



UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA

# **Una propuesta para el análisis de los procesos de visualización y las aprehensiones en la construcción de Áreas de regiones sombreadas**

**Jhon Hevert Castillo Ramírez**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad, de Ingeniería y Administración  
Maestría En Enseñanza De Las Ciencias Exactas Y Naturales  
Palmira, Colombia  
2020



# **Una propuesta para el análisis de los procesos de visualización y las aprehensiones en la construcción de Áreas de regiones sombreadas**

**Jhon Hevert Castillo Ramírez**

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:

**Magister En Enseñanza De Las Ciencias Exactas Y Naturales**

Directora de la Tesis  
Ph. D. Teresa Pontón Ladino

Línea de Investigación:  
Tipo de Modalidad: Profundización

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad, de Ingeniería y Administración  
Maestría En Enseñanza De Las Ciencias Exactas Y Naturales  
Palmira, Colombia  
2020



*A la memoria de mis Abuelos que fueron unos  
padres:*

*Ceneyda Cruz Vélez y Elcías Ramírez  
Gutiérrez*

*Quienes me formaron e hicieron de mi la  
persona que hoy soy... Esta tesis es para  
ustedes, los Amo.*



## **Declaración de obra original**

Yo Jhon Hevert Castillo Ramírez declaro lo siguiente:

He leído el Acuerdo 035 de 2003 del Consejo Académico de la Universidad Nacional. «Reglamento sobre propiedad intelectual» y la Normatividad Nacional relacionada al respeto de los derechos de autor. Esta disertación representa mi trabajo original, excepto donde he reconocido las ideas, las palabras, o materiales de otros autores.

Cuando se han presentado ideas o palabras de otros autores en esta disertación, he realizado su respectivo reconocimiento aplicando correctamente los esquemas de citas y referencias bibliográficas en el estilo requerido.

He obtenido el permiso del autor o editor para incluir cualquier material con derechos de autor (por ejemplo, tablas, figuras, instrumentos de encuesta o grandes porciones de texto).

Por último, he sometido esta disertación a la herramienta de integridad académica, definida por la universidad.

Jhon Hevert Castillo Ramírez

Nombre

Fecha 27/08/2020



## **Agradecimientos**

Agradezco a Dios por el aliento de vida en este universo y por permitirme superar obstáculos tan altos que ni siquiera yo creí superar.

A la Gobernación del Valle en cabeza de la doctora Dilian Francisca Toro por crear el proyecto FAN (Formación de Alto Nivel) con todo un grupo de trabajo quienes nos apoyaron en este proceso indagativo.

A la universidad Nacional por tener este programa de formación tan importante para la formación de maestros con una perspectiva de calidad.

A los profesores de la “Maestría en Ciencias Exactas y Naturales” por ayudar de manera muy profesional a mi formación como Magister y proporcionar unos cimientos firmes para mejorar mi práctica de aula.

A la profesora, la doctora Teresa Pontón Ladino por ser la persona que me dio la mejor herramienta pedagógica y didáctica que fue conocer la teoría semiótica cognitiva y elementos lingüísticos, y guio todo mi proceso de indagación siendo estricta pero cordial en sus valiosos aportes.

A mis compañeros Niyareth Paola Morales, Diana Marcela Lourido y Marco Emilio Correa, por creer en mis capacidades y ser mis interlocutores en este proceso indagativo.

A las directivas de la Institución Educativa San José de la Victoria Valle y en su nombre el rector y amigo el licenciado Antonio Marín Acero por haberme facilitado la ejecución del proyecto con los estudiantes de grado nueve dos y a ellos mil gracias por permitirme culminar un proceso indagativo tan valioso y enriquecedor.

Al esposo de mi señora madre el licenciado Hugo René Ojeda por darme una luz y mostrarme el camino que debía recorrer para avanzar en proceso de indagación.

Agradezco a mi madre Rose Mari Ramírez, por la vida y sobre todo por sembrar en mí el espíritu luchador que ha sido faro en mi vida personal y profesional.

Y especialmente a mi esposa Francedy Aguirre Arango y mi hijo Deibyd Alexander Castillo por ser incondicionales y darme todo su apoyo en tantos días y noches de trasegar en este estudio que por fin culmina exitosamente.



## Resumen

### **Una propuesta para el análisis de los procesos de visualización y las aprehensiones en la construcción de Áreas de regiones sombreadas**

El presente informe final de indagación se enmarca en la teoría semiótica cognitiva desarrollada por Duval (1993, 1998, 1999, 2004, 2005.), con la idea de identificar y determinar las formas de aprehensión visual que movilizan los estudiantes al enfrentarse a una secuencia didáctica que contienen tareas basadas en la coordinación de diversos registros semióticos en el trabajo con áreas de regiones sombreadas y la tipificación de las relaciones geométricas que emergen a través de comparaciones de área de figuras bidimensionales, a partir de tratamientos de tipo mereológicos explícitamente geométricos. Debido a las problemáticas que emergen al enfrentarse a situaciones problema en el que la visualización prima como actividad cognitiva, se hace necesario fortalecer procesos fundamentales del razonamiento geométrico como la deconstrucción dimensional de las formas, las cuales acercan a los estudiantes al desarrollo de aprehensiones de tipo perceptual y operatoria en el desarrollo de situaciones didácticas relacionadas con el contenido de área de regiones sombreadas, mediadas por la coordinación entre los registros representación figural y el de la lengua natural.

La presente indagación se desarrolló bajo la metodología de algunos elementos de la ingeniería didáctica, un enfoque cualitativo descriptivo y se diseñó una secuencia didáctica que fue aplicada a los estudiantes de grado 9-2 de la Institución Educativa San José. Dicha indagación se enmarca en un enfoque cualitativo, en el que se buscaba realizar la descripción y análisis de los procedimientos, dificultades y avances en el pensamiento geométrico de los estudiantes.

**Palabras clave:** Representaciones geométricas figurales, Representaciones semióticas, Perspectiva semiótica, Aprehensión perceptual y operatoria, Teoría de situaciones didácticas, Razonamiento y visualización, Área de regiones sombreadas.

## Abstract

### **A proposal for the analysis of visualization processes and apprehensions in the construction of Areas of shaded regions**

This final report of inquiry is framed in the cognitive semiotic theory developed by Duval (1993, 1998, 1999, 2004, 2005.), with the idea of identifying and determining the forms of visual apprehension that students mobilize when facing a sequence didactics that contain tasks based on the coordination of various semiotic registers in the work with areas of shaded regions and the typification of the geometric relationships that emerge through area comparisons of two-dimensional figures, based on explicitly geometric mereological treatments.

Due to the problems that arise when facing problem situations in which visualization prevails as a cognitive activity, it is necessary to strengthen fundamental processes of geometric reasoning such as the dimensional deconstruction of shapes, which bring students closer to the development of type apprehensions perceptual and operative in the development of didactic situations related to the content of the area of shaded regions, mediated by the coordination between the figural representation registers and that of the natural language.

The present investigation was developed under the didactic engineering methodology from which some elements were taken and a didactic sequence emerged that was applied to the 9-2 grade students of the San José Educational Institution, located in the Municipality of La Victoria. This investigation is framed in a qualitative approach, in which the description and analysis of the procedures, difficulties and advances in the geometric thinking of the students were sought.

**Keywords:** Figurative geometric representations, semiotic representations, semiotic-cognitive perspective, visual apprehensions, area of shaded regions, theory of didactic situations, reasoning and visualization



# Contenido

	Pág.
<b>Resumen.....</b>	<b>XI</b>
<b>Lista de figuras .....</b>	<b>XVIII</b>
<b>Lista de tablas.....</b>	<b>XXIII</b>
<b>Introducción .....</b>	<b>1</b>
<b>1. La problemática y su contextualización 1.....</b>	<b>3</b>
1.1 Antecedentes .....	3
1.2 Planteamiento del problema .....	7
1.3 Problema de Indagación .....	17
1.4 Objetivos.....	17
1.4.1 Objetivo General. ....	17
1.4.2 Objetivos Específicos. ....	17
<b>2. Marco teórico.....</b>	<b>19</b>
2.1 Teoría semiótica cognitiva .....	21
2.2 Representaciones semióticas .....	22
2.3 La visualización .....	25
2.4 Registro Figural.....	27
2.5 Los registros semióticos y la importancia de la coordinación entre ellos .....	28
2.6 ¿Qué es la aprehensión perceptual?.....	28
2.6.1 ¿qué es La aprehensión operatoria? .....	30
2.7 Importancia del registro en lengua natural y el figural en el estudio de la geometría. 32	
2.8 El área como magnitud y como medida. ....	33
2.8.1 Relación parte todo.....	35
2.8.2 Relación geométrica de equivalencia.....	37
2.8.3 Ser igual en forma.....	37
2.8.4 Ser igual en magnitud y forma.....	38
2.9 Relación aditiva .....	39
2.9.1 El proceso de comparación de áreas.....	39
2.10 Tratamientos heurísticos.....	41
2.11 Descomposición estrictamente homogénea:.....	42
2.11.1 Descomposición de las figuras homogéneas.....	42

2.11.2	Descomposición de las figuras de forma heterogénea.....	42
2.12	Áreas de regiones sombreadas circulares. ....	43
2.12.1	Sistemas de representación. ....	44
2.12.2	Sistema de representación simbólico.....	45
2.12.3	Sistema de representación figural geométrico.....	45
2.12.4	Trasformaciones sintácticas variantes. ....	46
2.12.5	Transformaciones sintácticas invariantes. ....	47
2.12.6	Resumen esquemático del marco teórico.....	47
<b>3.</b>	<b>Análisis a priori de las situaciones didácticas.....</b>	<b>49</b>
3.1	Diseño Metodológico.....	49
3.1.1	Fase 1. Diseño de tareas.....	50
3.1.2	Fase 2. Implementación de tareas. ....	52
3.1.3	Fase 3. Interpretación de datos.....	52
3.1.4	Fase 4. Conclusiones. ....	52
3.2	Análisis a priori de las situaciones didácticas .....	52
3.3	Objetivos de las situaciones didácticas .....	54
3.4	Rejilla de análisis de las situaciones didácticas .....	55
3.5	Situación 1 “Identificar y discriminar figuras” .....	56
3.6	Situación 3 “Áreas sombreadas” .....	80
<b>4.</b>	<b>Análisis a posteriori de la situación didáctica. ....</b>	<b>121</b>
4.1	Análisis cuantitativo y cualitativo de la situación 1 .....	121
4.2	Análisis cuantitativo y cualitativo de la situación 2 .....	124
4.3	Análisis cuantitativo y cualitativo de la situación 3.....	126
4.4	Análisis de las variables trabajadas en cada situación didáctica.....	129
4.5	Heurísticas utilizadas por los estudiantes en cada una de las situaciones didácticas.....	130
4.6	Conclusión final del capítulo heurísticas de los estudiantes. ....	158
4.7	Análisis de los procesos de visualización.....	159
4.8	Diferentes aprehensiones en el inicio de la construcción del concepto de área de una región sombreada. ....	164
4.9	El papel de la designación en el razonamiento figural.....	165
4.10	La articulación de la lengua natural y el registro figural. ....	166
<b>5.</b>	<b>Conclusiones y recomendaciones.....</b>	<b>169</b>
5.1	Conclusiones.....	169
5.1.1	Importancia del marco teórico en la indagación. ....	169
5.1.2	Aportes relacionados con el objeto matemático de la indagación (áreas de regiones sombreadas).....	170
5.1.3	Análisis de los procesos de visualización .....	171
5.1.4	Conclusiones a la luz de los objetivos de indagación.....	173
5.1.5	Cómo este trabajo aporto a los estudiantes en la solución de las situaciones alrededor de un colegio agropecuario. ....	175
5.2	Recomendaciones .....	176
5.2.1	Asuntos que se dejan para posteriores indagaciones y reflexiones. ....	177
<b>A.</b>	<b>Anexo: Guía con las situaciones didácticas aplicadas a los estudiantes.....</b>	<b>179</b>

---

<b>B. Anexo: Se consignan las fotos de las heurísticas realizadas por los estudiantes en cada una de las tareas de los estudiantes O21 Y R26.....</b>	<b>201</b>
<b>C. Tabla en Excel con los resultados .....</b>	<b>243</b>
<b>Referencias Bibliográficas .....</b>	<b>245</b>

## Lista de figuras

	Pág.
Figura 1. Comparación de porcentajes según niveles de desempeño .....	10
Figura 2. Silueta para encontrar el área.....	12
Figura 3. Silueta con trazos complementarios.....	13
Figura 4. Figura con región sombreada .....	14
Figura 5. Figura con región sombreada .....	14
Figura 6. Figura con región sombreada de tipo circular .....	15
Figura 7. Marcas perceptibles .....	23
Figura 8. Transformación de la figura inicial .....	23
Figura 9. Tratamiento al interior del registro figural sin transformación del contorno global .....	24
Figura 10. Tratamiento numérico para hallar el área.....	25
Figura 11. Representación figural de un triángulo equilátero .....	28
Figura 12. Aprehensión perceptual .....	29
Figura 13. Procedimiento aprehensión perceptual .....	29
Figura 14. Complemento aprehensión perceptual.....	30
Figura 15. Ampliación, reducción o deformación.....	30
Figura 16. Rotación de una figura .....	31
Figura 17. Aprehensión operatoria. Tomado de Marmolejo (2007).....	32
Figura 18. Relación parte todo .....	36
Figura 19. Igualdad de las formas.....	38
Figura 20. Igualdad en magnitud y forma .....	38
Figura 21. Relación aditiva .....	39
Figura 22. Comparación de áreas por superposición de las formas .....	40
Figura 23. Deconstrucción dimensional de las formas .....	41
Figura 24. Descomposición estrictamente homogénea.....	42
Figura 25. Descomposición homogénea.....	42
Figura 26. Descomposición Heterogénea.....	43
Figura 27. Mapa conceptual .....	44
Figura 28. Sistemas de representación geométrico y simbólico .....	46
Figura 29. Transformaciones sintácticas variantes.....	46
Figura 30. Transformaciones sintácticas invariantes.....	47
Figura 31. Resumen del marco teórico a través de esquema .....	48
Figura 32. Fases de la Indagación .....	50

Figura 33 Esquema de árbol, Organización de las situaciones didácticas .....	51
Figura 34 Figura que acompaña SD1-T1.....	57
Figura 35 Figura que acompaña SD1-T1.....	57
Figura 36 Figura que acompaña SD1-T2A .....	58
Figura 37 Figura que acompaña SD1-T2A .....	59
Figura 38 Figura que acompaña SD1-T2A .....	59
Figura 39 Figura que acompaña SD1-T2B .....	60
Figura 40. Figura que acompaña SD1-T2B .....	61
Figura 41. Figura que acompaña SD1-T2B .....	61
Figura 42. Figura que acompaña SD1-T2B .....	61
Figura 43. Figura que acompaña SD1-T2B .....	61
Figura 44. Figura que acompaña SD1-T2B .....	62
Figura 45. Figura que acompaña SD1-T2B .....	62
Figura 46. Figura que acompaña SD1-T3.....	63
Figura 47. Figura que acompaña SD1-T3.....	64
Figura 48. Figura que acompaña SD1-T3.....	64
Figura 49. Figura que acompaña SD1-T3.....	64
Figura 50. Figura que acompaña SD1-T3.....	64
Figura 51. Figura que acompaña SD1-T4.....	65
Figura 52. Figura que acompaña SD1-T4.....	66
Figura 53. Figura que acompaña SD1-T4.....	66
Figura 54. Figura que acompaña SD1-T4.....	66
Figura 55. Figura que acompaña SD1-T4.....	67
Figura 56. Figura que acompaña SD1-T4.....	67
Figura 57. Figura que acompaña SD1-T4.....	67
Figura 58. Figura que acompaña SD1-T4.....	68
Figura 59. Figura que acompaña SD1-T4.....	68
Figura 60. Figura que acompaña SD2-T1A .....	69
Figura 61. Figura que acompaña SD2-T1A .....	69
Figura 62. Figura que acompaña SD2-T1B .....	70
Figura 63. Figura que acompaña SD2-T1B .....	71
Figura 64. Figura que acompaña SD2-T2.....	72
Figura 65. Figura que acompaña SD2-T2.....	73
Figura 66. Figura que acompaña SD2-T2.....	74
Figura 67. Figura que acompaña SD2-T2.....	75
Figura 68. Figura que acompaña SD2-T3.....	76
Figura 69. Figura que acompaña SD2-T3.....	76
Figura 70. Figura que acompaña SD2-T3.....	77
Figura 71. Figura que acompaña SD2-T3.....	77
Figura 72. Figura que acompaña SD2-T4.....	78
Figura 73. Figura que acompaña SD2-T4.....	79
Figura 74. Figura que acompaña SD3-T1.....	80
Figura 75. Figura que acompaña SD3-T1.....	81
Figura 76. Figura que acompaña SD3-T1.....	82

Figura 77. Figura que acompaña SD3-T1.....	82
Figura 78. Figura que acompaña SD3-T2.....	83
Figura 79. Figura que acompaña SD3-T2.....	84
Figura 80. Figura que acompaña SD3-T2.....	84
Figura 81. Figura que acompaña SD3-T2.....	84
Figura 82. Figura que acompaña SD3-T2.....	85
Figura 83. Figura que acompaña SD3-T3.....	86
Figura 84. Figura que acompaña SD3-T3.....	86
Figura 85. Figura que acompaña SD3-T3.....	86
Figura 86. Figura que acompaña SD3-T3.....	86
Figura 87. Figura que acompaña SD3-T3.....	86
Figura 88. Figura que acompaña SD3-T3.....	86
Figura 89. Figura que acompaña SD3-T3.....	86
Figura 90. Figura que acompaña SD3-T3.....	86
Figura 91. Figura que acompaña SD3-T3.....	87
Figura 92. Figura que acompaña SD3-T3.....	87
Figura 93. Figura que acompaña SD3-T3.....	87
Figura 94. Figura que acompaña SD3-T3.....	88
Figura 95. Figura que acompaña SD3-T3.....	88
Figura 96. Figura que acompaña SD3-T3.....	89
Figura 97. Figura que acompaña SD3-T3.....	89
Figura 98. Figura que acompaña SD3-T3.....	89
Figura 99. Figura que acompaña SD3-T3.....	90
Figura 100. Figura que acompaña SD3-T3.....	90
Figura 101. Figura que acompaña SD3-T3.....	91
Figura 102. Figura que acompaña SD3-T3.....	91
Figura 103. Figura que acompaña SD3-T3.....	92
Figura 104. Figura que acompaña SD3-T3.....	92
Figura 105. Figura que acompaña SD3-T3.....	93
Figura 106. Figura que acompaña SD3-T3.....	93
Figura 107. Figura que acompaña SD3-T3.....	94
Figura 108. Figura que acompaña SD3-T4.....	94
Figura 109. Figura que acompaña SD3-T4.....	95
Figura 110. Figura que acompaña SD3-T4.....	95
Figura 111. Figura que acompaña SD3-T4.....	96
Figura 112. Figura que acompaña SD3-T4.....	96
Figura 113. Figura que acompaña SD3-T5.....	97
Figura 114. Figura que acompaña SD3-T5.....	97
Figura 115. Figura que acompaña SD3-T5.....	98
Figura 116. Figura que acompaña SD3-T6.....	98
Figura 117. Figura que acompaña SD3-T6.....	98
Figura 118. Figura que acompaña SD3-T6.....	99
Figura 119. Figura que acompaña SD3-T6.....	99
Figura 120. Figura que acompaña SD3-T6.....	100

---

Figura 121. Figura que acompaña SD3-T6.....	100
Figura 122. Figura que acompaña SD3-T6.....	100
Figura 123. Figura que acompaña SD3-T6.....	101
Figura 124. Figura que acompaña SD3-T6.....	101
Figura 125. Figura que acompaña SD3-T6.....	102
Figura 126. Figura que acompaña SD3-T6.....	102
Figura 127. Figura que acompaña SD3-T6.....	102
Figura 128. Figura que acompaña SD3-T7.....	103
Figura 129. Figura que acompaña SD3-T7.....	103
Figura 130. Figura que acompaña SD3-T7.....	104
Figura 131. Figura que acompaña SD3-T7.....	104
Figura 132. Figura que acompaña SD3-T7.....	105
Figura 133. Figura que acompaña SD3-T7.....	105
Figura 134. Figura que acompaña SD3-T8.....	106
Figura 135. Figura que acompaña SD3-T8.....	107
Figura 136. Figura que acompaña SD3-T8.....	107
Figura 137. Figura que acompaña SD3-T8.....	108
Figura 138. Figura que acompaña SD3-T8.....	108
Figura 139. Figura que acompaña SD3-T8.....	108
Figura 140. Figura que acompaña SD3-T8.....	109
Figura 141. Figura que acompaña SD3-T8.....	109
Figura 142. Figura que acompaña SD3-T9.....	110
Figura 143. Figura que acompaña SD3-T9.....	110
Figura 144. Figura que acompaña SD3-T9.....	110
Figura 145. Figura que acompaña SD3-T9.....	111
Figura 146. Figura que acompaña SD3-T10.....	112
Figura 147. Figura que acompaña SD3-T10.....	112
Figura 148. Figura que acompaña SD3-T10.....	113
Figura 149. Figura que acompaña SD3-T10.....	113
Figura 150. Figura que acompaña SD3-T11.....	114
Figura 151. Figura que acompaña SD3-T11.....	114
Figura 152. Figura que acompaña SD3-T11.....	115
Figura 153. Figura que acompaña SD3-T11.....	115
Figura 154. Figura que acompaña SD3-T11.....	116
Figura 155. Figura que acompaña SD3-T11.....	116
Figura 156. Figura que acompaña SD3-T11.....	117
Figura 157. Figura que acompaña SD3-T12.....	118
Figura 158. Figura que acompaña SD3-T12.....	118
Figura 159. Figura que acompaña SD3-T12.....	118
Figura 160. Figura que acompaña SD3-T12.....	118
Figura 161. Figura que acompaña SD3-T12.....	119
Figura 162. Solución del estudiante C07 .....	130
Figura 163. Solución del estudiante C07 .....	131
Figura 164. Solución del estudiante C07 .....	132

Figura 165. Solución del estudiante C07 .....	133
Figura 166. Solución del estudiante C07 .....	134
Figura 167. Solución del estudiante C07 .....	135
Figura 168. Solución del estudiante C07 .....	137
Figura 169. Solución del estudiante C07 .....	139
Figura 170. Solución del estudiante C07 .....	140
Figura 171. Solución del estudiante C07 .....	141
Figura 172. Solución del estudiante C07 .....	143
Figura 173. Solución del estudiante O21 .....	144
Figura 174. Solución del estudiante C07 .....	145
Figura 175. Solución del estudiante C07 .....	146
Figura 176. Solución del estudiante C07 .....	147
Figura 177. Solución del estudiante C07 .....	148
Figura 178. Solución del estudiante C07 .....	150
Figura 179. Solución del estudiante C07 .....	151
Figura 180. Solución del estudiante C07 .....	153
Figura 181. Solución del estudiante C07 .....	154
Figura 182. Solución del estudiante C07 .....	155
Figura 183. Solución del estudiante C07 .....	156
Figura 184. Solución del estudiante C07 .....	157
Figura 185. Figura que acompaña SD1-T2B .....	160
Figura 186. Figura que acompaña SD2-T1A .....	160
Figura 187. Figura que acompaña SD1-T3.....	161
Figura 188. Figura que acompaña SD2-T2.....	162
Figura 189. Figura que acompaña SD3-T8.....	163
Figura 190. Figura que acompaña SD3-T8.....	163
Figura 191. Figura que acompaña SD3-T8.....	163
Figura 192 Solución con diferentes heurísticas .....	164
Figura 193. Procedimiento a través de flechas realizada por el estudiante C07 .....	165
Figura 194. Descripción en lengua natural del estudiante R26.....	166
Figura 195. Solución estudiante C07 con reconfiguraciones y explicación en LN.....	167

## Lista de tablas

	<b>Pág.</b>
Tabla 1. Número de estudiantes evaluados por año en matemáticas, noveno grado .....	9
Tabla 2. Promedios y estimaciones "Saber Noveno" .....	10
Tabla 3 Clasificación de las maneras de ver en función del papel de las figuras en las actividades geométricas propuestas a los alumnos tomado de Duval (200, p. 5) .....	26
Tabla 4. Objetivos de las situaciones didácticas .....	54
Tabla 5 Rejilla de análisis .....	56
Tabla 6 Respuestas SD1-T1 .....	58
Tabla 7 Consolidado de datos situación 1 .....	123
Tabla 8 Consolidado de datos situación 2 .....	125
Tabla 9 Consolidado de datos situación 3 .....	129



## Introducción

Esta indagación buscó dar un acercamiento a lo que significa los procesos de la enseñanza-aprendizaje de la geometría plana y puntualmente lo que tiene que ver con reconocer aprehensiones que permiten hallar el área de regiones sombreadas y movilizar en los estudiantes aprehensiones figurales que permitirán un giro en la enseñanza donde se generen espacios de reflexión al interior de las aulas. Estos espacios que propicien aprender a visualizar las falencias y dificultades que exteriorizan los estudiantes al enfrentarse a enunciados de problemas en geometría, tratando de dejar de lado las metodologías curriculares tradicionales y los algoritmos privilegiados en la enseñanza. Así como también la enseñanza centrada en el monoregistro para promover el razonamiento en los estudiantes para encontrar el área de una región sombreada.

Cuando hablamos de áreas de figuras geométricas es importante resaltar que a este tema de áreas se le dedica tiempo en los primeros años de educación básica, pero que solo se hace énfasis en actividades monoregistro, reconocimiento de formas, aplicación de fórmulas en procesos memorísticos casi siempre siguiendo las actividades de los textos escolares (que son monoregistro).

Las debilidades que hay en la construcción del concepto de área se evidencian en las pruebas internacionales nacionales e institucionales que más adelante analizaremos, mostrando los bajos niveles que surgen en la visualización y las aprehensiones cuando los estudiantes se enfrentan a problemas con áreas de regiones sombreadas, puntualmente en la utilización de los registros figurales los cuales son necesarios para la comprensión de los objetos geométricos bidimensionales.

Según Duval (1999, 2004, 2005), para orientar los procesos de enseñanza de la geometría, es primordial apelar como mínimo a dos registros de representación semiótica, el registro en lengua natural y los registros figurales. El primero, para enunciar los elementos teóricos sobre el cual se respalda el tipo de geometría que se estudia y el segundo, permite designar las figuras realizar tratamientos, reconfiguraciones y deconstrucción de las formas. Duval (1999), afirma que para que se logre un verdadero razonamiento en

geometría es necesario la coordinación de dos registros trabajados en distintos sistemas de representación semiótica.

Este trabajo propone el desarrollo y cimentación del concepto de área de una región sombreada desde una propuesta semiótica cognitiva desde los planteamientos de Duval (1999) que centraliza su mirada en los tratamientos y las formas de ver que permiten las figuras geométricas (Marmolejo, 2007, p.9)

Este informe final de la indagación está conformado de la siguiente manera: en la primera sesión se presentan elementos preliminares relacionados con los antecedentes que nos servirán de apoyo en el marco de esta indagación, el planteamiento del problema en concordancia con la justificación y la pregunta de indagación. En la segunda parte se presenta el referente teórico que es pilar de este proceso indagativo y que está en concordancia con la Teoría semiótica cognitiva profundizada por Raymond Duval (1999,2004) y los objetivos que serán la guía de esta propuesta.

Finalmente, se presenta el desarrollo de la metodología de la indagación a partir del diseño y análisis (a priori y a posteriori) de tres situaciones didácticas (SD) de aula que permitan al estudiante fortalecer el razonamiento a través de los tratamientos de registro semiótico-cognitivos figurales de diseño metodológico propuestas por Duval (1999-2004) y desarrollo de las distintas fases del trabajo, así como las referencias bibliográficas.

En articulación a lo antes expuesto, fueron aplicadas tres situaciones didácticas con los estudiantes de grado noveno en la Institución Educativa San José de la Victoria Valle del Cauca, con las cuales se propone aportar a la cualificación del pensamiento espacial y geométrico a través de la teoría de Duval (1999-2004), y procurar que se pueda transferir su aplicación en el contexto práctico en razón de ser un colegio de modalidad agropecuaria, específicamente en la medición de áreas de terrenos de forma geométrica irregular.

A continuación, se presenta la sección de los antecedentes que son referencias de distinto tipo (informes de investigaciones, artículos, etc.) que presentan algún nivel de aproximación con la temática a indagar.

# 1. La problemática y su contextualización 1

## 1.1 Antecedentes

La geometría ha sido considerada como un apoyo clave en la formación académica y también cultural de los educandos, en razón de su alta aplicabilidad en diversidad de contextos; en este sentido, lo plantean varios investigadores, como Báez e Iglesias (2007) por su aporte a la formación del pensamiento lógico y también Jones (2002) por los aportes que hace al logro de habilidades para visualizar, pensar de manera crítica, intuir, tener éxito en la resolución de problemas, realizar conjeturas, hacer uso correcto de la deducción y ser argumentativo de manera lógica en los procesos matemáticos que involucren la prueba o la demostración.

Un gran aporte al estudio de la geometría lo han realizado Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004), desde una perspectiva historiográfica se afirma que los desarrollos de la geometría en las diferentes épocas de la humanidad han estado relacionados de manera directa con actividades sociales, humanas, científicas, tecnológicas y culturales. La concepción anterior deberá permitir un redireccionamiento de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría hacia una real contextualización, esto en contravía a la errónea percepción de la geometría como una disciplina matemática ajena a la dinámica social y que conlleve a orientarla y redimensionarla con relación a su aplicabilidad y utilidad en la vida del ser humano.

En el escenario del sistema de educación formal en América, y en detrimento de lo expuesto en el párrafo anterior, se observa con frecuencia cómo los contenidos de geometría en los colegios son expuestos de esta manera al estudiante como un asunto acabado de una actividad matemática, olvidando el maestro, casi que por completo, los procesos implícitos de la construcción y razonamiento. La enseñanza de la geometría desde algunos autores se puede afirmar que está orientada por el camino del estudio memorístico de áreas, volúmenes, definiciones geométricas, teoremas y propiedades, todo

esto soportado en construcciones mecanicistas y no contextualizadas tal como lo afirman Gamboa y Ballesteros (2010).

A nivel internacional y nacional durante los últimos años, las falencias que presenta el estudiantado, en su formación inicial y la básica secundaria, en lo que concierne a las áreas de figuras planas han sido abordadas por diversidad de investigadores, destacándose, entre otros Duval (1998); Fandiño, M y D'Amore B. (2009); Jaquet (2000); Montis, Mallocci y Polo (2003), Marmolejo y González (2013); González (2014); Santa, Londoño y González (2013).

Marmolejo (2007) ha centrado sus trabajos en la complejidad que presentan los estudiantes al tratar de aprender el registro semiótico de representación figural, el que como objeto de enseñanza se ha ignorado en los programas de estudio de los colegios oficiales. Siendo el registro semiótico de las figuras geométricas en el aprendizaje de la geometría un elemento esencial; no obstante, en las aulas escolares poco o prácticamente nada se enseña al realizar tratamiento de figuras; menos aun a discriminar y clasificar las diversas formas que ellas movilizan; a la vez, no se potencializa el papel que determinan los factores de visibilidad que los acompañan. En oposición a lo anterior, se ha generalizado la errónea concepción de estudiantes y docentes en matemática, que las figuras comunican de forma autónoma y que entrar a las posibilidades de exploración y descubrimiento que ellas movilizan, es algo caracterizado por la espontaneidad lo que no reviste ninguna complejidad.

El trabajo de investigación dinamizó su derrotero a partir de la pregunta problema “¿Por qué, al enfrentar situaciones donde las figuras pueden desempeñar un papel heurístico, los alumnos no pueden acceder a estas posibilidades que ellas brindan y, por tanto, el recurso a las figuras como soporte intuitivo es dejado de lado o juega en su más baja racionalidad?” (Marmolejo, 2007). La que conllevó a las siguientes respuestas clasificadas por el investigador en tres grupos.

El primer grupo de respuestas está relacionado con la visualización, los factores de visibilidad y a los tratamientos figurales: para el caso de los educadores, el acompañar y alentar los procedimientos de sus alumnos en el desarrollo de actividades donde las figuras juegan como un soporte heurístico, se constituyó en una forma de proceder que brilló por su ausencia:

El contraste del color y la dimensión entre las líneas que conforman el contorno de la figura y el de las líneas que forman el fondo cuadriculado, se integra como un factor de visibilidad que inhibe sobre la figura una visualización local y privilegia sobre ella una visualización

global; las características del contorno de las figuras como un factor de visibilidad se impone ante la presencia de un segundo factor: el fondo cuadrulado; aplicar espontáneamente sobre una figura un cambio dimensional en la forma de ver sobre ella es una operación figural de enorme complejidad. La visualización no es un asunto de constatación inmediata y simple, sino una cuestión de tratamiento de la información y es susceptible de un aprendizaje específico en las aulas de clase en la construcción de objetos geométricos Marmolejo (2007).

El investigador, en el segundo grupo de respuestas hace énfasis en que no fue el objeto central de la investigación el construir área y perímetro de figuras geométricas bidimensionales, sin embargo, en un segundo momento, le permitió establecer los siguientes resultados: la definición de los textos escolares de las áreas de las figuras planas direccionan casi siempre a un tratamiento aritmético de la cuestión, como el caso del conteo, lo que no facilita “una reflexión correspondiente al estudio de magnitudes; en detrimento de las posibilidades heurísticas que brindan las figuras geométricas, los textos escolares analizados en esta investigación no se encontraron actividades que permitieran la reflexión del área a partir de comparaciones cualitativas” (Marmolejo, 2007), la acentuada confusión que existe entre los conceptos de área y perímetro en los estudiantes. Finalmente Marmolejo (2007), deja abierta la discusión en diferentes aspectos como: para discriminar lo complejo del trasfondo al justificar en lengua natural (LN) lo que se ve en las figuras; es necesario, desarrollar investigaciones que permitan la discusión sobre las formas de comportarse de los alumnos en el instante de abordar en el acto funciones que conceden a la (LN) su propiedad discursiva: apofántica, de extensión discursiva y de reflexividad; por otra parte, en relación a la construcción del área de figuras geométricas bidimensionales, en esta indagación se proveen algunas “pautas a tener en cuenta en el diseño de situaciones didácticas que susciten en las aulas escolares la reflexión en torno a este objeto métrico y donde las figuras geométricas carguen de sentido y significado su aprendizaje” Marmolejo (2007).

Galvis, J (2017) desde la teoría trabajada por Duval (1999) que tiene elementos como el tratamiento y la conversión de registros de representación semiótica; buscó percibir las formas cognitivas de visualización y de aprehensión mediados por tratamiento y conversión que realizaron desde el registro figural un grupo de estudiantes en el aprendizaje del concepto Teorema de Pitágoras. La investigación de Galvis, J (2017) fue dinamizada por la pregunta problema “¿Cuáles formas de aprehensión se pueden movilizar en los

estudiantes de grado octavo en los registros figurales, en la aproximación de la noción del teorema de Pitágoras?” (Galvis, 2017)

Los resultados de la indagación de Galvis, J (2017) con respecto a la pregunta problematizadora del proceso investigativo, entre otros, específicamente en lo concerniente al registro semiótico de las figuras geométricas, fueron los subsiguientes: “El hecho de utilizar registro figural en las situaciones didácticas (SD) diseñadas para la indagación, da importantes ganancias en la identificación de las formas de aprehensión, ya que posibilitó a los estudiantes verificar mediante los tratamientos figurales” (Galvis, 2017), como por ejemplo, la comparación de áreas de regiones planas, el reconocimiento de algunos factores que permiten ver, configuraciones a partir de subfiguras, el proceso en la forma de visualizar para explorar dimensiones uno (D1) y dimensiones dos (D2) en las figuras, la importancia de las características y potencialidades del contorno global de la figura, así se permitió seguir por un buen camino en las aprehensiones significativas que realizan los estudiantes en el desarrollo de este tipo de habilidades. En esta indagación la forma de ver el contorno global, se constituyó para los estudiantes, en la manera de reconocer la potencialidad de los tratamientos en el “registro figural y a su vez la oportunidad fortalecer las aprehensiones a través del fraccionamiento y reconfiguración de las subfiguras en cada registro semiótico de tipo figural puesto en escena. “La aprehensión operatoria de las figuras presentadas en cada una de las tres SD diseñadas por el investigador, de forma general, permitió reordenar un conjunto de subfiguras las cuales guardaban una escala” (Galvis, 2017), o congruencia cuando se reconfiguraban y que los mismos estudiantes debían hacer un análisis profundo y poner en juego en el aula de clases. Lo cual generó que los estudiantes hicieran toma conciencia SD y la vinculación con la geometría a través de los registros de tipo discursivos para generar nuevos saberes Galvis, J (2017)

Bohórquez (2004) analizó cómo incide una práctica pedagógica mediada por el software Cabri - Geometry, a partir de los principios de la corriente constructivista en lo que respecta a la comprensión del concepto de área. La investigación se concretó a partir de preguntas problemas como: ¿Qué aspectos del concepto de área comprenden las estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Distrital Técnico Menorah con una práctica pedagógica basada en principios constructivistas? ¿Cómo manifiestan las estudiantes la comprensión de estos aspectos del concepto de área? ¿Qué aporta el trabajo en colaboración a la comprensión detectada de los diferentes conceptos de área? ¿Qué

aporta el software Cabri-Geometry a la comprensión detectada de los diferentes aspectos del concepto de área en estas estudiantes?

Los resultados de la investigación presentados por Bohórquez (2004) mostraron que la muestra presentó un significativo avance en la comprensión de los aspectos de área como la percepción, la medida, la aritmetización y la estimación. Además, se pudo establecer que los estudiantes del grado noveno, gracias al trabajo colaborativo se familiarizaron con el concepto de área. Finalmente, en lo relacionado con el software utilizado, se evidenció que su uso propició un fortalecimiento alrededor del concepto de área, sin embargo, las estudiantes no presentaron un avance significativo en la comprensión de esta.

Estos trabajos son los antecedentes del campo de la indagación sobre la construcción del concepto de área, se espera aporten elementos ya sea en lo teórico o lo metodológico para esta propuesta, seguidamente se presentará el planteamiento del problema de la indagación.

## 1.2 Planteamiento del problema

En esta sección de esta propuesta se describe qué está pasando con la enseñanza de la geometría en el orden internacional, nacional y local en especial se centra la atención en la temática específica de la que nos ocuparemos: la construcción del concepto de área para llegar a una pregunta problema que nos oriente el proceso indagativo.

En el orden internacional, siguiendo a Jones (2002), en lo que respecta a la geometría dice que es un elemento fundamental para los estudiantes “el desarrollo de habilidades para visualizar, pensar críticamente, intuir, resolver problemas, conjeturar, razonar deductivamente y argumentar de manera lógica en procesos de prueba o demostración, con lo relacionado a la visualización de figuras geométricas” (p.25). Sin duda esta apreciación del investigador citado presenta una significativa razón del porque los procesos de la enseñanza-aprendizaje en geometría y en especial el tema que nos ocupará en la indagación, deben ser cualificados para lograr mejorar esos procesos en los alumnos.

En América latina específicamente en Colombia, la enseñanza en geometría tradicionalmente se ha centrado en el proceso de memorización de fórmulas para calcular áreas y volúmenes, también en definiciones geométricas, teoremas y propiedades, todo ello desde un sesgo de construcciones mecanicistas y descontextualizadas. Alrededor de lo anterior, investigadores como Abrate, Delgado y Pochulu (2006) argumentan como

algunos maestros le dan una inusitada prioridad a la enseñanza de disciplinas como la aritmética y el álgebra, esto en detrimento de la intensidad horaria para la enseñanza de la geometría, casi siempre desplazándose los contenidos de esta para las últimas semanas del calendario escolar, no resulta extraño que en muchas ocasiones no se den.

Lo expresado en el párrafo anterior según Abrate, Delgado y Pochulu (2006) permite observar que la enseñanza-aprendizaje de la geometría en América latina, concretamente en los procesos de aula no arrojan buenos resultados ya que ésta logra ser concebida como instrumento reflexivo que permita al ser humano solucionar situaciones problema de distinta cualidad, que exigen poner en juego las competencias geométricas de las personas y las que han sido logradas en su formación matemática y “comprender el mundo en cada uno de los escenarios que lo conforman, sea este natural o artificial” Almeida (2002), apunta a que uno de los objetivos a lograr por toda persona en su proceso de formación integral es alcanzar una alta capacidad de análisis en geométrica con enfoque histórico e multidisciplinaria; en este sentido, se deberá hacer uso de los conocimientos geométricos para modelar, crear o resolver problemas reales, en donde se involucra de manera consecencial la utilización de los diferentes lenguajes y representaciones. No obstante, que exista un significativo número de investigaciones que dan cuenta de cómo se ha aportado en la solución de la problemática de la enseñanza-aprendizaje de la geometría, se hace necesario que el maestro promueva y el estudiantado logre un aprendizaje efectivo de la geometría Goncalves (2006).

Las pruebas internacionales como PISA (Programme for International Student Assessment) que mide el rendimiento académico de los alumnos en matemáticas, ciencia y lectura) y TIMMS (Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias del inglés Trends in International Mathematics and Science Study, evaluación internacional de conocimientos de matemáticas y ciencias de los estudiantes inscritos en los grados cuarto y octavo de todo el mundo) en matemáticas no presentan buenos resultados en Colombia, panorama bastante difícil alrededor de la evaluación en el área de matemáticas para el Valle del Cauca, de igual manera que para las pruebas SABER, en donde se evidencia cómo el componente geométrico presenta una alta incidencia en los resultados del área en el orden nacional e internacional.

Para la prueba PISA en matemáticas los contenidos exigidos no se diferencian a los curriculares de cada país, pero se asocian a situaciones de los contextos de la vida real. También, se proponen cuatro subvalores según los temas vistos en el problema; proporcionan un esquema amplio de los contenidos apropiados, ello no infiere un

parentesco de contenidos como sucede en el propio currículo. Del estudio de las preguntas, se encuentran unos contenidos mejor aprovechados en cada subvalor o escala:

- Espacio y forma. Trata de las relaciones de objetos geométricos y la representación figural en dimensiones D2 y D3 (perímetros, superficies, áreas, regularidades; escalas; semejanzas).

En las pruebas de PISA 2015 en matemáticas, Colombia de entre 70 países del mundo que participaron ocupó el puesto 61 con un puntaje de 390, siendo el primer país Singapur con 564 puntos; presentando nuestro país una diferencia en contra de 174 puntos lo que indica un desfase muy grande con relación al mayor puntaje.

La prueba TIMSS se realiza cada cuatro años y Colombia ha participado en 1995 y 2007. En el 95 fue aplicada a alumnos de séptimo y octavo grados y en el 2007 a estudiantes de cuarto y octavo grado, esta evaluación categoriza a los alumnos teniendo en cuenta cinco niveles, Inferior, Bajo, Medio, Alto y Avanzado, esto en relación con los porcentajes establecidos en cada uno de los niveles:

En Colombia los resultados en TIMSS 2007 indican que los estudiantes en grado cuarto y octavo presentan dificultades en matemáticas. El 22% se ubicó en el nivel bajo; el 7% en el medio, 2% en el alto y 0% avanzado. En octavo la situación es similar, puesto que el 61% tuvo logros inferiores a los descritos en la prueba para este grado, el 28% nivel bajo el 9% en el medio, el 2% en el alto y ninguno en el avanzado, casi las 2/3 de los estudiantes colombianos presentan dificultades en conocimientos básicos de las matemáticas, prueba TIMSS 2007 (Gómez-Cedeño, 2011; pág. 17).

Continuando en el ámbito del análisis de las pruebas, pero ahora Institucionalmente se hace necesario una revisión a las pruebas saber de grado noveno para dar soporte en cuanto a la problemática objeto de estudio del presente trabajo de indagación en donde se observa los resultados desde el año 2014 hasta la prueba más cercana al presente que se realizó en el 2017.

Año	Número de estudiantes evaluados
2014	41
2015	37
2016	32
2017	50

Tabla 1. Número de estudiantes evaluados por año en matemáticas, noveno

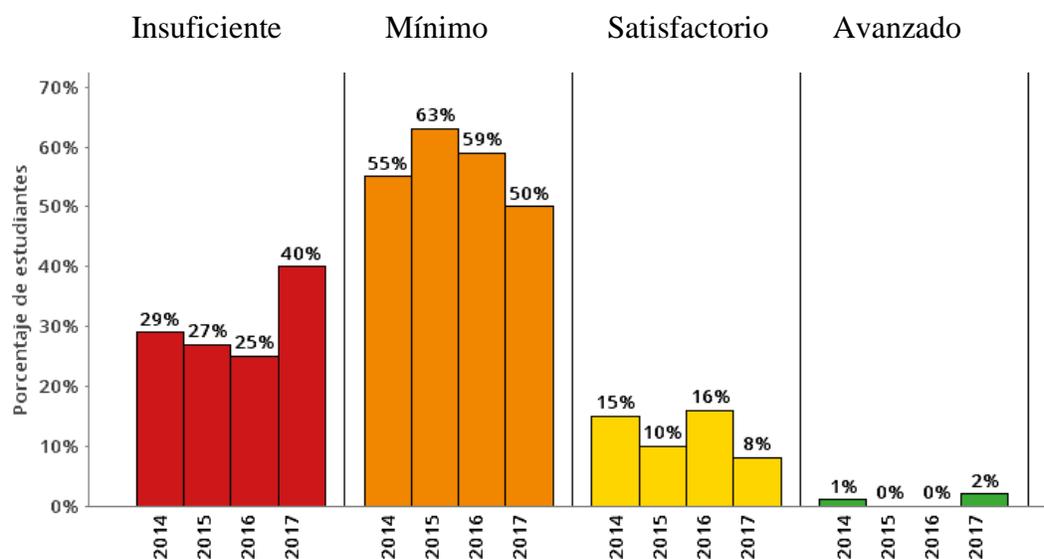


Figura 1. Comparación de porcentajes según niveles de desempeño

Año	Puntuaje	Margen de	Intervalo de	Intervalos de confianza para la puntuación estimada de la escala
	Promedio	estimación	confianza	
2014	273	±18,4	(254,6 - 291,4)	
2015	268	±14,2	(253,8 - 282,2)	
2016	288	±11	(277 - 299)	
2017	267	±5,1	(261,9 - 272,1)	

Tabla 2. Promedios y estimaciones "Saber Noveno"

Tabla 2 Fuente de información: Pruebas saber noveno (2014-2017)

Se puede analizar en el gráfico de la figura 1 que la Institución Educativa San José (bajo los parámetros establecidos por el ICFES), en el nivel insuficiente venía presentando mejoría desde el año 2014 hasta el 2016, debido a que la población estudiantil estaba disminuyendo en este nivel, pero esta tendencia cambia en el año 2017 pasando de un 25% de la población evaluada en insuficiente a un 40% lo que es preocupante y hace necesario tomar medidas a nivel curricular y de las prácticas de la enseñanza de las matemáticas institucionales.

