_0$$

Significado de los Polos y los Ceros

Los polos y los ceros de la FT tienen un significado vital en cualquier análisis de comportamiento de sistemas de control. Particularmente, cuando una FT tiene Ceros en el semiplano derecho, se evidencia la existencia de un comportamiento de fase no mínima o Respuesta Temporal Inversa (RTI, ver Definición 6.3). Los Polos por su parte, indican la estabilidad o inestabilidad del Sistema. Por no ser tema de este trabajo, se deja al lector la consulta respecto de estos dos temas [Ogata, 1998; Marlin, 2000].

Capítulo 6

DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL PARA PROCESOS

Si bien desde finales de los años 70 del siglo XX han surgido una serie de herramientas de control nuevas, todas apoyadas en la potencia del computador, los conceptos fundamentales sobre el diseño de sistemas de control, permanecen casi intactos desde mediados del siglo XX. En esos años, apoyados en los análisis en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo, se postularon una serie de criterios y especificaciones de diseño de Sistemas de Control que hoy siguen vigentes. De otro lado, la teoría de control moderna, al aportar el análisis de los procesos a partir de variables de estado, permitió el diseño de sistemas de control óptimo, recurriendo únicamente a un modelo del proceso y a herramientas matemáticas de optimización. Para ello usa los conceptos de observabilidad y controlabilidad, que califican la posibilidad de determinar los estados del sistema basándose en la medida de sus salidas, y posteriormente determinar si con estas señales observadas, es posible lograr el control del sistema. Esta revolución hizo que el diseño del sistema de control pasara de un procedimiento de tanteo y error a un procedimiento de preconcepción y análisis matemático.

En este capítulo se presentan los elementos básicos del diseño de Sistemas de Control, haciendo énfasis en los Sistemas retroalimentados.

6.1. Definiciones Básicas

Esta sección apareció en este texto al inicio de varios capítulos, con el fin de permitir al lector comprender completamente las discusiones posteriores. Sólo se incluyen las definiciones generales del tema del capítulo, dejando las definiciones específicas de temas puntuales directamente en la sección que corresponde al tema en cuestión.

Definición 6.1 *Pareamiento de Variables para Control.* *Es la tarea que asigna a variables específicas del Proceso (que generalmente son dos o más), los rótulos de Variable Medida o Salida, Variable Interna o Estado, Variable Manipulada o Acción de Control y Variables de Perturbación.*

Definición 6.2 *Índice de Desempeño de un Lazo de Control.* *Es una medida numérica del grado de cumplimiento de los objetivos de desempeño de un lazo de control. Típicamente se consideran dos tipos de objetivos de desempeño en un lazo de control: los estáticos (diferencia entre el valor de la variable controlada y el SP cuando se alcanza el Estado Estacionario EE) y los dinámicos (efectos temporales que producen las perturbaciones en la variable controlada).*

Definición 6.3 Respuesta Temporal Inversa o Comportamiento de Fase No Mínima (RTI). Respuesta en la que la salida del sistema presenta un comportamiento aparentemente inverso al inicio de su respuesta ante una perturbación. Un sistema de fase no mínima tiene algún polo o cero en el semiplano derecho del plano s . El nombre Fase no Mínima proviene de la caracterización original del fenómeno en el dominio de la frecuencia. En funciones temporales y de transferencia puede verse como:

$$\text{Primer orden: } \tau \frac{dy}{dt} + y = Ku; \quad Y(s) = \frac{K}{\tau s + 1} U(s)$$

$$\text{RTI: } y = y_1 - y_2; \quad \frac{dy_1}{dt} + y_1 = k_1 u; \quad \frac{dy_2}{dt} + y_2 = k_2 u; \quad Y(s) = \left(\frac{k_1}{\tau_1 s + 1} - \frac{k_2}{\tau_2 s + 1} \right) U(s)$$

Definición 6.4 Retraso (Delay). Es el nombre más genérico para referirse a una demora no especificada en la señal de medida o en la respuesta del sistema.

Definición 6.5 Tiempo Muerto (Deadtime). Nombre que recibe un retraso en la señal debido al transporte de materia o energía entre el punto de medida y el punto real (de interés) de la variable en el proceso.

Definición 6.6 Lag (sin traducción directa al Español). Aunque algunos autores lo denominan Atraso, en realidad es el tiempo que transcurre entre un cambio en la entrada y el efecto que dicho cambio tiene en la salida o el estado del proceso. En el Lag se asume únicamente el efecto debido a la entrada, no al tiempo muerto o retraso por transporte.

6.2. Tareas del Diseño de Sistemas de Control

Dado que el diseño de ingeniería es un proceso, el mismo presenta una serie de etapas y un grupo de posibles instancias del diseño: de Equipo, de Proceso, de Planta y del Sistema de Control (EPP/SC). El objetivo del diseño del Equipo consiste en generar un Sistema que satisfaga una necesidad, el diseño de Proceso y Planta consiste en establecer las condiciones de operación de los mismo, y el diseño del Sistema de Control consiste en generar flujos de información que garanticen el funcionamiento del EPP de acuerdo con unos objetivos preestablecidos. Abordar la tarea de diseño requiere fijar un compromiso en cuanto a precisión y facilidad de cálculo. Cumplir con estas dos premisas depende de las necesidades a satisfacer por EPP, su vida útil, su confianza. En última instancia es una decisión que el ingeniero toma con base en su experiencia y en la información heurística.

Como ya se definió, el Sistema de Control reúne las tareas de Automatización y Control. Sin embargo, en este texto sólo se aborda el diseño de las tareas de control. En el caso del diseño del Sistema de Control para un Proceso, se deben separar dos fases: *i*) Generación de la estructura del Sistema de Control, y *ii*) Construcción del algoritmo de control a implantar. La generación de la estructura del Sistemas de Control puede hacerse sin contar con un modelo detallado del proceso, siempre que el conocimiento y la experiencia en el manejo de procesos similares así lo permitan, aunque siempre es más recomendable operar con un modelo del Proceso. En cambio, para la evaluación de las bondades de tal estructura si se requiere de un modelo del Proceso, en el que se muestren las relaciones dinámicas entre variables. Por su parte, la determinación del algoritmo de control requiere de un modelo matemático que permita la evaluación de los efectos del controlador sobre el proceso (comportamiento en lazo cerrado). Sin tal modelo, el análisis de propiedades cruciales como estabilidad, controlabilidad y observabilidad, resulta imposible de realizar [Marlin, 2000].

Con toda la carga de renovación que el control moderno trajo, alteró poco los conceptos generales sobre el diseño del sistema de control, existentes hasta ese momento, aunque agregó más configuraciones de controlador al abanico de posibilidades disponibles para el diseñador. Vale destacar como hoy existen herramientas computacionales bastante potentes para el diseño de Sistemas de Control, con las cuales, se ha acortado la brecha entre la gran cantidad de cálculos y tanteos de configuraciones, propias del control tradicional, y la

evaluación previa de una estructura de control y su calificación como apta o no, propia del control moderno [Mathworks, 2009]. Esto último refuerza más la existencia de un grupo de conceptos sobre diseño de Sistemas de Control, que pueden ponerse juntos en un sólo lugar y usarlos como guía general cuando se aborda esta tarea. Precisamente, aquí se pretende presentar algunos de estos conceptos, sin ser exhaustivos pero haciendo énfasis en los aspectos que conciernen a la Ingeniería del Proceso y dentro de ella a la concepción del Sistema de Control como parte integral del proceso y no como un apéndice de este.

6.3. Pasos del Diseño de Sistemas de Control

Cuando se aborda el diseño de un Sistema de Control para un Proceso, deben tenerse presentes ciertos objetivos y unos pasos mínimos a seguir hasta alcanzar dichos objetivos. Fundamentalmente, sólo existen dos tareas globales que implican una estrecha relación entre el conocimiento sobre la operación del proceso y del comportamiento de los sistemas de control disponibles: *i*) Encontrar una estructura de control que sea efectiva para el proceso particular, y *ii*) Diseñar un proceso controlado que resulte de fácil manejo y comando. Por su parte, en el diseño de un Sistema de Control pueden distinguirse cuatro pasos comunes:

1. Caracterizar el comportamiento del Proceso a controlar.
2. Fijar las especificaciones del Sistema de Control a diseñar.
3. Determinar la configuración del Sistema de Control a usar.
4. Ajustar los parámetros del Sistema de Control para lograr el desempeño deseado.

A continuación se exponen en detalle estos pasos, a fin de conformar todo el panorama del diseño. Debe dejarse en claro que es práctica común abordar primero el diseño del proceso y luego, cuando todo el proceso está absolutamente dimensionado y en ocasiones montado, se enfrenta la tarea de diseño del sistema de control. Si bien esto por lo general lleva a Sistemas de Control operativos, no siempre son los Sistemas de Control óptimos, tanto por costo como por cumplimientos de los requerimientos operativos del Proceso. Resulta evidente que la única manera de lograr un Proceso controlado, muy cercano en su operación al punto óptimo, es abordar simultáneamente el diseño del Proceso y el diseño del Sistema de Control. Procediendo de esta manera, se logra la síntesis de un Sistema de Control totalmente ajustado al Proceso y un Proceso ajustado al Sistema de Control, puesto que se pueden variar los valores de diseño para los equipos (siempre obtenidos en un análisis de la operación en uno de los Estados Estacionarios), para aumentar la facilidad y la flexibilidad en el control.

6.3.1. Caracterizar el comportamiento del Proceso a controlar

Un aspecto crucial para fijar las especificaciones de diseño del Sistema de Control y determinar en alguna medida el grado de dificultad de la tarea de diseño, es la caracterización del proceso. Aunque este aspecto tiene bastantes facetas, existen tres tópicos fundamentales que permiten ganar una idea sobre el Proceso: *i*) Carácter multivariable, *ii*) Linealidad de la respuesta temporal, y *iii*) Variaciones temporales en los parámetros.

Respecto al carácter multivariable, debe considerarse si dentro del intervalo de operación normal del Proceso, las interacciones y relaciones entre variables pueden llevarse a una relación SISO: una variable controlada y una manipulada. A la hora de la selección del sistema de control, este aspecto debe estar totalmente claro, puesto que si se olvida el carácter MIMO, el controlador SISO que se implante puede resultar totalmente ineficiente y mucho más costoso operativamente que su contraparte MIMO. Se acostumbra determinar el grado de importancia (desde la dinámica del proceso), de cada una de las variables involucradas, que se

toman como entradas y las que se toman como salidas. Así, se puede establecer un mapa de Entrada-Estado (o Salida) para describir cualitativamente la dinámica del Proceso y determinar su carácter SISO o MIMO.

En cuanto a la respuesta del Proceso en términos de linealidad, debe decirse que este aspecto es de vital importancia cuando se piensa en el tipo de sistema de control que se usará. Si bien un Proceso cuya respuesta pueda considerarse lineal, invita al diseño de Sistemas de Control lineales, puede obtenerse más beneficio con un Sistema de Control No lineal, que paradójicamente y dependiendo de la complejidad del proceso, puede hacer el mismo trabajo con menos elementos y menos cálculo para la acción de control. Por su parte, un Proceso no lineal por lo general requiere sistemas de control que consideren esta característica, a fin de obtener el mejor control posible.

Finalmente, respecto a la variación temporal de los parámetros del modelo del Proceso, por lo general se asume que los parámetros son fijos. Esto es, que los coeficientes de las ecuaciones diferenciales y algebraicas que representan los fenómenos involucrados no cambian con el tiempo. Para efectos reales esto es siempre falso, pues los coeficientes de transferencia de materia y energía, por ejemplo, son funciones del tiempo (envejecimiento del sistema) [Treybal, 1980]. Para fines prácticos, los procesos con variación temporal lenta en sus parámetros, pueden tratarse como sistemas invariantes en el tiempo (autónomos), pero aquellos que presentan variaciones paramétricas rápidas, deben considerarse como variantes en el tiempo (no autónomos). La categorización de la variación como lenta o rápida, tiene mucho que ver con la dinámica más lenta del proceso, puesto que si el tiempo que transcurre para que esta variación de parámetros sea notoria, es cercano al tiempo de respuesta del lazo más lento de todo el Proceso, se debe considerar la variación paramétrica como rápida y el Proceso debe ser tratado como un sistema no autónomo. Por lo general, el diseño de sistema de control para procesos no autónomos implica el uso de algún mecanismo que actualice los parámetros del modelo del Proceso (en el caso de controladores basados en modelo) o de controladores adaptables o de parámetros auto-ajustables. Es este caso, la precisión con la que se determina la variabilidad paramétrica del proceso es de vital importancia para la sintonía del sistema de control y la garantía final del cumplimiento de los objetivos de diseño. En cambio, cuando se enfrenta un proceso que puede considerarse autónomo, el sistema de control enfrenta menos problemas y puede seleccionarse entre un abanico más amplio de posibilidades. Finalmente debe mencionarse que si las características de no linealidad y variación de parámetros coexisten en un mismo Proceso, el diseño del sistema de control presenta un reto bastante grande, por lo que debe recurrirse a estrategias de control más avanzadas [Henson and Seborg, 1997].

6.3.2. Fijar las especificaciones del Sistema de Control a diseñar

Las especificaciones para el diseño, que normalmente se deben fijar desde el diseño del Proceso en sí mismo, implican dejar en claro lo que se espera que haga el Sistema de Control y como se espera que dicho sistema lo realice. Existen especificaciones de acuerdo con el método de diseño que se aborde (en el dominio del tiempo, en el dominio de la frecuencia, etc.). No es común que todas las especificaciones para el diseño existentes se consideren simultáneamente, puesto que dependiendo de la riqueza paramétrica del Sistema de Control seleccionado, se tendrá mayor o menor número de estas especificaciones que pueden ser cumplidas. Siempre el Proceso, con su función de utilidad económica y técnica propia, es el que fija que especificación resulta más prioritaria. En la caracterización del comportamiento de los sistemas de control, es común usar los siguientes aspectos del desempeño del sistema controlado, siendo el primero de obligatorio cumplimiento.

Estabilidad

Se refiere al comportamiento del proceso controlado cuando aparecen perturbaciones acotadas en sus entradas, incluida como entrada cualquier cambio en el punto de ajuste (*Set Point* SP). Se nota de inmediato la importancia de esta especificación general de diseño, puesto que un Proceso controlado que no cumpla esta condición podría terminar autodestruyéndose, al sobrepasar los límites de operación segura, o puede arrojar pérdidas económicas altas, al entregar productos fuera de las especificaciones requeridas.

Definición 6.7 Estabilidad (de manera intuitiva). Un sistema es Estable alrededor de un punto de equilibrio $\mathbf{x}_{EE}(t) = \mathbf{0}$ si el estado $\mathbf{x}(t)$ es capaz de transitar en tiempo finito de una condición inicial $\mathbf{x}(t_0)$ a un entorno acotado del punto de equilibrio $\mathbf{x}_{EE}(t)$.

Definición 6.8 Estabilidad en Lazo Abierto. Un Sistema es estable en Lazo Abierto si estando en un estado estacionario inicial EE_1 , un cambio en escalón en una de sus entradas (incluido el SP), conduce la salida del sistema a un nuevo estado estacionario EE_2 en un intervalo finito de tiempo.

Aunque aparentemente no tiene mucho sentido hablar de la estabilidad de un Sistema en Lazo Abierto, a partir de dicho análisis se pueden obtener pistas sobre el diseño del Sistema de Control y especialmente, sobre el tipo de herramientas a utilizar durante dicho diseño. Recuérdese que un Sistema de Control está en capacidad de estabilizar un Proceso, incluso cuando el proceso en lazo abierto sea inestable en el punto de operación seleccionado.

Definición 6.9 Estabilidad en Lazo Cerrado. Un Sistema que está en un estado estacionario EE es estable en lazo cerrado o simplemente es estable, si ante una perturbación en una de sus entradas (incluido el SP), a pesar de desviarse por un tiempo finito del EE , el sistema retorna a un entorno acotado del EE en tiempo finito.

La mayoría de Análisis de Estabilidad se realiza sobre el conjunto de Ecuaciones Diferenciales y Algebraicas que describen el Proceso (el modelo), nunca sobre el proceso mismo. Por lo tanto, no hay pruebas de estabilidad por simulación y análisis visual o índices de desviación. Existen diferentes métodos para el análisis de estabilidad. En el paradigma Entrada-Salida: *i*) Entrada Acotada- Salida Acotada (*Bounded Input-Bounded Output* BIBO) para Sistemas no lineales, y *ii*) Análisis de la parte real de las raíces del polinomio característico para Sistemas lineales.

Para Sistemas no lineales, la Estabilidad se analiza alrededor de uno de los equilibrios, a diferencia de los sistemas lineales, en los que el único equilibrio que existe es el origen de coordenadas. Recuérdese que un Sistema no lineal puede tener equilibrios estables y equilibrios inestables. En Sistemas no lineales, lo usual es trabajar en el Espacio de Estado, con los siguientes métodos para probar estabilidad: *i*) Lyapunov Directo (función de energía), *ii*) Lyapunov Indirecto o por linealización, *iii*) Sistema realimentado equivalente a un Operador de Invarianza, y *iv*) Pasividad.

Como se ve, las dos grandes aproximaciones al problema de estabilidad son la estabilidad en el espacio de estado (o estabilidad de Lyapunov) [Slotine and Li, 1991; Vidyasagar, 1993] y la estabilidad entrada-salida. Ambas aproximaciones no son equivalentes y sólo coinciden en el caso de los sistemas lineales. Para salvar la brecha entre las dos se desarrolló el concepto de la estabilidad entrada-estado [Desoer and Vidyasagar, 1975; Vidyasagar, 1993]. Es importante recalcar que la estabilidad BIBO se puede demostrar analizando condiciones menos severas que la estabilidad en el sentido de Lyapunov. La estabilidad BIBO no implica estabilidad asintótica pero sí implica comportamiento acotado para una clase de entradas (las acotadas). Por su parte, la teoría de Pasividad resulta una buena alternativa para probar estabilidad en una clase particular de sistemas no lineales [Maschke et al., 1999].

Estabilidad desde la solución del modelo La manera directa de analizar la estabilidad de un Sistema es a través de pruebas matemáticas sobre las ED del modelo que describe el comportamiento dinámico. En el caso de los Sistemas lineales, que presentan soluciones genéricas con componentes exponenciales asociados al tiempo: $c_i e^{p_i t}$, donde p_i son las raíces de la ecuación característica de la ED, también llamados Polos, se sabe que una condición suficiente y necesaria para que el sistema sea estable es que todas las raíces tenga parte real negativa. Tal condición no hace más que pedir que la parte transiente de la solución de la ED (términos exponenciales para una ED lineal), se haga cero cuando $t \rightarrow \infty$. En consecuencia, cualquier método que permita resolver la pregunta: ¿Existe algún polo (raíz de la ecuación característica) con parte

real positiva?, constituirá una demostración de estabilidad para el Sistema. Por supuesto que la pregunta puede resolverse en todos los dominios de análisis de sistemas: dominio del tiempo t para sistemas lineales y no lineales, dominio de Laplace s y dominio de la frecuencia $i\omega$, en estos dos últimos dominios sólo para sistemas lineales.

Los avances en la computación alcanzados en la última mitad del siglo XX hicieron posible que mediante una calculadora electrónica o un computador personal fuera posible hallar las raíces de un polinomio (incluso de alto orden) usando métodos numéricos. Sin embargo, esto no era corriente durante el siglo XIX y principios del mismo siglo XX. Esto hizo que se idearan métodos que permitían conocer el lugar de dichas raíces sin necesidad de hallarlas explícitamente, puesto que su cálculo era demasiado largo contando con las herramientas de la época. El primer método de este tipo fue propuesto por el matemático inglés Edward J. Routh en 1877 (*Treatise on the stability of a given state of motion*). Tal método no es más que un algoritmo tabular que permite determinar cuando un polinomio tiene todas sus raíces en el semiplano izquierdo (parte real negativa), sin necesidad de hallar el valor de las raíces. Un algoritmo diferente, pero orientado en el mismo sentido tabular, fue desarrollado casi 20 años después (1895) por el matemático alemán Adolf Hurwitz. Sólo fue hasta 1962 que en [Parks and Cartwright, 1962], se mostró que estos dos algoritmos pueden ser derivados por la aplicación de uno de los teoremas de estabilidad de Lyapunov.

Existen otros métodos que también solucionan la pregunta, pero de manera gráfica, tanto en el dominio de Laplace como en el dominio de la frecuencia. Los tres métodos gráficos más populares son: *i*) El diagrama propuesto en 1932 por el sueco Harry Nyquist [Nyquist, 1932], *ii*) El diagrama propuesto por el norteamericano Hendrik Wade Bode en 1945 en su libro *Análisis de redes y diseño de amplificadores por realimentación* [Bode, 1945], y *iii*) El diagrama del lugar de las raíces (Root Locus), propuesto por Walter R. Evans [Evans, 1948]. Todos estos métodos operan o requieren que el modelo esté en el dominio de Laplace o en el de la frecuencia, pues allí se facilita dicho análisis. Por tal motivo, a continuación se presentan la deducción de la expresión del Sistema en lazo cerrado en el dominio de Laplace, desde la cual es posible realizar el análisis de las raíces que dan la solución al modelo del Proceso. Tal análisis de estabilidad permite incluso extraer los intervalos o valores límite que pueden tomar los parámetros del controlador (particularmente su ganancia K) antes de generar sistemas inestables en lazo cerrado.

Sea un Proceso (genérico) como el ilustrado en el Diagrama de Bloques de la Figura 6.1. Se tiene una Función de Transferencia (FT) $G_T(s)$ que engloba la respuesta del transmisor y de cualquier equipo complementario que exista entre el sensor y el controlador, incluida la línea de transmisión. También existe una FT para el controlador $G_C(s)$, recordando que el controlador incluye el punto de suma en el que se calcula el error $e(t) = SP(t) - y(t)$. Finalmente, existirán dos FT más que se asocian con la perturbación $G_d(s)$ y con el proceso o línea directa de acción de la variable manipulada u , que debería rotularse $G_u(s)$, pero que por costumbre se rotula $G_P(s)$, siendo ambos rótulos correctos.

Desde la representación gráfica mostrada, se deduce que el modelo de la salida en el dominio de Laplace es:

$$Y(s) = G_d(s)D(s) + G_P(s)U(s)$$

Reemplazando $U(s)$ por su equivalencia $U(s) = G_C(s)E(s)$ y luego el error por su equivalencia $E(s) = SP(s) - G_T(s)Y(s)$, se llega a:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_d(s)D(s) + G_P(s)G_C(s)E(s) \Rightarrow \\ Y(s) &= G_d(s)D(s) + G_P(s)G_C(s)[SP(s) - G_T(s)Y(s)] \end{aligned}$$

agrupando términos comunes, particularmente los asociados con la salida, se llega a:

$$Y(s) + G_P(s)G_C(s)G_T(s)Y(s) = G_d(s)D(s) + G_P(s)G_C(s)SP(s)$$

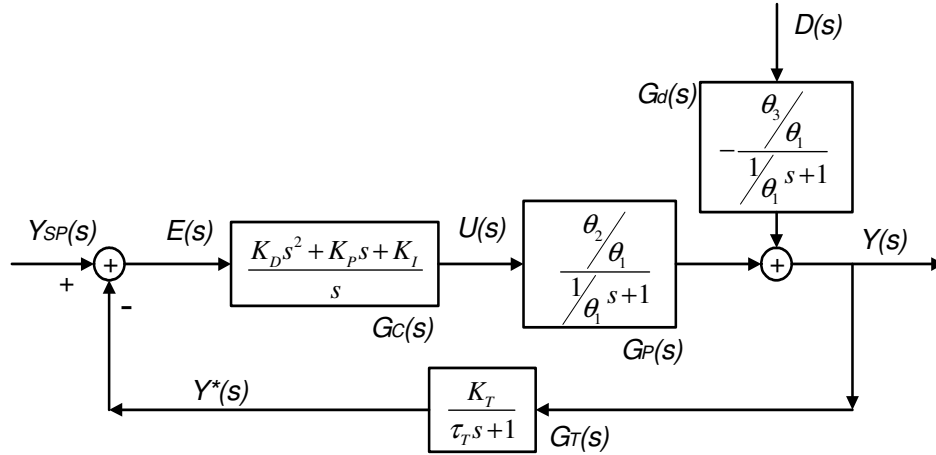


Figura 6.1: Diagrama de bloques en lazo cerrado.

que al despejar la salida, brinda el modelo final en el dominio de Laplace del Lazo Cerrado:

$$Y(s) = \frac{G_d(s)}{1 + G_P(s)G_C(s)G_T(s)}D(s) + \frac{G_P(s)G_C(s)}{1 + G_P(s)G_C(s)G_T(s)}SP(s)$$

En este punto vale la pena indicar que al término $G_P(s)G_C(s)G_T(s)$, que acompaña a 1 en el denominador, se acostumbra nombrar como la Función de Transferencia del Lazo Abierto. Esta FT se halla abriendo el lazo de control (operación manual del controlador) por medio de una interrupción de la señal $Y^*(s)$ en su ingreso al controlador y recorriendo una trayectoria que no se cierra hasta llegar a la entrada punto de ajuste $SP(s)$. La perturbación $D(s)$ debe considerarse cero, puesto que lo que se desea es observar el efecto del modo manual o lazo abierto sobre la salida.

Estabilidad según Lyapunov. En la misma línea de buscar la manera de analizar las raíces (soluciones) del modelo del Proceso, sin tener que solucionar las ED que lo constituyen, el 12 de Octubre 1892, Alexandr Mikhailovich Lyapunov (1857–1918) defendió su Tesis Doctoral: “El problema general de la estabilidad del movimiento”, presentada a la Universidad de Moscú [IEEE, 1992]. Allí, Lyapunov propone una manera de evaluar la estabilidad de un Sistema, analizando su comportamiento en el tiempo pero sobre una función externa (función de Lyapunov o función de energía de Lyapunov). De este modo no es necesario solucionar el modelo del Sistema sino reemplazarlo en la función de Lyapunov y sobre ella evaluar si se cumple el criterio de estabilidad. Las siguientes dos definiciones, son las básicas de este paradigma para el análisis de estabilidad de Sistemas dinámicos.

Definición 6.10 Estabilidad en el sentido de Lyapunov. Sea el sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(x)$ y su equilibrio $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$, se dice que es estable en $t = t_0$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$, con $\varepsilon > \delta$, tal que $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta(t_0, \varepsilon)$, entonces $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$.

Definición 6.11 Criterio de Estabilidad de Lyapunov. En el método directo de Lyapunov, el equilibrio $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ del Sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, $t > 0$, es estable si existe una función continua definida positiva $V(t, \mathbf{x}) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y una constante $r > 0$ tal que $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0, \forall t \geq t_0, \forall \mathbf{x} \in B_r$, siendo B_r una bola de radio r y $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ evaluada en las trayectorias del Sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, $t > 0$.

Esta definición corresponde a la Estabilidad a secas, en el sentido de Lyapunov. Para ampliar el tema, se sugiere consultar [Vidayasagar, 1993]. La Estabilidad a secas es relativamente débil (en el sentido matemático más no en el práctico), pues NO implica que el estado $\mathbf{x}(t)$ converga a \mathbf{x}_{EE} cuando $t \rightarrow \infty$. Sólo se requiere que el estado flote alrededor del equilibrio o EE. En tal sentido, esta estabilidad es equivalente al concepto de invarianza dentro de una región Ω . Hay otras definiciones de Lyapunov que si lo consideran, como la Estabilidad Asintótica, pues exige la propiedad de atracción del \mathbf{x}_{EE} alrededor del cual se analiza estabilidad. En este caso, se garantiza que existe un dominio de atracción alrededor de \mathbf{x}_{EE} si se cumple que cuando la condición inicial pertenece al dicho dominio, la solución se aproxima a \mathbf{x}_{EE} cuando $t \rightarrow \infty$. Sin embargo, la aplicación práctica de la estabilidad que se hace en diseño de Sistemas de Control, está más cercana a la Estabilidad a secas (invarianza Ω) que a la estabilidad asintótica.

La Estabilidad o Invarianza Ω implican una Contracción en tiempo finito del estado \mathbf{x} por efecto del Sistema de Control que actúa como un operador de invarianza. Dicha contracción ocurre durante un tiempo finito y está limitada en tamaño, porque no se puede alcanzar el \mathbf{x}_{EE} sino un entorno conocido de radio r_ϵ alrededor de \mathbf{x}_{EE} . En la práctica, un límite real para tal entorno alrededor de \mathbf{x}_{EE} es la precisión de los sensores con los cuales se está midiendo el estado \mathbf{x} , siempre que la precisión de los actuadores (EFCs) sea la suficiente para modular la acción que permita mantener $\mathbf{x}(t)$ en el entorno de la precisión de sensores. En este sentido, todo sistema de control resulta un operador de contracción en tiempo finito para el estado $\mathbf{x}(t)$, pero dicho operador sólo contrae valores del estado menores a un máximo \mathbf{x}_{Max} . Ese máximo es el radio r_Ω del invariante Ω . Cuando $r_\Omega \leq r_\epsilon$, el Sistema es inestable en el sentido práctico. La reducción en r_Ω está totalmente asociada con la sintonía (ajustes) del Sistema de Control. Una pregunta que sigue abierta en la literatura es ¿Cómo encontrar los límites de una región invariante Ω para un sistema dinámico no lineal controlado? y ¿Cómo se puede formular la contracción de la región invariante Ω en términos de los ajustes del controlador? [Gutiérrez, 2007].

Sensibilidad a Variaciones de Parámetros

También denominada robustez o rechazo a perturbaciones. Esta característica está estrechamente relacionada con la definición general de estabilidad dada arriba, pero se refiere más a la capacidad del proceso controlado para tolerar variaciones de parámetros, sin deterioro notorio en sus especificaciones de diseño, siempre manteniendo la estabilidad. El cumplimiento de esta especificación dio origen a toda la teoría y métodos del control robusto, que diseña en el entorno esperado de variación de los parámetros [Lewis and Syrmos, 1995]

Error de Estado Estable (e_{EE}) y Error de Seguimiento (e_S)

El e_{EE} especifica que tanta desviación de la salida se tolera, respecto del valor deseado de esta, cuando se desea un control regulatorio. Es tal vez la más usada de las especificaciones, puesto que atiende directamente a la calidad del producto final del proceso o planta. Por su parte, el e_S , especifica la desviación permitida entre el valor instantáneo de la salida y su correspondiente valor deseado en el mismo instante de tiempo, cuando se desea control de seguimiento de una trayectoria de la salida.

Respuesta Transitoria

En control regulatorio se puede caracterizar en forma global esta respuesta por tres aspectos: el Sobreimpulso Máximo (SIM), el Tiempo de Levantamiento (TL) y el Tiempo de Asentamiento (TA). El SIM indica que tanto sobrepasa la variable el valor deseado cuando se hace un cambio en el punto de ajuste o aparece una perturbación acotada. El TL se refiere al tiempo transcurrido entre el momento en que se cambia el punto de ajuste y el cruce de la variable por primera vez por el valor deseado. El TA indica que tanto tiempo transcurre entre el pico del SIM y el momento en que la variable se queda en una banda alrededor del valor deseado.

Característica de Respuesta en Frecuencia

Muy usual para procesos que se ven afectados por perturbaciones periódicas, puesto que permite observar los cambios de fase y ganancia de la salida del proceso controlado, ante este tipo de perturbaciones. También se utiliza en diseño convencional asumiendo perturbaciones sinusoidales de Frecuencia y Amplitud variables, para determinar los valores críticos en la operación del proceso.

6.3.3. Determinar la configuración del Sistema de Control a usar

La idea fundamental en el diseño del sistema de control, es que este debe compensar la respuesta natural del proceso ante las perturbaciones del entorno, de modo que pueda mantenerse un estado dado (control regulatorio) o llevar el proceso por una trayectoria determinada de puntos de operación deseados (control de seguimiento). Por esta razón, resulta normal decir que la tarea del sistema de control es una compensación, la cual puede hacerse en diversos puntos del proceso, de acuerdo a la ubicación del sistema de control, y tomando diversas señales del proceso de acuerdo con el tipo de requerimientos y mediciones disponibles. En este sentido, la selección de las variables a manipular \mathbf{u} y las variables a controlar \mathbf{x} o \mathbf{y} , es una tarea crucial denominada pareamiento de variables. Aunque esta es una tarea muy importante, la mayoría de las veces se realiza mediante la experiencia del diseñador, sin considerar los detalles dinámicos de cada Proceso. Además, muchos (por no decir todos) los métodos disponibles para el diseño de sistemas de control, asumen que ya la estructura de dicho sistema está disponible previamente al diseño [Havre, 1998].

Los Procesos están influenciados por perturbaciones que frecuentemente no se miden. Por lo tanto, una estrategia óptima debería encontrar variables controladas cuyo valor óptimo sea insensible a las perturbaciones. De este modo, no habría necesidad de medir tales perturbaciones. Sin embargo, tal proceder no siempre resulta el mejor, puesto que algunas variables controladas deben estar presentes siempre, debido a su asociación directa con índices de calidad del producto. La tarea es más complicada mientras mayor integración másica y energética (reciclos de masa y energía) tenga el proceso. A continuación se da una secuencia de pasos para realizar tal pareamiento, en el caso de Equipos de Proceso. Para realizar el pareamiento de las variables en una Planta completa, se sugiere mirar los trabajos de [Skogestad, 2004; Alstad, 2005; Alvarez, 2008].

1. Definir bien los objetivos económicos y de operación del Proceso. Tal definición entrega los objetivos de control que deben satisfacerse y la jerarquía de cumplimiento que se le asigna a los mismos. Esos objetivos de control deben tener asociada la naturaleza de las dinámicas del proceso a los que se refieren. En el caso ideal, los objetivos de control se igualan a los estados del proceso, los cuales se toman directamente del modelo de proceso, siempre que el modelo tenga base fenomenológica. Sin embargo, muchas veces los estados no son todos medidos, por lo que debe contarse con las mediciones disponible, que son las variables de salida \mathbf{y} . Algunas características deseables de \mathbf{y} son: *i*) Reflejan los objetivos de control del proceso, *ii*) Presentan alta sensibilidad a cambios en el estado del proceso, y *iii*) Resultan de fácil medida o estimación en línea.
2. Seleccionar las variables de entrada \mathbf{u} . Las características de estas variables son: *i*) Deben asegurar la “controlabilidad” de todas las variables controladas, *ii*) La incertidumbre en los modelos que relacionan esas entradas con el estado-salida debe ser baja, *iii*) La manipulación de estas variables debe ser fácil y suponer un bajo costo en la operación de la planta, *iv*) Tienen un efecto significativo sobre el estado-salida del proceso, y *v*) Ojalá, ofrezcan separabilidad de efectos sobre salidas múltiples del proceso (caso MIMO) [Skogestad and Postlethwaite, 1996]. En el caso SISO, la selección de las variables de entrada determina la configuración de la Estructura de Control. El caso MISO sólo se diferencia del SISO en la gradación que cada una de las entradas tiene sobre la salida: Gama Partida, Relación, etc., todo esto determinable desde la Ingeniería del Proceso. Finalmente, el caso MIMO debe ser tratado con diversas alternativas de Configuración, deducidas a partir del análisis de Interacción, buscando el desacoplamiento de lazos de control cuando sea beneficioso (no siempre!). Una clave útil para definir

entre dos posibles variables manipuladas para la misma variable controlada, es escoger como variable manipulada aquella que tenga un efecto directo y rápido sobre la variable controlada [Marlin, 2000].

3. Determinación de las perturbaciones **d.** Las características típicas de estas variables son: *i*) Efecto menos significativo sobre el estado-salida que cualquiera de las entradas del proceso, *ii*) Son función de condiciones externas al proceso, y *iii*) Generalmente de manipulación difícil o costosa.

Definición 6.12 Interacción entre Lazos de Control. Fenómeno que presentan los controles multilazo en el cual la acción de control desarrollada en un lazo afecta el desempeño de uno o más de los otros lazos instalados.

La interacción no es necesariamente indeseable, por lo que siempre debe considerarse como afecta el desempeño para calificarla como favorable o desfavorable. Es favorable, si la acción de control ejercida sobre un lazo ante una perturbación, le facilita a otros lazos el desarrollo de su propia acción de control. En este caso, la interacción debe respetarse. Resulta desfavorable cuando un cambio en el punto de ajuste de un lazo afecta el desempeño de los demás lazos. En este caso, se busca eliminar esa interacción para facilitar la sintonía. Existen dos maneras principales de lograr el desacoplamiento: *i*) Cambio de variables manipuladas, que implica hacer una nueva selección de las variables manipuladas, de manera que la matriz de función de transferencia del sistema sea diagonal o cercanamente diagonal, y *ii*) Cambio en las variables controladas, trocando variables medidas por variables calculadas basadas en medidas de las salidas del proceso.

En cuanto al tipo de sistema de control a implementar, siempre debe procederse desde las configuraciones más simples hasta las más complejas: Principio de Parsimonia. Una recomendación de sentido común, pero muchas veces olvidada por el impacto publicitario de equipos de gran capacidad y bajo costo, es la de mantener el sistema de control diseñado tan simple como sea posible, puesto que todo el personal involucrado en el proceso, desde el operador hasta el ingeniero jefe de planta, deben estar en capacidad de entender este sistema. Esto implica usar el menor número posible de equipos para control, ya que cada equipo adicional es otro elemento más susceptible de falla. Por lo tanto, las ampliaciones del sistema de control deben estar contempladas, al menos de modo aproximado, desde la concepción misma del sistema, pero sin caer en holguras de previsión demasiado grandes, que impliquen la existencia de equipos de control que operan a menos del 50% de su capacidad total. Si se tiene mucha incertidumbre sobre el tamaño final del sistema de control, debido a futuras ampliaciones de la planta previstas pero no dimensionadas, se recomienda usar equipos de control modulares, que crecen con la planta. Cada técnica de control tiene sus ventajas y desventajas, por lo que deben conocerse en detalle. Una ruta de opciones a considerar es: *i*) Prealimentación, *ii*) Realimentación, y *iii*) Control Combinado. Los efectos de los acoplamientos entre técnicas diversas deben ser estudiados con cuidado. La prealimentación siempre implica medición de al menos una perturbación o una de las entradas. Pero la realimentación implica el uso de señales medidas, bien sea del estado o de la salida. Surge entonces la necesidad de definir si se hará realimentación del estado \mathbf{x} o de la salida \mathbf{y} .

A pesar de su madurez teórica, el control en el espacio de estado ha tenido poco impacto en el control de plantas de proceso. Esto resulta bastante contradictorio cuando se considera la complejidad de los procesos desde el punto de vista modelamiento y control. También se sabe que sólo a través de una aproximación de modelamiento rigurosa tal complejidad puede ser entendida con el fin de mejorar el diseño de Sistemas de Control. La pregunta que surge de todo esto, es: ¿por qué los controladores para procesos químicos todavía se diseñan usando el paradigma entrada-salida?. Tal vez porque la retroalimentación fue la primera aproximación para controlar un proceso. Su utilidad se certifica por el hecho de que la mayoría de sistemas de control industriales operan por retroalimentación. A pesar de esto, su lazo básico de control retroalimentado, sólo utiliza variables de salida como retroalimentación en el lazo de control. Esto ha generado la falsa concepción de que las señales de salida son la única información del proceso. Obviamente, la disponibilidad de salidas directamente desde los sensores instalados coloca a la retroalimentación de salida como la primera opción cuando se diseñan lazos de control. Así, las variables medidas dirigen todo el procedimiento de diseño sin ninguna consideración especial sobre las relaciones entre dichas salidas y los estados del proceso. Esto pone al control del proceso en una situación peligrosa de dependencia de la capacidad de medición y la

disponibilidad de sensores, pues según esto, sólo pueden estar bajo control aquellas variables con medición directa o estimación indirecta.

Las variables medidas pueden ser una combinación compleja de dos o más estados. Mantener en algún valor una variable de salida del proceso no es una garantía de control sobre el estado del proceso. Se debe hacer una selección cuidadosa de los sensores de modo que se pueda reconstruir el estado completo del proceso, pero usando el número mínimo de sensores. En esta tarea, la noción de Observabilidad extendida resulta muy útil para hallar ese conjunto mínimo de sensores a ser instalados en el proceso.

Definición 6.13 Observabilidad. *Característica que asegura la determinación del estado total \mathbf{x} del proceso, tomando un grupo de datos desde un conjunto dado de sensores. Se dice que un Sistema es observable si dadas las entradas \mathbf{u} y salidas \mathbf{y} del Sistema en un intervalo de tiempo finito, es posible determinar el valor de los estados \mathbf{x} basándose en esos valores \mathbf{u}, \mathbf{y} , en las derivadas de esos valores $\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{y}}$, y en un modelo del Sistema en el espacio de estado.*

La Observabilidad se calcula a partir de un modelo del Proceso en el cual se establece que variables están disponibles desde los sensores instalados. Un estado incompleto en su medida, describe sólo un grupo de dinámicas del proceso, con lo cual se corre el riesgo de enmascarar dinámicas dominantes. La Observabilidad depende de las variables seleccionadas como salidas y estados del proceso. Por eso, siempre debe ser una restricción para el diseño. La Observabilidad se garantiza instalando suficientes sensores para medir todos y cada uno de los estados, con lo cual se logra el mapeo trivial $y_i = x_i \forall i$. Eso resulta la mayoría de las veces en un costo prohibitivo para un Proceso cuyo producto tenga un valor agregado medio. En cambio, puede resultar tolerable para Procesos con producto de alto valor agregado como los farmacéuticos. El número mínimo de sensores que permita “inferir” u “Observar” el estado completo del proceso a través de un algoritmo de cálculo de los estados no medidos (Observador de estado o Sensor Virtual Basado en Modelo), se determina a través de un análisis de la Observabilidad del Proceso con sensores.

Cuando se usa una aproximación de control completo de estado desde los pasos iniciales del diseño del Sistema de Control, muchos aspectos convencionales del procedimiento de diseño de sistema de control (y del proceso) deben redefinirse. Por ejemplo, la Controlabilidad aparece como un índice de diseño debido a su capacidad para detectar estados del proceso no controlables.

Definición 6.14 Controlabilidad. *Característica que asegura la existencia de una secuencia finita de acciones de control \mathbf{u} que garantizan que puede lograrse y mantenerse cualquier valor del estado \mathbf{x} del Proceso en un intervalo finito de tiempo $0 \leq t \leq t_1$.*

La Controlabilidad se calcula a partir de un modelo del Proceso en el que se ha determinado cuáles son las variables manipuladas o variables de acción del Sistema de Control. Por lo tanto, la Controlabilidad es función de los balances de Materia, Energía y Cantidad de Movimiento (puntos estacionarios) y de las variables de control seleccionadas. Nótese que la controlabilidad así definida no considera la salida \mathbf{y} del proceso, sólo los estados. Como se verá más adelante, el diseño “moderno” considera los tres pilares de la teoría de control dentro del procedimiento de diseño. La Observabilidad para volver observable el proceso y garantizar la reconstrucción total del Estado \mathbf{x} . La Controlabilidad para volver controlable el punto de operación sobre el cual se diseña, con lo cual se garantiza que dicho punto puede convertirse en un Estado Estacionario. La Estabilidad para volver Estable el punto de operación, con lo que se garantiza que a pesar de las perturbaciones el Estado permanecerá en un entorno del punto de operación. Hay un cuarto elemento a considerar: El Desempeño. Este refleja la eficiencia del Sistema de Control traducida en costos. Por lo general se asocia con algún índice del comportamiento del Proceso controlado, traducido en costos de materia prima, servicios (vapor, aire comprimido, agua de enfriamiento, etc.) y mano de obra.

6.3.4. Ajustar los parámetros del Sistema de Control para lograr el desempeño deseado

El ajuste de parámetros del controlador, también conocido como sintonía del controlador, es la parte final del diseño. Como se mencionó previamente, este trabajo sólo aborda lazos de control realimentado (de salida o de estado).

Controladores Realimentados de Salida: Caso PID

Tal vez la pregunta que guía el diseño de cualquier controlador es: ¿Cómo se puede formular la contracción de la región invariante Ω en términos de los ajustes del controlador?. Para lograrlo, se deben considerar no sólo las Dinámicas del proceso sino los efectos no lineales presentes, las perturbaciones que desvían al estado del punto de ajuste y las incertidumbres propias del modelo del Proceso. Con el conocimiento de estas características, se debe especificar un controlador que esté en capacidad de atenuar el efecto de las perturbaciones, que presente baja sensibilidad ante ruidos de medición y que tenga suficiente robustez ante las incertidumbres en el modelo. Existen dos métodos de diseño: con y sin Modelo explícito del Proceso.

En los métodos sin Modelo explícito del proceso, la ley de control opera con un índice de desempeño que se calcula sobre el Proceso operando, con medidas directas o variables inferenciales (observadas-estimadas), realimentadas del proceso. En los métodos de esta familia, toda la sintonía se realiza a través de procedimientos empíricos o fórmulas generalizadas. El ejemplo más destacado es el Controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID), que opera con el índice Error de salida $e_y = y_{SP} - y_{Medida}$, como argumento. La Ley de Control formulada de manera continua se ve en la Ecuación 6.1. Esta es la formulación del PID No-interactivo o Estándar ISA. Existen otras formulaciones como el PID Ideal o Paralelo y el PID Interactivo, que se dejan al lector interesado como tema de consulta [Creus, 2005].

$$u(t) = u_{Bias} + K_P * e(t) + \frac{K_P}{t_I} \int_{t_{ini}}^t e(t) dt + K_P t_D \frac{d e(t)}{dt} \quad (6.1)$$

En esta expresión, $u(t)$ es la salida del controlador (entrada al proceso) en el tiempo t , u_{Bias} es el valor de polarización del controlador o valor de la acción de control cuando la variable controlada iguala su punto de ajuste, K_P es el factor proporcional que relaciona de manera estática a la entrada (u) con el error de la salida (e). A nivel industrial es más usual hablar de Banda Proporcional (BP) que de ganancia del Controlador [Smith and Corripio, 1997]. $\frac{1}{t_I}$ es el factor del efecto Integral del error, que actúa como una recolocación del valor de la entrada u . t_I es el tiempo Integral, que indica cuando tiempo tardará el efecto integral en repetir la acción ejecutada por el proporcional. t_D es el factor del efecto Derivativo del error. Actúa como un término de velocidad que “anticipa” el movimiento del error en el tiempo y con base en esto repite la acción proporcional. Generalmente t_I y t_D se dan en *segundos*, aunque algunos controladores industriales usan *minutos*.

Criterios de Desempeño Para Sintonía de Controladores PID

Como resulta obvio, la principal característica de un proceso controlado es su estabilidad. Sin embargo, el grupo de valores de sintonía del controlador no es único. Por el contrario, existen infinitos grupos de valores para los parámetros del controlador que logran un comportamiento estable en lazo cerrado. Es en este punto en el cual deben adicionarse otros criterios que permitan depurar ese conjunto infinito para llegar a valores únicos de parámetros para el controlador. Tales criterios especifican el desempeño del proceso en lazo cerrado. Dicho desempeño hace referencia directa a la manera en la que el proceso rechazará perturbaciones (control regulariorio) o seguirá las variaciones en el punto de ajuste (control de seguimiento o servo). Los criterios en

mención van desde consideraciones empíricas directamente asociadas con el conocimiento sobre el proceso hasta consideraciones numéricas de optimalidad medidas como un índice que evalúa la respuesta transitoria del proceso. Las dos propuestas que se presentan a continuación asumen que el proceso puede modelarse en funciones de transferencia en lazo abierto como un primer orden con retardo: $G_P(s) = \frac{K e^{-t_d s}}{\tau s + 1}$ y que además es estable en lazo abierto: “Parte real de todas las raíces del polinomio característico $\tau s + 1 = 0$, son negativas”. Hay una pregunta que siempre aparece cuando se usan estos métodos: ¿Qué función de transferencia usar: $G_P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_U e^{-t_d} U^{-s}}{\tau s + 1}$ o $G_D(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{K_D e^{-t_d} D^{-s}}{\tau s + 1}$ cuando se va a diseñar un controlador de Regulación o uno de Seguimiento?. Nótese que la respuesta inmediata no es la correcta: use $G_P(s)$ para regulación y $G_D(s)$ para seguimiento. ¿Por qué?. Pista: mirar los componentes de un controlador PID en los numeradores de las FT de Lazo Cerrado asociadas con $Y_{SP}(s)$ y con $D(s)$ [Luyben, 1990].

Ziegler-Nichols

Estos autores proponen un criterio empírico de desempeño que asume un comportamiento dinámico con razón de decaimiento entre picos de la respuesta de $\frac{1}{4}$ [Ziegler and Nichols, 1942]. Esto significa que cada pico en las oscilaciones corresponde a una separación del punto de ajuste igual a la cuarta parte del pico anterior. Por ejemplo, si el sobre impulso inicial cuando aparece la perturbación es de 10 unidades bajo el punto de ajuste, el segundo pico de la oscilación estará ahora por encima del punto de ajuste $\frac{1}{4} * 10 = 2,5$ unidades. Del mismo modo, el tercer pico estará por abajo del punto de ajuste $\frac{1}{4} * 2,5 = 0,625$ unidades, y así sucesivamente. Con este criterio Ziegler y Nichols (Z-N) proponen los siguientes valores para los ajustes de controladores P, PI y PID:

$$P: \quad K_P = \frac{\tau}{K * t_d}; \quad PI: \quad K_P = 0,9 * \frac{\tau}{K * t_d}, \quad t_I = \frac{t_d}{0,3}; \quad PID: \quad K_P = 1,2 * \frac{\tau}{K * t_d}, \quad t_I = 2 * t_d, \quad t_D = 0,5 * t_d.$$

Otros autores que han usado estos ajustes sugieren que su aplicabilidad está limitada a aquellos procesos que cumplan con la relación $0,1 < \frac{t_d}{\tau} < 0,5$ (véase [Smith and Corripio, 1997]). De todos modos, los valores indicados por este o cualquier otro método heurístico siempre serán valores de arranque para un ajuste fino directamente sobre el proceso. De otro lado, cuando se tienen procesos inestables en lazo abierto, el método anterior no puede aplicarse, por lo que los mismo autores propusieron un segundo método, denominado de lazo cerrado o de oscilaciones sostenidas. En ese método, se cierra el lazo de control con un controlador sólo Proporcional, ajustando un valor de ganancia proporcional semilla, que garantice que el sistema se estabiliza. Cuando ya el sistema está estabilizado, se aumenta su ganancia y se perturba el punto de ajuste. Si el sistema busca un nuevo estado estacionario EE_2 , se devuelve el punto de ajuste a su valor inicial EE_1 , se espera que lo alcance y se vuelve a aumentar la ganancia y a perturbar el punto de ajuste en escalón. El procedimiento sigue hasta que la perturbación en el punto de ajuste con el valor de ganancia proporcional actual, produzca a la salida oscilaciones de periodo y amplitud constantes. Al periodo de dicha oscilación se le denomina Periodo Último T_u , mientras que al valor de la ganancia proporcional se le denomina ganancia última K_u . Con estos dos valores, los autores proponen los siguientes valores para ajustar los parámetros de controladores P, PI y PID con característica de $\frac{1}{4}$ de decaimiento:

$$P: \quad K_P = \frac{K_u}{2}; \quad PI: \quad K_P = \frac{K_u}{2,2}, \quad t_I = \frac{T_u}{1,2}; \quad PID: \quad K_P = \frac{K_u}{1,7}, \quad t_I = \frac{T_u}{2}; \quad t_D = \frac{T_u}{8}.$$

López y Rovira

Este trabajo se concluyó con la tesis doctoral de Rovira [Rovira, 1981], en la cual, complementando los trabajos de López, se propusieron tablas de sintonía para controladores PID, con el mismo modelo supuesto de primer orden más retardo, pero usando otros criterios de desempeño diferentes al cuarto de decaimiento de Z-N. A continuación se relaciona una de las tablas de López y Rovira, cuya aplicabilidad está limitada a procesos que cumplan con el criterio $0,1 < \frac{t_d}{\tau} < 1,0$. Los autores sugieren no extrapolar. Para controladores de regulación, se usaron varios criterios de desempeño: ISE (Integral del error cuadrático), IAE (Integral del error absoluto) e ITAE (Integral Temporal Absoluta del Error). Para este último índice, $ITAE = \int_{t_0}^{\infty} t * |e(t)| dt$,

la tabla de sintonía sugiere:

$$\text{P: } K_P = \frac{0,049}{K} \left(\frac{t_d}{\tau}\right)^{-1,084}; \quad \text{PI: } K_P = \frac{0,859}{K} \left(\frac{t_d}{\tau}\right)^{-0,977}; \quad t_I = \frac{\tau}{0,674} \left(\frac{t_d}{\tau}\right)^{0,68}; \quad \text{PID: } K_P = \frac{1,357}{K} \left(\frac{t_d}{\tau}\right)^{-0,947}; \quad t_I = \frac{\tau}{0,842} \left(\frac{t_d}{\tau}\right)^{0,738}; \quad t_D = 0,381 * \tau * \left(\frac{t_d}{\tau}\right)^{0,995}.$$

En textos de control existen las tablas completas, tanto para regulación como para seguimiento, dando además valores de sintonía para los índices ISE e IAE [Smith and Corripio, 1997].

Estabilidad en Lazo Cerrado: Método de Sustitución Directa

La inestabilidad de un sistema se detecta cuando al menos una (usualmente dos) de las raíces de su polinomio característico cruzan el eje Imaginario del plano complejo, moviéndose desde la izquierda hasta la derecha. Este movimiento de las raíces es causado por las variaciones en los parámetros del controlador, fundamentalmente la ganancia proporcional K_P . Esto debido a que tanto el tiempo integral t_I como el tiempo derivativo t_D , resultan funciones de un parámetro del proceso que no varía después que se tiene el modelo (t_d o T_u), como se verá más adelante. Se sabe que cuando las raíces de la ecuación característica están sobre el eje imaginario, ya el sistema presenta comportamiento oscilatorio debido a que la parte Real de las raíces es cero. A este punto se le conoce como el límite de la estabilidad, diciendo que el sistema es Marginalmente Estable, puesto que oscilará indefinidamente con la misma amplitud (recuérdese el segundo método de sintonía de Z-N). Inmediatamente las raíces empiezan a tener parte real positiva (cruzan al semiplano derecho), las oscilaciones serán de amplitud creciente generando divergencia. Es precisamente cuando las raíces están sobre el eje imaginario, que la salida del sistema oscilará con amplitud constante y a una frecuencia que se denomina Frecuencia Última $\omega_u = [\frac{rad}{s}]$. Atención que si la frecuencia se da en Hertz (ciclos por segundo), la relación entre periodo y frecuencia es de inversos: $f = \frac{1}{T}$. Con esta frecuencia, se asocia un parámetro en unidades de tiempo denominado el Periodo Último $T_u = [segundos] = \frac{2\pi}{\omega_u}$, con el que se calculan los parámetros Integral y Derivativo del PID, de acuerdo con algún criterio de desempeño¹.