En el nivel de desempeño mínimo nos encontramos con la mayor cantidad de estudiantes en relación con los otros niveles, situación que desfavorece a la institución en aras de posicionarse mejor ante las otras instituciones municipales y departamentales. En el nivel satisfactorio en el 2017 solo el 8% alcanza este nivel que sería la meta a posicionar la mayoría de los estudiantes en los próximos años y al contrario de los otros años incluidos en la figura 1 disminuyó el nivel académico, y finalmente nos encontramos con el nivel Avanzado donde obtenemos el 1% en el año 2014, nulo en los años 2015 y 2016 respectivamente y una pequeña mejora en el año 2017 de apenas el 2% situación que desde mi punto de vista es preocupante en miras del mejoramiento académico de los estudiantes y de las estrategias de enseñanza-aprendizaje aplicadas en la institución por parte de los maestros lo cual hace evidente la necesidad de una actualización de quienes imparten la cátedra de matemáticas y geometría. No solo para mejorar las estrategias metodológicas sino también en la adquisición de nuevos marcos teóricos que favorezcan el razonamiento desde una mirada semiótico cognitiva que permitan clases dinámicas y diferentes frente a la adquisición de los conocimientos concretamente en geometría.

En aras de detectar de manera puntual las falencias de los estudiantes en lo que respecta a la temática epicentro de este ejercicio de indagación, se realizó un taller diagnóstico en el que se propusieron dos situaciones, a los estudiantes de grado noveno. Las situaciones propuestas se centran en problemas de tipo figural sobre el análisis de áreas de figuras sombreadas, para realizar un proceso geométrico a través de tratamientos figurales, como el trazo de líneas auxiliares, rotación y translación, deconstrucción, reconfiguración de figuras geométricas y ellos deben hallar el área total e identificar qué subfiguras pueden emerger de la silueta (figura 2).

En la primera situación se les solicita lo siguiente:

Observa la figura 2 y encuentra el área teniendo en cuenta los datos suministrados y los conocimientos previos que habían adquirido durante su formación escolar.

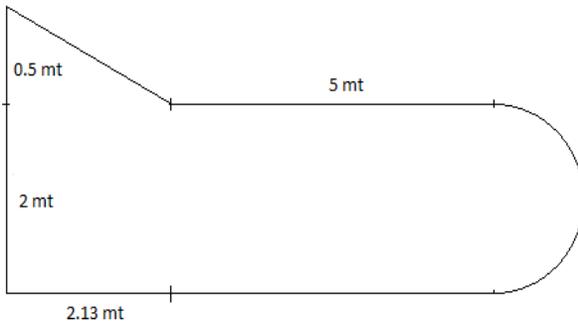


Figura 2. Silueta para encontrar el área

*Figura de autoría propia*

Frente a esta situación diagnóstica, un alto porcentaje de los estudiantes del grado noveno al encontrarse con este tipo de enunciados de problema, en lo que respecta a la figura 2, al tratar de resolverlo se plantearon inicialmente los siguientes cuestionamientos, se mencionan algunos:

“ ¿Qué figura es? ”

“ ¿Existe alguna fórmula para resolver el área de esa figura? ”

“ ¿A la figura le hacen falta datos? ”

Los anteriores cuestionamientos de los estudiantes emergen posiblemente del poco conocimiento de estrategias heurísticas que permiten solucionar el enunciado problema, o la falta de estrategias heurísticas en las figuras geométricas o quizás el poco acompañamiento en la construcción de estos procesos por parte de los docentes para poder hallar las áreas solicitadas.

Es posible que de manera recurrente surjan otros interrogantes en ellos como expresión de un sentimiento de frustración al percibir que no tienen los elementos necesarios para dar solución a este tipo de enunciados de problemas, aspecto probablemente producto de los procesos de tipo tradicional que han recibido. Además, que el razonamiento geométrico no es espontáneo y debe enseñarse, según Pontón (2012). En lo que respecta al análisis del cómo razonan los estudiantes en la geometría, según Bohórquez y Hernández (2003), entre otros, son enfáticos en señalar como el razonamiento común se constituye en un obstáculo epistemológico para la situación cognitiva de la geometría en los estudiantes. Estos mismos autores sostienen que el razonamiento geométrico está dado por un proceso en el que se van superando etapas o estadios, que van logrando los estudiantes en la medida que avanzan en el estudio de la geometría. A pesar que existen trabajos que determinan niveles de aprendizaje como los de Van Hiele esto no ha solucionado las

complejidades en esta comprensión y quizás el problema debe abordarse desde lo que implica cognitivamente la construcción de pensamiento geométrico.

Ahora bien, unos pocos estudiantes –hablando de dos estudiantes de un grupo de 28 para un porcentaje del total del 4.7 % del estudiantado de grado noveno- realizaron con muchas dificultades la situación enfrentada y representada en la figura 2, estos mismos estudiantes lograron de igual manera, es decir, con bastantes dificultades operatorias y conceptuales, realizar la situación problémica y llegar a la figura 3 en donde visualizaron subfiguras normalizadas o básicas que conllevaron a dar respuesta a cerca de cuál es el área total solicitada y se muestra a continuación.

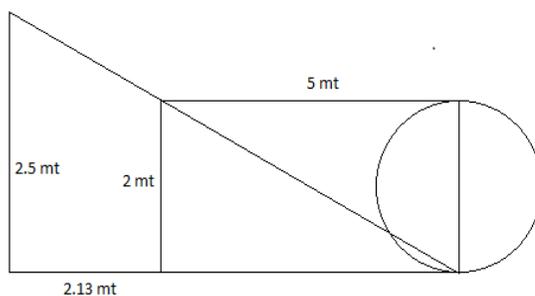


Figura 3. Silueta con trazos complementarios

*Figura de autoría propia*

Continuando con la situación diagnóstica, se le presentaron otras figuras como las que se presenta en la figura 4, 5 y 6 a resolver por parte de los estudiantes. No obstante, teniendo en cuenta la primera situación, no sucede lo mismo, cuando ellos se enfrentaron a figuras que presentan curvas o sus segmentos son de tipo circular en donde se les preguntaba por el área de la parte sombreada, el éxito fue nulo.

Encuentra el área sombreada de color anaranjado delimitada por los puntos ABCD

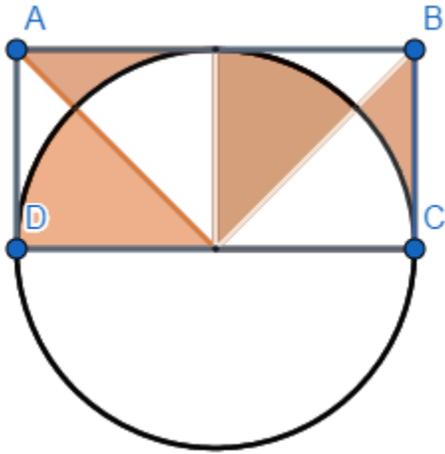


Figura 4. Figura con región sombreada

*Figura de autoría propia*

Encuentre el área sombreada de color rojo del siguiente cuadrado.

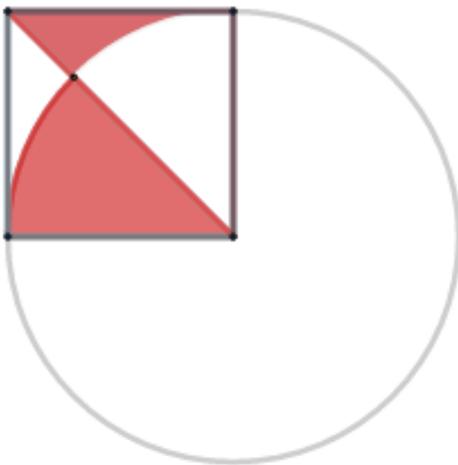


Figura 5. Figura con región sombreada

*Figura de autoría propia*

Si el área de una circunferencia es  $A = \pi r^2$  determine el área de la región sombreada de color gris

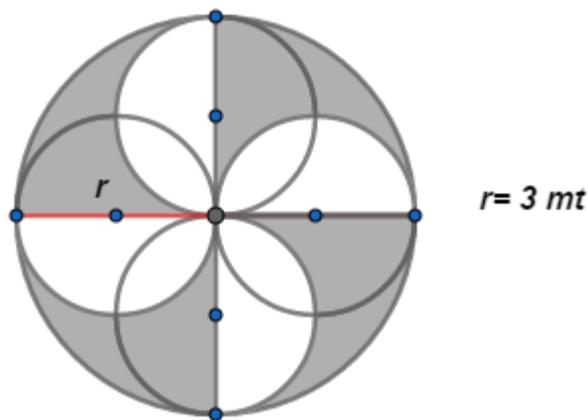


Figura 6. Figura con región sombreada de tipo circular

*Figura de autoría propia*

Con las actividades realizadas por los estudiantes en las figuras 2 y 3, se plantearon entre los estudiantes, entre otras preguntas, las siguientes ¿Cómo hacer la actividad 4 y 5 si no hay datos para resolver las situaciones que nos proponen? En las actividades figura 6, se le escuchó al estudiantado de grado noveno expresiones como: “esta actividad si podemos resolverla (es factible de solución) porque tiene datos”, a su vez el grupo en su totalidad se preguntó ¿Cómo se hace el área cuando solo hay curvas? Cuestionamientos que refleja el no estar dotado de competencias para salir airoso ante la situación a la que se enfrenta y por la posible falta de un trabajo de aula que fortalezca los procesos de visualización, las aprehensiones en correlación con la conversión de registros semióticos-cognitivos y el tratamiento figural de elementos geométricos para una mejor preparación escolar de los estudiantes en el área de geometría.

Sin duda, las actividades 4, 5 y 6 deberían movilizar razonamientos con aprehensiones mereológicas como la rotación, la traslación, la sobre posición de figuras y otros procesos que le permitan dar respuesta a la pregunta ¿cuál es el área sombreada?, pero no es así, lo anterior esta soportado en los aportes de Duval (1998) quien dice que la enseñanza de la geometría en la escuela sólo utiliza, lo que él llama, entrada del botánico, que sólo le permite observar las formas como algo estático y no como la mirada del científico que explora, discierne, razona, concluye y da hipótesis a partir de la alta comprensión global de las figuras ni mucho menos la deconstrucción dimensional de las formas.

Es así, que ante las falencias que exhiben los estudiantes de grado noveno en lo relacionado con la solución de enunciados de problemas con figuras geométricas que involucran áreas delimitadas por curvas, especialmente en lo que le atañe a la resolución

de enunciados de problemas geométricos y la falta de actualización de los docentes en nuevas metodologías de enseñanza-aprendizaje que movilice el razonamiento en dichos estudiantes. Se hace necesario un estudio en donde se aporte no sólo a procesos mnemotécnicos en el aula de clases, sino también la modelación de fenómenos de la realidad cercana, los tratamientos figurales, la coordinación de registros semióticos como el figural y el de la lengua natural, la deconstrucción dimensional, los procesos de tipo mereológicos, la resolución de enunciados problemas, problemas aplicados que dentro de la modalidad agropecuaria de la Institución educativa San José, lo cual genere una mejor visualización entendida ésta como el razonamiento y haga de la geometría una realidad en los procesos que realizan los estudiantes en su vida escolar y cotidiana; Se da nueva relevancia al estudio y aprendizaje de la geometría en los estudiantes, tendrán un sentido cercano y pertinente a su realidad inmediata, lo cual posiblemente nos acerque a un mejoramiento en la aplicación del conocimiento en situaciones problema y específicamente al alcance de competencias generales y específicas en temas agropecuarios.

Este trabajo de indagación se plantea en la perspectiva de aportar al mejoramiento en los procesos de aprendizaje de la geometría de grado noveno de la institución educativa en la que se realizó esta indagación, concerniente a la aprehensión de los conocimientos geométrico y espacial aplicado al área de figuras polinómicas y circulares, que será el tema central. Desarrollado desde la teoría semiótica cognitiva Duval (1993, 1998, 1999, 2004, 2005.), con el fin de trabajar una propuesta que centre su mirada en el manejo de los registros figurales y el registro numérico transversalizado por el registro en lengua natural, fundamental en la construcción de pensamiento geométrico.

Finalmente, es necesario mencionar que con este trabajo de indagación a nivel de trabajo final de maestría, se persigue también contribuir al logro de Estándares Básicos de Matemáticas que establece el Ministerio de Educación Nacional (MEN) y en los recientemente promulgados DBA (Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas: MEN, 2016) para los estudiantes de grado Noveno de la Institución Educativa en lo relacionado con los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y para nuestro caso en el pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos el "Uso de representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y otras disciplinas". (MEN, 2006, pág.86)

## 1.3 Problema de Indagación

Con lo expuesto anteriormente sobre el campo problemático, frente a la construcción de pensamiento geométrico argumentado desde autores internacionales, y nacionales y las problemáticas locales de la Institución Educativa “San José” de la Victoria Valle del Cauca, se plantea la siguiente pregunta:

***¿Cómo mejorar la comprensión del área de regiones sombreadas, los procesos de visualización y las aprehensiones en el registro figural en estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa “San José” de la Victoria Valle del Cauca?***

## 1.4 Objetivos

En esta sección se disponen los objetivos que especifican y delimitan esta propuesta para la indagación alrededor del concepto de área de regiones sombreadas, tales objetivos se clasifican en general y específicos.

### 1.4.1 Objetivo General.

Analizar los procesos de visualización y fomentar diferentes tipos de aprehensiones figurales en la construcción del concepto de área de regiones sombreadas, en los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa San José de la Victoria del Valle del Cauca.

### 1.4.2 Objetivos Específicos.

1. Determinar algunos aspectos teóricos y prácticos de la teoría de los registros semióticos de Duval que aporten para la reflexión de la construcción del concepto de área de figuras geométricas bidimensionales.
2. Identificar procesos de visualización desde diferentes aprehensiones figurales que le permitan al estudiante resolver problemas de áreas de regiones sombreadas.
3. Diseñar, implementar y evaluar una secuencia didáctica que permita mejorar los tratamientos figurales y el razonamiento en los registros figurales en la construcción del concepto de área de regiones sombreadas.



## 2. Marco teórico

Raymond Duval (1993, 1998, 1999, 2004, 2005) en su programa de investigación sobre las figuras geométricas entre muchos cuestionamientos que ha trabajado y dinamizado su trabajo teórico, se ha preguntado alrededor de las figuras geométricas bidimensionales: ¿Qué es lo que es necesario ver en una figura? ¿Qué representan las figuras? ¿En qué consiste esta manera particular de ver en geometría? ¿Qué tipos de actividades puede contribuir a hacer que los alumnos entren en esta manera de ver?

Para entender estos cuestionamientos es necesario en primera instancia una aprehensión de los elementos teóricos de la geometría según la teoría semiótica de Duval (1999) que tienen relación con esta Indagación; segundo, revisar exhaustivamente y tomar elementos de los investigadores que ya han realizado, y validado ante la comunidad nacional e internacional, trabajos sobre la temática de la indagación o con cierto nivel de aproximación desde el enfoque teórico de los registros semióticos de Duval en el campo de la geometría. La teoría semiótica del Investigador francés Raymond Duval (1998) es el soporte teórico de mayor envergadura para este trabajo de Indagación, pero a la vez es pertinente mencionar algunos investigadores que han descollado y, de manera indirecta, aportan a la realización de esta Indagación, pues sentaron las bases de los procesos a llevar a cabo para tener éxito en la resolución de problemas de aplicación de las matemáticas.

A nivel de investigaciones nacionales y de nuestro entorno nos encontramos con un gran aporte en la misma línea de la resolución de problemas bajo la perspectiva semiótica de Duval, el trabajo de Pontón (2012) afirma que “las mayores dificultades en la comprensión de enunciados problema es que muy pocos alumnos logran la coordinación entre los tratamientos numéricos con los tratamientos figurales y los registros de lengua natural” Pontón (2012).

Como ya se mencionó, la mirada central de esta propuesta de indagación estará puesta en un marco cognitivo desde la semiótica de Duval (1999) aplicada a los conceptos de

geometría como lo es el área de figuras sombreadas, se hace necesario aclarar varios conceptos claves para el entendimiento de quién tenga la oportunidad de leer este documento.

Cuando nos referimos al término semiótica en el sentido estricto de la palabra nos remite a: el análisis de los distintos sistemas de signos que admiten la comunicación entre individuos y sus clases de producción, de funcionamiento y de recepción (Hernández, L. 2016), pero para Duval (1999) este concepto es más profundo pues nos invita al análisis exhaustivo de cualquier concepto desde diferentes puntos de vista y las representaciones semióticas son el camino por el que una persona dispone para manifestar sus representaciones mentales Duval (1999).

En matemática, las representaciones semióticas son precisas para fines de comunicación, además se necesitan para el progreso de la actividad matemática. Según Duval (1999), “la noción de representación semiótica presupone, pues, la consideración de sistemas semióticos diferentes y una operación cognitiva de conversión de las representaciones de un sistema semiótico a otro para que éste tenga validez” Duval (1999).

En nuestro caso se pretende que el estudiante sea capaz de visualizar propiedades geométricas cuando se enfrenta a problemas de áreas de regiones sombreadas y que sea capaz de realizar tratamientos en dichas figuras como lo son la superposición, la traslación y la deconstrucción, entre otros tratamientos que le permitan al estudiante hallar el área o el perímetro de las figuras en un enunciado de problema; pero esto no se logra de forma espontánea como lo pretenden mostrar algunos textos en Colombia que llevan al estudiante a ver el área como una simple operación matemática más que el razonamiento necesario; y se deja de lado el verdadero concepto de área para pasar a una estructura algorítmica de «lado por lado en el caso de figuras rectangulares». Se queda por fuera todo el estudio de la superficie que en definitiva permitiría al estudiante apropiarse más del tema y no solo se quedaría con lo que Duval (2004) ha llamado entrada del botánico, que es: “aprender a reconocer perceptivamente las formas elementales que son utilizadas en geometría plana: tipos de triángulos y de cuadriláteros, configuraciones obtenidas por las diferentes posiciones de dos rectas la una en relación a la otra, eventualmente formas circulares, formas ovoides” Duval (2004), entre otras y pasar a un reto mayor para los maestros que trabajan con estudiantes del siglo XXI, donde queremos llevar al estudiante a ser un investigador que observe, analice, transforme y cree nuevos conocimientos a partir de sus experiencias con los elementos geométricos y específicamente con áreas de regiones sombreadas.

## 2.1 Teoría semiótica cognitiva

En geometría un punto de encuentro de las nociones es la importancia de coordinar mínimo dos registros de representaciones semióticas para asimilar los objetos geométricos y profundizar en toda su extensión. Las representaciones semióticas juegan un papel importante en el progreso del pensamiento geométrico espacial que es decisivo en el modo de enseñar y aprender matemáticas, lo que recae, a partir una perspectiva cognitiva, que para la comprensión extensa de las nociones geométricas es necesario implementar y coordinar más de un sistema de representación semiótica, como lo es el registro de lengua natural (RL) y el registro figural (RF) para lo cual basaremos el presente trabajo de grado con la perspectiva de Duval (1999-2005), es de destacar que al interior de la teoría semiótica cognitiva de Duval se proponen soluciones a problemáticas de la enseñanza de la geometría y las situaciones cercanas a los factores que originan estas falencias y las variables involucradas que hay que tener en cuenta para la construcción de tareas coordinadas que movilicen el razonamiento.

En relación a lo anterior, el registro en lengua natural, los registros figurales, la conversión, el tratamiento, las formas de aprehensión y la deconstrucción y reconfiguración de las formas son elementos de la teoría que favorecer la aproximación a la conceptualización de nociones de la geometría y que definiremos con mayor rigurosidad en los siguientes apartados. A continuación, mencionamos conceptos relevantes y los tratados de la fundamentación de la teoría semiótica cognitiva de Duval (1999).

a) Según Duval (1999), es necesario tener presente que una cosa son los objetos matemáticos y otra la representación figural del objeto como tal, de allí la importancia de las representaciones de tipo figural que permitan realizar análisis de las propiedades de dichas figuras a través de representaciones semióticas ya que no existe como acceder a los objetos matemáticos ni geométricos sin las representaciones.

b) Es de vital importancia distinguir como se forman las imágenes mentales a través de representaciones semióticas y como diferenciar un proceso de otro “Debe distinguirse entre: imagen mental (conceptos interiorizados); representación semiótica (representación constituida mediante el empleo de signos) y representación mental (interiorización de una representación semiótica)” Galvis J (2017 p.18).

c) La representación semiótica se produce por la conformidad con ciertas reglas del sistema cumple, esto genera funciones que permiten la identificación de los objetos

geométricos que son abstractos a una realidad cercana para quien los estudia y permite el tratamiento que moviliza el razonamiento o comprensión del objeto.

d) Según Pontón (2012) las falencias encontradas por los alumnos se pueden describir y ser explicadas como una falencia en la coordinación de registros la lengua natural y representación en otros registros como el numérico.

Se concluye teniendo en cuenta lo descrito anteriormente, que las representaciones semióticas juegan un papel de alta relevancia para la enseñanza-aprendizaje de la geometría, debido a que son las representaciones las que favorecen el acercamiento a los objetos geométricos. Pero es claro que la clave para entender los objetos geométricos es la coordinación de registros tanto en lengua natural (LN), numéricos y figurales.

Este marco conceptual en el cual se cimienta este trabajo final de indagación permitió la construcción y diseño de SD de aula, las cuales se enuncian tanto en registros figurales como en expresiones en lengua natural, por consiguiente, la visualización de las variables y unidades significantes del registro es componente definitivo de la indagación, como lo es también la construcción de instrumentos como tareas in situ que permitan su análisis.

## **2.2 Representaciones semióticas**

“La representación semiótica en el marco de la adquisición de conocimientos matemáticos sobre los problemas que su aprendizaje suscita. La especificidad de las representaciones semióticas consiste en que son relativas a un sistema particular de signos: el lenguaje, la escritura” (Galvis, 2017). algebraica o los gráficos cartesianos, y en que pueden ser convertidas en representaciones “equivalentes” en otro sistema semiótico, pero puede tomar significados diferentes para el sujeto que las utiliza. La noción de representación semiótica presupone, la consideración de sistemas semióticos diferentes y una operación cognitiva de conversión de un sistema a otro (Galvis, 2017, p.30).

Es relevante decir que los sistemas semióticos deben cumplir con tres características:

- Deben formar una marca o una agrupación de marcas que puedan ser reconocibles como una representación.

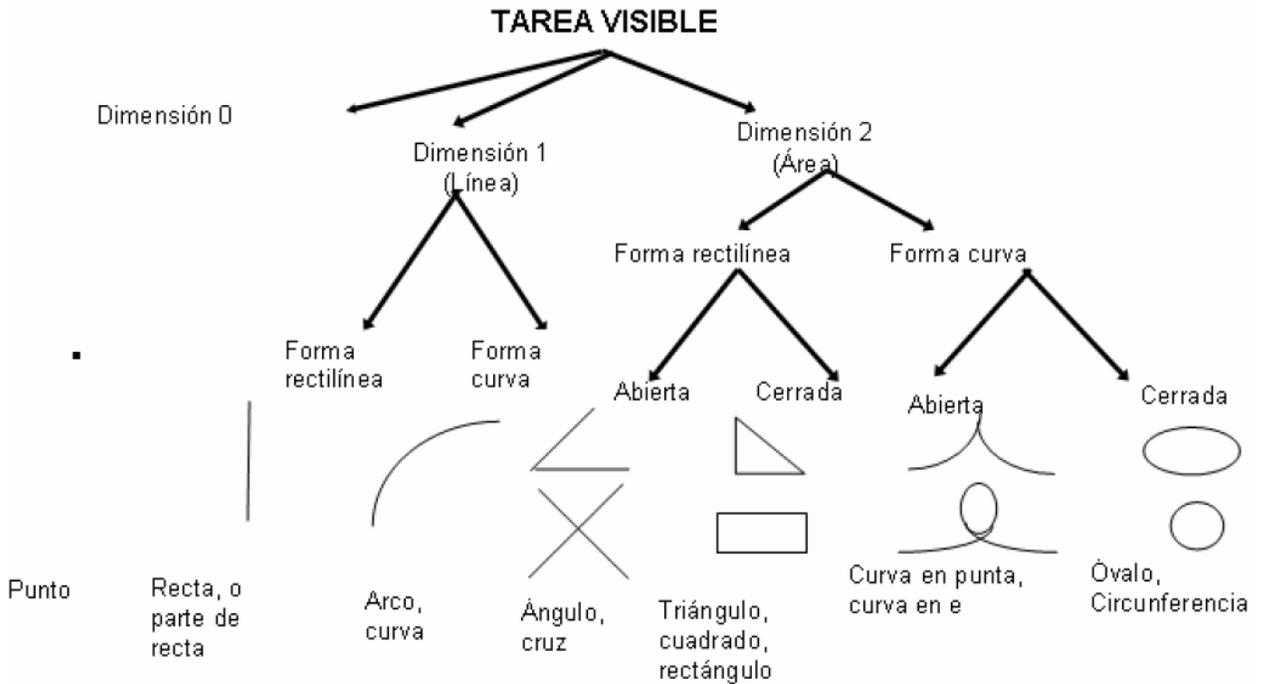


Figura 7. Marcas perceptibles

- Deben transformar las representaciones teniendo en cuenta unas reglas propias del sistema que permitan la creación de otras representaciones al interior del mismo sistema.
- Transformar las representaciones dadas en un sistema de representación en otro sistema, sintetizando es convertir las representaciones dadas en un sistema de representación en representaciones de otro sistema de registro, la conversión es independiente al tratamiento figural (Duval, 1999, p. 40).

Se presenta las siguientes imágenes con el objeto de mostrar lo que implica una transformación de los objetos geométricos y los procesos de conversión y tratamiento



Figura 8. Transformación de la figura inicial

*Autoría propia*

En la figura anterior podemos apreciar como una figura inicial puede cambiar de representación semiótica de tipo figural sin perder el área de la zona sombreada pero su contorno global si cambio.

En el evento que se sombrea la misma figura denotada con la letra (A) de la “Figura 7” como se muestra a continuación genera nueva aprehensiones en relación al área sombreada (con gris y gris claro) que puede llevar al estudiante a realizar algunas conclusiones desde lo aditivo el conteo de unidades en  $M^2$  una operación de tipo multiplicativo de número de elementos de la fila por el número de elementos de la columna y este análisis podría desembocar en la siguiente figura y determinar por intuición que el área del triángulo de color rojo es la mitad del área de la figura A como se ilustra a continuación la transformación del contorno global de la figura.

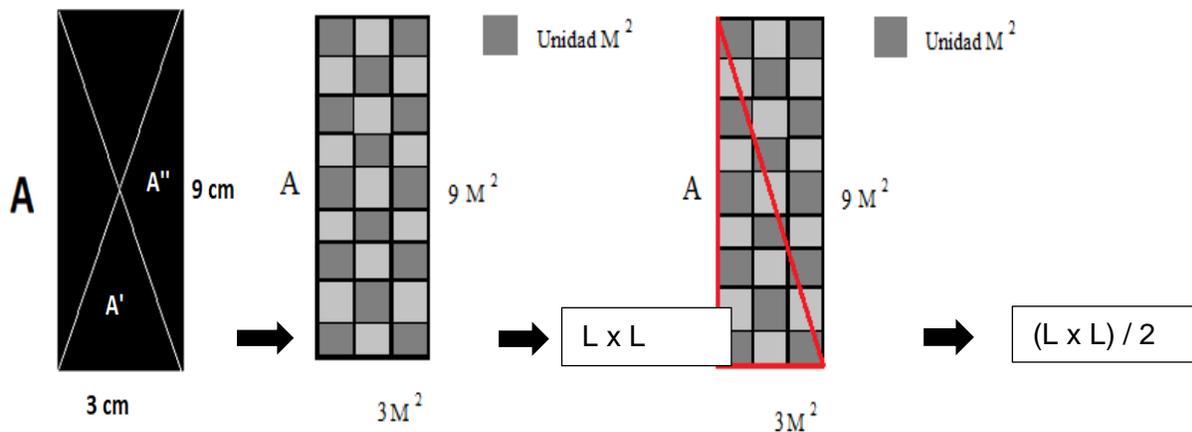
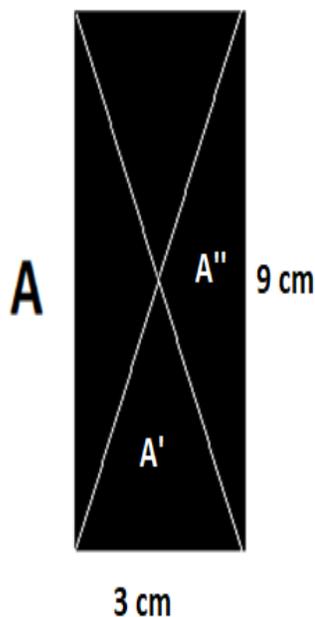


Figura 9. Tratamiento al interior del registro figural sin transformación del contorno global

*Figura de autoría propia*

Se consideran las medidas del rectángulo designado con la letra (A) se puede realizar diferentes tratamientos en registro numérico para verificar el área:



El área total podría encontrarse de las siguientes formas

$$\text{Área total } L \times L \rightarrow 3 \text{ cm} \times 9 \text{ cm} = 27 \text{ cm}^2$$

Suma de áreas parciales: Área de A' + Área de A''

$$\text{Área de un triángulo} = b \times h$$

2

$$\text{Área de un triángulo} = \frac{1}{2}(bh)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}(bh)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}(b)(h)$$

$$\text{Área } A' = \frac{1}{2}(3 \text{ cm})(4.5 \text{ cm})$$

$$\text{Área } A'' = \frac{1}{2}(9 \text{ cm})(1.5 \text{ cm})$$

$$\text{Área } A' + \text{Área } A'' = 13.5 \text{ cm}^2$$

Área de A' más Área de A'' equivale a la mitad de la figura y el estudiante puede duplicar el valor para hallar el área total que es el valor solicitado.

Figura 10. Tratamiento numérico para hallar el área

## 2.3 La visualización

La visualización es uno de los actos más complejos para el ser humano y en geometría se requiere poner en juego la coordinación de dos registros semióticos que presentan diferentes características como lo son: *El registro en lengua natural y el registro figural* Duval (2005) considera que el primer registro se utiliza para enunciar las propiedades y el segundo para representar el espacio.

En la escuela se favorece en ocasiones uno de los dos registros lo cual no permite que se generen verdaderos procesos de visualización y en concordancia Duval (2005) afirma que “las dificultades de aprendizaje proceden en primer lugar de que estos dos registros se utilizan de manera a menudo contraria a su funcionamiento cognoscitivo normal fuera de las matemáticas”

Duval (2005) afirma que existen dos formas de ver en geometría “Se distingue una manera de ver que funciona de manera icónica y una manera de ver que funciona de manera no icónica. La visualización no icónica implica que se deconstruya las formas ya visualmente reconocidas” este tema sobre la deconstrucción se ampliará en las p.40 y 41.

Es de aclarar que en este proceso de indagación nos centraremos como marco de referencia en la visualización no icónica la cual permite el razonamiento en geometría. Es relevante dentro de esta indagación mostrar las 4 entradas que analiza Duval (2005) a cerca de las formas de ver en geometría a través de la tabla 3

	<b>BOTÁNICO</b>	<b>TOPÓGRAFO geómetra</b>	<b>CONSTRUCTOR</b>	<b>INVENTOR-Manual</b>
<b>1. Tipo de operación sobre FORMAS VISUALES, requeridas por la actividad propuesta</b>	Reconocer formas a partir de calidades visuales de un contorno: UNA forma particular es privilegiada como TÍPICA	Medir los bordes de una superficie: sobre un TERRENO o sobre un DIBUJO (variación de escala de tamaño y en consecuencia de procedimiento de medida)	Dividir una forma en trazos constructibles con ayuda de un instrumento Es necesario (a menudo) pasar por TRAZADOS AUXILIARES que no pertenecen a la figura "final".	Transformar las formas unas en otras. Es necesario añadir TRAZOS REORGANIZADORES en la figura final para iniciar estas transformaciones.
<b>2. Cómo se movilizan las PROPIEDADES GEOMÉTRICAS con relación a este tipo de operación</b>	No hay vínculos entre las distintas propiedades (no hay definición matemática posible)	Las propiedades son criterios de elección para las medidas pendientes. Sólo son útiles si refieren a una fórmula por la que se permite un cálculo	Como dificultades de un orden de construcción. Algunas propiedades son obtenidas por una única operación de trazo, las otras exigen varias operaciones	Implícitamente por devolución a una red más compleja (una trama de rectas para la geometría plana o una trama de intersecciones de planos...) que la figura inicial

Tabla 3 Clasificación de las maneras de ver en función del papel de las figuras en las actividades geométricas propuestas a los alumnos tomado de Duval (200, p. 5)

De estas cuatro formas de ver se rescatan elementos importantes para esta indagación y el proceso de visualización como lo es la utilización de trazos auxiliares, trazos reorganizadores y una quinta entada que es la más importante la deconstrucción de las formas a través de procesos mereológicos que se ampliaron más adelante en este trabajo de indagación.

A continuación, se da otro punto de vista sobre la visualización para lo cual es necesario reconocer que no es lo mismo ver y visualizar, puesto que ver se entiende como una propiedad fisiológica, y la visualización es un razonamiento cognoscitivo, inherente al ser

humano, que es propio al entorno cultural del individuo, Marmolejo (2007) lo explica en su tesis de maestría

La visualización, claramente, es la habilidad de representar, construir, generar, instruir, certificar y razonar sobre información visual, no sólo es relevante en sí misma, sino también por la clase de técnicas mentales que actúa en el acto, que son ineludibles y se pueden traer a otras áreas de las matemáticas. Las representaciones visuales favorecen a la organización de la información de modo esquemática y es un componente importante de globalización, siendo conjuntamente un elemento que guía el progreso analítico de una ruta a la comprensión de situaciones matemáticas (Marmolejo, 2007).

## 2.4 Registro Figural

Comprende figuras, marcas, bosquejos, puntos, líneas, esquemas, los cuales propenden incorporar el objeto del conocimiento sin tener en cuenta las características y cualidades de los elementos. Con respecto a los registros figurales Duval (1999), afirma que se clasifican en dos grupos según conserven las propiedades inherentes al objeto que representan: *Las representaciones analógicas como las imágenes y las no-analógicas como la lengua natural*. Duval (1999) hace la distinción para fijar la atención sobre la variedad y diversidad de los registros de representación.

Los registros se diferencian también por el sistema de reglas que autoriza su asociación y por el número de dimensiones en que se puede dar esta asociación, estas dos últimas diferenciaciones son importantes, pues da soporte a toda la reflexividad y fuerza a una diversidad de registros: no solo la posibilidad de tratamientos equivalentes con otros menores si se efectúa un cambio de registro, sino también la complementariedad de los tratamientos. A continuación, se muestra un ejemplo de registro figural.

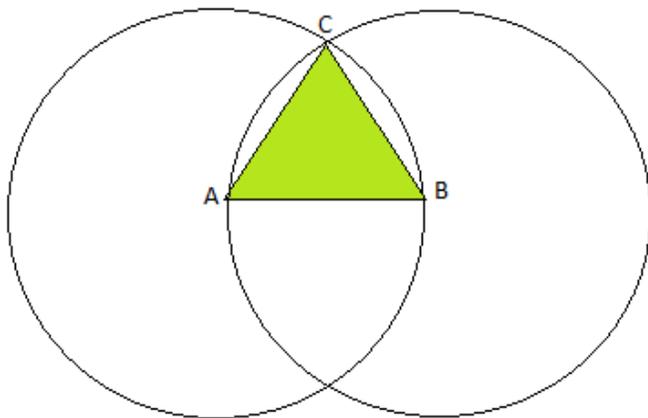


Figura 11. Representación figural de un triángulo equilátero

Imagen basada del sitio web: <https://www.researchgate.net>

## 2.5 Los registros semióticos y la importancia de la coordinación entre ellos

En esta indagación es muy importante tener claridad sobre los registros semióticos y su articulación.

“La coordinación de los registros radica en la movilización y la articulación inmediata de los registros de representación semiótica y es un elemento primordial la discriminación de las unidades significantes a poner en correspondencia en cada registro” (Duval, 1999).

Se hace necesario aclarar, que la articulación entre las representaciones que provienen de los sistemas semióticos no es espontánea, no es una capacidad inherente al estudiante ni mucho menos es autónoma, y esta coordinación de registros no se genera a través de enseñanzas tradicionales en la escuela.

## 2.6 ¿Qué es la aprehensión perceptual?

La aprehensión es aquella habilidad que permite capturar la figura de primera vista y de inmediato reconocer subfiguras que básicamente no concuerdan con las unidades figurales solicitadas para la creación de la figura. El tratamiento cognitivo es instintivo e instantáneo y la figura percibida puede ser distinta de la figura significativa para el tratamiento matemático.

Su trabajo de la epistemológica es la identificación de formas en un espacio n-dimensional, en la escuela básica será la identificación de formas en dimensiones D1, D2 o D3 (Galvis, 2017).

En un registro figural, las unidades figurales D2 son separadas, su identificación no posee dificultad, no ocurre de forma similar si están presentes en una configuración. En las siguientes figuras 12, 13 y 14 se muestra una configuración de unidades integradas y como sería la posible visualización por parte de los estudiantes.

¿Cuántos cuadrados puedes observar en la siguiente figura?

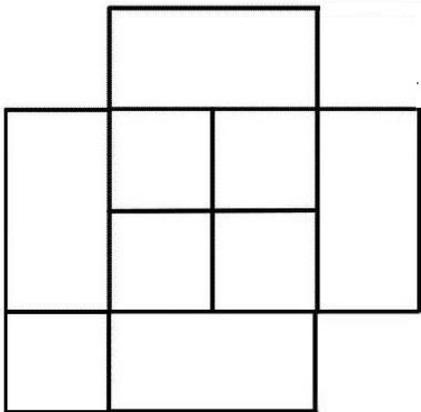


Figura 12. Aprehensión perceptual

Procedimiento: a partir de diferentes aprehensiones figurales como subdivisión de la figura se identifica con trazos de colores las diferentes subfiguras que se identifican al interior de la figura a continuación, se muestra un posible procedimiento a través de figuras.

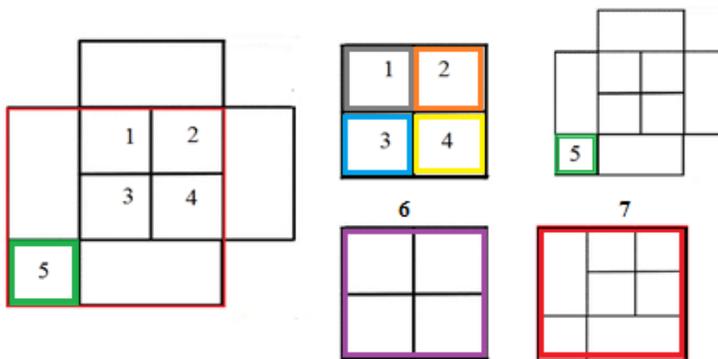


Figura 13. Procedimiento aprehensión perceptual

De entrada, es posible que un estudiante solo observe los cuadrados designados con los números 1,2,3,4,5 y no pueda observar el cuadrado número 6 debido a dificultades con la aprehensión perceptual o inclusive otro estudiante puede observar que las anteriores no son las únicas figuras de forma cuadrada como se muestra a continuación:

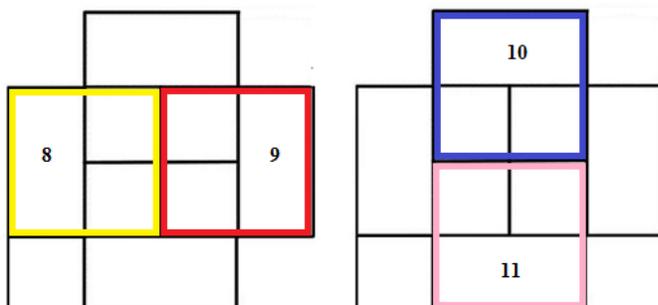


Figura 14. Complemento aprehensión perceptual

*Figura de autoría propia*

Lo anterior como ejemplo de las complejidades en la visualización que pueden subyacer en cuanto a la apropiación o conocimiento de las aprehensiones perceptuales por parte de los estudiantes. Es necesario aclarar que las aprehensiones deben ser objeto de enseñanza, es decir es natural que si no se les ha enseñado a los estudiantes estas aprehensiones no logran de forma espontánea a reconocer los otros cuadrados.

### 2.6.1 ¿qué es La aprehensión operatoria?

La aprehensión operatoria de una figura constituye todas las posibles modificaciones en la figura. Los tratamientos ligados a este modo de aprehensión son:

- Las transformaciones ópticas de ampliación, reducción o deformación de la figura.

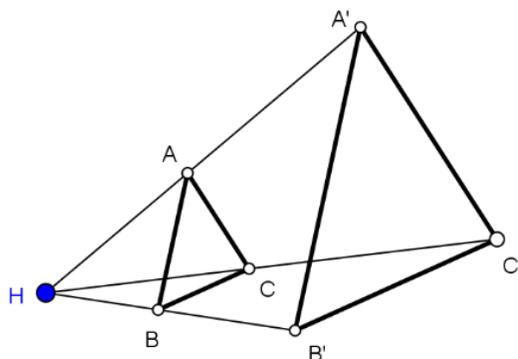


Figura 15. Ampliación, reducción o deformación

Imagen tomada de la web: <https://dibarqum.blogspot.com>

- Las transformaciones posicionales de desplazamiento o de giro. Estas reconfiguraciones son realizadas al interior del registro figural, alcanzando sólo las leyes y parámetros de organizacionales de las partes de la figura y por lo consiguiente no demandan del conocimiento matemático, requiere de la utilización de instrumentos de construcción Duval (1999).

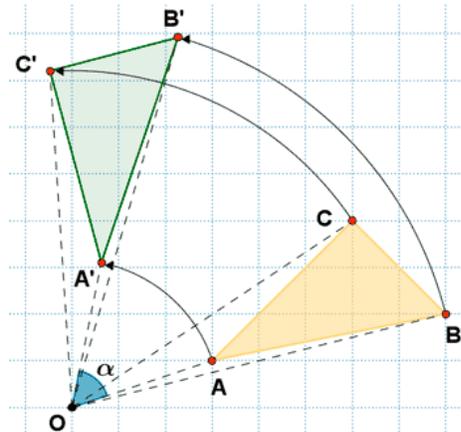


Figura 16. Rotación de una figura

Tomado de la web: <http://calculo.cc>

Las transformaciones de tipo mereológicas, que radican en partir una figura inicial para reconfigurarla en otra figura final de contorno global diferente se representan a continuación en la figura 17.

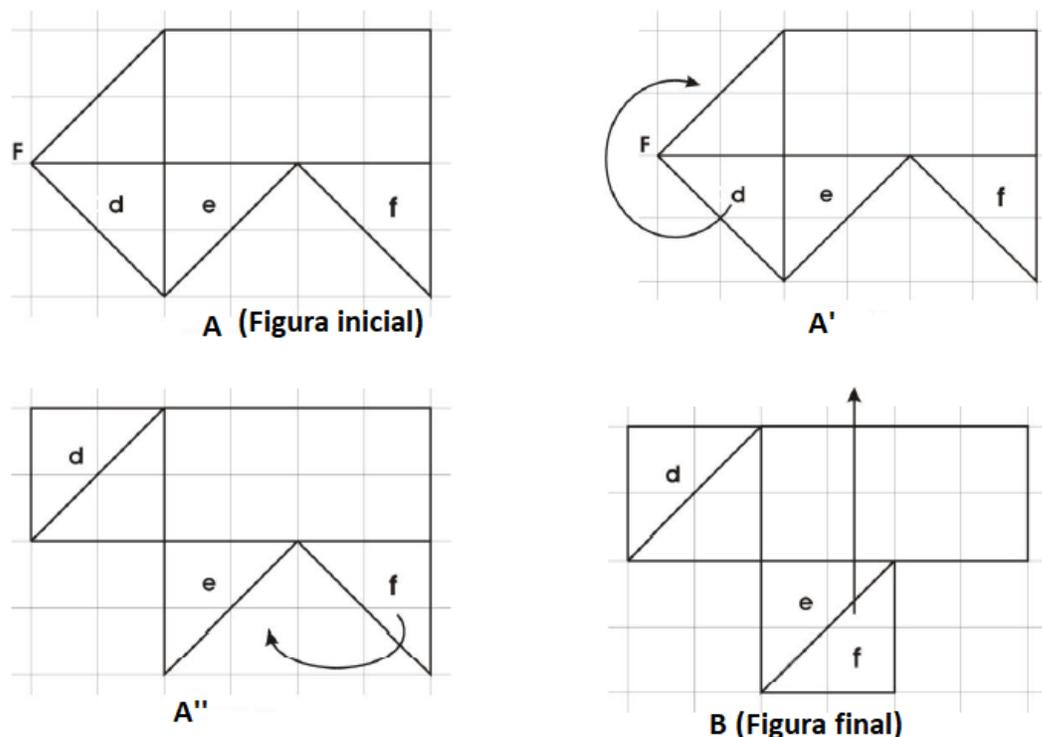


Figura 17. Aprehensión operatoria. Tomado de Marmolejo (2007)

La solución de este enunciado de problema pone en juego diferentes tareas, en parte, la comparación áreas y en segundo parte la deconstrucción dimensional de las formas, además acciones cognitivas que se movilizan. “La respuesta para resolverlo no es evidente, podríamos decir que es a partir de las modificaciones que se producen en una figura por la aplicación de una operación cognitiva determinada que se generan ideas, procesos y posibilidades” (Galvis, 2017), que admiten mostrarse conforme a los tratamientos geométricos que conviene aplicar para solucionar la tarea. Son ellas, las operaciones cognitivas, las que constituyen las creaciones heurísticas de las figuras (Galvis, 2017, p.31).

## 2.7 Importancia del registro en lengua natural y el figural en el estudio de la geometría.

El registro de la lengua natural permite la aprehensión de las relaciones geométricas en articulación con el registro figural. “El registro de lengua natural, con elementos de carácter especializado, propia del tipo de matemática específica al contexto de enunciación cuyo fin es la movilización de conocimiento matemático

sobre el cual se trabaja. Es a través de la lengua natural que se puede enunciar objetos, relaciones, operaciones y propiedades propios del marco teórico que caracteriza la actividad matemática a movilizar” (Pontón, 2008 p.84).

En este sentido Pontón, (2008), dice que la lengua natural tiene un status privilegiado entre el conjunto de registros de representación semióticos posibles, y que es la organización semiótica por excelencia.

La geometría no ajena a dicha naturaleza, siendo esta un producto de relaciones existentes entre unos elementos semióticos, unas formas y una síntesis que dirigen su formación y transformación. En esta vía, se adopta la idea de que los objetos matemáticos y los conceptos se constituyen a través de diferentes representaciones, donde la lengua natural permite la enunciación de propiedades que hace posible la significación y la elaboración de conocimiento geométricos. Es necesario afirmar que la complejidad de la didáctica de la geometría está en pensar los procesos que determinan las vías apofánicas para llevar a cabo funciones y operaciones en el registro de la lengua natural, junto con una efectiva enseñanza de los procesos de conversión del registro de partida al registro de llegada. (Pontón, 2008 p.85).

Se concluye que la coordinación entre el registro en lengua natural y el figural deben coexistir para generar aprendizajes significativos dentro de la teoría semiótico cognitiva lingüística para alcanzar avances significativos dentro del campo de la enseñanza-aprendizaje de la geometría y estos dos registros se evidenciarán en el marco de la indagación, la metodología y conclusiones del presente informe final.

## **2.8 El área como magnitud y como medida.**

Cuando nos referimos al área de las figuras geométricas de dimensión  $D_2$ , es preciso marcar un puntual contraste entre dos maneras de pensarse el objeto métrico y que demandan tratamientos de origen distintos: el área como magnitud y el área como medida. El hecho de establecer la equivalencia entre las áreas de dos figuras involucra verificar que las superficies ocupan regiones del plano similares. Pero, al trabajar el área de una región geométrica suscita estrategias diferentes. En primer lugar, al tratar el área como magnitud, la comparación directa entre las regiones de las figuras se realiza por superposición o por la transformación de una figura en la otra de contorno global diferente

se constituye en la única estrategia posible. En segundo lugar, al asumir el área como medida, la escogencia de una unidad de superficie, y su posterior recubrimiento sobre las superficies de las figuras a comparar, permite la asignación de un número real positivo a la superficie de cada una de las figuras. Así, el cotejo entre las áreas de las dos figuras no es por superposición o transformación, sino que se realiza a partir de la igualdad entre las cantidades asociados a cada una de ellas. Es evidente por consiguiente que entender el área de una u otra forma produce estrategias diferentes (Galvis, 2017, p.32).

Que no siempre sea posible comparar dos figuras entre sí de forma directa, hace de la segunda forma de concebir el área, la de mayor tratamiento y predilección en el aula escolar. En consecuencia, el área como magnitud, sin la mediación de una asignación numérica, tiende a ser desplazada como objeto de reflexión en los currículos escolares. Basta con observar cualquier clase de matemáticas o buscar en algunos capítulos de los textos escolares recientes, para darnos cuenta de lo anterior.

De esta manera, la construcción del área, desde los primeros años escolares, tiene su punto de partida en la replicación de una unidad de medida sobre la superficie de una figura a la cual se desea calcular su área. Por consiguiente, la reflexión pasa de forma cuasi-inmediata al mundo de lo numérico, negándose, de forma muy dramática, cualquier tipo de reflexión de orden geométrico. Si bien replicar una unidad de medida sobre la superficie de una figura conlleva a la aplicación de rotaciones, traslaciones, reflexiones y reconfiguraciones tanto en la figura que representa la unidad, como sobre la que se halla el área, las prácticas cotidianas lejos se encuentran de exigir en los estudiantes la movilización de este tipo de racionalidades. Más aún, al pasar de la replicación de unidades no estándar a la de unidades estándar, por ejemplo, el centímetro cuadrado, la acción de calcular el área se convierte de forma exclusiva en una actividad donde prima el conteo, uno a uno, de los cuadrados (centímetros cuadrados) en que ha sido, o debe ser, dividida la figura. Centrar el estudio del área de figuras geométricas bidimensionales, de manera exclusiva, en racionalidades de orden numérico; hacer del conteo, uno a uno, la primera, e inicialmente la única, estrategia para hallar el área de una figura y, posteriormente, introducir la aplicación de fórmulas como una nueva estrategia; no basta para asegurar una verdadera movilización de pensamiento métrico.

Por el contrario, y en un sentido diferente, considero que: 1) al privilegiar al área como magnitud, alejándonos, en el inicio de su aprendizaje, de lo numérico y, en especial de la nefasta influencia del conteo uno a uno. Y 2) asumir la comparación directa entre las superficies de las figuras (en consecuencia, la transformación de una figura en otra) como

la primera y más potente estrategia para establecer relaciones de orden entre figuras a partir de sus cantidades de superficie; constituyen las bases sobre las cuales construir, en los primeros ciclos de la Educación Básica, el aprendizaje del área de figuras geométricas bidimensionales.

Es en este sentido, que, en un ambiente de comparación de áreas, la movilización y explicitación de los tratamientos figurales y formas de ver permitidos por el registro semiótico de las figuras se constituye, no solo en la principal y más potente opción para cargar de sentido el aprendizaje del área e introducir a nuestros estudiantes en el desarrollo de pensamiento métrico; sino que, además, la visualización en las figuras geométricas bidimensionales, tras las carencias de tiempos escolares, adquiere en los primeros ciclos de la educación básica verdaderos y muy fructíferos lugares de aprendizaje.

Desconocer lo anterior, conlleva a ignorar en gran medida la complejidad y las enormes posibilidades que subyacen a la comprensión del área a partir de las posibilidades heurísticas que permite el registro semiótico de las figuras.

### **2.8.1 Relación parte todo.**

Al momento de hacer actividades que tienen la intención de enseñar los tratamientos del registro figural para comenzar a introducirse en el tema de las relaciones fraccionarias, se busca la réplica de una unidad de medida (unidad geométrica) en la región de una figura, teniendo una entrada al registro numérico (A cabe tantas veces en B...ó ...es  $n/a$  de A en B), y además se espera generar la aplicación de movimientos mereológicas como: traslaciones, rotaciones, reflexiones deconstrucciones y “reconfiguraciones tanto en la figura que representa la unidad, como se observa en el siguiente tratamiento de tipo figural figura 18, así como también sobre la figura en que se está realizando la comparación, es decir que se busca potencializar otras reflexiones de topo geométrico propio de este registro, dejando de lado el iconismo (Pontón, 2005 p.106 ).

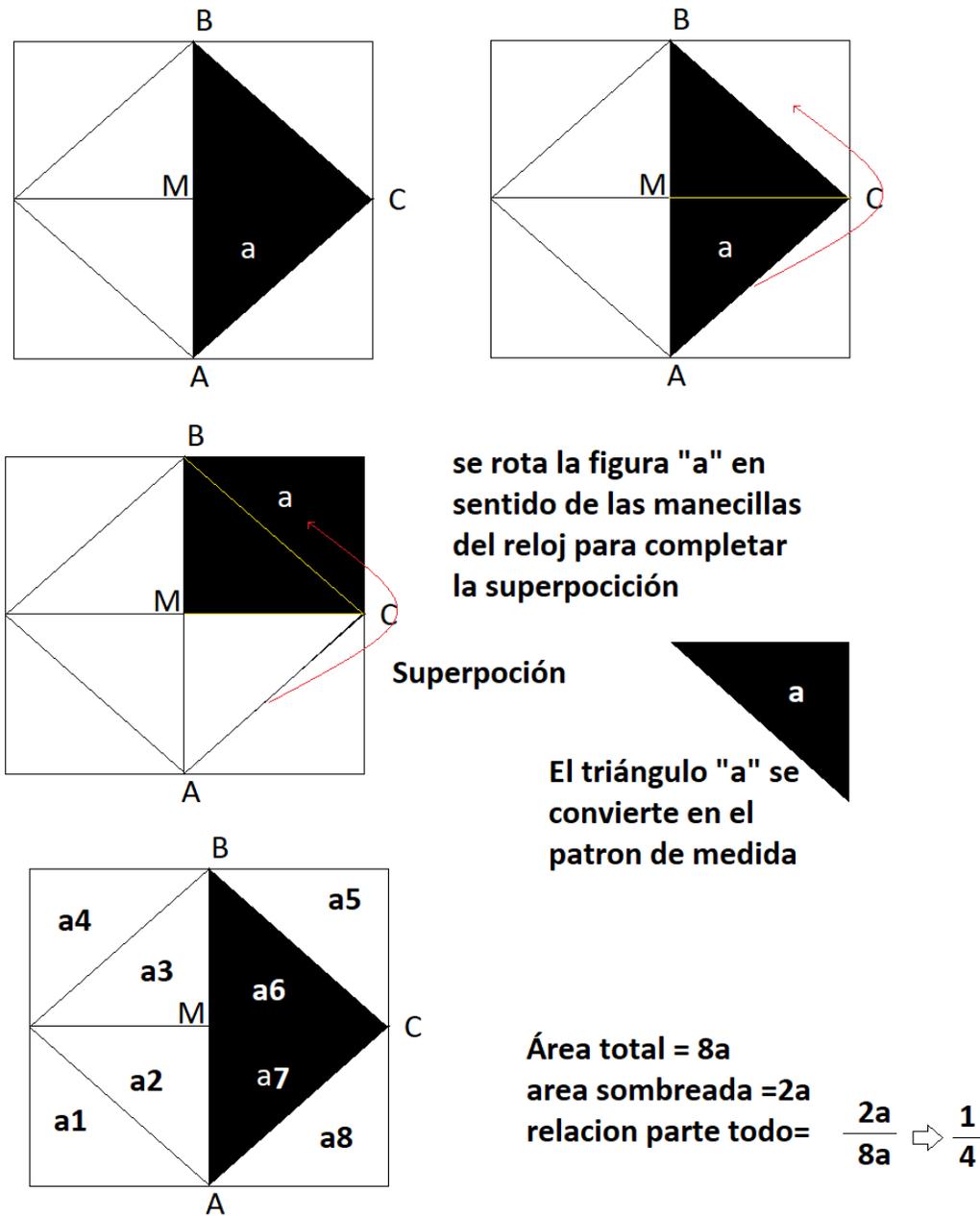


Figura 18. Relación parte todo

Figura de autoría propia

Es en este sentido, que, en un ambiente de comparación de áreas de superficies dadas, la movilización y explicitación de los tratamientos figurales y formas de ver permitidos por el registro semiótico de las figuras, se constituye en un registro de partida potente para la conversión al registro numérico fraccionario bajo la relación parte-todo, cargando de

sentido el aprendizaje de la unidad, así como el de las relaciones numéricas que se pueden establecer entre las partes. Desconocer lo anterior, conlleva a ignorar en gran medida la complejidad y las enormes posibilidades que subyacen a la comprensión de la relación parte-todo en la comparación de áreas, a partir de las posibilidades heurísticas que permite el registro semiótico de las figuras. De esta manera, la fracción puede ser significada como una relación cuantitativa entre la parte y el todo. Esto implica que las situaciones retomen el proceso de medir, y que la fracción debe ser el resultado de comparar los resultados de dicha medición. Por lo tanto, la referencia a la magnitud sobre la que se realiza la cuantificación es fundamental; también lo es tomar en cuenta los aspectos epistemológicos y psicológicos relacionados con el tipo de unidad y de magnitud. (Pontón, 2007 p.107).

En una apuesta de enseñanza de relaciones fraccionarias con base en el área de figuras desde una perspectiva semiótica del aprendizaje de las matemáticas, permite la construcción de este objeto de estudio involucrando actividades que exijan la comparación cualitativa entre dos o más figuras de contorno global diferente (con igual o diferente área) en donde sea necesario sobreponer una figura en la otra y aplicar transformaciones de unas figuras en otras de contorno global diferente e igual área; esto, utilizando unidades también irregulares, donde sea necesario transformar la figura y la unidad en nuevas figuras y de esta manera poder asegurar el recubrimiento exigido (Pontón, 2007 p.107).

### **2.8.2 Relación geométrica de equivalencia.**

La relación matemática de partida será, ser igual a, pero esta se puede presentar de varias formas, por ejemplo, igualdad en la forma, igualdad en magnitud y forma, solo igual en magnitud e igualdad en su descomponibilidad. Se identifican como necesarias para la formulación de aprehensión discursiva en la producción de la solución a las situaciones que se presentaran a los estudiantes

### **2.8.3 Ser igual en forma.**

Dos o más figuras son iguales en sus formas en el momento en que tienen sus lados congruentes y sus ángulos iguales, de tal forma que si se superponen pueden coincidir o no según su tamaño como se muestra a continuación en la figura 19.

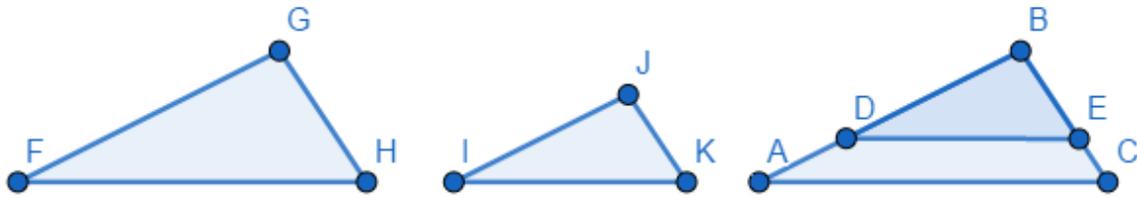


Figura 19. Igualdad de las formas

“se refiere a la semejanza, cuando la aprehensión perceptual moviliza distinción entre diferentes cuadrados o triángulos del registro de la relación pitagórica” (Galvis, 2017).

#### 2.8.4 Ser igual en magnitud y forma.

En matemáticas, dos figuras geométricas son congruentes si tienen las mismas dimensiones y la misma forma sin importar su posición u orientación, es decir, si existe una isometría que los relaciona: una transformación que puede ser de traslación, rotación y/o reflexión. Las partes relacionadas entre las figuras congruentes se llaman homólogas o correspondientes como se muestra en la figura 20

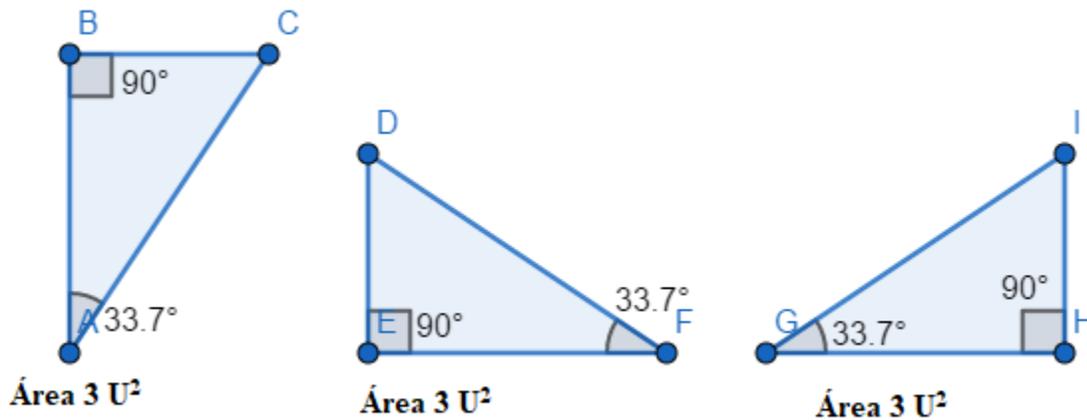


Figura 20. Igualdad en magnitud y forma

## 2.9 Relación aditiva

La relación aditiva califica como aquello que se tiene o que se puede agregar o incorporar a otra cosa, en nuestro caso la adición de figuras geométricas como se muestra en la figura 19

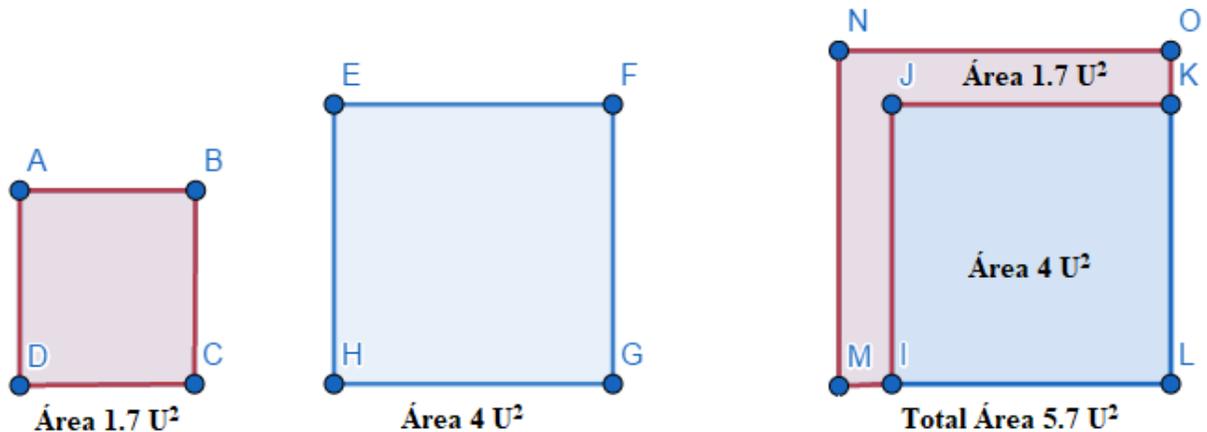


Figura 21. Relación aditiva

En la figura 19 se ilustra una relación ternaria de adición entre áreas de cuadrados y su magnitud, en el primer caso se considera una operación aditiva que, al ser aplicada a dos cuadrados, se dará origen a un tercer cuadrado.

En la figura 19 el tercer cuadrado que se formó representa la adición de áreas de los otros dos cuadrados.

### 2.9.1 El proceso de comparación de áreas.

Un mecanismo que es esencial en el diseño y organización de las SD, es el concepto de área, si bien las figuras planteadas disponen de figuras geométricas en dos dimensiones y es preciso identificar el contraste entre dos formas de pensar el objeto métrico y que demandan tratamientos de índole diferente, se puede asumir el área como una magnitud o también como una forma de medida, pues si se replica como unidad de medida sobre cualquier superficie de una figura se podría calcular su área, siempre que sea posible, este tipo de razonamiento conlleva a la aplicación de rotaciones, traslaciones, reflexiones y reconfiguraciones, igualmente en la figura que representa la unidad, como en la que se encuentra el área como se muestra en la figura 22

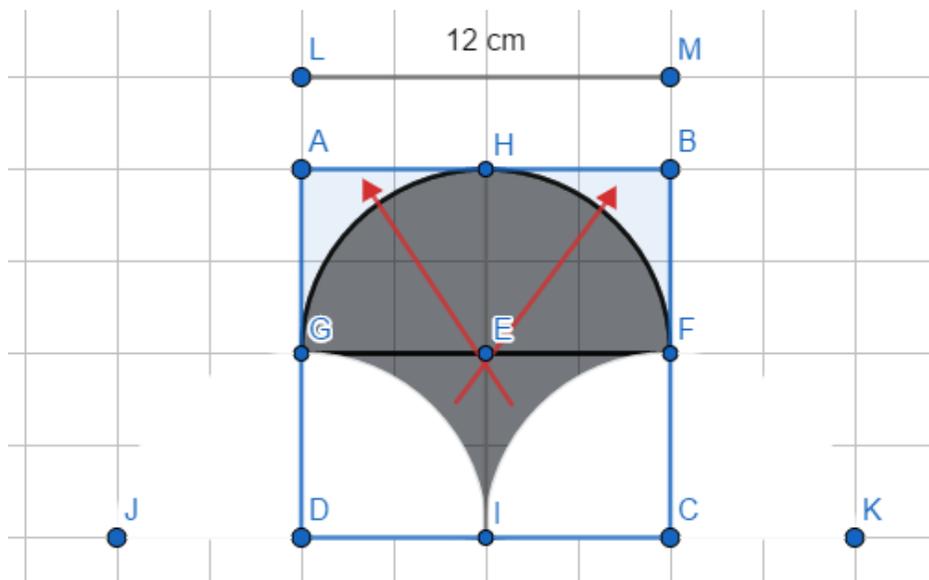


Figura 22. Comparación de áreas por superposición de las formas

El hecho de comparar y establecer igualdad entre las áreas de dos o más figuras, implica verificar que sus superficies ocupan porciones del plano equivalentes. Pero, al asumir el área de una u otra manera suscita estrategias diferentes. Por un lado, al tratar el área como *magnitud*, la comparación directa entre las superficies de las figuras (sea por superposición o por la transformación de una figura en la otra) se constituye en la única estrategia posible. Por otro lado, al asumir el área como *medida*, la escogencia de una unidad de superficie, y su posterior recubrimiento sobre las superficies de las figuras a comparar, permite la asignación de un número real positivo a la superficie de cada una de las figuras. Así, la comparación entre las áreas de las dos figuras ya no se hace por superposición o transformación de una figura en la otra, sino que se establece a partir de la igualdad entre los números asociados a cada una de ellas (Marmolejo, 2007, p. 60).

Los registros figurales que se observan en el diseño de las SD admiten comparación de áreas, la movilización y producción de los tratamientos figurales y formas de ver en el registro semiótico de las figuras, son estas las variables que componen el eje central de la tarea. Éstos no solo son la principal y más potente, iniciativa para aumentar de sentido la

enseñanza-aprendizaje de la visualización y las aprehensiones en la construcción de Áreas de regiones sombreadas con estudiantes en el desarrollo de pensamiento geométrico.

## 2.10 Tratamientos heurísticos

Para ver en geometría se requiere de la deconstrucción dimensional de las formas, es decir que los estudiantes puedan reconfigurar y pasar de una figura en dos dimensiones a una que este formada por líneas de dimensión uno y a su vez las de dimensión uno poderlas pasar a dimensión cero como se muestra a continuación.

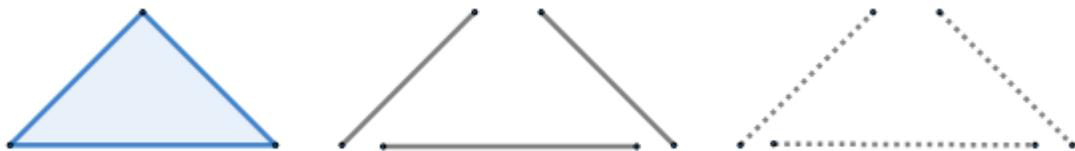


Figura 23. Deconstrucción dimensional de las formas

*Autoría propia*

Además de la deconstrucción dimensional para ver en geometría es relevante que los estudiantes tengan heurísticas como los procesos mereológicos que consisten en descomponer una figura en otra figura diferente, pero de igual área como si esta se compusiera de fichas de rompecabeza que se pueden reordenar y formar nuevas figuras que sean más sencillas para comprender magnitudes como el área de una región sombreada. Esta descomposición que permite razonar en geometría puede hacerse de tres formas, descomposición estrictamente homogénea, homogénea y heterogénea las cuales se explican a continuación y se procedió a ejemplificarse a través de figuras.

## 2.11 Descomposición estrictamente homogénea:

la descomposición se hace en unidades de la misma forma que la figura de partida.

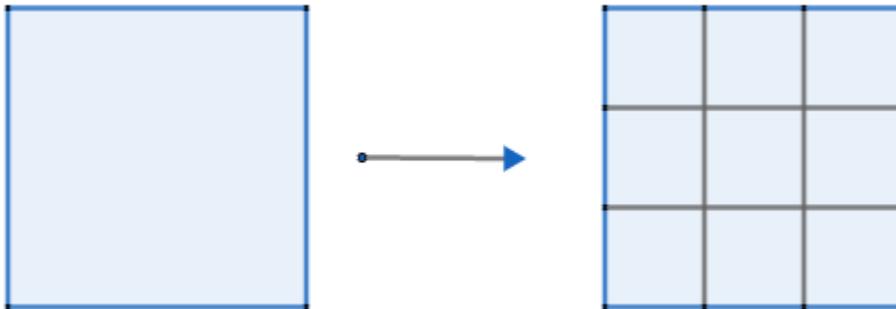


Figura 24. Descomposición estrictamente homogénea

*Autoría propia*

### 2.11.1 Descomposición de las figuras homogéneas.



Figura 25. Descomposición homogénea

*Autoría propia*

### 2.11.2 Descomposición de las figuras de forma heterogénea.

La deconstrucción por segmentación mereológica con reiteración no tiene correspondencia directa con el discurso matemático, y por eso permite la búsqueda meramente visual de una figura de inicio para descubrir las propiedades geométricas que se van a manejar para solucionar un situación problema planteado (Duval, 2016), en esta ocasión el uso de estas deconstrucción tuvieron una función primordial en las reacciones de los estudiantes a quienes se les aplicaron las situaciones, y fueron parte de su discurso explicativo en el acercamiento de la conceptualización de áreas sombreadas. un distinto tratamiento

heurístico que contribuye el modo de ver los registros figurales es la deconstrucción dimensional de las formas, ésta según Duval (2016) representa una revolución cognitiva para el ejercicio instintivo de la visualización icónica o no icónica. La deconstrucción dimensional de las formas es un cambio rápido de visualizar que va en la vía de la exploración perceptiva de las formas de una configuración y reconfiguración de un registro.

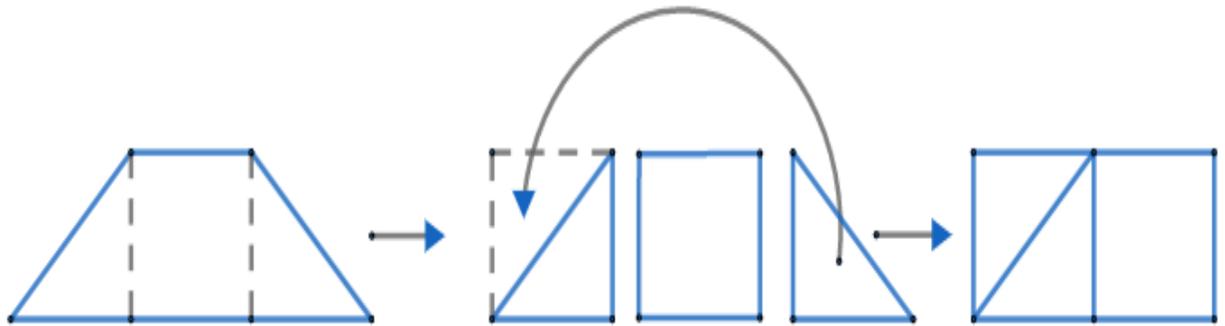


Figura 26. Descomposición Heterogénea

*Autoría propia*

## 2.12 Áreas de regiones sombreadas circulares.

A continuación, se muestra un esquema organizacional de la geometría plana de la cual nos interesó algunos elementos como: áreas de regiones, representaciones geométricas, el cálculo de áreas, descomposición y reconfiguración, además de las áreas de regiones circulares punto clave en este apartado.

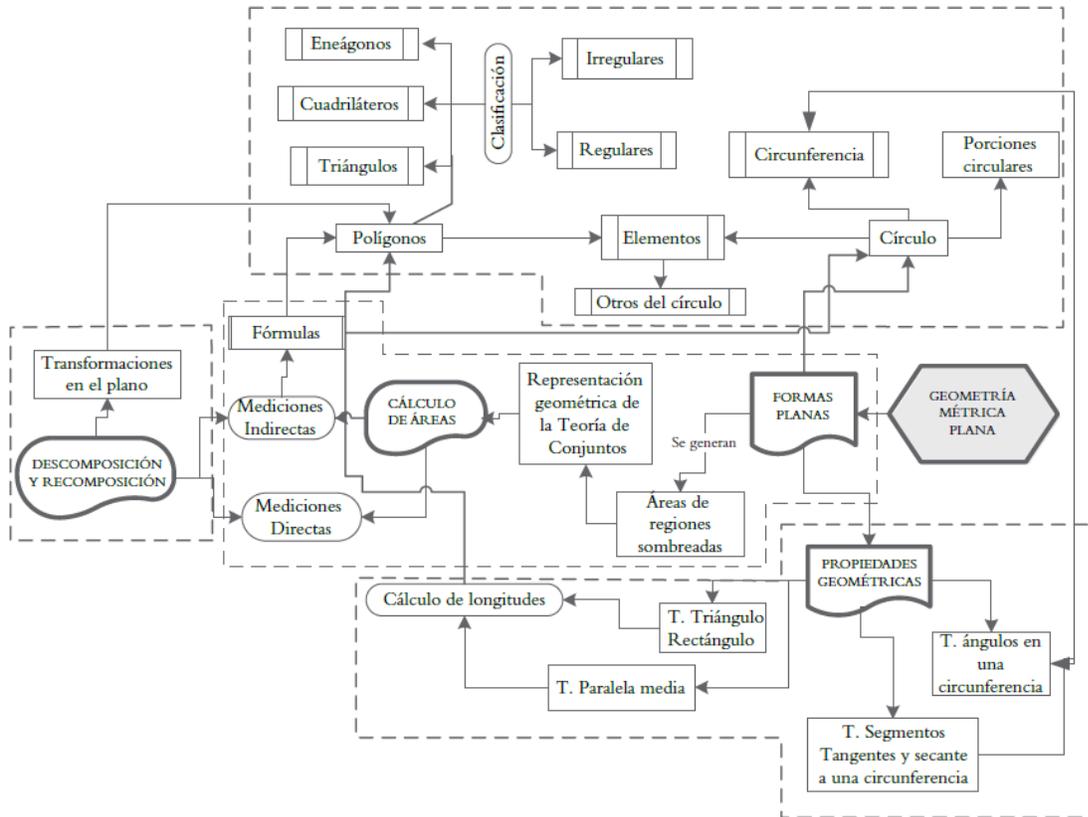


Figura 27. Mapa conceptual

Mapa conceptual de la estructura matemática en la que se ubica el tema, tomado de (BL Arenas, N Lizarazo, M Medina, JC Rubiano, (2016).

El anterior mapa conceptual muestra básicamente dos caminos de interés, señalados con líneas punteadas: (a) construcción de áreas de regiones sombreadas y (b) cálculo de áreas de regiones sombreadas “(métodos de cálculo directo por descomposición o descomposición y recomposición, y métodos de cálculo indirecto por medio de fórmulas de áreas y teoremas para hacer inferencia de otras medidas)” (BL Arenas, N Lizarazo, M Medina, JC Rubiano, 2016).

### 2.12.1 Sistemas de representación.

Identificar los sistemas de representación en las áreas sombreadas constituye un aspecto relevante en este trabajo desde el punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje del tema. Esta información le permite al docente ampliar el campo de acción en la planeación y ejecución de su quehacer en el aula. Al estudiante le puede resultar motivante y facilitarle los procesos de aprendizaje. Teniendo en cuenta la relación con la estructura conceptual,

los sistemas de representación utilizados en nuestro tema son los siguientes: numérico, simbólico, geométrico, verbal, pictórico y ejecutable (Arenas B. et al. 2016). Describimos brevemente estos sistemas de representación a continuación.

### 2.12.2 Sistema de representación simbólico.

El sistema de representación simbólico está conformado por fórmulas establecidas para representar superficies sombreadas y calcular áreas. En este sistema de representación, se utilizan números, letras y signos de operaciones, que permiten generar transformaciones sintácticas invariantes de una expresión (Arenas B. et al. 2016), como se detallará más adelante.

A continuación, presentamos algunos ejemplos.

$$A = l \times l$$

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

$$A = \pi r^2$$

$$A = \frac{n \times l \times a}{2}$$

$$A = \frac{\pi \times r \times a}{360^\circ} - A\Delta$$

### 2.12.3 Sistema de representación figural geométrico.

El sistema de representación figural es uno de los sistemas de mayor significación en la enseñanza de la geometría, y más aún área de regiones sombreadas. La mayoría de las situaciones de aplicación de áreas de regiones sombreadas se presenta en este sistema de representación articulado con el sistema representación en lengua natural y motiva la relación entre los sistemas de representación geométrico y simbólico, como mostramos en la siguiente figura 28.

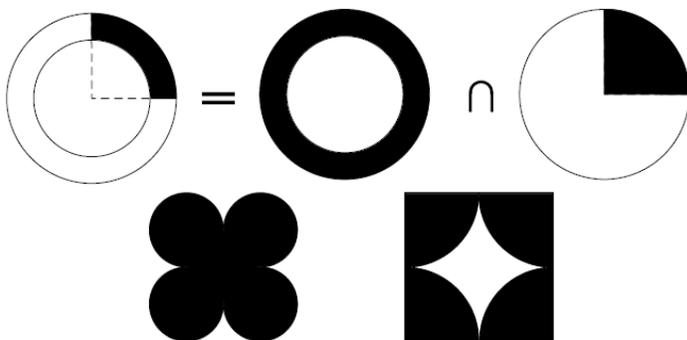


Figura 28. Sistemas de representación geométrico y simbólico

*Imagen tomada de (Arenas B. et al. 2016).*

#### 2.12.4 Transformaciones sintácticas variantes.

En nuestro tema, una transformación sintáctica variante se presenta cuando se pasa de un círculo que se encuentra inscrito en un cuadrado a un cuadrado inscrito en el círculo, con el correspondiente cambio en el área de la figura, como mostramos en la siguiente figura 29



Figura 29. Transformaciones sintácticas variantes

*Imagen tomada de (Arenas B. et al. 2016)*

### 2.12.5 Transformaciones sintácticas invariantes.

La transformación sintáctica invariante se presenta cuando el área sombreada no varía si el área está descompuesta o recompuesta, o el valor de  $\pi$  no cambia al reemplazar el valor del diámetro por dos veces el radio de la circunferencia o al escribir el valor en número irracional. Lo mismo sucede con las distintas fórmulas para el cálculo del área de un polígono regular: podemos intercambiar el producto del número de lados por el valor del lado con el perímetro de la figura sin que varíe el resultado, como lo mostramos en la siguiente figura 30 (Arenas B. et al. 2016).

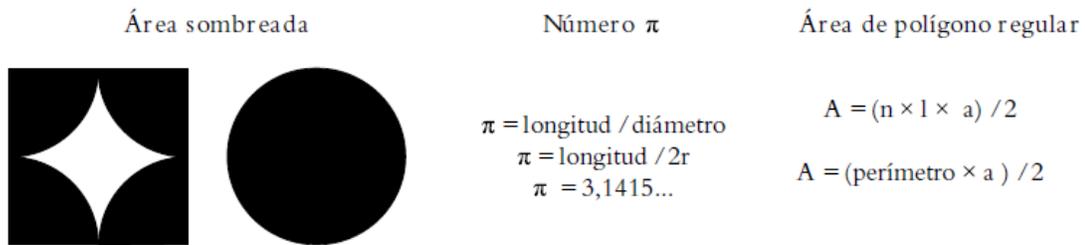


Figura 30. Transformaciones sintácticas invariantes

*Imagen tomada de (Arenas B. et al. 2016)*

Concluyo que la teoría mencionada en este apartado sirvió de pilar en el proceso indagativo que nos atañó y que fue pilar para dar respuesta a los objetivos que se plantearon y a la pregunta de indagación.

### 2.12.6 Resumen esquemático del marco teórico.

Se presenta el siguiente esquema con el fin de mostrar de forma global y ordenada la teoría trabajada en el marco teórico.

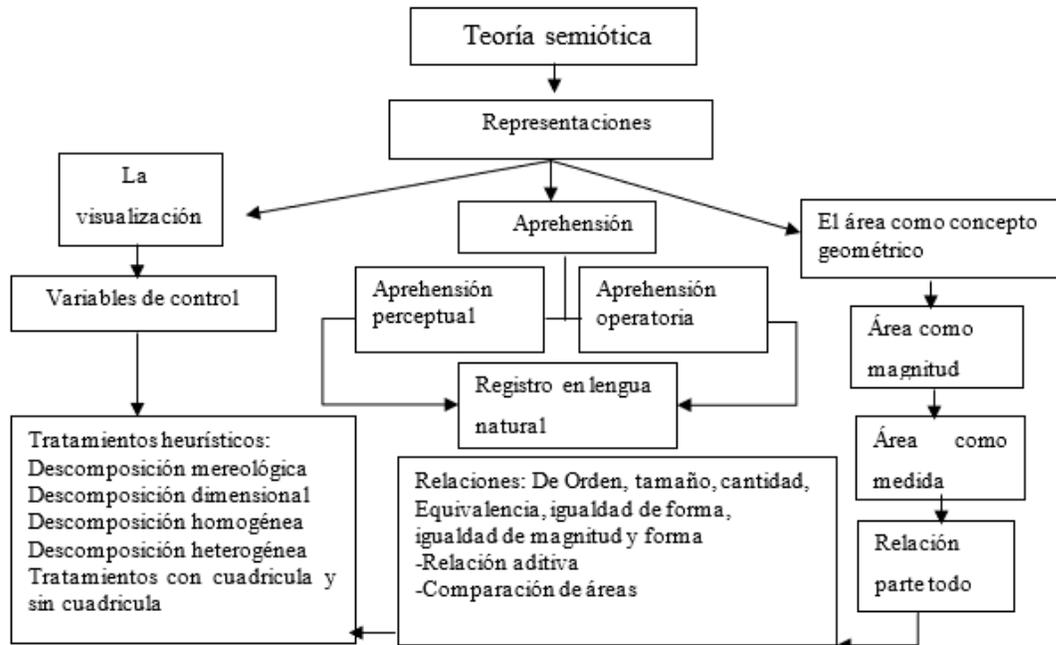


Figura 31. Resumen del marco teórico a través de esquema

*Esquema de autoría propia*

## **3. Análisis a priori de las situaciones didácticas**

Se presenta en un primer momento la descripción del diseño metodológico con las respectivas fases de indagación que fueron pilar en la construcción de la secuencia didáctica y en un segundo momento se presenta el análisis a priori de las tres secuencias didácticas desarrolladas con los estudiantes.

### **3.1 Diseño Metodológico**

Esta propuesta de indagación se inscribió en el enfoque cualitativo, y específicamente consideró algunas nociones de la metodología de la ingeniería didáctica trabajada por los investigadores Artigue M, Douady R, Moreno L (1995), la cual se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. La ingeniería didáctica tiene en cuenta los análisis a priori de los instrumentos que servirán de apoyo en la implementación de las secuencias didácticas es decir el análisis del diseño de las situaciones antes de ser aplicadas a los estudiantes y análisis a posteriori de las situaciones didácticas desarrolladas por los estudiantes y las heurísticas detectadas en la solución de las tareas Artigue M, Douady R, Moreno L (1995).

También se consideraron en esta indagación algunos elementos de los trabajos de Brousseau (1999, 2000), que acorde con la ingeniería didáctica trabaja la teoría de situaciones didácticas (TSD), la cual se fundamenta en el aprendizaje de los procesos de enseñanza-aprendizaje, que requiere de la observación y estudio didáctico adentro del aula. Por lo tanto, la teoría TSD de Brousseau plantea una sucesión de elementos que permiten el diseño e implementación de una cantidad de situaciones cuya intención principal en esta indagación, se centraliza en la tipificación de las formas de aprehensión

a partir la visualización, frente a registros figurales en cuanto al tema central “área de regiones sombreadas”. Es importante aclarar que en este trabajo de indagación solo se consideran elementos de estas dos metodologías que son tan complejas e importantes en el campo de la educación matemáticas.

En este sentido, esta indagación fundamenta su análisis en la Teoría Semiótica de Duval (1999) desde la cual se plantea el diseño de tres situaciones que varían los registros figurales, y con ellos los procesos de visualización y aprehensiones. Es por ello, que esta Indagación se apoya en su exploración teórica a partir de un punto de vista semiótico donde las formas de aprehensión en los registros figurales intermediados por tratamientos, conversiones y tipos de representación figural, Duval (1999).

El diseño metodológico de la Indagación se desarrollará en las siguientes fases.

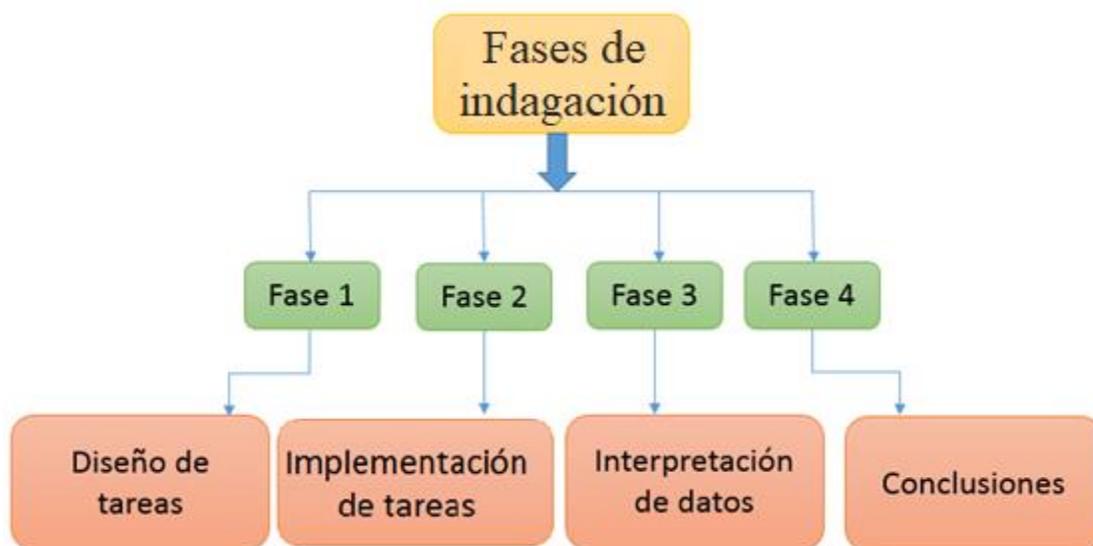


Figura 32. Fases de la Indagación

Esquema rediseñado de Galvis

Estas fases se presentan de forma general a continuación.

### 3.1.1 Fase 1. Diseño de tareas.

Las tareas se realizaron fundamentadas desde los elementos teóricos de los registros semióticos, recurriendo a “la enunciación y registros empleados para identificar tratamientos y conversión desde las formas de aprehensión que plantea” (Duval, 1999).

Se inicio con el diseño de una rejilla de análisis que permitió la formulación de 11 guías cada guía contiene 3 SD (situaciones didácticas), que a su vez contienen 20 tareas y 12 subtareas: SD1: 4 tareas y la tarea 1 estas dividida en dos puntos A y B; SD2: 4 tareas pero la tarea 2 está conformada de puntos A y B, finalmente la SD3: 12 tareas y además la tarea 3 está conformada por 8 subtareas; para un total entre las 3 situaciones didácticas de 29 tareas en general. Dicha rejilla permitió la visualización de las variables trabajadas en cada tarea y la correlación entre ellas como también los controles de las variables en tareas de deconstrucción homogénea, heterogénea con cuadrícula y sin cuadrícula considerando los planteamientos teóricos propuestos por Padilla (1992) y Marmolejo (2007). La recolección de la información se realizó por medio del análisis de las SD que se aplicaron y arrojaron, resultados y registros fotográficos de dicho proceso a continuación se muestra en el esquema 1 la organización de las situaciones didácticas.

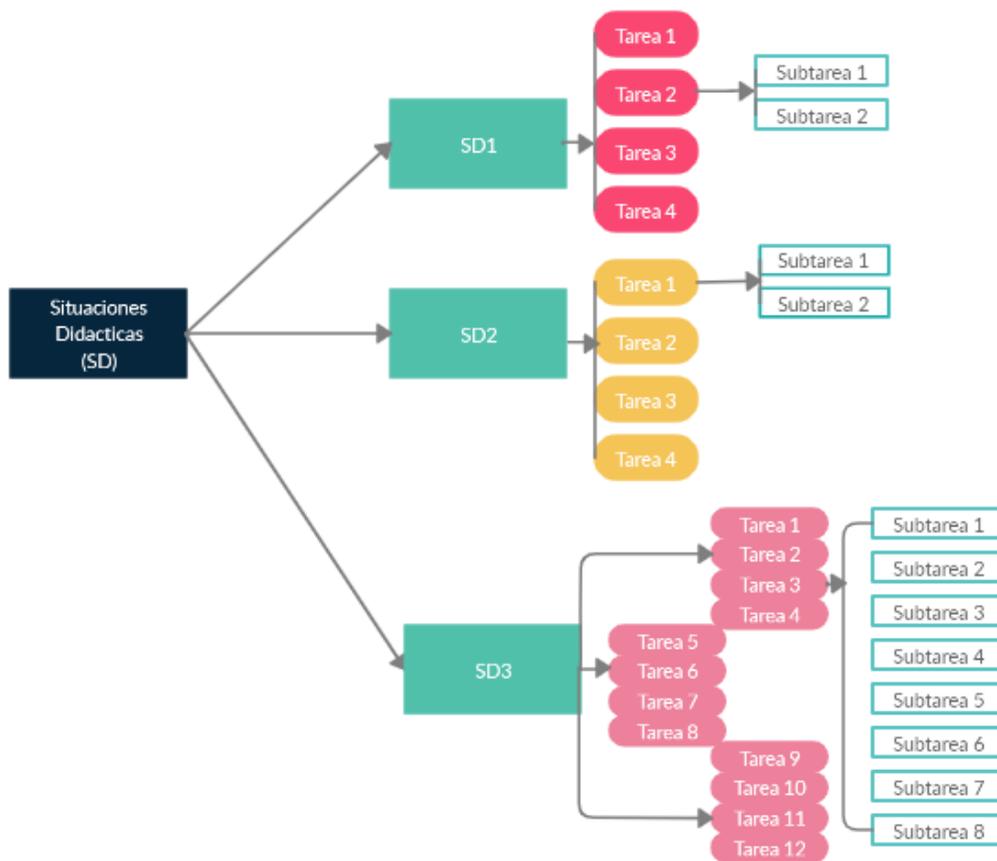


Figura 33 Esquema de árbol, Organización de las situaciones didácticas

### **3.1.2 Fase 2. Implementación de tareas.**

Después del diseño las tareas, fueron aplicadas a una población de 11 estudiantes del grado noveno en edades entre 14 y 16 años durante un mes utilizando 2 horas semanales en las clases de Geometría al interior de la Institución Educativa San José ubicada en el municipio de la Victoria Valle objeto de esta Indagación.

### **3.1.3 Fase 3. Interpretación de datos.**

Del total de estudiantes de grado 9-2 que son 28 estudiantes por razones de tiempo de aplicación, procesamiento de la información y cantidad de insumos utilizados debido a la aplicación, se tomó la muestra de 11 guías de las 29 tareas, considerando una muestra de 11 estudiantes al azar con el software de nombre (Numero aleatorio UX Apps) a los cuales se le aplicaran tres SD que contienen las variables visualizadas por tarea individual.