El método de Sustitución Directa reemplaza en la ecuación característica del modelo (denominador común de las funciones de transferencia), la s por el término del dominio de la frecuencia $i\omega$ (en realidad $i\omega_u$), y la resuelve igualando a cero tanto la parte real como la parte imaginaria. De este modo, aparecen dos ecuaciones simultáneas que permiten hallar el valor de la Frecuencia Última ω_u y la Ganancia Última del controlador K_u , puesto que dicha ecuación característica contiene la ganancia proporcional del controlador K_P , así como las ganancias integral K_I y la ganancia derivativa K_D . Recuérdese que en caso de usar un controlador PI, PD o PID, deberán reemplazarse las K_I y K_D por sus equivalencias en términos de T_u (ó $\frac{2\pi}{\omega_u}$) y la misma K_P si se trata de un controlador PID industrial con algoritmo interactivo². Como ejemplo, sea el siguiente modelo en el dominio de Laplace:

¹Como se vió previamente, en el método experimental de Ziegler-Nichols de lazo cerrado, se incrementa lentamente la ganancia del controlador en lazo cerrado, provocando en cada incremento un pequeño escalón en el punto de ajuste (SP), hasta lograr que la salida oscile con amplitud constante. En ese momento se puede leer del gráfico el T_u , mientras que la ganancia del controlador con la que se alcanza dicho estado oscilatorio se denomina Ganancia Última K_u . La Tabla de sintonía propuesta por Ziegler-Nichols usa parámetros para calcular los ajustes del PID.

²El algoritmo PID se puede implementar de diferentes maneras. En particular, existen dos modos claramente diferentes. El PID interactivo, herencia de los antiguos controladores neumáticos, en los cuales era imposible separar la ganancia del efecto proporcional de los efectos integral y derivativo. El otro tipo de algoritmo es el "Ideal", conocido así en la literatura en contraposición al real o implementable en esa época. El Ideal ahora es implementable a través de los controladores electrónicos y los sistemas asistidos por computadora. En este algoritmo, las tres ganancias son independientes. Por lo tanto, debería indagarse primero sobre el tipo de algoritmo que tiene el controlador a utilizar (eso lo dice el manual!), antes de aplicar alguna fórmula de sintonía.

$$Y(s) = \frac{\tau_T s^2 + s}{\frac{V}{F} \tau_T s^3 + (\frac{V}{F} + \tau_T) s^2 + (\frac{K_T K_P}{\rho C_P F} + 1) s + \frac{K_T K_I}{\rho C_P F}} D(s) + \frac{\frac{\tau_T K_P}{\rho C_P F} s^2 + \frac{(\tau_T K_I + K_P)}{\rho C_P F} s + \frac{K_I}{\rho C_P F}}{\frac{V}{F} \tau_T s^3 + (\frac{V}{F} + \tau_T) s^2 + (\frac{K_T K_P}{\rho C_P F} + 1) s + \frac{K_T K_I}{\rho C_P F}} SP(s)$$

cuya ecuación característica es: $\frac{V}{F} \tau_T s^3 + (\frac{V}{F} + \tau_T) s^2 + (\frac{K_T K_P}{\rho C_P F} + 1) s + \frac{K_T K_I}{\rho C_P F} = 0$. Puesto que se usó un controlador PI, debe usarse alguna equivalencia para K_I . En este caso se usará la recomendación de sintonía del método de Ziegler-Nichols para lazo cerrado, que establece que para un controlador PI, el tiempo integral es $t_I = \frac{T_u}{1,2}$ y recordando que $T_u = \frac{2\pi}{\omega_u}$, se llega a $t_I = \frac{2\pi}{1,2 \omega_u} = \frac{5\pi}{3\omega_u}$. Además, la sugerencia para t_I de la Tabla de Ziegler-Nichols es para un controlador interactivo, en el cual $K_I = \frac{K_P}{t_I} = \frac{3K_P \omega_u}{5\pi}$, lo que finalmente puede reemplazarse en la ecuación característica junto con $s = i\omega_u$ y $K_P = K_u$:

$$\begin{aligned} \frac{V}{F} \tau_T (i\omega_u)^3 + (\frac{V}{F} + \tau_T) (i\omega_u)^2 + (\frac{K_T K_u}{\rho C_P F} + 1) (i\omega_u) + \frac{K_T \frac{3K_u \omega_u}{5\pi}}{\rho C_P F} &= 0 \Rightarrow \\ -\frac{V}{F} \tau_T \omega_u^3 i - (\frac{V}{F} + \tau_T) \omega_u^2 + (\frac{K_T K_u}{\rho C_P F} + 1) \omega_u i + \frac{3K_u K_T}{5\pi \rho C_P F} \omega_u &= 0 \end{aligned}$$

Separando en parte Real y parte Imaginaria:

$$\left[\frac{3K_u K_T}{5\pi \rho C_P F} \omega_u - (\frac{V}{F} + \tau_T) \omega_u^2 \right] + \left[(\frac{K_T K_u}{\rho C_P F} + 1) \omega_u - \frac{V}{F} \tau_T \omega_u^3 \right] i = 0$$

Para lograr el cero en esta ecuación (las raíces, pero en el dominio de la frecuencia!), se debe cumplir que tanto la parte *Re* como la parte *Im* sean iguales a cero:

$$\begin{aligned} \frac{3K_u K_T}{5\pi \rho C_P F} \omega_u - (\frac{V}{F} + \tau_T) \omega_u^2 &= 0 \\ (\frac{K_T K_u}{\rho C_P F} + 1) \omega_u - \frac{V}{F} \tau_T \omega_u^3 &= 0 \end{aligned}$$

La solución de estas dos ecuaciones, entrega valores para K_u y ω_u .

Parte Real:

$$\begin{aligned} \frac{3K_u K_T}{5\pi \rho C_P F} \omega_u - (\frac{V}{F} + \tau_T) \omega_u^2 &= 0 \Rightarrow \\ \omega_u \left[\frac{3K_u K_T}{5\pi \rho C_P F} - (\frac{V}{F} + \tau_T) \omega_u \right] &= 0 \end{aligned}$$

Parte Imaginaria:

$$\begin{aligned} (\frac{K_T K_u}{\rho C_P F} + 1) \omega_u - \frac{V}{F} \tau_T \omega_u^3 &= 0 \Rightarrow \\ \omega_u \left[\frac{K_T K_u}{\rho C_P F} + 1 - \frac{V}{F} \tau_T \omega_u^2 \right] &= 0 \end{aligned}$$

Primera Solución: se nota que si $\omega_u = 0 \Rightarrow K_u = 0$, que no es una solución válida para el caso de un controlador (sería un lazo abierto! en un controlador PID interactivo o un controlador sólo I en uno Ideal).

Segunda y Tercera Soluciones: de la ecuación para la parte real se puede despejar K_u :

$$\begin{aligned} \frac{3K_u K_T}{5\pi\rho C_P F} - \left(\frac{V}{F} + \tau_T\right)\omega_u &= 0 \Rightarrow \frac{3K_u K_T}{5\pi\rho C_P F} = \left(\frac{V}{F} + \tau_T\right)\omega_u \Rightarrow \\ K_u &= \frac{5\pi\rho C_P F}{3K_T} \left(\frac{V}{F} + \tau_T\right)\omega_u \end{aligned}$$

que reemplazada en la segunda expresión simplificada para la parte imaginaria da:

$$\begin{aligned} \frac{K_T K_u}{\rho C_P F} + 1 - \frac{V}{F}\tau_T\omega_u^2 &= 0 \Rightarrow \\ \frac{5\pi}{3} \left(\frac{V}{F} + \tau_T\right)\omega_u + 1 - \frac{V}{F}\tau_T\omega_u^2 &= 0 \Rightarrow \\ \frac{V}{F}\tau_T\omega_u^2 - \frac{5\pi}{3} \left(\frac{V}{F} + \tau_T\right)\omega_u + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, las dos raíces restantes se hallan por la solución de la cuadrática para ω_u :

$\omega_u = \frac{\frac{5\pi}{3} \left(\frac{V}{F} + \tau_T\right)}{2\frac{V}{F}\tau_T} \pm \frac{\sqrt{\left[\frac{5\pi}{3} \left(\frac{V}{F} + \tau_T\right)\right]^2 - 4\frac{V}{F}\tau_T}}{2\frac{V}{F}\tau_T}$ y con cada uno de estos valores hallan los correspondientes de $K_u = \frac{5\pi\rho C_P F}{3K_T} \left(\frac{V}{F} + \tau_T\right)\omega_u$. Se debe escoger aquella solución que presente un valor de frecuencia última real y positivo.

Para concluir nuestro ejemplo, tomemos los siguientes valores para el sistema:

$V = 50L = 0,05m^3$; $F = 9\frac{L}{min} = 0,0025\frac{m^3}{s}$; $\tau_T = 3s$; $K_T = 10\frac{^\circ C}{}$; $\rho = 1000\frac{kg}{m^3}$; $C_P = 1\frac{Cal}{gr^\circ C} = 4,184\frac{kJ}{kg^\circ C}$, con lo cual:

$$\omega_u = \frac{\frac{5\pi}{3} \left(\frac{0,05}{0,0025} + 3\right)}{2\frac{0,05}{0,0025} \times 3} \pm \frac{\sqrt{\left[\frac{5\pi}{3} \left(\frac{0,05}{0,0025} + 3\right)\right]^2 - 4\frac{0,05}{0,0025} \times 3}}{2\frac{0,05}{0,0025} \times 3} = \frac{120,428}{120} \pm \frac{\sqrt{14502,9 - 240}}{120} = 1,00357 \pm 0,99523.$$

Puesto que la ganancia última que se busca es aquella a partir de la cual el sistema ya es inestable, la K_u será la menor, por lo tanto (según la formulación para K_u en función de ω_u), se debe escoger la ω_u más pequeña:

$\omega_u = 0,00834\frac{rad}{s}$, que se corresponde con una $K_u = \frac{5\pi \times 1000\frac{kg}{m^3} \times 4,184\frac{kJ}{kg^\circ C} \times 0,0025\frac{m^3}{s}}{3 \times 10\frac{^\circ C}} \left(\frac{0,05}{0,0025} + 3\right) s \times 0,00834\frac{rad}{s} = 31,517\frac{kJ}{^\circ C} = 31,517\frac{kW}{^\circ C}$. ¿Cómo será este parámetro en unidades de $\frac{\%}{}$?, ¿y cómo será en unidades de Banda Proporcional?. Si el Elemento Final de Control (EFC o válvula) entrega $75kW$ de potencia a apertura total (100% open), la gama (span) del EFC será de 0 a $75kW$, que se corresponden con 0% a 100%. Ahora, la gama del sensor sea entre $10^\circ C$ y $80^\circ C$, correspondiente con 0% a 100%. Por lo tanto, los factores de conversión serán: para la potencia $1,0kW$ se corresponden con $\frac{1}{75-0} \times 100 = 1,33\%$, y para la temperatura, $1,0^\circ C$ se corresponde con $\frac{1}{80-10} \times 100 = 1,43\%$. Es posible entonces convertir las unidades del valor de ganancia:

$$K_u = 31,517\frac{kW}{^\circ C} \times \frac{1,33\%}{1kW} \times \frac{1^\circ C}{1,43\%} = 29,31\frac{\%acción\ control\ u}{\%error\ e}$$

Respecto al concepto de Banda Proporcional, recordemos que por definición:

$$BP = \frac{100}{K_P}$$

por lo tanto, para el controlador que nos ocupa, la Banda Proporcional última (BP_u) será:

$$BP_u = \frac{100}{K_u} = \frac{100}{29,31} = 3,41$$

recordando que la salida del controlador proporcional P es: $u(t) = u_{EE} + \frac{100}{BP}e(t)$.

Controladores Realimentados de Estado: Caso Realimentación Proporcional

Este tema sólo se menciona aquí para no alargar demasiado este apartado. Sin embargo, se dan las siguientes referencias bibliográficas para que el lector interesado haga un estudio detallado de los controladores por realimentación de estado [Desoer and Vidayasagar, 1975; Henson and Seborg, 1997; Ogata, 1998; Marlin, 2000; Hangos et al., 2005].

La realimentación de estado implica que en vez de realimentar la salida medida \mathbf{y} , se realimentan directamente los estados \mathbf{x} . Eso implica que los estados son medidos o que algunos son medidos y otros estimados utilizando observadores de estado. Hay dos opciones: realimentación completa de estado y realimentación parcial de estado. El primer caso es más completo y brinda mejores resultados que el segundo. Sin embargo, es posible que uno o más estados no puedan medirse o estimarse en línea, por lo que no se puede realimentar el estado completo. En ese caso se realimentan los estados que se estén midiendo y estimando acertadamente, pudiéndose completar los lazos de realimentación con algunas salidas que contengan el efecto de los estados no medidos ni estimados [Botero y Alvarez, 2009]. En la realimentación de estado la ley de control tiene la siguiente forma genérica:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

con \mathbf{K} un vector de ganancias proporcionales al valor del estado. Esta forma genérica se hereda de los controladores óptimos lineales que asumen que siempre se puede trasladar el punto de operación al origen de coordenadas, con lo cual el error es equivalente al valor actual del estado $\mathbf{e} = \mathbf{x}$. La determinación de \mathbf{K} se puede realizar por diversos métodos, el más conocido de ellos implica una optimización de la respuesta del controlador [Mathworks, 2009]. Como ya se dijo, no se trata aquí en detalle este tema para no alargar más esta sección. Se sugiere revisar textos como [Morari and Zafriou, 1989; Ogunnaike and Ray, 1994; Lewis and Syrmos, 1995; Bronislaw, 2001].

Capítulo 7

DISEÑO SIMULTÁNEO DEL PROCESO Y SU CONTROL. Una propuesta.

Como se vió discutió previamente, en la Ingeniería de Procesos (IdeP) el tratamiento estático de los Procesos fue muy exitoso puesto que proporcionaba al ingeniero de diseño las herramientas para seleccionar (diseñar) equipos que operaban muy cerca del Punto de Operación (PO) que se planteaba como objetivo de diseño. Dichos métodos de diseño no hacían más que condensar en cartas, nomogramas y tablas de diseño, toda la experiencia y heurística de ingenieros expertos (de industria o académicos que realizaban investigación aplicada), en el diseño de diferentes equipos de proceso e incluso de trenes de producción completos. Tales herramientas de diseño fueron tan populares que se publicaron libros de texto dedicados únicamente a recoger esas experiencias y métodos heurísticos [Peters and Timerhaus, 1980; Walas, 1988]. Ese fue el origen de una tendencia en la enseñanza de la IdeP, cuyo criterio rector era que todo diseño bien concebido debe proyectarse para operar cerca de uno de los estados estacionarios que la literatura recomienda para tal tipo de proceso. Fue así como todo el diseño de procesos se volcó a garantizar las dimensiones de equipo y sus condiciones operativas, que permitan ciertos coeficientes de transferencia de cantidad de movimiento, masa y energía ¹. Eran justamente esos coeficientes, los requerimientos de diseño del proceso que aparecían tras definir las velocidades y concentraciones de producto deseadas (definidas con criterios económicos), y las velocidades y concentraciones de materias primas disponibles para la operación (definidas desde criterios económicos y técnicos de viabilidad del Proceso). Los diseños así obtenidos confiaban totalmente en el punto de operación (Estado Estacionario EE) que la literatura daba como factible para el proceso particular que se estaba diseñando. Tal procedimiento de diseño nada podía asegurar sobre la operación del proceso fuera de tal punto, ni tampoco contaba con herramientas que pronosticaran el comportamiento dinámico del proceso ante alteraciones del punto de operación por perturbaciones internas o externas.

Mientras esto ocurría en la IdeP, la teoría de control, que había surgido de manera formal con trabajos en aeronáutica y tenía como hito principal haber colocado un hombre en la luna, empezó a finales de los años 60 del siglo XX a ser tratada fuera de medios puramente académicos y científicos con una primera denominación de Ingeniería de Control (IdeC) [Beniger, 1986]. La IdeC logró avances significativos en el manejo del comportamiento dinámico de los procesos. Primero aparecieron conceptos asociados con la transición de un punto a otro en el espacio de estados del Proceso, para sistemas lineales [Kalman, 1960], conceptos que luego fueron extendidos a sistemas no lineales [Herman and Kremer, 1977; Sontag, 1998]. Con tales herramientas,

¹El principio básico para el diseño en Ingeniería de Procesos es: maximizar la transferencia de masa y energía, minimizando la transferencia de cantidad de movimiento.

fue posible explorar todas las trayectorias dinámicas de las variables de estado de un Proceso, siempre que se tuviera disponible un modelo dinámico del mismo. En tal sentido, el requerimiento de un modelo dinámico del Proceso profundizó la brecha entre la IdeC y la IdeP, brecha que se había generado con la inclusión del control como tema de estudio en muchos programas de ingeniería en el mundo. El primer congreso de la Federación Internacional de Control Automática (IFAC por sus siglas en inglés), celebrado en Moscú en 1960, inició un etapa de formalización y difusión de lo que la teoría de control podía aportar a la también naciente IdeP. A pesar de este emerger casi simultáneo de la IdeP y de la Ingeniería de Control (IdeC), sus caminos sólo empezaron a cruzarse a partir de los primeros trabajos que planteaban el diseño de procesos bajo las consideraciones dinámicas asociadas con la teoría de control [Douglas, 1988; Fisher et al., 1988; Straub and Grossmann, 1990; Brengel and Seider, 1992].

A través de los capítulos anteriores se mostraron las maneras en las que la Ingeniería tiene resuelta la tarea de Diseño para el Proceso y para su Sistema de Control, de manera individual y secuencial: diseño del Proceso y luego diseño del Sistema de Control. El diseño del Proceso se realiza mayoritariamente con información estática (a través del mapa de EE), que no considera los cambios voluntarios de punto de operación, bien sea programados en el tiempo (en línea o seguimiento de una referencia) o programados por cambio de producto (fuera de línea o regulación por programación de planta). La manera usual de robustecer el diseño es aplicar factores de sobredimensionado (en ocasiones hasta de 30%) e instalar equipos amortiguadores, que no son más que equipos que disminuyen los cambios en las entradas al proceso (*buffer equipments*). Desafortunadamente, cuando aparecen perturbaciones que los equipos amortiguadores no pueden tolerar, el Equipo así diseñado sale de operación a pesar de contar con un Sistema de Control. La aparición de tales perturbaciones se ha incrementado con la presión del mercado por reducción de costos de producción a través de materias primas de menos calidad o a incrementos en la capacidad productiva en el mismo tren de equipos. Además, la crisis energética de los años setenta del siglo XX obligó a un estudio detallado de las eficiencias energéticas de los procesos, que concluyó que los equipos amortiguadores y los sobrediseños en los equipos principales, son la mayor fuente de ineficiencias energéticas en los procesos [Aguirre, 2004]. Todo esto incita a buscar una manera integrada de diseñar el Proceso y su Sistema de Control.

7.1. Definiciones Básicas

Esta sección apareció en este texto al inicio de varios capítulos, con el fin de permitir al lector comprender completamente las discusiones posteriores. Sólo se incluyen las definiciones generales del tema del capítulo, dejando las definiciones específicas de temas puntuales directamente en la sección que corresponde al tema en cuestión.

Definición 7.1 Campo Escalar. Es un campo que representa la distribución espacial de una magnitud escalar. Matemáticamente un campo escalar es una función escalar de las n coordenadas que actúan como variables independientes.

Definición 7.2 Campo Vectorial. Es un campo que se produce cuando una función \mathbf{F} asigna a cada punto \mathbf{x} de dimensión n de un dominio dado en \mathbb{R}^n , un vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ de dimensión m , que por lo tanto existirá en \mathbb{C}^m .

Definición 7.3 Distribución. Una Distribución D es un campo o espacio vectorial que consiste de la expansión de algunos vectores \mathbf{f} sobre algún subconjunto abierto U de \mathbb{R}^n : $D = \text{span} \{\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_d(\mathbf{x})\}$.

Definición 7.4 Orden de una Matriz. El orden de una matriz es el número de filas y de columnas que tiene esa matriz. Si el número de filas de una matriz \mathbf{A} es m y el de columnas es n , se suele anotar $\mathbf{A}_{m \times n}$, leyéndose "matriz \mathbf{A} de orden m por n ".

Definición 7.5 Rango de una Matriz. *Es el número de vectores fila o de vectores columna, tomados de la matriz, que resultan linealmente independientes.*

7.2. Concepción del Diseño Simultáneo del Proceso y su Control (DSPyC)

En [Sakizlis et al., 2004] se presenta una excelente recapitulación de los avances, hasta ese año, en el tema y se hace una comparación entre los métodos propuestos. Allí se indica que existen dos grandes categorías de métodos para el DSPyC: *i*) Métodos de diseño para sistemas óptimos desde lo económico y lo operativo, y *ii*) Métodos de diseño por optimización dinámica. Trabajos más recientes han extendido algunos métodos de la primera categoría hasta diseño robusto basado en optimización en estado estacionario [Monningmann and Marquardt, 2005]. Otros trabajos han extendido métodos de la segunda categoría mediante la inclusión de la robustez sobre las restricciones, pero generando un problema Mixto-Entero de programación dinámica (MIDO por sus siglas en inglés) [Bellman, 1962; Ricardez-Sandoval et al., 2009]. Aunque estas extensiones recientes son más potentes, tienen el problema de la complejidad matemática. Adicionalmente, las pruebas de estabilidad se hacen más complejas, obligando a volver a la versión linealizada del modelo del Proceso para una prueba de estabilidad local, demasiado conservativa para algunos casos [Gerhard, 2008]. Entre los procedimientos publicados para el DSPyC, y que resultan de aplicación general a Procesos Químicos y Bioquímicos, existen todavía algunas limitaciones como:

1. Abordan solamente modelos de procesos en estado estable o modelos dinámicos simples usualmente lineales.
2. No tienen en cuenta la presencia de perturbaciones que varían con el tiempo.
3. No involucran la selección conjunta del mejor diseño del proceso y la mejor estructura de control.
4. Se desarrollan en el dominio de la frecuencia o en el de la transformada de Laplace, no en el dominio del tiempo.
5. Cuantifican la “Controlabilidad” del proceso únicamente con base en el efecto que tienen las variables manipuladas sobre las variables controladas.

Como se mostró en los capítulos previos, el panorama del diseño en Ingeniería de Procesos (IdeP) y del diseño en Ingeniería de Control (IdeC) está completo. La Síntesis y el Análisis son las tareas fundamentales del diseño tanto en IdeP como en la IdeC. Cuando se realiza la Síntesis de un Proceso o la Síntesis de su Sistema de Control, se presume que se cuenta con los intervalos permitidos para los valores de las entradas manipulables \mathbf{u} , los valores deseados para los estados \mathbf{x} y se sabe cuales serán las salidas \mathbf{y} disponibles a partir de medición. Con esta información, en la Síntesis del Proceso se obtiene un Sistema (estructura formada por Operaciones Unitarias que se ejecutan en Equipos, con sus respectivas conexiones moduladas por parámetros de interacción) que brinda el resultado esperado: mantener los estados \mathbf{x} (o las salidas \mathbf{y}) en su valor deseado. En cambio, cuando se realiza la Síntesis del Sistema de Control para un Proceso, se obtiene un Sistema (estructura de sensores, transmisores, controladores y actuadores) que garantiza el logro de los valores (fijos en control regulatorio o variables con el tiempo en control de seguimiento) de los estados \mathbf{x} (o de las salidas \mathbf{y}) del proceso, con al menos un criterio de desempeño para el Proceso controlado.

La metodología básica que se discute en este capítulo tiene que ver con el Diseño Simultáneo del Proceso y su Control (DSPyC). Se invita al lector a recordar la discusión del Capítulo 1 sobre Equipo, Proceso, Planta y Sustancia, puesto que con base en dicha discusión, en este capítulo sólo se aborda el Diseño de Equipo para un Proceso previamente sintetizado. Se asume que el Proceso al que pertenece el equipo ya tiene definida la secuencia de Operaciones Unitarias y el tipo y número de unidades de Equipo a utilizar para realizar tal

Proceso. De este modo, se excluye la Síntesis del Proceso o de toda una Planta en las tareas de DSPyC que aquí se discuten. Esto se hace con el fin de mantener la sencillez en la presentación, puesto que la Síntesis implica que el problema de Optimización se convierte en uno de Optimización Mixta Entera. Sin embargo, todo lo planteado aquí es aplicable. Al lector interesado se le remite a trabajos recientes que abordan el DSPyC de Procesos incluyendo la síntesis [Revollar et al., 2005; Francisco et al., 2010].

Operando con una Metodología de Diseño con Optimización Explícita (MDOE), el diseño del Equipo, tal y como lo establece la Ingeniería de Procesos, y el diseño de Sistemas de Control, tal y como lo establece la Ingeniería de Control, utilizan los mismo cuatro pasos enunciados previamente como estándar:

1. Determinar de forma precisa todos los requerimientos del Proceso asociados con el Equipo y los requerimientos del Sistema de Control para el Equipo a diseñar.
2. Listar y caracterizar completamente todas las opciones de Equipo y de Sistema de Control factibles como solución al Problema de Diseño (PdeD) simultáneo.
3. Definir un índice de calidad o Funcional de Costo (FC) que permita medir que tan ajustado a los objetivos del PdeD son un Equipo dado y un Sistema de Control especificado para dicho Equipo.
4. Optimizar los parámetros de diseño a través de la evaluación del FC establecido por el diseñador de acuerdo con su concepto del comportamiento deseado del Equipo y su Sistema de Control.

Como se vio, resulta inmediata la integración del Diseño de Equipo propio de la IdeP y el Diseño de Sistemas de Control propio de la IdeC. Bastó con unificar los dos PdeD en un PdeD único. Puesto que ambos PdeD pueden llevarse a cabo siguiendo la misma MDOE, es posible plantear de manera general el DSPyC como:

Definición 7.6 *Diseño Simultáneo del Proceso y su Control (DSPyC). Tarea que desarrolla simultáneamente el Diseño de un Equipo, Proceso o Planta (EPP) y el diseño del Sistema de Control (SC) para dicho EPP.*

Ante tal sencillez para integrar los dos diseños surge una pregunta: ¿Por qué hasta hace poco no existía un procedimiento que permitiera hacer DSPyC?. La respuesta tiene muchas facetas, que al evidenciarse brindan información para conformar un procedimiento para DSPyC mucho más robusto que los existentes. Por ejemplo, en el texto más reciente disponible (una recopilación de contribuciones más que un texto único consolidado) [Seferlis and Georgiadis, 2004], los múltiples autores presentan su visión particular del DSPyC con aplicaciones también puntuales, sin consolidar una metodología única robusta. Volviendo a la pregunta previa, en primer lugar, sigue siendo difícil definir analítica y cualitativamente lo que se desea de un sistema controlado en términos de Estabilidad, Desempeño y Controlabilidad. Previamente se mostraron las maneras de evaluar la Estabilidad de un Proceso controlado. Sin embargo, pareciera que la Estabilidad solamente determina dos regiones en el espacio de operación del Proceso: región estable y región inestable. Pero, saber la distancia óptima entre el punto de operación y el límite entre inestabilidad y estabilidad, tiene un alto componente subjetivo. Es por esto es por lo que se opera con criterios heurísticos que dan valores de optimalidad cuasi-universales para determinado tipo de Proceso [Ziegler and Nichols, 1942; López and Rovira, 1981]. Frente al desempeño del sistema controlado, son varios los criterios que se han propuesto, la mayoría de ellos heurísticos. Sólo la aproximación del Control Óptimo introduce elementos analíticos en tal definición, aunque con un funcional de costo que contiene matrices de ponderación que el diseñador ajusta a voluntad [Lewis and Syrmos, 1995]. Esto último incluye nuevamente elementos heurísticos en el procedimiento de diseño. Finalmente, al mencionar la controlabilidad como condición, debe resaltarse que su uso presenta dos vertientes: controlabilidad de estado y controlabilidad de salida. ¿Cuál utilizar y por qué?. A todo lo anterior, debe sumarse que no existe una manera matemática única y probada para el cálculo de estabilidad, desempeño y controlabilidad desde el modelo del proceso, bien porque la definición misma es deficiente o porque sólo existe para sistemas lineales, y desafortunadamente la mayoría de procesos son no lineales.

7.3. Una Ruta para el Diseño Simultáneo de Proceso y Control

La que sigue es una ruta general para realizar el DSPyC, toda basada en criterios e índices directamente calculables desde el modelo del Proceso. En resumen, puede decirse que la propuesta utiliza primero la Observabilidad como guía para la selección de sensores: tipo, número y ubicación. Luego es la Controlabilidad la que guía el pareamiento entre variables controladas (medidas o estimadas) y variables manipuladas, por lo tanto, permite la selección del grupo de variables manipuladas más adecuado. Es posible luego de este paso usar el concepto de Reversibilidad para guiar la selección de los actuadores: tipo, número y ubicación, para las variables manipuladas que la controlabilidad ayudó a determinar. El cuadro está casi listo cuando a través de la Estabilidad se define la factibilidad o no de un diseño en lazo cerrado: sólo se aceptan aquellos que son estables. Finalmente, el uso de un índice de Desempeño o Funcional de Costo dado permite ajustar los parámetros del Equipo y sintonizar los parámetros del Sistema de Control. En este trabajo sólo se aborda en detalle el uso de la Controlabilidad, la Estabilidad y el Desempeño, dejando la Observabilidad y la Reversibilidad como tema de investigaciones futuras. Se remite al lector interesado a consultar algunos textos que han propuesto esas propiedades como índices para el análisis de Sistemas de Control [Sontang, 1988; Aström and Hägglund, 1995, 2005; Gómez 2009]. Por eso, en los primeros apartados de esta sección se exponen y aclaran de manera muy breve, pero completa, las partes más relevantes de esas propuestas. En la Figura 7.1 se ve el Algoritmo a seguir para el DSPyC que será discutido en detalle durante su aplicación al ejemplo del Capítulo 8.

7.3.1. Observabilidad como Criterio de Selección para la Sensórica

Como ya se mencionó previamente, en el concepto de Controlabilidad de estado no se tiene en cuenta la salida \mathbf{y} del Proceso, solo su estado \mathbf{x} . Para complementar esto, el ingeniero húngaro Rudolf Emil Kalman [Kalman, 1960], desarrolló el concepto de Observabilidad, que relaciona las salidas con los estados. De acuerdo a su definición, un sistema es observable si el estado puede ser determinado a partir de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito. Según esto, el Sistema es completamente observable si cada variable de estado del sistema afecta a alguna de las salidas medibles.

Observabilidad para Sistemas Lineales

La que sigue es definición de la Observabilidad para sistemas lineales. Aunque en el Procedimiento para DSPyC dado previamente, la Observabilidad se calcula sobre el modelo no lineal del proceso, se verá en el ejemplo (Capítulo 8) que se puede usar la Observabilidad del sistema linealizado sin mucha pérdida de información.

Definición 7.7 Observabilidad de Estado para Sistemas Lineales. *Dado el sistema lineal de orden n :*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}; \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

se dice que es observable si y sólo si el rango r_{ob} de la matriz de observabilidad \mathbf{O}_b es igual al orden n del sistema. La matriz de observabilidad \mathbf{O}_b se define a partir de las matrices \mathbf{A}, \mathbf{B} y \mathbf{C} según: $\mathbf{O}_b = [\mathbf{C} \quad \mathbf{C}\mathbf{A} \quad \dots \quad \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$.

De lo anterior, es claro que la Observabilidad complementa la Controlabilidad al relacionar los estados y las salidas a través de la matriz \mathbf{C} de la linealización del modelo del Proceso. Debe destacarse que una aplicación importante de la matriz de Observabilidad es la determinación de la posibilidad de construir un observador de estado para aquellos estados no medidos pero observables del proceso.

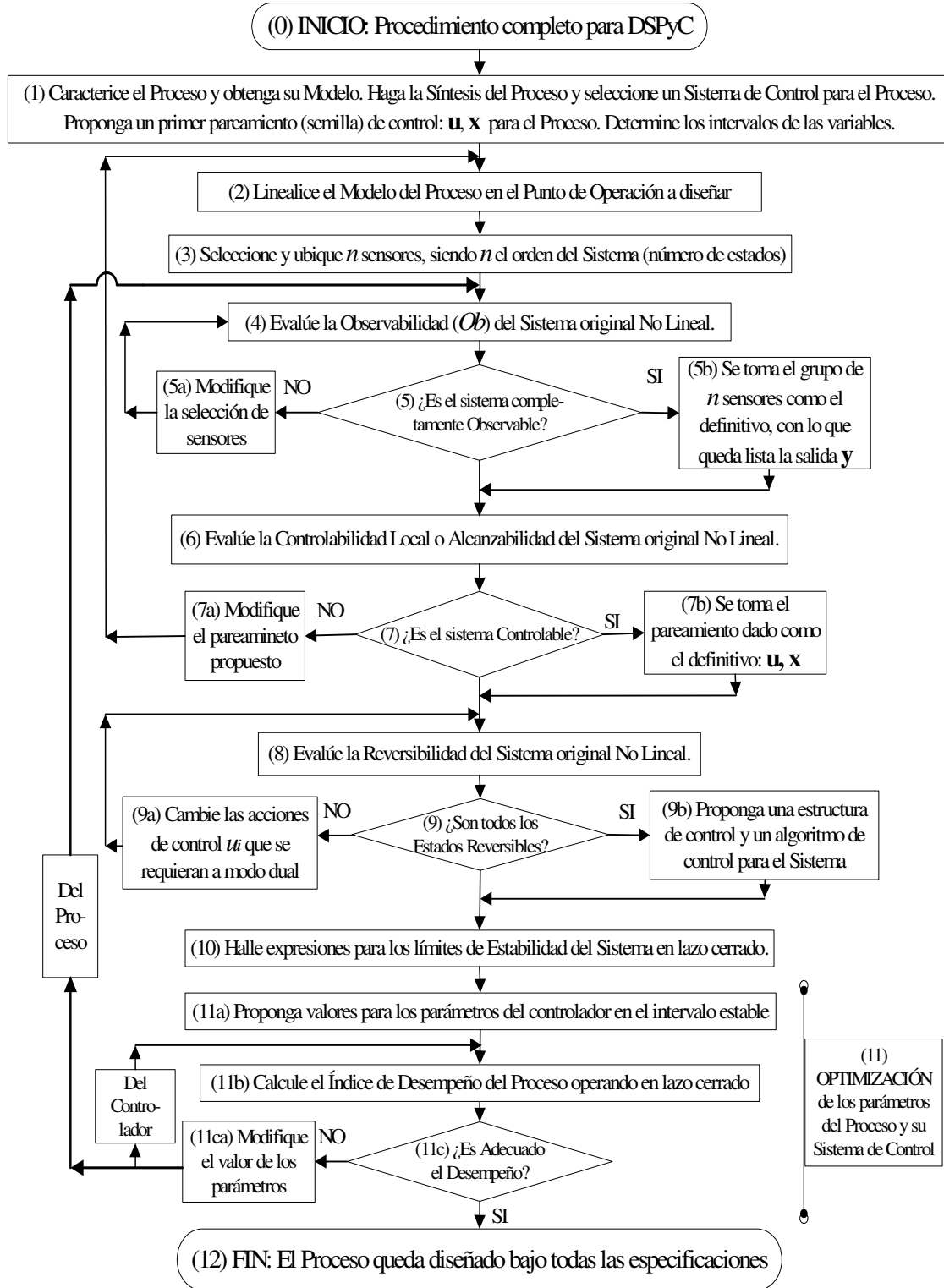


Figura 7.1: Algoritmo general propuesto para el Diseño Simultáneo de Proceso y Control.

Observabilidad para Sistemas No Lineales

Siguiendo el mismo sentido de la definición de Observabilidad, diversos autores han logrado extender el concepto a Sistemas No Lineales, pero con la restricción de probar Observabilidad Local alrededor del punto de operación. En [Nijmeijer and Van der Schaft, 1990; Gu, 1995] se define el concepto de Espacio de Observación \mathbf{S}_O , tomando el siguiente Sistema no Lineal afín con la entrada en forma canónica y utilizando el concepto de Derivada de Lie:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{u}_i \mathbf{g}_i(\mathbf{x}); \quad \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (7.1)$$

Definición 7.8 Observabilidad Local. El estado \mathbf{x} es Localmente Observable alrededor de $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}$ si es posible determinar el estado total \mathbf{x} del proceso para puntos alrededor de \mathbf{x}^* , dadas las entradas \mathbf{u} y salidas \mathbf{y} del Sistema en un intervalo de tiempo finito y dado un modelo del Sistema en el espacio de estado.

Definición 7.9 Derivada de Lie. Es la derivada de una función suave (continuamente diferenciable) $\lambda(\mathbf{x})$ a lo largo de un campo vectorial suave \mathbf{f} . Esa derivada direccional del campo escalar $\lambda(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, a lo largo de la dirección de un campo vectorial n -dimensional $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, se define como: $L_{\mathbf{f}}\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Definición 7.10 Derivada de Lie Recursiva $L_{\mathbf{f}}^n \lambda$. Cuando se debe aplicar recursivamente la Derivada de Lie, se puede representar abreviadamente como $L_{\mathbf{f}}^n \lambda$, que significa: $L_{\mathbf{f}}^0 \lambda = \lambda$; $L_{\mathbf{f}}^1 \lambda = \frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$;

$$L_{\mathbf{f}}^2 \lambda = L_{\mathbf{f}}^1 (L_{\mathbf{f}}^1 \lambda) = L_{\mathbf{f}}^1 \left(\frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right) = \frac{\partial \left[\frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right]}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}), \dots, \text{ etc.}$$

Definición 7.11 Espacio de Observación \mathbf{S}_O de un Sistema Dinámico. Es el espacio vectorial que generan todas las derivadas de Lie, hasta $(n-1)$, de la función de salida $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ de un Sistema expresado en forma afín en el espacio de estado, tal como lo indica la Ecuación 7.1, respecto al campo vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. De manera abreviada se escribe: $\mathbf{S}_O = \text{gen}\{L_{\mathbf{f}}^0 \lambda; L_{\mathbf{f}}^1 \lambda; L_{\mathbf{f}}^2 \lambda; \dots; L_{\mathbf{f}}^{(n-1)} \lambda\}$.

Definición 7.12 Distribución de Observabilidad $\Delta_{\mathbf{S}_O}$ de un Sistema Dinámico. Es la Distribución del Espacio de Observación, que resulta ser la colección de los gradientes de cada componente del Espacio de Observación \mathbf{S}_O respecto a las variables de estado \mathbf{x} , que se expresa como: $\Delta_{\mathbf{S}_O} = \text{gen}\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \mid \phi \in \mathbf{S}_O \right\}$. En esta expresión, *gen* es la operación de generación (*span* en inglés) de un Espacio desde unas componentes dadas.

Contando con estas definiciones es posible definir una prueba de observabilidad local para sistemas no lineales:

Definición 7.13 Criterio de Observabilidad Local. Un sistema no lineal afín con la entrada como el dado en la Ecuación, es Localmente Observable si la dimensión de su distribución de observabilidad $\Delta_{\mathbf{S}_O}$ alrededor de \mathbf{x}^* es igual al orden del sistema: $\dim(\Delta_{\mathbf{S}_O}) = n = \text{Orden del Sistema} = \text{Número de estados del sistema}$.

En [Henson and Seborg, 1997] se deduce una matriz análoga a la matriz de Observabilidad de sistemas lineales, pero esta vez para sistemas No Lineales. Tal matriz no es más que tomar los campos vectoriales que generan la Distribución de Observabilidad $\Delta_{\mathbf{S}_O}$ y ubicarlos como las filas de la que ellos denominan Matriz de Observabilidad Local Débil alrededor de \mathbf{x}^* , que usando la nomenclatura seguida hasta ahora, sera: $\mathbf{W}_O(\mathbf{x}^*) = [\text{adj}_{\mathbf{f}}^0 \mathbf{g}(\mathbf{x}^*), \text{adj}_{\mathbf{f}}^1 \mathbf{g}(\mathbf{x}^*), \dots, \text{adj}_{\mathbf{f}}^{n-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)]$. Con esto, la $\dim[\Delta_{\mathbf{S}_O}(\mathbf{x}^*)]$ no es más que el rango de $\mathbf{W}_O(\mathbf{x}^*)$.

Una particularidad de esta prueba es que puede utilizarse especificando valores para las entradas de \mathbf{x}^* , o sin especificar las entradas de \mathbf{x}^* . En este trabajo se utilizará la segunda forma, de modo que se deduzcan expresiones matemáticas en función de \mathbf{x} que permitan calcular los puntos en el espacio \mathbf{X} en los que el sistema no es Localmente Observable.

Ejemplo 7.1 Tomado de [Gu, 1995]: Determine la observabilidad del sistema no lineal dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\text{sen}(x_2)\end{aligned}$$

para las siguientes dos opciones de mediciones: i) Se mide sólo el estado x_1 , por lo tanto: $y = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = [x_1 \ 0]^T$ y ii) Se mide sólo el estado x_2 , por lo tanto: $y = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = [0 \ x_2]^T$.

Solución: Primero expresemos el sistema en forma matricial para entender mejor las operaciones involucradas en el cálculo de la Observabilidad Local:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\text{sen}(x_2) \end{bmatrix} \\ y &= \mathbf{h}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Primera Opción de medida: $y = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = [x_1 \ 0]^T = x_1$. El Espacio de Observación \mathbf{S}_O del Sistema en este caso tendrá dos componentes puesto que la aplicación recursiva de la Derivada de Lie va hasta $(n-1) = 2-1 = 1$:

$$\mathbf{S}_O = \text{gen}\{L_{\mathbf{f}}^0 \mathbf{h}(\mathbf{x}), L_{\mathbf{f}}^1 \mathbf{h}(\mathbf{x})\} = \text{gen}\{\mathbf{h}(\mathbf{x}), L_{\mathbf{f}} \mathbf{h}(\mathbf{x})\} = \text{gen}\{[x_1 \ 0]^T, L_{\mathbf{f}} \mathbf{h}(\mathbf{x})\}$$

Para proseguir, se calcula la Derivada de Lie indicada:

$$L_{\mathbf{f}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_2 \\ -\text{sen}(x_2) \end{bmatrix} = x_2$$

y por lo tanto, continuando con el cálculo previo:

$$\mathbf{S}_O = \text{gen}\{[x_1 \ 0]^T, x_2\}$$

Ahora, se debe calcular la Distribución de Observabilidad:

$$\Delta_{\mathbf{S}_O} = \text{gen} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \mid \phi \in \mathbf{S}_O \right\} = \text{gen} \left\{ \frac{\partial [x_1 \ 0]^T}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial x_2}{\partial \mathbf{x}} \right\} = \text{gen} \{[1 \ 0], [0 \ 1]\}$$

Finalmente, para chequear la dimensión de esta Distribución: $\dim(\Delta_{\mathbf{S}_O}) = 2$, se utiliza la matriz $\mathbf{W}_O = [\frac{\partial \phi}{\partial x_1}; \frac{\partial \phi}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial \phi}{\partial x_{(n-1)}}]$, que en este caso es la matriz:

$$\mathbf{W}_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que evidentemente tiene el orden del Sistema $n = 2$, con lo cual se demuestra la Observabilidad de este Sistema bajo la medición estipulada, en cualquier punto del espacio, puesto que \mathbf{W}_O no resultó función de los estados.

Segunda Opción de medida: $y = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = [0 \ x_2]^T = x_2$. El Espacio de Observación \mathbf{S}_O del Sistema en este caso será:

$$\mathbf{S}_O = \text{gen}\{\mathbf{h}(\mathbf{x}), L_{\mathbf{f}}\mathbf{h}(\mathbf{x})\} = \text{gen}\{[0 \ x_2]^T, L_{\mathbf{f}}\mathbf{h}(\mathbf{x})\}$$

Para proseguir, se calcula la Derivada de Lie indicada:

$$L_{\mathbf{f}}\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_2 \\ -\text{sen}(x_2) \end{bmatrix} = -\text{sen}(x_2)$$

y por lo tanto, continuando con el cálculo previo:

$$\mathbf{S}_O = \text{gen}\{[0 \ x_2]^T, -\text{sen}(x_2)\}$$

Ahora, se debe calcular la Distribución de Observabilidad:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{S}_O} &= \text{gen} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \mid \phi \in \mathbf{S}_O \right\} = \text{gen} \left\{ \frac{\partial [0 \ x_2]^T}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial [-\text{sen}(x_2)]}{\partial \mathbf{x}} \right\} \\ &= \text{gen} \{ [0 \ 1], [0 \ -\cos(x_2)] \} \end{aligned}$$

Finalmente, se chequea la dimensión de esta Distribución: $\dim(\Delta_{\mathbf{S}_O}) = 1$, se utiliza la matriz $\mathbf{W}_O = [\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_1}, \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_2}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_{(n-1)}}]$, que en este caso es la matriz:

$$\mathbf{W}_O = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\cos(x_2) \end{bmatrix}$$

que evidentemente es de orden 1, diferente al orden 2 del Sistema. Por lo tanto, el proceso no es observable bajo esta configuración de sensores.

Como cierre a esta sección, es importante recalcar que la prueba de Observabilidad para Sistemas Lineales puede aplicarse a Sistemas No Lineales, pero considerando que es posible que a pesar de que el Sistema sea Observable desde su linealización, al alejarse del punto alrededor del cual se linealizó se pierda la propiedad de Observabilidad. Esto va en la misma línea de la Observabilidad Local que se le prueba a los sistemas no lineales, con la diferencia que en esta última, la dimensión de la Distribución de Observabilidad permite calcular los puntos alrededor del estado que se analiza en los cuales se pierde la propiedad.

Observabilidad y selección-ubicación de los sensores

Contando con las herramientas conceptuales y operativas para calcular la observabilidad de estado de un Proceso, veamos como usar tal conocimiento para determinar el tipo, número y ubicación de los sensores para un Proceso dado. Esto es una primera aproximación que debe validarse con más trabajos de investigación.

Definición 7.14 Observador de estado. *Cualquier estructura matemática que permita estimar (u observar) una o más de las variables de estado (\mathbf{x}) de un Proceso a partir de las mediciones disponibles en las salidas (\mathbf{y}) del mismo.*

Rudolf E. Kalman [Kalman, 1960b] desarrolló un observador de estados que lleva su nombre: Filtro de Kalman, el cual estima los estados exclusivamente a partir de datos de las salidas. Con el paso de los años

se han desarrollado otros estimadores basados en el filtro de Kalman, pero que incluyen mediciones de las entradas, estos se conocen como filtros de Kalman extendidos. Véase [Botero y Alvarez, 2009] para una discusión más amplia de este tema. Es, por todo lo anterior, evidente que si se especifica un grupo de sensores (variables de salida \mathbf{y}), queda fija la matriz \mathbf{C} . Como ya las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} están fijas también desde el diseño del Proceso, puede utilizarse la \mathbf{Ob} para determinar si tal grupo de sensores si darán la información completa del estado del Proceso. En caso afirmativo, se deja tal grupo de sensores. En caso contrario, se procede a probar otras variables medidas, hasta que se logre la Observabilidad completa del Proceso.

Para realizar DSPyC, el número y ubicación de los medidores y sensores de las variables del proceso (variables de estado), es el primer aspectos a considerar. Se debe usar un número suficiente de sensores para que todas las variables de estado queden medidas. Cuando algunas no son medibles, se deben procurar otras mediciones de modo que el Sistema sea observable. En general, la ubicación de todos los sensores debe ser aquella que produzca las señales con el menor ruido posible, con mayor contenido informativo y con el menor retardo por transporte. Aunque algunos aspectos de los mencionados son directamente tecnológicos, es posible utilizar la Observabilidad como guía para la selección de las variables a medir.

Contando con el modelo del proceso, que incluso podría usarse en su forma linealizada, se procede a formular la Obsevabilidad en el punto de operación o en el conjunto de puntos de operación esperados. Con esto, es posible calcular la Observabilidad en cada punto y con ese dato determinar el tipo, número y ubicación de sensores que hagan totalmente observable el estado del proceso. La Observabilidad calculada con el modelo linealizado puede presentar alguna pérdida de información, como se mostrará más adelante en el ejemplo. Es posible que el conjunto de sensores seleccionados para obtener observabilidad completa del estado en un grupo dado de puntos de operación [Sumana and Venkateswarlu, 2009], produzca un proceso no observable en otro grupo de puntos de operación. Tal circunstancia obliga a buscar un conjunto de sensores que garantice observabilidad en todos los puntos de operación, y en el caso extremo, a tener dos o más grupos de sensores, cuya información se toma selectivamente dependiente del punto de operación actual del proceso, a la manera de integración sensorial usada en robótica [Nandhakumar and Malik, 1995].

7.3.2. Reversibilidad como Criterio para Seleccionar los Actuadores

El concepto de reversibilidad ha sido estudiado en varias áreas como la física, los procesos estocásticos y la termodinámica. Sin embargo, en esta última área es donde quizás ha habido un mayor desarrollo, especialmente con los trabajo de Illia Prigogine [Prigogine, 1996] sobre sistemas fuera del equilibrio. El concepto de reversibilidad en termodinámica se encuentra estrechamente relacionado con la segunda ley de la termodinámica, la cual tiene varias interpretaciones, ocasionando a su vez diferentes interpretaciones del concepto de reversibilidad. En cuanto a los sistemas dinámicos en general, en algunos libros dedicados al tema, especialmente los relacionados con los comportamientos caóticos, también se utiliza el término de reversibilidad. En sistemas dinámicos, el concepto de reversibilidad es equivalente al de sistemas invertibles en el tiempo, para los que es posible considerar instantes de tiempo negativos [Birkhoff, 1991]. Un sistema dinámico controlado para el que un estado actual pueda depender de más de un estado anterior, resulta reversible si existen acciones de control que permitan arbitrariamente retornar el estado del proceso a cualquiera de dos o más estados anteriores.

En el marco de la teoría de control ha existido poco interés por la propiedad de reversibilidad. En su libro “Mathematical control theory”, Eduardo Sontag [Sontag, 1998] define la reversibilidad débil y la reversibilidad fuerte, conceptos que se corresponden con la primera interpretación del concepto de reversibilidad dada en termodinámica. De igual forma, las definiciones dadas allí se corresponden con las definiciones de recuperabilidad del estado inicial y de reversibilidad indicados en [Haddad et al., 2005].

Para definir la reversibilidad en el marco de la teoría de control, considérese el siguiente sistema discreto:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \quad (7.2)$$

en el que \mathbf{x} es vector de el estado del sistema y \mathbf{u} es el vector de acciones de control. El sistema está sujeto a restricciones en la acción de control y en los estados: $\mathbf{x}(k) \in X \subset \mathbf{R}^n$; $\mathbf{u}(k) \in U \subset \mathbf{R}^m$. El conjunto U es compacto (un conjunto es compacto, si y sólo si, es un conjunto cerrado y acotado), mientras que el conjunto X es cerrado (en un conjunto abierto no se incluyen los extremos en el dominio, en el cerrado si). La función vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$ de la dinámica del sistema está únicamente definido sobre $X \times U$. Todos los estados son medibles y se asume que el modelo no tiene incertidumbre.

Definición 7.15 Sistema Débilmente Reversible. El Sistema dinámico dado por la ec. 7.2 es Débilmente Reversible si para cada $\mathbf{x}(k)$ se cumple que: i) $\mathbf{x}(k)$ puede ser alcanzado desde $\mathbf{x}(k)$, ii) Si $\mathbf{x}(k+N)$ puede ser alcanzado desde $\mathbf{x}(k)$, entonces $\mathbf{x}(k)$ puede ser alcanzado desde $\mathbf{x}(k+N)$, iii) $\mathbf{x}(k+p)$ puede ser alcanzado desde $\mathbf{x}(k)$ y $\mathbf{x}(k+N)$ puede ser alcanzado desde $\mathbf{x}(k+p)$, entonces $\mathbf{x}(k+N)$ puede ser alcanzado desde $\mathbf{x}(k)$.

Definición 7.16 Sistema Fuertemente Reversible. El Sistema dinámico dado por la ec. 7.2 es Fuertemente Reversible si para cada $\mathbf{x}(k)$ y cada secuencia de acciones de control $\Pi(i)_k^N \in U^N = [u^i(k+N-2), u^i(k+N-1), \dots, u^i(k)]$ admisible para $\mathbf{x}(k)$, existe alguna secuencia de acciones de control admisible para $\mathbf{x}(k)$: $\Pi(j)_k^N \in U^N = [u^j(k+N-2), u^j(k+N-1), \dots, u^j(k)]$, tal que $\mathbf{f}_{u^i(k) \circ u^i(k+N-1) \circ \dots \circ u^i(k+N-2)}(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}(k+N)$ y $\mathbf{f}_{u^j(k+N-1) \circ u^j(k+N-2) \circ \dots \circ u^j(k)}(\mathbf{x}(k+N)) = \mathbf{x}(k)$.

Como se evidencia, la Reversibilidad débil no exige que la secuencia de acciones de control para revertir sea la misma que se utilizó para avanzar, condición de la Reversibilidad fuerte como se puede apreciar en la Figura 7.2. Por eso, en este trabajo se usará de Debilidad Débil. Al lector interesado en profundizar en este tema se le invita a consulta [Sontag, 1998; Gómez, 2009].

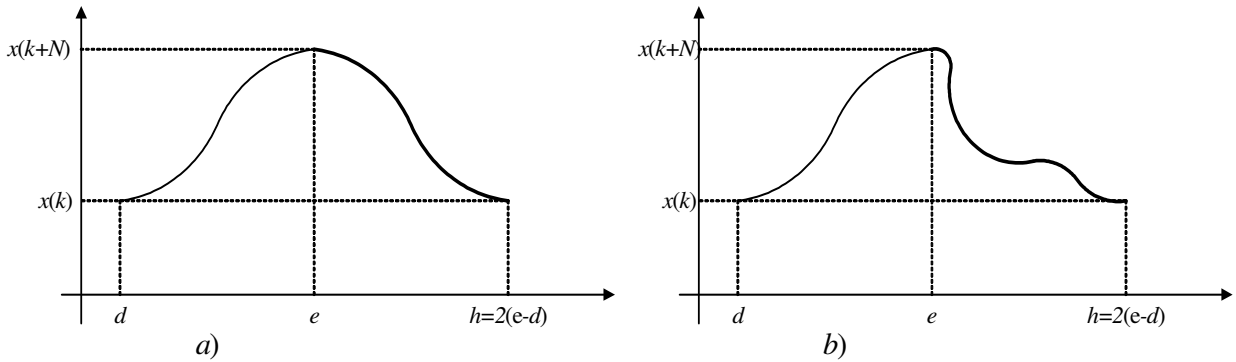


Figura 7.2: Dos tipos de reversibilidad: a) Reversibilidad fuerte y b) Reversibilidad débil.

En el procedimiento que se propone en este trabajo para el Diseño Simultáneo del Proceso y su Control (DSPyC), se considerará la Reversibilidad Débil pero desde el punto de vista práctico, lo que implica que la acción de control está acotada. Esto hace que la definición original de Reversibilidad Débil se modifique para considerar que las propiedades dadas allí se cumple para algunos $\mathbf{x}(k)$ del espacio de estado.

Definición 7.17 Criterio de Reversibilidad Práctica Débil (RPD). Un Sistema será Débilmente Reversible en un sentido Práctico si existen valores de $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ que produzcan cambios positivos y negativos del estado \mathbf{x} con el tiempo: $\exists \mathbf{u}^P \in \mathbf{U}$ tal que $\frac{d\mathbf{x}}{dt} > 0$ y $\exists \mathbf{u}^N \in \mathbf{U}$ tal que $\frac{d\mathbf{x}}{dt} < 0$.

7.3.3. Controlabilidad como Criterio para el Pareamiento de Variables

La determinación de la Estructura de un Sistema de Control no es más que la postulación de un pareamiento entre entradas manipuladas (acciones de control) y salidas controladas (variables de control u objetivos de control). Dicha tarea puede realizarse mediante experticia, sin considerar que un pareamiento dado puede afectar la Controlabilidad del Proceso. O por el contrario, se puede hacer el pareamiento con la idea de que un buen pareamiento es aquel que garantiza un Proceso controlable. Desde principios de los años 80 del siglo XX, algunos trabajos se han centrado en cómo abordar el problema del DSPyC. Morari y Stephanopoulos en 1980 [Morari and Stephanopoulos, 1980] presentaron uno de los primeros trabajos que consideró el tema de controlabilidad en Procesos químicos. Ellos discuten la relevancia de la controlabilidad en la Síntesis de estructuras de control, pero sostienen que el término controlabilidad debe ir más allá de la definición dada en [Kalman, 1960]. Por ejemplo, la definición de Kalman no considera el acotamiento de las acciones de control, ni permite deducir cómo debe hacerse el control del proceso. Este artículo fue escrito por dos de los más reconocidos autores del área del control de Procesos químicos. Obviamente, su punto de vista frente a la inutilidad de la controlabilidad de estado ha guiado los trabajos subsiguientes hacia el control entrada-salida y no al control de los estados del Proceso. Por tal razón, hoy la mayoría de la bibliografía en Ingeniería Química que aborda el concepto de controlabilidad lo hace desde esta perspectiva entrada-salida.

Por su parte, la Controlabilidad de estado brinda un criterio necesario, pero no suficiente, para determinar un pareamiento entre variables controladas (estados \mathbf{x}) y variables manipuladas (entradas \mathbf{u}). Se dice que la Controlabilidad es condición necesaria puesto que el estado estacionario debe ser localmente controlable pero dicha condición no es suficiente ya que no considera otras implicaciones dinámicas que pueden diferenciar dos pareamientos con Controlabilidad local garantizada. Como ya se discutió en el Capítulo dedicado al diseño de sistemas de control, existen otras condiciones deseables para un pareamiento $u_i : x_i$. Además, en Procesos por Lotes (PpL), en los que pueden aparecer estados irreversibles, la Controlabilidad debe complementarse con el concepto de Reversibilidad [Gómez, 2009].

En los dos trabajos pioneros de John Ziegler y Nathaniel Nichols [Ziegle and Nichols, 1942, 1943], se menciona el concepto de controlabilidad, llegando a proponer la siguiente definición informal: “Habilidad de un proceso para lograr y mantener un punto de equilibrio dado”. Tal definición poco ayuda a la hora de pensar en un uso del concepto para guiar el diseño de un proceso controlado. Años mas tarde, Rudolf Kalman en su trabajo “On the General Theory of Control Systems” definió el concepto de controlabilidad para un sistema lineal invariante en el tiempo [Kalman, 1960]. Esta es la primera definición estricta del concepto Controlabilidad, haciendo referencia a la “Habilidad de llevar el sistema desde un estado inicial hasta un estado final en un tiempo finito”. Con el concepto de Kalman, muchos teóricos han utilizado el término Controlabilidad para referirse a la controlabilidad de estado. Hay una marcada diferencia entre estas dos definiciones: Ziegler y Nichols trabajaban en el espacio Entrada-Salida (ES), refiriéndose a una Controlabilidad de Salida (CdeS). En cambio, Kalman aborda el asunto en el espacio de Estado o espacio Entrada-Estados-Salida (EES), con lo cual define una Controlabilidad de Estado (CdeE). Tal diferencia marcó una separación nociva para la discusión y uso de la Controlabilidad en la teoría de control y en el diseño de procesos. La CdeS no puede cuantificarse completamente sólo desde el modelo del proceso, resultando más un índice basado en el comportamiento de la salida del proceso en lazo cerrado. Por lo tanto, requiere simulación o pruebas de control para su valoración, con un controlador ya diseñado, como se evidencia de los índices de CdeS mencionados más arriba. Además, la CdeS hereda el defecto de cualquier análisis en el espacio ES: el análisis nada dice del comportamiento de los estados del proceso. En cambio, la CdeE dada por Kalman presenta una manera matemática de calcularse desde el modelo del proceso en el espacio EES, sin necesidad de recurrir a simulaciones o pruebas del proceso con el controlador. Es decir, calcula un índice de controlabilidad que resulta independiente del tipo de controlador que se utilice.

La diferencia antes mencionada entre las dos definiciones de controlabilidad, fue ya evidente en [Rosenbrock, 1970], quien anotó que la mayoría de las plantas industriales son controladas satisfactoriamente por realimentación de la salida, aunque no sean controlables de estado. Tal vez con la idea de evitar confusiones, en [Morari, 1983] se introdujo el término Resiliencia Dinámica, aunque en [Skogestad and Postlethwaite, 1996]

se critica la relación casi nula de este concepto con el control del proceso, por lo que mejor lo denominan Controlabilidad Entrada-Salida (en adelante CES, aunque ellos proponen que sea llamado Controlabilidad a secas, lo que sigue generando la confusión con la CdeE). En [Luyben and Floudas, 1997] se utilizan como índices de controlabilidad el Análisis de Valores Singulares (SVA), la matriz de ganancia relativa (*Relative Gain Array* RGA) y el Número de Condición (*Condition Number* CN). Luego, en [Gross et al., 1998] utilizan la RGA y el SVA mientras que en [Hopkins et al., 1998] postulan el uso de la controlabilidad estructurada de salida (*Output Structural Controllability* OSC). En [Havre, 1998] se analizó la aplicabilidad de tal CES para hacer diseño de estructuras de control. En [Vinson and Georgakis, 2000] se propone el Índice de Controlabilidad de la Salida (Output Controlability Index - OCI), pero más adelante Xiong y colaboradores [Xiong et al., 2005] proponen y usan la ERGA, una extensión a la RGA tradicional. En todos estos casos y en trabajos posteriores, la controlabilidad del Proceso se cuantifica sólo con los efectos de las variables manipuladas sobre las variables de salida. Para corregir esto, se han empezado a utilizar medidas de la Controlabilidad de Estado, lo que representa un cambio de paradigma que apunta a lograr mejoras en el control del Proceso. En [Ochoa, 2005] se definió la Controlabilidad Local Práctica (CLP) a partir de la CdeE y se propuso su utilización en una metodología de DSPyC. Buscando un puente entre CdeE y CdeS, en [Alvarez, 2008] se propuso el uso de la matriz de Hankel (\mathbf{H}) dentro de una metodología de diseño total de planta, como indicadora de la CES. Puesto que \mathbf{H} está dada por el producto de las matrices de Observabilidad y Controlabilidad, resulta ser una representación dinámica del sistema, a través la cual se obtiene la secuencia de respuestas de salida ante una secuencia dada de entradas. La matriz de Hankel actúa como modelo del sistema y tras un análisis de los valores singulares de \mathbf{H} , se tiene un criterio para formar lazos de control realimentados con CES garantizada para toda la planta.

En este trabajo sólo se considera la CdeE, bien sea como CLP [Ochoa, 2005] o en la forma de CES a través de la matriz de Hankel [Alvarez, 2008]. Ya en [Van de Wal and De Jager, 2001] recomiendan el uso de índices basados en Observabilidad y Controlabilidad de estado por su mejor justificación teórica frente a los métodos basados en CdeS. Esto era de esperarse, puesto que la CdeS no tienen una definición clara, además, los métodos basados en CdeS se basan en diferentes índices *ad-hoc*, contrario al criterio binario de la CdeE o la CES [Alvarez, 2008].

Controlabilidad de Estado (CdeE) para Sistemas Lineales

Según la definición dada por Kalman en 1960, un sistema es controlable si existen acciones de control capaces de llevar el sistema desde un estado inicial hacia un estado final en un tiempo finito. Esta definición fue dada para sistemas lineales de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx}\end{aligned}\tag{7.3}$$

con $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ el vector que contiene los estados del sistema, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$ el vector de las entradas manipuladas y $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^l$ el vector que contiene a las salidas medidas.

Definición 7.18 Controlabilidad de Estado para Sistemas Lineales [Kalman, 1960]. *Un estado de una planta se dice que es controlable si existe una señal de control $\mathbf{u}_1(t)$ definida sobre un intervalo finito $0 \leq t \leq t_1$ tal que $\Phi(t_1; \mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$, siendo $\Phi(t_1; \mathbf{x}, 0)$ la función de transición de estado de la planta que representa la transición desde el estado inicial $\mathbf{x}_0(t=0) = \mathbf{x}$ hasta el estado final $\mathbf{x}_1(t_1) = \Phi(t_1; \mathbf{x}, 0)$, con dicho estado final un estado de equilibrio en el origen $\mathbf{0}$. Si cada estado es controlable, se dice que la planta es completamente controlable.*

Definición 7.19 Matriz de Controlabilidad de Estado para Sistemas Lineales. *La matriz de Controlabilidad \mathbf{C}_0 para el Sistema Lineal de orden n descrito por la ecuación 7.3, se construye a partir de las*

matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} según: $\mathbf{C}_o = [\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$.

Definición 7.20 Criterio de Controlabilidad - Condición de Rango. *El Sistema Lineal de orden n descrito por la ecuación 7.3, se dice que es controlable si y sólo si el rango r_{C_o} de la matriz de controlabilidad \mathbf{C}_o es igual al orden n del sistema. Si el Sistema no es controlable, se dice que la diferencia $(n - r_{C_o})$ corresponde al número de modos dinámicos o dinámicas no controlables del Sistema.*

Definición 7.21 Alcanzabilidad. *Un sistema lineal es alcanzable, si para todo $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{R}^n$, existe una señal de control \mathbf{u} que lleva el sistema del estado inicial \mathbf{x}_1 al estado final \mathbf{x}_2 en un tiempo finito.*

La alcanzabilidad es la habilidad de alcanzar cualquier estado final desde un estado inicial dado, mientras que la controlabilidad se puede interpretar como la habilidad que tiene el sistema para alcanzar el origen, único equilibrio de un sistema lineal, desde un estado inicial arbitrario. La controlabilidad también puede interpretarse como la posibilidad de que un estado sea alcanzable y que el estado alcanzado sea un punto de equilibrio del sistema forzado. En los Sistemas Lineales, Controlabilidad y Alcanzabilidad son lo mismo.

También se evidencia de las definiciones previas, que la CdeE y la Alcanzabilidad así definidas sólo tienen en cuenta los estados \mathbf{x} del sistema en relación con las entradas \mathbf{u} , sin considerar lo que le ocurre a las salidas \mathbf{y} . Además, la definición de CdeE asume que la acción de control no es acotada, lo que no se cumple en la práctica puesto que todas las acciones de control tienen energía limitada. Como ya se dijo, en [Ochoa, 2005] se define la CLP teniendo en cuenta el acotamiento de las acciones de control como restricción natural del proceso. La otra desventaja es que la CdeE, pese a ser un concepto riguroso, no es capaz de medir o cuantificar la controlabilidad de los estados, limitándose a evaluarla en un sentido binario.

Controlabilidad de Estado (CdeE) para Sistemas No Lineales

El estudio de la controlabilidad para sistemas no lineales se inicia con [Sussmann and Jurdjevic, 1972] y [Hermann and Krener, 1977], consolidándose en los trabajos de [Isidori, 1989] y [Nijmeijer and Van der Schaft, 1990]. Allí se plantea un análogo no lineal del criterio de la condición de rango para la controlabilidad propuesta por Kalman para sistemas lineales. Sin embargo, en el caso de los sistemas no lineales la verificación de la controlabilidad es más compleja que en el caso lineal [Sontag, 1998] y requiere incorporar otros conceptos como el de accesibilidad. Además, debe diferenciarse la Controlabilidad global y local y la Alcanzabilidad local y global. Todos estos autores basan su discusión en el sistema no lineal afín con la entrada descrito por la Ecuación 7.1.

Definición 7.22 Controlabilidad Local - Alcanzabilidad Local. *El estado \mathbf{x}^* es Localmente Alcanzable alrededor de $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}$ desde un estado inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$, con \mathbf{x}_0 perteneciente a la vecindad de \mathbf{x}^* , si en un tiempo finito t_f usando un conjunto $\mathbf{u}_{t_f} = \{\mathbf{u}_{t_1}, \mathbf{u}_{t_2}, \dots, \mathbf{u}_{t_f}\}$ de acciones de control que pertenecen al espacio de acciones de control acotadas disponibles \mathbf{U} de las variables manipuladas u_1, u_2, \dots, u_z , se va de \mathbf{x}_0 a \mathbf{x}^* .*

La Controlabilidad garantiza la operación del proceso en todo su espacio de estado. Esto no es válido para Sistemas no lineales, puesto que el análisis debe hacerse sobre un Equilibrio. En estos casos se habla de controlabilidad local o incluso de la Alcanzabilidad. En el caso de los Sistemas No Lineales el concepto de Alcanzabilidad no es equivalente al concepto de Controlabilidad como en los Sistemas Lineales. En este caso la Alcanzabilidad es una propiedad más débil que la Controlabilidad [Sontag, 1998]. La Controlabilidad en general puede analizarse desde dos perspectivas: El Algebra de Lie [Kalman, 1960; Hermann and Krener 1977; Nijmeijer and Van der Schaft 1990; Isidori, 1995 ; Sontag, 1998] y la Teoría de conjuntos invariantes [Bertekas and Rhodes, 1971; Blanchini, 1999; Kerrigan, 2000; Blanchini and Maini, 2008]. Vale la pena resaltar que si bien ambas teorías se han desarrollado para sistemas continuos y para sistemas discretos, la mayoría de aplicaciones de la controlabilidad basada en algebra de Lie se enfocan en sistemas continuos, mientras que

las aplicaciones de la controlabilidad basadas en la teoría de conjuntos invariantes se han desarrollado para sistemas discretos. En este trabajo se aborda el análisis de controlabilidad y alcanzabilidad desde el Algebra de Lie.

El Algebra y los corchetes de Lie brinda un marco para verificar la Controlabilidad-Alcanzabilidad de Sistemas No Lineales, con el Sistema dinámico representado por campos vectoriales. De este modo, se pueden realizar operaciones algebraicas lineales entre dichos campos para verificar la interconexión entre ellos. Esa operación se conoce como corchete de Lie. Puesto que cualquier Proceso no lineal controlado puede considerarse como una colección o familia de sistemas dinámicos (campos vectoriales) parametrizados por la acción de control $\mathbf{f}(\bullet, \mathbf{u})$ que definen una familia de campos vectoriales $\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_{\mathbf{u}}\}_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}}$, las propiedades básicas de esos sistemas dependen de las interconexiones entre los diferentes campos vectoriales correspondientes a las diferentes acciones de control u_i . Antes de indicar la condición de rango de los corchetes de Lie que permite verificar la propiedad de alcanzabilidad, se establecen algunas definiciones relacionadas con el algebra y los corchetes de Lie [Sontag, 1998].

Definición 7.23 Corchete de Lie. Sean dos mapeos continuamente diferenciables o campos vectoriales suaves (infinitamente diferenciable) \mathbf{f} y \mathbf{g} , definidos en algún subconjunto abierto $\Theta \subseteq \mathbf{R}^n$, tal que el conjunto de todos los campos vectoriales suaves en $\Theta \subseteq \mathbf{R}^n$ se denota por $\mathbf{V}(\Theta)$. El corchete de Lie entre \mathbf{f} , $\mathbf{g} \in \mathbf{V}(\Theta)$ es otro campo vectorial perteneciente a $\mathbf{V}(\Theta)$ y definido por: $[\mathbf{f}, \mathbf{g}](\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})$, con $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$ y $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}$ las matrices Jacobianas de las funciones vectoriales $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{x})$.

Definición 7.24 Algebra de Lie. Es un subespacio lineal $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{V}(\Theta)$ de campos vectoriales en Θ , cerrado bajo el Corchete de Lie, es decir $[\mathbf{f}, \mathbf{g}] \in \mathbf{L}$ cuando \mathbf{f} y \mathbf{g} están en \mathbf{L} . Un Algebra de Lie asociada al Sistema No Lineal dado por la Ecuación 7.1 es el espacio lineal más pequeño de los campos vectoriales en \mathbf{X} que contienen la familia $\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_{\mathbf{u}}\}_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}}$ y resulta ser un espacio lineal cerrado bajo el corchete de Lie: $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \mathbf{f} \Rightarrow [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] \in \mathbf{f}$. Cualquier intersección de algebras de Lie es también un algebra de Lie.

Esta última definición es clave para la extensión de la condición de rango de la matriz de Controlabilidad de sistemas lineales a los no lineales. Pero antes una definición previa.

Definición 7.25 Corchete de Lie Recursivo $ad_{\mathbf{f}}^m \mathbf{g}$. Cuando se debe aplicar recursivamente el Corchete de Lie, se puede representar abreviadamente como $ad_{\mathbf{f}}^m \mathbf{g}$, que significa: $ad_{\mathbf{f}}^0 \mathbf{g} = \mathbf{g}$; $ad_{\mathbf{f}}^1 \mathbf{g} = [\mathbf{f}, \mathbf{g}]$;

$$ad_{\mathbf{f}}^2 \mathbf{g} = [\mathbf{f}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}]] = [\mathbf{f}, ad_{\mathbf{f}}^1 \mathbf{g}], \dots, etc.$$

Definición 7.26 Espacio de Control $\mathbf{S}_{\mathbf{C}}$ o Algebra de Lie de Control $\mathbf{S}_{\mathbf{C}} = \mathbf{L}_{\mathbf{C}}$. Para un Sistema No Lineal expresado en forma afín como en la Ecuación 7.1, el Algebra de Lie de Control es el espacio generado por todos los corchetes de Lie, hasta el orden $(n - 1)$, entre el campo \mathbf{f} y \mathbf{g}_1 hasta \mathbf{g}_m , lo que se puede expresar como: $\mathbf{L}_{\mathbf{C}} = gen\{ad_{\mathbf{f}}^0 \mathbf{g}, ad_{\mathbf{f}}^1 \mathbf{g}, \dots, ad_{\mathbf{f}}^{(n-1)} \mathbf{g}\}$. Que expresado de forma extendida es:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\mathbf{C}} = & gen\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_m, ad_{\mathbf{f}}^1 \mathbf{g}_1, ad_{\mathbf{f}}^1 \mathbf{g}_2, \dots, ad_{\mathbf{f}}^1 \mathbf{g}_m, ad_{\mathbf{f}}^2 \mathbf{g}_1, ad_{\mathbf{f}}^2 \mathbf{g}_2, \\ & \dots, ad_{\mathbf{f}}^2 \mathbf{g}_m, \dots, ad_{\mathbf{f}}^{(n-1)} \mathbf{g}_1, ad_{\mathbf{f}}^{(n-1)} \mathbf{g}_2, \dots, ad_{\mathbf{f}}^{(n-1)} \mathbf{g}_m\} \end{aligned}$$

Definición 7.27 Criterio de Controlabilidad Local - Condición de Rango. El Sistema No Lineal dado por la Ecuación 7.1 es Localmente Alcanzable alrededor de $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}$ si y sólo si el rango de su Espacio de control o Algebra de Lie de Control es igual al orden del Sistema No Lineal: $\dim[\mathbf{L}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}^*)] = n$.

En [Henson and Seborg, 1997] se deduce una matriz análoga a la matriz de Controlabilidad de sistemas lineales, pero esta vez para sistemas No Lineales. Tal matriz no es más que tomar los campos vectoriales que generan a $\mathbf{L}_{\mathbf{C}}$ y ubicarlos como las columnas de la que ellos denominan Matriz de Controlabilidad Débil alrededor de \mathbf{x}^* , que usando la nomenclatura seguida hasta ahora, sera: $\mathbf{W}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}^*) = [adj_{\mathbf{f}}^0 \mathbf{g}(\mathbf{x}^*), adj_{\mathbf{f}}^1 \mathbf{g}(\mathbf{x}^*), \dots, adj_{\mathbf{f}}^{n-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)]$. Con esto, la $\dim[\mathbf{L}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}^*)]$ no es más que el rango de $\mathbf{W}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}^*)$.

Una particularidad de esta prueba es que puede utilizarse especificando valores para las entradas de \mathbf{x}^* , o sin especificar las entradas de \mathbf{x}^* . En este trabajo se utilizará la segunda forma, de modo que se deduzcan expresiones matemáticas en función de \mathbf{x} que permitan calcular los puntos en el espacio \mathbf{X} en los que el sistema no es Localmente Controlable. Debe dejarse en claro que cuando el Sistema es Reversible, la alcanzabilidad se convierte en una condición necesaria y suficiente de controlabilidad [Sontag, 1998], pero para los sistemas irreversibles la prueba de la condición de rango de los corchetes de Lie se convierte en un simple ejercicio matemático, ya que el resultado de conocer que es posible alcanzar un conjunto de dimensión total no es relevante para el diseño de un sistema de control [Gómez, 2009].

Ejemplo 7.2 Adaptado de [Gu, 1995]: Determine la Controlabilidad Local o Alcanzabilidad del Sistema No Lineal dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 4x_1 - 2x_2 - u \\ \dot{x}_2 &= 2\text{sen}(x_1) - x_2 + u\end{aligned}$$

Pruebe también la controlabilidad local cuando la ecuación del segundo estado es: $\dot{x}_2 = \frac{1}{3}x_1^3 - x_2 + u$.

Solución: Se toma el modelo del Sistema de forma matricial para entender mejor las operaciones involucradas en el cálculo de la Controlabilidad Local:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} u \\ &= \begin{bmatrix} 4x_1 - 2x_2 \\ 2\text{sen}(x_1) - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

Lo primero es calcular el Espacio de Controlabilidad o Algebra de Lie de Control \mathbf{L}_C , que es este caso con $n = 2$, llega hasta el primer corchete de Lie:

$$\mathbf{L}_C = \text{gen}\{\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}^1 \mathbf{g}\} = \{\mathbf{g}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}]\}$$

Realizando las operaciones indicadas se llega a:

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 * \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 \cos(x_1) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \cos(x_1) + 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, reemplazando en la operación para el Espacio de Controlabilidad:

$$\mathbf{L}_C = \text{gen}\{[-1 \quad 1]^T, [6 \quad 2 \cos(x_1) + 1]^T\}$$

La dimensión de \mathbf{L}_C es igual al rango de la matriz formada por los campos generadores (llamada \mathbf{W}_c en [Henson and Seborg, 1997]):

$$\mathbf{W}_c = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 2 \cos(x_1) + 1 \end{bmatrix}$$

El rango de \mathbf{W}_c corresponde al número de filas o columnas Linealmente Independientes (LI). En este caso, es evidente que las dos filas (y las dos columnas) son LI, puesto que el determinante de la matriz

$\det(\mathbf{W}c) = -2\cos(x_1) - 7$, es no cero siempre que $\cos(x_1) \neq -3,5$. Pero como la función *coseno* toma valores entre 0 y 1, con lo que un valor de $-3,5$ no es posible, por lo tanto el Sistema es Controlable para todo el espacio.

Ahora veamos el problema la controlabilidad local cuando la ecuación del segundo estado es: $\dot{x}_2 = \frac{1}{3}x_1^3 - x_2 + u$. Lo único que cambia es el término $2\cos(x_1) + 1$, que ahora será: $x_1^2 + 1$. Con esto la matriz formada por los campos generadores será:

$$\mathbf{W}c = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & x_1^2 + 1 \end{bmatrix}$$

para la cual, el determinante es: $\det(\mathbf{W}c) = -x_1^2 - 7$, que se hace cero (con lo que el rango de la matriz no es 2) cuando $x_1 = -\sqrt{7} = -2,6458$. Lo que implica que el sistema es No Controlable para cualquier punto con coordenada $x_1 = -2,6458$.

Como se mencionó al inicio, otra teoría que ha abordado el problema de la Controlabilidad y Alcanzabilidad, pero con un enfoque diferente, es la teoría de Conjuntos Invariantes. Allí se plantea que al determinar el subconjunto del espacio de estados que pueden ser alcanzados con una secuencia de acciones de control admisible a partir de un conjunto dado, garantizando en todo momento que se satisfagan las restricciones de los estados, se está calculando la Controlabilidad-Alcanzabilidad del Sistema. Bertsekas (1970) en su tesis doctoral planteó esta visión del problema de la controlabilidad. Hoy existe toda una teoría alrededor de este enfoque, denominada la teoría de conjuntos invariantes [Blanchini and Maini, 2008]. En este texto no se aborda esta opción. Al lector interesado se le remite a [Gómez, 2009].

Controlabilidad Práctica Local de Estado (CPLdeE) para DSPyC

Como ya se dijo, existen aspectos que no son abordados por la definición de controlabilidad y que deben considerarse cuando se implementa un sistema de control, como la saturación de las acciones de control, las cuales son acotadas en la práctica por la capacidad del Elemento Final de Control (EFC) o durante el diseño por cuestiones de seguridad. En algunos casos puede ocurrir que para alcanzar un punto de operación especificado se requiera llevar al menos una de las acciones de control por fuera de su intervalo disponible, lo que satura al Elemento Final de Control (EFC), dejando al Proceso en lazo abierto. En su definición de Controlabilidad Kalman no restringía la acción de control a un intervalo de posibles valores, lo que hace que la definición original de CdeE no pueda utilizarse directamente al Diseño Simultáneo del Proceso y su sistema de Control (DSPyC). Surge así la necesidad de extender esa definición a un concepto general de Controlabilidad Práctica de Estado. En el caso de Sistemas No Lineales, ya se dijo que es necesario hablar de Alcanzabilidad Local o Controlabilidad Local, evaluando esa propiedad sólo en una vecindad del punto de operación. Es importante recalcar, como menciona Kalman en su trabajo seminal, que la Controlabilidad es la suma de dos efectos: *i*) La posibilidad de alcanzar el estado deseado, y *ii*) el hecho de que el estado alcanzado pueda convertirse en un punto de equilibrio del Sistema controlado. Adicionalmente, debe clarificarse que aunque los conceptos de CdeE dados previamente postulan que el punto en el que se prueban es un equilibrio, la CdeE nada garantiza sobre la Estabilidad para tal punto. Esto porque la Estabilidad se relaciona directamente con un controlador en particular (ya sintonizado). Se vuelve a evidenciar la independencia de la CdeE de cualquier controlador específico, lo que la hace muy interesante en el DSPyC. En consecuencia, la definición de CdeE debe completarse con restricciones que consideren que las acciones de control reales siempre están acotadas y que la característica de la no linealidad obliga a un análisis local, antes de ser utilizada como una restricción de Controlabilidad en el DSPyC en la Optimización de parámetros del Proceso (Equipo) y su Sistema de Control. Veamos la motivación para los términos que extienden la definición de CdeE hasta lograr una Controlabilidad Práctica Local de Estado (CPLdeE), útil en DSPyC.

Grados de Libertad del Sistema Controlado (criterio Opcional) Aunque la teoría de Control Moderno considera que todos los estados de un Sistema se puede controlar con una sola variable manipulada [Kalman, 1960; Ogata, 1998], con el fin de satisfacer los objetivos de control de procesos en un periodo finito de tiempo razonablemente corto, es necesario en la práctica tener un número de variables manipuladas igual o mayor que el número de variables a controlar [Marlin, 2000]. Cuando el número de variables manipuladas es menor que el número de variables a controlar, el control completo de los estados estará sujeto en algún grado a la respuesta natural del Proceso y a las relaciones de estado estacionario. Por lo tanto, será posible controlar algunos estados y aunque el resto de los estados podrían verse afectados, ya sea por otros estados o por las acciones de control, no siempre podían ser llevados a sus puntos de referencia deseados en un tiempo lo suficientemente corto para el Proceso en la práctica. Esto genera la primera restricción opcional, que puede ser complementaria a la CPLdeE, los Grados de Libertad del Sistema Controlado (GdeLSC), que se establece como: $GdeLSC = N_{VM} - N_{VC} \geq 0$, con N_{VM} el número de Variables Manipuladas y N_{VC} el Número de Variables Controladas. Al lector interesado en profundizar en este tema, se le sugiere la discusión sobre la partición del Proceso en estados controlables y no controlables para sistemas no lineales, presentada en el texto de Aberto Isidori (1995).

Determinante de la Matriz de Respuesta Forzada El análisis de Controlabilidad de Estado (CdeE) establece la posibilidad de ir desde cualquier punto $\mathbf{x}_0(t_0)$ en el espacio de estado del sistema a cualquier otro punto $\mathbf{x}_1(t_1) = \mathbf{x}^*$ en tiempo finito $(t_1 - t_0)$, usando una secuencia de acciones de control \mathbf{u} no acotadas. El carácter de la variable manipulada puede ser Escalar u o Multidimensional \mathbf{u} . La CdeE en el sentido de Kalman demuestra la posibilidad de usar el número mínimo de variables manipuladas para hacer accesible cualquier punto del espacio de estado del Sistema. Por lo tanto, después que se demuestra CdeE usando un número dado de variables manipuladas, es posible mantener la CdeE con un número mayor de variable manipuladas, siempre que su selección genere efectos finales separables entre los estados [Ochoa, 2005]. Es decir, que no se apliquen efectos netos de las variables manipuladas que resulten linealmente dependientes y múltiplos unos de otros. En el caso lineal esto es evidente si al demostrar Controlabilidad para el Sistema dado en la Ecuación 7.3, la prueba indica CdeE usando una u escalar y luego se decide aplicar una \mathbf{u} vectorial (por ejemplo dos variables manipuladas u_1 y u_2), lo que convierte el vector $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2]^T$ en la matriz $\mathbf{B} = [b_{1,1} \ b_{1,2}; b_{2,1} \ b_{2,2}]$. Si una mala selección de las acciones de control (por ejemplo de efecto similar en los estados) hace que la matriz \mathbf{B} no tenga rango 2 (matriz singular, sin inversa o con determinante igual a cero), aunque la prueba de CdeE indique la controlabilidad del Sistema, la selección de variables manipuladas realizada vuelve al sistema no controlable, puesto que la deficiencia de rango en \mathbf{B} indica que el efecto neto de las acciones de control sobre el estado i -ésimo será un múltiplo del efecto neto de las mismas acciones de control sobre otro de los estados del sistema. Esto no es más que la expresión de la dependencia lineal entre dos de las filas de la matriz \mathbf{B} . El hecho de que esta dependencia lineal de filas no aparezca en la matriz de Controlabilidad \mathbf{C}_o , debido a la presencia de la matriz \mathbf{A} en los términos de \mathbf{C}_o , no indica que la CdeE se puede lograr con el grupo de variables manipuladas que se postulan. Esto puede resultar contradictorio, puesto que es posible demostrar la CdeE con menos variables manipuladas (en este ejemplo con una u escalar). Lo que pasa es que un número menor de variables manipuladas cambian la matriz \mathbf{B} , posiblemente rompiendo la condición de dependencia lineal de filas, con lo cual los efectos netos de las variables manipuladas sobre los estados ya son independientes. Se evidencia la necesidad de comprobar el rango de la matriz \mathbf{B} o para el caso no lineal, la matriz $\mathbf{G}(\mathbf{x})$.

Si un Sistema No Lineal afín con la entrada tiene más de una acción de control ($N_{VM} > 1$), el término asociado con la respuesta forzada del Sistema es una matriz $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ y no un vector $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, como se establece en la formulación original. En la definición de CdeE, se indicó que el punto final que se desea alcanzar es un punto de equilibrio forzado \mathbf{x}^* , tal que en ausencia de perturbaciones ninguno de los estados del Sistema cambia en el tiempo. En esa condición está aplicada una acción de control de equilibrio \mathbf{u}^* , cuyo valor se calcula desde el modelo del proceso en estado estacionario ($\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = 0, \forall i = 1, \dots, n$) según: $\mathbf{u}^* = [\mathbf{G}(\mathbf{x})]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x})$. De esta expresión se concluye que si no existe la inversa de la matriz $\mathbf{G}(\mathbf{x})$, entonces no sería posible calcular una acción de control que garantiza la permanencia de los estados en el punto de equilibrio deseado \mathbf{x}^* y por lo tanto no será posible garantizar la CdeE. Como se sabe que si el determinante de $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ es cero

(o cerca de cero), la matriz no será invertible, entonces la segunda restricción complementaria a la CPLdeE, denominada Determinante de la Matriz de Respuesta Forzada (DMRF), se formula como $\det[\mathbf{G}(\mathbf{x})] \neq 0$.

Pertenencia de la acción de control al intervalo disponible Mediante esta restricción se evalúa si la acción de control en estado estacionario o de equilibrio \mathbf{u}^* , requerida para mantener al sistema en el punto de equilibrio deseado pertenece al intervalo disponible \mathbf{U} de las entradas o acciones de control definidas para los Elementos Finales de Control y los valores de variables de acción disponibles. Los valores de \mathbf{u}^* se despejan desde las Ecuaciones Diferenciales del modelo, haciendo el diferencial igual a cero por estar en un punto de equilibrio. En las expresiones resultantes se mezclan los valores de estados estacionario de las acciones de control \mathbf{u}^* , con los valores de equilibrio de los estados \mathbf{x}^* , que se suponen son los puntos de ajuste de los controladores. Además, aparecen otras variables que pueden ser las de diseño del proceso. En tal sentido, esta restricción de pertenencia de la acción de control al intervalo disponible, genera intervalos permitidos para las variables de diseño de modo que se logre un diseño con acciones de control factibles. Es por lo tanto una restricción adicional a la Controlabilidad Local.

Controlabilidad Práctica Local de Estado Es posible en este punto proponer la definición formal de la Controlabilidad Práctica Local de Estado (CPLdeE), que se utilizará en el procedimiento de Diseño Simultáneo del Proceso y su sistema de Control (DSPyC), propuesto en este trabajo. Nótese que la restricción opcional “Grados de Libertad para el Sistema Controlado son mayores o iguales a cero: $GdeLSC = N_{VM} - N_{VC} \geq 0$ ”, no se incluye en la definición, pero se sugiere sea probada durante la aplicación del procedimiento.

Definición 7.28 Controlabilidad Práctica Local de Estado (CPLdeE). *Un Sistema No Lineal es Localmente Controlable en la práctica alrededor de un estado de equilibrio \mathbf{x}^* seleccionado como Punto de Operación $\mathbf{x}_{OP} = \mathbf{x}^*$, si cumple las tres condiciones siguientes:*

- i) *El estado \mathbf{x}^* es Localmente Controlable alrededor de \mathbf{x}^* .*
- ii) *Las acciones de control \mathbf{u}^* requeridas para mantener el equilibrio \mathbf{x}^* , pertenecen al intervalo disponible de acciones de control del Proceso.*
- iii) *El Determinante de la Matriz de Respuesta Forzada (DMRF) del Sistema es diferente de cero: $\det[\mathbf{G}(\mathbf{x})] \neq 0$.*

La operatividad de la anterior definición está garantizada con los procedimiento de cálculo para cada una de las condiciones exigidas, tal y como se presentaron en la discusión previa.

Controlabilidad Entrada-Salida (CES) desde Controlabilidad de Estado y Observabilidad de Estado

Ya se dijo previamente que la CdeE es un concepto incompleto al no considerar las salidas, a pesar de existir un concepto complementario que es la Observabilidad. Se sabe que la Observabilidad realiza el mapeo $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{y}$, mientras que la Controlabilidad de estado realiza el mapeo $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{x}$. Por lo tanto, si se reemplaza el estado en estos dos mapeos, se llega a un mapeo único $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{y}$, el cual es una nueva interpretación en la línea del Control Moderno para la Controlabilidad Entrada-Salida (CES). Además, esta controlabilidad, al igual que la CdeE, también puede ser evaluada en un sistema lineal por medio de una matriz. Veamos como se puede llegar a esta definición de CES desde los elementos del Control Moderno Observabilidad de Estado y Controlabilidad de Estado. Sea el siguiente Sistema dinámico, expresado en términos discretos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (7.4)$$

con \mathbf{A}_d y \mathbf{B}_d matrices para el sistema discretizado, que son diferentes a las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} del caso continuo (Ecuación 7.3), mientras que \mathbf{C} es la misma matriz del caso continuo. Vease el texto de [Aström and Hägglund, 1995] para una explicación detallada de tales diferencias. La controlabilidad de estado se evalúa directamente a partir de la matriz \mathbf{C}_o , con igual estructura al caso continuo:

$$\mathbf{C}_o = [\mathbf{B}_d \quad \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \quad \dots \quad \mathbf{A}_d^{n-1} \mathbf{B}_d]$$

De la característica discreta del Sistema dado en la Ecuación 7.4, se puede deducir la siguiente expresión para calcular el valor del estado en cualquier instante de tiempo n a partir de los valores del estado en el instante inicial $\mathbf{x}(0)$ y los valores de las acciones de control aplicadas del instante inicial hasta el momento actual:

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}_d^n \mathbf{x}(0) + [\mathbf{B}_d \quad \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \quad \dots \quad \mathbf{A}_d^{n-1} \mathbf{B}_d] \begin{bmatrix} \mathbf{u}(n-1) \\ \mathbf{u}(n-2) \\ \dots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix}$$

que como se evidencia, contiene a la matriz de controlabilidad \mathbf{C}_o como uno de los operadores. Adicionalmente, de la definición de observabilidad se tiene una relación entre el estado y la salida en el instante n a través de matriz \mathbf{C} :

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C} \mathbf{x}(n)$$

Por lo tanto, se obtiene una relación directa entre la salida en el instante n y la secuencia de entradas previas al instante n :

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C} \mathbf{A}_d^n \mathbf{x}(0) + [\mathbf{C} \mathbf{B}_d \quad \mathbf{C} \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \quad \dots \quad \mathbf{C} \mathbf{A}_d^{n-1} \mathbf{B}_d] \begin{bmatrix} \mathbf{u}(n-1) \\ \mathbf{u}(n-2) \\ \dots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix}$$

en la que la matriz $[\mathbf{C} \mathbf{B}_d \quad \mathbf{C} \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \quad \dots \quad \mathbf{C} \mathbf{A}_d^{n-1} \mathbf{B}_d]$ se conoce como Matriz de Hankel \mathbf{H} . Desde esta expresión es posible plantear las siguientes definiciones.

Definición 7.29 Matriz de Controlabilidad Entrada-Salida (CES) Lineal. Para el Sistema Lineal Discreto descrito por la Ecuación 7.4, la Matriz de Controlabilidad Entrada-Salida se formula como $\mathbf{C}_{O_ES} = [\mathbf{C} \mathbf{B}_d \quad \mathbf{C} \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \quad \dots \quad \mathbf{C} \mathbf{A}_d^{n-1} \mathbf{B}_d]$.

Definición 7.30 Condición de Rango para la Controlabilidad Entrada-Salida. Si el rango de la matriz \mathbf{C}_{O_ES} es igual al orden n del Sistema, entonces el Sistema es Contralable en el sentido Entrada-Salida, o dicho de otro modo, la salida del Sistema es controlable.

Lo que cabe en este punto preguntarse es si tal CES resulta útil para el DSPyC considerando que ella pierde otra vez de vista los estados del proceso y todo se deja en el control de las salidas del proceso (variables

medidas). Surge una pregunta clave al respecto: ¿Puede un Sistema ser controlable en el sentido CES mientras que es no controlable en el sentido CdeE?. Por todo esto, en este trabajo no se utilizará esta CES sino la CPLdeE. Al lector interesado, se le sugiere consultar [Hangos et al., 2004; Alvarez, 2008].

7.3.4. Estabilidad como Indicador de Factibilidad del Diseño

La verificación de la Estabilidad del Sistema operando en Lazo Cerrado es una condición indispensable para que el diseño propuesto sea exitoso en su implantación final. La estabilidad, tal y como se discutió previamente, es una propiedad evaluable sólo desde el modelo del Proceso. Además, exige que el controlador ya esté diseñado (sintonizado). Existen dos aproximaciones cuando se usa la Estabilidad como criterio en el diseño de un Sistema de Control: *i*) Determinar la región en el espacio de los parámetros del Sistema de Control que producen un comportamiento Estable en lazo cerrado, y *ii*) Tener una rutina de diseño del Sistema de Control que siempre produzca controladores estables. Sin embargo, en la propuesta de procedimiento para el DSPyC de este trabajo, sólo se utilizará la primera aproximación, ampliándola al espacio de parámetros del Proceso y de su Sistema de Control. Conociendo la región que contiene parámetros que producen un comportamiento Estable en lazo cerrado, se podrá usar la pertenencia de los parámetros a tal región como una restricción en el Problema de Optimización asociado con el DSPyC. Hay trabajos recientes y en desarrollo que están explorando la matematización de tal tarea, a través de variedades (*manifolds* en inglés) que permitan delimitar con claridad tal región en el espacio de los parámetros del Proceso y el Sistema de Control [Schlegel et al., 2005; Gerhard, 2008; Ricardez, 2008; Muñoz et al., 2009]. En el procedimiento de DSPyC propuesto en este trabajo, la Estabilidad se introduce como una de las restricciones en la Optimización. Tal restricción penaliza cualquier sobrepaso de los parámetros del Equipo y del Sistema de Control más allá de una hipersuperficie que divide el espacio de dichos parámetros en región estable e inestable. A la mencionada hipersuperficie se le conoce como variedad de estabilidad [Gerhard, 2008; Gerhard et al., 2008; Grosh et al., 2008].

7.3.5. Desempeño como Criterio para el Ajuste Paramétrico de Equipo y Control

Una vez que se ha decidido el tipo de controlador que se va a emplear en la estructura de control, debe decidirse cuáles serán los parámetros de ajuste del mismo. Los parámetros del controlador se determinan tradicionalmente con base en dos criterios: Estabilidad y Desempeño. Cuando se habla de desempeño se hace referencia a aquellas características deseables que debería garantizar el controlador una vez el sistema se encuentre en lazo cerrado. Entre ellas normalmente se encuentran:

1. Rápida respuesta a perturbaciones o variaciones en el punto de ajuste.
2. Robustez respecto a errores de modelado, medición, etc.
3. Capacidad para evitar una excesiva acción del controlador.
4. Amplio rango de condiciones operativas.
5. Capacidad de evitar sobreimpulsos de la variable controlada.

Desafortunadamente es difícil (por no decir imposible) seleccionar los parámetros del controlador de manera que todas estas características sean satisfechas simultáneamente. Por esta razón, se debe hacer un compromiso entre ellas o sencillamente seleccionar como base para el ajuste de parámetros del controlador la que se considere más importante para el sistema particular. En este sentido, se han desarrollado numerosos criterios de desempeño, los que puede dividirse en dos categorías:

1. Los que buscan reducir el tiempo de asentamiento, el porcentaje de sobreimpulso u obtener una cierta velocidad de decaimiento, entre otros. Tales criterios se asocian por lo general a métodos de sintonía empíricos para controladores PID, como Cohen-Coon, Ziegler-Nichols, etc. [Smith and Corripio, 1997].
2. Los que buscan minimizar el error durante todo el tiempo de operación del Sistema. Entre los criterios más utilizados de esta categoría se encuentran los denominados criterios integrales, entre los que se encuentran:

La Integral del Error Cuadrático (ISE por sus siglas en inglés)

$$ISE = \int_{t_0}^{t_F} (e(t))^2 dt$$

La Integral del Error Absoluto (IAE por sus siglas en inglés)

$$IAE = \int_{t_0}^{t_F} |e(t)| dt$$

La Integral del Error Absoluto ponderado por el Tiempo (ITAE por sus siglas en inglés)

$$ITAE = \int_{t_0}^{t_F} t * |e(t)| dt$$

Debido a que estas definiciones matemáticas son más refinadas, estos criterios se asocian generalmente a técnicas rigurosas y semirigurosas de ajuste, basadas en métodos de optimización que minimizan el valor de uno de estos índices. El desempeño es un tema ampliamente discutido en la literatura de sistemas de control lineal [Stephanoupolous, 1984; Ogata, 1987; Luyben, 1990]. En la mayoría de estos textos es posible encontrar reglas heurísticas para determinar que tipo de criterio de desempeño debería usarse para la sintonía de un sistema en particular. En el caso no lineal, aunque los criterios de desempeño aún tienen validez, la mayoría de los métodos de sintonía se vuelven inútiles. En consecuencia, siempre se recurre al ajuste de los parámetros a través de algún algoritmo de optimización que incluye dentro de su Funcional de Costo alguno de los índices de desempeño dado arriba. Esa es la manera en la que el Desempeño se incluye dentro del procedimiento de Diseño Simultáneo del Proceso y su Control (DSPyC) presentado en este trabajo.

7.4. El Problema de Optimización en el DSPyC

Utilizando los elementos presentados en la sección anterior, y tomando el procedimiento allí planteado, es posible construir el Problema de Optimización a resolver en el DSPyC de un Equipo de Proceso. Antes se debe recordar la claridad hecha al inicio de este capítulo respecto a la generalidad del procedimiento de DSPyC. Aunque aquí se aplica sólo al diseño de un Equipo de Proceso, los elementos previamente discutidos y buena parte de lo que sigue, son aplicables y extensibles al DSPyC para Procesos, Líneas de Producción y Plantas completas [Alvarez, 2008]. El Problema de Optimización del DSPyC para un Proceso (en este caso un Equipo de Proceso) es como sigue:

Problema 7.1 *Dados:* i) los requerimientos del Proceso asociados con el Equipo a diseñar, ii) los requerimientos del Sistema de Control para el Equipo a diseñar, y iii) un Modelo del Proceso

Encontrar: una estructura y parámetros óptimos para el Equipo y para su Sistema de Control, que logren maximizar un índice de calidad o Funcional de Costo (FC), que mide el grado de cumplimiento de los comportamientos y productos deseados del Equipo.

Sujeto a: i) Que los estados \mathbf{x} cumplan el Modelo del Proceso en Estado Estacionario, ii) Restricciones naturales del Equipo y la Sustancia que se procesa, iii) Restricciones impuestas por el conocimiento previo (heurística) disponible sobre dicha clase de Equipo y iv) Obtener un Proceso Observable, Controlable, Reversibilidad y Estable.

El algoritmo que se planteó en la sección anterior (Figura 7.1), considera que ya la Síntesis del Proceso está terminada. Esto quiere decir que tras determinar de forma precisa todos los requerimientos del Proceso asociados con el Equipo para una Sustancia dada y los requerimientos del Sistema de Control para ese Equipo a diseñar, se escogió de una lista de opciones de Equipo y de Sistema de Control factibles como solución al Problema de Diseño (PdeD) simultáneo, una estructura de Equipo y una estructura de Sistema de Control (faltando en ambos determinar sus parámetros) que cumplen con criterios de calidad. Dicho criterio de calidad mide el grado de ajuste que tienen dicho Equipo y dicho Sistema de control a los objetivos del PdeD. Justamente, lo que sigue es la optimización de los parámetros de diseño del Equipo y del Sistema de control, contando con un Funcional de Costo y unas restricciones adecuadas al PdeD dado.

7.4.1. Requerimientos del Proceso y del Sistema de Control

Al formular el Problema de Diseño en DSPyC se pretende determinar los parámetros del Equipo y del Sistema de Control que optimicen el funcionamiento de ese Proceso, minimizando los costos de inversión, los costos de operación y los costos asociados con el control del Proceso, cumpliendo con las restricciones impuestas. En primer lugar se determinan los requerimientos u objetivos del Proceso, que se asocian con lo que se espera del Equipo en su interacción con la Sustancia que se procesa. Generalmente se tiene un índice de productividad o eficiencia del Equipo, que indica que tan bien el Equipo está desarrollando la tarea asignada. Tal índice termina siendo en la mayoría de los casos una transformación matemática de los coeficientes de las transferencias de materia y energía que ocurren al interior del Equipo. A su vez, esos coeficientes tienen relación directa con las dimensiones físicas del Equipo y con sus condiciones operativas, todo incluido en el Modelo Semifísico de Base Fenomenológica (MSBF) del Proceso. De esta manera, en el Diseño del Equipo interviene el MSBF del Proceso y algunas restricciones de experticia disponibles en la literatura sobre ese equipo. Por todo lo anterior, los requerimientos del Proceso no son más que: i) Las productividades, eficiencias o rendimientos esperados del Equipo, y ii) Las condiciones operativas estándar o esperadas para el Equipo respecto de lo que se conoce de ese tipo de Equipo en la literatura o respecto de lo que otros equipos conectados a este pueden brindar o recibir.

Como en el caso de los requerimiento del Proceso, para el Sistema de Control existen también requerimientos u objetivos que pueden pre-especificarse con toda claridad al arranque de la tarea de DSPyC. En este caso se utiliza un índice de desempeño para el Sistema de Control, que se especifica de acuerdo con los requerimientos del Proceso: valores de las variables fijos o guiados sobre una trayectoria, máximas desviaciones permitidas desde los valores deseados (*Set Points*), máximo tiempo de establecimiento de la variable luego de una perturbación, entre otros. Desafortunadamente la evaluación de estos comportamientos desde el MSBF del Proceso con el Sistema de Control (Proceso operando en lazo cerrado) no está disponible, y en caso de estarlo resulta muy compleja, lo que obliga a recurrir a la simulación para su determinación. Se entiende que las restricciones de Observabilidad, Reversibilidad, Controlabilidad y Estabilidad ya han sido incluidas como requerimientos mínimos para que un Sistema de Control se acepte como solución al Problema de Diseño del DSPyC. Como se verá en el apartado siguiente y en el ejemplo del Capítulo final, tanto estos Requerimientos del Sistema de Control como los requerimientos propios del Proceso, deben matematizarse para incluirse en un índice general de optimalidad de la solución o Funcional de Costo para la Optimización.

7.4.2. El Funcional de Costo (FC)

En la construcción del Funcional de Costo (FC) se hace la formulación matemática de los objetivos económicos, de operación y de control del Proceso, todo en función de los requerimientos del Proceso y de su Sistema de Control presentados previamente. Lo más común es que tal FC sea una sumatoria de términos, todos positivos, con al menos un término por cada objetivo que se requiera cumplir. Este tipo de problemas se denominan Optimización Multiobjetivo [Edgar et al., 2001; Bartholomew-Biggs, 2008]. Aunque la forma de cada término depende del objetivo al que haga referencia, es frecuente que se utilicen diferencias entre el valor corriente de una variables o índice particular y un valor de referencia deseado o un extremo indeseado de la variable. Tales términos se apoyan en el concepto de distancia (Euclidiana o de otro tipo) o norma vectorial. Los términos del FC pueden ser evaluados al final de un periodo de tiempo cuando se refieren a condiciones finales del Proceso o evaluarse en cada instante de tiempo, lo que obliga a plantear sumatorias (en el caso discreto) o integrales (en el caso continuo) sobre un intervalo dado de tiempo. La existencia en el FC de estos últimos términos acumulativos (sumatorias o integrales) con términos puntuales de valor final, le generan complejidad a la tarea de Optimización, como se verá más adelante. Por eso, algunas veces tales índices acumulativos se calculan de manera externa y se le entregan a la Optimización tras cada prueba de un conjunto de parámetros dado. Por ejemplo, operando el Proceso en lazo cerrado durante un tiempo fijo y sometido a perturbaciones típicas, se calcula el ISE (Integral Square Error) como índice de desempeño del Sistema de Control. Es importante mencionar que algunas veces la forma del FC se condiciona para que se comporte como una Función de Lyapunov de la tarea que se optimiza (control, diseño, etc.) y con esto garantizar que dicha optimización es convergente y por tanto la tarea que se optimiza resulta estable. Finalmente debe decirse que se acostumbra que el FC de una optimización para diseño asocie a cada término un valor económico, de modo que lo que se minimice en el Diseño Simultáneo de Proceso y Control (DSPyC) sean los costos: de construcción y de operación del Equipo (del Proceso) en Unidades Monetarias Normalizadas (UMN), aunque lo más frecuente es usar Dolares Americanos US\$. Con todo lo anterior, es evidente que resulta un problema de optimización no lineal con restricciones. Asumiendo que siempre se debe minimizar, una forma genérica para el FC de dicha optimización sería:

$$\begin{aligned}
 FC = & \alpha_1(VT_{Eq})^2 + \alpha_2(VO_{Eq})^2 + \alpha_3\left(\frac{1}{VE_{Eq}}\right)^2 \\
 & + \alpha_4(VEr_{SC})^2 + \alpha_5(VO_{SC})^2 + \alpha_6(VEx_{Eq})^2 + \alpha_7(VEx_{SC})^2
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ los factores de conversión de cada índice a valor monetario en UMN, VT_{Eq} la Variable de Tamaño del Equipo que permite calcular su costo de construcción, VO_{Eq} la Variable de Operación del Equipo que permite calcular los costos de operación del Equipo, VE_{Eq} la Variable de Eficiencia del Equipo que indica que tanto se logra el objetivo de productividad, VEr_{SC} la Variable asociada con el Error del Sistema de control, VO_{SC} la Variable que permite calcular el costo de Operación del Sistema de Control (a mayor desviación respecto al punto de operación es mayor el recurso necesario para mantener la planta operando en el punto de trabajo deseado), VEx_{Eq} una Variable Extra para evaluar otros aspectos del Equipo y VEx_{SC} una Variable Extra para evaluar otros aspectos del Sistema de Control.