Producto de la fase anterior, y se procedió a la sistematización e interpretación de los datos, lo que condujo al análisis de resultados haciendo uso del método de la triangulación que es la contrastación de la información sistematizada y analizada con los objetivos generales a la luz de los elementos del marco teórico para establecer si el objetivo general y los objetivos específicos se lograron cumplir (Aguilar y Barroso, 2015).

### **3.1.4 Fase 4. Conclusiones.**

A partir del análisis de los datos triangulados con la teoría semiótica cognitiva de Duval (1999,2004,2005), se emitieron las conclusiones y se dio cuenta de cuáles formas de aprehensión se pueden movilizar en los estudiantes de grado noveno en los registros figurales y finalmente, se dio respuesta a la pregunta problema de la Indagación.

## **3.2 Análisis a priori de las situaciones didácticas**

Las situaciones didácticas (SD), tendrán un análisis a priori que procura especialmente de ajustar el diseño de las SD a contextos curriculares y encontrar unidades significantes en el diseño de las tareas. Esta observación tiene sustento bajo los objetivos del trabajo de indagación además toma como eje principal las variables didácticas del diseño, es decir;

La visualización, las formas de aprehensión de los registros semióticos, las formas de ver en geometría, comparación de área de regiones sombreadas de figuras planas en 2D, las heurísticas y las relaciones geométricas identificadas entre otras.

Es importante destacar que las tareas se propusieron como escenario de situaciones que involucran actividades que el estudiante debe estudiar y resolver; en todas las tareas el estudiante es llevado a que por medio de la visualización, el razonamiento, la deconstrucción y reconfiguración, transforme la forma en que ve comúnmente en geometría y genere un nuevo referente de mayor potencia a la hora de enfrentarse a enunciados de problemas, especialmente en el trabajo con figuras geométricas en grado noveno.

A continuación, se detalla el diseño de las situaciones didácticas que se aplicaron, las cuales están compuestas de tres situaciones didácticas, las cuáles se cimentaron con el fin de fomentar en los estudiantes procesos de visualización que permitieran construir elementos geométricos. Además, fomentar heurísticas pertinentes para movilizar las formas de aprehensión y comprensión de áreas de regiones sombreadas, mediados por tres unidades que constituyen el análisis estructural:

- *El componente geométrico*: que busca identificar la relación de perímetro y áreas de superficies sombreadas asociada al diseño de situaciones didácticas.
- *El componente semiótico*: que desea generar nuevos tratamientos heurísticamente adecuadas con la finalidad de propender la movilización de formas de aprehensión.
- *El componente discursivo (registro en lengua natural)*: que pretende identificar la forma de expresar propiedades de la geometría y además las justificaciones o procedimientos expresados de forma escrita por parte de los estudiantes.

Las situaciones didácticas que se presentaron en esta indagación son de construcción propia pero basados en la teoría semiótica cognitiva de Duval (1999) y los procesos de indagación de Marmolejo, G. A. (2007). Lo anterior determinó el surgimiento de variables congruentes con los contenidos geométricos y las formas de aprehensión.

A continuación, se presenta una tabla con los objetivos que se pretendieron alcanzar con las situaciones didácticas y una rejilla de análisis a priori de las unidades consideradas en el diseño, categorías, variables y las tareas que se trabajarán con los estudiantes con la finalidad tener congruencia entre los objetivos de indagación y las tareas que desarrollaron los estudiantes.

### 3.3 Objetivos de las situaciones didácticas

Esta indagación no solo quiso construir y aplicar unas situaciones didácticas, sino que también estuvieran cargadas de sentido, no solo para el estudiante sino también dentro del marco de la indagación por ello se plantearon objetivos específicos para cada SD que se presentaron en la siguiente tabla 3

Objetivo General de indagación		Objetivo Situación didáctica 1	Objetivo Situación didáctica 2	Objetivo Situación didáctica 3
Analizar los procesos de visualización y fomentar diferentes tipos de aprehensiones figurales en la construcción del concepto de área de regiones sombreadas, en los estudiantes de grado noveno	Objetivos de las situaciones didácticas (SD)	Identificar y discriminar figuras y subconfiguraciones que permitan visualizar y superar aprehensiones de tipo perceptual	Transformar el contorno global de una figura en otra de igual cantidad de superficie a través de procesos mereológicos (translación, rotación, cambios de posición y trazos complementarios) para visualizar superar aprehensiones de tipo operatorias	Combinar tratamientos y operaciones figurales que permitan la comparación de dos áreas sombreadas que ocupan la misma superficie de forma equivalente

Tabla 4. Objetivos de las situaciones didácticas

A partir de la siguiente rejilla de análisis se realizarán las situaciones didácticas que tuvieron en cuenta variables como aprehensión perceptual y operatoria, deconstrucción homogénea, estrictamente homogénea y heterogéneas teniendo en cuenta factores de visibilidad como es la construcción de figuras donde presenten fondo cuadrículado o la ausencia de estas cuadrículas además el trabajo con figuras circulares y el campo de

enunciados problemas como también la explicación en lengua natural de los procedimientos.

### 3.4 Rejilla de análisis de las situaciones didácticas

Unidades	Categorías	Variables	Situaciones didácticas y tareas					
			T1	T2	T3	T4		
Contexto geométrico o bidimensional	Aprehensiones							
		Aprehensión perceptual (PA)	S1	x	x	x	x	
		Aprehensión operatoria (OA)	S1		x	x	x	
		Aprehensión perceptual (PA)	S2		x		x	
		Aprehensión operatoria (OA)	S2	x	x	x	x	
		Aprehensión perceptual (PA)	S3	x	x			
		Aprehensión operatoria (OA)	S3	x	x	x	x	
				T5	T6	T7	T8	
		Aprehensión perceptual (PA)	S3					
		Aprehensión operatoria (OA)	S3	x	x	x	x	
				T9	T10	T11	T12	
		Aprehensión perceptual (PA)	S3	x	x	x	x	
	Aprehensión operatoria (OA)	S3	x	x	x	x		
	Áreas de regiones sombreadas Relaciones parte todo	Figuras homogéneas		S3	T5	T6	T3	T4
		Con cuadrícula		S3	x	x		
		Sin cuadrícula		S3			x	x
		Figuras heterogéneas		S3	T1	T2	T7	T8
		Con cuadrícula		S3	x	x		

			Sin cuadrícula	S3			x	x
		Figuras circulares		S3	T 9	T 10	T 11	T 12
			Con cuadrícula	S3	x	x		
			Sin cuadrícula	S3			x	x
Campo de enunciados de problemas	Enunciados de consigna		S1, S2(T1, T2, T3) y S3(T3, T5 - T12)					
	Enunciados de problema		S2(T4), S3(T1, T2, T4)					

Tabla 5 Rejilla de análisis

A continuación, se describen las situaciones didácticas que son pilar fundamental en el alcance de los objetivos propuestos en el presente trabajo de indagación.

### 3.5 Situación 1 “Identificar y discriminar figuras”

El objetivo de esta situación es: Identificar y discriminar figuras y subconfiguraciones que permitan visualizar y superar aprehensiones de tipo perceptual, para lo cual se plantean las siguientes tareas.

**Tarea 1 situación 1**

Identifica en la Figura 33 cuáles son las subfiguras geométricas que puedes distinguir y consígnalas en la tabla 5 con sus vértices. Ejemplo  $\Delta ABC$  es un Triángulo rectángulo

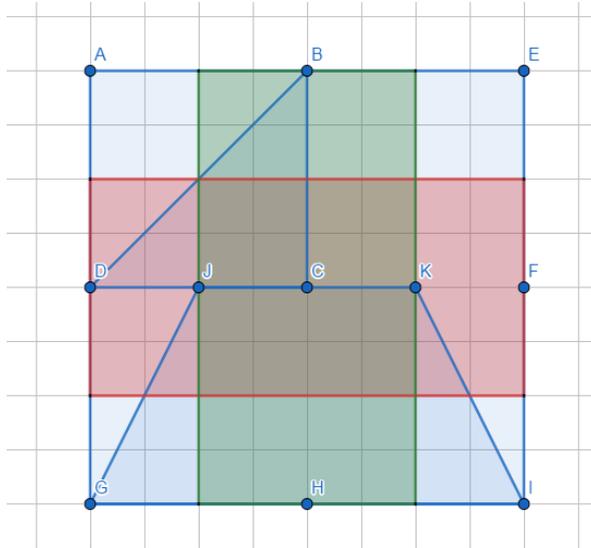


Figura 34 Figura que acompaña SD1-T1

Autoría propia

En esta tarea se debe superar una aprehensión de tipo perceptual debido a las franjas de colores que también forman figuras geométricas pero que según la consigna no se tendrán en cuenta y deberá ser observada como se muestra a continuación en la figura 35

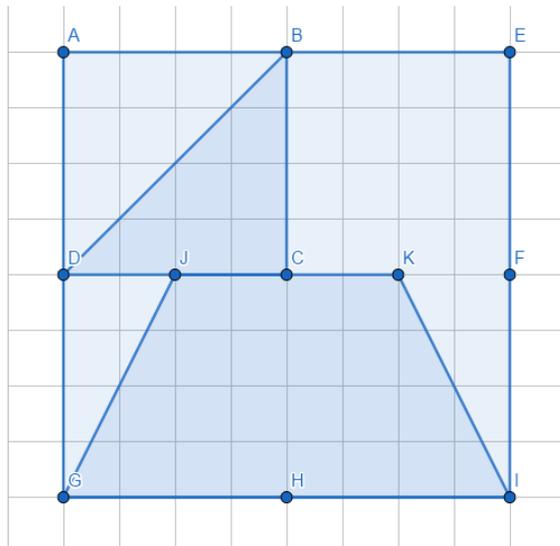


Figura 35 Figura que acompaña SD1-T1

Se espera que el estudiante identifique y designe tres triángulos, un trapecio y un polígono irregular el cual deberá organizar en una tabla de la siguiente forma.

Designación del Plano	Nombre de la figura
A B D	Triángulo rectángulo
B C D	Triángulo rectángulo
D J G	Triángulo rectángulo
J K L G	Trapezio
B E F I K C	Polígono irregular

Tabla 6 Respuestas SD1-T1

### Tarea 2A situación 1

A. Escribe al frente de la figura 36,37,38 qué clase de movimiento se está representado (Rotación, traslación o reflexión)

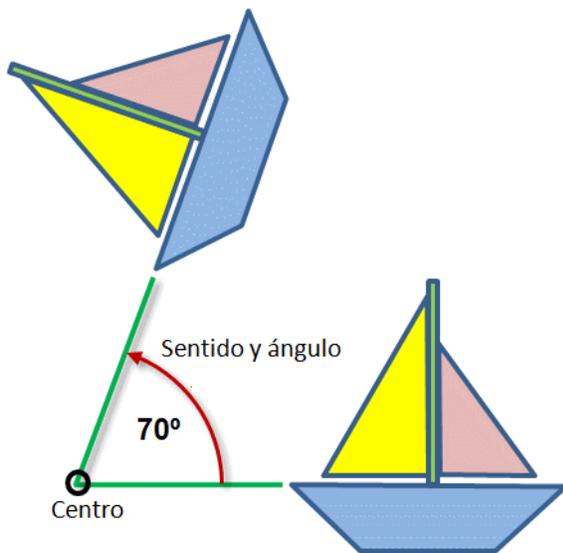


Figura 36 Figura que acompaña SD1-T2A

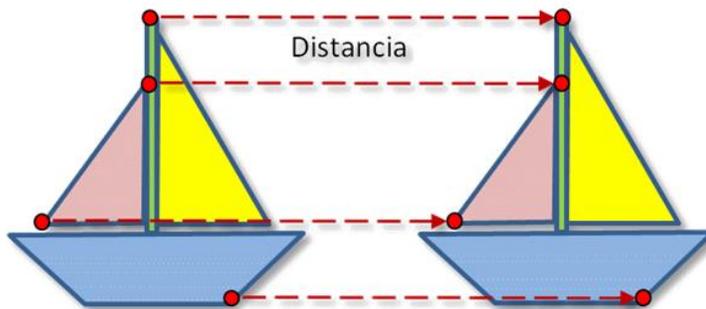


Figura 37 Figura que acompaña SD1-T2A

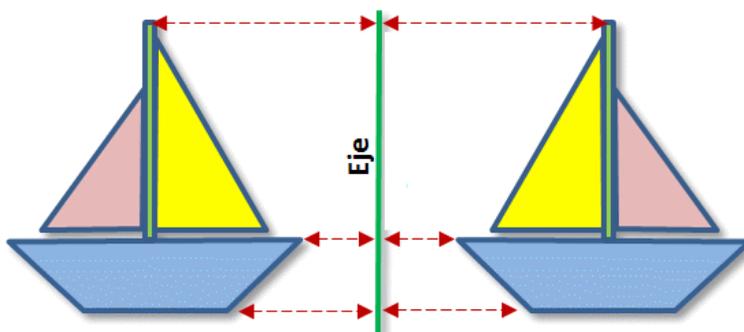


Figura 38 Figura que acompaña SD1-T2A

La tarea 2A se presenta como introductoria de la secuencia didáctica con la finalidad de reconocer conocimientos previos necesarios para el desarrollo de las posteriores tareas donde el estudiante debe reconocer los tres movimientos básicos (Rotación, traslación y simetría).

**Tarea 2B situación 1**

Se presenta una figura inicial (figura 39) de vértices ABCD que contiene cuatro puntos designados con las letras E, F, G y H.

Se solicita realizar la siguiente tarea como se muestra a continuación:

- Realiza los trazos suplementarios siguiendo las instrucciones: Realice un trazo con regla desde el punto E hasta el punto F; Realice un segundo trazo del punto G hasta el punto H ¿Cuáles figuras reconoce después de haber realizado los trazos suplementarios con su respectiva designación?

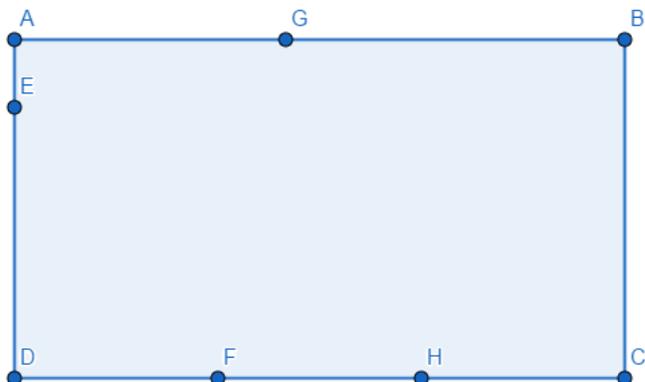


Figura 39 Figura que acompaña SD1-T2B

Con esta tarea se pretende que el estudiante además de realizar trazos suplementarios, reconozca figuras y configuraciones (figura 40) para que pueda llegar a superar aprehensiones de tipo perceptual. Al inmovilizar trazos como por ejemplo el estudiante debe inmovilizar el trazo EF para poder visualizar el trapecio rectangular ADHG, estas inmovilizaciones de trazos suplementarios pueden ser un obstáculo en la visualización parcial o general de las figuras.

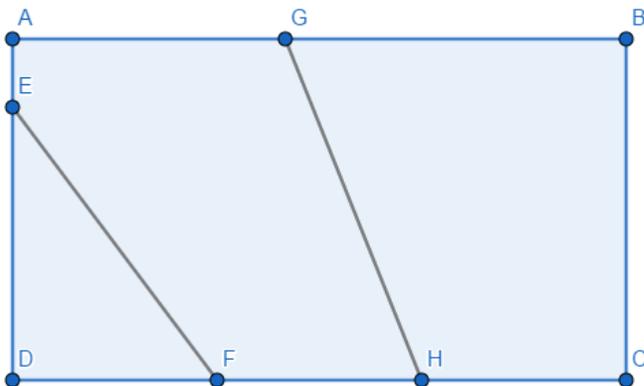


Figura 40. Figura que acompaña SD1-T2B

Se espera que el estudiante pueda visualizar seis figuras geométricas como se muestra a continuación (figuras 40-43). A continuación, se describen las posibles dificultades a las que se puede enfrentar el estudiante.

El reconocimiento del triángulo rectángulo DEF (figura 40) es posible que sea uno de los más sencillos de reconocer debido a que no presenta obstáculos para su visualización.

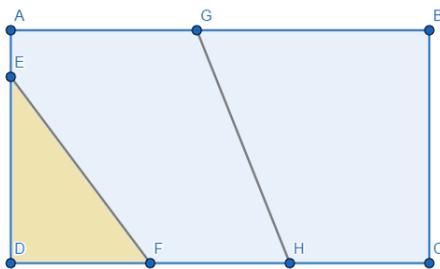


Figura 40. Figura que acompaña SD1-T2B

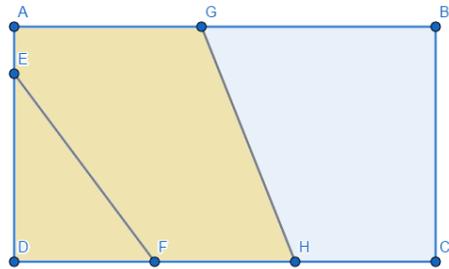


Figura 41. Figura que acompaña SD1-T2B

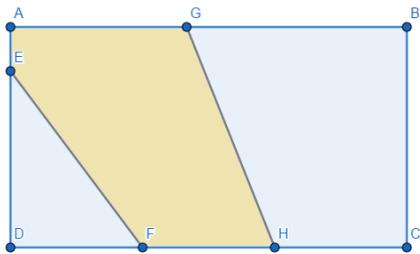


Figura 42. Figura que acompaña SD1-T2B

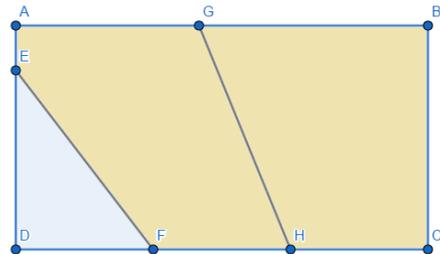


Figura 43. Figura que acompaña SD1-T2B

La subfigura AEFHG (figura 42) el estudiante puede llegar a definirla como un polígono irregular de cinco lados o un pentágono irregular, la complejidad de visualizar es baja debido a que no tiene trazos que obstaculicen su visualización, la única situación que puede llegar a presentarse es que no sea capaz de definir dicha figura.

En el caso de la subfigura ABCFE (figura 43) trapecio rectangular, tiene un segmento GH que debe ser inmovilizado para poder visualizarlo y es posible que se dificulte designar dicha figura ya sea porque no lo recuerde o por su poca utilización en su vida escolar.

Al intentar visualizar el trapecio rectangular ADHG (figura 44) se presentan dos situaciones la primera que no recuerde el nombre de la figura y la segunda y más importante es que no pueda inmovilizar el segmento EF y no pueda visualizar dicha figura.

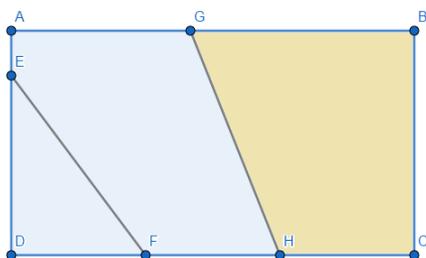


Figura 44. Figura que acompaña SD1-T2B

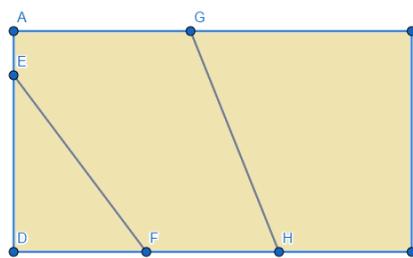


Figura 45. Figura que acompaña SD1-T2B

La subfigura BCHG (figura 44) es un trapecio rectangular de sencilla visualización pues no presenta obstáculos como trazos intermedios o que este configurado por dos subfiguras.

Finalmente, el estudiante para ver el rectángulo ABCD (figura 45) que es una la imagen global que contiene todas las subfiguras puede ser un obstáculo para la visualización al no inmovilizar los trazos suplementarios EF y GH. Además, es posible que el estudiante asuma que la figura ABCD no hace parte de la pregunta porque con ella se inicia el problema o que no reconozca dicha figura como la sumatoria de todas las anteriores, estas conjeturas tendrán respuesta en los análisis a posteriori.

### Tarea 3 situación 1

*¿Cuántos cuadrados de diferente área puedes identificar en la siguiente figura 46)?*

*Designa cada una de ellos con sus vértices.*

*Realiza un escrito explicando los procedimientos utilizados.*

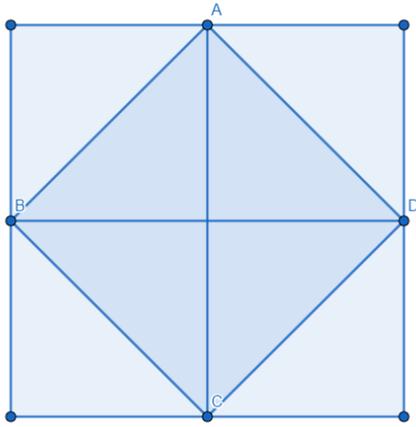


Figura 46. Figura que acompaña SD1-T3

Para el lector del anterior enunciado es posible que se presente una confusión o incoherencia entre la pregunta y la figura, puesto que se pregunta por cantidad de cuadrados y la figura contiene 12 triángulos 1 rombo y a su vez 5 cuadrados (figura 46)

Los estudiantes que resuelvan esta tarea para superar las aprehensiones de tipo perceptual deberán inmovilizar las subfiguras triangulares y romboide para llegar a visualizar los cuadrados de dicha figura

El estudiante resolutor tendrá la tarea de inmovilizar la subfigura romboide (figura 47) que en su defecto está creando la ilusión de triángulos como los triángulos designados con las letras ABE, ADF, BCH y CDG, en dicha figura para poder observar con claridad los cuadrados (figura 44), pero además debe a través de procesos mereológicos, reconfigurar el rombo para verlo como otro cuadrado figura 47,49 y final mente visualizar el cuadrado IJKL (figura 50) que contiene todas las subfigura.

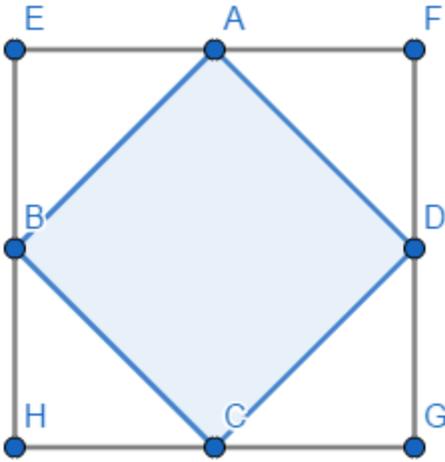


Figura 47. Figura que acompaña SD1-T3

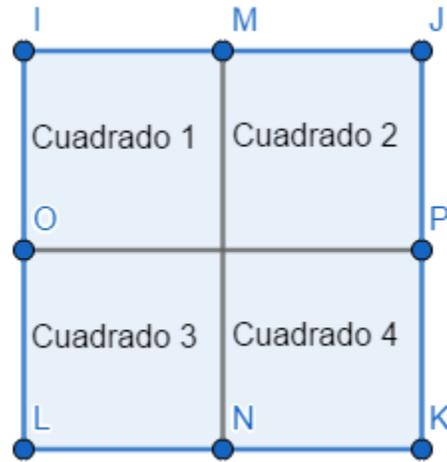


Figura 48. Figura que acompaña SD1-T3

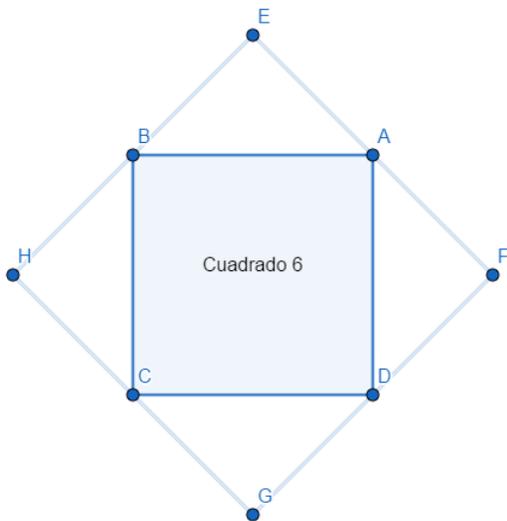


Figura 49. Figura que acompaña SD1-T3

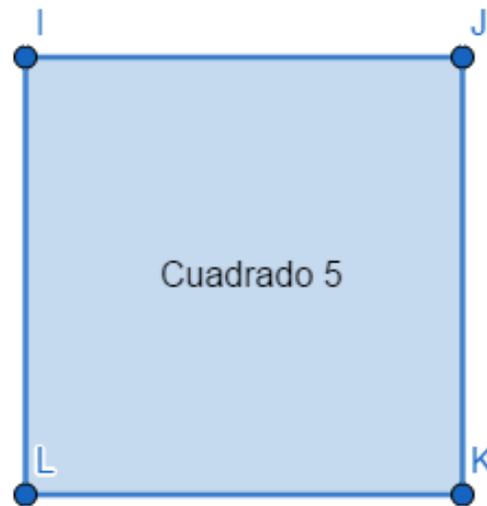


Figura 50. Figura que acompaña SD1-T3

**Tarea 4 situación 1**

*¿Cuántos cuadrados y cuántos triángulos hay en la siguiente figura 51?*

*¿Qué procedimientos utilizaste para realizar esta cuarta tarea?*

*¿Designa otras figuras geométricas que se distinguen en la figura 51?*

*Justifica tu respuesta.*

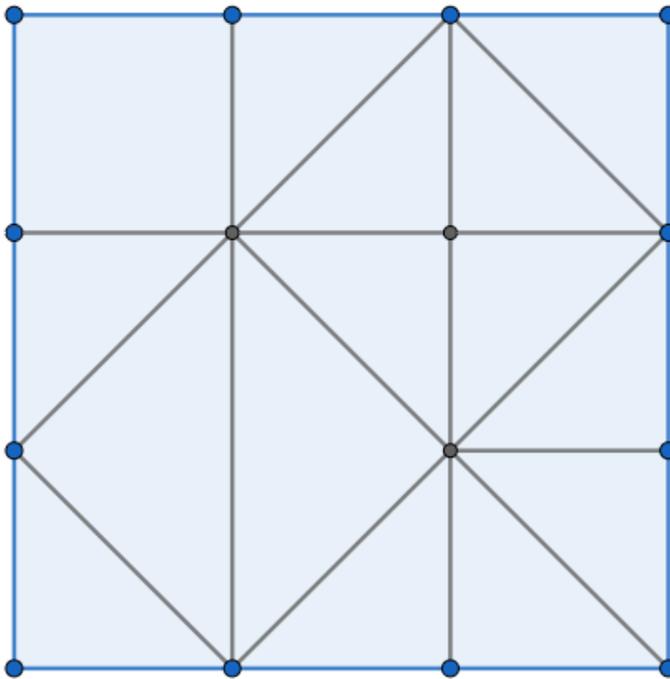


Figura 51. Figura que acompaña SD1-T4

En esta cuarta tarea nos encontramos con un hiato o inconsistencia entre el enunciado en lengua natural y la figura de referencia (figura 51) puesto que se solicita encontrar los cuadrados y rectángulos, pero a primera vista hay un arrastre de tipo gestáltico debido a las formas romboides y otras configuraciones en 1D y 2D que no permiten desarrollar el ejercicio con una simple visualización centrada en lo perceptual, sino que hay que superar varias aprehensiones perceptuales.

Para abordar dicha tarea se hace necesario la discriminación de las subfiguras, inmovilizando en primera instancia las subfiguras romboides o en su defecto el cuadrilátero EHIL y el segmento de recta CÑ que se muestra en la (figura 52), al inmovilizar esta capa podemos observar los 5 cuadrados como se muestra a continuación (figura 53).

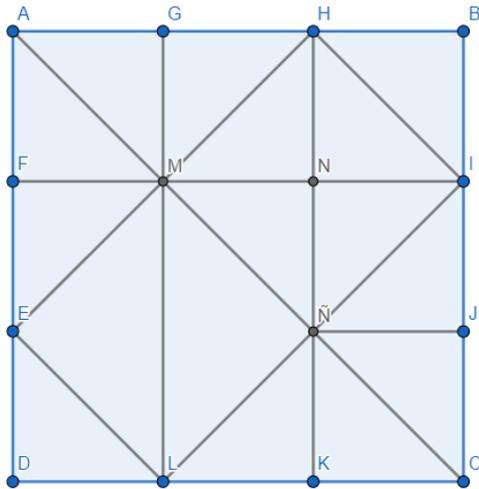


Figura 52. Figura que acompaña SD1-T4



Figura 53. Figura que acompaña SD1-T4

Para observar los cuadrados 6b y 7b es de suma importancia superar la configuración de cruce (entrelazados) de los dos cuadrados como también la inmovilización de la intersección NJ que se muestra en la figura 54 entre los cuadrados 4a y 5a además la superación perceptual se hace más compleja en los cuadrados 6b y 7b puesto que comparten parte la región rectangular designada con las letras LMNK.

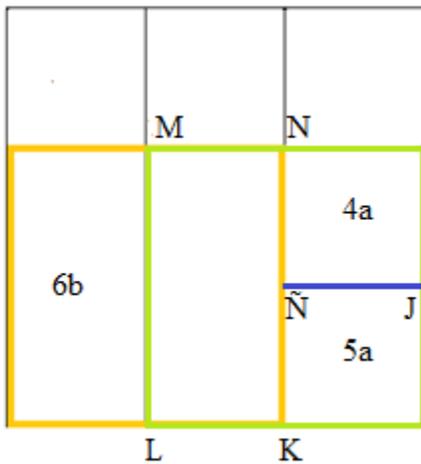


Figura 54. Figura que acompaña SD1-T4

Si se pensara en inmovilizar algunos segmentos 1D como los segmentos de recta ML o NK no sería posible el reconocimiento de los dos cuadrados porque se produciría una invisibilidad como se muestra a continuación (figura 55, 56, 57).

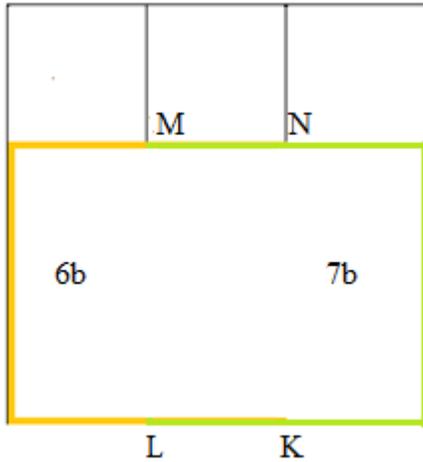


Figura 55. Figura que acompaña SD1-T4

Como se puede notar en la figura 55 al inmovilizar los segmentos designados ML y NK se pierden las fronteras de los cuadrados 6b y 7b (figuras 56, 57) es por esto que la visualización de los cuadrados 6b y 7b es de mayor complejidad, a continuación, se muestra la solución que se esperaba.

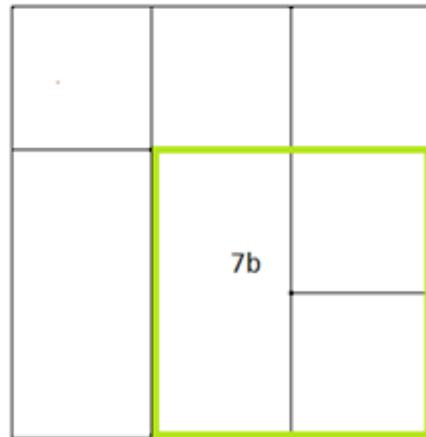
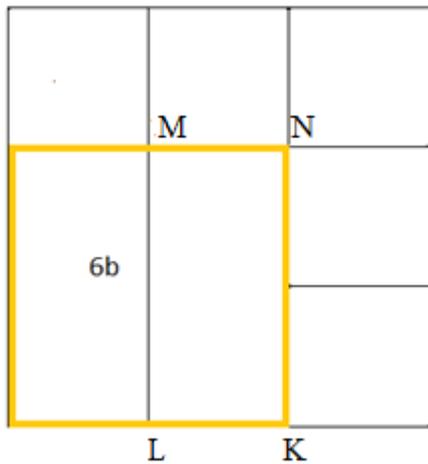


Figura 56. Figura que acompaña SD1-T4

Figura 57. Figura que acompaña SD1-T4

En los rombos 8c y 9c (figura 58) es importante realizar una rotación para superar la aprehensión perceptual que puede tener el estudiante al no visualizar estas dos subfiguras como cuadrados y por último el cuadrado 10d de vértices ABCD que se muestra en la figura 59, donde el estudiante de primera vista puede ver la figura de forma global o unir las subfiguras y concluir que hay una figura de mayor contorno que encierra las demás subfiguras y así encontrar los 10 cuadrados configurados en la figura inicial (figura 59).

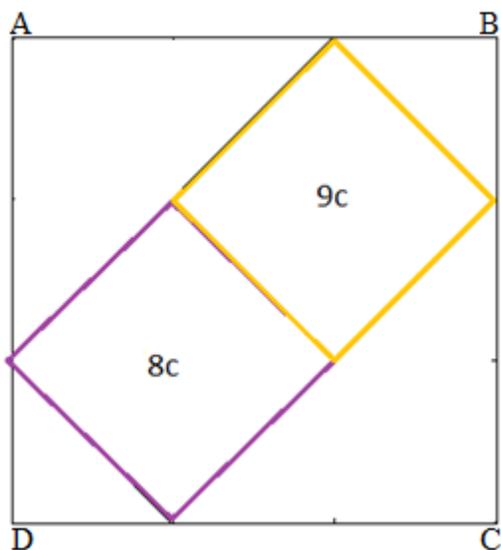


Figura 58. Figura que acompaña SD1-T4

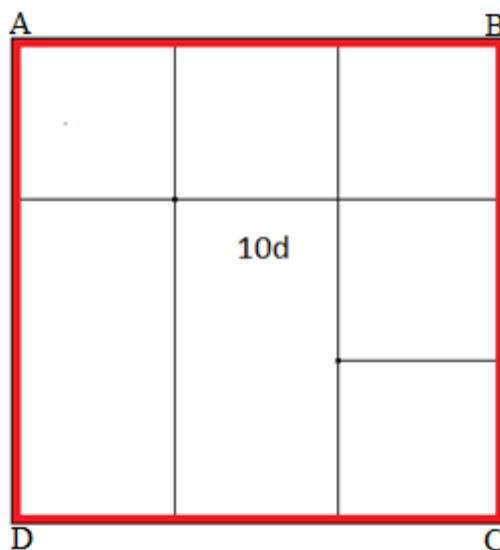


Figura 59. Figura que acompaña SD1-T4

### 3.6. Situación 2 “Comparación de áreas”

El objetivo de esta situación es: Transformar el contorno global de una figura en otra de igual cantidad de área a través de procesos mereológicos como: traslación, rotación, cambios de posición y trazos complementarios entre otros, para visualizar y superar aprehensiones de tipo operatorias.

Las tareas a continuación fortalecieron el concepto de área como superficie en donde el estudiante debía deconstruir la figura inicial a través de procesos con figuras heterogéneas y homogéneas para lograr verificar si las superficies son iguales en su área.

#### Tarea 1A de la situación 2

A) Subdivide la figura 60 en un rectángulo, dos triángulos y cuatro cuadrados.

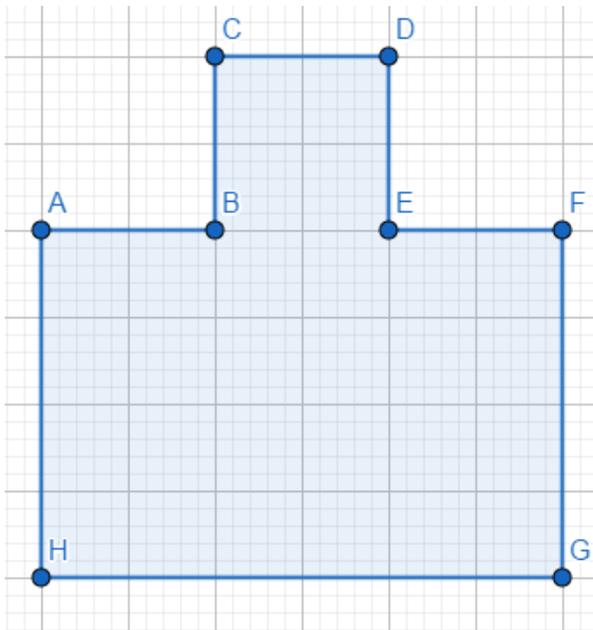


Figura 60. Figura que acompaña SD2-T1A

De la tarea A se esperan diferentes reconfiguraciones que satisfagan la consigna, la que se muestra en la figura 61 es una de las posibles soluciones.

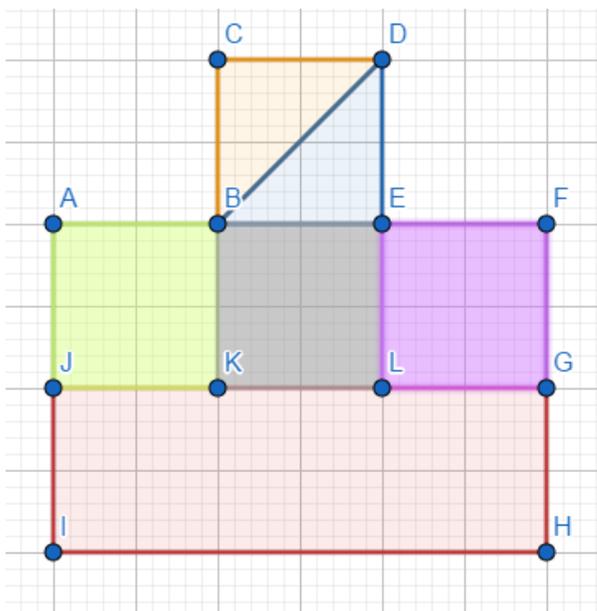


Figura 61. Figura que acompaña SD2-T1A

En la situación anterior (Figura 61) el estudiante debe superar una aprehensión de tipo perceptual al entender que el cuadrado BCDE contiene los dos triángulos, si no supera esta situación puede llegar a visualizar solo tres cuadrados ABKJ, BELK y EFGL. También se evidencia la necesidad de trazos suplementarios ya sean de forma mental o física para subdividir la figura y resolver la situación.

B) Se solicita al estudiante que subdivida la figura 62 en un trapecio, un triángulo y un cuadrado.

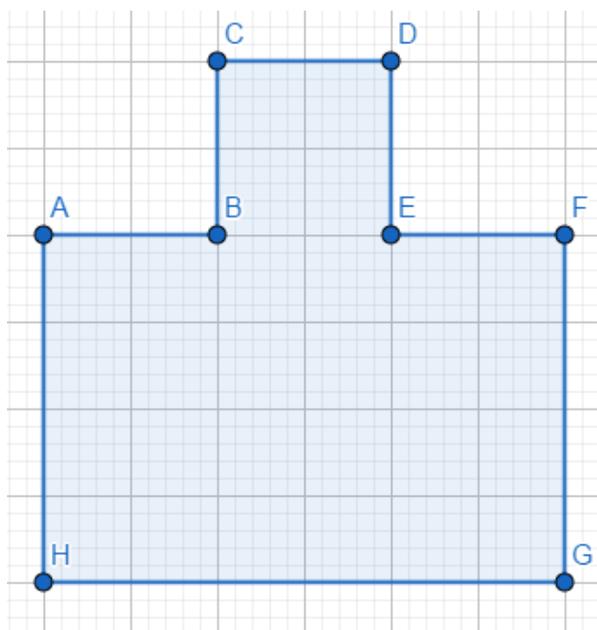


Figura 62. Figura que acompaña SD2-T1B

### Tarea 1B de la situación 2

Se muestra la posible solución en la figura 63 y aunque esta tarea 1B puede llegar a ser más sencilla, conlleva un esfuerzo de visualización, para realizar un trazo suplementario apropiado, teniendo en cuenta que hará un corte que reconfigurará la subfigura inicial AFHI en dos subfiguras figuras ABI y BFHI, (un triángulo y un trapecio rectangular) lo anterior puede llegar a ser difícil si no se tiene la concepción de trapecio rectangular y se tome una buena decisión en el trazo suplementario.

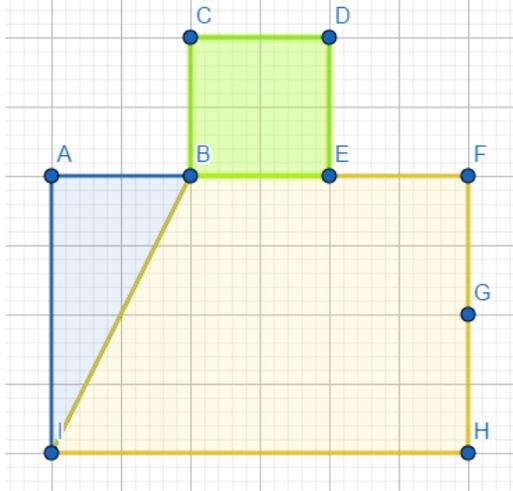


Figura 63. Figura que acompaña SD2-T1B

**Tarea 2 situación 2**

*A partir de la figura inicial ABCDEFGJ construya la figura final KLMNOPQRST. Explica tu procedimiento detallando cada una de los trazos o movimientos realizados para llegar a la figura sugerida.*

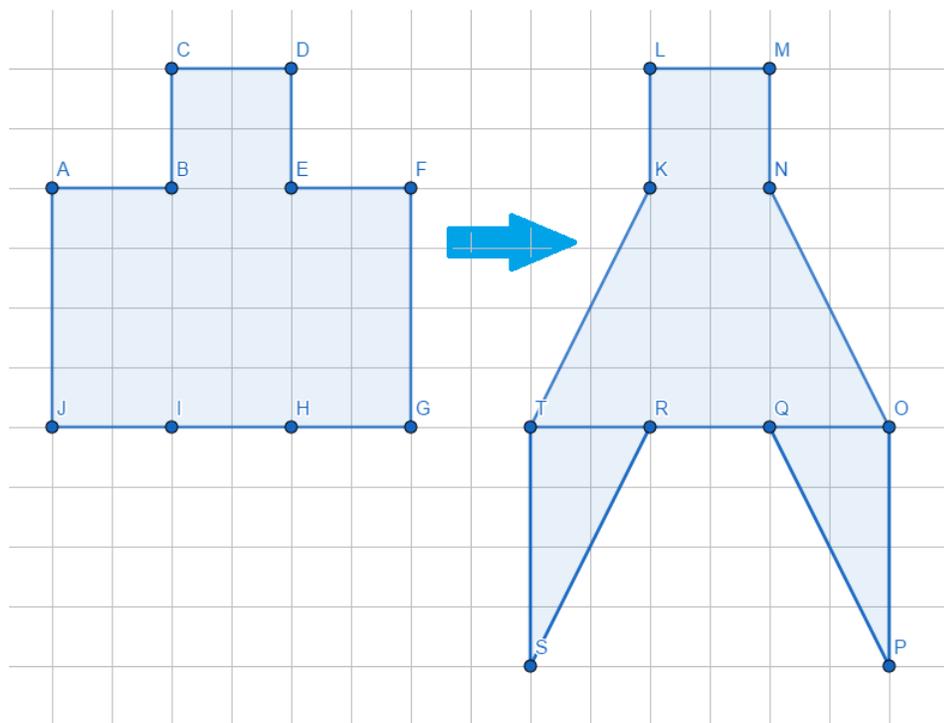


Figura 64. Figura que acompaña SD2-T2

El estudiante resolutor de la situación anterior (figura 64) debe comparar la figura inicial *ABCDEFGJ* con la nueva figura *KLMNOPQRST*, discriminar cuáles regiones de la figura inicial permanecen inmóviles y cuáles no, centrar la atención en las segundas y mediante una nueva comparación entre estas regiones, establecer que procesos mereológicos fueron utilizados.

Se destaca un factor de visualización y es que las dos figuras son dadas sobre un fondo cuadrículado.

Es necesario introducir trazos suplementarios sobre las superficies de las figuras, puesto que su fraccionamiento en partes elementales no es dado al comienzo de la consigna.

La organización perceptiva que caracteriza a cada una de las figuras posibilita formas de ver procedimientos y estrategias diferentes y pertinentes en el desarrollo de la situación planteada:

Al comparar mentalmente las figuras, tanto la diferencia en tono y grosor entre las partes que conforman sus contornos y las líneas que constituyen el fondo cuadrículado, como las similitudes existentes entre las partes *BCDEGJ* y *KLMNOT* de sus contornos (Figura inicial (X) y Figura final (Y)); nos lleva a una visualización unidimensional sobre las figuras: la

mirada se centra en las unidades de dimensión (D1) que constituyen sus contornos como se muestra en la figura 65.

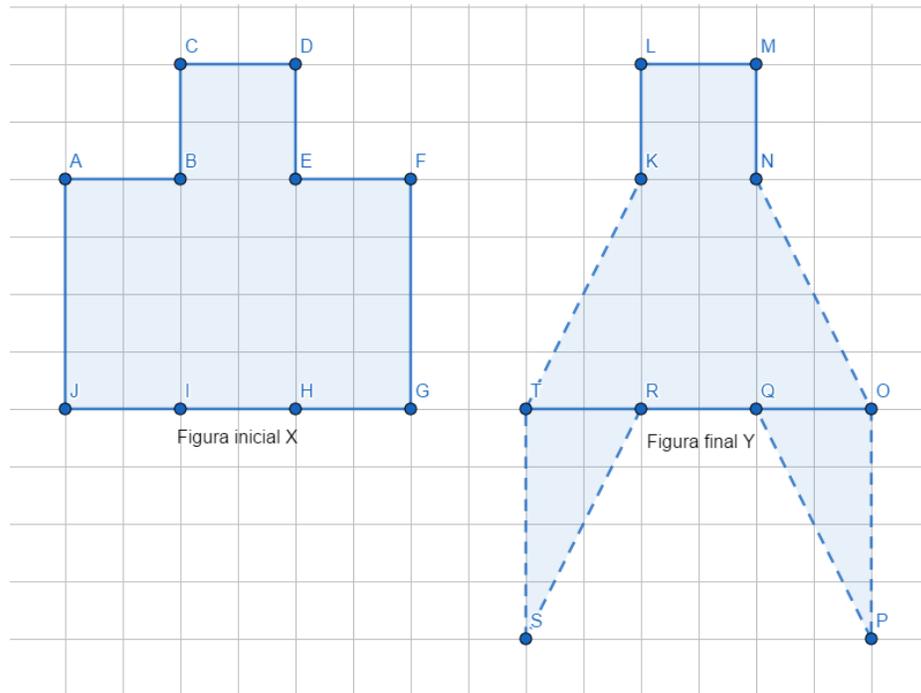


Figura 65. Figura que acompaña SD2-T2

La comparación entre los contornos de cada una de las figuras induce a su división en tres partes. Una, la fracción del contorno que es común a las dos figuras (partes BCDEGJ y KLMNOT); la otra, la parte restante, es decir la fracción del contorno de las dos figuras que no son equivalentes entre sí (IJAB y RSTK) análogamente (GHEF con OPQN).

Ahora, el fraccionamiento inducido en las figuras a partir de sus contornos no permite discriminar por sí mismo las partes de las figuras (subfiguras) sobre las cuales se debe centrar la atención y mucho menos la naturaleza de la operación a aplicar. Si bien permite discriminar sobre las dos figuras las partes de sus contornos que permanecieron (y no permanecieron) invariantes después de la transformación, la atención se centra en los lados de las figuras y no es sobre ellos que se debe aplicar una operación que dé cuenta de la transformación pedida. En consecuencia, un cambio dimensional en la forma de ver sobre las dos figuras es necesario; es decir, pasar de una visualización unidimensional sobre las figuras a una bidimensional. Es de esta manera que un anclaje sobre las figuras se centra no solo sobre sus contornos, sino también sobre sus superficies.

Un cambio de su contorno global en la forma de ver en las dos figuras a comparar induce un fraccionamiento de cada una de ellas en tres subfiguras. Las partes ABIJ, CDHI y EFGJ ya no solo son reconocidas como fracciones del contorno de las dos figuras, sino que también pasan a ser vistas como partes del contorno de tres polígonos congruentes entre sí. En consecuencia y de manera similar, la parte restante del contorno de cada una de las figuras pasa a ser discriminada como fracciones de contorno de nuevas subfiguras. Así, la figura de partida queda dividida en tres subfiguras: rectángulos A1, A2 y A3 y la figura de llegada un rectángulo A'2 y el paralelogramo A'1 y A3 como se muestra a continuación en la figura 66.

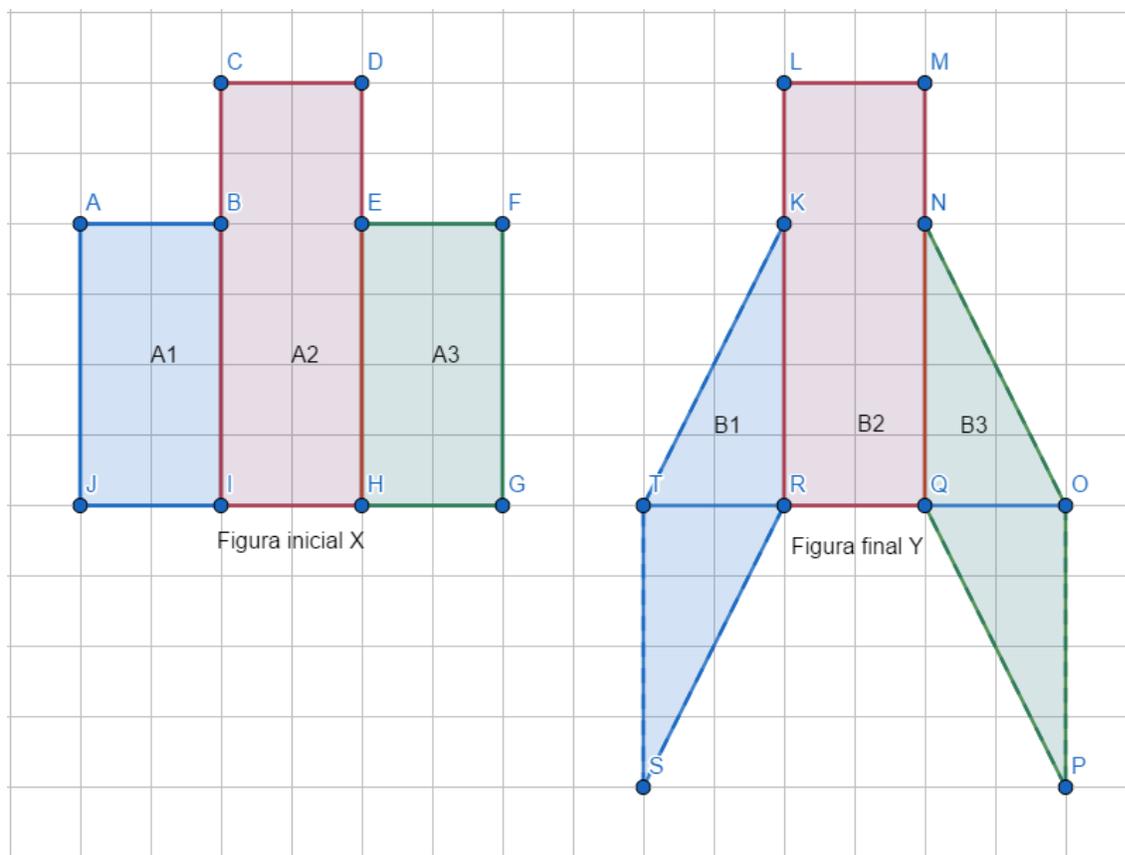


Figura 66. Figura que acompaña SD2-T2

Bajo la estrategia de identificar en las dos figuras las partes (subfiguras) que permanecieron invariantes tras la transformación y centrar la atención solo en las que no; quien resuelve el problema debe ahora centrar su atención en las subfiguras A1 y B1, compararlas entre sí y ver en cada una de ellas la composición de dos triángulos

rectángulos (triángulos a y b y a' y b'; triángulos c y d y c' y d' figuras que se muestran a continuación). En esta parte ni el fondo cuadrículado, ni el contorno de las dos subfiguras juegan como factores de visibilidad que inducen en A1 y B1 esta forma de ver se ilustra en la figura 67.

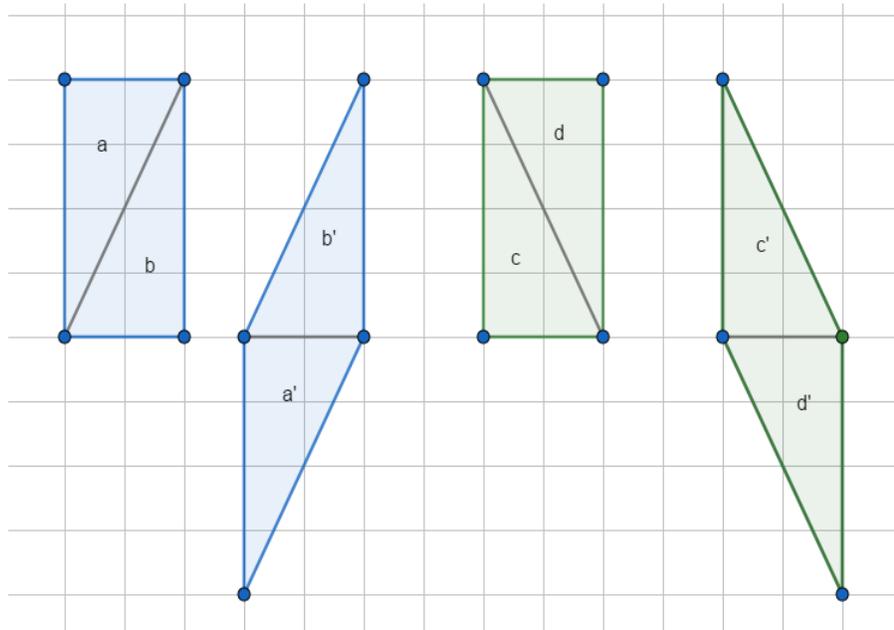


Figura 67. Figura que acompaña SD2-T2

Los caminos escogidos por el resolutor pueden lleválo por caminos más cortos o largos según sean las formas de aprehensión y el reconocimiento de las figuras.

### Tarea 3 situación 2

*Transforma la figura inicial 64 en la figura 65.*

*Explica tu procedimiento detallando cada una de los trazos o movimientos realizados para llegar a la figura sugerida.*

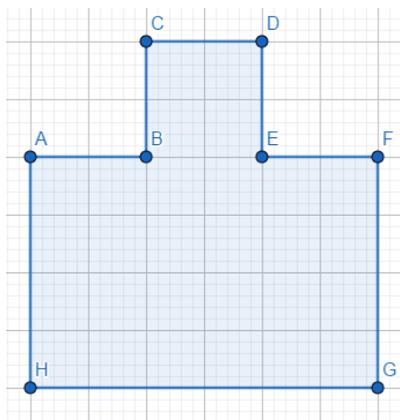


Figura 68. Figura que acompaña SD2-T3

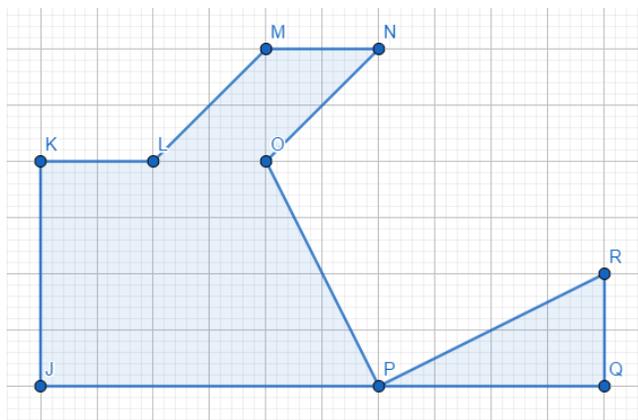


Figura 69. Figura que acompaña SD2-T3

Se solicita una comparación entre dos figuras lo cual implica:

Reconocer que el fraccionamiento de las dos figuras no ha sido dado, y debe ser encontrado. Al igual que en las dos partes anteriores; la diferencia en tono y grosor entre el contorno de las figuras a comparar y las líneas verticales y horizontales que constituyen el fondo cuadrículado sobre el cual se encuentran presentadas, privilegia en ambas figuras una visualización global sobre una visualización local. En consecuencia, la figura de partida y la figura de llegada son discriminadas como polígonos hexagonales irregulares “puestos” sobre un fondo cuadrículado y no como un mosaico conformado por un gran número de cuadrados pequeños.

Para el desarrollo de esta parte de la situación 2, cada una de estas formas de dividir la figura de inicio (figura 64), permite mediante la aplicación de rotaciones, traslaciones y/o reflexiones sobre unas u otras de las subfiguras en que fue dividida, formas de proceder pertinentes a la resolución del problema planteado: transformar una figura en otra. A continuación, centramos la atención en solo una reconfiguración a través de trazos suplementarios figura 66.

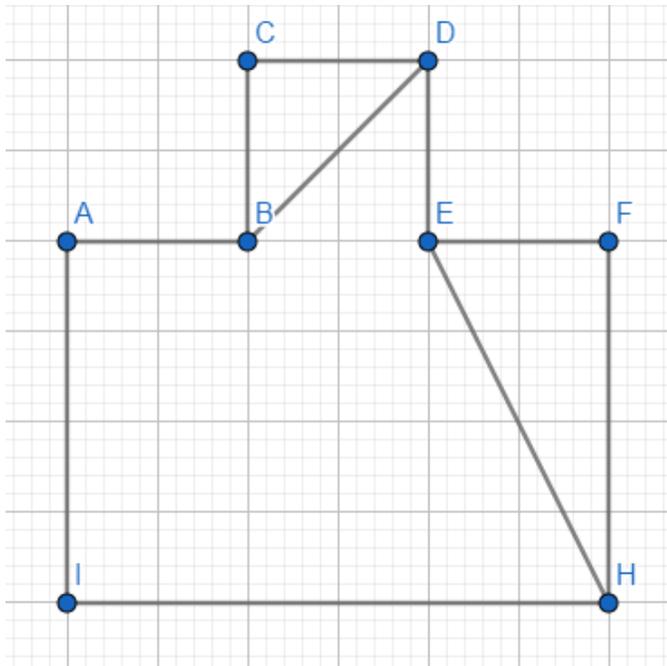


Figura 70. Figura que acompaña SD2-T3

Quien resuelve la situación planteada debe aplicar una aprehensión operatoria sobre las figuras o subfiguras, por ejemplo: es necesario aplicar fraccionamientos sobre sus superficies, comparar subfiguras entre sí, aplicar simultáneamente operaciones de traslación, rotación y/o reflexión. Una posible aprehensión de la figura se muestra a continuación en la figura 71.

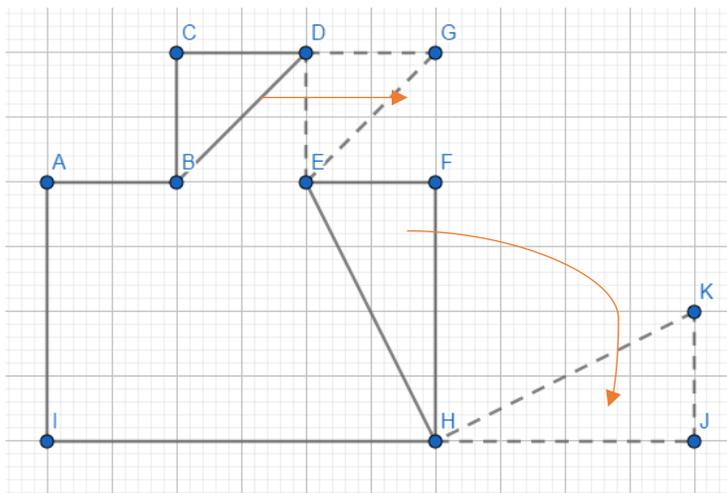


Figura 71. Figura que acompaña SD2-T3

### Tarea 4 Situación 2

A) ¿Cuál de estos cuatro terrenos de forma diferente es el de mayor área?

B) ¿Se podría afirmar que el terreno 2 por tener un perímetro de 32 m y ser el que tiene mayor perímetro de los 4 terrenos es el que contiene más área?

C) ¿A qué conclusión llegaste en cuanto a las áreas de los 4 terrenos y sus respectivos perímetros? Justifica tus respuestas.

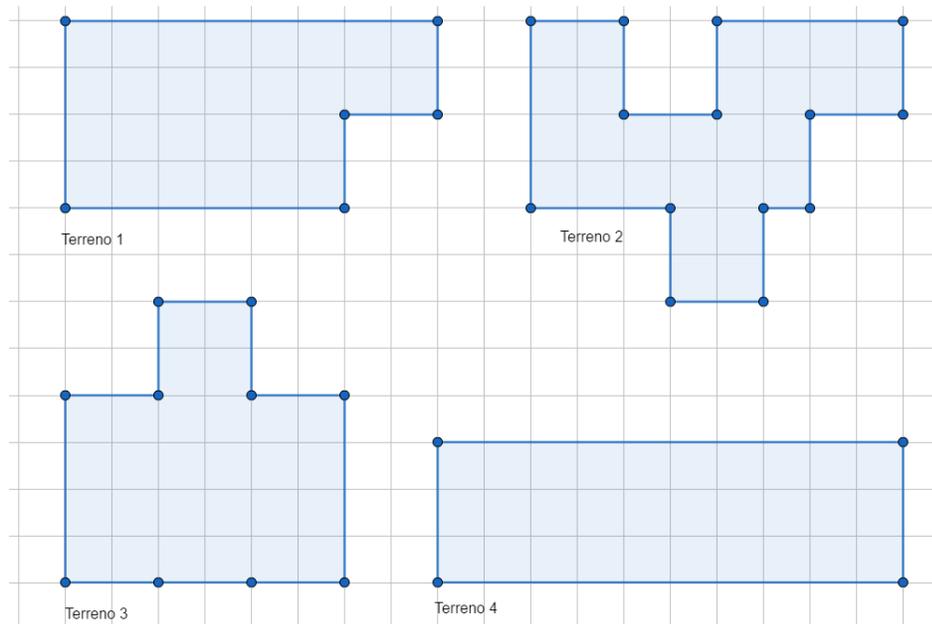


Figura 72. Figura que acompaña SD2-T4

Análisis de posibles tratamientos:

Se solicita una comparación entre cuatro terrenos (*Terreno 1, 2, 3 y 4*) y la posterior transformación de unas figuras en otras.

Entre el enunciado en lengua natural y la figura hay coherencia semántica, en ambos casos se introduce un anclaje sobre las cuatro superficies a comparar.

En el enunciado a través de la expresión *cuál de estos cuatro terrenos de forma diferente es el de mayor área*; en la figura a partir del contraste en tono y grosor, que establece una clara diferencia entre los cuadrados que conforman el fondo cuadrículado y las líneas que constituyen el contorno de los 4 terrenos.

El fraccionamiento de las figuras en partes elementales no es dado al inicio, es necesario introducir trazos suplementarios o reconfiguraciones sobre sus superficies.

La comparación se puede realizar de forma física, en consecuencia, se realiza una aprehensión bidimensional sobre las figuras o mentalmente, centrándose la atención inicialmente sobre sus contornos y posteriormente, bajo la aplicación de un cambio dimensional en la forma de ver sobre ellas en sus superficies. A continuación, se muestran posibles aprehensiones donde el estudiante realizó reconfiguraciones a través de translaciones, figura 73.

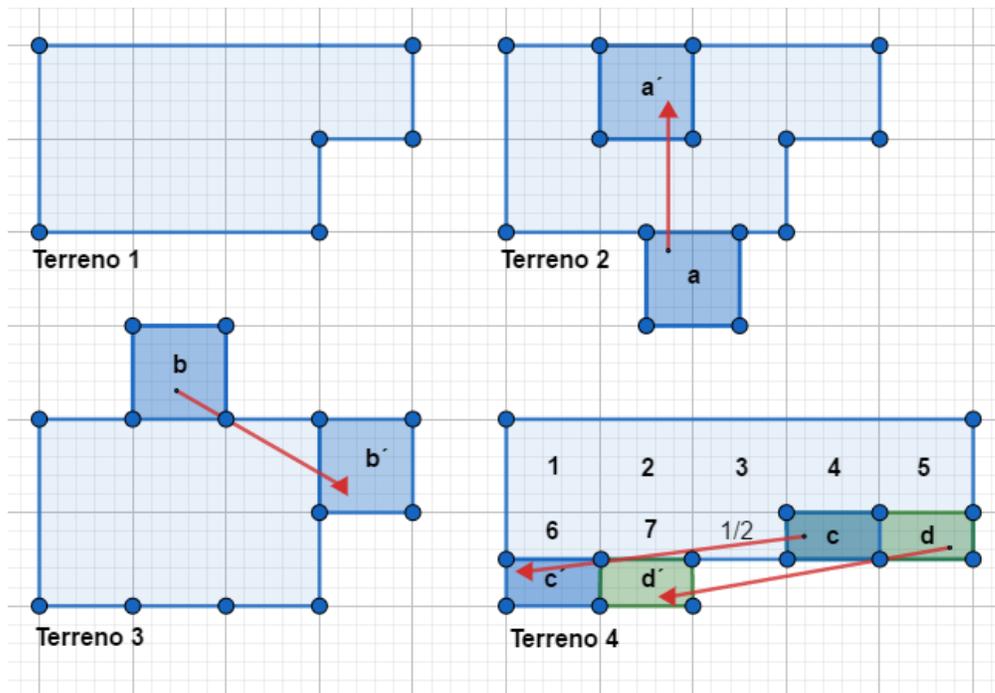


Figura 73. Figura que acompaña SD2-T4

En la figura 73 se muestra una posible aprehensión por parte del estudiante donde puede tomar como base el *Terreno 1* y a través de reconfiguraciones el estudiante identifique la igualdad de áreas de los *terrenos 1, 2, 3*. Pero al reconfigurar el terreno 4 por procesos mereológicos se de cuenta que es de mayor área y a través de posibles designaciones numéricas físicas o mentales el estudiante pueda realizar una sumatoria de áreas que le permite determinar que dicho terreno tiene  $7.5 U^2$  y en consecuencia  $\frac{1}{2}$  de *unidad* más que los terrenos 1, 2, y 3 como se mostró en la figura 73.

### 3.6 Situación 3 “Áreas sombreadas”

El interés de estas tareas de la situación 3 es de poner en juego la visualización, con el fin que el estudiante pueda transformar el contorno global de una figura en un nuevo contorno y por consecuencia se forme una nueva figura que sea más potente al ser una figura que el estudiante entiende con mayor facilidad porque está dentro de las figuras geométricas básicas como el cuadrado, el triángulo y en nuestro caso particular el análisis del área de un rectángulo.

#### Tarea 1 situación 3

Con la siguiente información ayuda a don Juan quien trabaja en Marroquinería a saber cuál es el área de una pieza de cuero para evitar desperdiciar materia prima. A continuación, se muestra la silueta con algunos datos.

Realiza trazos suplementarios que te permitan ver algunas subfiguras que podrás trasladar para reconfigurar la figura 74 en un rectángulo el cual facilitara tu análisis.

Explica tu procedimiento detallando cada una de los trazos o movimientos y optimizar el área requerida.

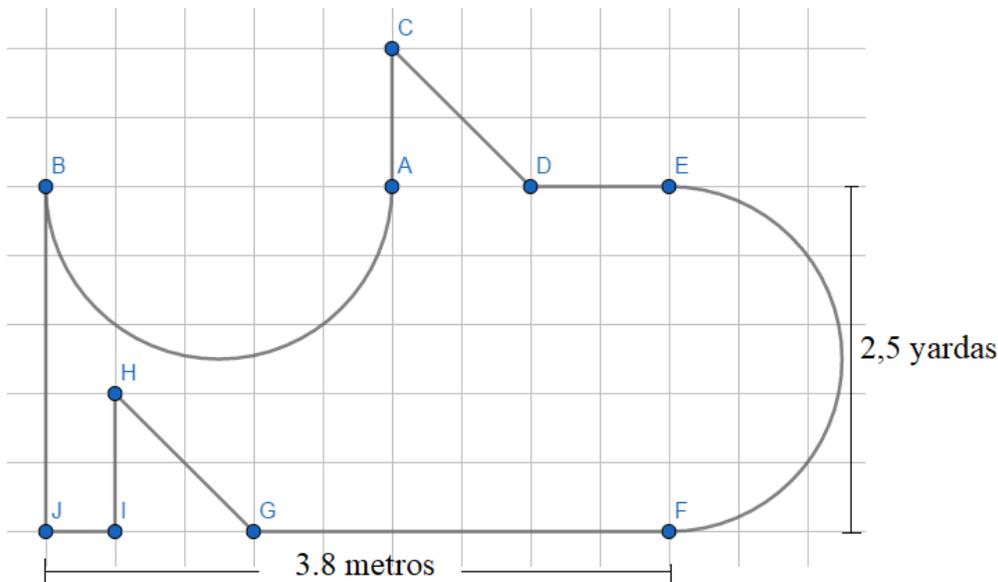


Figura 74. Figura que acompaña SD3-T1

**Análisis de posibles tratamientos:**

El estudiante que resuelva esta situación debe realizar trazos suplementarios que le permitan comparar el área de las subfiguras para posteriormente hacer unos tratamientos mereológicos como el trasladar, rotar figuras y reconfigurar el contorno global en una nueva figura que será el rectángulo BEFJ armado estilo puzzle (rompecabezas) con las subfiguras restantes.

La silueta se muestra en una cuadrícula, pero debido al tono y grosor no afecta la visualización como si fuera un conjunto o recopilación de cuadrados pequeños que forman la figura principal.

Se presenta posible solución a través de figuras en donde el estudiante tuvo que realizar trazos suplementarios para visualizar el triángulo de color amarillo como se muestra en la siguiente secuencia de figuras y realizar el traslado de la figura como se muestra en la figura 75.

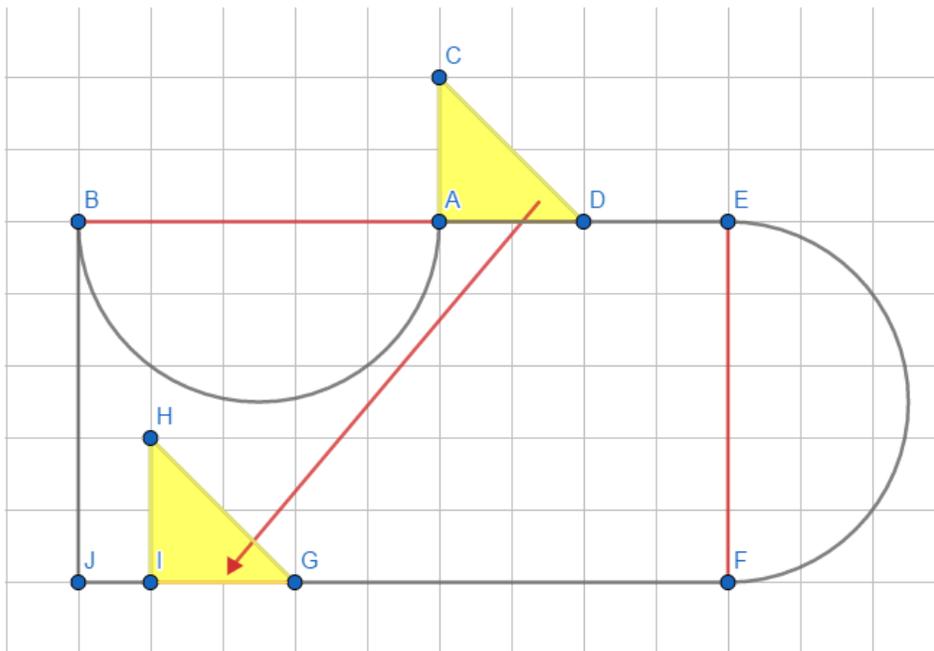


Figura 75. Figura que acompaña SD3-T1

En la segunda parte él estúdiate realiza un segundo trazo complementario para identificar la región circular de color verde (figura 76) y procede a realizar rotación y traslación de la figura para construir un rectángulo el cual es más sencillo para el análisis y comprensión del área de la figura.

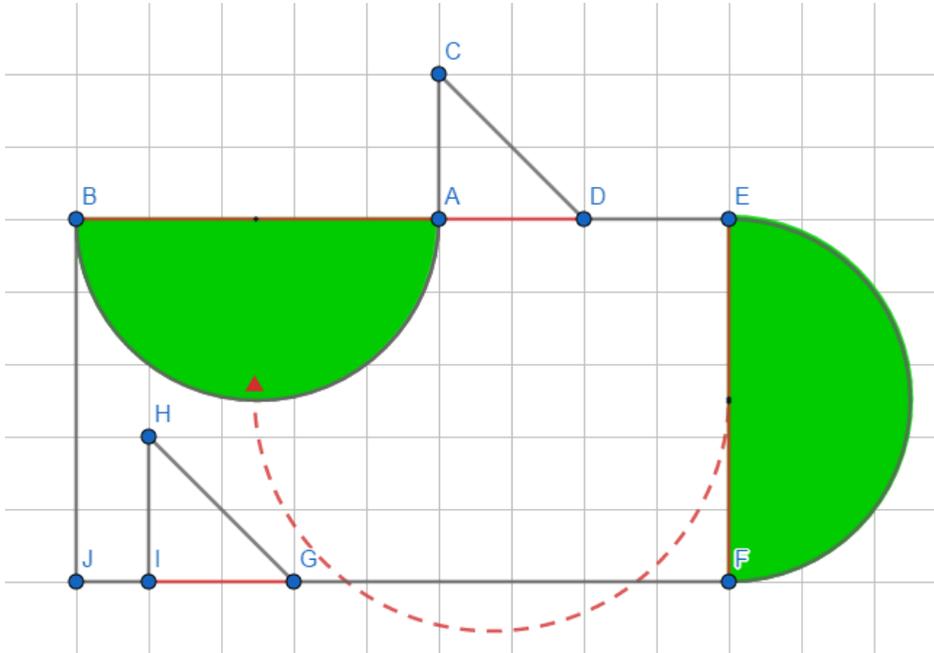


Figura 76. Figura que acompaña SD3-T1

Después de los procesos mereológicos mostrados en las dos figuras 75, 76 el estudiante puede visualizar un rectángulo que es más sencillo para su análisis como mostramos a continuación en la figura 77.

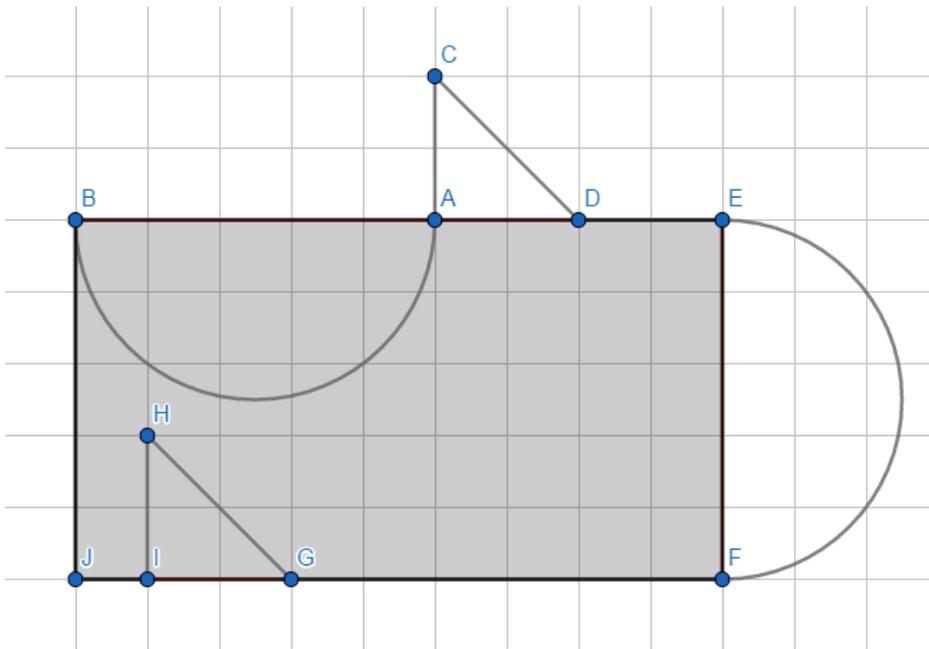


Figura 77. Figura que acompaña SD3-T1

Solo resta que el estudiante realice la conversión de yardas a metros es decir  $2.5 \text{ Yd} \cdot \frac{91.44 \text{ cm}}{1 \text{ yd}} \cdot \frac{1 \text{ mt}}{100 \text{ cm}} = 2.286 \text{ mt}$  a continuación el estudiante puede aplicar formula  $L \times L$  para encontrar el área del rectángulo  $3.8 \text{ mt} * 2.286 \text{ mt} = 8.68 \text{ mt}^2$  que es el área que queríamos averiguar.

### Tarea 2 situación 3

*Doña María va a realizar un vestido que tiene las medidas y contorno como se muestra en la siguiente figura. Ayúdala a comprar un retazo de tela con el que pueda cubrir de forma exacta el área del vestido sin desperdiciar materia prima, dar la respuesta en pulgadas cuadradas.*

*Realiza trazos suplementarios y reconfigura la figura 78 en una figura más sencilla para resolver el ejercicio.*

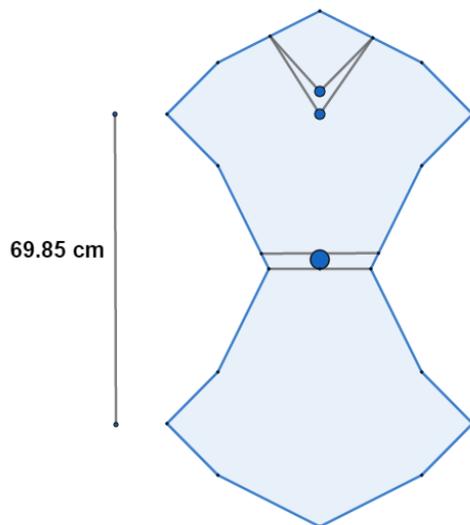


Figura 78. Figura que acompaña SD3-T2

En la figura 79 se espera que el estudiante realice la designación de los vértices y en la figura 80 realice trazos suplementarios que le permita visualizar la forma de transformar la figura en el cuadrado COKG

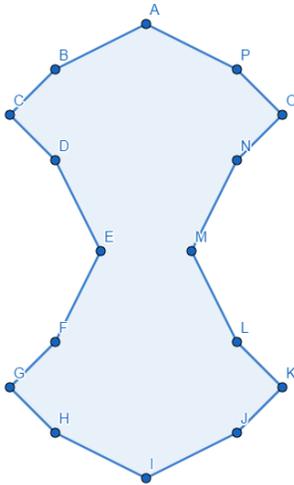


Figura 79. Figura que acompaña SD3-T2

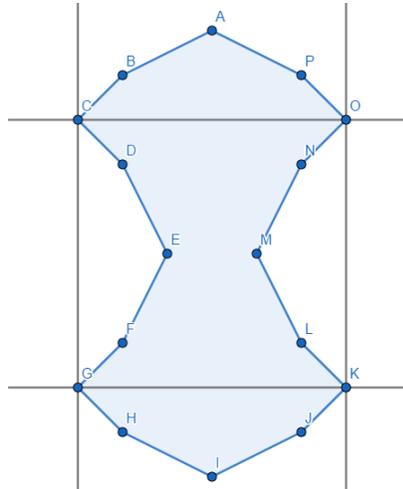


Figura 80. Figura que acompaña SD3-T2

En la figura 81 se representan las reconfiguraciones necesarias para llegar al cuadrado COKG

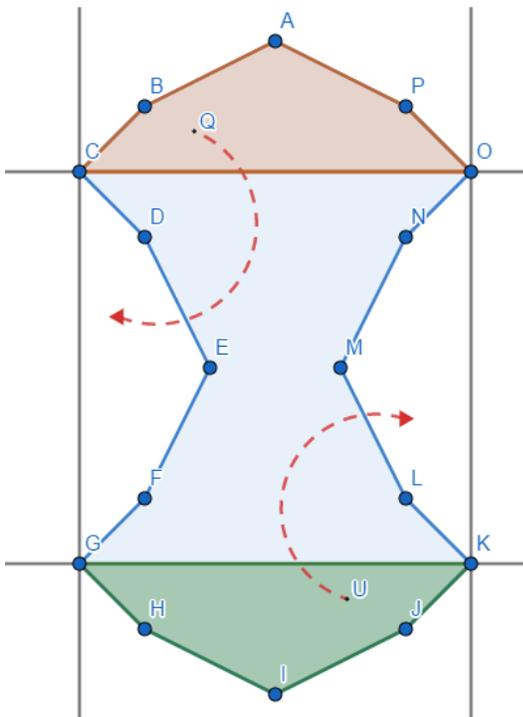


Figura 81. Figura que acompaña SD3-T2

En esta situación que se muestra en la *figura inicial (figura 79)* hay un control de tipo visual al no tener cuadrícula lo cual permitirá observar la experticia del resolutor y que tanto

puede a través de trazos suplementarios comparar áreas y realizar reconfiguraciones para llegar la solución del problema.

El objetivo de la actividad es la comparación de áreas, pero además debe realizar tratamientos de tipo figural y numérico para llegar al valor del área total de la *figura inicial* como se muestra en la figura 82.

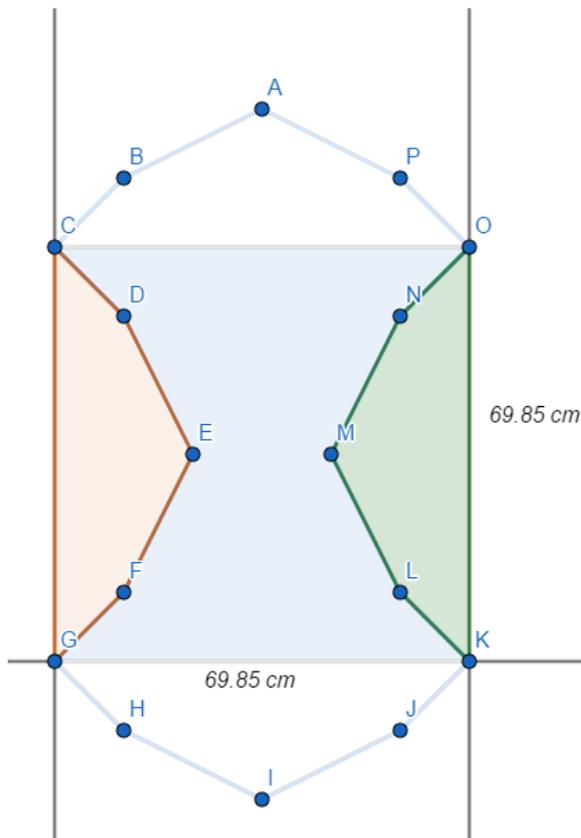


Figura 82. Figura que acompaña SD3-T2

Solo resta sacar el área del cuadrado COKG que lo puede hacer  $L \times L$  es decir  $69.85\text{ cm} * 69.85\text{ cm} = 4879.02\text{ cm}^2$ .

### Tarea 3 situación 3

La siguiente consigna tiene por objetivo introducir al estudiante en el concepto de relación fraccionaria “parte todo” para lo cual se plantean ocho tareas que le permitirá razonar sobre las áreas sombreadas y su relación con la unidad de referencia.

*¿Qué parte de la figura esta sombreada con relación a la unidad de referencia presentada en cada una de las ocho tareas?*

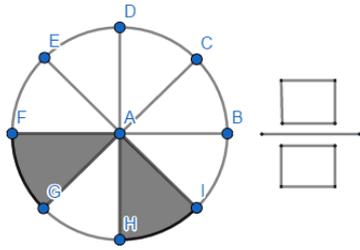


Figura 83. Figura que acompaña SD3-T3

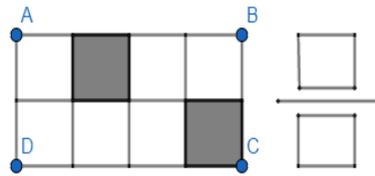


Figura 84. Figura que acompaña SD3-T3

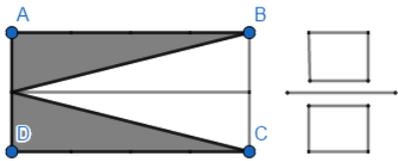


Figura 85. Figura que acompaña SD3-T3

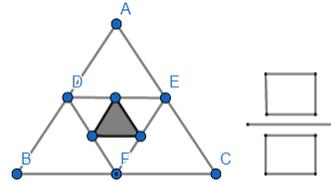


Figura 86. Figura que acompaña SD3-T3

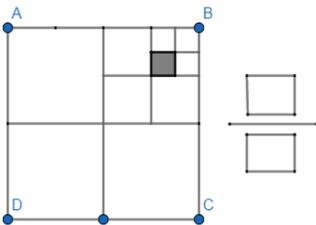


Figura 87. Figura que acompaña SD3-T3

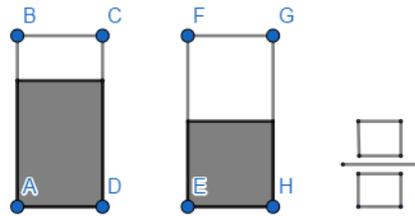


Figura 88. Figura que acompaña SD3-T3

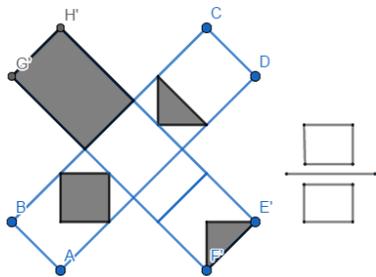


Figura 89. Figura que acompaña SD3-T3

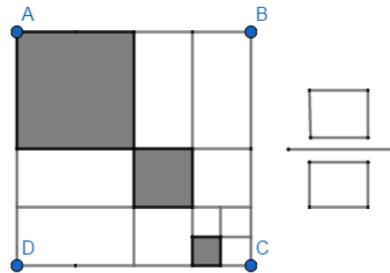


Figura 90. Figura que acompaña SD3-T3

La tarea 3 de la situación 3 está compuesta por una serie de figuras con regiones sombreadas que buscan introducir al estudiante en el concepto de la relación parte todo y la conversión de esta relación a un registro numérico fraccionario a continuación, mostramos las posibles aprehensiones que puede realizar el estudiante.

La figura 91 que pertenece a la situación 3 se puede resolver trasladando la región sombreada de tipo circular ABI como se muestra en la figura 92 e inhibiendo dos trazos EI y CG como se muestra en la figura 93 para visualizar que la región sombreada corresponde de color gris es la cuarta parte de la figura.

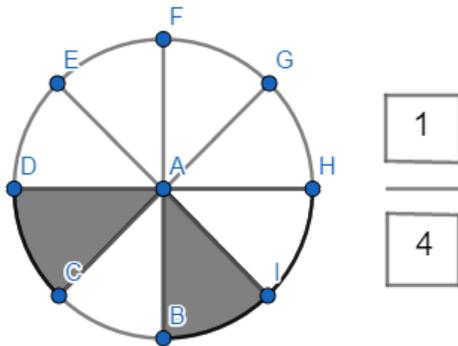


Figura 91. Figura que acompaña SD3-T3

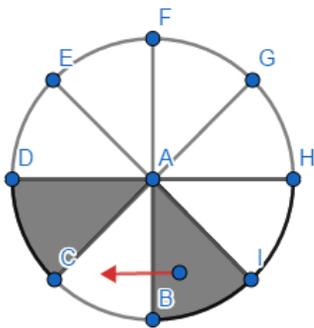


Figura 92. Figura que acompaña SD3-T3

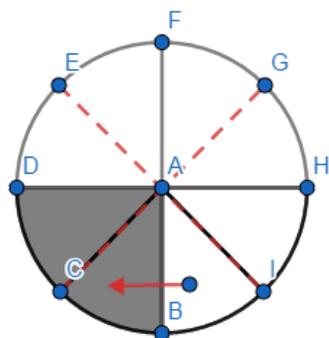


Figura 93. Figura que acompaña SD3-T3

La posible forma de resolver la situación de la figura 94 se muestra a continuación en la figura 95 trasladando el cuadrado designado con la letra a dos unidades a la izquierda, después se puede inhibir el segmento GH para poder visualizar que dicha zona sombreada de color gris es la cuarta parte de la figura rectangular ABCD como se muestra en la figura 95.

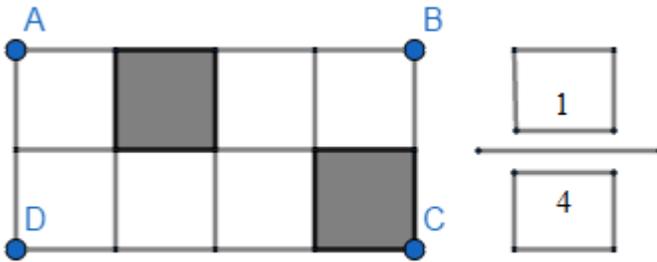


Figura 94. Figura que acompaña SD3-T3

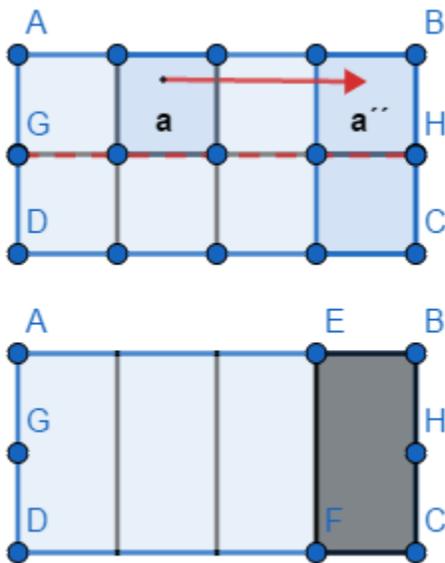


Figura 95. Figura que acompaña SD3-T3

La figura 96 que acompaña la situación 3 tarea 3 posible mente se puede resol ver realizando una rotación como se muestra en la figura 97 para que el estudiante logre visualizar que la zona sombreada representa  $\frac{1}{2}$  de área de la figura ABCD como se muestra a continuación.

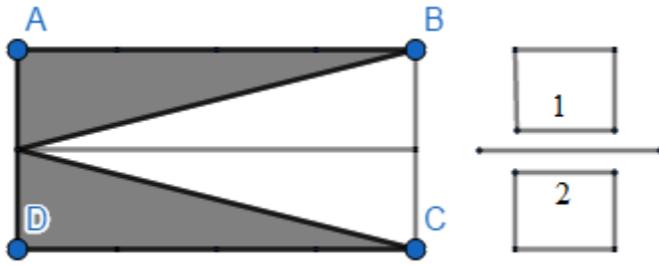


Figura 96. Figura que acompaña SD3-T3

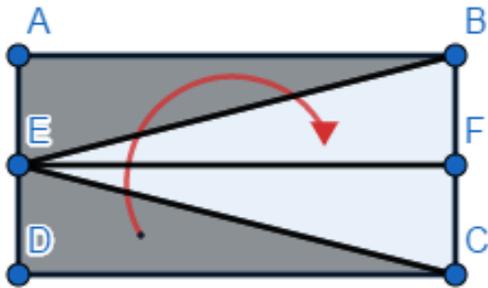


Figura 97. Figura que acompaña SD3-T3

Para lograr visualizar que en la figura 98 la de región sombreada es equivalente a  $\frac{1}{16}$  del triángulo ABC es necesario realizar trazos suplementarios como los que se muestran en la figura 99 de color rojo para razonar que dentro de la figura ABC caben 16 partes iguales y una de ellas representa una parte del todo equivalente a  $\frac{1}{16}$ .

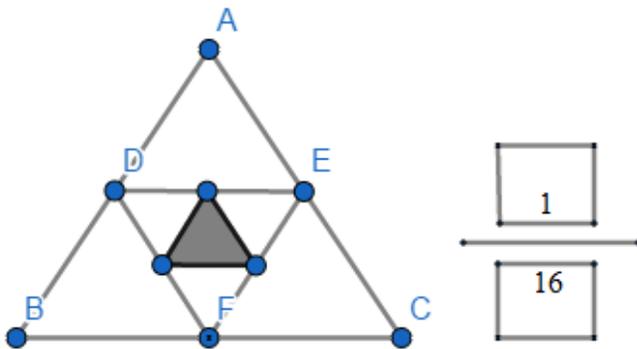


Figura 98. Figura que acompaña SD3-T3

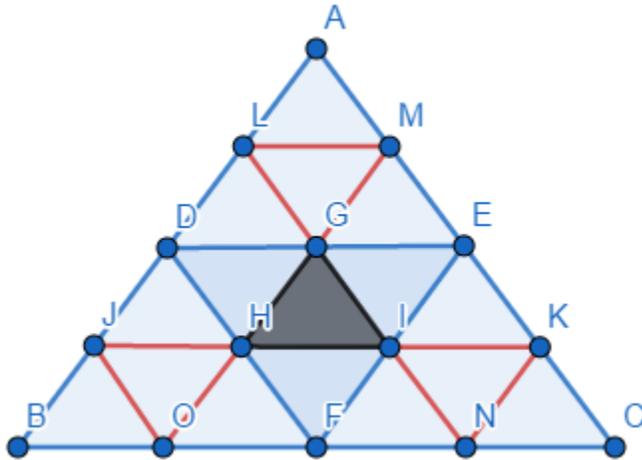


Figura 99. Figura que acompaña SD3-T3

Una posible aprehensión por parte del estudiante resolutor para comprender que la región sombreada es  $\frac{1}{64}$  del cuadrado ABCD figura 100 es homogenizar las subfiguras cuadradas en relación con la más pequeña como se muestra en la figura 101 y así poder resolver la situación planteada.