Los pesos del Funcional de Costo (FC) se seleccionan siguiendo criterios de diseño de procesos químicos [Peter and Timerhaus, 1980; Walas, 1988; Aguirre, 2004], que generalmente establecen que los costos de operación deben ser más altos que los costos de construcción. Por su parte, los ponderadores de los términos asociados con el Sistema de Control se seleccionan de acuerdo con el peso que se desee dar al Sistema de Control dentro del Diseño Simultáneo del Proceso y su Control (DSPyC).

7.4.3. Las Restricciones de la Optimización

La minimización del Funcional de Costo (FC) mencionado previamente debe cumplir con todas las restricciones asociadas al Problema de Diseño (PdeD). A continuación se listan las restricciones más comunes. Como el listado no es exhaustivo, se recomienda al lector interesado revisar [Edgar et al., 2001].

Modelo de Proceso en Estado Estacionario

Estas restricciones, que en realidad son las de balances de materia y energía, imponen el cumplimiento estricto del valor de Estado Estacionario de todos los estados \mathbf{x}_{EE} respecto del modelo disponible del Proceso. Una manera de verificar esta condición es a través de un límite máximo a los residuos de las ecuaciones de estado del Modelo evaluadas en \mathbf{x}_{EE} , de manera que se asegura el cumplimiento de ese Estado Estacionario.

Físicas

Son todas aquellas restricciones asociadas con la configuración mecánica del Equipo, con las relaciones entre algunas corrientes (aire combustible en un quemador, por ejemplo) o con las propiedades de la Sustancia que se procesa. Por ejemplo, en los tanques es común diseñar con una relación Altura (A) a Diámetro (D) específica. En el caso de biorreactores se utiliza una relación $\frac{A}{D} = 1$, mientras que en los otros reactores es frecuente usar una relación $\frac{A}{D} = 2$. También es indispensable limitar todas las variables a su intervalo físico real (por ejemplo, no existen concentraciones negativas). Otras restricciones físicas a considerar son las asociadas con el riesgo de daño del Equipo por Presión, Temperatura o Concentraciones altas o bajas en extremo. También se deben introducir restricciones que garanticen que los parámetros de diseño físicos del Equipo y del Sistema de Control tomen valores reales o realizables. Ejemplos son las Revoluciones por Minuto en motores eléctricos y los valores de Banda Proporcional en un Controlador PID.

De Operación

Se especifican con el fin de garantizar que el Equipo diseñado opere dentro de un conjunto de Puntos de Operación (PO) preestablecidos como adecuados desde los requerimientos del Proceso. Es usual que tal conjunto esté delimitado por condiciones riesgosas de operación o por PO muy costosos. Las primeras se especifican considerando el riesgo de daño del producto del Proceso, puesto que ya en las restricciones Físicas arriba mencionadas se consideraron las condiciones riesgosas para el Equipo mismo. Por su parte, las restricciones que consideran los PO con costo de operación prohibitivo hacen uso del conocimiento previo sobre la operación del proceso y sus costos asociados. Se incluyen en este grupo de restricciones aquellas que pretenden evitar saturaciones de los Elementos Finales de Control del Proceso o que buscan minimizar el número de veces que una variable controlada sobrepasa su intervalo normal. También las que establecen un valor mínimo para los índices de Eficiencia del Equipo y de su Sistema de Control. Por ejemplo, si se desea obtener un intervalo de concentración dado para un reactivo residual en la salida o para el valor del ISE para el lazo cerrado.

De Observabilidad, Controlabilidad, Reversibilidad y Estabilidad

Estas cuatro propiedades se chequean desde el modelo del proceso. Las tres primeras sin la necesidad de un controlador específico ya sintonizado, mientras que la tercera puede requerir el controlador ya ajustado o sólo su configuración (estructura de pareamiento entrada-estado o entrada-salida). Siempre deben recalcularse si los cambios paramétricos realizados en el Diseño las afectan. Como todas cuatro son propiedades binarias (por ejemplo un Sistema es Observable o no), se dice que sólo se verifican. Otros trabajos han abordado

la manera de medir la Controlabilidad y la Estabilidad en una escala continua de valores. Desde tal escala es posible en consecuencia gradar la calidad de la Controlabilidad y la calidad de la Estabilidad. Se usan con frecuencia en esos trabajos el concepto de Margen de Controlabilidad y Margen de Estabilidad, para indicar que tan cercano está el Punto de Operación (PO) actual de los límites de esa región Controlable o Estable. Dependiendo del tipo de diseño que se esté realizando, es posible relajar las restricciones de Observabilidad y Reversibilidad. En el primer caso, si el estado se mide completamente, no vale la pena poner a la Observabilidad como restricción de la Optimización. En el segundo caso, si el proceso es continuo y todas las variables de acción tienen Elementos Finales de Control (EFC) que pueden afectar hacia arriba o hacia abajo a la variable manipulada, la Reversibilidad está garantizada.

7.4.4. El Procedimiento de Optimización

Luego que se tiene configurado el Funcional de Costo (FC) y se han establecido todas las restricciones, se debe proceder a resolver el Problema de Optimización (PdeO). Dicha resolución no es más que encontrar al menos un conjunto de valores para los parámetros del Equipo y del Sistema de Control que garanticen el mínimo valor del FC. Todo, sin violar ninguna de las restricciones, aunque en ocasiones para ganar factibilidad en la solución del PdeO, se pueden relajar ligeramente algunas restricciones. Algunas veces también se optimiza el Punto de Operación (PO) del Proceso [Francisto et al., 2009]. Generalmente, el PdeO resultante en Diseño Simultáneo de Proceso y Control (DSPyC) está en un espacio no convexo, que además involucra restricciones sobre índices de control que requieren la simulación del modelo del Proceso en lazo cerrado. Es decir, el PdeO resulta difícil de resolver por la vía analítica, debiendo recurrirse a técnicas numéricas tradicionales [Andreasson et al., 2006] o incluso a técnicas bio-inspiradas como los Algoritmos Genéticos (AG) [Holland, 1975], el Quimiotactismo Bacteriano (QB) [Bremermann and Anderson, 1990] o Temple Paralelo Molecular [Ochoa et al., 2009]. Estos últimos son métodos de búsqueda global especialmente recomendados para problemas complejos debido a su simplicidad, facilidad de operación, requerimientos matemáticos mínimos, además de su perspectiva de búsqueda paralela y global. En cuanto a la confiabilidad de los métodos bio-inspirados, se han desarrollado estudios que prueban de manera rigurosa su convergencia matemática [Spiro et al., 1997; Vose, 1999; Gen and Cheng, 2000].

Como ya se ha mencionado, las diferentes metodologías para el DSPyC incluyen la Síntesis del proceso, en particular para procesos químicos porque en estos hay muchos conflictos entre el beneficio económico calculado con datos de estado estacionario y el obtenido con datos de operación dinámica. Aunque este no es el objetivo de este trabajo (aquí se asume que las unidades de la planta y su interconexión ya han sido fijados, es decir, la Síntesis de proceso está lista), las aplicaciones más completas de DSPyC contemplan también una Síntesis del proceso junto con la selección de la estructura de control. Considerar la Síntesis implica decisiones binarias que resultan en Problema de Optimización (PdeO) Mixto entero Lineal (MINLP por sus siglas en inglés), y si se incluyen simulaciones dinámicas aparece un PdeO de Optimización Dinámica Mixta entera (MIDO por sus siglas en inglés). Al lector interesado se le remite a libros de texto sobre Optimización y a mirar el panorama descrito en [Flores-Tlacuahuac and Biegler, 2008].

Durante el procedimiento de DSPyC, los objetivos de control se pueden expresar por medio de índices dinámicos tales como ISE (Integral Square Error en inglés), con lo que se requieren simulaciones dinámicas dentro del algoritmo de optimización. Esto hace más lenta la tarea de optimización. Una buena alternativa para acelerar el proceso de identificación es el uso de índices de rendimiento basados en las normas de algunas funciones del Proceso linealizado expresado como Funciones de Transferencia en el dominio de Laplace [Francisco and Vega, 2007]. No obstante, debido a la utilización de modelos linealizados, aparecen algunos problemas de estabilidad y robustez cuando existen perturbaciones no lineales en la carga del Proceso, típicas en plantas químicas [Morari and Zafiriou, 1989]. Por estas razones, en este trabajo se utiliza la primera alternativa, a pesar de su alta carga computacional.

Puesto que el problema de DSPyC incluye un controlador, es posible pensar en dos tipos de algoritmo de optimización: *i*) el que ve al problema como uno sólo y resuelve simultáneamente parámetros del Proceso

y parámetros del Sistema de Control, o *ii*) el que aprovecha que los dos problemas pueden ser vistos como independientes y aplica un procedimiento iterativo de dos pasos: ajustar el controlador en una primera etapa y en una segunda etapa realizar el diseño del Proceso (Equipo). En el procedimiento iterativo se deben cumplir criterios de convergencia sobre el Funcional de Costo para la optimización, puesto que cuando todos los parámetros reales de Equipo y Sistema de Control están optimizados, ambos objetivos deben ser considerados en conjunto en una optimización global que toma como semillas los valores hallados de manera individual [Francisto et al., 2009].

7.5. DSPyC de Procesos por Lotes (PpL). Una Mención.

Los Procesos por Lotes (PpL) son radicalmente diferentes a su contraparte, los procesos continuos. A pesar de que el enfoque de este trabajo está orientado a la discusión del Diseño Simultáneo del Proceso y su Control (DSPyC) pero para procesos continuos, en esta sección se hace una mención al problema del DSPyC pero para Procesos por Lotes.

Definición 7.31 *Proceso por Lotes (PpL)*. *Es una combinación discontinua de pasos continuos de producción llamados operaciones de proceso. Un PpL (batch en inglés) es aquel en el que se produce una porción de producto por lotes, opuesto a la producción continua. En cada etapa de la producción una cierta cantidad de materias primas o productos intermedios se tratan juntas en un reactor o Equipo de Proceso.*

Como las operaciones que se realizan en el lote se pueden considerar no interferentes físicamente una con otra, esas operaciones del PpL son el punto de partición ideal para considerar el problema del control de un PpL en dos niveles: *i*) Arriba, considerando al Proceso como un problema de programación y coordinación en tiempo real, y *ii*) Abajo, esto es dentro de cada operación de proceso, considerando un problema de control continuo. En el nivel superior, la planta puede ser vista como una colección de “unidades” físicas conteniendo productos intermedios y que son utilizadas para ejecutar operaciones de proceso. Este nivel superior asume que dichas operaciones son controladas por un Sistema de Control que opera en el continuo. Bajo esta estructura, el nivel superior no es más que un modelo automatizado por tiempo o condición de parada, de las “unidades” de proceso individuales.

Las plantas químicas por lotes han sido objeto de múltiples estandarizaciones, una de las más usuales es la ISA SP 88-1, que define modelos de referencia para el control de PpL tal y como se utilizan en la industria de procesos. Además, brinda terminología que ayuda en la explicación de las relaciones entre esos modelos y los términos comunes del control. Ese estándar fue desarrollado conjuntamente con los grupos de estandarización IEC e ISO. “La publicación del estándar ANSI/ISA-88.01-1995, ha conducido a avances revolucionarios en la forma en que se diseñan plantas de proceso, se implementan e integran de manera flexible a través de procesos modulares” [ANSI/ISA, 1995]. En tal estándar uno de los conceptos relevantes es el de Receta (*recipe*), definido como la descripción, independiente de la planta, de los pasos de procesamiento necesarios para obtener un producto. Los pasos u operaciones de proceso no se refieren al equipo, por el contrario y de una manera más abstracta, se refieren a las operaciones: reacción, mezclado, enfriamiento, etc. Precisamente, la tarea del ingeniero es mapear esas tareas abstractas dentro de una arquitectura concreta de equipos. En la labor de especializar la receta a una planta concreta, la cuestión de uso óptimo de recursos juega un papel económico clave. Obviamente la dificultad mayor en tal optimización está en la obtención de un modelo adecuado de la planta (colección de equipos en los que corren procesos por lotes en paralelo, compitiendo por recursos y productos intermedios). El estándar ISA arriba mencionado, establece cuatro niveles de abstracción en un modelo posible para una planta por lotes, tomado como colección ordenada de: *i*) Procesos, *ii*) Etapas de proceso, *iii*) Operaciones de proceso, y *iv*) Acciones de proceso. El nivel correcto de abstracción en el modelo, con miras a diseñar un sistema de control para un PpL, es el de operaciones de proceso, por lo visto previamente sobre su no interferencia. Desde arriba, los equipos y recursos que usa una operación no deben ser interferidos por otras operaciones de proceso que estén activas y ejecutándose en paralelo.

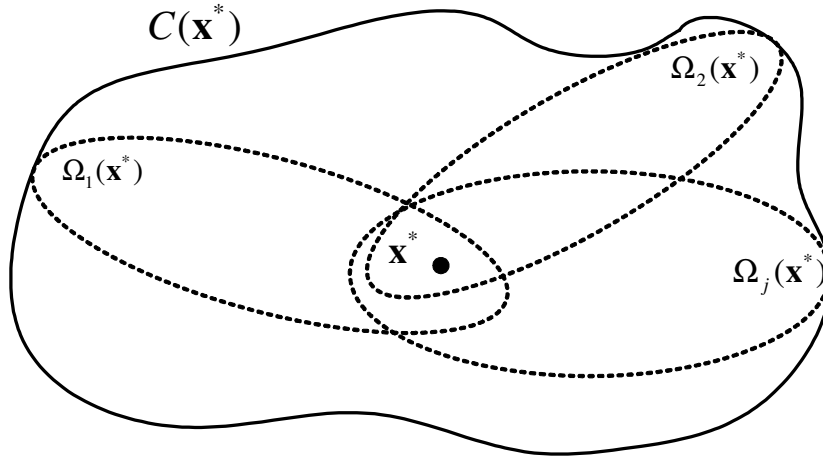


Figura 7.3: Relación entre la región de controlabilidad $C(\mathbf{x}^*)$ de un sistema y la región de estabilidad $\Omega_j(\mathbf{x}^*)$ de tres posibles controladores.

Cuando se piensa en una discusión sobre la pertinencia de los conceptos de Estabilidad y Controlabilidad en un PpL, no resulta por lo menos claro a primera vista como llamar a la región del espacio por la que pasan las trayectorias factibles (con producto final del lote en conformidad con la calidad esperada): ¿región controlable o región estable del lote?. La discusión que sigue pretende mostrar que aunque lo deseable desde el uso en procesos continuos es determinar la Región de Estabilidad del Proceso por Lotes (PpL), al determinar la Región Controlable se están cubriendo todas las posibles regiones estables del lote, independientemente del controlador que finalmente se diseñe e instale. Aunque la discusión se ambienta en un proceso continuo, la extensión de los conceptos a PpL debería resultar sencilla.

7.5.1. Región Controlable

Considérese el Punto de Operación (PO) de un Proceso definido por el valor de las variables de estado \mathbf{x} en ese punto \mathbf{x}^* (Ver Figura 7.3). Si el Proceso está descrito por un Sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

en $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{u}(t)$ toma valores en algún subconjunto \mathbf{U} de \mathbb{R}^m . La solución del modelo para una señal de control \mathbf{u} es $\Phi(t, \mathbf{x}(0), \mathbf{u})$. El punto \mathbf{x}_0 se dice controlable a \mathbf{x}^* (o equivalentemente, \mathbf{x}^* es alcanzable desde \mathbf{x}_0) si existe $T \in [0, +\infty)$ y una señal de control $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow \mathbf{U}$ tal que $\Phi(T, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \mathbf{x}^*$. El conjunto de todos los puntos controlables a \mathbf{x}^* se denomina el conjunto controlable de \mathbf{x}^* y se denota $C(\mathbf{x}^*)$.

7.5.2. Región de Robustez

Una vez se cierra el lazo de control mediante algún controlador j (es decir, cuando $\mathbf{u}(t) = \mathbf{k}_j(\mathbf{x}(t))$), el modelo que describe el sistema adquiere la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{k}_j(\mathbf{x}(t))) = \mathbf{f}_j(\mathbf{x}(t))$$

y su solución se expresará ahora como $\Phi(t, \mathbf{x}_0)$. Denótese con \mathbf{x}^* al PO deseado. La Región de Robustez de j respecto a \mathbf{x}^* , $\Omega_j(\mathbf{x}^*)$, se define como el conjunto de puntos para los cuales el controlador estará en capacidad de llevar el sistema, luego de una perturbación, a una vecindad arbitrariamente pequeña de \mathbf{x}^* en un periodo de tiempo finito. Es decir, \mathbf{x}_0 pertenece a $\Omega_j(\mathbf{x}^*)$ si $\lim_{t \rightarrow +\infty} [\Phi(t, \mathbf{x}_0)] \rightarrow \mathbf{x}^*$.

A partir de la discusión anterior de Región de Robustez es posible plantear la siguiente reformulación para la Región Controlable (ver Figura 7.3):

$\mathbf{x}_0 \in C(\mathbf{x}^*)$ si y sólo si existe un controlador j (es decir, una ley de control $\mathbf{u}(t) = \mathbf{k}_j(\mathbf{x}(t))$ tal que $\mathbf{x}_0 \in \Omega_j(\mathbf{x}^*)$). Si esto es cierto, es posible afirmar entonces que $C(\mathbf{x}^*)$ contiene la región de robustez asociada a todos los posibles controladores. Es decir, para todo j , $\Omega_j(\mathbf{x}^*) \subseteq C(\mathbf{x}^*)$ y por consiguiente, el controlador perfecto (ideal) es aquel para el cual $\Omega_j(\mathbf{x}^*) \equiv C(\mathbf{x}^*)$.

7.5.3. El Concepto de Invarianza

Para definir el concepto de invarianza, deben considerarse los elementos asociados con la evolución y existencia de un sistema dinámico Σ , con función de transición Φ que cumple que $\mathbf{x}(k+1) = \Phi(\mathbf{x}(k), \varphi)$, siendo φ el vector de términos del operador Φ , uno de los cuales puede ser la acción de control. Además, a la invarianza se asocia un operador cualquiera ρ que se aplica sobre el sistema dinámico Σ . Por lo tanto, en la definición de invarianza existen los dos efectos: la evolución del sistema a través de su operador propio Φ , y la evolución del sistema desde el operador externo ρ . Al considerar que todo operador sobre el sistema actúa a través de uno de los términos del operador Φ , y si el operador tiene como argumento sólo el estado del sistema ($\rho(\mathbf{x}(k))$), en forma general puede escribirse que: $\mathbf{x}(k+1) = \Phi(\mathbf{x}(k), \rho(\mathbf{x}(k)))$. Es evidente que si el operador ρ sólo es función de los estados, la evolución temporal no la aporta dicho operador sino la dinámica propia del sistema representada en el operador Φ . Por lo tanto, el concepto de invarianza de un sistema dinámico Σ bajo un operador ρ resulta ser una operación atemporal en sí misma, pero que gana temporalidad siempre que $\rho(\mathbf{x}(k))$ y $\mathbf{x}(k+1) = \Phi(\mathbf{x}(k), \varphi)$. Es decir, ρ es inherentemente un operador estático que sólo gana dinámica al pasar por la función de transición de estado del sistema dinámico original.

7.5.4. Estabilidad de un PpL, Controlabilidad, Invarianza y Robustez

Con lo visto previamente, e intentando hacer un paralelo entre los procesos continuos y los PpL respecto de los conceptos de Estabilidad y Controlabilidad, se puede aventurar la siguiente conclusión a esta mención, considerando los trabajos previos de [Rincón, 2007; Gómez, 2009]. La Estabilidad de un lote está asociada con la cercanía de la trayectoria temporal del estado \mathbf{x} del proceso en \mathbb{R}^n respecto a una trayectoria nominal que se considera óptima. Es indispensable que la trayectoria actual termine dentro de un entorno acotado Λ_F conocido del estado final nominal (deseado) $\mathbf{x}_{F_Nominal}$ para el producto del PpL $\mathbf{x}_F \in \Lambda_F$. Además, el tiempo que dure la trayectoria actual debe estar en un entorno del tiempo final de la trayectoria nominal: $T_{F_máx} \leq T_F \leq T_{F_mín}$. En la Figura 7.4 se ilustra esta situación, así como algunos conceptos complementarios.

Para que las dos últimas condiciones se cumplan ($\mathbf{x}_F \in \Lambda_F$ y $T_{F_máx} \leq T_F \leq T_{F_mín}$), la trayectoria debe moverse siempre por el interior de un “tunnel” en \mathbb{R}^n , puesto que cualquier excursión de la trayectoria por fuera del “tunnel”, así luego retorne al interior, no garantiza que se cumpla las condiciones mencionadas. Si el “tunnel” se corta a tiempos constantes ($t_j, t_{j+\Delta t}, t_{j+2\Delta t}$), se producirán conjuntos de puntos ($\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$) en \mathbb{R}^n en los cuales todos los puntos pertenecen al menos a una trayectoria estable. A su vez, cada uno de estos cortes a tiempo constante del tunnel, es un conjunto Alcanzable en un paso desde otro conjunto previo y es un conjunto Controlable a un paso hacia otro conjunto posterior: Ω_2 es el conjunto Alcanzable en un paso desde Ω_1 , mientras que Ω_1 es el conjunto Controlable a un paso hacia Ω_2 . Bajo estas premisas, en [Gómez, 2009] se extendió la manera de reconstruir dicho “tunnel” propuesta en [Rincón, 2007]. Por lo tanto, los conceptos

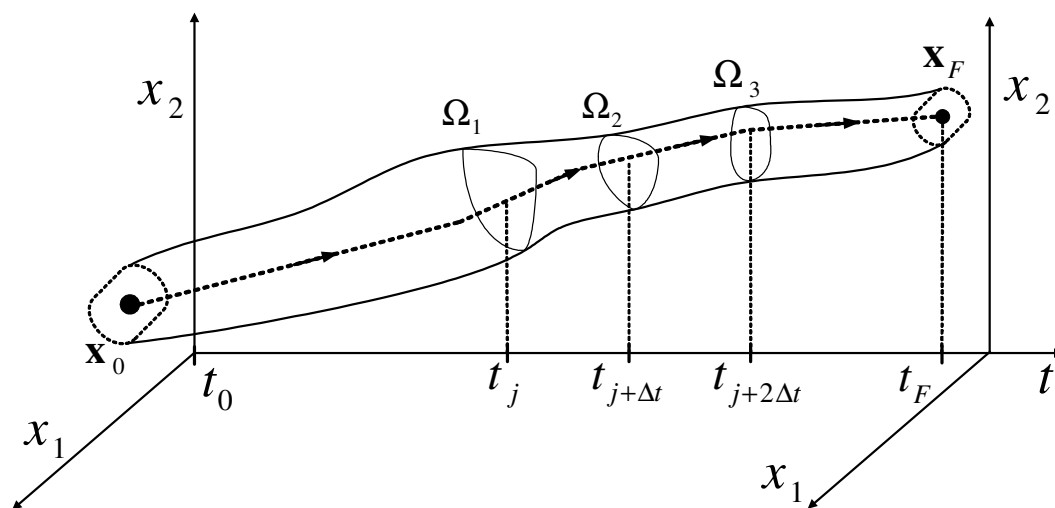


Figura 7.4: “Túnel” de estabilidad de un Proceso por Lotes (PpL) y tres conjuntos Ω_i a tiempo fijo en el lote.

de Estabilidad, Controlabilidad y Alcanzabilidad quedaron así conectados, adicionando además el análisis de la Reversibilidad como condición principal para garantizar la Estabilidad de un PpL.

Capítulo 8

EJEMPLO DE APLICACIÓN. Reactor Continuo en Tanque Agitado (CSTR)

En este capítulo se presenta el diseño y control de un Reactor Continuo en Tanque Agitado (CSTR por su siglas en inglés), como ejemplo de aplicación de la metodología de Diseño Simultáneo de Proceso y su Control (DSPyC) postulada en este trabajo. Adicionalmente, se ilustra la aplicación de la metodología para la obtención de Modelos Semifísicos de Base Fenomenológica (MSBF) postulada previamente (Alvarez et al., 2009). El ejemplo presenta un nivel de complejidad suficiente para probar el procedimiento y mostrar aspectos claves en el diseño de Procesos y de Sistemas de Control (Henson and Seborg, 1997; Bequette, 2002). El Procedimiento de DSPyC que se aplicará, tal y como se dejó expreso en el Algoritmo de la Figura 7.1, se puede reescribir en texto (más fácil de seguir luego en su aplicación) como sigue:

Paso 1: Caracterice el Proceso y obtenga su Modelo. Haga la Síntesis del Proceso y seleccione un Sistema de Control para el Proceso. Proponga un primer pareamiento (semilla) de control: \mathbf{u} , \mathbf{x} para el Proceso. Determine los intervalos de las variables. Caracterice el Proceso y obtenga su Modelo.

Paso 2: Linealice el Modelo del Proceso en el Punto de Operación a diseñar.

Paso 3: Seleccione y ubique n sensores, siendo n el orden del Sistema (número de estados).

Paso 4: Evalúe la Observabilidad (\mathbf{Ob}) del Sistema.

Paso 5: ¿Es el Sistema completamente Observable?. De no ser el Sistema completamente Observable, modifique la selección de sensores y repita desde el Paso 4. En caso de serlo, se toma el grupo de n sensores como el definitivo, con lo que queda lista la salida \mathbf{y} .

Paso 6: Evalúe la Controlabilidad (\mathbf{Co}) del Sistema.

Paso 7: ¿Es el sistema Controlable?. De no serlo, modifique el pareamiento propuesto y repita desde el Paso 2. De serlo, se toma el pareamiento dado como el definitivo: \mathbf{u} , \mathbf{x} .

Paso 8: Evalúe la Reversibilidad del Sistema.

Paso 9: ¿Son todos los Estados Reversibles?. De no serlo, cambie las acciones de control u_i que se requieran a modo dual y se repite desde Paso 8. De serlo, proponga una estructura de control y un algoritmo de control para el Sistema.

Paso 10: Halle expresiones para los límites de Estabilidad del Sistema en lazo cerrado.

Paso 11: Optimice los parámetros del Proceso y de su Sistema de Control.

Paso 12: FIN: El Proceso queda diseñado bajo todas las especificaciones.

8.1. Diseño de un CSTR

A continuación se muestra la aplicación del Procedimiento propuesto para realiza el Diseño Simultáneo del Proceso (Equipo) y su Sistema de Control (DSPyC) a un Reactor Continuo de Tanque Agitado (CSTR por sus siglas en inglés). El CSTR es un Problema de Referencia (Benchmark en inglés) consolidado en la literatura del área de Control de Procesos. En este Proceso se combinan las dificultades propias de la hidrodinámica de un tanque agitado con flujo continuo (materia entrando y saliendo), con las dificultades inherentes a una reacción química no isotérmica (con liberación o consumo de calor). Tal riqueza dinámica del CSTR lo hace un proceso ideal para la prueba de metodologías de modelado y control de procesos, así como la verificación de metodologías de diseño de procesos, tal y como se muestra en esta sección.

8.1.1. DSPyC: Paso 1

Este paso pide que se caracterice el Proceso y se obtenga su Modelo. Además, solicita que se haga la Síntesis del Proceso y se seleccione un Sistema de Control. Esto último implica dar un pareamiento semilla entre variables manipuladas \mathbf{u} y variables controladas (siempre los estados) \mathbf{x} , así como fijar los intervalos esperados de todas las variables. Además, es necesario indicar cuales serán las variables de diseño del proceso. Estos requerimientos se van cumpliendo a medida que se avanza en el modelado, como se verá a continuación.

Se debe obtener un modelo que describa las dinámicas principales de un CSTR, para lo cual se seguirá el procedimiento previamente indicado para la obtención de Modelos Semifísicos de Base Fenomenológica (MSBF). Para diferenciar estos pasos de los del Procedimiento para DSPyC, en lo que sigue se retolurán como MSBF_ i , siendo i el número del paso.

MSBF_1: *Elaborar una Descripción Verbal y un Diagrama de Flujo de Proceso que se complementen.*

El propilénglicol se produce por la hidrólisis del óxido de propileno con ácido sulfúrico como catalizador, todo en solución acuosa, lo que hace que el agua esté en exceso y la reacción pueda modelarse como de primer orden respecto a la concentración del óxido. En adelante se asume la reacción irreversible $A \rightarrow B$, siendo A el óxido y B el propilénglicol. La velocidad de reacción se puede en consecuencia expresar por la ley de Arrhenius, con los parámetros cinéticos hallados en los trabajos de Fogler (1992) y Furusawa y col.(1969), tal y como se reporta en [Bequette, 2002]. El CSTR es un cilíndrico vertical diseñado con una relación de 2 : 1 altura a diámetro. El área de transferencia de calor queda totalmente cubierta cuando la masa reactiva ocupa el 75 % del volumen total. El reactor normalmente se opera al 85 % de su volumen de diseño. La temperatura nominal de operación es $101,1^{\circ}F$, logrando una conversión cercana al 50 %. Un diagrama de CSTR con la nomenclatura utilizada en la deducción del modelo, se ve en la Figura 8.1.

En este paso del procedimiento de modelado, la comprensión del proceso es una condición indispensable. Se asume que el enunciado previo fué suficientemente claro. Cualquier otra información adicional sobre la operación del CSTR la aportará el lector.

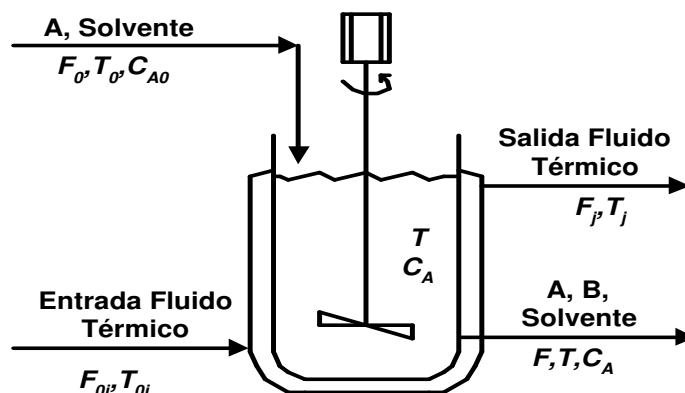


Figura 8.1: Diagrama de Flujo de Proceso para el CSTR.

MSBF_2: *Fijar un Nivel de Detalle para el Modelo, de acuerdo con su utilización: ¿Qué preguntas contestará el modelo?*

El modelo que se obtendrá será de parámetros concentrados, de modo que pueda responder a la siguiente pregunta: ¿Cómo cambia el estado del proceso con el tiempo cuando cambian todas las estradas del proceso y cambian los parámetros internos propios del sistema reactivo y condiciones de entrada?

MSBF_3: *Definir tantos Sistemas de Proceso (SdeP) sobre el Proceso que se modelará como los exija el Nivel de Detalle y representar la relación de todos los SdeP en un Diagrama de Bloques (DB).*

Este paso se desarrolla mejor si se realiza un Diagrama de Flujo en Bloques (DB) que contenga los Sistemas de Proceso (SdeP) delimitados. Tal DB se presenta en la Figura 8.2.

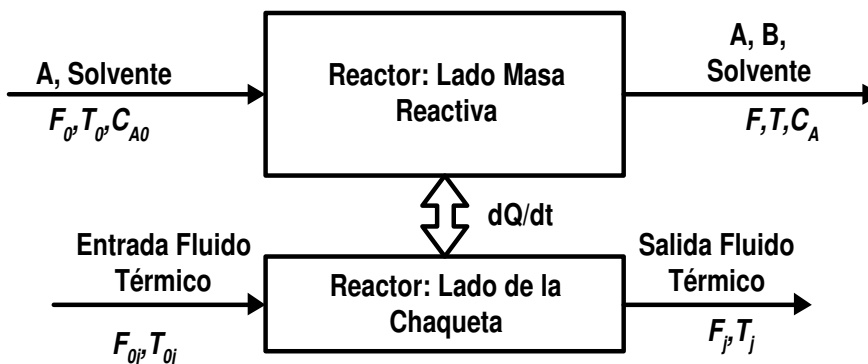


Figura 8.2: Diagrama de Bloques mostrando los dos Sistemas de Proceso para el CSTR y su interacción.

Sobre este DB quedan rotulados los SdeP a analizar. Cuando la tarea que se aborda es el modelado, basta con tomar un sistema por cada uno de los bloques, puesto que será luego en la simulación que la información

de todos los bloques se integre en el sistema total. Aquí no se marcarán los SdeP, puesto que es evidente que son dos: el SdeP Reactor: Lado de la Masa Reactiva y el SdeP Reactor: Lado de la Chaqueta.

MSBF 4: Aplicar el Principio de Conservación sobre cada uno de los Sistemas de Proceso (SdeP).

Este paso pide formular los balances de materia, energía y cantidad de movimiento que permitan obtener expresiones para las dinámicas básicas del proceso. Como regla general, lo primero es considerar los balances de masa, uno total y otros por componentes de acuerdo a las necesidades del modelo. Esto es lo que se hace a continuación con todo detalle para el CSTR, puesto que a la vez sirve de ilustración del método de obtención de MSBF descrito previamente.

SdeP: Reactor Lado de la Masa Reactiva. Balance Total de Masa

Lo primero que se toma es un Balance Total de Masa en el reactor (al lado de cada variable se dan sus unidades para verificar la consistencia):

$$\frac{dM}{dt} \left(\frac{kg}{s} \right) = F_0 \left(\frac{m^3}{s} \right) * \rho_0 \left(\frac{kg}{m^3} \right) - F \left(\frac{m^3}{s} \right) * \rho \left(\frac{kg}{m^3} \right)$$

con M la masa total, F_0 el flujo de entrada al reactor, ρ_0 la densidad del fluido que se alimenta al reactor, F el flujo de salida y ρ la densidad del fluido que sale del reactor. Por definición, la Masa total será el volumen ocupado por la masa reactiva, multiplicado por la densidad de la mezcla: $M = V * \rho$. Si además, se asume densidad ρ constante, por estar trabajando con soluciones acuosas, se tendrá que:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d(V * \rho)}{dt} = \rho \frac{dV}{dt}$$

considerando ahora que el tanque reactor es cilíndrico, se puede calcular su Volumen $V = A_{Tanque} * L$, con L el nivel del líquido en el tanque y el Área transversal del Tanque A_{Tanque} constante, de modo que la ecuación de Balance queda:

$$\rho * A_{Tanque} * \frac{dL}{dt} = F_0 * \rho - F * \rho$$

se puede cancelar ρ en ambos lados y reorganizar la ecuación para obtener:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{A_{Tanque}} * [F_0 - F]$$

ecuación que ya permite apreciar cosas interesantes como el término $\frac{1}{A_{Tanque}}$ que denota la ganancia estática del tanque respecto de los cambios en los flujos de entrada y salida. Por ejemplo, un tanque con A_{Tanque} muy grande tendrá una ganancia del Nivel frente a los cambios de Caudal que tiende a cero (muy baja), mientras que un tanque con A_{Tanque} muy pequeña tendrá una ganancia de Flujo a Nivel muy alta.

De este modo queda expresada la Primera Dinámica en el CSTR: Dinámica de Nivel en el CSTR. Existen varias opciones de análisis dependiendo de la manera en la que los flujos entran y salen del CSTR:

Opción 1: El flujo de entrada se considera perturbación $d = F_0$, mientras que el flujo de salida F es debido al diferencial de presión entre una descarga libre y la presión aguas arriba de una válvula de control puesta en

la tubería de descarga del CSTR. En este caso, dicho flujo puede formularse usando un Balance de Energía Mecánica dado por la ecuación de Bernoulli:

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{\rho_1} \left(\frac{kg}{m \cdot s^2} \right) \left[\frac{m^2}{s^2} \right] + \frac{g}{g_c} z_1 \left(\frac{\frac{m}{s^2} * m}{\frac{kg-m}{N-s^2}} \right) &= \frac{m * \frac{kg \cdot m}{s^2}}{kg} = \frac{m^2}{s^2} + \frac{\alpha_1}{2g_c} v_1^2 \left(\frac{\frac{m^2}{s^2}}{\frac{kg-m}{N-s^2}} = \frac{m^2}{s^2} \right) \\ + \bar{W} \left(\frac{N-m}{kg} \right) &= \frac{\frac{kg \cdot m}{s^2} * m}{kg} = \frac{m^2}{s^2} = \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{g}{g_c} z_2 + \frac{\alpha_2}{2g_c} v_2^2 + h_{f_{1-2}} \end{aligned}$$

con P presión, g la constante de la gravedad, g_c una constante de conversión de unidades, z la altura del punto medio de la tubería respecto a un eje de referencia, α la constante para flujo laminar o turbulento ¹, v la velocidad del fluido, \bar{W} el trabajo por unidad de masa y $h_{f_{1-2}}$ las pérdidas por fricción entre los puntos 1 y 2, los cuales son: punto 1 el lado anterior (aguas arriba) de la válvula de control, mientras que el punto 2 es el lado posterior (aguas abajo o descarga) de la válvula de control. Si se asume que la válvula sólo opone una restricción al flujo en términos de estrechamiento del paso, es decir, una restricción de área variable pero de longitud de flujo a través del cuerpo de la válvula despreciable, se puede asegurar que $z_1 = z_2$ y $v_1 = v_2$.

Además, no se agrega trabajo por unidad de masa en la válvula por lo que $\bar{W} = 0$ y se considera que el fluido es un líquido incompresible por tanto de densidad constante $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Con todas estas simplificaciones, la ecuación de Balance de Energía Mecánica se convierte en:

$$\frac{P_1}{\rho} = \frac{P_2}{\rho} + h_{f_{1-2}}$$

Ahora recordando que las pérdidas por fricción ($h_{f_{1-2}}$) que causa una obstrucción se pueden formular como: $h_{f_{1-2}} = K_{orificio} * \frac{\alpha}{2g_c} * v_{orificio}^2$, con $K_{orificio}$ una constante asociada con la forma del orificio, se puede convertir la velocidad a través del orificio $v_{orificio}$ a caudal volumétrico utilizando el Área de Flujo A_{Flujo} : $v_{orificio} = \frac{F}{A_{Flujo}}$, se llega a: $h_{f_{1-2}} = K_{orificio} * \frac{\alpha}{2g_c} * \frac{F^2}{A_{Flujo}^2}$. Por lo tanto, al reemplazar en la ecuación de Balance de Energía Mecánica ya simplificada, se obtiene:

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho} \left(\frac{m^2}{s^2} \right) = K_{orificio} \left(\frac{kg \cdot m}{N \cdot s^2} \right) * \frac{\alpha}{2g_c} \left(\frac{N \cdot s^2}{kg \cdot m} \right) * \frac{F^2}{A_{Flujo}^2} \left(\frac{\frac{m^6}{s^2}}{m^4} = \frac{m^2}{s^2} \right)$$

y como el interés es despejar el flujo que circula por la válvula, se llega a:

$$F = \sqrt{\frac{2g_c * A_{Flujo}^2}{K_{orificio} * \alpha} \frac{P_1 - P_2}{\rho}}$$

que puede separarse en efectos más explicables:

$$F = A_{Flujo}(m^2) * \sqrt{\frac{2g_c}{K_{orificio} * \alpha} \left(\frac{kg-m}{N \cdot s^2} \right)} * \sqrt{\frac{P_1 - P_2}{\rho} \left(\frac{m^2}{s^2} \right)}$$

Al término $A_{Flujo} * \sqrt{\frac{2g_c}{K_{orificio} * \alpha}}$ se le denomina el Coeficiente de Descarga de la válvula C_v , que como se aprecia depende del grado de apertura A_{Flujo} , del coeficiente de pérdidas del orificio $K_{orificio}$ y del régimen

¹Para flujo laminar $\alpha = 1$, mientras que para flujo turbulento $\alpha = 2,0$.

de flujo del fluido a través de la válvula α . De este modo se llega a la expresión general de Flujo de un fluido incompresible a través de una válvula de control:

$$F\left(\frac{m^3}{s}\right) = C_v(m^2) * \sqrt{\frac{P_1 - P_2}{\rho}}\left(\frac{m}{s}\right)$$

Volviendo al caso del CSTR que se descarga por el fondo debido a la cabeza hidrostática del líquido en el tanque, la presión en el fondo será $P_{Fondo} = \rho * g * L$, siendo L el nivel o altura del líquido medido desde la posición de la descarga (el fondo en este caso). Se puede considerar que $P_1 = P_{Fondo}$ y que $P_2 = 0$ (puesto que se asume una descarga libre a la atmósfera), por lo tanto:

$$F = C_v * \sqrt{\frac{\rho * g * L}{\rho}} = C_v(m^2) * \sqrt{g\left(\frac{m}{s^2}\right) * L(m)}$$

Al reemplazar dicha expresión para el flujo de descarga F del CSTR en la ecuación de Balance de Masa Total en el CSTR $\frac{dL}{dt} = \frac{1}{A_{Tanque}} * [F_0 - F]$, se llega a:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{A_{Tanque}} F_0 - \frac{C_v \sqrt{g}}{A_{Tanque}} L^{1/2}$$

Opción 2: Existen otras opciones para el flujo de entrada considerado como perturbacion $d = F_0$. Por ejemplo dos de ellas son: *i*) flujo de descarga producido por una bomba en la tubería de salida y *ii*) descarga con contrapresión variable. Se deja al lector el arreglo de la ecuación general de esta dinámica para esas condiciones.

Balance de Masa por Componentes

Se toma un balance para el componente A o reactivo en el sistema:

$$\frac{dM_A}{dt} = F_0\left(\frac{m^3}{s}\right) * C_{A0}\left(\frac{kgmol}{m^3}\right) * \mathfrak{M}_A\left(\frac{kg}{kgmol}\right) - F * C_A * \mathfrak{M}_A + r * \mathfrak{M}_A$$

con M_A la masa total del componente A en el reactor, C_{A0} la concentración de A en la solución de alimento, \mathfrak{M}_A la masa molecular de A , C_A la concentración de A en la salida del CSTR y r la velocidad de conversión de A en B . Al recordar que la masa de A es simplemente su concentración por el volumen ocupado por toda la masa y por el peso molecular de A , es decir $M_A(kg) = C_A\left(\frac{kgmol}{m^3}\right) * V(m^3) * \mathfrak{M}_A\left(\frac{kg}{kgmol}\right)$, y retomando de la definición del proceso que la velocidad de reacción r , en este caso de desaparición del reactivo A (por eso el coeficiente estequiométrico será $\sigma_A = -1$), se formuló como $r = \sigma_A * k * C_A * V$, que por ley de Arrhenius puede tomarse como $r = \sigma_A * k_0 * C_A * e^{-\frac{E_a}{R*T}} * V$, la ecuación de balance de masa del componente A queda:

$$\begin{aligned} \frac{d(C_A * V * \mathfrak{M}_A)}{dt} &= F_0 * C_{A0} * \mathfrak{M}_A - F * C_A * \mathfrak{M}_A \\ &\quad - k_0 * C_A * e^{-\frac{E_a}{R*T}} * V * \mathfrak{M}_A \end{aligned}$$

con k_0 la constante de frecuencia de la ley de Arrhenius, E_a la energía de activación de la reacción y R la constante universal de los gases ideales. Al tomar la derivada de un producto, con la consideración de $\mathfrak{M}_A = \text{cte}$, lo que permite cancelar dicho valor en ambos lados de la ecuación, se llega a:

$$C_A * \frac{dV}{dt} + V * \frac{dC_A}{dt} = F_0 * C_{A0} - F * C_A - k_0 * C_A * e^{-\frac{E_a}{R*T}} * V$$

que como se observa contiene dos diferenciales, lo que implica conocer $\frac{dV}{dt}$ para poder expresar la Ecuación Diferencial (ED) para la concentración de A (asumiendo $\frac{dV}{dt}$ como un dato) en la forma tradicional:

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F_0}{V} * C_{A0} - \frac{F}{V} * C_A - k_0 * C_A * e^{-\frac{E_a}{R*T}} - \frac{1}{V} * C_A * \frac{dV}{dt}$$

restando sólo expresar el flujo de salida F de acuerdo con su formulación particular (vease la discusión previa). Tomemos por ejemplo la *Opción 1* vista arriba, con lo que se obtiene finalmente una expresión para la Segunda Dinámica en el CSTR (Dinámica de la Concentración del Reactivo A):

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F_0}{V} C_{A0} - \frac{C_v \sqrt{g}}{V} L^{1/2} C_A - k_0 C_A e^{-\frac{E_a}{R*T}} - \frac{1}{V} C_A \frac{dV}{dt}$$

Como $V = A_{Tanque} * L$, reemplazando en la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F_0}{A_{Tanque} L} C_{A0} - \frac{C_v \sqrt{g}}{A_{Tanque} L} L^{1/2} C_A - k_0 C_A e^{-\frac{E_a}{R*T}} - \frac{1}{L} C_A \frac{dL}{dt}$$

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F_0}{A_{Tanque} L} C_{A0} - \frac{C_v \sqrt{g}}{A_{Tanque} L^{1/2}} C_A - k_0 C_A e^{-\frac{E_a}{R*T}} - \frac{1}{L} C_A \frac{dL}{dt}$$

Debe decirse en este punto que la expresión para la concentración de producto B es inmediata y resulta redundante, contando ya con el Balance de Masa Total y el Balance de Masa del Componente A , puesto que la estequiometría es conocida y fija $A \rightarrow B$. Se deja al lector la obtención de tal ED, aunque no se requiere para el modelo por su caracter de ED redundante.

Balance de Energía

Se toma ahora un balance de energía (el balance general) sobre el sistema Reactor: Lado de la Masa Reactiva.

$$\frac{dE_{Total}}{dt} = F_0 * \rho_0 * \hat{H}_0 - F * \rho * \hat{H} + r * \Delta \bar{H}_R + \dot{Q} - \dot{W}$$

con E_{Total} la energía total del SdeP, \hat{H}_0 y \hat{H} las entalpías por unidad de masa de las corrientes de entrada y salida respectivamente, $\Delta \bar{H}_R$ el calor de reacción [$\frac{kJ}{kgmol}$] de $A \rightarrow B$, \dot{Q} el calor por unidad de tiempo liberado por la reacción y considerando que $\dot{Q} > 0$ es el flujo de calor de los alrededores a la masa reactiva y que $\dot{W} > 0$ es el trabajo realizado por la masa reactiva sobre los alrededores. Recordando que la E_{Total} de la masa reactiva es la suma de las energías Potencial (E_p), Cinética (E_k) y Libre (U): $E_{Total} = E_p + E_k + U$, y considerando además que los efectos de E_p , así como los efectos de E_k (entre la entrada y la salida del reactor), son despreciables, se llega a:

$$\frac{dU}{dt} = F_0 * \rho_0 * \hat{H}_0 - F * \rho * \hat{H} + r * \Delta \bar{H}_R + \dot{Q} - \dot{W}$$

Ahora, al considerar que no existe adición ni retiro de trabajo mecánico (expansivo-compresivo) desde la masa reactiva $\dot{W} = 0$ y que la energía interna para una masa líquida puede aproximarse como $U = M_{Total} * C_V * T = M_{Total} * C_P * T$, con T la temperatura de la masa reactivo, C_V la capacidad calorífica a volumen constante

de la sustancia y C_P la capacidad calorífica a presión constante, que para líquidos resultan ser $C_V \cong C_P$, se llega a:

$$\frac{d(M_{Total} * C_P * T)}{dt} = F_0 * \rho_0 * \hat{H}_0 - F * \rho * \hat{H} + r * \Delta \bar{H}_R + \dot{Q}$$

Aunque existe la opción de calcular $C_P = f(T)$, es posible asumirla constante para el intervalo de temperaturas de interés, por lo que sale del diferencial, mientras que la masa total es $M_{Total} = V * \rho$, que recordando el supuesto de densidad constante permite que el diferencial se exprese como:

$$\frac{d(M_{Total} * C_P * T)}{dt} = C_P * \rho * \frac{d(V * T)}{dt} = C_P * \rho * V * \frac{dT}{dt} + C_P * \rho * T * \frac{dV}{dt}$$

que al reemplazarse en la ecuación queda:

$$C_P * \rho * V * \frac{dT}{dt} + C_P * \rho * T * \frac{dV}{dt} = F_0 * \rho_0 * \hat{H}_0 - F * \rho * \hat{H} + r * \Delta \bar{H}_R + \dot{Q}$$

y recordando la idea de encontrar una ED homogénea en una variable (en este caso temperatura), se debe asumir $\frac{dV}{dt}$ como dato, para llegar a:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C_P * \rho * V} * \left[F_0 * \rho_0 * \hat{H}_0 - F * \rho * \hat{H} + r * \Delta \bar{H}_R + \dot{Q} - C_P * \rho * T * \frac{dV}{dt} \right]$$

en la cual se pueden reemplazar las formulaciones previamente halladas para la velocidad de reacción r y para el flujo de descarga por el fondo del CSTR F :

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = & \frac{1}{C_P * \rho * V} [F_0 * \rho_0 * \hat{H}_0 - C_v * \sqrt{g} * L^{1/2} * \rho * \hat{H} - k_0 * C_A * e^{-\frac{E_a}{R * T}} * V * \Delta \bar{H}_R \\ & + \dot{Q} - C_P * \rho * T * \frac{dV}{dt}] \end{aligned}$$

Finalmente, el flujo de calor intercambiado \dot{Q} entre el fluido de proceso (masa reactiva en el interior del CSTR) y el fluido de servicio (que circula por la chaqueta), puede expresarse como: $\dot{Q} = -U * A_J * (T - T_J)$, siendo U el coeficiente global de transferencia de calor, A_J el área de transferencia de calor entre el fluido en la chaqueta y la masa reactiva en el interior del reactor y T_J la temperatura media del fluido en la chaqueta. Reemplazando esta última expresión en la ED para el balance de energía en la masa del reactor y con $V = A_{Tanque} L$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = & \frac{1}{C_P \rho A_{Tanque} L} [F_0 \rho_0 \hat{H}_0 - C_v \sqrt{g} L^{1/2} \rho \hat{H} - k_0 C_A e^{-\frac{E_a}{R * T}} * A_{Tanque} L * \Delta \bar{H}_R \\ & - U A_J (T - T_J) - C_P \rho A_{Tanque} T \frac{dL}{dt}] \end{aligned}$$

que finalmente puede simplificarse recordando que la entalpía puede expresarse como una función de un C_P promedio y un intervalo de temperaturas (entre T y una Temperatura de Referencia T_{Ref}): $\bar{H} = C_P * (T - T_{Ref})$. De este modo se obtiene:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C_P \rho A_{Tanque} L} [F_0 \rho_0 C_P (T_0 - T_{Ref}) - C_v \sqrt{g} L^{1/2} \rho C_P (T - T_{Ref}) - k_0 C_A e^{-\frac{E_a}{R^* T}} * A_{Tanque} L * \Delta \bar{H}_R - U A_J (T - T_J) - C_P \rho A_{Tanque} T \frac{dL}{dt}]$$

Sistema de Proceso Reactor Lado de la Chaqueta Balance Total de Masa

Al tomar el Balance Total de Masa en este sistema, la solución es trivial puesto que asumir que por la chaqueta circula un líquido incompresible (de densidad constante $\rho_J = \rho_{0J} = cte$) y además que la chaqueta está completamente llena siempre, implica que no existe acumulación de Masa en la chaqueta y por lo tanto los flujos de entrada y salida a la chaqueta con iguales: $F_{0J} = F_J$. Por lo tanto no se plantea este balance puesto que no aporta información al modelo. Atención, si el fluido que circula por la chaqueta cambiara de densidad entre la entrada y la salida, habría que formular el balance para seguir los cambios de masa en la chaqueta (cambios de densidad y cambios de presión), como sucedería si es un vapor que está condensando o un líquido que se está evaporando.

Balance de Energía

Este balance en la chaqueta es:

$$\frac{dE_{Total J}}{dt} = F_{0J} * \rho_{0J} * \hat{H}_{0J} - F_J * \rho_J * \hat{H}_J + \dot{Q} - \dot{W}$$

con $E_{Total J}$ la energía total del SdeP lado de la chaqueta, \hat{H}_{0J} y \hat{H}_J las entalpías por unidad de masa de las corrientes de entrada y salida de la chaqueta respectivamente. Considerando que no hay cambio de densidad en el fluido de la chaqueta, que no existe trabajo de eje en la chaqueta $\dot{W} = 0$, que $\dot{Q} > 0$ es el flujo de calor de los alrededores a la chaqueta, que se formula como: $\dot{Q} = U * A_J * (T - T_J)$ y recordando la definición de Energía Total usada previamente, se llega a:

$$\frac{d(M_{Total J} * C_{P J} * T_J)}{dt} = F_J * \rho_J * (\hat{H}_{0J} - \hat{H}_J) + U * A_J * (T - T_J)$$

con $M_{Total J}$ la masa total de fluido en el interior de la chaqueta y $C_{P J}$ la capacidad calorífica del fluido que llena la chaqueta. Lo dicho previamente sobre el fluido de la chaqueta y su condición de no acumulación de masa, además de la consideración de una capacidad calorífica constante, lleva a la ecuación que describe la dinámica de la temperatura de la chaqueta tras reemplazar $M_{Total J}$ por el producto entre el volumen de la chaqueta y la densidad del fluido térmico ($V_J * \rho_J$):

$$\frac{dT_J}{dt} = \frac{1}{V_J \rho_J C_{P J}} [F_J \rho_J (\hat{H}_{0J} - \hat{H}_J) + U A_J (T - T_J)]$$

Esta es la dinámica final del CSTR formulado bajo los supuestos establecidos para la operación del sistema. Por lo tanto, el modelo completo y general del CSTR, asumiendo flujo de descarga a través de una válvula de control con coeficiente de descarga C_v , se presenta en las siguientes cuatro Ecuaciones Diferenciales (ED):

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= \frac{1}{A_{Tanque}} F_0 - \frac{C_v \sqrt{g}}{A_{Tanque}} L^{1/2} \\
\frac{dC_A}{dt} &= \frac{F_0}{A_{Tanque} L} C_{A0} - \frac{C_v \sqrt{g}}{A_{Tanque} L^{1/2}} C_A - k_0 C_A e^{-\frac{E_a}{R^* T}} - \frac{1}{L} C_A \frac{dL}{dt} \\
\frac{dT}{dt} &= \frac{1}{C_P \rho A_{Tanque} L} [F_0 \rho_0 C_P (T_0 - T_{Ref}) - C_v \sqrt{g} L^{1/2} \rho C_P (T - T_{Ref}) \\
&\quad - k_0 C_A e^{-\frac{E_a}{R^* T}} * A_{Tanque} L * \Delta \bar{H}_R - U A_J (T - T_J) - C_P \rho A_{Tanque} T \frac{dL}{dt}] \\
\frac{dT_J}{dt} &= \frac{1}{V_J \rho_J C_{P_J}} [F_J \rho_J (\bar{H}_{0J} - \bar{H}_J) + U A_J (T - T_J)]
\end{aligned} \tag{8.1}$$

Algunas Simplificaciones Frecuentes en el Modelo Al modelo completo y general del CSTR (Ecuaciones 8.1) es frecuente hacerle simplificaciones para utilizar sólo aquellos estados de interés en determinado estudio o para concentrarse sólo en los estados más relevantes bajo una cierta condición operativa.