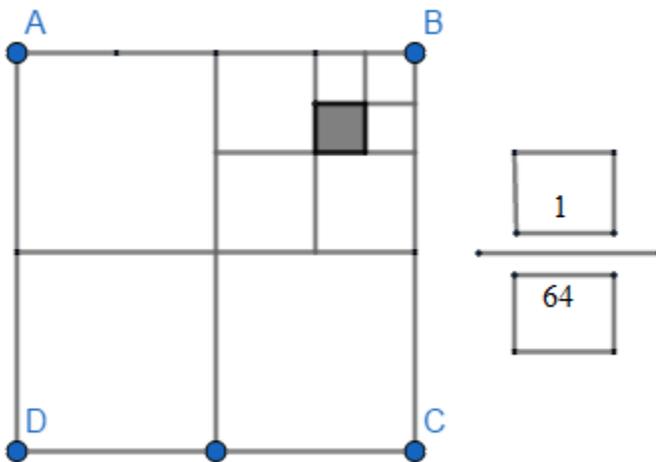


Figura 100. Figura que acompaña SD3-T3

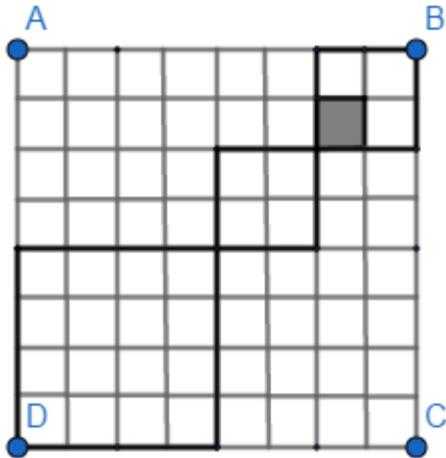


Figura 101. Figura que acompaña SD3-T3

Para resolver esta situación es necesario realizar trazos suplementarios con el fin de homogenizar las dos figuras ABCD y EFGH como se muestra en la figura 102 quedando ambas unidades representada en relación a cuartos y así determinar que la sumatoria de la figura ABCD que es  $\frac{3}{4}$  más la figura EFGH que es  $\frac{2}{4}$  esto da como resultado final  $\frac{5}{4}$ .

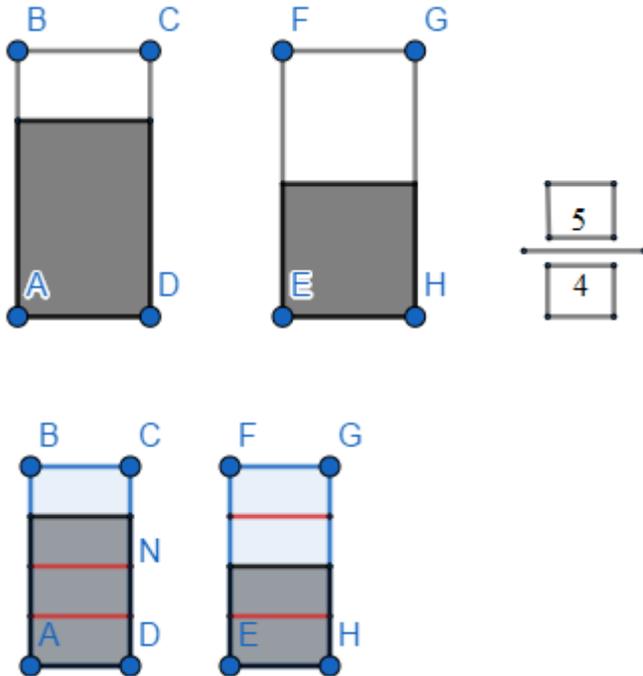


Figura 102. Figura que acompaña SD3-T3

Para resolver esta situación que se muestra en la figura 103 es necesario agrupar las regiones grises en un solo lugar a través movimientos mereológicos como se muestra en la figura 104 y posteriormente relizar una homogenización y para ello se plantea la realización de trazos suplementarios con el fin de poder determinar un numero de divisiones de la figura inicial y cuantas de estas partes estan sombreadas como se muestra en la figura 101 para llegar a la conclusión que dicha region sombreada representa  $\frac{10}{28}$  del total de la figura.

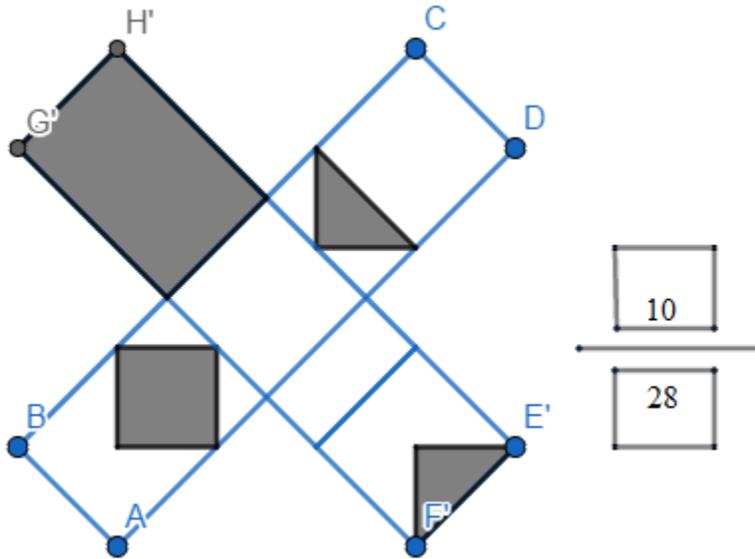


Figura 103. Figura que acompaña SD3-T3

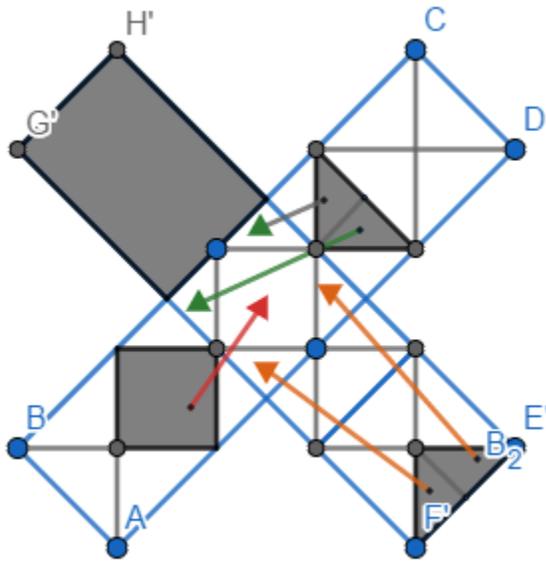


Figura 104. Figura que acompaña SD3-T3

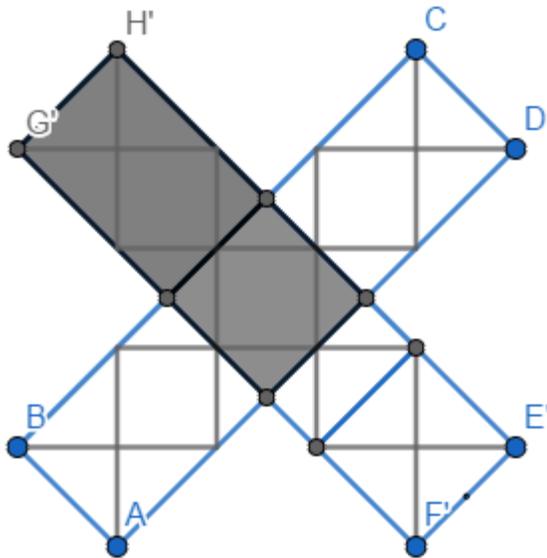


Figura 105. Figura que acompaña SD3-T3

En esta última tarea de la situación 3 el estudiante debe realizar una homogenización de la figura para lograr visualizar cual es parte sombreada en relación a la figura ABCD figura 106 dichos procesos de homogenización se refleja en la figura 107 dando como resultado que la zona gris corresponde a  $\frac{21}{64}$  del total de la figura ABCD.

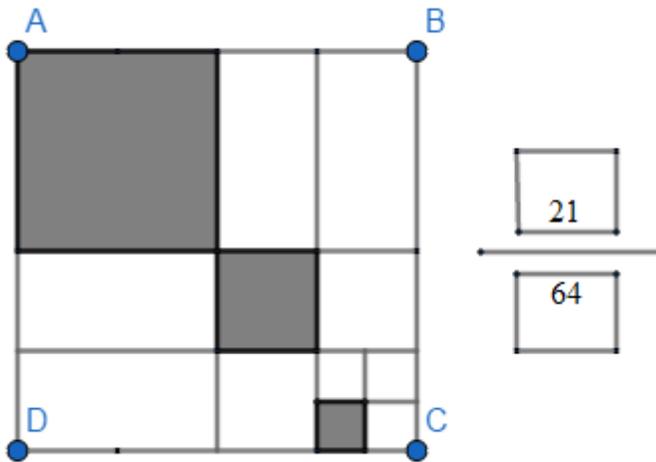


Figura 106. Figura que acompaña SD3-T3

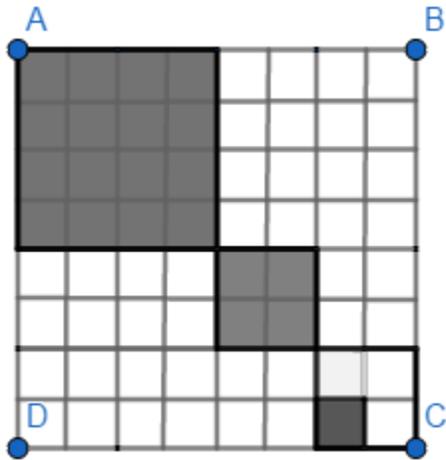


Figura 107. Figura que acompaña SD3-T3

**Tarea 4 situación 3**

Hallar el área de la región sombreada de la unidad 1 y 2 figura 108 teniendo en cuenta el siguiente parámetro, el área del triángulo DEF de la unidad 1 equivale a  $6 \text{ m}^2$  y el triángulo ILM de la unidad 2 es la cuarta parte del triángulo DEF.

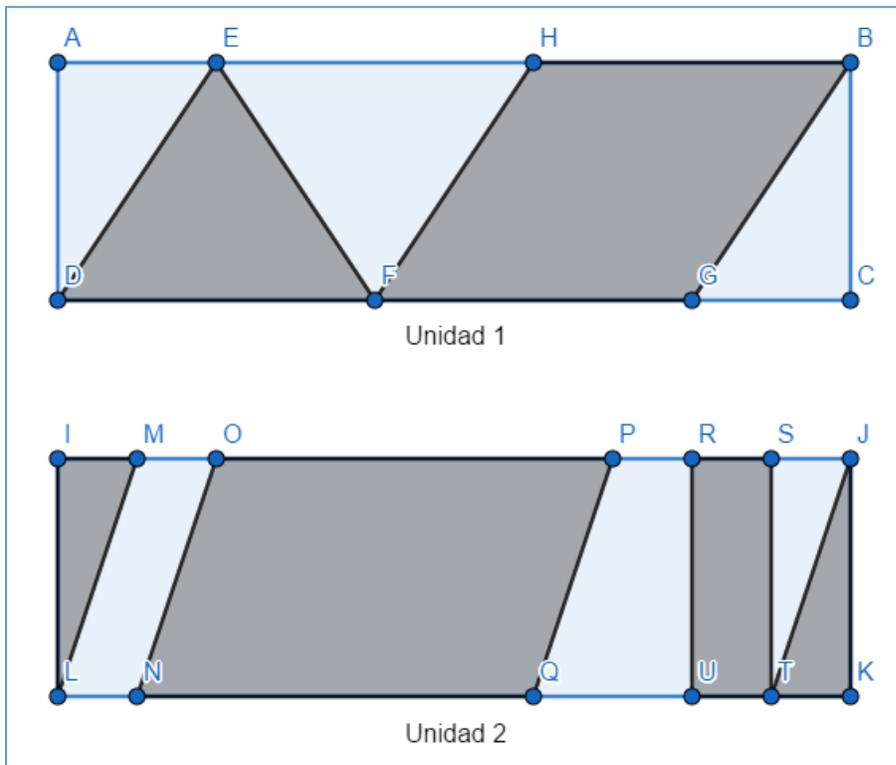


Figura 108. Figura que acompaña SD3-T4

Se espera que el estudiante realice un trazo suplementario desde el punto G hasta el punto H como se muestra en la figura 109.

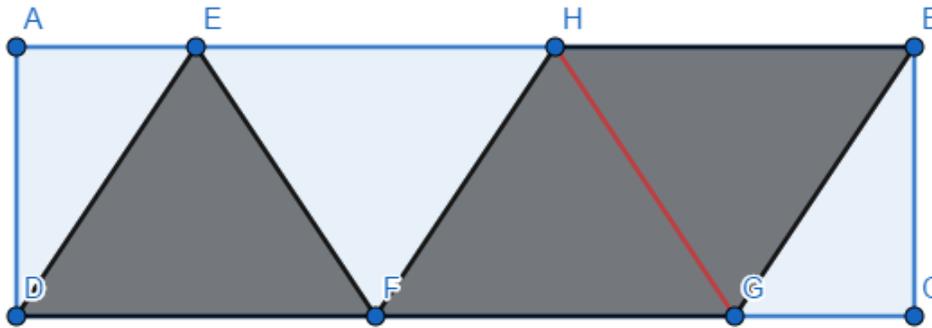


Figura 109. Figura que acompaña SD3-T4

Con el fin de identificar tres triángulos como se observa en la figura 109 de igual área y pueda realizar la sumatoria de dichas regiones que son  $18 m^2$ .

Después en la unidad 2 figura 110 se espera que el estudiante puede tomar uno de los dos caminos el primero sería tomar la unidad mínima conocida ILM y trazando líneas suplementaras realice subdivisiones y después realice un conteo de áreas como se muestra a continuación.

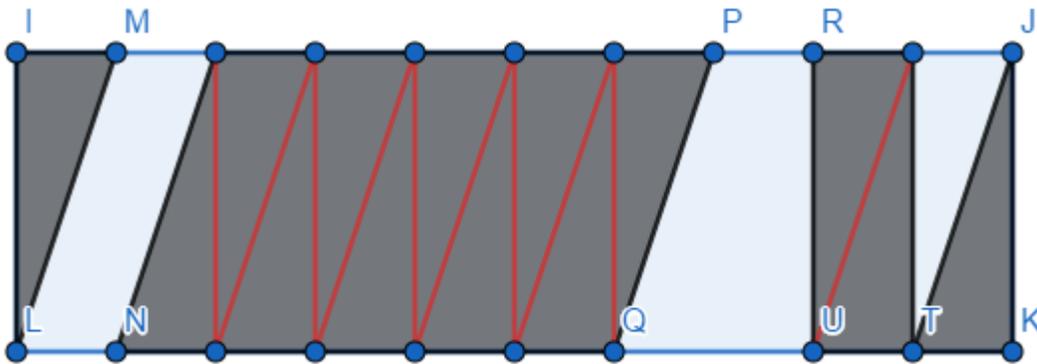


Figura 110. Figura que acompaña SD3-T4

Dando como resultado 14 triángulos de igual dimensión a ILM que es la cuarta parte del triángulo DEF es decir  $1.5 m^2$  y al sumar sus áreas dará  $21m^2$  figura 110.

Un segundo camino podría ser el de la deconstrucción y reconfiguración de la unidad 2 que sería en nuestro caso la opción más potente dentro de los procesos de visualización esperados y que mostramos a continuación figura 111.

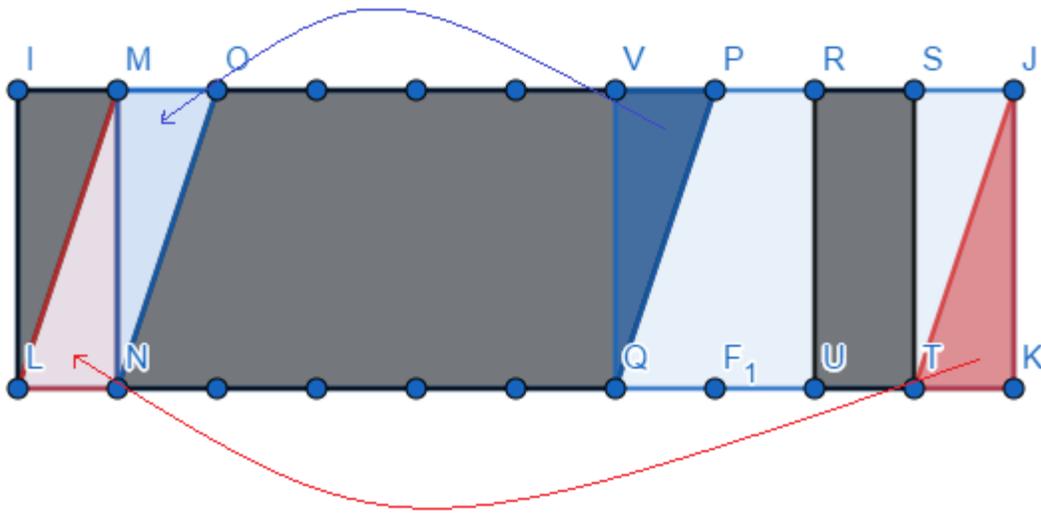


Figura 111. Figura que acompaña SD3-T4

Y finalmente el cuadrado RSTU trasladarlo a la posición VPF1Q figura 112.

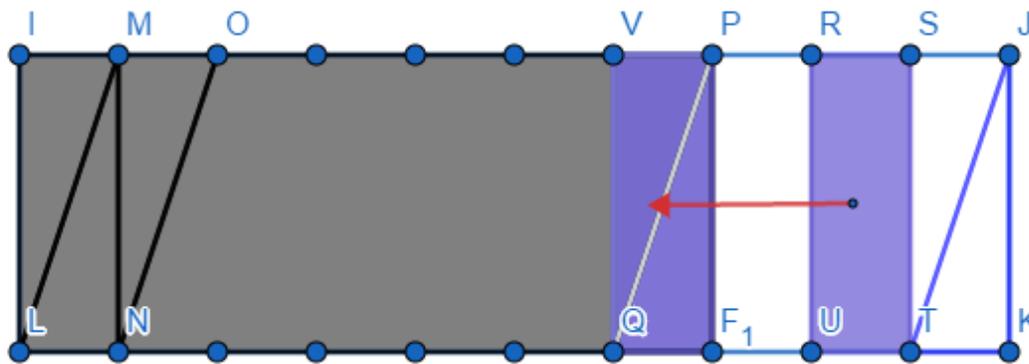


Figura 112. Figura que acompaña SD3-T4

La relación parte todo sería 7 de 10 y cada una de las partes sombreadas de forma rectangular medirían  $3 m^2$  multiplicado por 7 unidades daría el mismo resultado de  $21 m^2$  y al sumar las áreas de la unidad 1 y 2 se obtiene un área total de  $39 m^2$ .

**Tarea 5 situación 3**

*Escribe la fracción de cada unidad y determina la sumatoria de zona sombreada de color gris oscuro de las 3 unidades.*

Para resolver la situación 3 tarea 5 figura 113 es necesario realizar en la unidad 2 una rotación y traslación del triángulo FPQ y ubicarlo en el espacio EMN, en la unidad 3 es necesario subdividir el triángulo KLR en dos subfiguras KUR y ULR las cuales se deben rotar y trasladar los respectivos JVR y RWI como se muestra en la figura 114.

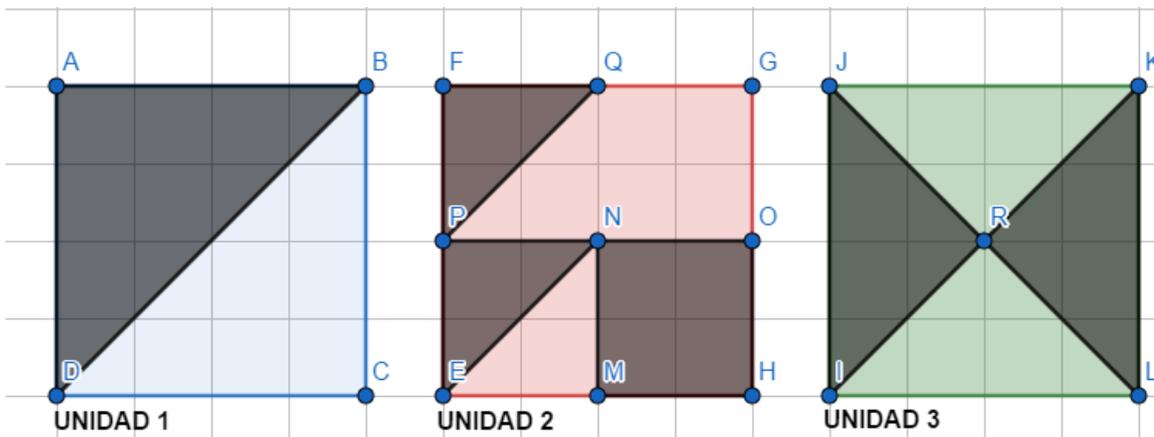


Figura 113. Figura que acompaña SD3-T5

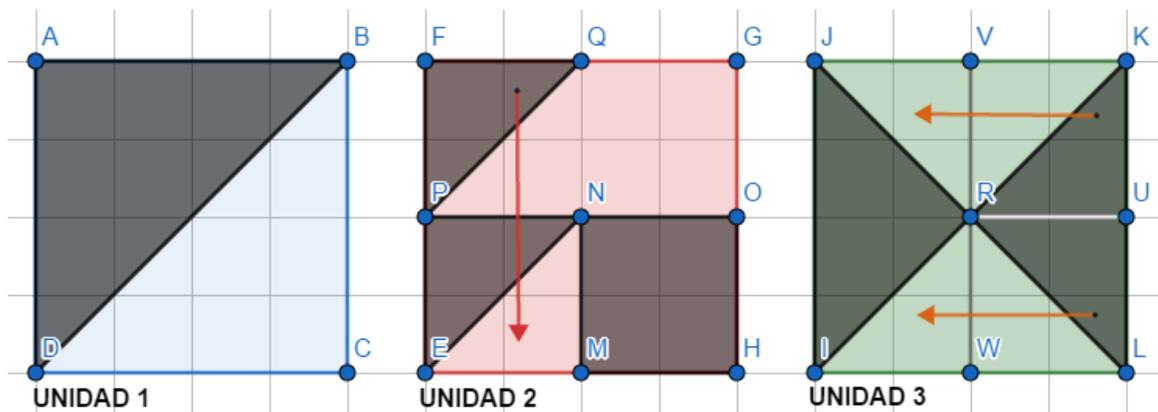


Figura 114. Figura que acompaña SD3-T5

Final mente podemos visualizar que las regiones sombreadas de cada unidad corresponden a la mitad de cada unidad como se muestra en la figura 115, al sumar dichas regiones tendemos

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

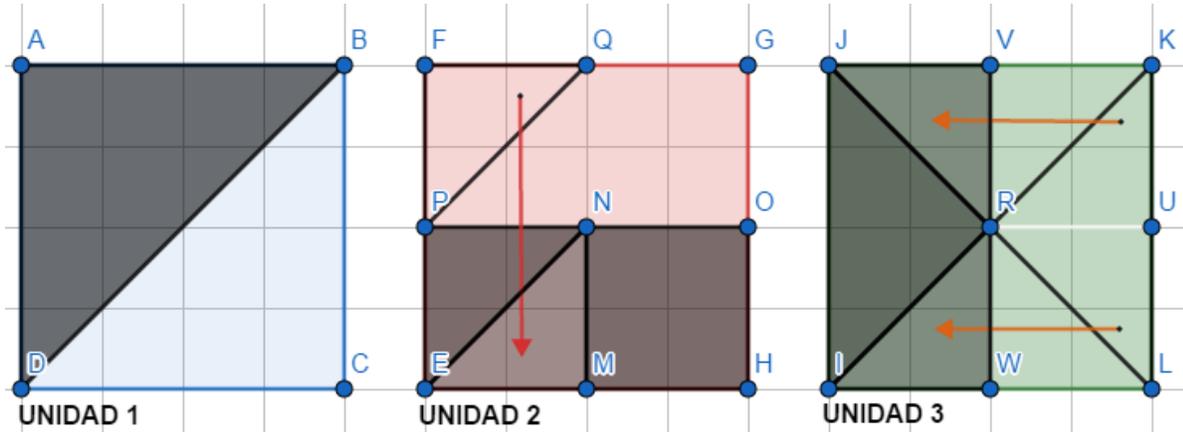


Figura 115. Figura que acompaña SD3-T5

**Tarea 6 situación 3**

Hallar el valor de la sumatoria las regiones sombreadas de la figura sd3 116 y 117, explica como lo hiciste y justifica tu respuesta.

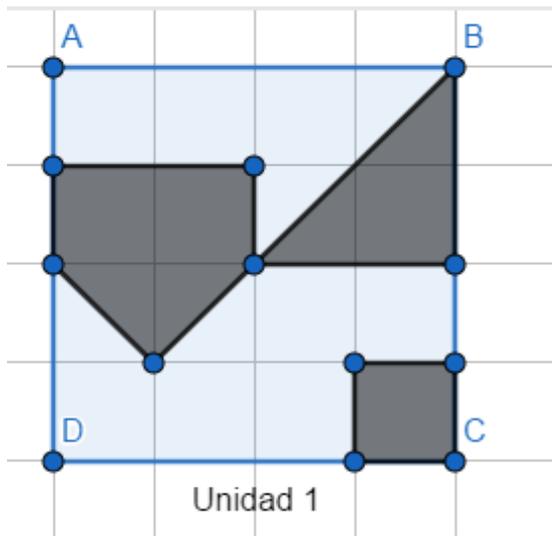


Figura 116. Figura que acompaña SD3-T6

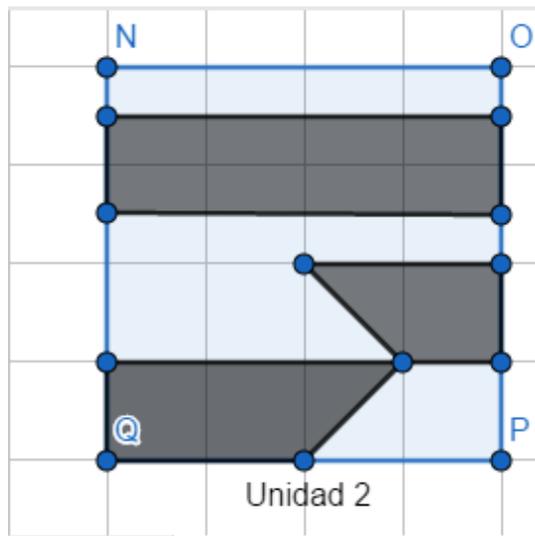


Figura 117. Figura que acompaña SD3-T6

La figura 116 contiene tres subfiguras un polígono, un triángulo y un cuadrado que se encuentran en una cuadrícula, dicha cuadrícula se diseñó de un tono y grosor diferente para que no interfiera en la visualización. Una parte de la solución será realizar reconfiguraciones que potencialicen la visualización y razonamiento sobre las figuras sombreadas. El estudiante debe utilizar trazos suplementarios para deconstruir las unidades iniciales y realizar reconfiguraciones que le permitan visualizar el área sombreada para lo cual podría iniciar con la reconstrucción del triángulo BJK de la unidad 1 figura 118 realizando una rotación y translación para propiciar una reconfiguración en forma de rectángulo como se muestra a continuación en la figura 119.

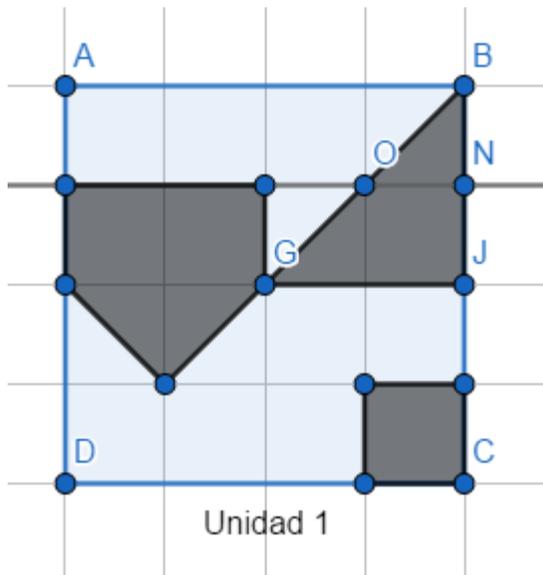


Figura 118. Figura que acompaña SD3-T6

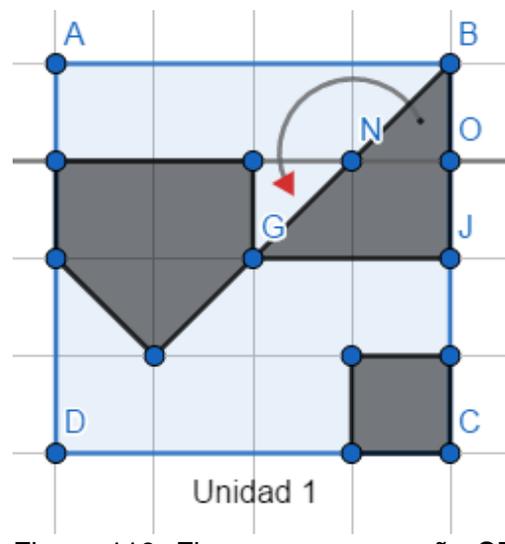


Figura 119. Figura que acompaña SD3-T6

El nuevo rectángulo FNJG será comparado en su área y se procederá a trasladarse como se muestra en la figura 120 y 121.

Una de las posibilidades a seguir sería realizar un trazo suplementario que me permita dividir el cuadrado que se ubica en el vértice “C” figura 120 para trasladar sus subfiguras que serán dos triángulos rectángulos y completar un rectángulo designado con las letras AOPJ, a continuación, se ilustra la situación en la figura 120 y 121.

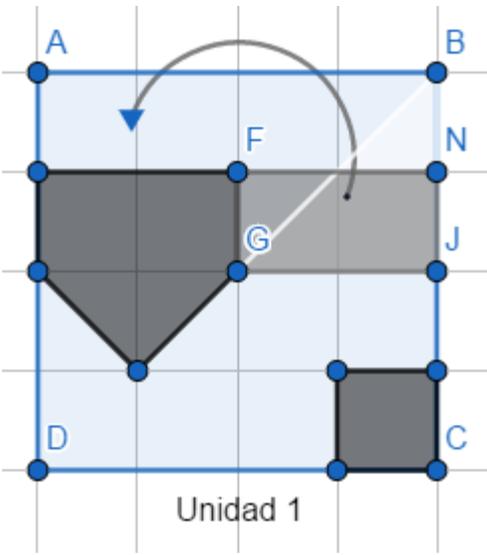


Figura 120. Figura que acompaña SD3-T6

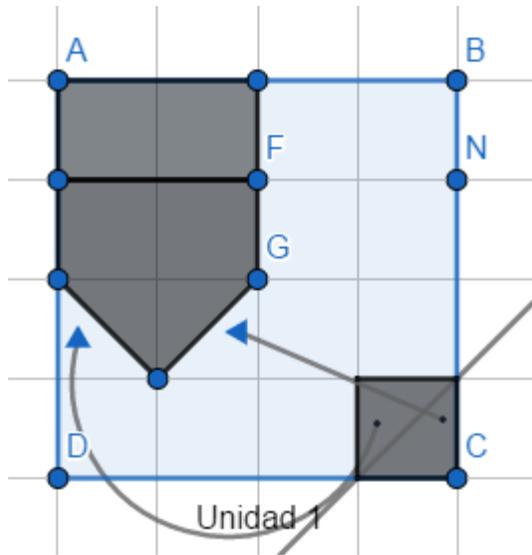


Figura 121. Figura que acompaña SD3-T6

Finalmente quedaría reconfigurada como se muestra en la figura 122 que equivale a  $\frac{3}{8}$ .

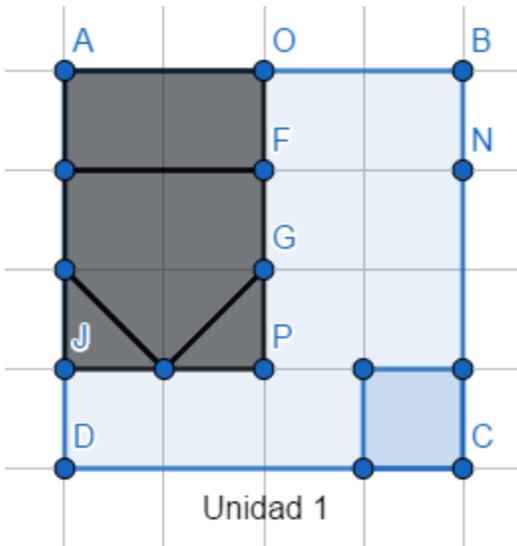


Figura 122. Figura que acompaña SD3-T6

Después se procederá con la unidad 2 figura 123 y en esta nos encontramos con dos trapecios y un rectángulo, el trapecio WVZX a través de un golpe de vista se puede comparar su área con el trapecio XZPO, o por el contrario se puede esperar un proceso de tipo reflexión o espejo de la figura WVZX en el espacio XZPO, también se podría dejar

el segmento XZ fijo y realizar un doblés hacia la zona XZPO como un efecto de compuerta como se observa en la figura 123 y 124.

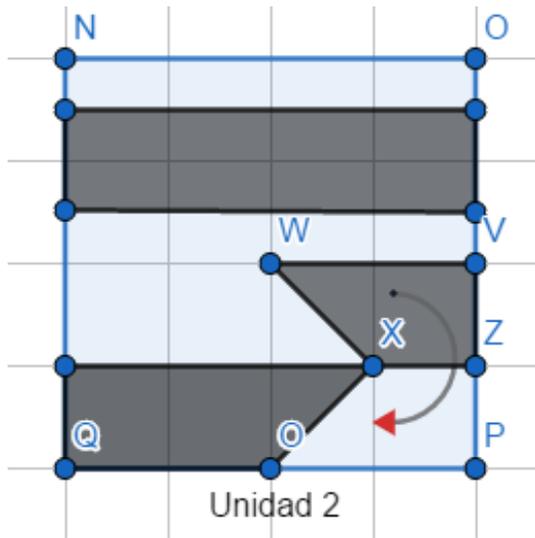


Figura 123. Figura que acompaña SD3-T6

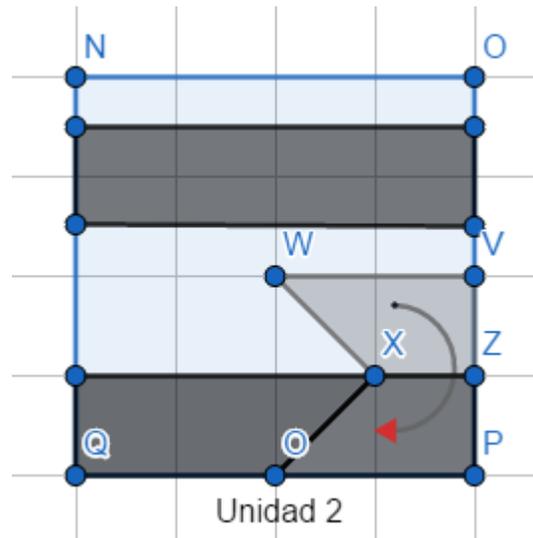


Figura 124. Figura que acompaña SD3-T6

Para concluir con la unidad 2 se juntan los dos nuevos rectángulos de igual dimensión quedando un nuevo rectángulo de vértices RSPQ figuras 125 y 126 y este es equivalente

$$a \frac{1}{2}$$

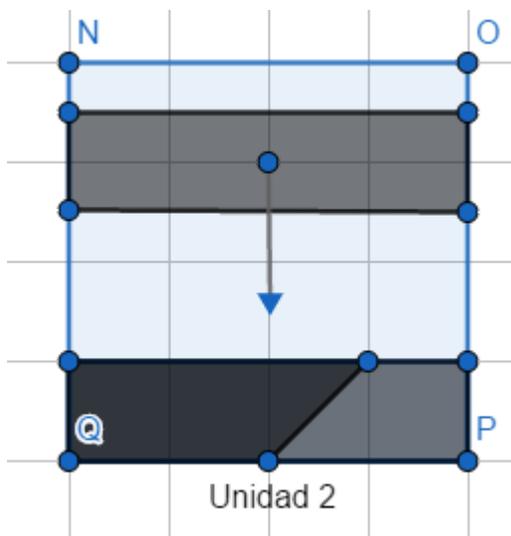


Figura 125. Figura que acompaña SD3-T6

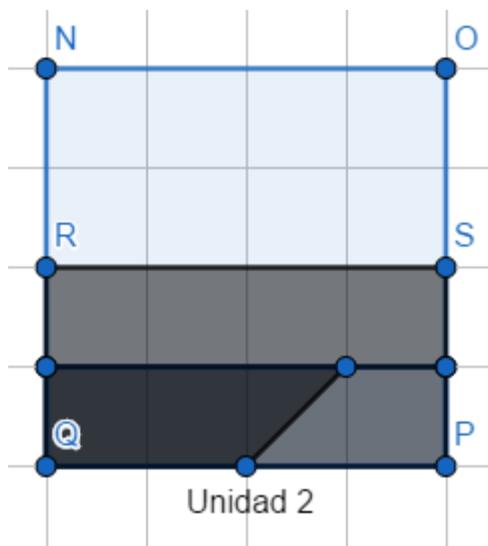


Figura 126. Figura que acompaña SD3-T6

Sumando el área sombreada de la unidad 1 y 2 reconfiguradas figuras 122 y 126 respectivamente obtenemos esta nueva reconfiguración que es más potente para su análisis y resolución, solo queda realizar un tratamiento en el registro numérico fraccionario para que las fracciones sean homogéneas y sumar dichas regiones  $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$  entonces  $\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$  de la unidad como se muestra en la figura 127.

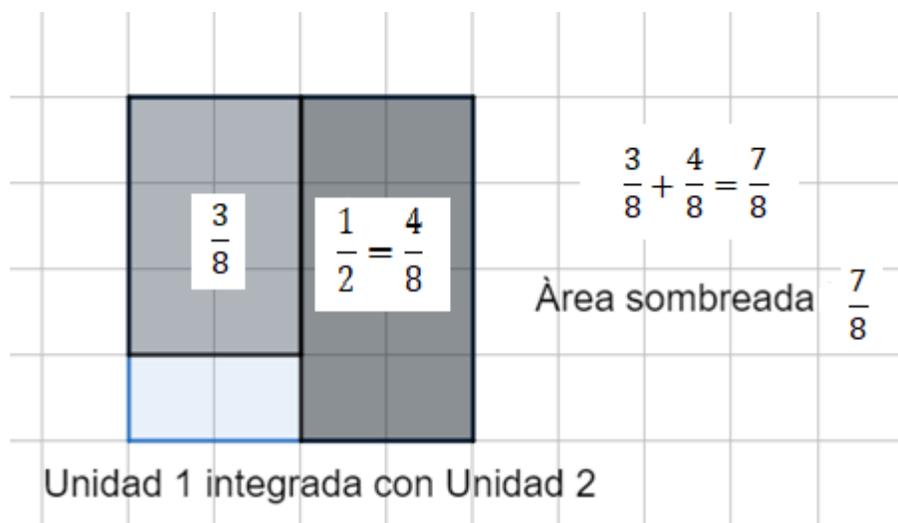


Figura 127. Figura que acompaña SD3-T6

### Tarea 7 situación 3

Realiza los siguientes trazos suplementarios, haz un trazo del segmento FH y JL, igualmente realiza esta tarea con los segmentos OR, EK y PQ posteriormente deconstruye la región sombreada de color azul. Construye una nueva figura que sea más potente para el análisis y define cuál es la fracción que ocupa dicha zona azul con respecto del rectángulo ABCD figura 128.

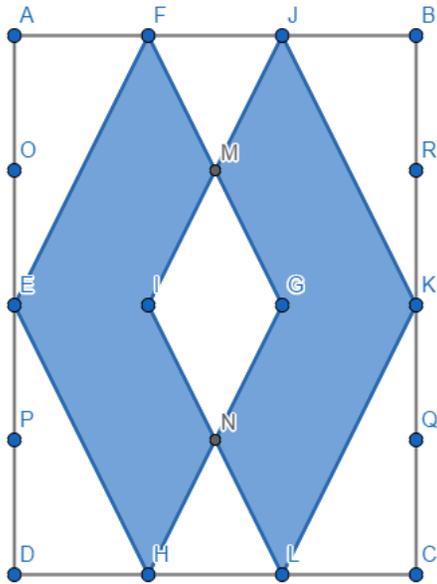


Figura 128. Figura que acompaña SD3-T7

Se realizan los trazos suplementarios en la figura 129 tales como OR, EK, PQ, FH y JL, como lo indica la consigna.

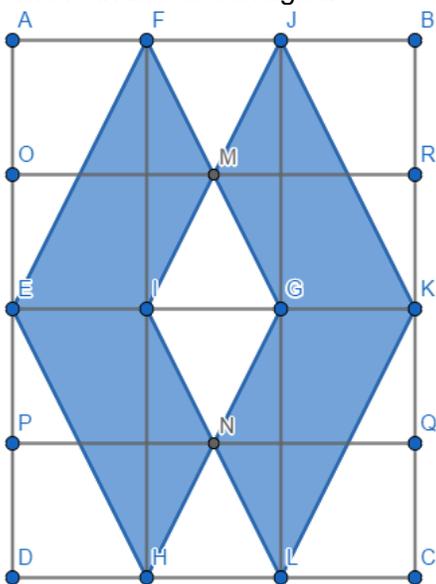


Figura 129. Figura que acompaña SD3-T7

Al comparar el triángulo  $EFI$  se evidencia una equivalencia con el espacio triangular  $LKC$  y se procede a realizar la traslación, igualmente el triángulo  $HIE$  es equivalente con el espacio triangular  $KBJ$  y se procede a realizar la traslación figuras 130 y 131.

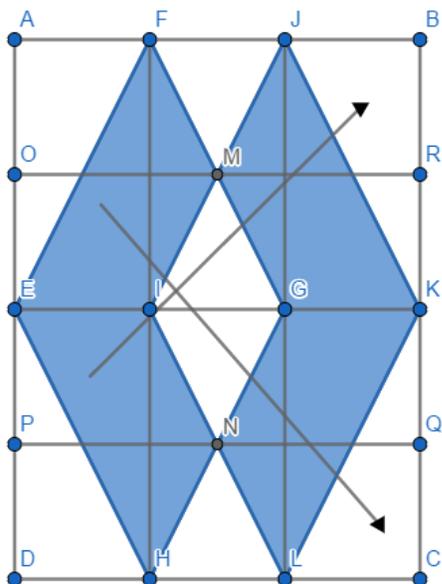


Figura 130. Figura que acompaña SD3-T7

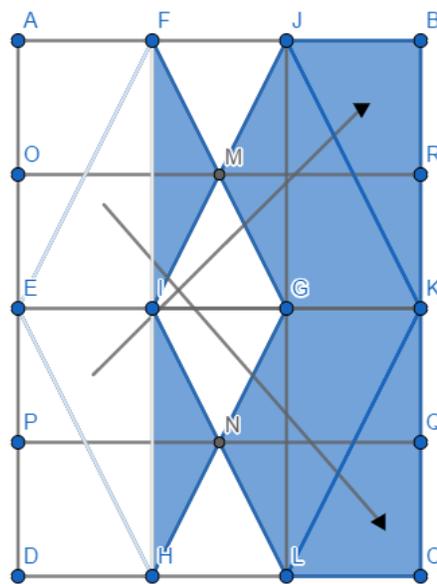


Figura 131. Figura que acompaña SD3-T7

- Se espera que el estudiante realice un nuevo trazo suplementario que pase por el segmento  $MN$  para que pueda comparar el triángulo  $HIN$  con el espacio triangular  $MNG$  como se muestra en la figura 132.

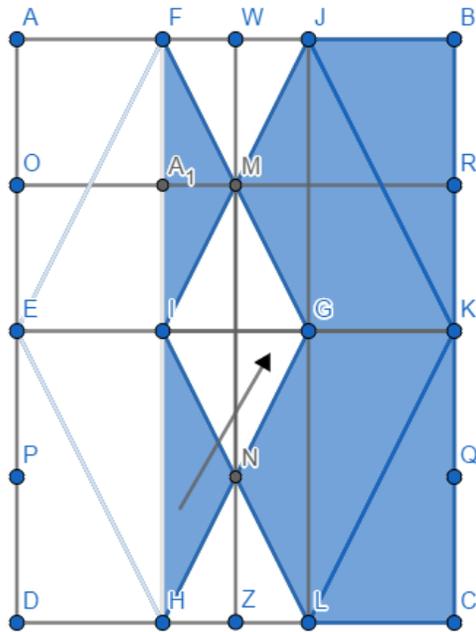


Figura 132. Figura que acompaña SD3-T7

Posteriormente realizando una comparación de equivalencias de áreas de los triángulos  $FMA_1$  y  $A_1MI$  con los espacios triangulares  $JMW$  y  $NLZ$  respectivamente se procede a realizar las rotaciones y traslaciones pertinentes figura 133.

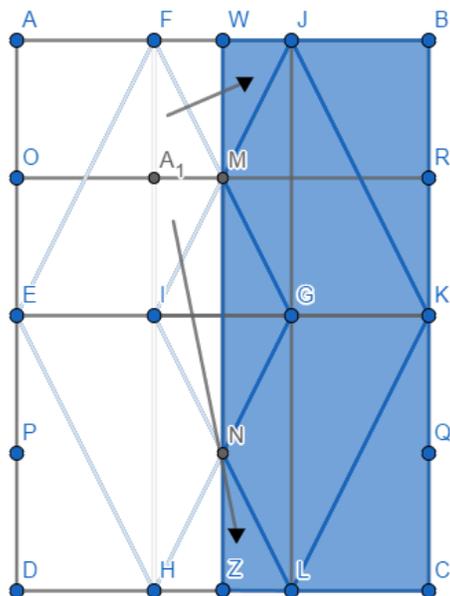


Figura 133. Figura que acompaña SD3-T7

Con esta nueva figura que se reconstruyó (figura 133) es más fácil deducir que el área de la región sombreada con respecto al rectángulo ABCD es de un  $\frac{1}{2}$  de la unidad total.