PRIMERA MODIFICACIÓN: Pasar de cuatro a tres dinámicas. Es posible realizar una simplificación considerando que por diseño, el volumen útil del tanque es varias decenas de veces más grande que el volumen de la chaqueta, por lo que la dinámica de la chaqueta es más rápida que la del tanque. En este caso, no se considera la ecuación diferencial de la chaqueta y se asume una T_J constante, que debe darse como un dato para la solución del modelo.

Opción 1: Si se usa la Diferencia Media Logarítmica de Temperaturas (LMTD) de las temperaturas de entrada y salida de los fluidos al proceso²: T_0 , T , T_{0J} y T_J :

$$LMTD = \frac{(T_J - T_{0J})}{\ln\left(\frac{T - T_{0J}}{T - T_J}\right)}$$

por lo tanto, el flujo de calor será ahora:

$$\dot{Q} = U * A_J * \frac{(T_J - T_{0J})}{\ln\left(\frac{T - T_{0J}}{T - T_J}\right)}$$

Puesto que no se tienen variación temporal en la temperatura de la chaqueta o es de muy corta duración, se puede utilizar el balance en estado estacionario asumiendo además que la entalpía puede expresarse como una función del C_{PJ} y del intervalo de temperaturas: $\hat{H}_J = C_{PJ} * (T_J - T_{Ref})$. Se puede además reemplazar la expresión para el flujo de calor entre la chaqueta y la masa reactiva en función del LMTD, con lo cual la ecuación de balance de energía en la chaqueta queda, :

$$\frac{dT_J}{dt} = 0 = \frac{1}{M_{Total J} C_{P_J}} [F_J \rho_J C_{P_J} (T_{0J} - T_J) + U A_J \frac{(T_J - T_{0J})}{\ln\left(\frac{T - T_{0J}}{T - T_J}\right)}]$$

que despejando el término que contiene a T_J conduce a:

²La fórmula genérica para el LMTD dice: Logarithmic Mean Temperature Difference $LMTD = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln\left(\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}\right)}$ siendo 1 y 2, subíndices que indica las corrientes de proceso.

$$\begin{aligned}
F_J \rho_J C_{P J} (T_{0 J} - T_J) &= -\dot{Q} = -U A_J \frac{(T_J - T_{0 J})}{\ln\left(\frac{T - T_{0 J}}{T - T_J}\right)} \Rightarrow \\
F_J \rho_J C_{P J} &= U A_J \frac{1}{\ln\left(\frac{T - T_{0 J}}{T - T_J}\right)} \Rightarrow \\
\ln\left(\frac{T - T_{0 J}}{T - T_J}\right) &= \frac{U A_J}{F_J \rho_J C_{P J}} \Rightarrow \\
\frac{T - T_{0 J}}{T - T_J} &= \exp\left(\frac{U A_J}{F_J \rho_J C_{P J}}\right) \Rightarrow \\
\frac{T_{0 J} - T}{\exp\left(\frac{U A_J}{F_J \rho_J C_{P J}}\right)} &= T_J - T \Rightarrow \\
T_J &= T + \frac{T_{0 J} - T}{\exp\left(\frac{U A_J}{F_J \rho_J C_{P J}}\right)}
\end{aligned}$$

Está última expresión muestra la condición de estado estacionario de la temperatura de la chaqueta, por lo tanto permite calcular el valor de la Temperatura de Chaqueta T_J , dadas las otras condiciones operativas del CSTR. Además, brinda una expresión alterna para el flujo de calor: $F_J \rho_J C_{P J} (T_J - T_{0 J}) = \dot{Q}$, que es equivalente a la más sencilla asumida previamente: $U A_J (T - T_J)$. Por lo tanto, puede reemplazarse en la ecuación del Estado Temperatura de la masa reactiva, tanto T_J como esta nueva expresión para \dot{Q} , obteniendo:

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= \frac{1}{C_P \rho V} [F_0 \rho_0 C_P (T_0 - T_{Ref}) - C_v \sqrt{g} L^{1/2} \rho C_P (T - T_{Ref}) - k_0 C_A e^{-\frac{E_a}{R^* T}} V \Delta \bar{H}_R \\
&\quad - F_J \rho_J C_{P J} (T_J - T_{0 J}) - C_P \rho T \frac{dV}{dt}] \Rightarrow \\
\frac{dT}{dt} &= \frac{1}{C_P \rho V} [F_0 \rho_0 C_P (T_0 - T_{Ref}) - C_v \sqrt{g} L^{1/2} \rho C_P (T - T_{Ref}) - k_0 C_A e^{-\frac{E_a}{R^* T}} V \Delta \bar{H}_R \\
&\quad - F_J \rho_J C_{P J} \left(T + \frac{T_{0 J} - T}{\exp\left(\frac{U A_J}{F_J \rho_J C_{P J}}\right)} - T_{0 J}\right) - C_P \rho T \frac{dV}{dt}] \\
\frac{dT}{dt} &= \frac{1}{C_P \rho V} [F_0 \rho_0 C_P (T_0 - T_{Ref}) - C_v \sqrt{g} L^{1/2} \rho C_P (T - T_{Ref}) - k_0 C_A e^{-\frac{E_a}{R^* T}} V \Delta \bar{H}_R \\
&\quad - F_J \rho_J C_{P J} \left[\exp\left(-\frac{U A_J}{F_J \rho_J C_{P J}}\right) (T_{0 J} - T) + T - T_{0 J}\right] - C_P \rho T \frac{dV}{dt}]
\end{aligned}$$

llegando a la siguiente expresión, que ya no contiene a T_J :

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= \frac{1}{C_P \rho V} [F_0 \rho_0 C_P (T_0 - T_{Ref}) - C_v \sqrt{g} L^{1/2} \rho C_P (T - T_{Ref}) - k_0 C_A e^{-\frac{E_a}{R^* T}} V \Delta \bar{H}_R \\
&\quad + F_J \rho_J C_{P J} (T_{0 J} - T) \left[1 - \exp\left(-\frac{U A_J}{F_J \rho_J C_{P J}}\right)\right] - C_P \rho T \frac{dV}{dt}]
\end{aligned}$$

Como $V = A_{Tanque} * L$, reemplazando en la expresión anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = & \frac{1}{C_P \rho A_{Tanque} L} [F_0 \rho_0 C_P (T_0 - T_{Ref}) - C_v \sqrt{g} L^{1/2} \rho C_P (T - T_{Ref}) \\ & - k_0 C_A e^{-\frac{E_a}{R^* T}} A_{Tanque} * \Delta \bar{H}_R \\ & + F_J \rho_J C_{P J} (T_0 J - T) [1 - \exp(-\frac{U A_J}{F_J \rho_J C_{P J}})] - C_P \rho A_{Tanque} T \frac{dL}{dt}] \end{aligned}$$

y cambiando signo detro y fuera del paréntesis del penúltimo término, además de tomar $T_{Ref} = 0^\circ C$:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = & \frac{1}{C_P \rho A_{Tanque} L} [F_0 \rho_0 C_P T_0 - C_v \sqrt{g} L^{1/2} \rho C_P T \\ & - k_0 C_A e^{-\frac{E_a}{R^* T}} A_{Tanque} * L * \Delta \bar{H}_R \\ & - F_J \rho_J C_{P J} (T - T_0 J) [1 - \exp(-\frac{U A_J}{F_J \rho_J C_{P J}})] - C_P \rho A_{Tanque} T \frac{dL}{dt}] \end{aligned}$$

Finalmente, si se realizan los cocientes indicados, con el supuesto de que la densidad del fluido a la entrada es la misma que la del fluido a la salida (al interior del reactor), se llega a la expresión final para esta primera opción:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = & \frac{F_0 T_0}{A_{Tanque} L} - \frac{C_v \sqrt{g} L^{1/2} T}{A_{Tanque} L} \\ & - \frac{k_0 C_A e^{-\frac{E_a}{R^* T}} * \Delta \bar{H}_R}{C_P \rho} \\ & - \frac{F_J \rho_J C_{P J} (T - T_0 J)}{C_P \rho A_{Tanque} L} [1 - \exp(-\frac{U A_J}{F_J \rho_J C_{P J}})] - \frac{T}{L} \frac{dL}{dt} \end{aligned}$$

Opción 2: Por simplicidad, es frecuente usar la diferencia Algebraica sencilla para las temperaturas. Por lo tanto, el flujo de calor será ahora:

$$\dot{Q} = U * A_J * (T - T_J)$$

Igual que en la *Opción 1*, no se tiene variación temporal en la temperatura de la chaqueta, con lo que se puede utilizar la expresión del balance en estado estacionario en la chaqueta, asumiendo además que la entalpía puede expresarse como una función de C_P y del intervalo de temperaturas: $\hat{H}_J = C_{P J} * (T_J - T_{Ref})$. Se puede además reemplazar la expresión para el flujo de calor entre la chaqueta y la masa reactiva en función de la diferencia algebraica de temperaturas sencilla, con lo cual la ecuación de balance de energía en la chaqueta queda:

$$\frac{dT_J}{dt} = 0 = \frac{1}{M_{Total J} C_{P J}} [F_J \rho_J C_{P J} (T_0 J - T_J) + U A_J (T - T_J)] \quad (8.2)$$

que despejando conduce a:

$$\begin{aligned}
F_J \rho_J C_{P,J} (T_{0,J} - T_J) &= -U A_J (T - T_J) \Rightarrow \\
F_J \rho_J C_{P,J} T_{0,J} - F_J \rho_J C_{P,J} T_J &= -U A_J T + U A_J T_J \Rightarrow \\
F_J \rho_J C_{P,J} T_{0,J} + U A_J T &= (U A_J + F_J \rho_J C_{P,J}) * T_J \Rightarrow \\
T_J &= \frac{F_J \rho_J C_{P,J} T_{0,J} + U A_J T}{U A_J + F_J \rho_J C_{P,J}}
\end{aligned}$$

Está última expresión muestra la condición de estado estacionario de la temperatura de la chaqueta, por lo tanto permite calcular el valor de la Temperatura de Chaqueta T_J , dadas las otras condiciones operativas del CSTR. Por lo tanto, puede reemplazarse en la ecuación del Estado Temperatura de la masa reactiva, obteniendo una expresión que ya no contiene a T_J :

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= \frac{1}{C_P \rho A_{Tanque} L} [F_0 \rho_0 C_P (T_0 - T_{Ref}) \\
&\quad - C_v \sqrt{g} L^{1/2} \rho C_P (T - T_{Ref}) - k_0 C_A e^{-\frac{E_a}{R^* T}} * A_{Tanque} L * \Delta \bar{H}_R - U A_J T \\
&\quad + \frac{U A_J F_J \rho_J C_{P,J} T_{0,J}}{U A_J + F_J \rho_J C_{P,J}} + \frac{(U A_J)^2}{U A_J + F_J \rho_J C_{P,J}} T - C_P \rho A_{Tanque} T \frac{dL}{dt}]
\end{aligned}$$

que simplificando los cocientes y tomando $T_{Ref} = 0^\circ C$ da:

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= \frac{1}{C_P \rho A_{Tanque} L} [F_0 \rho_0 C_P T_0 \\
&\quad - C_v \sqrt{g} L^{1/2} \rho C_P T - k_0 C_A e^{-\frac{E_a}{R^* T}} * A_{Tanque} L * \Delta \bar{H}_R - U A_J T \\
&\quad + \frac{F_J \rho_J C_{P,J} T_{0,J}}{1 + \frac{F_J \rho_J C_{P,J}}{U A_J}} + \frac{U A_J}{1 + \frac{F_J \rho_J C_{P,J}}{U A_J}} T - C_P \rho A_{Tanque} T \frac{dL}{dt}]
\end{aligned}$$

Finalmente, si se realizan los cocientes indicados en el corchete mayor, con el supuesto de que la densidad del fluido a la entrada es la misma que la del fluido a la salida (al interior del reactor), se llega a la expresión final para esta Segunda Opción:

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= \frac{F_0 T_0}{A_{Tanque} L} - \frac{C_v \sqrt{g} L^{1/2}}{A_{Tanque} L} T - \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* T}} * \Delta \bar{H}_R}{C_P \rho} C_A \\
&\quad - \frac{U A_J}{C_P \rho A_{Tanque} L} T + \frac{F_J \rho_J C_{P,J}}{C_P \rho A_{Tanque} L (1 + \frac{F_J \rho_J C_{P,J}}{U A_J})} T_{0,J} \\
&\quad + \frac{U A_J}{C_P \rho A_{Tanque} L (1 + \frac{F_J \rho_J C_{P,J}}{U A_J})} T - \frac{1}{L} T \frac{dL}{dt}
\end{aligned}$$

que es la ecuación dinámica que describe el comportamiento del Estado Temperatura de la masa reactiva en el CSTR con la *Opción 2* para el gradiente de temperatura.

SEGUNDA MODIFICACIÓN: Pasar de TRES a DOS dinámicas. Esta es la última simplificación que se reporta en la literatura, y con la cual se trabajará aquí [Bequette, 1998]. Consiste en asumir que el nivel está controlado, debido a la simplicidad que presenta el control de esa dinámica. Por lo tanto, el modelo del

proceso queda solamente con la dinámica de Concentración C_A y la dinámica de Temperatura T . Además, para usar el modelo más simplificado, se toma la *Opción 2* de la primera modificación sugerida previamente. Es decir, el gradiente de temperatura se mide como la diferencia algebraica entre la temperatura de la chaqueta y la de la masa reactiva. No se toma el LMTD para esa diferencia. Se llega a que las dinámicas principales del sistema son los estados C_A y T , bajo las siguientes consideraciones: *i*) los requerimientos del producto están asociados con la Concentración del reactivo (C_A), pero la Temperatura es crucial en el desarrollo de la reacción, *ii*) el Nivel en este caso es una variable de fácil control, y *iii*) por diseño, los tiempos de residencia del refrigerante en la chaqueta son cortos comparados con los tiempos de residencia del fluido de proceso en el reactor, por lo que la temperatura de la chaqueta es aproximadamente la misma en toda la chaqueta pero diferente a la de entrada. Con esto es posible convertir la dinámica de la temperatura de la chaqueta en una función estática. Bajo estos supuestos, y reemplazando $A_{Tanque}L$ por el Volumen V del tanque, y $C_v\sqrt{g}L^{1/2}$ por el Flujo de salida F del tanque (que ya queda independiente del nivel al ser este último constante $\frac{dL}{dt} = 0$), se llega a las dos ecuaciones diferenciales de este modelo:

Primera dinámica correspondiente a la Concentración del reactivo C_A :

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F_0}{V}C_{A0} - \frac{F}{V}C_A - k_0e^{-\frac{E_0}{R^*T}}C_A \quad (8.3)$$

Segunda dinámica correspondiente a Temperatura T de la masa reactiva

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = & \frac{F_0T_0}{V} - \frac{F}{V}T - \frac{k_0e^{-\frac{E_0}{R^*T}} * \Delta\bar{H}}{C_P\rho}C_A \\ & - \frac{UA_J}{C_P\rho V}T + \frac{F_J\rho_J C_{P,J}}{C_P\rho V(1 + \frac{F_J\rho_J C_{P,J}}{UA_J})}T_{0,J} + \frac{UA_J}{C_P\rho V(1 + \frac{F_J\rho_J C_{P,J}}{UA_J})}T \end{aligned} \quad (8.4)$$

MSBF_5: *Seleccionar entre las Ecuaciones Dinámicas de Balance (EDB) aquellas con información valiosa para cumplir con el objetivo del modelo.*

De la discusión previa se evidencia que de las cuatro Ecuaciones Dinámicas de Balance (EDB) halladas previamente (Ecuaciones 8.1), los estados de interés son: Concentración de reactivo a la salida del reactor (C_A) y Temperatura de la masa reactiva (T). Por lo tanto, el Modelo con el que se trabajará en adelante es el representado por el sistema de ED formado por las Ecuaciones 8.3 y 8.4.

MSBF_6: *Definir para las EDB esenciales, los parámetros, las variables y las constantes conocidas en cada SdeP.*

Este paso es el que exige un pareamiento semilla que permita diferenciar a las variables (\mathbf{u} , \mathbf{x}) de los parámetros de diseño y de las constantes. Puesto que el Procedimiento de DSPyC propuesto en este trabajo exige que el modelo pueda llevarse a la forma canónica afin de la Ecuación 7.1, se debe probar esa condición en todos los posibles pareamientos entre las acciones de control (u_1 y u_2) y los estados $x_1 = C_A$ y $x_2 = T$. Al menos dos condiciones adicionales que ayudan a reducir el número de pareamientos a probar son: *i*) que u_1 esté en la ecuación para el estado x_1 y que u_2 esté en la ecuación del estado x_2 y *ii*) que tanto u_1 como u_2 sean manipulaciones técnicamente factibles y económicamente viables en el Proceso real. Estas dos condiciones pueden ser restrictivas para el problema en abstracto (problema matemático), pero generalmente entregan pareamientos más acordes con la facilidad de control en el Proceso real. Por lo tanto, las posibles acciones de control para el estado $x_1 = C_A$ son: F_0 y F , mientras que para el estado $x_2 = T$ son: F_0 , T_0 , F , U , A_J , F_J y $T_{0,J}$. Puesto que el nivel L del reactor está controlado, es válido asumir que el sistema de control está regulando el flujo de salida F y no el de entrada F_0 para mantener nivel constante, todo por

las condiciones operativas típicas de un CSTR [Henson and Seborg, 1990]. Eso deja como opción única a F_0 para actuar como la acción de control del primer estado, quedando el pareamiento: $F_0 \rightarrow C_A$. Respecto al segundo estado, pueden descartarse como posibles acciones de control sobre la temperatura: a F_0 y F por lo ya dicho, a T_0 porque dejaría a la chaqueta sin ningún uso práctico, a U porque en realidad es una variable que depende paracialmente de otra (F_J) que está opcionada y a A_J porque para manipularla habría que variar el nivel del reactor por debajo del nivel que ocupa la chaqueta, lo que afectaría el tiempo de residencia de los reactivos y por ende al primer estado C_A . Con esto, quedan como opciones: F_J y T_{0J} , y por lo tanto sólo dos pareamientos a probar. Lo que sigue son las expresiones del modelo en términos de variables de control (x_1, x_2, u_1, u_2) para esos dos pareamientos posibles.

Primer Pareamiento: [$u_1 = F_0 \rightarrow x_1 = C_A$ y $u_2 = F_J \rightarrow x_2 = T$]:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{C_{A0}}{V}u_1 - \frac{F}{V}x_1 - k_0e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}}x_1$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T_0}{V}u_1 - \frac{F}{V}x_2 - \frac{k_0e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}} * \Delta\bar{H}_R}{C_P\rho}x_1$$

$$- \frac{UA_J}{C_P\rho V}x_2 + \frac{\rho_J C_{P,J} T_{0,J}}{C_P\rho V(1 + \frac{u_2 * \rho_J C_{P,J}}{UA_J})}u_2 + \frac{UA_J}{C_P\rho V(1 + \frac{u_2 * \rho_J C_{P,J}}{UA_J})}x_2$$

que debe manipularse trasladando la acción de control original $u_2 = F_J$ a $u_2^* = \frac{1}{(1 + \frac{u_2 * \rho_J C_{P,J}}{UA_J})}$, que implica despejar $u_2 = (\frac{1}{u_2^*} - 1) \frac{UA_J}{\rho_J C_{P,J}}$, para buscar la forma canónica esperada:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T_0}{V}u_1 - \frac{F}{V}x_2 - \frac{k_0e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}} * \Delta\bar{H}_R}{C_P\rho}x_1$$

$$- \frac{UA_J}{C_P\rho V}x_2 + \frac{\rho_J C_{P,J} T_{0,J}}{C_P\rho V}u_2^* * (\frac{1}{u_2^*} - 1) \frac{UA_J}{\rho_J C_{P,J}} + \frac{UA_J}{C_P\rho V}u_2^* * x_2$$

a la que se llega tras aplicar las operaciones indicadas en el penúltimo término:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T_0}{V}u_1 - \frac{F}{V}x_2 - \frac{k_0e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}} * \Delta\tilde{H}_R}{C_P\rho}x_1$$

$$- \frac{UA_J}{C_P\rho V}x_2 + \frac{UA_J T_{0,J}}{C_P\rho V} - \frac{UA_J T_{0,J}}{C_P\rho V}u_2^* + \frac{UA_J}{C_P\rho V}u_2^* * x_2$$

y expresar el modelo en forma matricial, con la acción de control modificada u_2^* :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{F}{V}x_1 - k_0e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}}x_1 \\ -\frac{F}{V}x_2 - \frac{k_0e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}} * \Delta\tilde{H}_R}{C_P\rho}x_1 - \frac{UA_J}{C_P\rho V}x_2 + \frac{UA_J T_{0,J}}{C_P\rho V} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{C_{A0}}{V} & 0 \\ \frac{T_0}{V} & -\frac{UA_J T_{0,J}}{C_P\rho V} + \frac{UA_J}{C_P\rho V} * x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2^* \end{bmatrix}$$

Segundo Pareamiento: [$u_1 = F_0 \rightarrow x_1 = C_A$ y $u_2 = T_{0J} \rightarrow x_2$]:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{u_1}{V}C_{A0} - \frac{F}{V}x_1 - k_0e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}}x_1$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T_0}{V} \left[u_1 - \frac{F}{V}x_2 - \frac{k_0e^{-\frac{E_a}{R^*T}} * \Delta\tilde{H}_R}{C_P\rho}x_1 \right]$$

$$- \frac{UA_J}{C_P\rho V}x_2 + \frac{F_J\rho_J C_{P,J}}{C_P\rho V(1 + \frac{F_J\rho_J C_{P,J}}{UA_J})}u_2 + \frac{UA_J}{C_P\rho V(1 + \frac{F_J\rho_J C_{P,J}}{UA_J})}x_2$$

que de inmediato se ve cumple con la forma canónica matricial, e incluso, de manera más sencilla que el primer pareamiento:

$$\begin{bmatrix} \bullet \\ x_1 \\ \bullet \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{F}{V}x_1 - k_0e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}}x_1 \\ -\frac{F}{V}x_2 - \frac{k_0e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}} * \Delta\tilde{H}_R}{C_P\rho}x_1 - \frac{UA_J}{C_P\rho V}x_2 + \frac{UA_J}{C_P\rho V(1 + \frac{F_J\rho_J C_{P,J}}{UA_J})}x_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{C_{A0}}{V} & 0 \\ \frac{T_0}{V} & \frac{F_J\rho_J C_{P,J}}{C_P\rho V(1 + \frac{F_J\rho_J C_{P,J}}{UA_J})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Resulta evidente tomar la segunda opción, por su sencillez [Bequette, 1998]. Tal decisión intuitiva está sustentada también en el análisis hecho con la técnica de evaluación de controlabilidad estructural por medio de dígrafos [Kim, 1997; Lee et al., 2001]. Con esa herramienta se verifica el orden relativo del dígrafo asociado a cada pareamiento. Para la segunda opción de pareamiento [$u_1 = F_0 \rightarrow x_1$ $u_2 = T_{0J} \rightarrow x_2$], el orden relativo del dígrafo es menor, por lo que resulta ser el pareamiento elegido tal y como se explica en detalle en [Ochoa, 2005]. Por lo tanto, tomado este pareamiento se ve del Modelo que la clasificación pedida en este paso del método de modelado queda así:

Variables del Proceso: Temperatura de entrada del fluido de servicio T_{0J} , Flujo de entrada F_0 y de salida F , que resultan iguales con el supuesto de nivel constante ($\frac{dL}{dt} = 0$), y los dos estados C_A y T . Nótese que los flujos F_0 y F hacen parte de las variables de diseño, puesto que dado un volumen V , con ellos se modifica el tiempo de residencia τ_{Res} y la conversión (X_C).

Parámetros del Proceso: Calor de reacción $\Delta\bar{H}_R$, Capacidad calorífica y densidad del fluido de proceso C_P, ρ y del fluido de servicio C_{PJ}, ρ_J y Coeficiente global de transferencia de calor U .

Constantes (en las que se incluyen las perturbaciones en su valor nominal y los parámetros de diseño): Volumen V , Concentración de reactivo C_{A0} a la entrada, Constante de frecuencia de la ley de Arrhenius k_0 , Energía de activación E_a de la reacción, Constante univesal R de los gases, Temperatura de entrada T_0 del flujo de alimento, Flujo del fluido de servicio F_J por la chaqueta y Área de transferencia de calor A_J entre chaqueta y masa reactiva. Nótese que el volumen V del reactor es una variable de diseño.

MSBF_7: Hallar ecuaciones constitutivas que permitan calcular en cada Sistema de Proceso el mayor número de parámetros.

En este caso, y por simplicidad, se considera que casi todos los parámetros son de valor constante, por lo que no es necesario contar con ninguna ecuación constitutiva. En el caso del CSTR de este ejemplo, los parámetros tomados de [Bequette, 1998; Bequette, 2002], se muestran en la Tabla 1. El reactor dado por Bequette tiene un volumen de masa reactiva de $V = 2,4069m^3$ y opera con un tiempo de residencia $\tau_{Res} = 15\text{minutos}$. Ambos parámetros se liberarán en esta ejemplo para poder realizar la tarea del Diseño Simultáneo del

<i>Símbolo</i>	<i>Descripción</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidades</i>
E_a	Energía de activación de la Reacción	75361,14	$\frac{J}{gmol}$
k_0	Factor de frecuencia de la ley de Arrhenius	$2,8267 \bullet 10^{11}$	$\frac{1}{minuto}$
$\Delta \bar{H}$	Calor de reacción por gmol de Producto	$-9,0712 \bullet 10^4$	$\frac{J}{gmol}$
U	Coefficiente global de transferencia de calor	$2,5552 \bullet 10^4$	$\frac{J}{s \cdot m^2 \cdot K}$
$T_{0,J}$	Temperatura de entrada del refrigerante	282,96	K
A_J	Área de transferencia de la chaqueta	8,1755	m^2
F_J	Flujo de refrigerante por la chaqueta	0,3776	$\frac{m^3}{minuto}$
T_0	Temperatura de entrada del reactivo	295,22	K
F_0	Flujo de entrada de reactivos al reactor	0,1605	$\frac{m^3}{minuto}$
ρ	Densidad de la masa reactiva en el reactor	1000	$\frac{kg}{m^3}$
ρ_J	Densidad del fluido refrigerante	1000	$\frac{kg}{m^3}$
C_P	Capacidad calorífica de la masa reactiva	3571,3	$\frac{J}{kg}$
$C_{P,J}$	Capacidad calorífica del fluido refrigerante	3728,87	$\frac{J}{kg}$
C_{A0}	Concentración del reactivo en la entrada	2114,5	$\frac{gmol}{m^3}$

Cuadro 8.1: Valores de constantes y parámetros para el CSTR de polimerización.

Proceso y su Control (DSPyC). Bajo las condiciones de [Bequette, 2002], el estado estacionario que se logra es $x_1 = C_A = 1071,6 \frac{gmol}{m^3}$ y $x_2 = T = 38,33^\circ C = 311,48K$. La constante universal de los gases en las unidades del proceso es $R = 8,3174 \frac{J}{gmol \cdot K}$.

MSBF_8: Verificar los Grados de Libertad del modelo ($GL = \# \text{ Ecuaciones} - \# \text{ Incógnitas}$).

Como se ve de las dos ecuaciones del modelo, y con los valores de las constantes arriba mencionados, las incógnitas son: $x_1 = C_A$, $x_2 = T$, $u_1 = F_0$, $u_2 = T_{0,J}$, V . Las acciones de control varían en el tiempo por efecto del respectivo controlador, pero para simular primero en lazo abierto se utilizan los valores de F_0 y $T_{0,J}$ reportados en el punto anterior. Por lo tanto, recibirán un valor constante para el estado estacionario donde se diseña. Recuérdese que todas las perturbaciones están también fijas en su valor nominal. Por lo tanto, ya sólo quedan tres variables, una de las cuales es un parámetro de diseño V (e implica cambios en otra: A_J como se verá adelante), que se fija para cada corrida durante el diseño o se deja libre para que la optimización lo halle. De este modo sólo quedan dos variables, los estados, y dos ecuaciones diferenciales, las dinámicas del modelo. Por lo tanto los Grados de Libertad son: $GL = 2 - 2 = 0$, con lo que el sistema resulta soluble.

MSBF_9: Obtener el modelo computacional o solución del modelo matemático.

Para el modelo computacional se procedió a simular el sistema usando Simulink de Matlab con dos subbloques: uno para la dinámica de Concentración C_A y otro para la dinámica de Temperatura T . También se escribió un programa para inicializar los parámetros que requiere el simulador de Simulink. Todo se simuló con un paso de $0,1 minutos$, usando una rutina de solución de ecuaciones diferenciales basada en Ruge-Kutta de orden 4 y de paso fijo. La estabilidad de las simulaciones fue buena.

MSBF_10: Validar el modelo para diferentes condiciones y evaluar su desempeño.

La validación del modelo no se realizó en este trabajo, puesto que ya está reportado como modelo validado en [Bequette, 1998; Bequette, 2002], tomando datos cinéticos de un reactor real presentado originalmente en [Furusawa et al., 1969; Fogler, 1992].

La parte final del Paso 1 es la especificación de las variables de diseño y una propuesta de un primer pareamiento (semilla) de control para el Proceso. Además, pide se determinen los intervalos de las variables.

Como se dijo en el paso MSBF_6, las constantes (en las que se incluyen las perturbaciones en su valor nominal y los parámetros de diseño), son: Volúmen V , Concentración de reactivo C_{A0} a la entrada, Constante de frecuencia de la ley de Arrhenius k_0 , Energía de activación E_a de la reacción, Constante univesal R de los gases, Temperatura de entrada T_0 del flujo de alimento, Flujo del fluido de servicio F_J por la chaqueta y Área de transferencia de calor A_J entre chaqueta y masa reactiva. De estas, los parámetros que se tomarán para el diseño del CSTR serán: Volúmen útil V del reactor y el área de transferencia de calor A_J . Como V y A_J ya no serán constantes, deberían dejarse libres (como variables de diseño) hasta el final o buscar alguna relación entre ellas. Adicionalmente, se liberará para el diseño el tiempo de residencia del reactivo en el reactor (τ_{Res}), lo que libera también los flujos de alimento y descarga (F_0 y F). Con todo lo anterior, es posible encontrar relaciones útiles entre las variables del proceso.

Se tomará una relación heurística entre la altura del tanque H (también denominada Nivel L) y su Diámetro D de 2 : 1, tal como lo plantea Bequette [2002]. Además, se considera que el volumen útil del tanque será el 85% del volumen total del tanque cilíndrico que forma el CSTR. En consecuencia, el Volumen útil del tanque será:

$$V = 0,85 * \frac{\pi \bullet D^2}{4} * H; \quad H = \frac{1}{2}D \Rightarrow V = \frac{0,85}{8} * \pi D^3 \Rightarrow V = 0,3338D^3$$

La otra consideración sobre el diseño del reactor es que la chaqueta quedará cubierta cuando el volumen de líquido en el interior del reactor alcance el 75% del volumen total. Por lo tanto, para calcular el área de transferencia entre la masa reactiva y el fluido contenido en la chaqueta, se calcula la altura correspondiente de la chaqueta:

$$V_{Tanque_J_Llena} = 0,75 * \frac{\pi \bullet D^3}{8} = \frac{\pi \bullet D^2}{4} * H_J \Rightarrow H_J = 0,75 * \frac{D}{2} \Rightarrow H_J = 0,375D$$

y como la chaqueta a instalar no cubrirá el fondo del tanque, su área será:

$$A_J = \pi D * H_J; \quad \text{pero como } H_J = 0,375D \Rightarrow A_J = 0,375 * \pi D^2 = 1,1781D^2$$

Por todo lo anterior, en las tareas de diseño se reemplazará $V = 0,3338D^3$ y $A_J = 1,1781D^2$, de modo que en adelante las únicas variables de diseño serán el Diámetro D y el flujo de reactivo $F_0 = F$ (iguales por condición de nivel constante) del CSTR.

Para el pareamiento semilla y los intervalos de las variables manipuladas, se toma el pareamiento que se discutió en MSBF_6 al obtener el modelo: $[u_1 = F_0 \rightarrow x_1 \quad u_2 = T_{OJ} \rightarrow x_2]$ y se procede a fijar los intervalos de las variables manipuladas. El intervalo para $u_1 = F_0$ se toma de acuerdo con la habilidad de intervalo (*range ability*) del Elemento Final de Control (EFC) de la variable ³. Como en este caso el EFC es una válvula, se aconseja utilizar habilidades de intervalo de 50. Regularmente, se asume que en el estado estacionario de diseño, la válvula se encuentra 50% abierta (asumiendo curva de respuesta lineal de la válvula), por lo tanto el valor máximo de la primera acción de control será: $u_{1_Max} = \frac{F_0^*}{0,5}$, con F_0^* el caudal nominal de estado estacionario, mientras que el valor mínimo será $u_{1_min} = 0$, por deducción directa del funcionamiento del proceso. Por su parte, para hallar los límites de la segunda acción de control $u_2 = T_{OJ}$,

³La habilidad de intervalo o *RA* de *Range Ability* en inglés, de un EFC es el cociente entre el mínimo valor que puede garantizarse con precisión y el máximo valor que puede garantizarse con precisión usando tal EFC. Si por ejemplo un sistema demanda que la válvula pueda suministrar hasta 500l/min de manera precisa, pero que al mismo tiempo permita cambios tan ajustados como 5l/min, se requerirá que dicha válvula tenga un *RA* alrededor de 100. Las válvulas comunes tienen un *RA* que oscila entre 20 y 50, por lo que una válvula con semejantes características resulta difícil de encontrar.

se recurre a las condiciones normales de los fluidos de enfriamiento en una planta industrial. En este caso se considera que el fluido de servicio es agua que proviene de una torre de enfriamiento dotada de enfriador (*chiller* en inglés). En consecuencia, la temperatura del agua que entrega la torre se puede asumir que es $8^\circ\text{C} = 281,15\text{K}$. Para la temperatura de salida del agua luego de pasar por la chaqueta, se asumirá que siempre estará 5°C por debajo de la temperatura de operación del reactor, para garantizar un gradiente de temperatura mínimo para una transferencia de calor adecuada. En consecuencia, los límites para la segunda acción de control serán: $u_{2_Max} = T^* - 5\text{K}$, $u_{2_min} = 281,15\text{K}$, con T^* la temperatura nominal de estado estacionario del CSTR.

8.1.2. DSPyC: Paso 2

En el tercer paso se debe linealizar el Modelo del Proceso en el Punto de Operación a diseñar.

El punto de operación elegido se toma directamente del planteamiento de [Bequette, 2002], el cual es: $x_1 = C_A = 1071,6 \frac{\text{gmol}}{\text{m}^3}$ y $x_2 = T = 38,33^\circ\text{C} = 311,48\text{K}$. En ese punto se aplica la linealización del Modelo para los estados $x_1 = C_A$ y $x_2 = T$. Como las perturbaciones se consideraron constantes en sus valores nominales, la linealización sólo se realiza sobre estados y acciones de control con el Proceso operando cerca a dicho Punto de Operación (PO). En el caso de considerar perturbaciones, debe recordarse que cada que se agrega una nueva perturbación debe realizarse nuevamente todo el proceso de linealización para aquellas ED que contengan la nueva perturbación. Para que el lector tenga una visión completa del sistema linealizado total (incluyendo cuatro perturbaciones y cuatro acciones de control), a continuación se presenta matricialmente la forma final del sistema linealizado en variables de desviación (nótese que el término independiente de cada ED desapareció!) para el modelo completo y general del CSTR.

La linealización completa, si se tomarán los cuatro estados originales, cuatro acciones de control y cuatro perturbaciones, todo en variables de desviación, quedaría en forma matricial como $(\frac{dx}{dt})' = \mathbf{Ax}' + \mathbf{Bu}' + \mathbf{Dd}'$, con el superíndice “prima” para indicar variables de desviación:

$$\begin{bmatrix} \frac{dL'}{dt} \\ \frac{dC'_A}{dt} \\ \frac{dT'}{dt} \\ \frac{dT'_J}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_L}{\partial L} & \frac{\partial f_L}{\partial C_A} & \frac{\partial f_L}{\partial T} & \frac{\partial f_L}{\partial T_J} \\ \frac{\partial f_{C_A}}{\partial L} & \frac{\partial f_{C_A}}{\partial C_A} & \frac{\partial f_{C_A}}{\partial T} & \frac{\partial f_{C_A}}{\partial T_J} \\ \frac{\partial f_T}{\partial L} & \frac{\partial f_T}{\partial C_A} & \frac{\partial f_T}{\partial T} & \frac{\partial f_T}{\partial T_J} \\ \frac{\partial f_{T_J}}{\partial L} & \frac{\partial f_{T_J}}{\partial C_A} & \frac{\partial f_{T_J}}{\partial T} & \frac{\partial f_{T_J}}{\partial T_J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L' \\ C'_A \\ T' \\ T'_J \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_L}{\partial u_1} & \frac{\partial f_L}{\partial u_2} & \frac{\partial f_L}{\partial u_3} & \frac{\partial f_L}{\partial u_4} \\ \frac{\partial f_{C_A}}{\partial u_1} & \frac{\partial f_{C_A}}{\partial u_2} & \frac{\partial f_{C_A}}{\partial u_3} & \frac{\partial f_{C_A}}{\partial u_4} \\ \frac{\partial f_T}{\partial u_1} & \frac{\partial f_T}{\partial u_2} & \frac{\partial f_T}{\partial u_3} & \frac{\partial f_T}{\partial u_4} \\ \frac{\partial f_{T_J}}{\partial u_1} & \frac{\partial f_{T_J}}{\partial u_2} & \frac{\partial f_{T_J}}{\partial u_3} & \frac{\partial f_{T_J}}{\partial u_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_L}{\partial d_1} & \frac{\partial f_L}{\partial d_2} & \frac{\partial f_L}{\partial d_3} & \frac{\partial f_L}{\partial d_4} \\ \frac{\partial f_{C_A}}{\partial d_1} & \frac{\partial f_{C_A}}{\partial d_2} & \frac{\partial f_{C_A}}{\partial d_3} & \frac{\partial f_{C_A}}{\partial d_4} \\ \frac{\partial f_T}{\partial d_1} & \frac{\partial f_T}{\partial d_2} & \frac{\partial f_T}{\partial d_3} & \frac{\partial f_T}{\partial d_4} \\ \frac{\partial f_{T_J}}{\partial d_1} & \frac{\partial f_{T_J}}{\partial d_2} & \frac{\partial f_{T_J}}{\partial d_3} & \frac{\partial f_{T_J}}{\partial d_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \end{bmatrix}$$

En lo que viene se aplica la linealización solamente a los dos estados de interés para el CSTR: concentración de reactivo y temperatura de la masa reactiva.

Dinámica de la Concentración C_A

Para la dinámica de la Concentración del reactivo límite C_A , tomando como variables los estados y las dos acciones de control F_0 y T_{0J} :

$$\frac{dC_A}{dt} = f_{C_A}(C_A, T, F_0, T_{0J}, \theta) = \frac{F_0}{V}C_{A0} - \frac{F}{V}C_A - k_0 e^{-\frac{E_a}{R^*T}} C_A$$

con $\boldsymbol{\theta}$ el vector de parámetros y constantes de la ED. Calculemos la linealización de la función $f_{C_A}(C_A, T, F_0, T_{0J}, \boldsymbol{\theta})$ término a término. El primero término es la función evaluada en el estado estacionario: $f_{C_A}(C_{AEE}, T_{EE}, F_{0EE}, T_{0JEE}, \boldsymbol{\theta})$, que en este caso da:

$$f_{C_A}(C_{AEE}, T_{EE}, F_{0EE}, T_{0JEE}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{F_{0EE}C_{A0}}{V} - \frac{F_{EE}}{V}C_{AEE} - k_0C_{AEE}e^{-\frac{E_a}{R^*T_{EE}}}$$

El segundo término, asociado con la derivada respecto al primer estado C_A es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{C_A}(C_A, T, F_0, T_{0J}, \boldsymbol{\theta})}{\partial C_A} \Big|_{(C_{AEE}, T_{EE}, F_{0EE}, T_{0JEE})} * (C_A - C_{AEE}) &= -\frac{F_{EE}}{V_{EE}}(C_A - C_{AEE}) \\ &\quad - k_0e^{-\frac{E_a}{R^*T_{EE}}}(C_A - C_{AEE}) \end{aligned}$$

Ahora, para la derivada respecto al segundo estado T , se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{C_A}(C_A, T, F_0, T_{0J}, \boldsymbol{\theta})}{\partial T} \Big|_{(C_{AEE}, T_{EE}, F_{0EE}, T_{0JEE})} * (T - T_{EE}) &= \\ &\quad -k_0C_{AEE}e^{-\frac{E_a}{R^*T_{EE}}} * \frac{E_a}{RT_{EE}^2}(T - T_{EE}) \end{aligned}$$

$$\frac{dC_A}{dt} = f_{C_A}(C_A, T, F_0, T_{0J}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{F_0}{V}C_{A0} - \frac{F}{V}C_A - k_0e^{-\frac{E_a}{R^*T}}C_A$$

Tomando la derivada parcial respecto a la primera acción de control F_0 , recordando que por la condición de L constante, $F = F_0$:

$$\frac{\partial f_{C_A}(C_A, T, F_0, T_{0J}, \boldsymbol{\theta})}{\partial F_0} \Big|_{(C_{AEE}, T_{EE}, F_{0EE}, T_{0JEE})} *(F_0 - F_{0EE}) = \left[\frac{C_{A0}}{V} - \frac{C_{AEE}}{V} \right] *(F_0 - F_{0EE})$$

Finalmente, calculando la derivada parcial respecto a la segunda acción de control T_{0J} :

$$\frac{\partial f_{C_A}(C_A, T, F_0, T_{0J}, \boldsymbol{\theta})}{\partial T_{0J}} \Big|_{(C_{AEE}, T_{EE}, F_{0EE}, T_{0JEE})} *(T_{0J} - T_{0JEE}) = 0 * (T_{0J} - T_{0JEE})$$

Al unir todas las derivadas y multiplicar por las diferencias entre los estados y sus valores en EE (las variables de desviación), se obtiene una expresión lineal de la ecuación dinámica del estado Concentración:

$$\begin{aligned} f_{C_A, \text{linealizada}}(C_A, T, F_0, T_{0J}, \boldsymbol{\theta}) &= \frac{F_{0EE}C_{A0}}{V} - \frac{F_{EE}C_{AEE}}{V} - k_0C_{AEE}e^{-\frac{E_a}{R^*T_{EE}}} \\ &\quad - \frac{F_{EE}}{V}(C_A - C_{AEE}) - k_0e^{-\frac{E_a}{R^*T_{EE}}}(C_A - C_{AEE}) \\ &\quad - k_0C_{AEE}e^{-\frac{E_a}{R^*T_{EE}}} * \frac{E_a}{RT_{EE}^2}(T - T_{EE}) \\ &\quad + \left[\frac{C_{A0}}{V} - \frac{C_{AEE}}{V} \right] *(F_0 - F_{0EE}) \end{aligned}$$

que al agruparse produce:

$$\begin{aligned}
 f_{C_A, \text{linealizada}}(C_A, T, F_0, T_{0J}, \boldsymbol{\theta}) = & \left[\frac{F_{0EE} C_{A0}}{V} - \frac{F_{EE} C_{AEE}}{V_{EE}} - k_0 C_{AEE} e^{-\frac{E_a}{R^* T_{EE}}} \right] \\
 & - \left[\frac{F_{EE}}{V} + k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* T_{EE}}} \right] (C_A - C_{AEE}) \\
 & - \left[k_0 C_{AEE} e^{-\frac{E_a}{R^* T_{EE}}} * \frac{E_a}{RT_{EE}^2} \right] (T - T_{EE}) \\
 & + \left[\frac{C_{A0}}{V} - \frac{C_{AEE}}{V} \right] (F_0 - F_{0EE})
 \end{aligned}$$

Que muestra la dependencia lineal de la concentración respecto a las demás variables, en este caso tomadas como de desviación: $\frac{dC_A}{dt} \text{ Linealizada} = a_{C_A} + b_{C_A} * C'_A + c_{C_A} * T' + d_{C_A} * F'_0 + e_{C_A} * T'_{0J}$. Si ahora se quiere expresar el diferencial en variables de desviación, se debe recordar que a la ED lineal anterior se le resta el valor en EE del lado derecho de la ED, por lo tanto:

$$\left(\frac{dC_A}{dt} \right)' = f_{C_A, \text{linealizada}}(C_A, T, F_0, T_{0J}, \boldsymbol{\theta}) - f_{C_A}(C_{AEE}, T_{EE}, F_{0EE}, T_{0JEE}, \boldsymbol{\theta})$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{dC_A}{dt} \right)' = & - \left[\frac{F_{EE}}{V} + k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* T_{EE}}} \right] C'_A \\
 & - \left[k_0 C_{AEE} e^{-\frac{E_a}{R^* T_{EE}}} * \frac{E_a}{RT_{EE}^2} \right] T' \\
 & + \left[\frac{C_{A0}}{V} - \frac{C_{AEE}}{V} \right] F'_0
 \end{aligned}$$

Dinámica de la Temperatura T

La ED que describe la dinámica de la Temperatura en el CSTR, desagrupando términos para ver los diferentes estados, es:

$$\begin{aligned}
 \frac{dT}{dt} = f_T(C_A, T, F_0, T_{0J}, \boldsymbol{\theta}) = & \frac{F_0 T_0}{V} - \frac{F}{V} T - \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* T}} * \Delta \bar{H}}{C_P \rho} C_A \\
 & - \frac{U_{AJ}}{C_P \rho V} T + \frac{F_J \rho_J C_{PJ}}{C_P \rho V (1 + \frac{F_J \rho_J C_{PJ}}{U_{AJ}})} T_{0J} + \frac{U_{AJ}}{C_P \rho V (1 + \frac{F_J \rho_J C_{PJ}}{U_{AJ}})}
 \end{aligned}$$

Aplicando el mismo procedimiento precedente:

$$\begin{aligned}
 f_T(C_{AEE}, T_{EE}, F_{0EE}, T_{0JEE}, \boldsymbol{\theta}) = & \frac{F_{0EE} T_0}{V} - \frac{F_{EE} T_{EE}}{V} - \frac{k_0 C_{AEE} e^{-\frac{E_a}{R^* T_{EE}} \Delta \bar{H}}}{C_P \rho} \\
 & - \frac{U_{AJ} T_{EE}}{C_P \rho V} + \frac{F_J \rho_J C_{PJ} T_{0JEE}}{C_P \rho V (1 + \frac{F_J \rho_J C_{PJ}}{U_{AJ}})} + \frac{U_{AJ}}{C_P \rho V (1 + \frac{F_J \rho_J C_{PJ}}{U_{AJ}})}
 \end{aligned}$$

Luego para hallar la derivada respecto al primer estado, Nivel C_A :

$$\frac{\partial f_T(C_A, T, F_0, T_{0J}, \theta)}{\partial C_A} \Big|_{(C_A, T, F_0, T_{0J}, \theta)} * (C_A - C_{AEE}) = -\frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* T_{EE}} \Delta \bar{H}}}{C_{P\rho}} * (C_A - C_{AEE})$$

y la derivada respecto al tercer estado T , es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_T(C_A, T, F_0, T_{0J}, \theta)}{\partial T} \Big|_{(C_{AEE}, T_{EE}, F_{0EE}, T_{0JEE})} * (T - T_{EE}) = & -\frac{F_{EE}}{V} (T - T_{EE}) - \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* T} \Delta \bar{H}}}{C_{P\rho}} \ln e^{\frac{d(-\frac{E_a}{R} T^{-1})}{dT}} (T - T_{EE}) \\ & - \frac{UA_J}{C_{P\rho} V} (T - T_{EE}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_T(C_A, T, F_0, T_{0J}, \theta)}{\partial T} \Big|_{(C_{AEE}, T_{EE}, F_{0EE}, T_{0JEE})} * (T - T_{EE}) = & -\frac{F_{EE}}{V} (T - T_{EE}) - \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* T} \Delta \bar{H}}}{C_{P\rho}} \left[\frac{E_a}{R} T^{-2} \right] (T - T_{EE}) \\ & - \frac{UA_J}{C_{P\rho} V} (T - T_{EE}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_T(C_A, T, F_0, T_{0J}, \theta)}{\partial T} \Big|_{(C_{AEE}, T_{EE}, F_{0EE}, T_{0JEE})} * (T - T_{EE}) = & -\frac{F_{EE}}{V} (T - T_{EE}) - \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* T_{EE}} \Delta \bar{H}} C_{AEE}}{C_{P\rho}} * \frac{E_a}{RT_{EE}^2} (T - T_{EE}) \\ & - \frac{UA_J}{C_{P\rho} V} (T - T_{EE}) \end{aligned}$$

Ahora derivando con respecto a F_0 , la acción primera acción de control, recordando que por tener el nivel constante $F = F_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_T(C_A, T, F_0, T_{0J}, \theta)}{\partial F_0} \Big|_{(C_{AEE}, T_{EE}, F_{0EE}, T_{0JEE})} * (F_0 - F_{0EE}) = & \left[\frac{T_{0EE}}{V} - \frac{T_{EE}}{V} \right] (F_0 - F_{0EE}) \end{aligned}$$

Finalmente, para la segunda acción de control T_{0J} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_T(C_A, T, F_0, T_{0J}, \theta)}{\partial F_0} \Big|_{(C_{AEE}, T_{EE}, F_{0EE}, T_{0JEE})} * (T_{0J} - T_{0JEE}) & = \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{C_{P\rho} V (1 + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{UA_J})} (T_{0J} - T_{0JEE}) \end{aligned}$$

Al unir todas las derivadas y multiplicar por las diferencias entre los estados y sus valores en EE, las variables de desviación, se obtiene una expresión lineal de la ecuación dinámica del estado Temperatura:

$$\begin{aligned}
f_{T, \text{linealizada}}(C_A, T, F_0, T_{0J}, \boldsymbol{\theta}) &= \frac{F_{0EE}T_0}{V} - \frac{F_{EE}T_{EE}}{V} - \frac{k_0 C_{AEE} e^{-\frac{E_a}{R^* T_{EE}}} \Delta \bar{H}}{C_{P\rho}} \\
&\quad - \frac{U_{AJ}T_{EE}}{C_{P\rho}V} - \frac{F_{J\rho_J}C_{P_J}T_{0J EE}}{C_{P\rho}V(1 + \frac{F_{J\rho_J}C_{P_J}}{U_{AJ}})} - \frac{U_{AJ}}{C_{P\rho}V(1 + \frac{F_{J\rho_J}C_{P_J}}{U_{AJ}})} \\
&\quad - \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* T_{EE}}} \Delta \bar{H}}{C_{P\rho}} * (C_A - C_{AEE}) \\
&\quad - \left[\frac{F_{EE}}{V} + \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* T_{EE}}} \Delta \bar{H} C_{AEE}}{C_{P\rho}} * \frac{E_a}{RT_{EE}^2} + \frac{U_{AJ}}{C_{P\rho}V} \right] * (T - T_{EE}) \\
&\quad + \left[\frac{T_{0 EE}}{V} - \frac{T_{EE}}{V} \right] (F_0 - F_{0 EE}) \\
&\quad + \frac{F_{J\rho_J}C_{P_J}}{C_{P\rho}V(1 + \frac{F_{J\rho_J}C_{P_J}}{U_{AJ}})} (T_{0J} - T_{0J EE})
\end{aligned}$$

Que muestra ahora una dependencia lineal de la Temperatura respecto a las demás variables, en este caso tomadas como de desviación: $\frac{dT}{dt} = a_T + b_T * C'_A + c_T * T' + d_T * F'_0 + e_T * T'_{0J}$. Si se quiere convertir a variables de desviación, debe restarse $f_T(C_{AEE}, T_{EE}, F_{0 EE}, T_{0J EE}, \boldsymbol{\theta})$ del lado derecho, lo que cancela el término independiente a_T y produce:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dT}{dt} \right)' &= - \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* T_{EE}}} \Delta \bar{H}}{C_{P\rho}} * C'_A \\
&\quad - \left[\frac{F_{EE}}{V} + \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* T_{EE}}} \Delta \bar{H} C_{AEE}}{C_{P\rho}} * \frac{E_a}{RT_{EE}^2} + \frac{U_{AJ}}{C_{P\rho}V} \right] * T' \\
&\quad + \left[\frac{T_{0 EE}}{V} - \frac{T_{EE}}{V} \right] * F'_0 \\
&\quad + \frac{F_{J\rho_J}C_{P_J}}{C_{P\rho}V(1 + \frac{F_{J\rho_J}C_{P_J}}{U_{AJ}})} * T'_{0J}
\end{aligned}$$

con lo que queda lista la linealización del modelo original no lineal, que a continuación se expresa de manera matricial:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{dC'_A}{dt} \\ \frac{dT'}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{F_{EE}}{V} - k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* T_{EE}}} & -k_0 C_{AEE} e^{-\frac{E_a}{R^* T_{EE}}} * \frac{E_a}{RT_{EE}^2} \\ -\frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* T_{EE}}} \Delta \bar{H}}{C_{P\rho}} & -\frac{F_{EE}}{V} - \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* T_{EE}}} \Delta \bar{H} C_{AEE}}{C_{P\rho}} * \frac{E_a}{RT_{EE}^2} - \frac{U_{AJ}}{C_{P\rho}V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C'_A \\ T' \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} \frac{C_{A0}}{V} - \frac{C_{AEE}}{V} & 0 \\ \frac{T_{0 EE}}{V} - \frac{T_{EE}}{V} & \frac{F_{J\rho_J}C_{P_J}}{C_{P\rho}V(1 + \frac{F_{J\rho_J}C_{P_J}}{U_{AJ}})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F'_0 \\ T'_{0J} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Para hallar las componentes de las dos matrices, que son constantes, se toman los valores de estado estacionario de todas las variables, así como los valores de las constantes y parámetros del CSTR dados en la Tabla 1. Se llega a:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \Rightarrow a_{1,1} = -\frac{0,1605}{2,4069} - 2,8267 \bullet 10^{11} * e^{-\frac{75361,14}{8,3174*311,39}}; \\
a_{1,2} &= -2,8267 \bullet 10^{11} * 1071,6 * e^{-\frac{75361,14}{8,3174*311,39}} * \frac{75361,14}{8,3174 * (311,39)^2}; \\
a_{2,1} &= -\frac{2,8267 \bullet 10^{11} * e^{-\frac{75361,14}{8,3174*311,39}} * -90712}{3571,3 * 1000}; \\
a_{2,2} &= -\frac{0,1605}{2,4069} - \frac{2,8267 \bullet 10^{11} * e^{-\frac{75361,14}{8,3174*311,39}} * -90712 * 1071,6}{3571,3 * 1000} * \frac{75361,14}{8,3174 * (311,39)^2} - \frac{25552 * 8,1755}{3571,3 * 1000 * 2,4069} \\
\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \frac{2114,5}{2,4069} - \frac{1071,6}{2,4069} & 0 \\ \frac{295,22}{2,4069} - \frac{311,39}{2,4069} & \frac{0,3776*1000*3728,87}{3571,3*1000*2,4069(1+\frac{0,3776*1000*3728,87}{25552*8,1755})} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

que realizando las operaciones indicadas entrega las dos matrices del sistema linealizado del CSTR, evaluado en el Punto de Operación (PO) dado previamente [Bequette, 2002]:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0,1319 & -6,528 \\ 0,0017 & 0,0748 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 433,2959 & 0 \\ -6,7182 & 0,0212 \end{bmatrix}$$

8.1.3. DSPyC: Paso 3

El cuarto paso exige la selección y ubicación de n sensores, siendo n el orden del Sistema (número de estados).

En este ejemplo la ubicación de sensores resulta inmediata, puesto que si se va a medir el estado completo, deben ubicarse un sensor de Concentración del reactivo A a la salida del CSTR y un medidor de Temperatura, también a la salida del reactor. Sin embargo, para evidenciar el uso de la Observabilidad en el Procedimiento de Diseño Simultáneo de Proceso y Control (DSPyC), aquí se analiza la observabilidad del Proceso bajo dos opciones de sensor. La primera que cuenta solamente con el sensor de Concentración (estado $x_1 = C_A$) y la segunda que cuenta solo con el medidor de Temperatura (estado $x_2 = T$).

8.1.4. DSPyC: Paso 4

Este paso establece la valoración de la Observabilidad (\mathbf{Ob}) del Sistema.

Primero se realiza la valoración de la Observabilidad del Sistema original no lineal y luego se realiza la misma valoración pero para el Sistema Linealizado, todo con el fin de evidenciar ventajas y desventajas de las dos aproximaciones.

Observabilidad del Sistema Original no Lineal.

Para calcular la Observabilidad Local del Proceso en el punto de operación, se establece primero el Espacio de Observación \mathbf{S}_O para cada una de las dos opciones de sensor postuladas.

Opción 1. Sólo se instala el medidor de Concentración (estado $x_1 = C_A$). En este caso, la función $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ del sistema será: $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = [x_1 \quad 0]^T$. En consecuencia, la expresión del sistema en forma matricial canónica, que se repite aquí para facilitar el seguimiento del cálculo, es:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -\frac{F}{V}x_1 - k_0 e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}} x_1 \\ -\frac{F}{V}x_2 - \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}} * \Delta \tilde{H}_R}{C_{P\rho}} x_1 - \frac{U A_J}{C_{P\rho} V} x_2 + \frac{U A_J}{C_{P\rho} V (1 + \frac{F J \rho_J C_{P,J}}{U A_J})} x_2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{C_{A0}}{V} & 0 \\ \frac{T_0}{V} & \frac{F J \rho_J C_{P,J}}{C_{P\rho} V (1 + \frac{F J \rho_J C_{P,J}}{U A_J})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El Espacio de Observación \mathbf{S}_O del Sistema en este caso tendrá dos componentes puesto que la aplicación recursiva de la Derivada de Lie va hasta $(n-1) = 2-1 = 1$:

$$\mathbf{S}_O = \text{gen}\{L_{\mathbf{f}}^0 \mathbf{h}(\mathbf{x}), L_{\mathbf{f}}^1 \mathbf{h}(\mathbf{x})\} = \text{gen}\{\mathbf{h}(\mathbf{x}), L_{\mathbf{f}} \mathbf{h}(\mathbf{x})\} = \text{gen}\{[x_1 \ 0]^T, L_{\mathbf{f}} \mathbf{h}(\mathbf{x})\}$$

Para proseguir, se calcula la única Derivada de Lie indicada:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{f}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} -\frac{F}{V}x_1 - k_0 e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}} x_1 \\ -\frac{F}{V}x_2 - \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}} * \Delta \tilde{H}_R}{C_{P\rho}} x_1 - \frac{U A_J}{C_{P\rho} V} x_2 + \frac{U A_J}{C_{P\rho} V (1 + \frac{F J \rho_J C_{P,J}}{U A_J})} x_2 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{F}{V}x_1 - k_0 e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}} x_1 \end{aligned}$$

y por lo tanto, continuando con el cálculo previo:

$$\mathbf{S}_O = \text{gen}\{[x_1 \ 0]^T, -\frac{F}{V}x_1 - k_0 e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}} x_1\}$$

Ahora, se debe calcular la Distribución de Observabilidad:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{S}_O} &= \text{gen}\left\{\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \mid \phi \in \mathbf{S}_O\right\} = \text{gen}\left\{\frac{\partial [x_1 \ 0]^T}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial (-\frac{F}{V}x_1 - k_0 e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}} x_1)}{\partial \mathbf{x}}\right\} \\ &= \text{gen}\left\{[1 \ 0], \left[-\frac{F}{V} - k_0 e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}} \quad -\frac{k_0 E_a}{R} * \frac{x_1 e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}}}{x_2^2}\right]\right\} \end{aligned}$$

Finalmente, se chequea la dimensión de esta Distribución: $\dim(\Delta_{\mathbf{S}_O}) = 2$, para lo que se utiliza la matriz $\mathbf{W}_O = [\frac{\partial \phi}{\partial x_1}; \frac{\partial \phi}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial \phi}{\partial x_{(n-1)}}]$, que en este caso es la matriz:

$$\mathbf{W}_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{F}{V} - k_0 e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}} & -\frac{k_0 E_a}{R} * \frac{x_1 e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}}}{x_2^2} \end{bmatrix}$$

que será de rango 2 si su determinante es diferente de cero o si la segunda fila no puede expresarse como un número α por la primera fila. Probemos la segunda condición:

$$\begin{aligned} \left[-\frac{F}{V} - k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} \quad -\frac{k_0 E_a}{R} * \frac{x_1 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}}}{x_2^2} \right] &= \alpha [1 \quad 0] \Rightarrow \\ -\frac{F}{V} - k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} &= \alpha \\ -\frac{k_0 E_a}{R} * \frac{x_1 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}}}{x_2^2} &= 0 \end{aligned}$$

Desarrollando la primera condición:

$$\begin{aligned} -k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} &= \alpha + \frac{F}{V} \Rightarrow e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} = \frac{\alpha + \frac{F}{V}}{k_0} \Rightarrow \ln \left[e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} \right] = \ln \left[\frac{\alpha + \frac{F}{V}}{k_0} \right] \Rightarrow \\ -\frac{E_a}{R^* x_2} &= \ln \left[\frac{\alpha + \frac{F}{V}}{k_0} \right] \Rightarrow x_2 = -\frac{E_a}{R^* \ln \left[\frac{\alpha + \frac{F}{V}}{k_0} \right]} \end{aligned}$$

y como E_a , R y $\ln \left[\frac{\alpha + \frac{F}{V}}{k_0} \right]$ son todos positivos, la condición indica valores negativos para x_2 , que resulta imposible puesto que $x_2 = T$ en unidades absolutas de Temperatura, que siempre son positivas. Esta condición no la cumple ningún x_2 del Proceso. Como esta condición no se cumplió, se puede decir que las filas son linealmente independientes y por lo tanto el rango de la matriz es 2.

Desarrollando ahora la segunda condición:

$$-\frac{k_0 E_a}{R} * \frac{x_1 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}}}{x_2^2} = 0 \Rightarrow \frac{x_1 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}}}{x_2^2} = 0 \Rightarrow x_1 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} = 0 \Rightarrow x_1 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} = 0$$

que presenta dos alternativas: *i*) $x_1 = 0$, y *ii*) $e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} = 0 \Rightarrow x_2 = +\infty$. La segunda alternativa no es viable porque implica una Temperatura infinita, mientras que la primera alternativa indica que la observabilidad se pierde si la concentración de reactivo A en el CSTR C_A se hace cero. Esto último advertiría que el uso de un observador con esta elección de sensorica no será viable si se permiten valores de $C_A = 0$. Pero como las condiciones se deben cumplir simultáneamente, esto no aplica. En consecuencia, el Proceso es observable en todo el espacio de estado cuando se mide $x_1 = C_A$.

Opción 2. Sólo se instala el medidor de Temperatura (estado $x_2 = T$). En este caso, la función $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ del sistema será: $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = [0 \quad x_2]^T$. En consecuencia, la expresión del sistema en forma matricial canónica en el que sólo cambia $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ frente a la *Opción 1*, que se repite aquí para facilitar el seguimiento del cálculo, es:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -\frac{F}{V}x_1 - k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}}x_1 \\ -\frac{F}{V}x_2 - \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} * \Delta \tilde{H}_R}{C_{P\rho}}x_1 - \frac{U_{A_I}}{C_{P\rho}V}x_2 + \frac{U_{A_I}}{C_{P\rho}V(1 + \frac{F_I \rho_I C_{P_I}}{U_{A_I}})}x_2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{C_{A0}}{V} & 0 \\ \frac{T_0}{V} & \frac{F_J \rho_J C_{P_J}}{C_{P\rho}V(1 + \frac{F_I \rho_I C_{P_I}}{U_{A_I}})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El Espacio de Observación \mathbf{S}_O del Sistema en este caso tendrá dos componentes puesto que la aplicación recursiva de la Derivada de Lie va hasta $(n-1) = 2-1 = 1$:

$$\mathbf{S}_O = \text{gen}\{L_{\mathbf{f}}^0 \mathbf{h}(\mathbf{x}), L_{\mathbf{f}}^1 \mathbf{h}(\mathbf{x})\} = \text{gen}\{\mathbf{h}(\mathbf{x}), L_{\mathbf{f}} \mathbf{h}(\mathbf{x})\} = \text{gen}\{[0 \quad x_2]^T, L_{\mathbf{f}} \mathbf{h}(\mathbf{x})\}$$

Para proseguir, se calcula la única Derivada de Lie indicada:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{f}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} -\frac{F}{V} x_1 - k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} x_1 \\ -\frac{F}{V} x_2 - \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} * \Delta \tilde{H}_R}{C_{P\rho}} x_1 - \frac{U_{A_J}}{C_{P\rho} V} x_2 + \frac{U_{A_J}}{C_{P\rho} V (1 + \frac{F_{J\rho_J} C_{P_J}}{U_{A_J}})} x_2 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{F}{V} x_2 - \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} * \Delta \tilde{H}_R}{C_{P\rho}} x_1 - \frac{U_{A_J}}{C_{P\rho} V} x_2 + \frac{U_{A_J}}{C_{P\rho} V (1 + \frac{F_{J\rho_J} C_{P_J}}{U_{A_J}})} x_2 \end{aligned}$$

y por lo tanto, continuando con el cálculo previo:

$$\mathbf{S}_O = \text{gen}\{[0 \quad x_2]^T, -\frac{F}{V} x_2 - \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} * \Delta \tilde{H}_R}{C_{P\rho}} x_1 - \frac{U_{A_J}}{C_{P\rho} V} x_2 + \frac{U_{A_J}}{C_{P\rho} V (1 + \frac{F_{J\rho_J} C_{P_J}}{U_{A_J}})} x_2\}$$

Ahora, se debe calcular la Distribución de Observabilidad:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{S}_O &= \text{gen} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \mid \phi \in \mathbf{S}_O \right\} \\ &= \text{gen} \left\{ \frac{\partial [0 \quad x_2]^T}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial \left(-\frac{F}{V} x_2 - \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} * \Delta \tilde{H}_R}{C_{P\rho}} x_1 - \frac{U_{A_J}}{C_{P\rho} V} x_2 + \frac{U_{A_J}}{C_{P\rho} V (1 + \frac{F_{J\rho_J} C_{P_J}}{U_{A_J}})} x_2 \right)}{\partial \mathbf{x}} \right\} \\ &= \text{gen} \left\{ [0 \quad 1], \left[-\frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} * \Delta \tilde{H}_R}{C_{P\rho}} \quad -\frac{F}{V} - \frac{k_0 E_a e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} \Delta \tilde{H}_R}{R C_{P\rho} x_2^2} - \frac{U_{A_J}}{C_{P\rho} V} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{U_{A_J}}{C_{P\rho} V (1 + \frac{F_{J\rho_J} C_{P_J}}{U_{A_J}})} \right] \right\} \end{aligned}$$

Finalmente, se chequea la dimensión de esta Distribución: $\dim(\Delta \mathbf{S}_O) = 2$, para lo que se utiliza la matriz $\mathbf{W}_O = [\frac{\partial \phi}{\partial x_1}; \frac{\partial \phi}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial \phi}{\partial x_{(n-1)}}]$, que en este caso es la matriz:

$$\mathbf{W}_O = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} * \Delta \tilde{H}_R}{C_{P\rho}} & -\frac{F}{V} - \frac{k_0 E_a e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} \Delta \tilde{H}_R}{R C_{P\rho} x_2^2} - \frac{U_{A_J}}{C_{P\rho} V} + \frac{U_{A_J}}{C_{P\rho} V (1 + \frac{F_{J\rho_J} C_{P_J}}{U_{A_J}})} \end{bmatrix}$$

que será de rango 2 si su determinante es diferente de cero o si la segunda fila no puede expresarse como un número α por la primera fila. Probemos la condición de dependencia lineal:

$$\left[-\frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} * \Delta \tilde{H}_R}{C_{P\rho}} - \frac{F}{V} - \frac{k_0 E_a e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} \Delta \bar{H} x_1}{RC_{P\rho} x_2^2} - \frac{U A_J}{C_{P\rho} V} + \frac{U A_J}{C_{P\rho} V \left(1 + \frac{F_{J\rho_J} C_{P_J}}{U A_J}\right)} \right] = \alpha [0 \quad 1] \Rightarrow$$

$$-\frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} * \Delta \tilde{H}_R}{C_{P\rho}} = 0 \text{ y además:}$$

$$-\frac{F}{V} - \frac{k_0 E_a e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} \Delta \bar{H} x_1}{RC_{P\rho} x_2^2} - \frac{U A_J}{C_{P\rho} V} + \frac{U A_J}{C_{P\rho} V \left(1 + \frac{F_{J\rho_J} C_{P_J}}{U A_J}\right)} = \alpha$$

Ambas condiciones se deben cumplir simultáneamente para que la dependencia lineal exista. Desarrollando la primera condición:

$$-\frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} * \Delta \tilde{H}_R}{C_{P\rho}} = 0 \Rightarrow k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} * \Delta \tilde{H}_R = 0 \Rightarrow k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} = 0 \Rightarrow$$

$$e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} = 0$$

que sólo resulta válida si $x_2 = T = +\infty$. Como esta condición no se cumplió, se puede decir que las filas son linealmente independientes y por lo tanto el rango de la matriz es 2. Sólo por ejercicio, se desarrolla ahora la segunda condición, aunque se insiste, se debían cumplir las dos simultáneamente:

$$-\frac{F}{V} - \frac{k_0 E_a e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} \Delta \bar{H} x_1}{RC_{P\rho} x_2^2} - \frac{U A_J}{C_{P\rho} V} + \frac{U A_J}{C_{P\rho} V \left(1 + \frac{F_{J\rho_J} C_{P_J}}{U A_J}\right)} = \alpha \Rightarrow \frac{k_0 E_a e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} \Delta \bar{H} x_1}{RC_{P\rho} x_2^2} =$$

$$\alpha + \frac{U A_J}{C_{P\rho} V \left(1 + \frac{F_{J\rho_J} C_{P_J}}{U A_J}\right)} - \frac{U A_J}{C_{P\rho} V} - \frac{F}{V} \Rightarrow$$

$$\frac{e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} x_1}{x_2^2} = \frac{RC_{P\rho}}{k_0 E_a \Delta \bar{H}} \left[\alpha + \frac{U A_J}{C_{P\rho} V \left(1 + \frac{F_{J\rho_J} C_{P_J}}{U A_J}\right)} - \frac{U A_J}{C_{P\rho} V} - \frac{F}{V} \right] \Rightarrow$$

$$x_1 = x_2^2 e^{\frac{E_a}{R^* x_2}} * \frac{RC_{P\rho}}{k_0 E_a \Delta \bar{H}} \left[\alpha + \frac{U A_J}{C_{P\rho} V \left(1 + \frac{F_{J\rho_J} C_{P_J}}{U A_J}\right)} - \frac{U A_J}{C_{P\rho} V} - \frac{F}{V} \right]$$

que determinará una familia de puntos en \mathbf{X} para los cuales el sistema no es Localmente Observable. Reemplazando la equivalencia entre la variable de diseño (diámetro D del tanque) y el volumen V y el área de transferencia de calor A_J calculadas al final de Paso 1, se llega a:

$$x_1 = x_2^2 e^{\frac{E_a}{R^* x_2}} * \frac{RC_{P\rho}}{k_0 E_a \Delta \bar{H}} \left[\alpha + \frac{U * 0,375 * \pi D^2}{C_{P\rho} * 0,3338 D^3 * \left(1 + \frac{F_{J\rho_J} C_{P_J}}{U * 0,375 * \pi D^2}\right)} - \frac{U * 0,375 * \pi D^2}{C_{P\rho} * 0,3338 D^3} - \frac{F}{0,3338 D^3} \right]$$

Si ahora se reemplazan los valores de los parámetros del CSTR (Tabla 1) en esta última expresión, se llega a:

$$x_1 = -x_2^2 e^{\frac{9060,7}{x_2}} * 1,5372 \times 10^{-24} * \left[\alpha + \frac{0,0253}{D * \left(1 + \frac{46,7739}{D^2}\right)} - \frac{0,0253}{D} - \frac{0,4808}{D^3} \right]$$

que sería una condición a verificar durante el diseño, para garantizar observabilidad, si la primera condición se hubiera cumplido. Como la prueba resultó no válido para un sistema real, puede decirse que el Proceso real es Observable en todo el espacio de puntos viables, cuando sólo se mide el segundo estado $x_2 = T$.

Observabilidad del Sistema Linealizado.

Con el fin de mostrar la manera de usar la Observabilidad de un Sistema Lineal, procedamos ahora con la misma prueba, pero usando la matriz de Observabilidad (**Ob**) del Sistema linealizado. La matriz **Ob** para el sistema linealizado se calcula de acuerdo con la formulación:

$$\mathbf{Ob} = [\mathbf{C} \quad \mathbf{C}\mathbf{A} \quad \dots \quad \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

Como se dijo en el paso previo, se analizará la Observabilidad bajo dos opciones de sensórica instalada en el CSTR. Las matrices **A** y **B** se calcularon previamente al final del DSPyC: Paso 2, evaluadas en el Punto de Operación (PO) dado en [Bequette, 2002]

Opción 1. Sólo se instala el medidor de Concentración (estado $x_1 = C_A$). En este caso, la matriz **C** del sistema, que es un vector, es: $\mathbf{C} = [1 \quad 0]$, y por lo tanto, la matriz de Observabilidad **Ob** será:

$$\mathbf{Ob} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0,1319 & -6,5280 \end{bmatrix}$$

que tiene rango 2, igual al número de estados del proceso. Por lo tanto, es Proceso es Observable. Nótese que al operar con el Sistema Linealizado no se aprecia la posible limitación en la observabilidad cuando $C_A = 0$, que se evidenció con la valoración sobre el sistema real no lineal.

Opción 2. Sólo se instala el medidor de Temperatura (estado $x_2 = T$). En este caso, la matriz **C** del sistema, que es un vector, es: $\mathbf{C} = [0 \quad 1]$, y por lo tanto, la matriz de Observabilidad **Ob** será:

$$\mathbf{Ob} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,0017 & 0,0748 \end{bmatrix}$$

que como en el caso anterior tiene rango 2, igual al número de estados del proceso. Por lo tanto, es Proceso es Observable también así sólo se mida la Temperatura.

Al comparar los resultados de la Observabilidad Lineal y la Observabilidad Local No Lineal, se aprecia la mayor riqueza de información que brinda la No Lineal, por lo que es la que se utiliza en el Procedimiento de Diseño Simultáneo de Proceso y su Control (DSPyC) propuesto en el presente trabajo.

8.1.5. DSPyC: Paso 5

Aquí se debe responder a la pregunta: ¿Es el Sistema completamente Observable?. De no ser el Sistema completamente Observable, se debe modificar la selección de sensores y repetir el procedimiento desde el Paso 4. En caso de ser Observable, se tome el grupo de n sensores como el definitivo, con lo que queda lista la salida **y**.

Cómo se vió, con las dos posible opciones de sensores, el sistema resulta Observable, por lo que se puede optar por alguna de las dos configuraciones de sensórica o incluso instalar la sensórica completa, es decir los dos medidores, uno para cada estado. En este caso, se tomarán los dos sensores (uno para concentración y otro para temperatura), como instalados en el proceso definitivo. Esto implica que la función del mapa de salida sea $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = [x_1 \quad x_2]^T$, y en el caso de la linealización, el vector del mapa de estados a salida sea: $\mathbf{C} = [1 \quad 1]$.

8.1.6. DSPyC: Paso 6

En este paso se debe valorar la Controlabilidad Práctica Local de Estado (CPLdeE) del Sistema No Lineal que representa al Proceso.

En este punto se probará la configuración real de dos acciones de control. Por limitaciones de espacio no se reportan aquí configuraciones con una sola acción de control. Se procede con el cálculo tal y como se estableció previamente, que pide verificar tres condiciones: *i*) El estado \mathbf{x}^* es Localmente Controlable alrededor de \mathbf{x}^* , *ii*) Las acciones de control \mathbf{u}^* requeridas para mantener el equilibrio \mathbf{x}^* , pertenecen al intervalo disponible de acciones de control del Proceso, y *iii*) El Determinante de la Matriz de Respuesta Forzada (DMRF) del Sistema es diferente de cero: $\det[\mathbf{G}(\mathbf{x})] \neq 0$. También se verificará que los Grados de Libertad para el Sistema Controlado son mayores o iguales a cero: $GdeLSC = N_{VM} - N_{VC} \geq 0$, aunque esta condición es opcional.

CONDICIÓN i) de la CPLdeE: El estado \mathbf{x}^* es Localmente Controlable alrededor de \mathbf{x}^* .

Primero calculemos la Controlabilidad Local de manera general, para analizar posteriormente si se cumple en el punto de operación \mathbf{x}^* . Se toma el modelo del CSTR de forma matricial para entender mejor las operaciones involucradas en el cálculo de la Controlabilidad Local:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -\frac{F}{V}x_1 - k_0e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}}x_1 \\ -\frac{F}{V}x_2 - \frac{k_0e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}}*\Delta\tilde{H}_R}{C_P\rho}x_1 - \frac{UA_J}{C_P\rho V}x_2 + \frac{UA_J}{C_P\rho V(1+\frac{FJ\rho_J C_{P,J}}{UA_J})}x_2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{CA_0}{V} & 0 \\ \frac{T_0}{V} & \frac{FJ\rho_J C_{P,J}}{C_P\rho V(1+\frac{FJ\rho_J C_{P,J}}{UA_J})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se calcula el Espacio de Controlabilidad o Algebra de Lie de Control \mathbf{L}_C , que en este caso con $n = 2$ llega hasta el primer corchete de Lie:

$$\mathbf{L}_C = \text{gen}\{\mathbf{G}, \text{ad}_f^1 \mathbf{G}\} = \{\mathbf{G}, [\mathbf{f}, \mathbf{G}]\}$$

Realizando las operaciones indicadas se llega a:

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}, \mathbf{g}] &= \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{G}(\mathbf{x}) = 0 * \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ &- \begin{bmatrix} -\frac{F}{V} - k_0e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}} & -k_0e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}}x_1 - \frac{k_0E_a}{R} \frac{x_1}{x_2^2} \\ -\frac{k_0e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}}*\Delta\tilde{H}_R}{C_P\rho} & -\frac{F}{V} - \frac{k_0E_a}{RC_P\rho x_2^2} \Delta\tilde{H}x_1 - \frac{UA_J}{C_P\rho V} + \frac{UA_J}{C_P\rho V(1+\frac{FJ\rho_J C_{P,J}}{UA_J})} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{CA_0}{V} & 0 \\ \frac{T_0}{V} & \frac{FJ\rho_J C_{P,J}}{C_P\rho V(1+\frac{FJ\rho_J C_{P,J}}{UA_J})} \end{bmatrix} &= [[\mathbf{f}, \mathbf{G}]_{\text{Columna1}} \quad [\mathbf{f}, \mathbf{G}]_{\text{Columna2}}] \Rightarrow \\ [\mathbf{f}, \mathbf{G}]_{\text{Columna1}} &= \begin{bmatrix} -\frac{FC_{A0}}{V^2} - \frac{k_0C_{A0}e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}}}{V} - \frac{k_0T_0e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}}x_1}{V} - \frac{k_0E_aT_0e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}}x_1}{RV} \\ -\frac{k_0C_{A0}e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}}*\Delta\tilde{H}_R}{C_P\rho V} - \frac{FT_0}{V^2} - \frac{k_0E_aT_0e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}}\Delta\tilde{H}x_1}{RC_P\rho Vx_2^2} - \frac{UA_JT_0}{C_P\rho V^2} + \frac{UA_JT_0}{C_P\rho V^2(1+\frac{FJ\rho_J C_{P,J}}{UA_J})} \end{bmatrix} \\ [\mathbf{f}, \mathbf{G}]_{\text{Columna2}} &= \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_1 &= -\frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} F_J \rho_J C_{P J}}{C_P \rho V \left(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{U_{A J}}\right)} x_1 - \frac{k_0 E_a e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} F_J \rho_J C_{P J} x_1}{C_P \rho V R \left(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{U_{A J}}\right) x_2^2} \text{ y} \\ \rho_2 &= -\frac{F F_J \rho_J C_{P J}}{C_P \rho V^2 \left(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{U_{A J}}\right)} - \frac{k_0 E_a e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} \Delta \bar{H} F_J \rho_J C_{P J} x_1}{R C_P \rho C_P \rho V \left(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{U_{A J}}\right) x_2^2} \\ &\quad - \frac{U_{A J} F_J \rho_J C_{P J}}{(C_P \rho V)^2 \left(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{U_{A J}}\right)} + \frac{U_{A J} F_J \rho_J C_{P J}}{\left[C_P \rho V \left(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{U_{A J}}\right)\right]^2}\end{aligned}$$

por lo tanto, reemplazando en la operación para el Espacio de Controlabilidad:

$$\mathbf{L}_C = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{C_{A0}}{V} & 0 \\ \frac{T_0}{V} & \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{C_P \rho V \left(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{U_{A J}}\right)} \end{bmatrix}, [\mathbf{f}, \mathbf{G}]_{\text{Columna1}}, [\mathbf{f}, \mathbf{G}]_{\text{Columna2}} \right\}$$

La dimensión de \mathbf{L}_C es igual al rango de la matriz formada por los campos generadores (llamada \mathbf{W}_c en [Henson and Seborg, 1997]):

$$\mathbf{W}_c = \begin{bmatrix} \frac{C_{A0}}{V} & 0 & & \\ \frac{T_0}{V} & \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{C_P \rho V \left(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{U_{A J}}\right)} & [\mathbf{f}, \mathbf{G}]_{\text{Columna1}} & [\mathbf{f}, \mathbf{G}]_{\text{Columna2}} \end{bmatrix}$$

El rango de \mathbf{W}_c corresponde al número de filas o columnas Linealmente Independientes (LI). En este caso, el máximo rango será 2, puesto que sólo existen dos filas. Por lo tanto, se debe probar si el rango es 2 o 1. El rango será completo si la primera fila no se puede reproducir multiplicando la segunda por un escalar cualquiera α . Eso conduce a las siguientes cuatro igualdades que deben cumplirse simultáneamente, o dicho de otro modo, si al menos una no se cumple, el rango será completo (rango 2):

1. $\frac{C_{A0}}{V} = \alpha * \frac{T_0}{V} \Rightarrow C_{A0} = \alpha * T_0$ o también: $\alpha = \frac{C_{A0}}{T_0}$, que brinda una manera de valorar el factor de escala α o proporción entre las dos filas (en caso de que el rango sea 1).
2. $\alpha \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{C_P \rho V \left(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{U_{A J}}\right)} = 0 \Rightarrow \alpha F_J \rho_J C_{P J} = 0$ lo que sólo es posible si $F_J = 0$, puesto que α debe ser diferente de cero, y ρ_J y $C_{P J}$ son propiedades físicas del fluido de servicio (el refrigerante que va por la chaqueta) que siempre son diferentes de cero. Con esto se evidencia que es imposible que la primera fila se logre como un múltiplo de la segunda. Por lo tanto, el rango siempre será 2, independiente del lugar del espacio de estado en el que se esté. No es necesario por tanto probar las dos igualdades restantes, aunque a continuación se escriben por ilustración, recordando que se deberá reemplazar las equivalencias del Volumen V y del Área de transferencia A_J en términos del Diámetro del tanque D .
3. $-\frac{F C_{A0}}{V^2} - \frac{k_0 C_{A0} e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}}}{V} - \frac{k_0 T_0 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} x_1}{V} - \frac{k_0 E_a T_0 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} x_1}{R V} \frac{x_1}{x_2} =$
 $\alpha * \left[-\frac{k_0 C_{A0} e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} * \Delta \bar{H}}{C_P \rho V} - \frac{F T_0}{V^2} - \frac{k_0 E_a T_0 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} \Delta \bar{H} x_1}{R C_P \rho V x_2^2} - \frac{U_{A J} T_0}{C_P \rho V^2} + \frac{U_{A J} T_0}{C_P \rho V^2 \left(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{U_{A J}}\right)} \right]$
4. $-\frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} F_J \rho_J C_{P J}}{C_P \rho V \left(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{U_{A J}}\right)} x_1 - \frac{k_0 E_a e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} F_J \rho_J C_{P J} x_1}{C_P \rho V R \left(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{U_{A J}}\right) x_2^2} =$
 $\alpha * \left[-\frac{F F_J \rho_J C_{P J}}{C_P \rho V^2 \left(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{U_{A J}}\right)} - \frac{k_0 E_a e^{-\frac{E_a}{R^* x_2}} \Delta \bar{H} F_J \rho_J C_{P J} x_1}{R C_P \rho C_P \rho V \left(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{U_{A J}}\right) x_2^2} - \frac{U_{A J} F_J \rho_J C_{P J}}{(C_P \rho V)^2 \left(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{U_{A J}}\right)} + \frac{U_{A J} F_J \rho_J C_{P J}}{\left[C_P \rho V \left(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{U_{A J}}\right)\right]^2} \right]$

Ya con la controlabilidad local probada alrededor del estado estacionario \mathbf{x}^* (controlabilidad que en este caso resultó controlabilidad global), se procede a verificar la segunda condición de la Controlabilidad Práctica Local de Estado (CPLdeE): *ii*) Los Grados de Libertad para el Sistema Controlado son mayores o iguales a cero: $GdeLSC = N_{VM} - N_{VC} \geq 0$. Se evidencia desde el diseño mismo que se tomaron dos variables manipuladas $N_{VM} = 2$ para las dos variables controladas $N_{VC} = 2$, con lo cual resulta: $GdeLSC = N_{VM} - N_{VC} = 2 - 2 = 0$, cumpliéndose también este segundo requerimiento condición.

CONDICIÓN ii) de la CPLdeE: Las acciones de control \mathbf{u}^* requeridas para mantener el equilibrio \mathbf{x}^* , pertenecen al intervalo disponible de acciones de control del Proceso.

En este caso, se tomará la opción de las dos acciones de control, puesto que además de ser controlable, garantiza mayor facilidad para el diseño de los controladores. Se procede a calcular los valores del equilibrio para las acciones de control:

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) + \mathbf{G}(\mathbf{x}^*)\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} -\frac{F}{V}x_1^* - k_0 e^{-\frac{E_a}{R^*x_2^*}}x_1^* \\ -\frac{F}{V}x_2^* - \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^*x_2^*}} \Delta \tilde{H}_R}{C_{P\rho}}x_1^* - \frac{UA_I}{C_{P\rho}V}x_2^* + \frac{UA_J}{C_{P\rho}V(1 + \frac{F_{I\rho_J}C_{P_J}}{UA_J})}x_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{CA_0}{V} & 0 \\ \frac{T_0}{V} & \frac{F_{I\rho_J}C_{P_J}}{C_{P\rho}V(1 + \frac{F_{I\rho_J}C_{P_J}}{UA_J})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix}$$

Entonces, para el primer estado:

$$-\frac{F}{V}x_1^* - k_0 e^{-\frac{E_a}{R^*x_2^*}}x_1^* + \frac{CA_0}{V}u_1^* = 0 \Rightarrow u_1^* = \frac{F}{CA_0}x_1^* + \frac{k_0 V e^{-\frac{E_a}{R^*x_2^*}}}{CA_0}x_1^*$$

que exige que se reemplace la equivalencia entre el Volumen y la variable final de diseño, el Diámetro D del reactor ($V = 0,3338D^3$) y se recuerde que por condición de Nivel constante $F = F_0 = u_1$, llegando a:

$$\begin{aligned} u_1^* &= \frac{u_1^*}{CA_0}x_1^* + \frac{k_0 * 0,3338 * D^3 * e^{-\frac{E_a}{R^*x_2^*}}}{CA_0}x_1^* \Rightarrow \\ u_1^* - \frac{u_1^*}{CA_0}x_1^* &= \frac{k_0 * 0,3338 * D^3 * e^{-\frac{E_a}{R^*x_2^*}}}{CA_0}x_1^* \Rightarrow \\ u_1^*(1 - \frac{x_1^*}{CA_0}) &= \frac{k_0 * 0,3338 * D^3 * e^{-\frac{E_a}{R^*x_2^*}}}{CA_0}x_1^* \Rightarrow \\ u_1^* &= \frac{0,3338 * k_0 * x_1^* * e^{-\frac{E_a}{R^*x_2^*}}}{CA_0 * (1 - \frac{x_1^*}{CA_0})}D^3 \end{aligned}$$

Para hallar la restricción de controlabilidad se reemplazan todos los valores conocidos en esta última expresión (valores nominales de diseño para el CSTR):

$$u_1^* = \frac{0,3338 * 2,8267 \bullet 10^{11} \frac{1}{\text{minuto}} * 1071,6 \frac{\text{gmol}}{\text{m}^3} * e^{-\frac{75361,14 \frac{J}{\text{gmol}}}{8,3174 \frac{J}{\text{gmol} \cdot \text{K}} * 311,48 \text{K}}}}{2114,5 \frac{\text{gmol}}{\text{m}^3} * \left(1 - \frac{1071,6 \frac{\text{gmol}}{\text{m}^3}}{2114,5 \frac{\text{gmol}}{\text{m}^3}}\right)} D^3 \Rightarrow$$

$$u_1^* = 0,0226 \frac{1}{\text{minuto}} * D^3$$

y como los límites de u_1 son: $0 < u_1 < \frac{F_0^*}{0,5} = \frac{0,1605 \frac{\text{m}^3}{\text{minuto}}}{0,5} = 0,321 \frac{\text{m}^3}{\text{minuto}}$, que con la equivalencia $u_1^* = 0,0226 \frac{1}{\text{minuto}} * D^3$ da: $0 < D^3 < \frac{0,321}{0,0226} \text{m}^3 = 14,2289 \text{m}^3$. Sacando raíz cúbica se llega a una restricción de controlabilidad:

$$0 < D < 2,4232 \text{m} \quad (8.5)$$

Para el segundo estado:

$$-\frac{F}{V} x_2^* - \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R * x_2^*}} * \Delta \tilde{H}_R}{C_{P\rho}} x_1^* - \frac{U A_J}{C_{P\rho} V} x_2^* + \frac{U A_J}{C_{P\rho} V \left(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{U A_J}\right)} x_2^* + \frac{T_0}{V} u_1^* + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{C_{P\rho} V \left(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{U A_J}\right)} u_2^* = 0 \Rightarrow$$

$$u_2^* = \frac{C_{P\rho} V \left(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{U A_J}\right)}{F_J \rho_J C_{P J}} \left[\frac{F}{V} x_2^* + \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R * x_2^*}} * \Delta \tilde{H}_R}{C_{P\rho}} x_1^* + \frac{U A_J}{C_{P\rho} V} x_2^* - \frac{U A_J}{C_{P\rho} V \left(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{U A_J}\right)} x_2^* - \frac{T_0}{V} u_1^* \right]$$

Reemplazando la condición que garantiza Nivel constante: $F = u_1^*$, se llega a:

$$u_2^* = \frac{C_{P\rho} V \left(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{U A_J}\right)}{F_J \rho_J C_{P J}} \left[\frac{u_1^*}{V} x_2^* + \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R * x_2^*}} * \Delta \tilde{H}_R}{C_{P\rho}} x_1^* + \frac{U A_J}{C_{P\rho} V} x_2^* - \frac{U A_J}{C_{P\rho} V \left(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{U A_J}\right)} x_2^* - \frac{T_0}{V} u_1^* \right]$$

y ahora reemplazando las expresiones que dejan la variable de diseño explícita ($V = 0,3338 D^3$ y $A_J = 1,1781 D^2$), se llega a:

$$u_2^* = \frac{C_{P\rho} * 0,3338 D^3 \left(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{U * 0,375 * \pi D^2}\right)}{F_J \rho_J C_{P J}} \left[\frac{u_1^*}{0,3338 D^3} x_2^* + \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R * x_2^*}} * \Delta \tilde{H}_R}{C_{P\rho}} x_1^* + \frac{U * 0,375 * \pi D^2}{C_{P\rho} * 0,3338 D^3} x_2^* - \frac{U * 0,375 * \pi D^2}{C_{P\rho} * 0,3338 D^3 \left(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P J}}{U * 0,375 * \pi D^2}\right)} x_2^* - \frac{T_0}{V} u_1^* \right]$$

Se reemplazan luego los valores nominales de estado estacionario de las variables conocidas, incluido el encontrado para $u_1^* = 0,0226 \frac{1}{\text{minuto}} * D^3$:

$$u_2^* = -0,5837 * D^3 + 6,6588 D^2 - \frac{6,6588 D^4}{D^2 + 46,7739} - 6,8245 D - \frac{311,4525 D^2}{D^2 + 46,7739} + 311,4525 \quad (8.6)$$

con lo cual se obtiene una expresión para evaluar u_2^* , que se debe calcular en cada paso de la optimización tras conocer el D propuesto, de modo que se cumplan los límites establecidos para dicha acción de control:

$u_{2_Max} = T^* - 5K = 306,48K$ y $u_{2_min} = 281,15K$. Por ejemplo, cuando D toma el valor extremo dado por la primera condición $D = 2,4232m$ y por lo tanto $u_1^* = 0,3221$ se llega a: $u_2^* = 237,19K$, que no está en el intervalo de valores permitidos para u_2^* , lo que demuestra la necesidad de evaluar simultáneamente las restricciones dadas por las Ecuaciones 8.5 y 8.6.

CONDICIÓN iii) de la CPLdeE:: El Determinante de la Matriz de Respuesta Forzada (DMRF) del Sistema es diferente de cero: $\det[\mathbf{G}(\mathbf{x})] \neq 0$

Ahora se verificará la tercera condición de la CPLdeE. La matriz en mención es:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{C_{A0}}{V} & 0 \\ \frac{T_0}{V} & \frac{F_J \rho_J C_{P_J}}{C_{P\rho V(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P_J}}{U_{A_J}})}} \end{bmatrix}$$

cuyo determinante es: $\det[\mathbf{G}(\mathbf{x})] = \frac{C_{A0} F_J \rho_J C_{P_J}}{C_{P\rho V^2(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P_J}}{U_{A_J}})}}$. Por lo tanto, la condición a verificar es:

$$\frac{C_{A0} F_J \rho_J C_{P_J}}{C_{P\rho V^2(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P_J}}{U_{A_J}})}} = 0 \Rightarrow C_{A0} F_J \rho_J C_{P_J} = 0$$

que se cumple siempre que: $C_{A0} F_J \rho_J C_{P_J} = 0$, que resulta ser una condición similar a la verificada previamente para la Controlabilidad Local, pero en este caso, además de la opción $F_J = 0$, aparece una segunda opción: $C_{A0} = 0$, que indicaría un reactor sin entrada de reactivo. Por lo tanto, se verifica que $\det[\mathbf{G}(\mathbf{x})] \neq 0$ para cualquier CSTR real. Quedan así listas las formulaciones que actuarán como restricciones de Controlabilidad durante el DSPyC.

8.1.7. DSPyC: Paso 7

En el séptimo paso se debe responder a la pregunta: ¿Es el sistema Controlable?. De no serlo, se pide modificar el pareamiento propuesto y repetir el procedimiento desde el Paso 2. En caso de serlo, se debe tomar el pareamiento dado como el definitivo: \mathbf{u} , \mathbf{x} .

Como se vió en el paso anterior, el Sistema es controlable en todo el espacio de estado si se toman las dos acciones de control $u_1 = F_0$ y $u_2 = T_{0J}$, siempre que se cumplan las condiciones de controlabilidad dadas por las Ecuaciones 8.5 y 8.6. Esas serán las restricciones a considerar durante el DSPyC siguiendo el método aquí establecido. Con el fin de evitar problemas en el diseño, en vez de tomar una sola acción de control, se toma el pareamiento que considera dos acciones de control $u_1 = F_0$ y $u_2 = T_{0J}$, para controlar los dos estados $x_1 = C_A$ y $x_2 = T$.

8.1.8. DSPyC: Paso 8

En el paso octavo primero se exige evaluar la Reversibilidad Débil en el sentido Práctico del Sistema.

Se utilizará el Criterio de Reversibilidad Práctica Débil (RPD) dado previamente. Para probar esta condición se tomará cada una de las dos ED del modelo del Proceso, evaluadas en los estados estacionario, y se calculará el cambio en el estado ante cambios de la acción de control entre su estado estacionario \mathbf{u}_{EE} y sus valores extremos \mathbf{u}_{min} , \mathbf{u}_{Max} , así: $\frac{d\mathbf{x}}{dt}_{min} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{EE}, \mathbf{u}_{min})$ y $\frac{d\mathbf{x}}{dt}_{Max} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{EE}, \mathbf{u}_{min})$. La RPD quedará probada si se encuentran signos diferentes entre $\frac{d\mathbf{x}}{dt}_{min}$ y $\frac{d\mathbf{x}}{dt}_{Max}$. Aunque la RPD genera restricciones para el DSPyC, en la metodología propuesta aquí no se considera explícitamente, puesto que todavía es tema de investigación. Por lo tanto, en lo que sigue se ilustra su cálculo asumiendo que el Proceso ya está diseñado. Para eso se utilizará el reactor presentado en [Bequette, 2002], cuyo volumen de operación es $V = 2,4069m^3$. El modelo del Proceso se repite aquí para mayor claridad:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{F}{V}x_1 - k_0 e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}} x_1 \\ -\frac{F}{V}x_2 - \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}} * \Delta \tilde{H}_R}{C_P \rho} x_1 - \frac{U A_J}{C_P \rho V} x_2 + \frac{U A_J}{C_P \rho V (1 + \frac{F_J \rho_J C_{P,J}}{U A_J})} x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_{A0}}{V} \\ \frac{T_0}{V} \\ 0 \\ \frac{F_J \rho_J C_{P,J}}{C_P \rho V (1 + \frac{F_J \rho_J C_{P,J}}{U A_J})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Para el primer estado, $x_1 = C_A$, se tiene la siguiente ecuación diferencial en el modelo:

$$\dot{x}_1 = \frac{C_{A0}}{V} u_1 - \frac{F}{V} x_1 - k_0 e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}} x_1$$

La acción de control para este estado es escalar $u_1 = F_0$, cuyos valores extremos son: $F_{0\ min} = 0$ y $F_{0\ Max} = 2 * F_{EE} = 0,321 \frac{m^3}{\text{minuto}}$. Por lo tanto basta con probar los valores mínimo y máximo de la misma, sin considerar los efectos de u_2 . Usando el valor mínimo de la acción de control se calcula el cambio de la primera variable de estado, considerando además los valores nominales del estado estacionario y que para lograr Nivel constante se debe cumplir que $F = F_0$:

$$\frac{dx_1}{dt}_{min} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{EE}, \mathbf{u}_{min}) = \frac{C_{A0}}{V} * 0 - \frac{0}{V} x_{1_EE} - k_0 e^{-\frac{E_a}{R^*x_{2_EE}}} x_{1_EE} = -70,4845$$

Ahora usando el valor máximo de la acción de control se calcula el cambio de la primera variables de estado, considerando los valores nominales del estado estacionario y que para lograr Nivel constante se debe cumplir que $F = F_0$:

$$\frac{dx_1}{dt}_{Max} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{EE}, \mathbf{u}_{Max}) = \frac{C_{A0}}{V} u_1 - \frac{F}{V} x_1 - k_0 e^{-\frac{E_a}{R^*x_2}} x_1 = 68,6035$$

Para esta primera variable de estado se nota que existen acciones de control que producen cambios negativos en el valor del estado (acción de control mínima con cambio $\frac{dx_1}{dt}_{min} = -70,4845$) y cambios positivos en el valor del estado (acción de control máxima con cambio $\frac{dx_1}{dt}_{Max} = 68,6035$), por lo que esta variable resulta Debilmente Reversible en el sentido Práctico.

Se realiza el mismo procedimiento para la segunda variable de estado, pero como ahora la acción de control sobre el segundo estado es vectorial $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$, deben probarse cuatro combinaciones: u_{1min}, u_{2min} ; u_{1min}, u_{2Max} ; u_{1Max}, u_{2min} ; u_{1Max}, u_{2Max} . Se reescribe la ecuación diferencial que describe el comportamiento del segundo estado, con los valores nominales y de estado estacionario indicados, además de reemplazar la condición que garantiza Nivel constante $F = F_0 = u_1$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & \frac{T_0}{V} u_1 - \frac{u_1}{V} x_{2_EE} - \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^*x_{2_EE}}} * \Delta \tilde{H}_R}{C_P \rho} x_{1_EE} - \frac{U A_J}{C_P \rho V} x_{2_EE} \\ & + \frac{U A_J}{C_P \rho V (1 + \frac{F_J \rho_J C_{P,J}}{U A_J})} x_{2_EE} + \frac{F_J \rho_J C_{P,J}}{C_P \rho V (1 + \frac{F_J \rho_J C_{P,J}}{U A_J})} u_2 \end{aligned}$$

de la cual se llega a la siguiente expresión para el cambio en el estado en función de las acciones de control:

$$\dot{x}_2 = -6,7556 * u_1 + 0,0212 * u_2 - 6,5916$$

Mayor que cero cuando ($\dot{x}_2 > 0$) $\Rightarrow -6,7556 * u_1 + 0,0212 * u_2 - 6,5916 > 0$:

$$u_1 > 0,0031 * u_2 - 0,9757$$

y menor que cero cuando ($\dot{x}_2 < 0$) $\Rightarrow -6,7556 * u_1 + 0,0212 * u_2 - 6,5916 < 0$:

$$u_1 < 0,0031 * u_2 - 0,9757$$

La primera condición permite calcular dos valores límites para u_1 en los extremos de u_2 :

$$\begin{aligned} u_{1_a} &> 0,0031 * 281,15 - 0,9757 \Rightarrow u_{1_a} > -0,1041 \\ u_{1_b} &> 0,0031 * 306,48 - 0,9757 \Rightarrow u_{1_b} > -0,0256 \end{aligned}$$

Los dos valores extremos de u_1 cumplen las dos desigualdades previas: $u_{1min} = 0 > -0,1041$ y $u_{1min} = 0 > -0,0256$ y $u_{1min} = 0,321 > -0,1041$ y $u_{1min} = 0,321 > -0,0256$. La segunda condición permite calcular otro par de valores límites de u_1 en los extremos de u_2 , pero esta vez en el sentido contrario:

$$\begin{aligned} u_{1_a} &< 0,0031 * 281,15 - 0,9757 \Rightarrow u_{1_a} < -0,1041 \\ u_{1_b} &< 0,0031 * 306,48 - 0,9757 \Rightarrow u_{1_b} < -0,0256 \end{aligned}$$

Estos dos valores resultan imposibles para la primera acción de control, que es un Flujo (siempre positivo). Bajo otras condiciones de diseño, que no se discuten aquí por espacio, es posible lograr que el segundo grupo de valores extremos, para ($\dot{x}_2 < 0$), de condiciones reales (flujos mayores que cero). Con esto se muestra que bajo ninguna de las combinaciones extremas de las acciones de control disponibles, el segundo estado (la Temperatura T) puede disminuirse dentro del reactor si se mantienen las demás variables en sus valores de estado estacionario. Eso indica que con los intervalos de acciones de control actuales, la Reversibilidad Práctica Débil del segundo estado no está garantizada, aunque como se dijo previamente, la prueba aplicada está todavía en periodo de investigación y validación. De ahí su caracter de Opcional en el procedimiento de DSPyC propuesto en este trabajo.

8.1.9. DSPyC: Paso 9

Este paso pide contestar a la pregunta: ¿Son todos los Estados Reversibles?. En caso de no serlo, se pide cambiar las acciones de control u_i que se requieran a modo dual y repetir desde el paso 10 del procedimiento. En caso de serlo, se pide proponer una estructura de control y un algoritmo de control para el Sistema.

En el ejemplo del CSTR que se sigue aquí, el paso anterior mostró que la capacidad de enfriamiento es suficiente para no dejar bajar la temperatura bajo las condiciones nominales de perturbación. Sin embargo, es fácil demostrar que mantener las acciones de control en valores que den la máxima capacidad de enfriamiento, no garantiza que valores superiores de las perturbaciones no disminuyan el segundo estado (T). La estructura de control que se propone respetará el pareamiento de dos lazos simples retroalimentados que ya se había postulado con el pareamiento semilla. Además, se propone utilizar controladores PID para los dos lazos individuales. Como la Reversibilidad se tomó en este trabajo sólo a manera de ilustración, no se ahondará en este aspecto, dejándolo como parte de futuras investigaciones. Se asume por lo tanto que la RPD se cumplió.

8.1.10. DSPyC: Paso 10

En este paso se deben calcular los límites en los ajustes de los controladores que garantizan un Sistema estable en lazo cerrado en el punto de operación.

Para calcular la estabilidad, se sugiere proceder por el método de sustitución directa, operando con las funciones de transferencia obtenidas desde la linealización de las dos ED no lineales del modelo. Todos los ajustes de los controladores son grados de libertad que luego la optimización debe fijar, por lo tanto, este paso producirá restricciones sobre cada una de esos ajustes. Veamos el cálculo de los límites de estabilidad.

Controlador PID para la Concentración:

Para el control por realimentación la Concentración de reactivo A , se parte del conocimiento del Modelo Semifísico de Base Fenomenológica (MSBF) de esta dinámica:

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F_0}{V}C_{A0} - \frac{F}{V}C_A - k_0e^{-\frac{E_a}{R^*T}}C_A$$

que se linealizó en el Paso 2 de este procedimiento, dando en variables de desviación:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dC_A}{dt}\right)' &= -\left[\frac{F_{EE}}{V} + k_0e^{-\frac{E_a}{R^*T_{EE}}}\right]C_A' \\ &\quad -\left[k_0C_{AEE}e^{-\frac{E_a}{R^*T_{EE}}} * \frac{E_a}{RT_{EE}^2}\right]T' \\ &\quad +\left[\frac{C_{A0}}{V} - \frac{C_{AEE}}{V}\right]F_0' \end{aligned}$$

Con el fin de proceder con el diseño del controlador PID, es conveniente llevar el modelo linealizado a variables de control. Para eso, se evidencia que la mayor perturbación para C_A es la Temperatura $d = T$, que la acción de control del lazo de C_A es el flujo de alimento $u = F_0$ y que la salida es el estado $y = C_A$. En adelante, se omite la comilla para indicar variables de desviación y se renombran los términos constantes (sin signo) así: $\theta_1 = \left[\frac{F_{EE}}{V} + k_0e^{-\frac{E_a}{R^*T_{EE}}}\right]$, $\theta_2 = \left[\frac{C_{A0}}{V} - \frac{C_{AEE}}{V}\right]$ y $\theta_3 = \left[k_0C_{AEE}e^{-\frac{E_a}{R^*T_{EE}}} * \frac{E_a}{RT_{EE}^2}\right]$, llegando a:

$$\frac{dy}{dt} = -\theta_1 * y + \theta_2 * u - \theta_3 * d$$

Este modelo linealizado se puede convertir al dominio de Laplace, obteniendo:

$$(s + \theta_1)Y(s) = \theta_2U(s) - \theta_3D(s)$$

y las dos funciones de transferencia:

$$G_P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\theta_2}{(s + \theta_1)} \quad \text{y} \quad G_d(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = -\frac{\theta_3}{(s + \theta_1)}$$

que expresadas en forma canónica son:

$$G_P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{\theta_2}{\theta_1}}{\left(\frac{1}{\theta_1}s + 1\right)} = \frac{K_{Pr}}{(\tau_{Pr}s + 1)} \quad \text{y} \quad G_d(s) = -\frac{\frac{\theta_3}{\theta_1}}{\left(\frac{1}{\theta_1}s + 1\right)} = -\frac{K_d}{(\tau_{Pr}s + 1)}$$

con K_{Pr} la ganancia del bloque asociado al proceso, K_d la ganancia del bloque asociado a la perturbación y τ_{Pr} la constante de tiempo del proceso en la línea de la acción de control. Como se va a usar un controlador PID No-Interactivo o Estándar ISA [Creus, 2005], su función de transferencia es:

$$G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P \left(1 + \frac{1}{st_I} + st_D \right)$$

que resulta más cómoda de operar si se expresa todo en función de ganancias: $K_I = \frac{K_P}{t_I}$ y $K_D = K_P t_D$, con lo cual se obtiene:

$$G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$

Se asume además que el Sensor-Transmisor de concentración tiene un intervalo de operación entre 0 y $2300 \frac{gmol}{m^3}$, con una función de transferencia de primer orden, de ganancia $K_T = 6,9565 \times 10^{-3} mA$ por cada $\frac{gmol}{m^3}$ y constante de tiempo $\tau_T = 0,25 minutos$.

$$G_T(s) = \frac{K_T}{(\tau_T s + 1)}$$

Por su parte, y sólo por simplicidad, el Elemento Final de Control tiene función de transferencia unitaria $G_{EFC}(s) = 1$. Todo el diagrama de bloques se ve en la Figura 8.3.