### Tarea 8 situación 3

*Encuentra una estrategia para definir cuál es la fracción de la parte sombreada de color rojo con respecto a la unidad cuadrada ABCD. Explica los procedimientos realizados.*

En esta actividad en relación con la tarea 7 la figura se muestra en una cuadrícula de líneas suaves que no interrumpe con los factores de visualización y al contrario ayuda con la realización de trazos suplementarios, la comparación de áreas equivalentes, además se necesita de una homogenización de fracciones para dar la respuesta, figura 134.

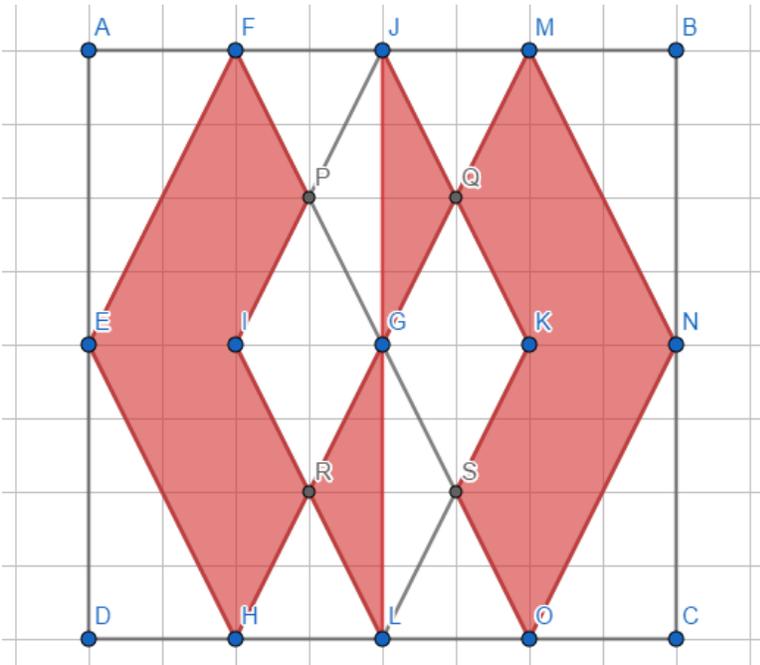


Figura 134. Figura que acompaña SD3-T8

Un primer paso que se puede esperar por parte de los estudiantes es que realicen trazos suplementarios que le ayuden a visualizar subfiguras que puede trasladar a otros lugares con el fin de reconfigurar la figura inicial en otra que sea más fácil de analizar como se muestra a continuación en la figura 135.

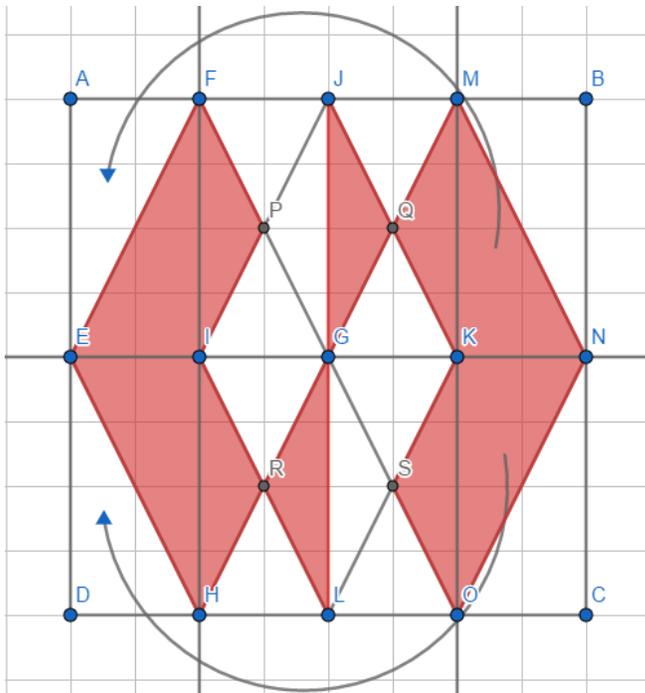


Figura 135. Figura que acompaña SD3-T8

A través de comparación de áreas el estudiante puede visualizar que el triángulo OSK es equivalente al espacio RIP y se puede realizar una traslación para ocupar dicha región como se muestra en la figura 136.

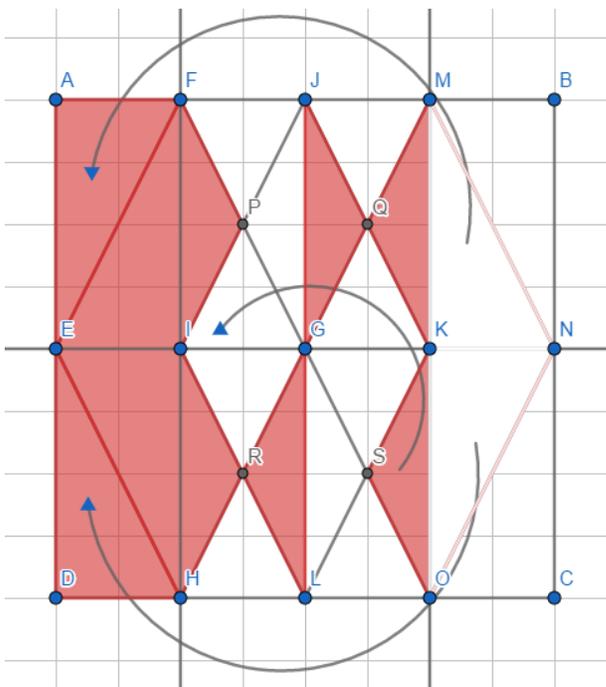


Figura 136. Figura que acompaña SD3-T8

El triángulo GJQ a través del proceso de comparación de áreas equivalentes y de un proceso de reflexión o de movimiento de compuerta ocupar el espacio triangular GPJ como se muestra en la figura 137.

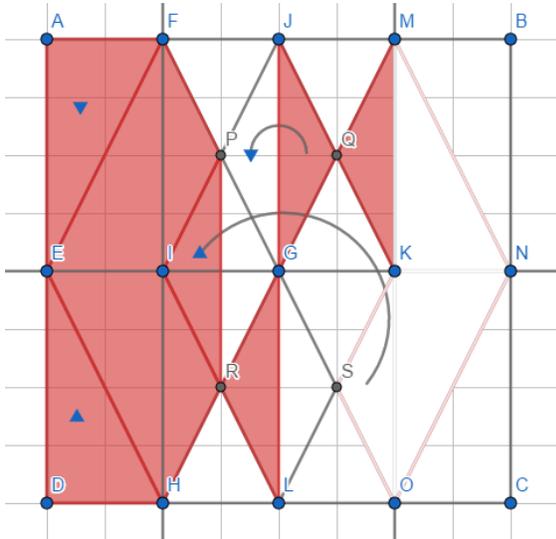


Figura 137. Figura que acompaña SD3-T8

En el triángulo KQM se puede realizar un trazo suplementario que permita visualizar este triángulo como dos subfiguras triangulares KQX y QMX además poder realizar rotaciones y traslaciones pertinentes como se muestra en las siguientes figuras 138 y 139.

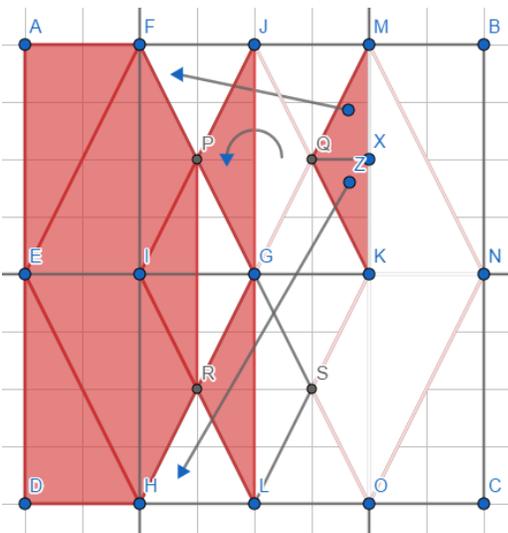


Figura 138. Figura que acompaña SD3-T8

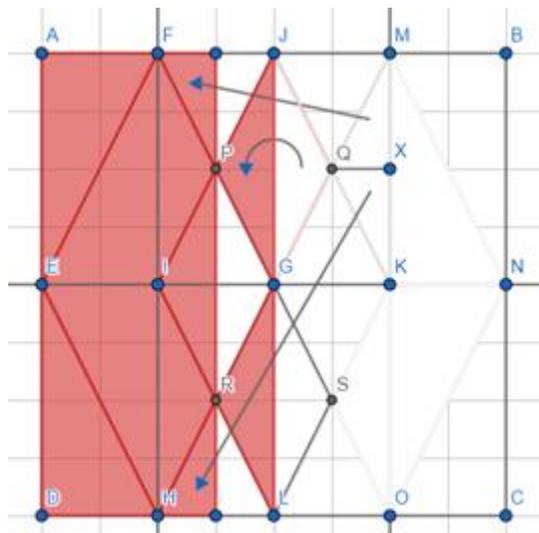


Figura 139. Figura que acompaña SD3-T8

En este punto se puede realizar un fraccionamiento del triángulo LRG realizando un trazo complementario que subdivida la figura en dos nuevos triángulos LRQ y RGQ.

respectivamente que posteriormente se pueden rotar y trasladar a espacios equivalentes en áreas como mostramos a continuación en las figuras 140 y 141.

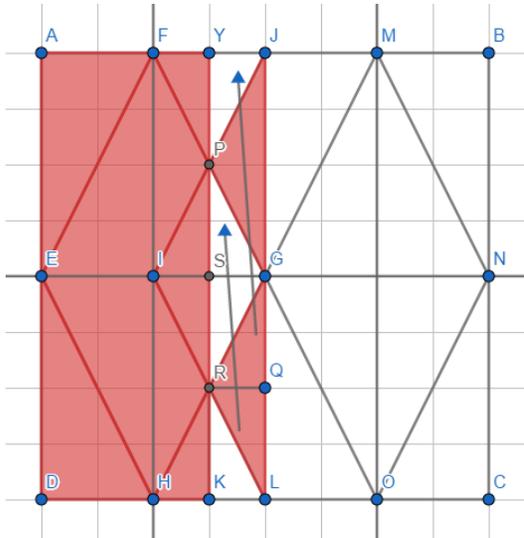


Figura 140. Figura que acompaña SD3-T8

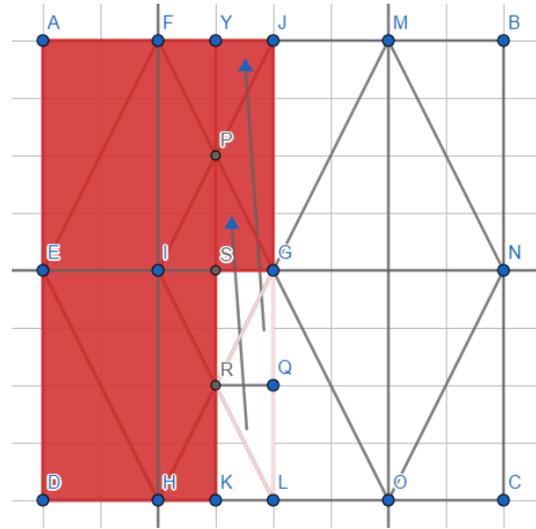


Figura 141. Figura que acompaña SD3-T8

Finalmente quedaron tres rectángulos AFIE, EIHD y FJGI que representan  $\frac{3}{8}$  de la unidad y un cuarto rectángulo ISKH que representa  $\frac{1}{16}$  de la unidad realizando un tratamiento en el registro numérico los convierte en fracciones homogéneas para realizar la suma  $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$  y podemos sumar homogéneamente  $\frac{6}{16} + \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$  que es la relación de las partes con el todo figura 141.

**Tarea 9 situación 3 (Área de regiones circulares)**

*Observa detenidamente la imagen y determina una expresión fraccionaria que represente la región sombreada de color gris.*

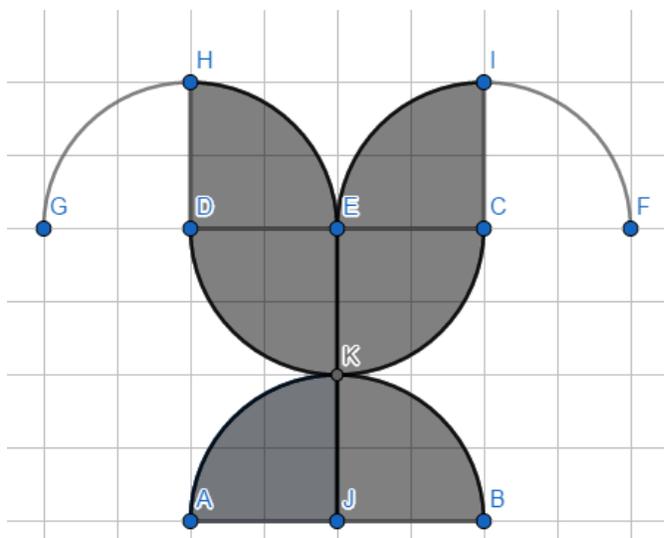


Figura 142. Figura que acompaña SD3-T9

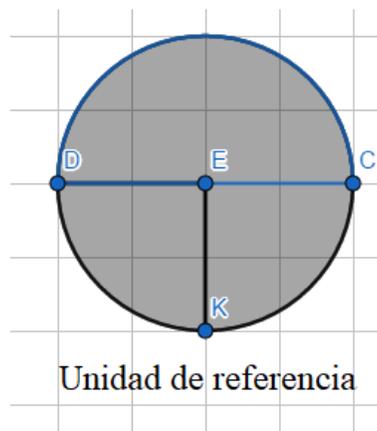


Figura 143. Figura que acompaña SD3-T9

Se espera que el estudiante resolutor realice un tratamiento posicional de las figuras DEH y ECI figura 142 y logre visualizar que dichas figuras forman el complemento de la región circular sombreada y que esta forma una unidad completa figura 143 lo cual será potente puesto que también se deberá visualizar la otra mitad de unidad que tiene por centro el punto J y radio JK.

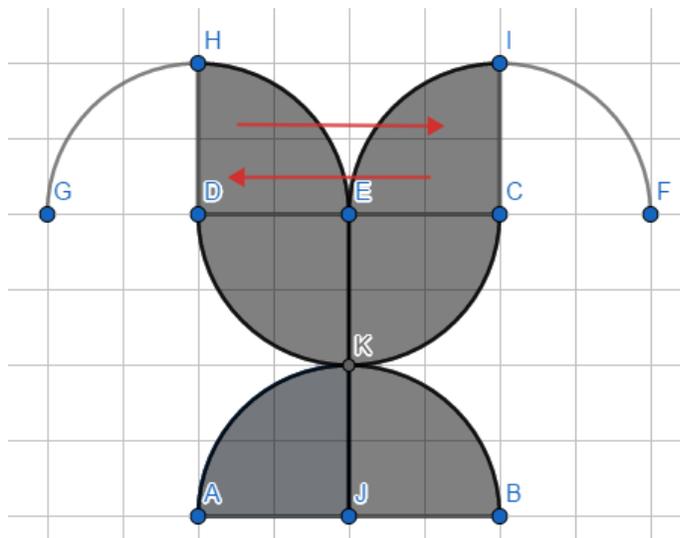


Figura 144. Figura que acompaña SD3-T9

El anterior tratamiento permitirá hacer el análisis de la región sombreada en su totalidad dando como resultado una unidad circular completa de radio EK y la segunda de radio JK solo la mitad para un total de  $3/2$  de unidad circular como se muestra en la figura 145.

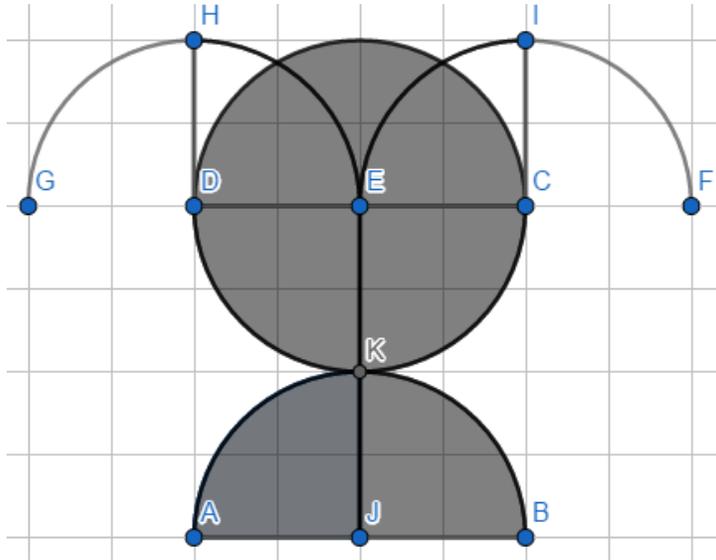


Figura 145. Figura que acompaña SD3-T9

### Tarea 10 situación 3

*En la siguiente figura nos encontramos con un cuadrado ABCD que contiene una región sombreada de color gris.*

*Deconstruye esta región y forma un rectángulo que te permita determinar el área de dicha región.*

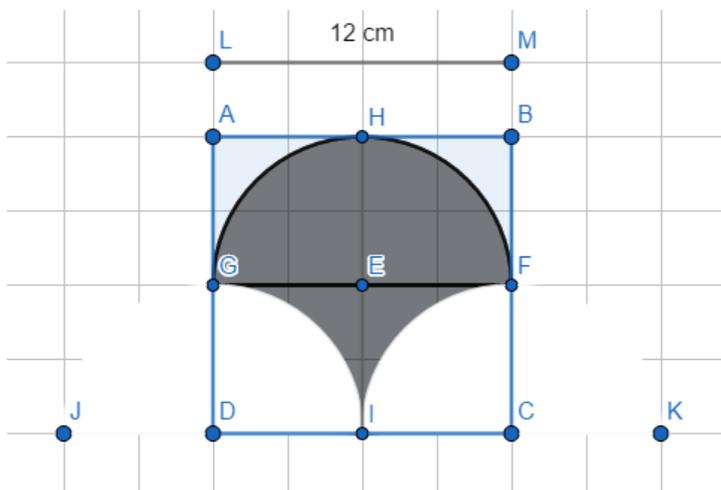


Figura 146. Figura que acompaña SD3-T10

Una de las posibles soluciones que puede tomar el estudiante se muestra a continuación en la figura 147, donde puede a través de la visualización realizar una comparación mental de las áreas que ocupan el mismo espacio en la figura ABCD, como ejemplo la región circular GAH con EFI y HBF con EGI apartir de dicho tratamiento el estudiante puede hacer el razonamiento que la zona sombreada es un medio de la figura total y que si el área total del cuadrado ABCD es de  $144 \text{ cm}^2$  entonces la zona sombreada es de  $72 \text{ cm}^2$ .

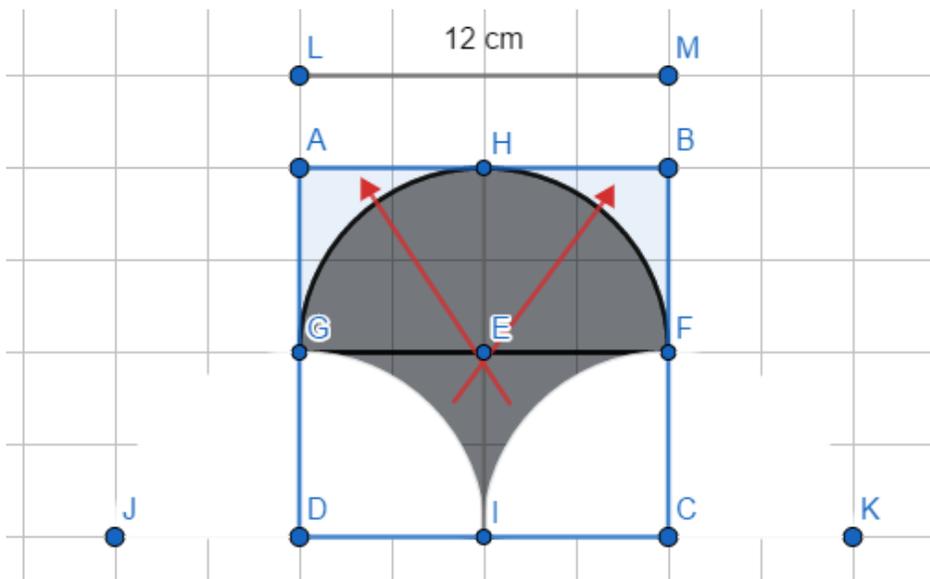


Figura 147. Figura que acompaña SD3-T10

En esta segunda opción de solución el estudiante debe rotar las figuras circulares HEG, HVE y posteriormente hacer una traslación de las figuras como se indica en la siguiente figura 148.

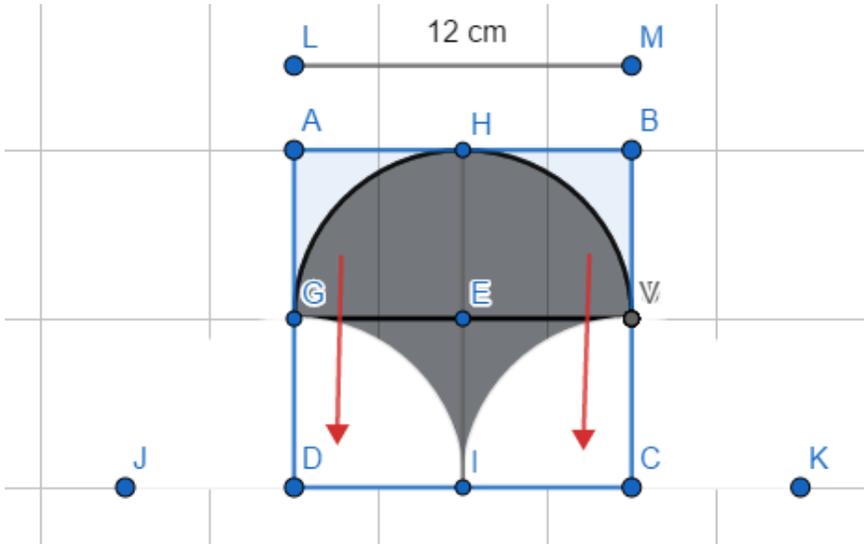


Figura 148. Figura que acompaña SD3-T10

Un tercer camino de solución puede ser cruzar las regiones sombreadas HEG y HVE como se muestra en la siguiente figura, de esta manera se realizaría una comparación de áreas además de la superposición de figuras pero evitaría el realizar rotaciones para resolver la situación como se indica en la siguiente figura 149.

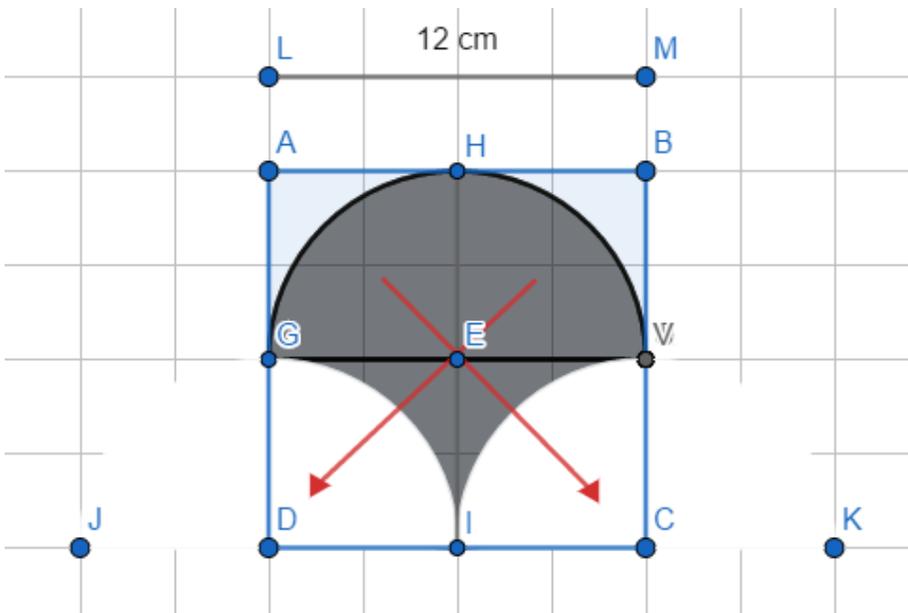


Figura 149. Figura que acompaña SD3-T10

**Tarea 11 situación 3**

En las siguientes figuras 150 y 151 encontrarás dos rectángulos DFGC y MOPL que contienen regiones circulares sombreadas. Determina las fracciones de cada unidad y realiza la suma de dichas áreas sombreadas.

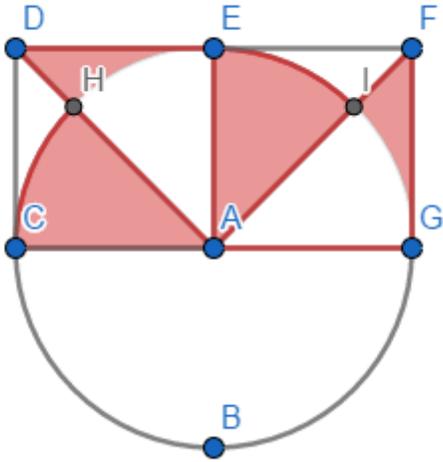


Figura 150. Figura que acompaña SD3-T11

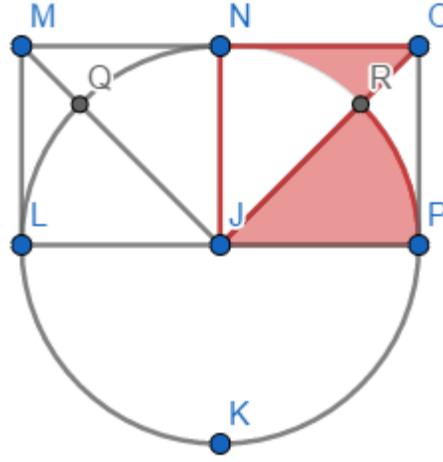


Figura 151. Figura que acompaña SD3-T11

Se mostrarán dos posibles soluciones a esta situación, la primera realizando reconfiguraciones dentro de cada unidad figural y la segunda comparando regiones sombreadas equivalentes entre si.

El estudiante puede tomar decisiones al interno de la figura, realizar comparaciones de áreas de forma visual y hacer el traslado de dos regiones sombreadas que le permitan observar que dicha region equivale a la mitad de la figura CDFG. Por otro lado en la figura LMOP al realizar una reflexión como si pusieramos un espejo en el medio de las dos regiones sombreadas o si el estudiante hace un movimiento de doblés o gesto de compuerta podrá unir las dos regiones sombreadas e identificar que es un cuarto de la figura LMOP. Como se observa en la figura 152.

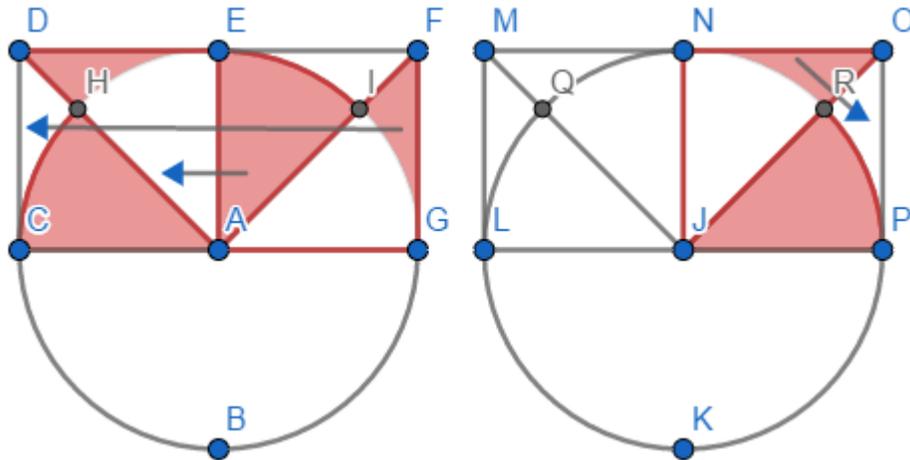


Figura 152. Figura que acompaña SD3-T11

Así quedaría la figura después de los respectivos y posibles tratamientos, al interno de las figuras solo restaría realizar la sumatoria en donde tenemos dos cuartos de la primera unidad y un cuarto de la segunda unidad para un total de tres cuartos de zona sombreada entre las dos unidades rectangulares. Como se muestra en la figura 153.

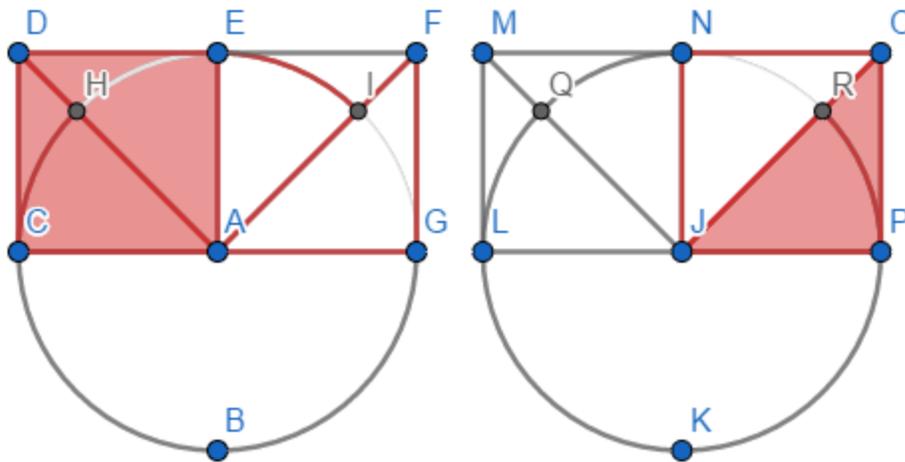


Figura 153. Figura que acompaña SD3-T11

Otra forma de solucionar esta situación se muestra en la figura 154 y es compartiendo regiones sombreadas entre figuras como mostramos a continuación.

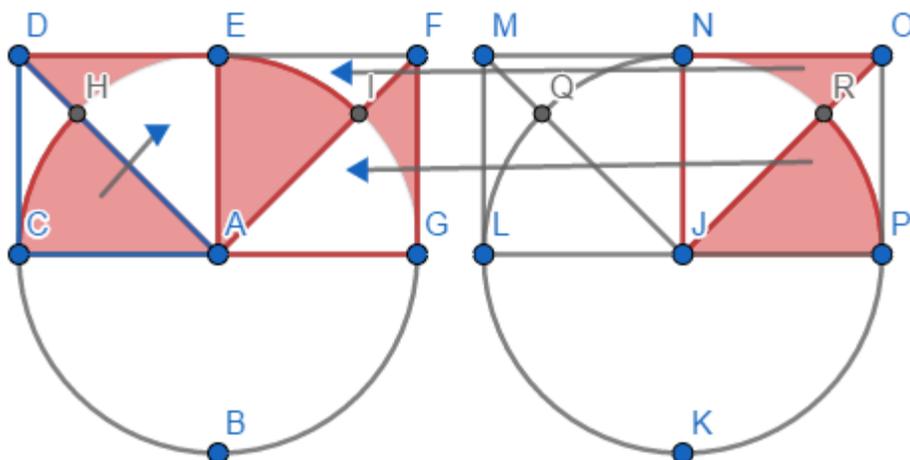


Figura 154. Figura que acompaña SD3-T11

Lo anterior permite comparar regiones equivalentes en áreas y visualizar un conjunto de subfiguras reunidas en una sola unidad, esta reconfiguración es potente ya que permite de forma más rápida identificar los  $\frac{3}{4}$  de región sombreada con respecto a la unidad rectangular CDFG como se muestra a continuación en la figura 155.

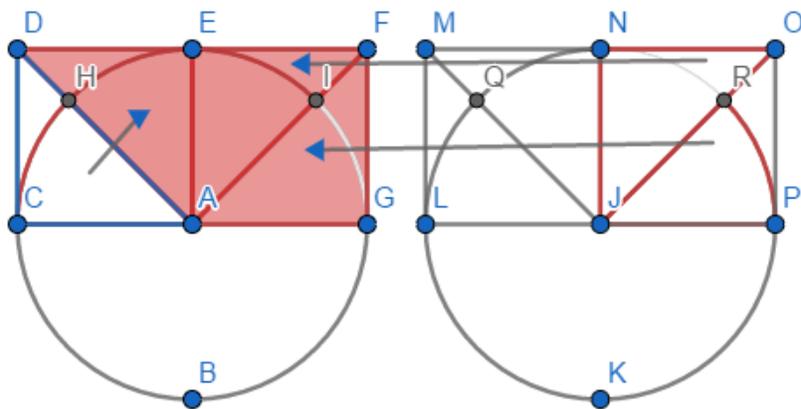


Figura 155. Figura que acompaña SD3-T11

### Tarea 12 situación 3

Reconfigura la siguiente figura y encuentra el área en  $cm^2$ .

Explica los procedimientos utilizados.

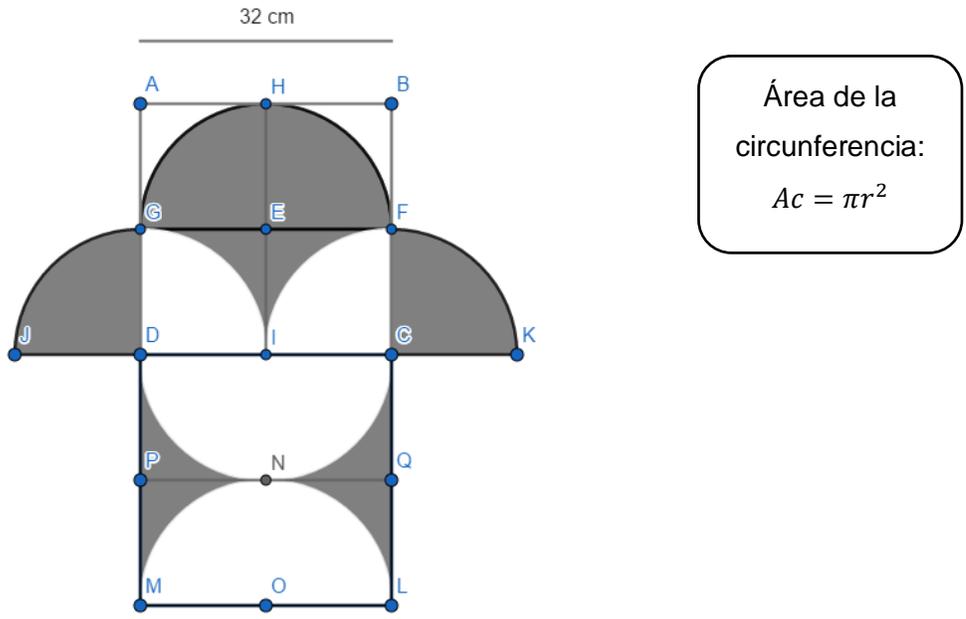


Figura 156. Figura que acompaña SD3-T11

Es necesario identificar que el radio EH de la región circular FGH mide la mitad del segmento AB, dicho radio mediría 16 centímetros y aplicando la fórmula del área de la circunferencia como se muestra a continuación,  $A_c = \pi r^2$  se obtiene  $A_c = (3,1416)(16cm)^2$ .

$A = 804,25 \text{ cm}^2$  pero esta es el área total de la circunferencia y entonces dividimos esta cantidad a la mitad y obtenemos la respuesta que es  $402,12 \text{ cm}^2$ . El área de la región sombreada del rectángulo se puede sacar de la siguiente forma: averiguamos el área del rectángulo y le restamos la región circular encontrada en el punto anterior,  $A_r$  (área del rectángulo).

$$A_r = 32cm^2 \times 16 \text{ cm}^2 \text{ menos } A_c = \frac{(3,1416)(16^2)}{2}$$

$$A_r - A_c = 512 - 402,12 \text{ es igual a } 109,88 \text{ cm}^2$$

A continuación, mostramos a través de las figuras 157-161 la reconfiguración y solución del problema.

En primer lugar, se puede hacer una comparación de las regiones sombreadas de tipo circular DJG y CKF con las zonas DIG y CIF respectivamente realizando un proceso de reflexión y un movimiento estilo compuerta para rellenar dichas zonas, figuras 157 y 158.

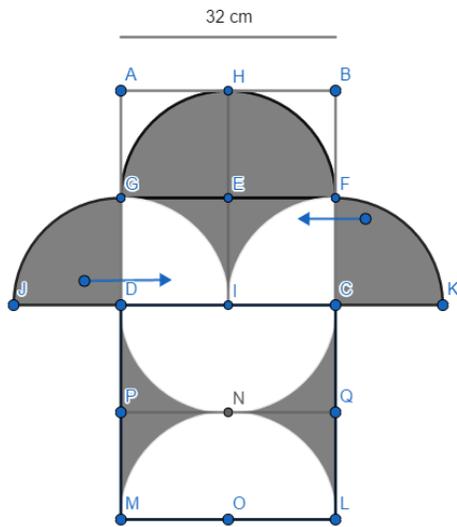


Figura 157. Figura que acompaña SD3-T12

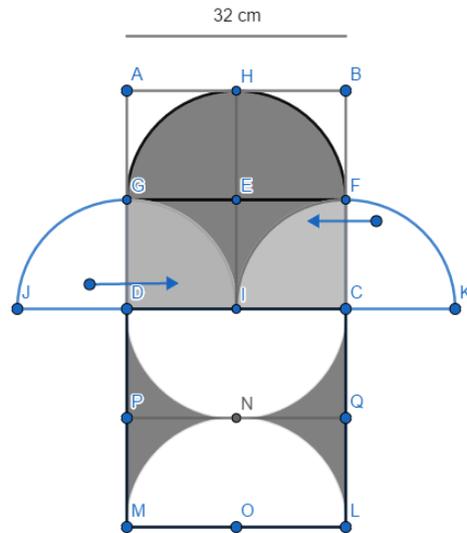


Figura 158. Figura que acompaña SD3-T12

Con la región sombreada del rectángulo PQLM completaremos el cuadrado ABCD como se muestra en la figura 159 y 160.

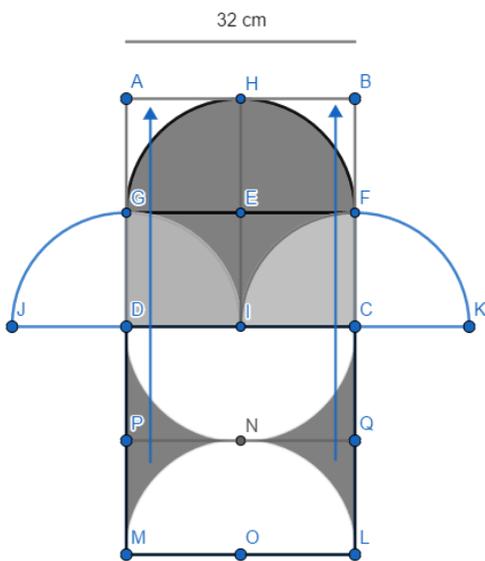


Figura 159. Figura que acompaña SD3-T12

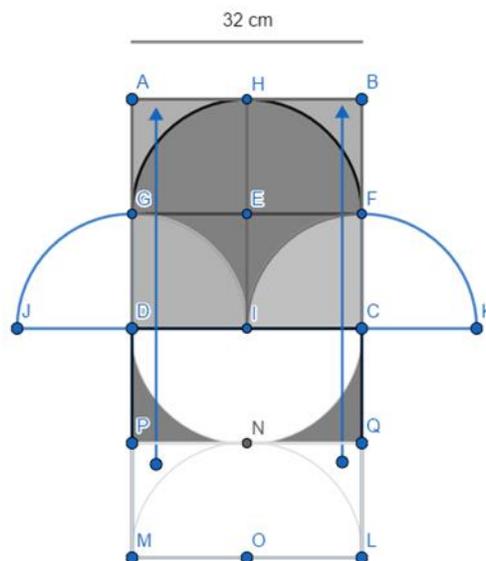


Figura 160. Figura que acompaña SD3-T12





## **4. Análisis a posteriori de la situación didáctica.**

Realizada la indagación de conformidad con el marco metodológico seleccionado para esta indagación, se continuó con el análisis de las tareas que realizaron 11 estudiantes del grado 9-2 de la Institución Educativa San José, del municipio de La Victoria Valle del Cauca. Para efectos de la indagación se designarán a los participantes por el código de posición en el salón de clase y la primera letra de cada apellido.

Se hace la aclaración que la situación 1 se realizó de forma individual con socialización en grupo para analizar sus repuestas y poder hacer las mediaciones semióticas necesarias por parte del docente investigador, igualmente al aplicar la situación 2 se hizo durante dos fases: una individual y otra de socialización con sus compañeros. En la situación 3 se realizó de forma individual y con acompañamiento y mediación por parte del docente investigador cuando los estudiantes debían aclarar algo.

A continuación, se presentará el análisis cualitativo o descriptivo, así como una tabulación de datos recopilados de las tres situaciones que confirman la situación didáctica aplicadas a los estudiantes la cual centró su mirada en los objetivos propuestos en cada una de ellas y las categorías de análisis general acorde a la rejilla presentada en el capítulo anterior (ver pág. 55).

### **4.1 Análisis cuantitativo y cualitativo de la situación 1**

La situación 1 tiene como objetivo identificar y discriminar figuras y subconfiguraciones que permitan visualizar y superar aprehensiones de tipo perceptual. En la aplicación de esta situación se evidenció la poca familiaridad con los procesos de designación, los procesos mereológicos que implican transformaciones como la rotación, traslación, simetría y deconstrucciones entre otros. Lo anterior conlleva de un gran compromiso por parte de los maestros para enseñar elementos tan importantes de la teoría semiótico cognitiva para

que los estudiantes avancen la adquisición de los conocimientos y específicamente los objetos geométricos.

En esta primera situación se evidenció que el lenguaje propio de la geometría era muy básico o nulo en los estudiantes, para lo cual el docente investigador tuvo que intervenir para aclarar conceptos como por ejemplo: *Cuál era la función y la forma adecuada de hacer la designación, a qué se refiere el termino discriminar, a qué se refiere cuando se habla de identificación de subfiguras, entre otros términos que debieron aclararse a los estudiantes.*

Cabe destacar que a pesar del poco acercamiento que tenían los estudiantes con los objetos geométricos, a los tratamientos dentro del registro figural y la coordinación con el registro en lengua natural, se evidencia avances significativos los cuales se profundizará y visualizará a través del consolidado de datos que se presentan posteriormente en la tabla 6.

<b>CONSOLIDADO DE DATOS SITUACIÓN 1</b>						
	Niveles de desempeño		<i>Porcentaje</i>	<i>Porcentaje</i>	<i>Porcentaje</i>	
			<i>Alto</i>	<i>Medio</i>	<i>Bajo</i>	
Tarea 1	Categoría	Variables				
	Aprehensión perceptual	Designación		96.84%	0%	3.17%
		Número de figuras Visualizadas		100%	0%	0%
Tarea 2A	Aprehensión operatoria	Conceptos (Rotación Traslación Simetría)	90.91%	0%	9.09%	
Tarea 2B	Aprehensión perceptual y operatoria	Trazos suplementarios	100%	0%	0%	
		Designación de la figura	90.01%	0%	9.09%	

		Comprensión de consigna	90.01%	0%	9.09%
		Número de figuras Visualizadas	36.37%	45.45%	18.18%
Tarea 3	Aprehensión perceptual y operatoria	Número de cuadrados identificados	63.64%	18.18%	18.18%
		Designación de la figura	100%	0%	0%
		<b>Explicación de procedimientos en LN</b>	81,82%	9.09%	18.18%
Tarea 4	Aprehensión perceptual y operatoria	Número de cuadrados identificados	72.72%	18.18%	9.09%
		Número de Triángulos identificados	81.81%	18.18%	0%
		<b>Explicación de procedimiento s en LN</b>	90,91%	0%	9.09%
<b>Total, porcentajes por situación didáctica de forma global</b>			<b>84.12%</b>	<b>9.09%</b>	<b>6.79%</b>

Tabla 7 Consolidado de datos situación 1

Como se muestra en la tabla 6, los estudiantes en las tareas de la uno a la cuatro donde se requiere **superar aprehensiones de tipo perceptual y operatorio**, con consignas acerca de identificar y discriminar figuras y subfiguras logran exitosamente un 84.12%, porcentaje que resulta ser muy relevante a la luz de la prueba piloto (mostrado en el capítulo 1 problema de Indagación). Solo el 9.09% de los estudiantes aún no tienen claro la designación de figuras como también la justificación bien elaborada en lengua natural.

El 6.79% de los estudiantes de la muestra presentan problema en la comprensión de las consignas en estas cuatro tareas y por ende no dan cuenta de los resultados esperados. Finalizada la situación 1 el docente investigador, organizo a los estudiantes en mesas de trabajo para que los estudiantes compararan y cotejaran sus respuestas y pudieran explicitarse diferentes procedimientos que no se les habían ocurrido, de esta manera ir ganando elementos sobre transformaciones en las figuras y la necesidad de designar en este tipo de situaciones en geometría y así avanzar en su proceso de aprendizaje.

En la situación 1 encontramos que la guía fue construida con dos variables, la aprehensión perceptual y la aprehensión operatoria, donde se pudo evidenciar que un 84.12% que representan la mayor parte de los estudiantes dieron solución a la consigna satisfactoriamente dichas en las tareas, pero cabe destacar que la designación de los vértices, figuras y subfiguras, además la justificación en lengua natural fueron los ítem donde los estudiantes tuvieron mayor dificultad y donde fue necesario del trabajo grupal y la intervención del docente investigador para subsanar dichas falencias o dificultades como lo fue la designación de figuras y vértices al igual que la permanente insistencia de que los estudiantes explicaran en lengua natural sus procedimientos.

## 4.2 Análisis cuantitativo y cualitativo de la situación 2

La situación 2 tiene por objetivo que los estudiantes logren transformar el contorno global de una figura en otra de igual cantidad de superficie a través de procesos mereológicos tales como rotación traslación y simetría aplicando igualmente la deconstrucción y reconfiguración de figuras coordinados con el registro en lengua natural, los resultados frente a estos procesos esperados se muestran en la siguiente tabla 7.