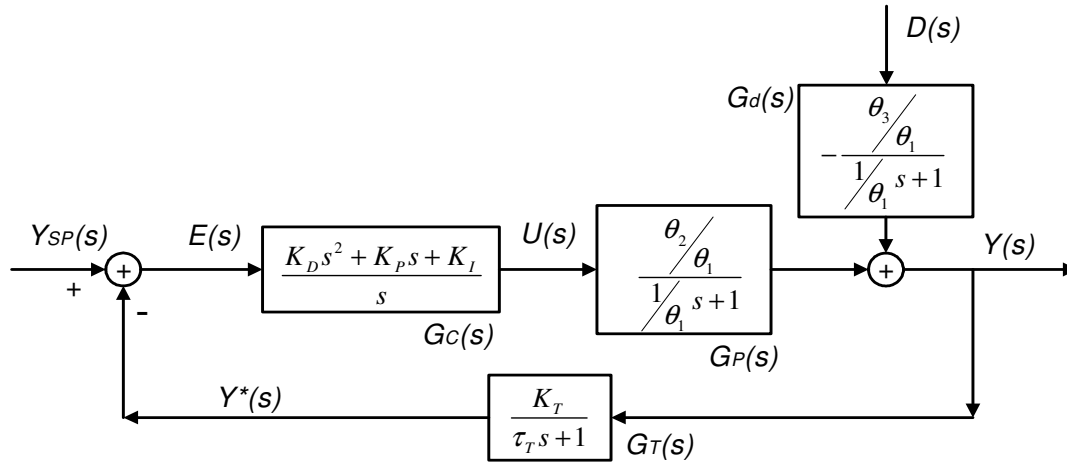


Figura 8.3: Diagrama de bloques en lazo cerrado del CSTR del ejemplo.

El tipo de acción a usar en el controlador es *Inversa* ($K_P > 0$)⁴, puesto que sobrepasos positivos de la salida (errores negativos) causan cierres de la válvula de alimento de reactivo. Siguiendo el diagrama de bloques:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_d(s)D(s) + G_C(s)G_P(s)E(s) \Rightarrow Y(s) = G_d(s)D(s) + G_C(s)G_P(s) [Y_{SP}(s) - Y^*(s)] \Rightarrow \\ Y(s) &= G_d(s)D(s) + G_C(s)G_P(s)Y_{SP}(s) - G_C(s)G_P(s)G_T(s)Y(s) \end{aligned}$$

⁴La literatura del área de control tiene dos convenciones diferentes de denominar las acciones de un controlador. Aquí se usa la dada en el texto de Smith y Corripio (1997).

se llega al siguiente modelo en el dominio de Laplace (expresado como funciones de transferencia) para este sistema en lazo cerrado:

$$Y(s) = \frac{G_d(s)}{1 + G_C(s)G_P(s)G_T(s)}D(s) + \frac{G_C(s)G_P(s)}{1 + G_C(s)G_P(s)G_T(s)}Y_{SP}(s)$$

de la que se toma para el análisis de estabilidad la ecuación característica (denominador común a las dos funciones de transferencia igualado a 0). Al reemplazar las funciones de transferencia involucradas se obtiene:

$$\begin{aligned} 1 + G_C(s)G_P(s)G_T(s) &= 0 \Rightarrow \\ 1 + \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s} \frac{K_{Pr}}{(\tau_{Pr}s + 1)} \frac{K_T}{(\tau_T s + 1)} &= 0 \Rightarrow \\ \tau_{Pr}\tau_T s^3 + (\tau_{Pr} + \tau_T + K_{Pr}K_T K_D)s^2 + (1 + K_{Pr}K_T K_P)s + K_{Pr}K_T K_I &= 0 \end{aligned}$$

Para utilizar el método de sustitución directa se deben proponer equivalencias entre t_I y K_P y entre t_D y K_P , para dejar todas las expresiones en términos de una única incógnita (K_P). Utilizando las sugerencias de sintonía de Ziegler y Nichols para PID: $K_P = \frac{K_u}{1.7}$, $t_I = \frac{T_u}{2}$; $t_D = \frac{T_u}{8}$, en los que K_u es la ganancia última del lazo y T_u es el periodo último de las oscilaciones, usando el método de las oscilaciones sostenidas o método de análisis en lazo cerrado [Smith y Corripio, 1997]. Recordando que $T_u = \frac{2\pi}{\omega_u}$, se llega a $t_I = \frac{T_u}{2} = \frac{2\pi}{2\omega_u} = \frac{\pi}{\omega_u}$ y a $t_D = \frac{T_u}{8} = \frac{2\pi}{8\omega_u} = \frac{\pi}{4\omega_u}$. Ahora utilizando las definiciones de K_I y K_D en función de K_P , se obtienen las equivalencias finales $K_I = \frac{K_P}{t_I} = \frac{K_P \omega_u}{\pi}$ y $K_D = K_P t_D = \frac{K_P \pi}{4\omega_u}$, con lo cual la ecuación característica (sólo en función de K_P) es:

$$\tau_{Pr}\tau_T s^3 + (\tau_{Pr} + \tau_T + K_{Pr}K_T \frac{K_P \pi}{4\omega_u})s^2 + (1 + K_{Pr}K_T K_P)s + K_{Pr}K_T \frac{K_P \omega_u}{\pi} = 0$$

además, se debe reemplazar el operador de Laplace (s) por la equivalencia $i\omega_u$ y la ganancia del controlador se convierte en la Ganancia Última K_u . Con todo esto se llega a:

$$\tau_{Pr}\tau_T (i\omega_u)^3 + (\tau_{Pr} + \tau_T + K_{Pr}K_T \frac{K_u \pi}{4\omega_u})(i\omega_u)^2 + (1 + K_{Pr}K_T K_u)(i\omega_u) + K_{Pr}K_T \frac{K_u \omega_u}{\pi} = 0$$

Realizando las operaciones indicadas para el operador imaginario i (potencias pares equivalentes a -1) y para ω_u , obtenemos:

$$-\tau_{Pr}\tau_T \omega_u^3 i - (\tau_{Pr} + \tau_T + K_{Pr}K_T \frac{K_u \pi}{4\omega_u})\omega_u^2 + (1 + K_{Pr}K_T K_u)(i\omega_u) + K_{Pr}K_T \frac{K_u \omega_u}{\pi} = 0$$

Desarrollando esta expresión:

$$-\tau_{Pr}\tau_T \omega_u^3 i - \tau_{Pr}\omega_u^2 - \tau_T \omega_u^2 + (\frac{4 - \pi^2}{4\pi})K_{Pr}K_T K_u \omega_u + \omega_u i + K_{Pr}K_T K_u \omega_u i = 0$$

Separando la parte Real y la parte Imaginaria, e igualándolas a cero, se obtiene:

$$\text{Real: } -\tau_{Pr}\omega_u^2 - \tau_T \omega_u^2 + (\frac{4 - \pi^2}{4\pi})K_{Pr}K_T K_u \omega_u = 0$$

$$\text{Imaginaria: } -\tau_{Pr}\tau_T\omega_u^3 + \omega_u + K_{Pr}K_TK_u\omega_u = 0$$

que forma un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas: K_u y ω_u . De la parte Real se obtiene:

$$\left[-\tau_{Pr}\omega_u - \tau_T\omega_u + \left(\frac{4 - \pi^2}{4\pi} \right) K_{Pr}K_TK_u \right] \omega_u = 0$$

que indica como primera solución $\omega_u = 0$, con la equivalencia:

$$\begin{aligned} (\tau_{Pr} + \tau_T)\omega_u &= \left(\frac{4 - \pi^2}{4\pi} \right) K_{Pr}K_TK_u \Rightarrow \\ \omega_u &= \frac{(4 - \pi^2)K_{Pr}K_T}{4\pi(\tau_{Pr} + \tau_T)} K_u \end{aligned}$$

Por lo tanto, la primera solución sería: $\omega_u = 0$ y $K_u = 0$, que significa operar en lazo abierto por tener un controlador con ganancia nula. Lo mismo se evidencia al organizar la parte Imaginaria y evidenciar que esta primera solución también se puede deducir de esta expresión:

$$\text{Imaginaria: } [-\tau_{Pr}\tau_T\omega_u^2 + 1 + K_{Pr}K_TK_u] \omega_u = 0$$

Ahora reemplazando en la expresión no nula de la parte imaginaria la equivalencia hallada entre ω_u y K_u desde la parte real, se obtiene:

$$-\tau_{Pr}\tau_T \left[\frac{(4 - \pi^2)K_{Pr}K_T}{4\pi(\tau_{Pr} + \tau_T)} K_u \right]^2 + 1 + K_{Pr}K_TK_u = 0$$

que reorganizado conduce a un polinomio de segundo orden en K_u :

$$-\tau_{Pr}\tau_T \left[\frac{(4 - \pi^2)K_{Pr}K_T}{4\pi(\tau_{Pr} + \tau_T)} \right]^2 K_u^2 + K_{Pr}K_TK_u + 1 = 0$$

cuyas solución genérica es:

$$K_{u\ i} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para facilitar el cálculo de las soluciones, se resuelven de manera explícita las constantes a , b y $c = 1$, utilizando todos los valores conocidos del proceso:

$$\begin{aligned} a &= -\tau_{Pr}\tau_T \left[\frac{(4 - \pi^2)K_{Pr}K_T}{4\pi\left(\frac{1}{\theta_1} + 0,25\right)} \right]^2 = -\frac{1}{\theta_1} * 0,25 * \left[\frac{(4 - \pi^2) * \frac{\theta_2}{\theta_1} * 6,9565 \times 10^{-3}}{4\pi\left(\frac{1}{\theta_1} + 0,25\right)} \right]^2 \Rightarrow \\ a &= -\frac{0,25}{\theta_1} * \left[\frac{-0,0032 * \frac{\theta_2}{\theta_1}}{\left(\frac{1}{\theta_1} + 0,25\right)} \right]^2 \end{aligned}$$

Para continuar con el desarrollo de la expresión, se considera primero que aunque el CSTR reportado en [Bequette, 2001] tiene un tiempo de residencia $\tau_{Res} = \frac{V}{F_{EE}} = 15 \text{ minutos}$, aquí se asumirá libre para poder

modificar tanto el Volumen V como el flujo de reactivo $F_0 = F$. Con esto y todos los valores conocidos del Proceso, se precalan los valores de las constantes θ_1 y θ_2 :

$$\theta_1 = \frac{F_{EE}}{V} + k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* T_{EE}}} = \frac{F}{V} + 0,0658$$

$$\theta_2 = \frac{2114,5}{V} - \frac{C_{A EE}}{V}$$

Nótese como aparecen dos variables de diseño del proceso (el Volumen V del reactor y el flujo de alimento de reactivo F) influenciando la solución que se busca y por tanto alterando los límites de estabilidad del proceso. Para calcular la concentración final (del estado estacionario) se puede utilizar la ED del modelo para la concentración, pero en estado estacionario: $\frac{F_0}{V} C_{A0} - \frac{F}{V} C_A - k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* T}} C_A = 0$, de la que se puede despejar $C_{A EE}$ según: $C_{A EE} = \frac{F_0 C_{A0}}{V * (\frac{F}{V} + k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* T}})}$. Para el cálculo se usa la equivalencia entre el Volumen V y el Diámetro D del tanque hallada al final del Paso 1 y se reemplazan todos los datos conocidos, incluyendo el hecho de que $F_0 = F$, llegando a:

$$C_{A EE} = \frac{2114,5F}{(F + 0,022D^3)}$$

siendo posible el cálculo de las dos constantes:

$$\theta_1 = \frac{F}{0,3338D^3} + 0,0658$$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \frac{2114,5}{0,3338D^3} - \frac{2114,5F}{(F+0,022D^3)} \Rightarrow \\ \theta_2 &= \frac{2114,5}{0,3338D^3} - \frac{2114,5F}{(0,3338F + 0,0073D^3)D^3} \end{aligned}$$

Con estos valores se puede calcular en cada punto la constante a de la solución de la ecuación cuadrática. Ahora, para la constante b de la misma solución, se tiene:

$$b = K_{Pr} K_T = 6,9565 \times 10^{-3} * \frac{\theta_2}{\theta_1}$$

y finalmente la última constante $c = 1,0$. Las dos soluciones de la ecuación cuadrática, reemplazando los valores de las variables y las expresiones previamente halladas, se calculan tomando primero el signo $+$ (se obtiene K_{u1_CA}) y luego el $-$ (se obtiene K_{u2_CA}) previos a la raíz cuadrada. Por lo tanto, la Restricción de Estabilidad para el controlador PID de Concentración será:

$$K_{u1_CA} < K_{P_CA} < K_{u2_CA}$$

Sólo por ilustrar el resultado numérico, se toma el volumen nominal del reactor $V = 2,4069m^3$ y el flujo nominal $F_0 = F = 0,1605 \frac{m^3}{minuto}$ dados en [Bequette, 2002], del cual se despeja el D , utilizando la equivalencia $V = 0,09375 * \pi * D^3$, llegando a $D = 2,0142m$. Por lo tanto, las constantes serán:

$$\theta_1 = 0,1246 \quad y \quad \theta_2 = 408,3054$$

y las constantes de la ecuación cuadrática serán:

$$a = -3,2215, \quad b = 22,7960 \quad \text{y} \quad c = 1,0$$

Las dos raíces (para este caso numérico) serán:

$$K_{u_i} = \frac{-22,7960 \pm 23,0769}{-6,443} \Rightarrow K_{u_1} = -0,0436 \quad \text{y} \quad K_{u_2} = 7,1198$$

Hallando las frecuencias de cada solución, desde su equivalencia con K_u :

$$\omega_u = \frac{-5,8696 * K_{Pr} K_T}{4\pi(\tau_{Pr} + \tau_T)} K_u$$

se evidencia que la única ganancia última que produce frecuencias reales ($\omega_u > 0$) es $K_{u_1} = -0,0436$, por lo tanto está será la ganancia última a la que puede ajustarse el controlador antes de producir inestabilidad. Nótese que dicha ganancia última es de signo contrario a la ganancia aplicable al controlador ($K_P > 0$), lo que indica que si se usa cualquier K_P positiva, el lazo de control será estable, pero si se cambia de signo ($K_P < 0$) y se toma cualquier $|K_P| > 0,0436 \frac{\frac{m^3}{kgmol}}{m^3}$, el lazo se inestabiliza. Este resultado indica que nunca se podrá desestabilizar la dinámica de Concentración variando el Flujo de reactivo. Tal conclusión es inmediata, puesto que flujo excesivo de reactivo hará que $C_{A_{EE}} = C_{A0}$, mientras que si se corta el flujo de reactivo $C_{A_{EE}} = 0$ tras un tiempo suficiente para que todo el A residual en el CSTR reaccione. Por lo tanto, la Restricción de Estabilidad para la Optimización será simplemente la de signo: $K_P > 0$, puesto que la otra implica alterar la acción del controlador (cosa muy improbable).

Controlador PID para la Temperatura:

Para el control por realimentación la Temperatura se procede de manera similar a lo mostrado para el controlador de Concentración de reactivo A. Se parte del conocimiento del Modelo Semifísico de Base Fenomenológica (MSBF) de la Temperatura:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = & \frac{F_0 T_0}{V} - \frac{F}{V} T - \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* T}} * \Delta \bar{H}}{C_P \rho} C_A \\ & - \frac{U A_J}{C_P \rho V} T + \frac{F_J \rho_J C_{P_J}}{C_P \rho V (1 + \frac{F_J \rho_J C_{P_J}}{U A_J})} T_{0J} + \frac{U A_J}{C_P \rho V (1 + \frac{F_J \rho_J C_{P_J}}{U A_J})} T \end{aligned}$$

que se linealizó en el Paso 2 de este procedimiento, dando en variables de desviación:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dT}{dt} \right)' = & - \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* T_{EE}}} \Delta \bar{H}}{C_P \rho} * C'_A \\ & - \left[\frac{F_{EE}}{V} + \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* T_{EE}}} \Delta \bar{H} C_{A_{EE}}}{C_P \rho} * \frac{E_a}{RT_{EE}^2} + \frac{U A_J}{C_P \rho V} \right] * T' \\ & + \left[\frac{T_{0_{EE}}}{V} - \frac{T_{EE}}{V} \right] * F'_0 \\ & + \frac{F_J \rho_J C_{P_J}}{C_P \rho V (1 + \frac{F_J \rho_J C_{P_J}}{U A_J})} * T'_{0J} \end{aligned}$$

Se lleva el modelo linealizado a variables de control. Para eso, se evidencia que las perturbaciones para T son $d_1 = C_A$ y $d_2 = F_0$. Además, la acción de control del lazo de T es la Temperatura de entrada del Fluido térmico a la chaqueta $u = T_{0,J}$ y que la salida es el estado $y = T$. En adelante, se omite la comilla para indicar variables de desviación y se renombran los términos constantes (sin signo) así: $\theta_1 = \left[\frac{E_{EE}}{V} + \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* T_{EE}}}}{C_{P\rho}} \frac{\Delta \bar{H} C_{A,EE}}{C_{P\rho}} * \frac{E_a}{RT_{EE}^2} + \frac{U_{AJ}}{C_{P\rho} V} \right]$, $\theta_2 = \left[\frac{F_J \rho_J C_{P,J}}{C_{P\rho} V (1 + \frac{F_J \rho_J C_{P,J}}{U_{AJ}}} \right]$, $\theta_3 = \left[\frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^* T_{EE}}}}{C_{P\rho}} \frac{\Delta \bar{H}}{C_{P\rho}} \right]$ y $\theta_4 = \left[\frac{T_{0,EE}}{V} - \frac{T_{EE}}{V} \right]$, llegando a:

$$\frac{dy}{dt} = -\theta_1 * y + \theta_2 * u - \theta_3 * d_1 + \theta_4 * d_2$$

Este modelo linealizado se puede convertir al dominio de Laplace, obteniendo:

$$(s + \theta_1)Y(s) = \theta_2 U(s) - \theta_3 D_1(s) + \theta_4 D_2(s)$$

y las tres funciones de transferencia:

$$G_P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\theta_2}{(s + \theta_1)}; \quad G_{d1}(s) = \frac{Y(s)}{D_1(s)} = -\frac{\theta_3}{(s + \theta_1)} \quad \text{y} \quad G_{d2}(s) = \frac{Y(s)}{D_2(s)} = \frac{\theta_4}{(s + \theta_1)}$$

que expresadas en forma canónica son:

$$\begin{aligned} G_P(s) &= \frac{\frac{\theta_2}{\theta_1}}{\left(\frac{1}{\theta_1}s + 1\right)} = \frac{K_{Pr}}{(\tau_{Pr}s + 1)} \\ G_{d1}(s) &= -\frac{\frac{\theta_3}{\theta_1}}{\left(\frac{1}{\theta_1}s + 1\right)} = -\frac{K_{d1}}{(\tau_{Pr}s + 1)} \\ G_{d2}(s) &= \frac{\frac{\theta_4}{\theta_1}}{(s + \theta_1)} = \frac{K_{d2}}{(\tau_{Pr}s + 1)} \end{aligned}$$

con K_{Pr} la ganancia del bloque asociado al proceso, K_{di} la ganancia del bloque asociado a la i -ésima perturbación y τ_{Pr} la constante de tiempo del proceso en la línea de la acción de control. Se usará un controlador PID No-Interactivo o Estándar ISA, su función de transferencia es:

$$G_C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$

Se asume además que el Sensor-Transmisor de temperatura tiene un intervalo de operación entre $273K$ y $353K$, con una función de transferencia de primer orden, de ganancia $K_T = 0,2mA$ por cada grado Kelvin y constante de tiempo $\tau_T = 0,1 minutos$.

$$G_T(s) = \frac{K_T}{(\tau_T s + 1)}$$

Por su parte, y sólo por simplicidad, el Elemento Final de Control tiene función de transferencia unitaria $G_{EFC}(s) = 1$. El tipo de acción a usar en el controlador es *Inversa* ($K_P > 0$), puesto que sobrepasos positivos de la salida (errores negativos) causan disminuciones en la temperatura de entrada del fluido térmico a la chaqueta. Con todo esto, y procedimiento de manera similar a lo realizado para el controlador de concentración, se llega al modelo del lazo cerrado:

$$Y(s) = G_{d1}(s)D_1(s) + G_{d2}(s)D_2(s) + G_C(s)G_P(s)Y_{SP}(s) - G_C(s)G_P(s)G_T(s)Y(s)$$

que expresado como funciones de transferencia es:

$$Y(s) = \frac{G_{d1}(s)}{1 + G_C(s)G_P(s)G_T(s)}D_1(s) + \frac{G_{d2}(s)}{1 + G_C(s)G_P(s)G_T(s)}D_2(s) + \frac{G_C(s)G_P(s)}{1 + G_C(s)G_P(s)G_T(s)}Y_{SP}(s)$$

Se toma para el análisis de estabilidad la ecuación característica y se reemplazan las funciones de transferencia involucradas:

$$\begin{aligned} 1 + G_C(s)G_P(s)G_T(s) &= 0 \Rightarrow \\ 1 + \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s} \frac{K_{Pr}}{(\tau_{Pr} s + 1)} \frac{K_T}{(\tau_T s + 1)} &= 0 \Rightarrow \\ \tau_{Pr} \tau_T s^3 + (\tau_{Pr} + \tau_T + K_{Pr} K_T K_D) s^2 + (1 + K_{Pr} K_T K_P) s + K_{Pr} K_T K_I &= 0 \end{aligned}$$

Se sigue el método de sustitución directa igual que para la concentración, llegando a estas partes de la ecuación característica:

$$\text{Real: } -\tau_{Pr} \omega_u^2 - \tau_T \omega_u^2 + \left(\frac{4 - \pi^2}{4\pi}\right) K_{Pr} K_T K_u \omega_u = 0$$

$$\text{Imaginaria: } -\tau_{Pr} \tau_T \omega_u^3 + \omega_u + K_{Pr} K_T K_u \omega_u = 0$$

De la parte Real se obtiene:

$$\left[-\tau_{Pr} \omega_u - \tau_T \omega_u + \left(\frac{4 - \pi^2}{4\pi}\right) K_{Pr} K_T K_u \right] \omega_u = 0$$

que indica como primera solución $\omega_u = 0$, con la equivalencia:

$$\omega_u = \frac{(4 - \pi^2) K_{Pr} K_T}{4\pi(\tau_{Pr} + \tau_T)} K_u$$

Por lo tanto, la primera solución sería: $\omega_u = 0$ y $K_u = 0$, que significa operar en lazo abierto por tener un controlador con ganancia nula. De la parte Imaginaria y con esta equivalencia reemplazada se llega a un polinomio de segundo orden en K_u :

$$-\tau_{Pr} \tau_T \left[\frac{(4 - \pi^2) K_{Pr} K_T}{4\pi(\tau_{Pr} + \tau_T)} \right]^2 K_u^2 + K_{Pr} K_T K_u + 1 = 0$$

cuyas solución genérica es:

$$K_{u i} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

con las siguientes constantes calculadas para la dinámica de Temperatura:

$$a = -\tau_{Pr}\tau_T \left[\frac{(4 - \pi^2)K_{Pr}K_T}{4\pi\left(\frac{1}{\theta_1} + 0,25\right)} \right]^2 = -\frac{1}{\theta_1} * 0,1 * \left[\frac{(4 - \pi^2) * \frac{\theta_2}{\theta_1} * 0,2}{4\pi\left(\frac{1}{\theta_1} + 0,1\right)} \right]^2 \Rightarrow$$

$$a = -\frac{0,1}{\theta_1} * \left[\frac{-0,0934 * \frac{\theta_2}{\theta_1}}{\left(\frac{1}{\theta_1} + 0,1\right)} \right]^2$$

$$b = K_{Pr}K_T = \frac{\theta_2}{\theta_1} * K_T$$

De manera similar a lo hecho para el Controlador de Concentración, se pueden calcular los valores de las constantes θ_1 y θ_2 , contando con la equivalencia entre A_J y D calculada al final de Paso 1:

$$\theta_1 = \frac{F_{EE}}{V} + \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R * T_{EE}}} \Delta \bar{H} C_{A_{EE}}}{C_{P\rho}} * \frac{E_a}{RT_{EE}^2} + \frac{UA_J}{C_{P\rho}V} \Rightarrow$$

$$\theta_1 = \frac{F}{0,3338D} - 0,0286 * D^3 + \frac{0,0286}{D}$$

Para θ_2 se requiere una relación entre el flujo de refrigerante F_J y D . El F_J puede calcularse utilizando la ecuación de balance de Energía a través de la chaqueta, pero en estado estacionario como muestra la Ecuación 8.2, con lo cual se llega a: $F_J \rho_J C_{P_J} (T_{0_J} - T_J) + UA_J (T - T_J) = 0$ y por lo tanto $F_J = -\frac{UA_J (T - T_J)}{\rho_J C_{P_J} (T_{0_J} - T_J)}$. Pero como ya se conoce la equivalencia entre A_J y D , se reemplaza para llegar a: $F_J = -\frac{1,1781U(T - T_J)}{\rho_J C_{P_J} (T_{0_J} - T_J)} D^2$. Además, asumiendo que el coeficiente global U de transferencia de calor no cambia, que la temperatura de salida del refrigerante es la máxima permitida $u_{2_Max} = T_J = 306,48K$, que la temperatura de entrada del refrigerante es la mínima permitida $u_{2_min} = T_J = 281,15K$, y que los demás valores de estado estacionario se mantienen a pesar del cambio de tamaño, se pueden reemplazar esos valores para llegar a: $F_J = 0,0016D^2$. Por lo tanto:

$$\theta_2 = \frac{F_J \rho_J C_{P_J}}{C_{P\rho}V \left(1 + \frac{F_J \rho_J C_{P_J}}{UA_J}\right)} \Rightarrow \theta_2 = \frac{0,0047}{D^3}$$

Las dos soluciones de la ecuación cuadrática, reemplazando los valores de las variables y las expresiones previamente halladas, se calculan tomando primero el signo + (se obtiene K_{u1_T}) y luego el - (se obtiene K_{u2_T}) previos a la raíz cuadrada. Por lo tanto, la Restricción de Estabilidad para el controlador PID de Temperatura será:

$$K_{u1_T} < K_{P_T} < K_{u2_T}$$

Igual que el apartado anterior, se toma sólo por ilustración numérica los valores dados en [Bequette, 2002]. Las constantes serán:

$$\theta_1 = 0,0192 \quad \text{y} \quad \theta_2 = 5,752 \times 10^{-4}$$

Entonces:

$$a = -1,5007 \times 10^{-8}, \quad b = K_{Pr}K_T = \frac{5,752 \times 10^{-4}}{0,0192} * 0,1 = 0,003 \quad \text{y} \quad c = 1,0$$

Las dos soluciones de la ecuación cuadrática se hallan reemplazando en la fórmula de la cuadrática:

$$K_{u_i} = \frac{-0,003 \pm 0,003002}{-3,0014 \times 10^{-8}} \Rightarrow K_{u_1} = -66,6356 \text{ y } K_{u_2} = 1,9997 \times 10^5$$

Hallando las frecuencias de cada solución, desde su equivalencia con K_u :

$$\omega_u = \frac{-5,8696 * K_{Pr} K_T}{4\pi(\tau_{Pr} + \tau_T)} K_u$$

se evidencia que la única ganancia última que produce frecuencias reales ($\omega_u > 0$) es $K_{u_1} = -66,6356$, por lo tanto está será la ganancia última a la que puede ajustarse el controlador antes de producir inestabilidad. La otra ganancia última ($K_{u_2} = 1,9997 \times 10^5$) produce frecuencias negativas, lo que no es posible en la realidad, por lo tanto no es válida. En consecuencia, si se usa cualquier K_P positiva, el lazo de control será estable, pero si se cambia de signo ($K_P < 0$) y se toma cualquier $|K_P| > 66,6356 \frac{\text{grados } K \text{ en } T_{OJ}}{\text{grado } K \text{ en } T}$, el lazo se inestabiliza. Este resultado indica que nunca se podrá desestabilizar la dinámica de Temperatura variando la temperatura de entrada del fluido refrigerante a la chaqueta, siempre que sea diferente de cero. Tal conclusión es inmediata, puesto que flujo excesivo de refrigerante hará que $T_{EE} \approx T_{OJ}$. Por lo tanto, la Restricción de Estabilidad para la Optimización será simplemente la de signo: $K_P > 0$, puesto que la otra implica alterar la acción del controlador (cosa muy improbable).

8.1.11. DSPyC: Paso 11

Este paso implica realizar la optimización de los parámetros del Proceso y su Sistema de Control.

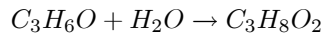
El problema consiste en diseñar un reactor con una capacidad de 6350 ton/año de producto terminado, si se asume que el diseño ideal opera cerca al punto dado en [Bequette, 2002]. La concentración nominal de Si se asume una conversión media de 50% y que la planta opera 340 días del año las 24 horas de cada día, lo que da 489600 minutos . Por lo tanto, con una densidad de producto final $\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, el flujo másico nominal de reactivo puro se puede calcular como:

$$\dot{m}_{Nom_B_Puro} = 6350 \frac{\text{ton}}{\text{año}} * \frac{1 \text{ año}}{489600 \text{ minutos}} * \frac{1000 \text{ kg}}{\text{ton}} = 12,9698 \frac{\text{kg_B_Puro}}{\text{minuto}}$$

que con el peso molecular ($76 \frac{\text{kg}}{\text{kgmol}}$) del propilénglico ($C_3H_8O_2$), se encuentra el flujo molar nominal de producto:

$$\dot{N}_{Nom_B_Puro} = \frac{12,9698 \frac{\text{kg_B_Puro}}{\text{minuto}}}{76 \frac{\text{kg}}{\text{kgmol}}} = 0,17 \frac{\text{kgmol_B}}{\text{minuto}}$$

Como se conoce la reacción química a realizar:



se evidencia que una mol de A produce una mol de B , por lo tanto, con el flujo molar nominal de producto B y la conversión mínima esperada (50%), se puede calcular el flujo molar nominal de A puro en el alimento:

$$\dot{N}_{Nom_A_Puro} = \frac{0,17 \frac{\text{kgmol_B}}{\text{minuto}}}{0,5} = 0,3413 \frac{\text{kgmol_A_Puro}}{\text{minuto}}$$

como además se conoce la concentración del reactivo en el alimento: $C_{A0}=2114,5\frac{g\text{mol}}{m^3}$, se calcula el flujo nominal volumétrico de alimento al reactor:

$$F_{0_Nom} = \frac{0,3413\frac{kg\text{mol } A \text{ Puro}}{\text{minuto}} * 1000\frac{g\text{mol}}{kg\text{mol}}}{2114,5\frac{g\text{mol}}{m^3}} = 0,1614\frac{m^3}{\text{minuto}}$$

Este valor de flujo, con la conversión arriba mencionada, garantizarán la eficiencia económica del Proceso, y resulta cercano al valor presentado para el flujo en estado estacionario en el trabajo de [Bequette, 2002]. Pero, para realizar la optimización debe formularse un Funcional de Costo (FC) que de cuenta de las interacciones propias de los grados de libertad del diseño y la valoración del Proceso final ya diseñado. En la Ecuación 7.5 se presentó una forma genérica para el FC. En este ejemplo se utiliza tal formulación como plantilla para valorar FC dados en la literatura. En todos se valora sólo el costo total del Proceso, calculado como la suma de los Costos de Capital (C_{Cap}) y de los Costos de Operación (C_{Op}). En esta propuesta se adiciona además un término (Costo de Desempeño C_{Des}), que penalice el desempeño del sistema en Lazo Cerrado, como se verá más adelante. En la parte económica, los C_{Cap} incluyen el Costo del Reactor (C_R) y el Costo de la Chaqueta (C_J), que puede expresarse como [Seider et al., 1999]:

$$\begin{aligned} C_R &= 1780 * L^{0,87} * D^{1,23} \\ C_J &= 450 * A_J^{0,7} \end{aligned}$$

Estas dos formulaciones no consideran el tipo de material de construcción ni el valor agregado por la complejidad de la técnica constructiva. Para considerar tales efectos se acostumbra premultiplicar cada ecuación por dos constantes: θ_1 asociada con el material de construcción y θ_2 asociada con los sobrecostos de la técnica constructiva. La ecuación para C_J es en realidad la del costo de un intercambiador de calor, pero que puede usarse sin inconvenientes para este caso.

Para calcular los Costos de Operación (C_{Op}) se consideran los Costos de Servicios Industriales (C_{SI}), en este caso el líquido refrigerante, y los Costos de Ineficiencias en la reacción (C_{In}), asociados con el reactivo no convertido a producto y que por lo tanto no se podrá vender como tal. Se considera que un kilogramo de B se venderá en $US\$1,8$, con un margen de utilidad del $US\$0,35$ por kg de B . Las formulaciones sugeridas para esos costos son [Ochoa, 2005]:

$$\begin{aligned} C_{SI} &= \sigma_1 * F_J \\ C_{In} &= \sigma_2 * F * (1 - X_C) \end{aligned}$$

con σ_1 el valor en $US\$$ de cada $\frac{m^3}{\text{minuto}}$ de líquido de enfriamiento, que asumiendo que es agua que proviene de una torre de enfriamiento dotada de enfriador (*chiller* en inglés), se puede valorar en $US\$0,4167$ cada $\frac{m^3}{\text{minuto}}$ (se asumió una potencia total de $50kW$ y un costo por $kwhr$ de $US\$0,5$), todo multiplicado por el tiempo de operación anual de la planta (489600minutos), lo que da:

$$C_{SI} = 489600 * \frac{50}{60} * 0,5 * F_J = 2,04 \times 10^5 * F_J$$

Para σ_2 se procede de manera similar con el tiempo de operación anual de la planta y considerando que los $kg\text{mol}$ que no se convierte de reactivo A es el producto de la ineficiencia ($1 - X_C$) por los $kg\text{mol}$ de A que entran al reactor ($F[\frac{m^3}{\text{minuto}}] * C_{A0}[\frac{g\text{mol}}{m^3}] * \frac{1kg\text{mol}}{1000g\text{mol}}$). Para convertir esto a kg de producto (la reacción tiene relación molar 1:1 reactivo:producto) se multiplica por el peso molecular [$\frac{76kg}{kg\text{mol}}$], con lo que se obtienen los

kg de B (producto) por minuto que no se produjo. Todo se lleva a costos anuales multiplicando por el tiempo de operación y por la utilidad del producto ($\frac{US\$0,35}{kg}$):

$$C_{In} = 489600 * 0,35 * 2114,5 * \frac{76}{1000} * F * (1 - X_C) = 2,7538 \times 10^7 * F * (1 - X_C)$$

Respecto al costo asociado con el desempeño (C_{Des}), se tomará como índice la Integral del Error Absoluto ponderado por el Tiempo (ITAE), medido en toda una simulación del CSTR sometido a una perturbación fuerte. El ITAE se formula como:

$$ITAE = \int_{t_0}^{t_F} t * |e(t)| dt$$

con t el tiempo transcurrido entre el inicio del ensayo y el tiempo actual, $e(t)$ el error actual entre el punto de ajuste y la variable. Puesto que son dos estados, se tendrán dos ITAE: $ITAE_{C_A}$ e $ITAE_T$.

Uniando todas las formulaciones previamente establecidas para el costo, se llega la FC buscado:

$$FC(US\$) = 1780 * L^{0,87} * D^{1,23} + 450 * A_J^{0,7} + 2,04 \times 10^5 * F_J + 2,7538 \times 10^7 * F * (1 - X_C) + \alpha * ITAE_{C_A} + \beta * ITAE_T$$

Este FC debe acondicionarse para facilitar la optimización, puesto que tal como está tiene seis posibles variables directas a optimizar: L , D , A_J , F , F_J y X_C , y seis posibles variables indirectas a optimizar (tres ajustes para cada uno de los dos controladores PID): BP_{C_A} , $t_{I_{C_A}}$, $t_{D_{C_A}}$, BP_T , t_{I_T} y t_{D_T} , lo que dificulta la tarea. Para esa simplificación se recurre a las siguientes relaciones de diseño conocidas, con la idea de que D sea la única variable directa a optimizar, puesto que las seis indirectas sólo se pueden reducir con relaciones empíricas como las dadas en [Ziegler and Nichols, 1943]:

1. La relación entre el Nivel L y el Diámetro D del tanque se halló al final del Paso 1 como $L = 0,375D$.
2. Para el Área de transferencia de la chaqueta A_J , en el Paso 10 se encontró que $A_J = 1,1781D^2$.
3. En el Paso 10 se calculó también una equivalencia entre el Flujo de refrigerante F_J y D , que se retoma aquí: $F_J = 0,0016D^2$.
4. La conversión X_C de reactivo a producto puede reemplazarse por su equivalencia en función de las concentraciones: $X_C = 1 - \frac{C_A}{C_{A0}}$. La concentración final es la de estado estacionario, que puede despejarse de la ED del modelo para la concentración, como se hizo en el Paso 10: $C_{A_{EE}} = \frac{2114,5F}{(F+0,022D^3)}$. Por lo tanto, reemplazando el valor de C_{A0} , la conversión será: $X_C = 1 - \frac{F}{(F+0,022D^3)}$.

Con todo lo anterior reemplazado en la ecuación del Funcional de Costo (FC):

$$FC(US\$) = 1780 * (0,375)^{0,87} * D^{1,23} + 450 * A_J^{0,7} + 2,04 \times 10^5 * F_J + 2,7538 \times 10^7 * F * (1 - X_C) + \alpha * ITAE_{C_A} + \beta * ITAE_T \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
FC(US\$) = & 1780 * (0,375D)^{0,87} * D^{1,23} + 450 * (1,1781D^2)^{0,7} \\
& + 2,04 \times 10^5 * 0,0016D^2 + 2,7538 \times 10^7 * F * (1 - (1 - \frac{F}{(F + 0,022D^3)})) \\
& + \alpha * ITAE_{C_A} + \beta * ITAE_T
\end{aligned}$$

que reemplazando los valores conocidos y realizando las operaciones indicadas y reorganizando los exponentes de D , lleva a la expresión final a optimizar:

$$\begin{aligned}
FC(US\$) = & 758,2758D^{2,1} + 504,7078D^{1,4} \\
& + 326,4D^2 + 2,7538 \times 10^7 \frac{F^2}{(F + 0,022D^3)} \\
& + \alpha * ITAE_{C_A} + \beta * ITAE_T
\end{aligned}$$

Con todo lo anterior, el Problema de Optimización queda formulado como:

minimizar FC
 D, F

Sujeto a :

Restricciones de Cumplimiento del Modelo: Los dos estados deben cumplir en todo momento con sus ecuaciones, lo que resulta fundamental para la valoración del desempeño basado en ITAE:

$$\begin{aligned}
\frac{dC_A}{dt} &= \frac{F_0}{V} C_{A0} - \frac{F}{V} C_A - k_0 e^{-\frac{E_a}{R^*T}} C_A \\
\frac{dT}{dt} &= \frac{F_0 T_0}{V} - \frac{F}{V} T - \frac{k_0 e^{-\frac{E_a}{R^*T}} * \Delta \bar{H}}{C_{P\rho}} C_A - \frac{UA_J}{C_{P\rho} V} T + \frac{F_{J\rho_J} C_{P_J}}{C_{P\rho} V (1 + \frac{F_{J\rho_J} C_{P_J}}{UA_J})} T_{0_J} + \frac{UA_J}{C_{P\rho} V (1 + \frac{F_{J\rho_J} C_{P_J}}{UA_J})} T
\end{aligned}$$

Primera Restricción de Controlabilidad: $0 < D < 2,4232m$

Segunda Restricción de Controlabilidad: $281,15K < u_2^* < 306,48K$, calculando u_2^* con:

$$u_2^* = -0,5837 * D^3 + 6,6588D^2 - \frac{6,6588D^4}{D^2 + 46,7739} - 6,8245D - \frac{311,4525D^2}{D^2 + 46,7739} + 311,4525$$

Restricción de consistencia matemática: *i)* Flujos, Área y Diámetro son todos positivos, *ii)* $0 < X_C < 1,0$.

Restricciones de Estabilidad: *i)* PID de Concentración: $K_{u1_C_A} < K_{P_C_A} < K_{u2_C_A}$, *ii)* PID de Temperatura: $K_{u1_T} < K_{P_T} < K_{u2_T}$.

Es muy importante anotar en este punto que si las restricciones de estabilidad habilitan todo el intervalo de valores posibles de K_P sin cambio de signo (como se vió en los cálculos numéricos de los K_{ui}), el procedimiento de DSPyC puede ejecutarse solamente con las restricciones de Controlabilidad, puesto que el proceso así logrado tendrá garantizada esta propiedad, sin importar el algoritmo de control que se utilice [Ochoa, 2005]. Para eso, se retiran del FC todos los términos asociados con el desempeño del controlador. En este caso $ITAE_{C_A}$ e $ITAE_T$. Esta separabilidad da mucha versatilidad al método propuesto para el DSPyC, puesto que puede diseñarse el proceso y luego ajustar el algoritmos de control más adecuado para un desempeño dado. La otra opción es el cálculo de las ganancias últimas para diferentes valores de las variables de diseño. Esta es la opción que se realizó, con los resultados que se aprecian en la siguientes figuras. Para el lazo de control de Concentración se obtuvo el comportamiento que se ve en la Figura 8.4 para la primera ganancia última ($K_{u1_C_A}$), zona inferior, y la segunda ganancia última ($K_{u1_C_A}$), zona superior. Se aprecia que para cualquier combinación de D y F (en el intervalo dado como factible para estos dos parámetros), el controlador será estable si $K_{P_C_A} > 0$, es decir, si $K_{P_C_A}$ no cambia de signo (recuérdese que $K_{P_C_A}$ es de signo +). Esta será la restricción de estabilidad a utilizar en el diseño (sintonía) del controlador de Concentración.

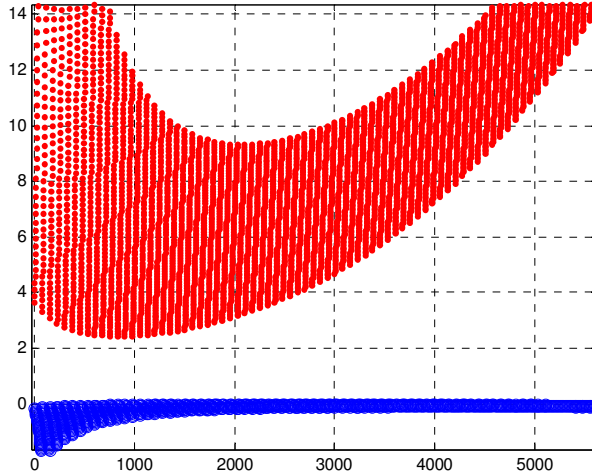


Figura 8.4: Límites para la ganancia última del lazo de control de concentración.

Se procede de igual manera para el lazo de temperatura, encontrando el comportamiento mostrado en la Figura 8.5 para la primera ganancia última (K_{u1_T}) y en la Figura 8.6 para la segunda ganancia última (K_{u2_T}), zona superior.

Cómo se ve, puesto que la ganancia del controlador es positiva ($K_{P_T} > 0$), la primera ganancia última (K_{u1_T}) nunca se producirá porque implicaría cambiar la acción del controlador (de inversa $K_{P_T} > 0$ a directa $K_{P_T} < 0$). La segunda ganancia última contiene lugares de ganancia positiva, como se ve en la Figura 8.7 que es un acercamiento a esa región.

Explorando las primeras combinaciones de F y D probadas (hasta la posición 2776 del eje x), se ve que el mínimo valor para la K_{u1_T} es de $2,064 \times 10^7$, que sigue siendo un valor grande para K_{P_T} , recordando que sus unidades son $\frac{\text{grados K en } T_{OJ}}{\text{grado K de error en } T}$. Luego empiezan a aparecer valores positivos y negativos de K_{u1_T} . Los valores positivos siguen siendo alto (del orden de $\times 10^7$) y los negativos implican cambio de acción del controlador, que como ya se dijo no es una situación probable. Se ve que el controlador será estable si $K_{P_T} > 0$, es decir, si K_{P_CA} no cambia de signo (recuérdese que K_{P_T} es de signo +). Esta será la restricción de estabilidad a utilizar para el controlador PID de Temperatura.

Aprovechando esta propiedad, y puesto que las restricciones de estabilidad de los dos controladores cumplen con el criterio arriba mencionado, se hará primero una optimización del diseño con controlabilidad garantizada y luego se procederá con el ajuste de los controladores, también de manera óptima pero con los criterios ITAE. Para la optimización se programó un algoritmo de búsqueda enumerativa, que recorre una malla de valores en F y D , con los siguientes intervalos: $0,0839 \frac{m^3}{\text{minuto}} < F = F_0 < 0,3228 \frac{m^3}{\text{minuto}}$; $0,5333m < D < 3,0m$. En cada punto se evaluó el FC y se conformó la tripleta (F, D, FC) , que luego se se gráfico en tres dimensiones.

Optimización del Diseño con Controlabilidad Garantizada pero Sin Ajustes del Controlador

El Problema de Optimización queda:

$$\underset{D,F}{\text{minimizar}} FC(US\$) = 758,2758D^{2,1} + 504,7078D^{1,4} + 326,4D^2 + 2,7538 \times 10^7 \frac{F^2}{(F+0,022D^3)}$$

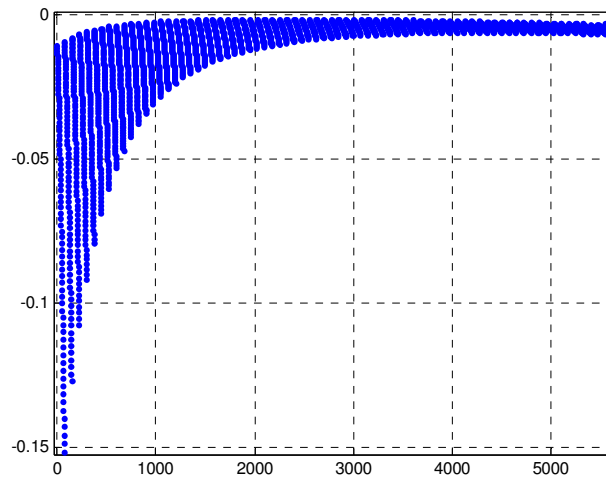


Figura 8.5: Primera ganancia última del lazo de control de Temperatura.

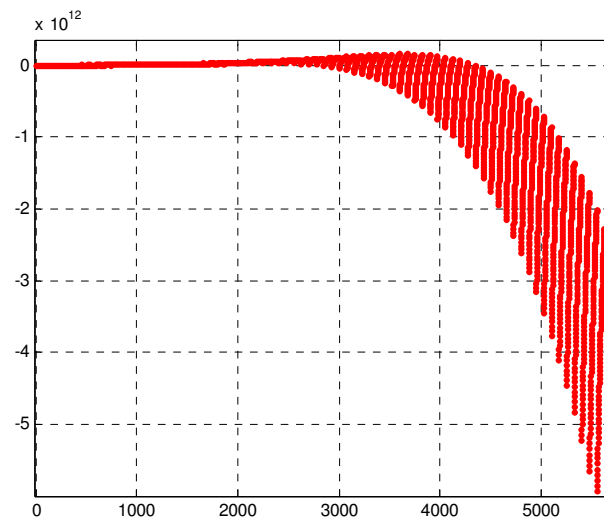


Figura 8.6: Segunda ganancia última del lazo de control de Temperatura.

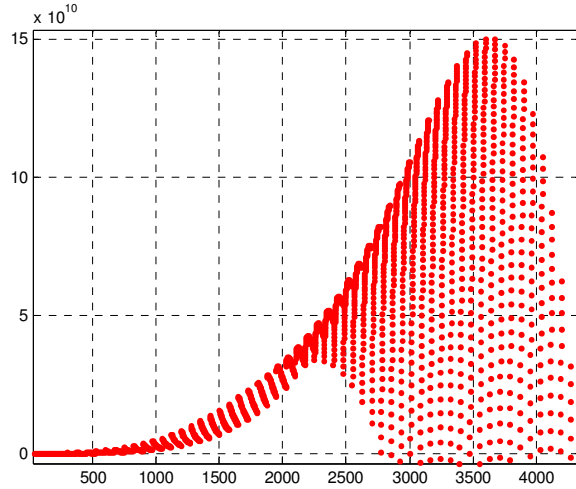


Figura 8.7: Acercamiento a la segunda ganancia del lazo de control de Temperatura.

Sujeto a :

Restricciones de Cumplimiento del Modelo: Ya se consideraron al hallar todas las equivalencias de las variables con D .

Primera Restricción de Controlabilidad: $0 < D < 2,4232m$

Segunda Restricción de Controlabilidad: $281,15K < u_2^* < 306,48K$, calculando u_2^* con:

$$u_2^* = -0,5837 * D^3 + 6,6588D^2 - \frac{6,6588D^4}{D^2+46,7739} - 6,8245D - \frac{311,4525D^2}{D^2+46,7739} + 311,4525$$

Restricciones de Estabilidad: No aplica porque se usará la separabilidad para hacer primero diseño con controlabilidad garantizada.

Restricción de consistencia matemática: i) Flujos, Área y Diámetro son todos positivos, ii) $0 < X_C < 1,0$.

La superficie de respuesta tras recorrer toda la malla de valores para F y D , se puede apreciar en la Figura 8.8.

La solución al problema de Optimización consistió en buscar el valor mínimo de FC, primero sin ninguna restricción de controlabilidad y luego considerando las restricciones de controlabilidad de la propuesta de DSPyC de este trabajo. Los resultados fueron:

Optimización sin restricciones de controlabilidad. $D = 3,0m$, $F = 0,0936 \frac{m^3}{minuto}$, $X_C = 0,8639$, $FC = 1437900$, $Producción = 6362,6 \frac{ton}{año}$, $u_{2_EE} = 275,22K$.

Optimización con restricciones de controlabilidad. $D = 2,40m$. $F = 0,1130 \frac{m^3}{minuto}$, $X_C = 0,7291$, $FC = 2686200$, $Producción = 6481,4 \frac{ton}{año}$, $u_{2_EE} = 287,0K$.

Como se aprecia, el diseño sin considerar la controlabilidad cumple con la productividad esperada ($6362,6 \frac{ton}{año} > 6350 \frac{ton}{año}$) y tiene un costo anual mucho más bajo que el diseño con restricciones de controlabilidad, en este caso de $US\$1,437,900.00 < US\$2,686,200.00$. Sin embargo, el CSTR que entrega ese diseño ($D = 3,0m$ y $u_{2_EE} = 275,22K$) resulta no controlable en el sentido práctico en el espacio de estado, a diferencia del CSTR diseñado con las restricciones de controlabilidad. Esto demuestra la debilidad del método tradicional de diseño que no considera ninguna restricción de controlabilidad práctica durante el diseño.

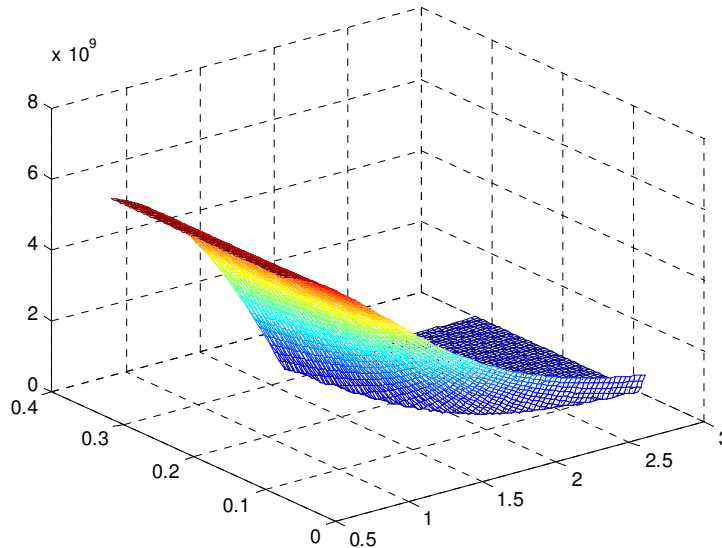


Figura 8.8: Superficie de respuesta del Funcional de Costo en función de F y D .

Optimización del Diseño (Ajustes) de los Controladores

Para el ajuste de los controladores se procedió por una técnica numérica de optimización que halló los seis ajustes de los controladores PID (tres para cada uno: K_P , t_I y t_D). La técnica utilizada se denomina Quimiotactismo Bacteriano (QB o bacterial chemotaxis en inglés). Al lector interesado se le remite al trabajo original que propuso el algoritmo [Bremmerman and Anderson, 1990] y a dos trabajos posteriores en los que se ha aplicado con algunas mejoras para evitar mínimos locales [Alvarez et al., 2002; García y Alvarez, 2009]. El algoritmo de Quimiotactismo Bacteriano (QB o Bacterial Chemotaxis en inglés) fue originalmente propuesto en (Bremmerman and Anderson, 1990) como una optimización numérica de los pesos de una red neuronal artificial de propagación hacia delante. El mecanismo de búsqueda del óptimo por QB imita el movimiento típico de una colonia de bacterias dentro de un caldo de cultivo. Tales movimientos son una función directa de la concentración de nutrientes en dicho caldo de cultivo. La funcionalidad del movimiento se logra por un cierto código de comunicación que provee información sobre la concentración de nutrientes en varias direcciones alrededor de la posición actual de la colonia. El movimiento que finalmente dará la colonia en el próximo instante será en aquella dirección en la que la concentración de nutrientes incremente. El mismo criterio de movimiento en busca de un óptimo matemático se aplica durante las búsquedas numéricas de un máximo (o de un mínimo tomando el recíproco de la función) de cualquier función multivariable.

En un primer paso del algoritmo de QB se determinan los intervalos nominales y se establece un valor semilla para cada θ_i que se va a optimizar. De este modo el algoritmo de QB inicia su trabajo explorando varias direcciones en el espacio de los parámetros. El algoritmo de QB básico (para maximizar), puede ser descrito como la siguiente secuencia de pasos, considerando una única bacteria como si fuera la colonia completa, y un vector de parámetros θ que minimiza el Funcional de Costo (FC):

1. Se toma de manera provisional el valor semilla de cada uno de los θ_k como θ_{k_0} . Se calcula el valor del Funcional de Costo (FC) con los valores actuales (θ_{k_0}) y se toma dicho valor como el óptimo inicial FC_0 .

2. Considerando el intervalo de variación de cada θ (θ_{\min} , θ_{Max}), se determina aleatoriamente un vector de términos de suma \mathbf{S} con las mismas dimensiones del vector $\boldsymbol{\theta}$. Este procedimiento acepta valores negativos o positivos al vector, dependiendo de la naturaleza numérica de los valores buscados $\boldsymbol{\theta}$.
3. Se calcula un nuevo $\boldsymbol{\theta}$ usando el vector \mathbf{S} , así: $\boldsymbol{\theta}_P = \boldsymbol{\theta} + \mathbf{S}$
4. Usando $\boldsymbol{\theta}_P$ se determina el valor de FC en el instante P : FC_P .
5. Si $FC_P > FC_n$ se almacena $\boldsymbol{\theta}_P$ como $\boldsymbol{\theta}_{Solución}$ y se mantiene el \mathbf{S} actual. Si $FC_P < FC_n$ entonces se mantiene el $\boldsymbol{\theta}_{Solución}$ original y se determina aleatoriamente un nuevo \mathbf{S} . Si tras generar un cierto número de \mathbf{S} se producen pasos no válidos, se reduce el intervalo de generación de \mathbf{S} y se repite desde el paso 2.
6. Si todavía no se cumple la condición de parada del algoritmo, se retorna al paso 3. De lo contrario, el algoritmo termina entregando como respuesta el $\boldsymbol{\theta}_{Solución}$.

Respecto a la condición de parada del algoritmo, existen tres alternativas. La primera considera un número fijo de ciclos de reducción del intervalo de generación de la matriz \mathbf{S} . La segunda es un número máximo de pasos válidos. La tercera consiste en evaluar el cambio en el valor de la función objetivo, si $(FC_{n+1} - FC_n) < \varepsilon$, con ε un valor de tolerancia, la optimización concluye.

La optimización de los dos controladores se llevó a cabo llamando $\boldsymbol{\theta} = [K_{P_CA}, t_{I_CA}, t_{D_CA}, K_{P_T}, t_{I_T}, t_{D_T}]$ y aplicando perturbaciones en la concentración de entrada ($-300 \frac{gmol}{m^3} < C_{A0} < 300 \frac{gmol}{m^3}$), la temperatura del alimento de reactivo ($-4^\circ C < T_0 < 3^\circ C$) y en el calor de reacción ($-9000 \frac{J}{gmol} < \Delta \bar{H}_R < 9000 \frac{J}{gmol}$). En las Figuras 8.9 a 8.12 se aprecia la respuesta de los dos controladores ante una secuencia de tales perturbaciones, utilizando los siguientes ajuste (entregados por el algoritmo de QB): $K_{P_CA} = 2,22$, $t_{I_CA} = 0,3 minutos$, $t_{D_CA} = 0,1 minutos$ y $K_{P_T} = 6,67$, $t_{I_T} = 0,4 minutos$, $t_{D_T} = 0,1 minutos$, y operando con el Estado Estacionario (EE) obtenido desde el diseño (algunos parámetros cambiaron respecto al CSTR tomado de Bequette[2002]): $C_{A_EE} = 1071,6 \frac{gmol}{m^3}$, $T_{EE} = 38,33^\circ C = 311,48K$. Se aplicó para cada variable de perturbación, sólo el sentido de cambio que mayor efecto presenta sobre los estados: $t = 500 minutos$, $\Delta C_{A0} = -300 \frac{gmol}{m^3}$, $t = 1000 minutos$, $\Delta T_0 = +3^\circ C$ y $t = 1500 minutos$, $\Delta H_{rx} = -9000 \frac{J}{gmol}$. También se graficaron los movimientos de los dos EFCs, con lo cual se puede apreciar la calidad del control logrado.

8.1.12. DSPyC: Paso 12

Es este el paso final del procedimiento. En este punto el Proceso queda diseñado bajo todas las especificaciones.

El CSTR que se tomó como ejemplo para la demostración del procedimiento planteado aquí para Diseño Simultáneo de Proceso y su Control (DSPyC), así como la demostración del procedimiento para formular Modelos Semifísicos de Base Fenomenológica (MSBF) para procesos, queda finalmente con las siguientes especificaciones de Diseño de Proceso y su Control:

Diámetro del Tanque= $D = 2,40m$.

Flujo de Reactivo Nominal= $u_{1_EE} = 0,1130 \frac{m^3}{minuto}$

Temperatura Nominal de Entrada Chaqueta del Fluido a la Chaqueta= $u_{2_EE} = 287,0K$

Conversión Nominal de Reactivo en Producto= $X_c = 0,7291$

Productividad del CSTR= $6481,4 \frac{ton}{año}$

Temperatura de Nominal de Operación= $38,33^\circ C = 311,48K$.

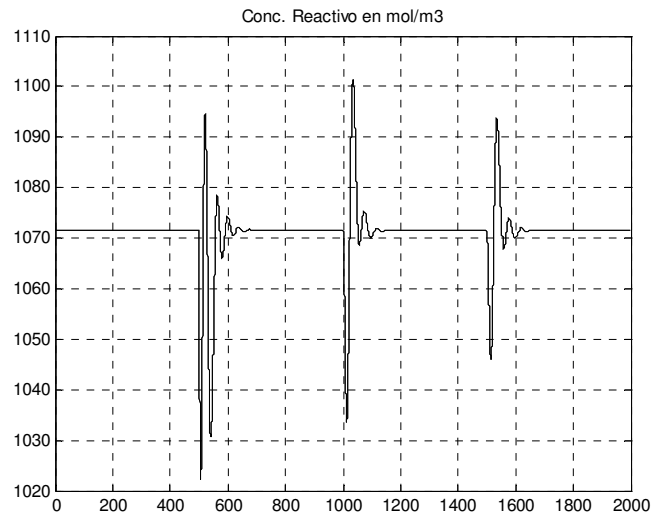


Figura 8.9: Respuesta de la concentración de reactivo en el reactor.

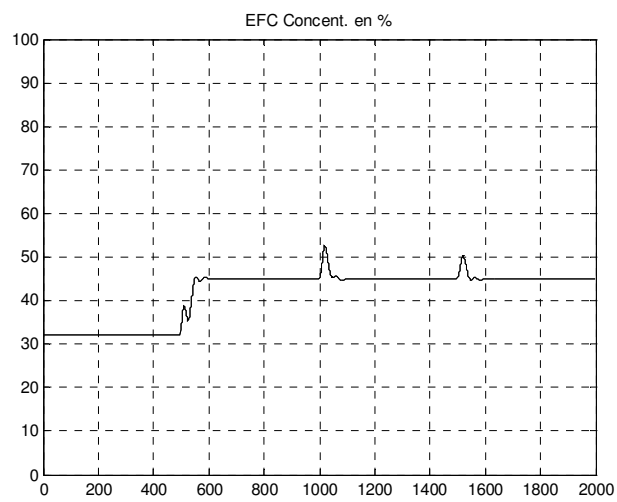


Figura 8.10: Comportamiento del EFC del controlador de Concentración.

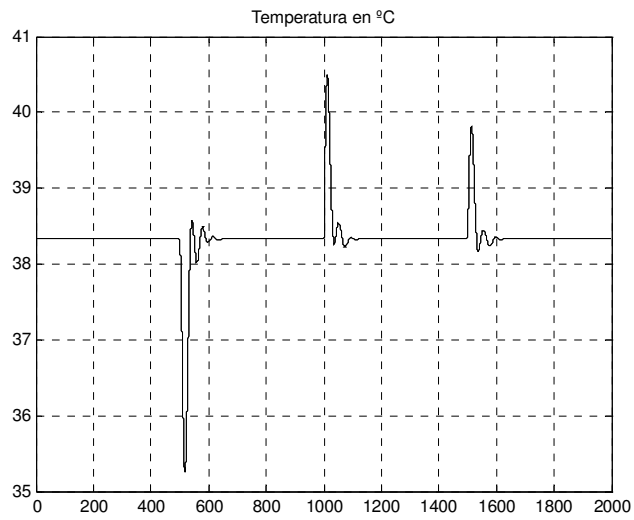


Figura 8.11: Respuesta de la Temperatura en el reactor.

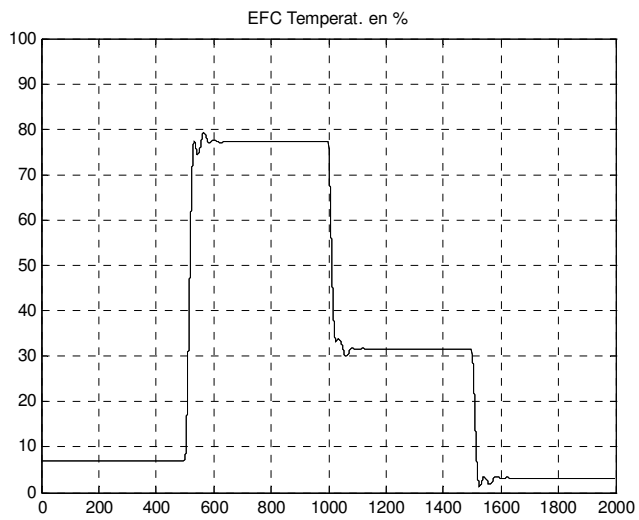


Figura 8.12: Comportamiento del EFC del controlador de Temperatura.

Concentración de Reactivo en el CSTR (y a la Salida)= $1071,6 \frac{gmol}{m^3}$.

8.2. Conclusiones del Ejemplo

Como conclusiones de este ejemplo pueden enunciarse las siguientes, como las más relevantes para el tema de este trabajo:

1. Se mostró en detalle la aplicación del procedimiento propuesto para el Diseño Simultáneo del Proceso y su Sistema de Control (DSPyC).
2. Se siguió y explicó el procedimiento para obtener Modelos Semifísicos de Base Fenomenológica (MSBF) que hace parte del procedimiento para DSPyC.
3. Se hizo evidente la falibilidad del diseño de un Proceso cuando no se consideran las características de Observabilidad, Controlabilidad y Reversibilidad del mismo, puesto que si se sigue el camino tradicional, el diseño del Sistema de Control para dicho Proceso puede no conducir a un control adecuado, a pesar de que los costos sean siempre menores que los de un diseño que considera las características de Observabilidad, Controlabilidad y Reversibilidad.
4. Quedan pendientes varios aspectos del procedimiento propuesto para DSPyC, que son tema de investigación actual en la Línea de Modelamiento y Control del Grupo de Investigación en Automática.

BIBLIOGRAFÍA

Aguirre, J. (2004). Ingeniería de procesos químicos. Un acercamiento. Centro de publicaciones Universidad Nacional sede Medellín.

Alstad, V. (2005). Studies on selection of controlled variables. Ph.D. Thesis. Norwegian University of Science and Technology.

Alvarez, H., Correa, R. y Lamanna, R. (2002). Una propuesta taxonómica para los sistemas de control. DYNA No. 135. Revista de la Facultad de Minas.

Alvarez, L.A. y Alvarez, H. (2006). Inclusión de submodelos empíricos en el modelamiento fenomenológico: Caso concentrador de soda cáustica. Memorias II Congreso Internacional de Diseño de Procesos. Universidad EAFIT.

Alvarez, L.A. (2008). Metodología para el diseño de control total de planta. Tesis de Maestría en Ingeniería Química. Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

Alvarez, H., Quintero, O., Angel, A. and Yepes, M. (2002). Strategies for avoiding local extremes in function optimization through bacterial chemotaxis. Memorias X Congreso Latinoamericano de Control Automático, Guadalajara, (México).

Alvarez, H., Lamanna, R., Revollar, S. and Vega, P. (2009). Metodología para la Obtención de Modelos Semifísicos de Base Fenomenológica Aplicada a una Sulfitadora de Jugo de Caña de Azúcar. Vol. 6, No. 3.

Amar, B., Leblanc, H., and Coulette, B. (2008). A Traceability Engine Dedicated to Model Transformation for Software Engineering. ECMDA Traceability Workshop (ECMDA-TW) Proceedings.

ANSI/ISA 88.01-1995 (R2006). (1995). Batch Control Part 1: Models and Terminology. ISA - The Instrumentation, Systems, and Automation Society (www.isa-spain.org, www.isa.org).

Andreasson, N., Evgrafov, A. and Patriksson, M. (2006). An Introduction to Continuous Optimization: Foundations and Fundamental Algorithms. Studentlitteratur, Göteborg, Suecia.

Aris, R. (1978). Mathematical modelling techniques. Pitman, London.

Arnold, V. (1992). Ordinary differential equations. Springer-Verlag.

Aström, K.L. and Hägglund, T. (1995). PID Controllers: theory, design, and tuning. ISA. New York.

Aström, K.L. and Hägglund, T. (2005). Advanced PID Control. ISA. New York.

Baasel, W. (1975). Preliminary chemical engineering plant design. Elsevier.

Bansal, V., Perkins, J. D., and Pistikopoulos, E. N. (2002). A case study in simultaneous design and control using rigorous, mixed-integer dynamic optimization models. Industrial and Engineering Chemistry Research, Vol. 41.

- Bartholomew-Biggs, M.* (2008). Nonlinear optimization with engineering applications. Springer.
- Beniger, J.R.* (1986). The control revolution. Technological and economic origins of the information society. Harvard College.
- Bellman, R.E.* (1962). Applied dynamic programming. Princeton University Press.
- Bequette, W.* (1998). Process dynamics. Modeling, analysis and simulation. Prentice Hall. New Jersey.
- Bequette, W.* (2002). Behavior of a CSTR with a recirculating jacket heat transfer system. Proceedings of American Control Conference.
- Bertalanffy, L.* (1968). General system theory: foundations, development, applications. New York: George Braziller Editor.
- Bertsekas, D.* (1970). On the minimax reachability of target sets and target tubes. MIT Ph.D. Thesis.
- Bertsekas, D. and Rhodes, I.* (1971). On the minmax reachability of target set and target tubes. Automatica, Vol. 7.
- Bird, R.B.* (1957). The equations of change and the macroscopic mass, momentum and energy balances. Chemical Engineering Science. Vol. 6.
- Bird, R.B., Stewart, W.E. and Lighthfoot, E.N.* (2002). Transport phenomena. John Wiley & Sons. 2002.
- Birkhoff, G. D.* (1991). Dynamical systems. American Mathematical Society Providence, Colloquium Publications, 9, Rhode Island.
- Blanchini, F.* (1999). Set invariance in control. Automatica. Vol. 35
- Blanchini, F. and Maini, S.* (2008). Set theoretic methods in control. University of Illinois at Urbana-Champaign, Birkhauser Boston.
- Bode, H.* (1945). Network analysis and feedback amplifier design. Bell Telephone Laboratories, Inc.
- Botero, H. y Alvarez, H.* (2009). Una revisión sobre la estimación de estado en procesos. DYNA No. 158. Revista de la Facultad de Minas.
- Bremermann, H. and Anderson, R.* (1990) An alternative to back-propagation: a simple rule of synaptic modification for neural net training and memory. Technical Report PAM-483. Center for pure and applied mathematics. University of California, Berkeley.
- Bregel, D.D. and Seider, W.D.* (1992). Coordinated design and control optimization of nonlinear processes. Comp. Chem. Eng., Vol. 16, No. 9.
- Bronislaw J.* (2001). Introduction of geometric nonlinear control, controllability and Lie bracket, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland. Lectures given at the Summer School on Mathematical Control Theory.
- Camacho, E. and Bordons, C.* (1995). Model predictive control in the process industry. Springer.
- Chacón, E. y Sarrazin, G.* (2000). Introducción a la automatización integral de sistemas de producción continuos. Editorial Universidad de Los Andes. Mérida, Venezuela.
- Chemical Heritage Foundations.* (2009). <http://www.chemheritage.org/>. Consultada Marzo, 2009.
- Chen J. and Patton R.J.* (1999). Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems. Kluwer academic publishers. Boston.
- Chilton, T.* (1951). Industrial and Engineering Chemistry - Unit Operations". Ind. Eng. Chem., 1951, Vol. 43, No. 2.

- Clarke, S., and Baniassad, E. (2005). Aspect-Oriented analysis and design. The theme approach. Addison-Wesley, Object Technology Series.
- Cleland-Huang, J., Chang, C. K., and Christensen, M. (2003). Event-based traceability for managing evolutionary change. TSE, Vol. 29, No. 9.
- Control Engineering. (2009). <http://www.controleng.com/>. Consultada Junio, 2009.
- Creus, A. (2005). Instrumentación industrial. Marcombo. 7a Edición.
- Desoer, C. And Vidayasagar, M. (1975). Feedback systems: input-output properties. Academic Press.
- Díaz, A. (1996). Optimización heurística y redes neuronales. Paraninfo. España.
- Douglas, J.M. (1988). Conceptual design of chemical processes. McGraw-Hill, Inc.
- Eder, W.E. and Hosnedl, S. (1992). Design Engineering. A manual for enhanced creativity. CRC Press.
- Edgar, T.F., Himmelblau, D.M. and Lasdon, L.S. (2001). Optimization of chemical processes. McGraw-Hill, second edition.
- Evans, W.R. (1948). Analysis of control system, AIEE Transactions, vol. 67.
- Finlayson, B.A. (1980). Nonlinear analysis in chemical engineering. McGraw-Hill Inc. New York.
- Fisher, W.R., Doherty, M.F. and Douglas, J.M. (1988). The interface between design and control. 1. Process Controllability. Ind. Eng. Chem. Res., Vol. 27.
- Flores-Tlacuahuac, A. and Biegler, L. T. (2008). Integrated control and process design during optimal polymer grade transitions operations. Comp. Chem. Eng., Vol. 32, No. 11.
- Fogler, H. S. (1992). Elements of chemical reaction engineering. Prentice Hall, New Jersey.
- Fradkov, A. (1980). Speed - Gradient scheme and its application in adaptive control system. Plenum Publishing Corporation.
- Fradkov, A., Miroshnik, I. and Nikiforov, V. (1999). Nonlinear and adaptive control of complex systems. Kluwer Academic Publishers.
- Francisco, M. and Vega, P. (2007). Norm based approaches for integrated design of wastewater treatment plants. Proceedings of ECCE-6 (Copenhagen, Denmark).
- Francisco, M., Vega, P. and Alvarez, H. (2009). Robust integrated design with infinite horizon Model Predictive Controllers. Submitted to Journal of Process Control.
- Francisco, M., Alvarez, H., Vega, P. and Revollar, S. (Aceptado 2010). Stable Model Predictive Control tuning considering asymmetric bounded signals. European Symposium on Computer Aided Process Engineering. ESCAPE20. Italy, 2010.
- Franks, R. (1972). Modeling and simulation in chemical engineering. Wiley-Interscience.
- Furusawa, T., Nishimura, H. and Miyauchi, T. (1969). Experimental study of a bistable Continuous Stirred-Tank Reactor. J. Chem. Eng. Japan, 2(1).
- García, P. y Alvarez, H. (2009). Aplicación de dos métodos de inteligencia artificial y uno de gradiente para Controladores Predictivos Basados en Modelo no lineal. Revista C&T Universidad de Palermo, Argentina.
- Gen, M. and Chen, R. (2000). Genetic algorithms and engineering optimisation. J. W. and Sons.
- Gerhard, J. (2008). Normal vectors for robust design of transient systems. Ph.D. thesis, RWTH Aachen University, Germany.

- Gerhard, J., Marquardt, W. and Mönnigmann, M.* (2008). Normal vectors on critical manifolds for robust design of transient processes in the presence of fast disturbances. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 7(2).
- Gómez, L.* (2009). Una aproximación al control de los procesos por lotes. Tesis Doctoral. Insituto de Automática. Universidad Nacional de San Juan, Argentina.
- Grisales, A. y Piedrahita, I.C.* (1998). Grafo signados dirigidos. Trabajo dirigido de grado en Ingeniería Química. Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.
- Grosch, R., Mönnigmann, M. and Marquardt, W.* (2008). Integrated design and control for robust performance: Application to an MSMPR crystallizer. *Journal of Process Control*. 18(2).
- Gross, F., Baumann, E., Geser, A., Rippin, D.W. and Lang, L.* (1998). Modelling, simulation and controllability analysis of an industrial heat-integrated distillation process. *Computers Chem. Eng.* Vol. 22, No. 1.
- Gu, E.Y.* (1995). Nonlinear systems analysis and modeling. In: "System modeling and computer simulation", edited by Naim A. Kheir. Marcel Dekker, Inc. New York.
- Gutiérrez, L.P.* (2007). Determinación matemática de la región terminal en un Control Predictivo Basado en Modelo no lineal por modo dual. Tesis de Maestría en Ingeniería Química. Universidad Nacional de Colombia.
- Haddad, W., Chellaboina, V. and Nersesov, S.* (2005). Time-reserval symmetry, Poincaré recurrence, irreversibility, and the entropic arrow of time: from mechanics to system thermodynamics. Proc. 44th IEEE CDC-ECC, España.
- Hangos, K., Bokor, J. and Szederkényi, G.* (2005). Analysis and control of nonlinear process system. Springer, London.
- Hangos, K. and Cameron, I.* (2001). Process modelling and model análisis. Academic Press.
- Havre, K.* (1998). Studies on controllability analysis and control structure design. Ph.D. Thesis. Norwegian University of Science and Technology.
- Henson M.A. and Seborg D.E.* (1990). Input-Output linearisation of general non-linear processes. *AIChE Journal* Vol.36.
- Henson, M. and Seborg, D.* (1997). Nonlinear Process Control. Prentice-Hall.
- Hermann, R. and Krener A.* (1977). Nonlinear controllability and observability. En: *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. AC-22, No. 5.
- Himmelblau, D.M. and Bischoff, K.B.* (1968). Process analysis and simulation. Deterministic systems. Prentice-Hall.
- Himmelblau, D.M.* (1997). Principios y cálculos básicos de ingeniería química. Prentice Hall, México.
- Holland, J.H.* (1975). Adaptation in natural and artificial systems. Second printing of original text (Michigan University 1975), for MIT press edition, 1993.
- Hopkins, L., Lant, P. and Newell, B.* (1998). Output structural controllability: a tool for integrated process design and control. *J. Proc. Contr.* Vol. 8.
- IEEE.* (1991). IEEE standard computer dictionary: A Compilation of IEEE Standard Computer Glossaries. IEEE.
- IEEE.* (1992). LYAPUNOV A.M., The general problem of the stability of motion (translated from French into English by A.T. Fuller), *Int. Journal of Control*. Vol. 55.

- Isidori A.* (1995). Nonlinear control system. Springer.
- Kalman, R.E.* (1960). On the general theory of control systems. In Proceedings of First IFAC World Congress, Vol. 1.
- Kalman, R.E.* (1960b). A new approach to linear filtering and prediction problems. Trans. ASME—Journal of Basic Engineering, Vol. 82.
- Kerrigan, E. C.* (2000). Robust constraint satisfaction: invariant sets and predictive control. PhD thesis, University of Cambridge.
- Kim, Y.* (1997). Structural controllability evaluation of a nonlinear chemical process represented by differential-algebraic equations. M.Sc. Thesis. Seoul National University, Korea.
- Lee, B., Kim, Y., Shin, D. and Yoon, S. E.* (2001). A study on the evaluation of structural controllability in chemical processes. Comp. Chem. Eng.
- Lewis, F.L. and Syrmos, V.L.* (1995). Optimal control. John Wiley & Sons. New York.
- Lewis, J.* (1994). Modeling engineering systems. PC-Based techniques and design tools. Hightext publications.
- Ljung, L.* (1987). System identification. Theory for the user. Prentice-Hall.
- Ljung, L. and Glad, T.* (1997). Modeling of dynamic systems. Prentice-Hall PTR.
- Luyben, W.* (1990). Process modeling, simulation and control for chemical engineers. McGraw-Hill.
- Luyben, M. L. and Floudas, C. A.* (1997). Analyzing the interaction of design and control. Comp. Chem. Eng., Vol. 18, No.10.
- Lyapunov, A.M.* (1892). “El problema general de la estabilidad del movimiento” (Traducida del Ruso). Tesis Doctoral. Universidad de Moscú.
- Maciejowski, J.M.* (1997). Reconfigurable control using constrained optimization. European Control Conference, ECC97, Semi-plenary paper.
- Marlin, T.* (2000). Process control. Designing processes and control systems for dynamic performance.
- Maschke, B., Ortega, R., van der Schaft and Escobar, G.* (1999). An energy based derivation of Lyapunov function for forced systems with application to stabilizing control. Proc. IFAC World Congress.
- Mathworks.* (2009). Control Systems Tool Box, MPC Tool Box.
<http://www.mathworks.com/products/matlab/>. Consultada Agosto 2009.
- Mesarovic, M.D., Macko, D. and Takahara, Y.* (1970). Theory of hierarchical, multilevel systems. Academic Press. New York.
- Monnigmann, M. and Marquardt, W.* (2005). Steady state process optimization with guaranteed robust stability and flexibility: Application to HDA reaction section, Ind. Eng. Chem. Res. 44 (8).
- Morari, M.* (1983). Design of resilient processing plants III – a general framework for the assessment of dynamic resilience. Chemical Engineering Science Vol. 38.
- Morari, M. and Zafiriou, E.* (1989). Robust process control. Prentice-Hall.
- Morari, M. and Stephanopoulos, G.* (1980). Structural aspects and the synthesis of alternative feasible control schemes. AIChE Journal, Vol. 26, No.2.
- Morrison, D.* (2004). Is it time to replace PID?. Control Engineering. Vol. 50, No. 3.

- Muñoz, D., Gerhard, J. and Marquardt, W.* (2009 submitted). A normal vector approach for integrated process and control design with uncertain model parameters and disturbances. *J. Process Control*, Submitted, 08.10.2009.
- Nandhakumar, N. and Malik, S.* (1995). Multisensor integration for underwater scene classification. *Applied Intelligence*, Vol. 5. No. 3, July.
- Nijmeijer, H. and Van der Schaft, A.* (1990). *Nonlinear dynamical control systems*. Springer-Verlag, Berlín.
- Nyquist, H.* (1932). Regeneration theory. *Bell System Technical Journal*, vol. 11, pp. 126-147.
- Ochoa, S.* (2005). Metodología para la integración diseño-control en el espacio de estados. Tesis de Maestría en Ingeniería Química. Facultad de Minas. Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.
- Ochoa, S., Repke, J. and Wozny, G.* (2009). A new algorithm for global optimization: Molecular-Inspired parallel tempering. *Proceedings of PSE2009*.
- Ogata, K.* (1998) *Ingeniería de Control Moderna*. México: 3a. ed. Prentice-Hall, Inc.
- Ogunnaike, B. and Ray, W.* (1994). *Process dynamics, modeling and control*. Oxford university press.
- Pahl, B. and Beitz, J.* (1984). *Engineering design*, The Design Council, Springer – Verlag, New York.
- Parks, P. C. and Cartwright, M. L.* (1962). A new proof of the Routh-Hurwitz stability criterion using the second method of Liapunov. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol.58, No.4.
- Peter M.S. and Timmerhaus, K.D.* (1980). *Plant design and economics for Chemical Engineers*. McGraw Hill, New York.
- Poincaré, J.H.* (1892). *New methods in celestial mechanics. 1. Periodic and asymptotic solutions*. Traslated and published by American Institute of Physics at 1993.
- Prigogine, I.* (1996). *The end of certany. Time, chaos and laws of nature*. The Free Press.
- Rae, J. B. and Volti, R.* (1993). *The Engineer in history*. New York: Peter Lang.
- Ramírez, F.* (1994). *Process control and identification*. Academic Press.
- Ray, M. and Johnston, D.* (1989). *Chemical Engineering design project. A case study approach*. Topics in Chemical Engineering. Vol. 6. Gordon and Breach Science Publishers.
- Reklaitis, G.V. y Schneider, F.* (1986). *Balances de materia y energía*. Editorial Interamericana.
- Revollar, S., Lamanna, R. and Vega, P.* (2005). Algorithmic syntesis and integrated design for activat-ed sludge processes using genetic algorithms. *Proceedings 15th European Symposium on Computer Aided Process Engineering (ESCAPE15)*. España.
- Ricardez, L.A.* (2008). *Simultaneous design and control of chemical plants: a robust modelling approach*. Ph.D. Thesis. University of Waterloo, Canadá.
- Ricardez-Sandoval, L.; Budman, H. and Douglas, P.* (2009). Application of robust control tools to the simultaneous design and control of dynamic systems, *IECR* 48.
- Rincón, M.* (2007). Una aproximación a la estabilidad de procesos por lotes bajo condiciones realistas de operación. Tesis de Maestría en Ingeniería Química. Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.
- Rovira A. A.* (1981). *PID tuning*. PhD. Dissertation, Dept of Chemical Engineering Louisiana State University.
- Rosenbrock, H.H.* (1970). *State space and multivariable theory*. Nelson Editors (London).

- Ruhm, K. H.* (2007). Sensor fusion and data fusion. Mapping and reconstruction. Measurement metrology (measurement science and technology) and data mining Vol. 40.
- Sakizlis, V.; Perkins, J. D. and Pistikopoulos, E. N.* (2004). Recent advances in optimization-based simultaneous process and control design, Comput. Chem. Eng. Vol. 28, No.10.
- Schlegel, M., Stockmann, K., Binder, T. and Marquardt, W.* (2005). Dynamic optimization using adaptive control vector parameterization. Comput. Chem. Eng., Vol. 29, No.8.
- Seferlis, P. and Georgiadis, M.C.* (editors) (2004). The integration of process design and control. Eslevier, London.
- Shinskey, F.* (1996). Process control systems. McGraw Hill.
- Sinnott, R.K.* (2005). Diseño en Ingeniería Química. Elsevier.
- Slotine, J. and Li, W.* (1991). Applied nonlinear control. Prentice Hall.
- Skogestad, S. and Postlethwaite, I.* (1996). Multivariable feedback control. John Wiley & Sons.
- Skogestad, S.* (2004). Control structure design for complete chemical plants. Computer and chemical engineering. Vol. 28.
- Smith, C. and Corripio, A.* (1997). Principles and practice of automatic process control. John Wiley and Sons.
- Sontag, E.* (1998). Mattheoretical control theory. Second Edition, Springer, New York.
- Spiro, P.; Parkinson, J. and Othmer, H.* (1997) A model of excitation and adaptation in bacterial chemotaxis. Proc. Natl. Acad. Sci. USA. Vol. 94.
- Stephanopolous, G.* (1984). Chemical process control. An introduction to theory and practice. Prentice Hall.
- Straub, D. A., and Grossmann, I. E.* (1990). Integrated stochastic metric of flexibility for systems with discrete state and continuous parameter uncertainties. Computers and Chemical Engineering, Vol.14.
- Streeter, V.L.* (1971). Fluid mechanics. McGraw-Hill. New York.
- Sumana, C. and Venkateswarlu, Ch.* (2009). Optimal selection of sensors for state estimation in a reactive distillation process. Journal of Process Control. Vol. 19.
- Sussmann, H. and Jurdjevic, V.* (1972) Controllability of nonlinear systems, J. Diff. Equations, Vol. 12.
- Tabares, M.S.* (2009). Un patrón de trazabilidad para controlar la evolución de los asuntos en un espacio multidimensional. Tesis Doctoral, Facultad de Minas. Universidad Nacional de Colombia. Sede Medellín.
- Tatjewski, P.* (2008). Advanced control and on-line process optimization in multilayer structures. Annual Reviews in Control, Vol. 32.
- Treybal, R.* (1980). Mass-transfer operations. McGraw-Hill.
- Van de Wal, M. and De Jager, B.* (2001). A review of methods for input-output selection. Automatica, Vol.37.
- Vidyasagar, M.* (1993). Nonlinear systems analysis. Prentice-Hall.
- Vinson, D.R. and Georgakis, C.* (2000). A new measure for process output controllability. J. Proc. Contr. Vol.10.
- Vose, M. D.* (1999). Simple genetic algorithm: Foudation and Theory. Ann Arbor, MI: MIT Press.

Walas, S.M. (1988). Chemical process equipment selection and design. Butterworth-Heinemann. Newton MA.

Wiener, N. (1948). Cybernetics: Or the control and communication in the animal and the machine. Paris, France: Librairie Hermann & Cie, and Cambridge, MA: MIT Press. Cambridge, MA: MIT Press.

Xiong, Q. Cai, W. and He, M. (2005). A practical loop pairing criterion for multivariable processes. Journal of Process Control, Vol.15.

Ziegler, J. G. and Nichols, N. B. (1942). Optimum settings for automatic controllers. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, November.

Ziegler, J. G. and Nichols, N. B. (1943). Process Lags in automatic-control circuits. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, July.

ANEXO A. Factores de Conversión

Como un lugar de búsqueda rápida, y considerando que uno de los problemas que se presentan en la formulación y resolución de problemas de Ingeniería de Procesos son las unidades utilizadas en las ecuaciones, a continuación se presenta un listado de las conversiones de unidades más frecuentes en procesos químicos. Tal recopilación fue realizada originalmente por mi profesor el Ingeniero Químico Jairo Cuenca Oviedo⁵, desaparecido en plena madurez académica. Sea este un reconocimiento simple pero muy sentido a su memoria.

Temperatura (T)

$$T(K) = T(^{\circ}C) + 273.15$$

$$T(K) = T(R)/1.8$$

$$T(^{\circ}F) = 1.8T(^{\circ}C) + 32$$

$$T(R) = (^{\circ}F) + 459.67$$

$$\Delta T(K) = \Delta T(^{\circ}C)$$

$$\Delta T(R) = \Delta T(^{\circ}F)$$

Tiempo (θ)

$$1 \text{ hora} = 1h = 3600s$$

$$1 \text{ minuto} = 1min = 60s$$

Cantidad de sustancia (N)

$$1 \text{ kmol} = 1000 \text{ mol}$$

$$1 \text{ lbmol} = 453.5924 \text{ mol}$$

$$1 \text{ mol} - g = 1 \text{ mol}$$

$$1 \text{ mol} - lb = 1 \text{ lbmol}$$

Masa (M)

$$1g = 0.001kg$$

$$1 \text{ lbm} = 0.4535924kg$$

$$1kg = 2.204lb$$

$$1 \text{ tonelada} = 1ton = 1016.05kg$$

$$1 \text{ tonelada métrica} = 1t = 1000kg$$

Otras Toneladas (anglosajonas):

$$1 \text{ Long ton (UK)} = 2240lb = 1016.0475kg$$

$$1 \text{ Short ton (USA)} = 2000lb = 907.1853kg$$

$$1 \text{ onza troy} = 31.1035g$$

⁵Notas de Clase del Curso Termodinámica I.

Longitud (L)

$$1\text{pie} = 1\text{ft} = 0.3048\text{m}$$

$$1\text{pulg} = 1\text{in} = 25.4\text{mm}$$

$$1\text{milla} = 1609.344\text{m}$$

$$1\text{Angstrom} = 1\text{Å} = 10^{-10}\text{m}$$

$$1\text{milla náutica} = 1852\text{m}$$

$$1\text{ft} = 12\text{in}$$

Superficie ($A = L^2$)

$$1\text{ft}^2 = 1\text{pie}^2 = 0.092903\text{m}^2$$

$$1\text{in}^2 = 1\text{pulg}^2 = 645.16 \times 10^{-6}\text{m}^2$$

$$1\text{ft}^2 = 144\text{in}^2$$

Volumen y Capacidad ($V = L^3$)

$$1\text{galón americano} = 1\text{gla} = 3785.41\text{cm}^3$$

$$1\text{barril de petróleo} = 42\text{gla} = 158.9872\text{l}$$

$$1\text{ft}^3 = 0,0283168\text{m}^3 = 28.3168\text{l} = 7.4813\text{gal}$$

$$1\text{ft}^3 = 1728\text{in}^3$$

$$1\text{litró} = 1\text{l} = 1,0\text{dm}^3 = 1000\text{cm}^3 = 10^{-3}\text{m}^3$$

Densidad ($M \bullet L^{-3}$)

$$1\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1\frac{\text{kg}}{\text{l}}$$

$$1\frac{\text{lbm}}{\text{ft}^3} = 16.018476\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 0.016018\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$\rho_{\text{Agua } 20^\circ\text{C}} = 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 62.43\frac{\text{lbm}}{\text{ft}^3}$$

Volumen específico ($L^3 \bullet M^{-1}$)

$$1\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} = 1000\frac{\text{cm}^3}{\text{g}} = 1000\frac{\text{l}}{\text{kg}}$$

$$1\frac{\text{ft}^3}{\text{lbm}} = 62.4279\frac{\text{cm}^3}{\text{g}} = 0.06243\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

Fuerza ($F = M \bullet L \bullet \theta^{-2}$)

$$1\text{Newton} = 1\text{N} = 1,0\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$1\text{MN} = 1000\text{kN} = 10^6\text{N} = 10^{11}\text{dina}$$

$$1\text{kgf} = 9.80665\text{N}$$

$$1\text{lbf} = 4.44822\text{N}$$

Presión ($P = F \bullet A^{-1} = F \bullet L^{-2} = M \bullet L^{-1} \bullet \theta^{-2}$)

$$P_{\text{Atm Medellín}} \cong 85\text{kPa} \cong 12.33\text{psia} \cong 0.839\text{atm}$$

$$1\text{Pascal} = 1\text{Pa} = 1\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1.0\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}^2}$$

$$1\text{MPa} = 1000\text{kPa} = 10^6\text{Pa}$$

$$1\text{bar} = 0.1\text{MPa} = 100\text{kPa} = 10^5\text{Pa} = 10^6\frac{\text{dina}}{\text{cm}^2}$$

$$1\text{lbf/in}^2 = 1\text{psi} = 6.894757\text{kPa}$$

$$1\text{kgf/cm}^2 = 1\text{at} = 98.0665\text{kPa} (\text{Atmósfera técnica})$$

$$1\text{atmósfera normal} = 1\text{atm} = 1.01325\text{bar}$$

$$1\text{atm} = 1.0332274\text{at} = 101.324995\text{kPa} = 14.696\text{psi}$$

$$1\text{atm} = 760\text{mmHg} = 29.92\text{inHg}$$

$$1\text{Torricelli} = 1\text{torr} = 1\text{mmHg} = 133.322\text{Pa}$$

$$1\text{mH}_2\text{O} = 0.1\text{atm}$$

$$1\text{mmH}_2\text{O} = 1\frac{\text{kgf}}{\text{m}^2} = 9.80665\text{Pa} = 10^{-4}\text{at}$$

$$1\frac{\text{lbf}}{\text{ft}^2} = 47.880261\text{Pa} = 6.944 \times 10^{-3}\text{psi}$$

Energía ($E = F \cdot L = M \cdot L^2 \cdot \theta^{-2}$) = Trabajo $W [=]$ Fuerza \times Distancia

$$1 \text{ Joule} = 1J = 1N \cdot m = 1,0 \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$$

$$1MJ = 1000kJ = 10^6 J$$

$$1 \text{ lbf} \cdot \text{ft} = 1.355817J$$

$$1HP_{H_2O \text{ a } 100^\circ C}^{VAPOR} = 34.5 \frac{\text{lbVapor}}{h}$$

$$1HP_{H_2O \text{ a } 80^\circ C}^{VAPOR} = 31.5 \frac{\text{lbVapor}}{h}$$

$$1kgf \cdot m = 9.80665J$$

$$1btu = 1055.056J$$

$$1 \text{ caloría práctica} = 1cal = 4.1869J$$

$$1btu = 251.996cal$$

$$1 \text{ caloría termoquímica} = 1calterm = 4.183995J$$

$$1 \text{ caloría medida a } 15^\circ C = 1cal_{15} = 4.1855J$$

$$1 \text{ kilowatio} \cdot \text{hora} = 1kW \cdot h = 3600kJ$$

$$1 \text{ ergio} = 1erg = 10^{-7}J$$

$$1kcal = 4185.5J$$

Potencia ($E \cdot \theta^{-1} = F \cdot L \cdot \theta^{-1} = M \cdot L^2 \cdot \theta^{-3}$)

$$1Watt = 1vatio = 1W = 1 \frac{J}{s} = 1 \frac{N \cdot m}{s} = 1,0 \frac{kg \cdot m^2}{s^3}$$

$$1MW = 1000kW = 10^6 W$$

$$1 \text{ caballo fuerza} = 1hp = 550 \frac{\text{lb} \cdot \text{ft}}{s}$$

$$1 \text{ caballo de vapor} = 1cv = 75 \frac{\text{kg} \cdot \text{ft} \cdot \text{m}}{s}$$

$$1hp = 0,7457kW$$

$$1cv = 0,7355kW$$

En refrigeración es común el uso de una unidad especial para la cantidad de calor retirado por unidad de tiempo:

$$1 \text{ tonelada de refrigeración} = 1ton \text{ ref} = 200 \frac{btu}{min}$$

$$1ton \text{ ref} = 3.5168kW$$

Otras unidades:

viscosidad dinámica μ

$$1Poise = 1P = 0.1Pa \cdot s = 0.1 \frac{N \cdot s}{m^2} = 0.1 \frac{kg}{m \cdot s}$$

$$1P = 1.0 \frac{g}{cm \cdot s}$$

$$1cpoise = 0.000672 \frac{lbm}{ft \cdot s} = 1mPa \cdot s = 0.001 \frac{kg}{m \cdot s}$$

$$\mu_{Agua \text{ } 20^\circ C} = 1cP$$

viscosidad cinemática $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

$$1stoke = 1St = 0.0001 \frac{m^2}{s} = 1.0 \frac{cm^2}{s}$$

$$1SSU (\text{Segundos Saybolt Universal}) = 4.6347 \text{ centistoke} (cSt) \text{ a } 100^\circ F (38^\circ C)$$

$$= 4.6673 \text{ cSt a } 210^\circ F (99^\circ C)$$

$$\nu_{Agua \text{ } 20^\circ C} = 1cSt = 4.63SSU$$

$$1 \text{ Decibel} = 1 \text{ dB} = 10^{-12} \text{ W/m}^2 = 10^{-12} \text{ kg/s}^3$$

$$g_c = 32.2 \frac{\text{lb} \cdot \text{ft}}{\text{lb} \cdot \text{s}^2} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{N} \cdot \text{s}^2} = 9.8 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{f} \cdot \text{s}^2}$$

$$R = \frac{PV}{nT} [=] 0.08205 \frac{L \cdot atm}{gmol \cdot K} = 0.7302 \frac{ft^3 \cdot atm}{Lbmol \cdot ^\circ R} = 1.9872 \frac{Cal}{gmol \cdot K} = 1.9872 \frac{btu}{Lbmol \cdot ^\circ R} = 8.3174 \frac{J}{gmol \cdot K}$$

ANEXO B. Nomenclatura Sugerida para Rotular Procesos y Modelos

Es frecuente que durante la realización de Diagramas de Flujo de Proceso (DFP) o incluso de Diagramas de flujo en Bloques (DB), aparezcan dudas sobre una manera homogénea de rotular y marcar Equipos de Proceso y líneas de tubería que conducen corrientes. En lo que sigue, se intenta recopilar de varios textos una manera más o menos homogénea para rotular tales diagramas sin mayores problemas.

Flujos Másicos (\dot{m}).

Las unidades típicas son: [$\frac{kg}{s}$, $\frac{ton}{hr}$, $\frac{lbm}{min}$]. Se representan con \dot{m}_i cuando es la corriente total en unidades másicas que va por la línea i , o se representa como $\dot{m}_{XX, i}$ que indica el valor de flujo de sustancia XX en masa en la corriente i .

Flujos Volumétricos (\dot{v}).

Típicamente sus unidades son: [$\frac{m^3}{hr}$, $\frac{L}{s}$]. Se representan con \dot{v}_i cuando es la corriente total en unidades volumétricas que va por la línea i , o se representa como $\dot{v}_{XX, i}$ que indica el valor de flujo de sustancia XX en volumen en la corriente i .

Flujos Molares (\dot{n}).

Las unidades más utilizadas son: [$\frac{grmol}{s}$, $\frac{kgmol}{hr}$, $\frac{lbmol}{min}$]. Se representa con \dot{n}_i cuando es la corriente total en unidades molares que va por la línea i , o se representa como $\dot{n}_{XX, i}$ que indica el valor del flujo de sustancia XX en moles en la corriente i .

Velocidades de reacción.

Con frecuencia las unidades usadas son: $r = [\frac{grmol}{s}, \frac{kgmol}{hr}, \frac{lbmol}{min}]$. Representan los flujos “aparentes” en unidades molares de los compuestos que participan de una reacción química o bioquímica.

Sustancias de Proceso (XX).

Se nomenclan con Letras Mayúsculas o Contracciones del nombre (Sigla o Acrónimo): $A, B, \dots AS$ (Ácido Sulfúrico), CC (Carbonato de Calcio),... siempre como primer subíndice.

Corrientes de Proceso (líneas de tubería) (i).

Se rotula con números naturales: 1, 2, 3... siempre como segundo subíndice luego de una coma.

Equipos de Proceso (piezas de la planta) (I).

Se nomenclan con números romanos: I, II, III, IV, V, \dots , como único Superíndice.

Ejemplo de lo presentado hasta ahora:

$\dot{m}_{AS, 3}$ son los $[\frac{kg}{s}, \frac{ton}{hr}, \frac{lbm}{min}]$ de sustancia AS (Ácido Sulfúrico) como flujo en unidades másicas que van por la corriente 3 en un equipo único.

\dot{v}_2 son los $[\frac{m^3}{hr}, \frac{L}{s}]$ de materia total pero como flujo volumétrico que van por la corriente 2.

r_{CC}^{III} es la velocidad a la que esta apareciendo (producto signo +) o desapareciendo (reactivo signo -) el carbonato de calcio en el equipo o unidad de proceso III .

Concentraciones.

$w_{XX, i}$ es la concentración, en cualquier corriente i , de la sustancia XX como fracción másica del compuesto XX .

$x_{XX, i}$ es la concentración, en corriente Líquida i , de la sustancia XX como fracción Molar del compuesto XX .

$y_{XX, i}$ es la concentración, en corriente Gaseosa i , de la sustancia XX como fracción Molar del compuesto XX .

$C_{XX, i}$ es la concentración, en cualquier corriente i , de la sustancia XX como unidades combinadas con el volumen total ($\frac{masa}{Vol.}, \frac{Vol.}{Vol.}$).

Ejemplo de lo presentado hasta ahora:

$w_{AS, 8}$ es la concentración de AS (Ácido Sulfúrico) como fracción másica en la corriente ocho (8) del proceso.

$x_{CC, 5}$ es la concentración de CC (Carbonato de Calcio) como fracción Molar en la corriente Líquida cinco (5) del proceso.

$y_{Met, 12}$ es la concentración de Met (Metano) como fracción Molar en la corriente Gaseosa doce (12) del proceso.

$C_{Et, 7}$ es la concentración de Et (Etanol) en unidades combinadas ($\frac{masa}{Vol.}, \frac{Vol.}{Vol.}$) en la corriente siete (7) del proceso.

Rotulado de Variables.

Para unidades específicas por unidad de masa o unidad de cantidad de materia (moles), se procede así:

Unidades Específicas Másicas: Nombre de la Variables con un Sombrero superior. Ejemplo: \hat{U} , \hat{H} , \hat{S} , etc.

Unidades Específicas Molares: Nombre de la Variable con una Línea superior. Ejemplo: \bar{U} , \bar{H} , \bar{S} , etc.

ANEXO C. Listado Alfabético de Definiciones

La que sigue es una guía para que el lector pueda ubicar las definiciones dadas en el texto rápidamente, de modo que el contenido sea más comprensible. Las Definiciones están organizadas por orden alfabético. Se da al final de cada una de ellas, entre paréntesis, el número de la página dónde está en el libro.

A:

Alcanzabilidad (128)

Algebra de Lie (129)

Análisis (17)

Automática (15)

Automatización (69)

...

C:

Campo Escalar (116)

Campo Vectorial (116)

Comportamiento Estático (21)

Comportamiento Dinámico o Dinámica de un Proceso (21)

Condición de Rango para la Controlabilidad Entrada-Salida (134)

Constante de un Modelo (32)

Control (69)

Control de Seguimiento (*Tracking*) (68)

Control MIMO o de Entrada Múltiple y Salida Múltiple (*Multiple Input-Multiple Output*) (73)

Control Regulatorio (*Regulatory*) (68)

Control SISO o de Una Entrada y Una Salida (*Single Input-Single Output*) (72)

Controlabilidad (107)

Controlabilidad de Estado para Sistemas Lineales [Kalman, 1960] (127)

Controlabilidad Local-Alcanzabilidad Local (128)
Controlabilidad Práctica Local de Estado (CPLdeE) (133)
Corchete de Lie (129)
Corchete de Lie Recursivo (129)
Criterio de Estabilidad de Lyapunov (103)
Criterio de Observabilidad Local (121)
Criterio de validación para un modelo (46)
Criterio de Reversibilidad Práctica Débil (RPD) (125)
Criterio de Controlabilidad-Condición de Rango (128)
Criterio de Controlabilidad Local-Condición de Rango (129)

...

D:

Derivada de Lie (121)
Derivada de Lie Recursiva (121)
Descripción Completa de un Proceso (22)
Descripción parcial de un Proceso (22)
Diagrama de flujo en Bloques (DB) (25)
Diagrama de Flujo de Información (DFI) (28)
Diagrama de Flujo de Proceso (DFP) (26)
Diagrama de Instrumentación y Tubería (P&ID) (29)
Dinámicas de Interés (21)
Dinámica Forzada o Controlada (67)
Dinámica Natural (67)
Dinámica Principal (21)
Dinámicas Secundarias (21)
Dinámicas Singulares (21)
Diseño en Ingeniería (54)
Diseño Simultáneo del Proceso y su Control (DSPyC) (118)
Distribución (116)
Distribución de Observabilidad Δ_{S_o} de un Sistema Dinámico (121)
Dominio del Problema de Optimización (56)

...

E:

El Problema de Optimización (55)

Equilibrio Aislado (20)

Equilibrio Matemático de un Sistema (20)

Equilibrios Múltiples (20)

Equilibrio Único (20)

Equipo (12)

Error (e) (69)

Espacio de Control S_C o Algebra de Lie de Control $S_C = L_C$ (129)

Espacio de Observación S_O de un Sistema Dinámico (121)

Estabilidad (de manera intuitiva) (101)

Estabilidad en Lazo Abierto (101)

Estabilidad en Lazo Cerrado (101)

Estabilidad en el sentido de Lyapunov (103)

Estado Estacionario de un Proceso (20)

Estructura de un Modelo (32)

...

F:

Flujo Estacionario (38)

Flujo Uniforme (38)

Formalismo del Proceso como Sistema (19)

...

G:

Grados de Libertad (54)

...

H:

Homogeneidad del Vector Solución de un Balance (38)

...

I:

Identificación (33)

Índice de Desempeño de un Lazo de Control (97)

Instrumentación (69)

Interacción Energética en un Sistema de Proceso (49)

Interacción entre Lazos de Control (106)

Interacción Mística en un Sistema de Proceso (49)

...

J:

Jerarquía Dinámica de un Proceso (22)

...

L:

Lag (sin traducción al Español) (98)

Lazo Abierto de Control o Lazo Abierto (*Open Loop*) (72)

Lazo Cerrado de Control o Lazo Cerrado (*Closed Loop*) (72)

Lazo de Control (72)

...

M:

Matriz de Controlabilidad de Estado para Sistemas Lineales (127)

Matriz de Controlabilidad Entrada-Salida (CES) Lineal (134)

Método de Trazado (63)

Modelado (32)

Modelo de Proceso (31)

Modelo de Trazabilidad (63)

...

O:

Objetivo de Control (67)

Objetivo para el modelado (46)

Observador de Estado (123)

Observabilidad (107)

Observabilidad de Estado para Sistemas Lineales (119)

Observabilidad Local (121)

Operación Unitaria (13)

Optimización Continua (56)

Optimización Entera (57)

Optimización en la Vida Diaria (55)

Optimización Matemática o Numérica (55)

Optimización Mixta-Entera (57)

Orden de una Matriz (116)

...

P:

Parámetro Estructural (32)

Parámetro Funcional (32)

Parámetro de un Modelo (32)

Pareamiento de Variables para Control (97)

Partes del Vector Solución de un Balance (38)

Perturbación (*d*) (69)

Planta de producción industrial (12)

Proceso (primera definición) (12)

Proceso (definición complementaria) (14)

Proceso por Lotes (PpL) (141)

Punto de Ajuste (SP de *Set-Point*) (68)

Punto de Operación (PO) de un Proceso (39)

...

R:

Rango de una Matriz (117)

Régimen de Operación (RO) de un Proceso (40)

Relación Lineal entre variables (21)

Relación No Lineal entre variables (21)

Representación de un Proceso (19)

Representación del Proceso con Medición y Control (68)

Representación matemática (26)

Respuesta Temporal Inversa o Comportamiento de Fase No Mínima (RTI) (98)

Retraso (*Delay*) (98)

...

S:

Señal en Ingeniería de Control (69)

Simulación (33)

Síntesis (17)

Sistema (12)

Sistema de Control (71)

Sistema Débilmente Reversible (125)

Sistema Fuertemente Reversible (125)

Sistema de Proceso (40)

Superficie o frontera de un Sistema (40)

...

T:

Término de un Modelo (32)

Tiempo Muerto (*Deadtime*) (98)

Trazabilidad (62)

...

V:

Variable Adimensionalizada (69)

Variable Continua en Optimización (56)

Variable Controlada (68)

Variables de Automatización (71)

Variable de Control (70)

Variable de Desviación (μ') (69)

Variables de Diseño (55)

Variables de Entrada (20)

Variables de Estado o Internas (20)

Variable de Estado (x) (68)

Variables de Interés de un Proceso (19)

Variables de Salida (20)

Variable de un Modelo (32)

Variable Discreta en Optimización (56)

Variable Manipulada (u) (68)

Variable Normalizada (69)

Vector Solución de un Balance (38)