CONSOLIDADO DE DATOS DE LA SITUACIÓN 2				
	Niveles de desempeño		Porcentaje	Porcentaje
			Alto	Bajo
Tarea 1A	Categoría	Variables		
	Transformación de figuras	Subdivisión de figuras	90,91%	9,09%
Tarea 1B	Transformación de figuras	Subdivisión de figuras	81,82%	18.18%

Tarea 2	Transformación de figuras	Deconstrucción de figuras Traslación	45,45%	54.55%
		<b>Explicación de procedimientos en LN</b>	45,45%	54.55%
Tarea 3	Transformación de figuras	Deconstrucción de figuras Traslación y rotación	81,82%	18.18%
		<b>Explicación de procedimientos en LN</b>	27,27%	72.73%
Tarea 4	Transformación de figuras,	Comparación de áreas	90,91%	9,09%
	comparación de área y perímetro	Relación área y perímetro	63,64%	36,36%
		Razonamiento	45,45%	54,55%
<b>Total, porcentajes por situación didáctica de forma global</b>			<b>63.63%</b>	<b>36.37%</b>

Tabla 8 Consolidado de datos situación 2

En esta situación, como puede observarse en la tabla 7, las cuatro tareas fueron realizadas satisfactoriamente por un 63.63% de los estudiantes y un 0% en nivel medio, se destaca que tener este promedio se debe a la superación de dudas al realizar unas mesas de trabajo donde ellos aclaraban dudas mientras que un 36.37% de estudiantes no llegan a la comprensión satisfactoria de las tareas.

En la situación 2 la guía fue construida teniendo en cuenta las variables de deconstrucción dimensional y la reconfiguración al interior del registro figural en concordancia con la coordinación del registro en lengua natural donde se plantearon 4 tareas, en las cuales se logró evidenciar que el 63.63% de los estudiantes alcanzaron satisfactoriamente la realización de las tareas planteadas, es importante connotar que la explicación en LN

hecha por los estudiantes durante esta situación 2 evidencia dificultades puesto que mantener la idea de la designación para realizar conclusiones precisas es un asunto complejo para los estudiantes.

### 4.3 Análisis cuantitativo y cualitativo de la situación 3

El objetivo de esta situación es que los estudiantes logren combinar tratamientos y operaciones figurales que permitan la comparación de dos áreas sombreadas que ocupan la misma superficie de forma equivalente.

A partir de la tabla 8 que se presenta el análisis general de los resultados de estas situaciones.

CONSOLIDADO DE DATOS DE LA SITUACIÓN 3				
	Niveles de desempeño		Porcentaje	Porcentaje
			Alto	Bajo
Tarea 1	Categoría	Variables		
	Áreas de regiones sombreadas.	Traslación	100,00	0,00
		Rotación	54,55	45,45
	Relaciones parte todo	Cálculo de área	0,00	100,00
		<i>Explicación de procedimientos en LN</i>	45,45	54,55
Tarea 2	Áreas de regiones sombreadas.	Traslación	72,73	27,27
		Rotación	45,45	54,55
	Relaciones parte todo	<i>Explicación de procedimientos en LN</i>	36,36	63,64
		Relación parte todo Figura 4	63,64	36,36
Tarea 3	Áreas de regiones sombreadas.	Relación parte todo Figura 5	63,64	36,36
		Relación parte todo Figura 6	63,64	36,36
	Relaciones parte todo	Relación parte todo Figura 7	27,27	72,73

		Relación parte todo Figura 8	45,45	54,55
		Relación parte todo Figura 9	9,09	90,91
		Relación parte todo Figura 10	27,27	72,73
		Relación parte todo Figura 11	36,36	63,64
Tarea 4	Áreas de regiones sombreadas. Relación parte todo	Relación parte todo	45,45%	54,55%
		Cálculo de Área en metros cuadrados	27,27%	72,73%
		Sumatoria de Áreas	0%	100%
		Representación Fracción	63,64	36,36
Tarea 5	Áreas de regiones sombreadas. Relaciones parte todo	<b>Explicación de procedimientos en LN</b>	54,55	45,45
		Sumatoria de Áreas	9,09	90,91
Tarea 6	Áreas de regiones sombreadas. Relaciones parte todo	Procesos mereológicos	45,45	54,55
		<b>Explicación de procedimientos en LN</b>	63,64	36,36

Tarea 7	Áreas de regiones sombreadas.	Deconstrucción		
		Reconfiguración	63,64	36,36
Tarea 8	Relaciones parte todo	Justificación en LN	45,45	54,55
	Áreas de regiones sombreadas.	Deconstrucción		
Tarea 9		Reconfiguración	9,09	90,91
	Relación parte todo	Fracción correspondiente	54,55	45,45
Tarea 10	Áreas de regiones sombreadas.	Deconstrucción		
		Reconfiguración	54,55	45,45
Tarea 11	Relaciones parte todo	Área en metros cuadrados	72,73	27,27
		<b>Explicación de procedimientos en LN</b>	63,64	36,36
Tarea 12	Áreas de regiones sombreadas.	Deconstrucción		
		Reconfiguración		
Tarea 13	Relaciones parte todo		36,36	63,64
		Fracción correspondiente	36,36	63,64
Tarea 14	Áreas de regiones sombreadas.	Deconstrucción		
		Reconfiguración	63,64	36,36

	Áreas de regiones sombreadas.	Aplicación de algoritmos $A = (\pi) (r^2)$	36,36	63,64
	Relaciones parte todo	Cálculo de Área	63,64	36,36
<b>Total, porcentajes por situación didáctica de forma global.</b>			<b>44,258</b>	<b>55,742</b>

Tabla 9 Consolidado de datos situación 3

La tabla 8 muestra el resultado de los estudiantes en la realización de las 12 tareas desarrolladas en la situación 3 de las cuales un 46.26% de los estudiantes responde satisfactoriamente las consignas en donde tenían que realizar deconstrucciones y reconfiguraciones que le permitieran transformar la figura inicial en una figura final de **contorno diferente** que fuera más potente para su análisis. El 0 % de los estudiantes presenta en un nivel medio de competencia, aunque algunos estudiantes presentan algunos errores ya sea en la deconstrucción o en el área encontrada de la región sombreada o era muy mínima o muy alta lo cual hizo que se ubicaran en los extremos de competencia alto y básico, y un 55.74% que persiste con dificultades para realizar transformaciones que les permitan ver la figura de forma distinta, pero más sencilla y así llegar a unos resultados satisfactorios.

#### 4.4 Análisis de las variables trabajadas en cada situación didáctica.

En la situación 1 encontramos que la guía fue construida con dos variables, la aprehensión perceptual y la aprehensión operatoria diseño que se planteó desde la fase 1 de Indagación (ver p.50) para lo cual se crearon 4 tareas y una subtarea que tenían la finalidad de mejorar los procesos de visualización y la superación aprehensiones de tipo perceptual y operatoria, donde se pudo evidenciar que un 84.12% que representan la mayor parte de los estudiantes logro satisfactoriamente dichas tareas, pero cabe destacar que la designación de los vértices, figuras y subfiguras, además la justificación en lengua natural fueron los ítem donde los estudiantes tuvieron mayor dificultad y donde fue necesario del trabajo grupal y la intervención del docente investigador para subsanar dichas falencias o dificultades.

En la situación 2 la guía fue construida teniendo en cuenta las variables de deconstrucción dimensional y la reconfiguración al interior del registro figural en concordancia con la coordinación del registro en lengua natural donde se plantearon 4 tareas donde se evidencio que el 63.63% de los estudiantes alcanzaron satisfactoriamente la realización de las tareas planteadas, es importante connotar que la explicación en lengua natural hecha por los estudiantes durante esta situación 2 evidencia dificultades puesto que mantener la idea de la designación para realizar conclusiones precisas es un asunto complejo para los estudiantes.

En la situación 3 el trabajo concreto de las variables esta guiado en la visualización y los tratamientos figurales con áreas de regiones sombreadas desde la variable relación parte todo donde se plantearon 12 tareas siendo esta situación la de mayor interés del trabajo investigativo donde se evidencia que solo el 44.26% de los estudiantes logran concluir satisfactoriamente las tareas planteadas y que a la luz del pilotaje realizado en la Institución Educativa San José denota que es positivo el avance de los estudiantes.

## 4.5 Heurísticas utilizadas por los estudiantes en cada una de las situaciones didácticas.

A continuación, se presentan los procedimientos o heurísticas que se visualizaron en cada una de las tareas en los estudiantes de código C07, O21 y R26.

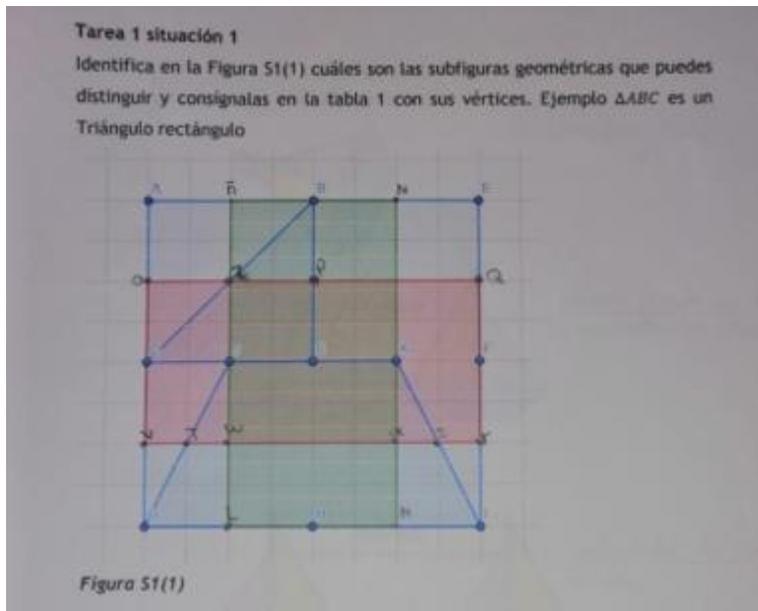


Figura 162. Solución del estudiante C07

Designación de la figura	Nombre de la figura
$\triangle ABC$	Triángulo rectángulo
ABCD	cuadrado
GJKI	Trapezo
IKK	triángulo
AEIG	cuadrado
AKSD	rectángulo
FKCJ	rectángulo
AQPB	rectángulo
DJLG	rectángulo
<b>Tabla 1</b>	
D3G	triángulo
B3L	triángulo
IKML	cuadrado
IKMB	rectángulo
BNKC	rectángulo
BEAP	rectángulo
VTB	Triángulo
JKI	Trapezo
BTWL	trapezo
K3M	trapezo
AKLG	rectángulo
NEIH	rectángulo
OKJD	cuadrado
EOZ	trapezo

Figura 163. Solución del estudiante C07

Se observa que el estudiante C07, así como otros estudiantes añaden nuevas designaciones en la figura inicial S1(1) para poder nombrar todas las figuras que él reconoce al interior de la misma lo cual es importante puesto que no sólo reconoce figuras a partir de las designaciones iniciales, sino que se atreve a buscar nuevas designaciones y nuevas reconfiguraciones.

Lo anterior le permitió al estudiante identificar un total de 22 figuras con sus respectivas designaciones y clasificación lo cual fue significativo, se puede notar que, si un estudiante no reconoce estas nuevas designaciones, quizás solo hubiera podido visualizar 6 subfiguras. Lo anterior denota que el estudiante comprende a cabalidad la consigna, pero va más allá de lo solicitado lo cual deja una buena impresión en cuanto a la autonomía del estudiante y que el color juega un papel importante como factor de visibilidad a la hora de construir tareas y que los estudiantes puedan enfrentarse a la resolución de las situaciones didácticas planteadas.

El estudiante de O21 al contrario se limitó a ubicar seis subfiguras (ver p.201) sin designar nuevos vértices qué era lo que se esperaba según el análisis a priori (ver p.49).

El estudiante R26 al igual que el estudiante C07 realiza nuevas designaciones heurística (ver p. 202) que le permite visualizar más configuraciones encontrando 8 figuras a partir

de la figura inicial, esto nos permite concluir que en esta tarea es de gran importancia la función del registro de la lengua natural como es la designación y el rol que pueden jugar la designación por colores a la hora de visualizar subfiguras y se pudo evidenciar la superación aprehensiones de tipo perceptual que figura promovía y que fueron superadas con la ayuda de la designación.

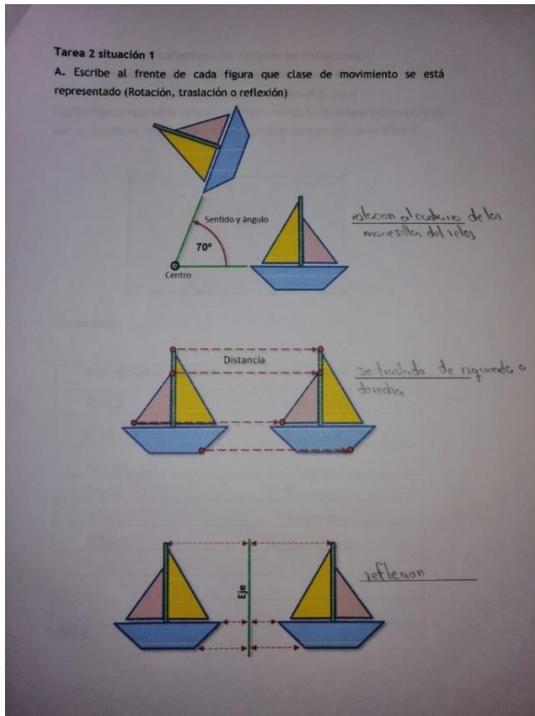


Figura 164. Solución del estudiante C07

En esta tarea se indagó por las transformaciones básicos de rotación traslación y simetría, los cuales son pilares fundamentales a la hora de tratamientos al interior del registro figural, el estudiante C07 además de definir los conceptos nombrados anteriormente da el sentido de la rotación comparándolo con las manecillas del reloj y la traslación la describe de derecha izquierda, en cuanto a la reflexión sólo se limita a dar el concepto, pero no habla del eje de simetría.

El estudiante O21 lo describió en lengua natural de forma diferente dice que la rotación es de 70 grados y que se hace de derecha a izquierda, en la traslación la información es igual a la del estudiante C07 y en la última definición dijo que es una clase de movimiento que se le da el nombre de reflexión (Ver p.203).

El estudiante R26 sólo se limitó a escribir el concepto en su orden rotación, traslación y reflexión. A la hora de trabajar en geometría es importante tener claridad de las propiedades de los objetos y por ello se construyó esta tarea para tener claridad de los

conceptos que se iban a trabajar durante toda la secuencia didáctica y a pesar de que son conceptos básicos algunos de los estudiantes no los tenían claro y ello fue causa de algunas dificultades a la hora de realizar sus producciones lingüísticas (ver p.204).

B. Realiza los trazos suplementarios siguiendo las instrucciones:

- Realice un trazo con regla desde el punto E hasta el punto F
- Realice un segundo trazo del punto G hasta el punto H

Cuáles figuras reconocer después de haber realizado los trazos suplementarios con su respectiva designación, debes organizar tu respuesta en la tabla 2.

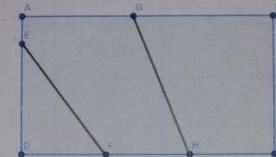


Figura S1(2)

Designación de la figura	Nombre de la figura
ABCD	rectángulo
EFD	triángulo
AEFHG	polígono
GBCH	trapezio
AEHD	trapezio
AEICD	polígono

Tabla 2

Figura 165. Solución del estudiante C07

En esta tarea se hace la introducción de la necesidad de hacer trazos suplementarios para lo cual se planteó una tarea que le permitiera deducir, de qué se trataba los trazos suplementarios y permitieron ser utilizados en posteriores situaciones. Aquí el estudiante tenía que superar aprehensiones de tipo perceptual y operatorio, por ejemplo, el estudiante C07 realiza la consigna de manera correcta al encontrar seis subfiguras que son reconfiguraciones de la figura inicial.

El estudiante O21 sólo encontró 4 de 6 posibles subconfiguraciones, pero lo hizo con sus respectivas designaciones (ver p.205).

El estudiante R26 también encontró 6 configuraciones que eran el total de las posibles figuras que se podían encontrar. Esta tarea no presentó grandes dificultades a la mayoría de los estudiantes, pero sí dio herramientas importantes en el campo de la visualización para superar aprehensiones de tipo perceptual y operatorio que son la base de las posteriores tareas (ver p.206).

**Tarea 3 situación 1**  
 ¿Cuántos cuadrados de diferente área puedes identificar en la siguiente figura S1(3)? Designa cada una de ellos con sus vértices.  
 Realiza un escrito explicando los procedimientos utilizados.

**Figura S1(3)**

Designación de la figura	Nombre de la figura
FBHI	cuadrado
ADCB	cuadrado
BJCI	cuadrado

**Procedimiento**

cuando uno observa la figura fácilmente se puede ver el cuadrado FBHI y también se puede ver el cuadrado BJCI pero para lograr ver el cuadrado ADCB hay que rotar la figura

Figura 166. Solución del estudiante C07

Cómo se observa en la figura anterior el estudiante C07 vuelve a emplear una heurística como lo es la designación de los vértices, los cuales no poseían designación inicial para determinar los cuadrados de diferente área, vemos que el estudiante encuentra tres cuadrados y en el análisis a priori se habla de 6 figuras esto es porque la consigna se entiende bajo el parámetro de figuras con diferentes áreas. esto aclarado por el mismo estudiante, en el escrito en lengua natural el estudiante explica cómo observó el cuadrado F B C I y el cuadrado de BJCI, y hace la aclaración que para ver el otro cuadrado ADCB hay que rotar la figura este proceso de es válido como heurísticamente para esta situación. El estudiante O21 tiene una interpretación diferente y es la identificación total de los cuadrados de la figura indiferentemente del tamaño de área, por ello muestra 6 cuadrados a diferencia del estudiante C07, no por ello se puede afirmar que uno u otro haya realizado

mal la tarea simplemente que la interpretación fue diferente y ambos lo realizaron de forma correcta. Es de destacar que el estudiante O21 también utilizó la designación de los vértices faltantes para encontrar las subconfiguraciones y afirma con sus palabras que *“la figura formada como un rombo al rotarla ya pasó a ser otro cuadrado”* (ver p.207).

El estudiante R26 nuevamente hace un análisis similar al que hizo el estudiante C07 al encontrar sólo tres cuadrados el proceso es igualmente válido. El estudiante R26 de la siguiente descripción: *“para poder encontrar las figuras lo primero que hice fue ubicar más vértices, para el cuadrado ABCD tuve que rotar el rombo de derecha a izquierda y para los cuadrados EFGH y C I D H sólo es concentrarse en los diferentes vértices ya señalados y se encontraron de una forma muy sencilla”* (ver p.208). Se nota en el escrito en lengua natural la apropiación por parte del estudiante de elementos como la designación, y las transformaciones que le permitieron razonar y llegar a la visualización requerida para dar una correcta respuesta.

Es concluyente que los estudiantes a través de la designación y la aplicación de transformaciones como la rotación y la traslación fueron superando aprehensiones de tipo perceptual y operatorio lo cual es potente en las secuencias 2 y 3, qué se relaciona con la transformación de figuras y las áreas de regiones sombreadas.

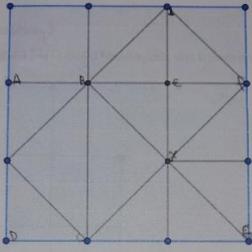
**Tarea 4 situación 1**

¿Cuántos cuadrados y cuántos triángulos hay en la siguiente figura S1(4)?

¿Qué procedimientos utilizaste para realizar esta segunda tarea?

¿Designa otras figuras geométricas que se distinguen en la figura?

Justifica tu respuesta.



**Figura S1(4)**

**Respuesta**

logie encontrar 10 cuadrados en la siguiente figura  
logie encontrar 23 triángulos en la figura y el  
único procedimiento que use fue rotar la figura en  
varias ocasiones.  
en la figura  
hay rombos como en el caso IFXB también  
rectángulos como en el caso ABCD y también polígonos  
como en el caso BFGCX

Figura 167. Solución del estudiante C07

El estudiante C07 afirma que encontró 10 cuadrados, pero no hace una explicación de cómo fue este procedimiento, al observar el cuaderno de apuntes se encuentra que duplicó la figura utilizando colores lo cual es una heurística válida para localizar los cuadrados y los triángulos que de hecho para él fueron 23. Cabe anotar que el estudiante realiza la designación de los vértices con letras mayúsculas y dio explicación en lengua natural además que visualizó rombos como el caso de IFXB rectángulos como el caso ABCD y también polígonos como BFGCX.

El estudiante O21 utilizó heurística distinta además de designar los vértices con letras mayúsculas, se notó que designó con números para identificar los diferentes cuadrados y triángulos y posteriormente, a través de los vértices ubicó los triángulos, dicho estudiante encontró 10 cuadrados y 24 triángulos dos rombos y 7 rectángulos (ver p.209).

El estudiante R26 que también realizó una designación correcta de los vértices presenta unas señas de la punta del lápiz lo cual indica a nuestro criterio que es una especie de conteo que realizó el estudiante y verificación de las figuras encontradas dicho estudiante en su respuesta en lengua natural colocó los cuadrados con sus respectivas designaciones al igual que los triángulos los rombos los trapecios y los rectángulos (ver p.210).

**SITUACIÓN 2 "Comparación de áreas"**

El objetivo de esta situación es: Transformar el contorno global de una figura en otra de igual cantidad de área a través de procesos mereológicos como: (traslación, rotación, cambios de posición y trazos complementarios) para visualizar superar aprehensiones de tipo operatorias

**Tarea 1 de la situación 2**

A) Subdivida la Figura S2(1) en un rectángulo, dos triángulos y cuatro cuadrados.

**Figura S1(1) figura inicial**

B) Subdivida la figura inicial en un trapecio, un triángulo y un cuadrado.

**Figura S2(1) "Figura inicial"**

Figura 168. Solución del estudiante C07

En la situación 2 tarea A se solicita que subdivida una figura inicial en un rectángulo dos triángulos y cuatro cuadrados. Si se observa detenidamente el estudiante C07 realiza unos trazos suplementarios en donde consigue formar con una diagonal desde el punto C hasta el punto E dos triángulos y realizó tres trazos suplementarios más con los cuales el estudiante estaría cumpliendo con la tarea de formar cuatro cuadrados y un rectángulo. Si bien los procedimientos realizados por el estudiante están bien realizados y concuerdan con la consigna hay dos elementos que se pasan por alto, el primero es que hay la existencia de un cuadrado BCDE y existe un rectángulo a AFGH que el estudiante pasa por alto no por ello podemos afirmar que hay una equivocación simplemente el estudiante busco formar figuras al interior de la *figura inicial* y no tuvo en cuenta estos elementos.

En la tarea B de la situación 2 El estudiante C07 visualizó correctamente y tomo buenas decisiones al realizar sólo dos trazos suplementarios logrando completar la tarea que era formar un trapecio un triángulo y un cuadrado, y de hecho queda implícitamente formado un rectángulo que es el rectángulo AFGH.

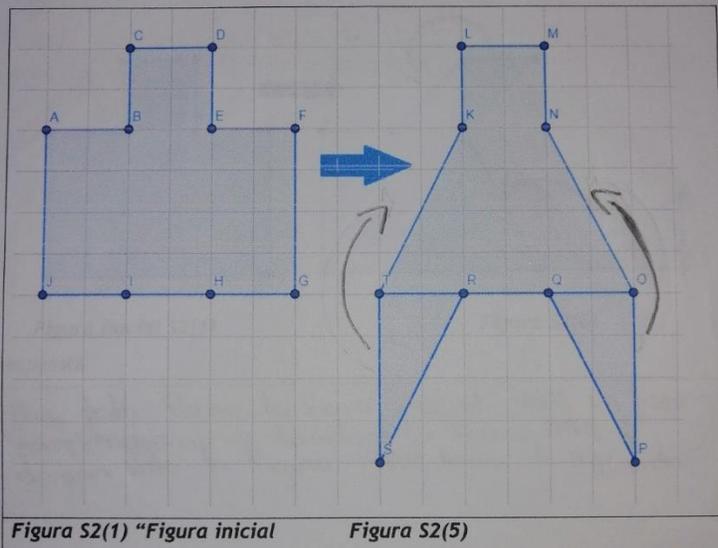
El estudiante O21 quién realiza unos trazos suplementarios diferentes a los que realizó el estudiante C07, sí tuvo en cuenta que ya estaba formado un rectángulo AFGH y sólo hizo un trazo suplementario de forma diagonal para conseguir los dos triángulos solicitados y al interior del cuadrado BCDE realiza dos trazos suplementarios para conseguir los cuatro cuadrados que se solicitaban. Cabe destacar que el estudiante no tiene en cuenta el cuadrado de tipo global BCDE sólo se refiere a los cuadrados internos que dibujo con los trazos suplementarios, pero cumplió con la consigna entregada (ver p.211).

En la consigna literal B el estudiante O21 trabajó realizando dos trazos suplementarios de igual forma como el estudiante C07.

El estudiante R26 confundió las consignas de las tareas literal A y B pero podríamos decir que cumplió con el objetivo de la situación indiferentemente del orden en el que las haya realizado y cabe destacar que realizó en la tarea B unos trazos suplementarios distintos a los que realizó los estudiantes C07 y O21 (ver p.212).

Tarea 2 situación 2

A partir de la figura inicial S2(1) construya la figura S2 (5). Explica tu procedimiento detallando cada una de los trazos o movimientos realizados para llegar a la figura sugerida.



Respuesta  
 Para poder armar la figura inicial opte por trasladar el triángulo TSR y QOP hacia arriba

Figura 169. Solución del estudiante C07

En la tarea 2 se solicitaba que construya a partir de una *figura inicial*, la figura S2 (5) sí notamos el procedimiento del estudiante C07 se nota que de la *figura final* quiso demostrar que se podía transformar en la *figura inicial* y es de destacar que este estudiante realizó bien la tarea 2 de la situación 1 literal A p.125 que era donde se indagaba sobre las transformaciones de rotación traslación y reflexión, en este punto en la explicación en lengua natural utiliza la frase "traslade el triángulo TSR y el triángulo COP hacia arriba", esto denota que está manejando los términos para dar explicación a los procedimientos que utilizó y lo hace de forma correcta.

En el análisis que se le realizó a la misma pregunta, el estudiante O21 se le observa dos situaciones la primera que a diferencia del estudiante C07 este sí inicia transformando la figura S2 (1) en la figura S2(5) y los procedimientos que muestra a través de flechas o vectores los realizó de forma correcta, pero en la respuesta en lengua natural acerca de los procedimientos utilizados, confunde el término rotar con el de trasladar a pesar que en el punto 2 de la situación 1 había identificado de forma correcta esas definiciones. Parece ser que al poner estas definiciones en otros contextos ya no es tan claro para el estudiante lo dicho anteriormente, eso no significa que el estudiante haya procedido de forma incorrecta, sino que tuvo una confusión a la hora de escribir su informe en lengua natural pero que se fue aclarando por medio de la mediación del docente (ver p.213,214).

**Tarea 3 situación 2**

Transforma la figura inicial S2(1) en la figura S2 (6). Explica tu procedimiento detallando cada una de los trazos o movimientos realizados para llegar a la figura sugerida.

**Figura inicial S2(1)**                      **Figura S2(6)**

Respuesta

Para poder formar la figura inicial trace un trazo complementario y traslade la figura MNA y despues rote la figura MNA hacia la requerida

Figura 170. Solución del estudiante C07

En la tarea 3 de la situación 2 de nuevo vemos una constante en el estudiante C07 de transformar la *figura final* en la *inicial* dicho procedimiento también es válido dentro del

razonamiento que está realizando el estudiante, el objetivo de la situación no se pierde al trabajar una heurística diferente. Vemos que en el informe en lengua natural el estudiante C07 tiene muy claro las transformaciones a través de traslación y rotación pues describe con propiedad, y utilizando la designación para explicar los movimientos que realizó para transformar la figura inicial en la final que en su caso es, al contrario.

El estudiante O21 transforma de forma correcta la figura inicial S2(1) en la figura final S2(6) pero en su descripción en lengua natural se le dificulta escribir si los procesos fueron de traslación o rotación (ver p.215).

El estudiante R26 quién transformó correctamente la figura inicial S2(1) en la figura final S2(6) muestra a través de flechas y con descripciones encima de la figura los procesos de traslación y rotación de forma correcta y explica con propiedad los procedimientos que realizó para llegar a la transformación de la figura inicial en la final cómo se mostró en la figura anterior (ver p.216).

**Tarea 4 Situación 2**

A) ¿Cuál de estos cuatro terrenos de forma diferente es el de mayor área?

B) ¿Se podría afirmar que la figura S2(8) por tener un perímetro de 32 metros y ser la que tiene mayor perímetro de las cuatro figuras es la que contiene más área?

C) ¿A qué conclusión llegaste en cuanto a las áreas de las cuatro figuras y sus respectivos perímetros? Justifica tus respuestas.

**Figura S2(7)** **Figura S2(8)**

**Figura S2(9)** **Figura S2(10)**

**Respuesta**

A) El terreno con más área es S2(10)

B) El terreno 2 efectivamente es el de más perímetro pero no por ser el de más perímetro tiene que ser el de más área ya que el de más área es S2(10)

C) La conclusión es que no necesariamente el terreno con más perímetro tiene que ser el de más área.

Figura 171. Solución del estudiante C07

En la tarea 4 de la situación 2 el estudiante C07 realizó un análisis de las figuras a nivel perceptual o podríamos decir un análisis a nivel mental que le permitió llegar a una

conclusión, la cual escribió de la siguiente forma "el terreno con más área de es la figura S2(10) el terreno 2 efectivamente es el que más perímetro tiene pero no por ser el demás perímetro tiene que ser el de más área ya que el demás área es el terreno 4 ", lo anterior denota que el estudiante está haciendo un razonamiento adecuado y llega a la conclusión que la relación área y perímetro no es concluyente en todos los casos, para poder afirmar que un terreno por tener mayor perímetro tiene mayor área o viceversa.

El estudiante O21 quién hace un razonamiento a nivel mental y no externo llega a la conclusión que el terreno de mayor área es el 4 pero que el área no está relacionada con el perímetro porque: " un terreno puede tener mayor perímetro que otro terreno que otro así tenga el perímetro más pequeño puede tener más área" la redacción no es muy clara pero la idea es válida (ver p.217).

Los estudiantes C07 y O21 en esta situación llegan a la conclusión de las relaciones área y perímetro de forma correcta y experimental a través de las figuras lo que les permitió llegar a los razonamientos que hicieron en lengua natural.

El estudiante R26 muestra una serie de rayas que denotan la comprobación de forma manual de los perímetros de todas las figuras como también los resultados de cada una de las áreas que poseía las figuras y en su informe en lengua natural concluye de forma correcta diciendo que el terreno de mayor área es el terreno número 4 y en la respuesta a la pregunta B dice lo siguiente "no se puede afirmar nada porque el perímetro y área son designados totalmente diferentes en todos los sentidos", la anterior frase está en el sentido que la relación área y perímetro son distintas.

En la respuesta a la pregunta C el estudiante R26 dice lo siguiente *"tuve la conclusión de que los terrenos 1 y 3 son los mismos sólo que tienen una parte en diferente lado y que las figuras por tener más perímetro necesariamente no tienen más área y que por tener más áreas necesariamente no tiene más perímetro"*. Los análisis que hace el estudiante acerca de la relación área perímetro son correcta. El estudiante R26 al decir que él concluye que el terreno 1 y 3 son los mismos esto denota que realizó una transformación de la figura terreno 1 en la figura terreno 3 lo cual es potente para su análisis es decir que la secuencia didáctica hasta este momento estaba teniendo buenos resultados con en cuanto a los objetivos propuestas (ver p.218).

**SITUACIÓN 3 “Áreas sombreadas”**

El objetivo de esta situación es: Combinar tratamientos y operaciones figurales que permitan la comparación de dos áreas sombreadas que ocupan la misma superficie de forma equivalente.

**Tarea 1 situación 3**

Con la siguiente información ayuda a don Juan, quien trabaja en Marroquinería a saber: cuál es el área de una pieza de cuero para evitar desperdiciar materia prima, a continuación, se muestra la silueta con algunos datos.

Realiza trazos suplementarios que te permitan ver algunas subfiguras que podrás trasladar para reconfigurar la figura S3 (1) en un rectángulo el cual facilitara tu análisis.

Explica tu procedimiento detallando cada una de los trazos o movimientos optimizar el área requerida.

**Figura S3 (1)**

Respuesta

Figura 172. Solución del estudiante C07

En la tarea 1 de la situación 3 un gran porcentaje de los estudiantes resolvió sin presentar ningún problema, plantearon la transformación de la figura inicial en otra dónde su contorno fue más sencillo para su comprensión al reconfigurarlo en el rectángulo BEFJ. El estudiante C07 no fue la excepción, pero se encontró una dificultad a la hora de encontrar el área total de dicha figura, pareciera que los estudiantes tienen falencias en la conversión de unidades de medida. Es decir, no son capaces de convertir yardas a metros o viceversa, aunque esto es sólo una conjetura, puesto que el estudiante C07 no escribió en lengua natural los procedimientos o heurísticas utilizadas.

El estudiante O21 hace una descripción a través de flechas del procedimiento utilizado para reconfigurar la figura inicial en una nueva de contorno global diferente, esta se le hizo más sencilla para la comprensión. En su explicación sobre los movimientos realizados vuelve a tener una confusión en cuanto a la terminología, puesto que da un concepto

erróneo de rotación en relación a la traslación dicha situación se ha presentado en otras tareas anteriores con este estudiante en particular (ver p.219).

El estudiante R26 realiza una explicación a través de flechas y rotulaciones donde explica los movimientos que realizó a cada su figura, como lo es la rotación, la traslación y designa algunas figuras con la palabra “misma figura” lo que denota en estudiante una comparación de áreas y figuras que poseen la misma característica. Finalmente explica en lengua natural que al transformar la figura inicial en un rectángulo no se va a desperdiciar materia prima pero no da explicación ni da cuenta de cuál es el área total de dicha figura, posiblemente por no comprender la conversión de unidades (ver p.220).

**Tarea 2 situación 3**

Doña María va a realizar un vestido que tiene las medidas y contorno como se muestra en la siguiente figura. Ayúdala a comprar un retazo de tela con el que pueda cubrir de forma exacta el área del vestido sin desperdiciar materia prima, dar la respuesta en pulgadas cuadradas.

Realiza trazos suplementarios y reconfigura la figura S3 (3) en una figura más sencilla para resolver el ejercicio

**Figura S3 (2)** **Figura S3 (3)**

**Respuesta**

hice trazos suplementarios y trase de ambos postes hacia donde cambian

NO

Figura 173. Solución del estudiante O21

El estudiante O21 indica con unas flechas los movimientos de sus figuras, pero sólo intenta trasladar la misma figura COPAB dos veces, lo cual es confuso, lo correcto sería a ver trasladado primero COPAB y después GHIJK además, en su explicación en lengua natural dice que *“hizo trazos suplementarios y rotó ambas partes hacia donde cambiaban”*. Esta explicación resulta también un poco confusa para el investigador puesto que no se sabe de cuáles partes es la que habla el estudiante, esto debido a que no utiliza ningún tipo de designación, elemento que ya hemos dicho de manera permanente qué es de gran importancia a la hora de describir propiedades o reconfiguraciones de las figuras geométricas.

El estudiante R26 muestra con flechas un posible procedimiento para dar solución a dicha tarea y escribe un rótulo donde indica que las flechas son rotaciones de las subfiguras, lo anterior es correcto, pero no describe en lengua natural cuáles fueron los procedimientos utilizados para realizar esta tarea (ver p.222).

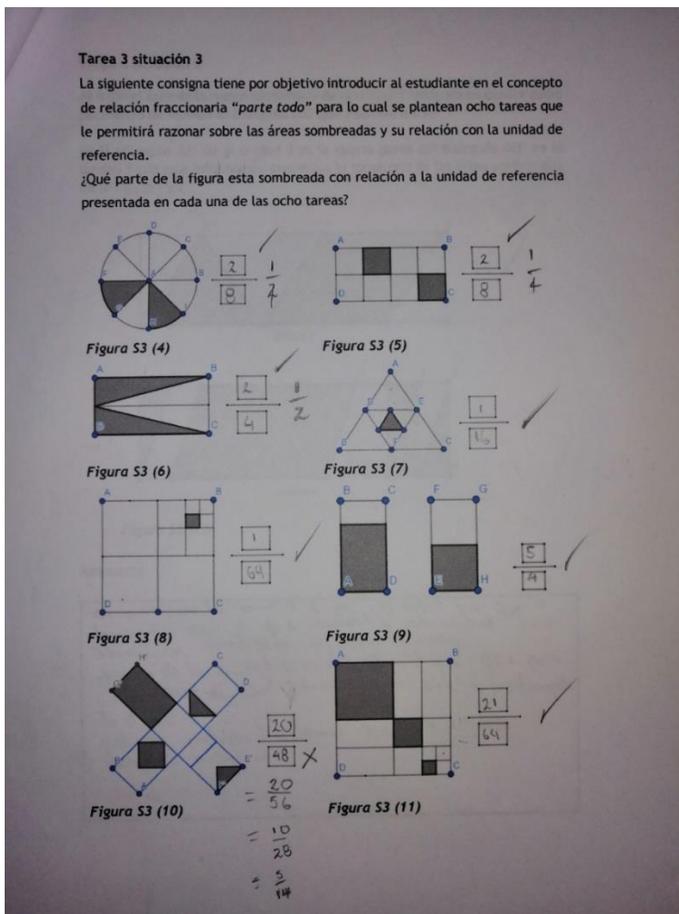


Figura 174. Solución del estudiante C07

La tarea 3 es fundamental para comprender la situación 3 puesto que introduce al estudiante en la relación parte todo. El estudiante C07 en esta tarea mostró que tenía claro la relación entre las figuras y su representación numérica fraccionaria sólo presentó error en la figura S3(10). Cabe destacar que el estudiante no hace simplificación de las fracciones para dar las respuestas, quizás porque no se ha hecho un fuerte trabajo en esos tratamientos de equivalencia, pero dichas respuestas son correctas.

El estudiante O21 al contrario del estudiante C07 cometió equivocaciones en todas las tareas de este punto por lo cual el investigador tuvo que entrar a explicar dichas equivalencias entre las figuras y su representación fraccionaria, pero se nota que la estudiante continúa con falencias por la falta de un trabajo fundamentado desde años escolares atrás. Esto preocupante puesto que esta tarea era fundamental para la comprensión de las siguientes situaciones didácticas (ver p.223).

El estudiante R26 tiene buena comprensión de la relación parte-todo y tiene claro la representación numérica de las fracciones que está representando en cada figura, sólo en la figura S3 (9) no dio una respuesta completa de la situación sólo lo hizo a nivel parcial cómo se puede notar en la figura anterior (ver p.224).

Tarea 4 situación 3

A) Halle el área de la región sombreada de la unidad 1 teniendo en cuenta como parámetro de medida el triángulo DEF que equivale a  $6 \text{ m}^2$

B) El triángulo ILM de la unidad 2 es la cuarta parte del triángulo DEF de la unidad 1 con esta información encuentra la sumatoria de las áreas sombreadas de la figura 1 y 2

Figura S3 (12)

Respuesta

El área de la unidad 1 es  $18 \text{ m}^2$  ya que el triángulo DEF es de  $6 \text{ m}^2$  y esta unidad tiene 3 triángulos sombreados del mismo tamaño el área de la unidad 2 es de  $18 \text{ m}^2$  ya que posee 6 triángulos de  $1.5 \text{ m}^2$  2 triángulos de  $3 \text{ m}^2$  y un triángulo de  $6 \text{ m}^2$  entonces podemos afirmar que las 2 unidades tienen la misma área.

Figura 175. Solución del estudiante C07

En la tarea 4 de la situación 3 el estudiante C07 encuentra el área de la unidad 1 pero no logra encontrar el área de la figura 2, a nivel de la explicación en lengua natural de los procedimientos estos son claros y sus apreciaciones son precisas además lo describe desde la designación lo cual es importante, aunque algunas apreciaciones son incorrectas. El estudiante O21 en esta tarea no logra encontrar el área ni la relación fraccionaria, esta situación es clara causa de la no comprensión de la relación parte todo y su representación fraccionaria que se evidenció en la tarea 3 de la situación 3 (ver p.225).

El estudiante R26 realizó trazos suplementarios para comprender mejor las áreas sombreadas que estaban representadas en la unidad 1 y en la unidad 2, y al explicar su respuesta se notó una falencia al sumar las dos áreas representadas puesto que sus sumatoria no era  $21\text{cm}^2$  las respuestas correctas y resultados están en el análisis a priori de las situaciones didácticas páginas 94 al 996. Y la solución (ver p.226).

**Tarea 5 situación 3**

Escribe la fracción que corresponde a la superficie sombreada con respecto a la unidad (que es el cuadrado externo) y determina la sumatoria de zona sombreada de color gris oscuro de las 3 unidades

Unidad 1      Unidad 2      Unidad 3

**Figura S3 (13)**      **Figura S3 (14)**      **Figura S3 (15)**

**Respuesta**

la figura N°1 representa  $\frac{1}{2}$  la  
 figura N°2 representa  $\frac{1}{2}$  y la figura N°3  
 también representa  $\frac{1}{2}$   
 para poder ver que las figuras N°2 y N°3  
 también representaban  $\frac{1}{2}$  me toca trasladar  
 algunas fracciones

Falta realizar la  
 Sumatoria  
 $\frac{1}{2}$

Figura 176. Solución del estudiante C07

En la tarea 5 de la situación 3 el estudiante C07 realizó un posible análisis a nivel mental dando cuenta de que cada figura poseía  $\frac{1}{2}$  de área sombreada, pero no realiza la sumatoria de las tres áreas, una posible conjetura es que el estudiante haya pasado por alto dicha situación.

El estudiante O21 en su respuesta dice que cada figura es equivalente a un medio de área sombreada, pero al dar el resultado total dice que la sumatoria es de *un medio* lo cual es erróneo tal vez lo que quería decir es que todas las figuras poseen un medio de área sombreada, pero lo dicho anteriormente sólo es una conjetura (ver p.227).

El estudiante R26 en la tarea 5 de la situación 3 escribe que la unidad 1, 2 y 3 poseen un medio de zona sombreada, pero al aplicar un algoritmo de la sumatoria de las fracciones dicho algoritmo es erróneo como se muestra en (ver p.228).

En conclusión, la tarea 5 de la situación 3 nos muestra que hay algunas debilidades en la relación parte todo en cuanto a la comprensión de los procedimientos para sumar unidades fraccionarias lo cual debe ser mejorado a través del acompañamiento del docente para que los estudiantes puedan superar dichas falencias.

**Tarea 6 situación 3**

Hallar el valor de la sumatoria las regiones sombreadas en fracción con respecto a la unidad, explica cómo lo hiciste y justifica tu respuesta.

Figura S3 (16)  $\frac{1}{16} \frac{3}{8}$

Figura S3 (17)  $\frac{1}{2} \frac{2}{4} \frac{1}{16}$

**Respuesta**

la sumatoria de las regiones sombreadas es  $\frac{7}{8}$

Para aver el area sombreada principalmente me toca hacer movimientos de rotacion, reflexion y traslacion en algunas fragmentos para lograr visualizar el area sombreada

Figura 177. Solución del estudiante C07

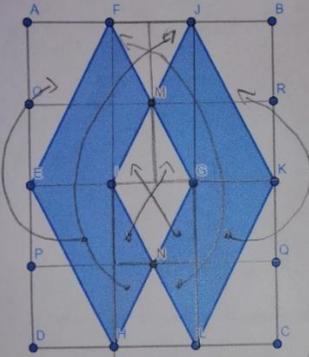
En la tarea 6 situación 3 el estudiante C07 muestra con flechas todos los movimientos realizados y el proceso de transformación de la figura y lo hizo correctamente además a diferencia de las otras tareas en esta presenta la sumatoria exacta de las regiones sombreadas lo cual es muy positivo, en la explicación en lengua natural dice que los procedimientos que él utilizó fueron rotación reflexión y traslación para poder visualizar el área de la región sombreada y de hecho se nota por la indicación de las flechas que realizó en la figura.

El estudiante O21 realizó algunos procedimientos en la unidad 2 de forma correcta, pero a la hora de mostrar los resultados de forma fraccionaria su respuesta es errónea, el estudiante dice en lengua natural sus procedimientos, pero estos no son claros ni concluyentes (ver p.229).

El estudiante R26 quién presentó en la figura flechas para indicar los movimientos y algunos rótulos, dicen que realizó traslación y giros en las figuras para reconfigurarla y poder encontrar el área, hace unas aclaraciones en lengua natural refiriéndose a que utilizó trazos suplementarios y utiliza la palabra desarmar como un equivalente a reconfiguraciones de tipo meteorológico que tuvo que hacer para poder analizar las figuras, esto con la unidad 1, con la unidad 2 dice “hice traslaciones de las diferentes áreas sombreadas y con el trapecio lo gire para poder que quepa en el área necesitada”, el estudiante utiliza la palabra gire para explicar un movimiento de reflexión de tipo espejo que es válido dentro del procedimiento que hizo el estudiante pues en la figura coloca que lo trasladó y lo giró además utiliza la palabra caber como un apelativo de la comparación de áreas que tuvo que hacer mentalmente para disponerse a hacer un movimiento en dicho espacio. El estudiante en ningún momento hace la sumatoria de las regiones sombreadas de la unidad 1 y 2 (ver p.230).

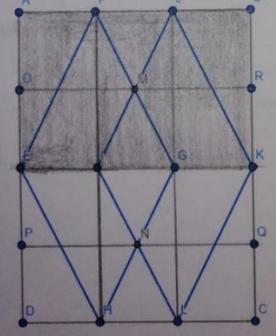
**Tarea 7 situación 3**

Realiza los siguientes trazos suplementarios, haz un trazo del segmento FH y JL, igualmente realiza esta tarea con los segmentos OR, EK y PQ posteriormente deconstruye la región sombreada de color azul. Construye una nueva figura que sea más sencilla para el análisis y define cuál es la fracción que ocupa dicha zona azul con respecto del rectángulo ABCD.



**Figura 53 (18)**

Dibuja aquí la nueva figura hallada



**Respuesta**

el área sombreada representa la fracción  $\frac{1}{2}$  respecto a la figura ABCD y para lograr visualizar esto tuve que realizar trazos complementarios y también realizar movimientos de rotación y traslación

Figura 178. Solución del estudiante C07

En tarea 7 situación 3 el estudiante tenía que enfrentarse a una descomposición de tipo heterogénea para reorganizar la figura en una nueva que le permitiera realizar el análisis acerca de la región sombreada de color azul el estudiante C07 realiza dicha reconfiguraciones y lo muestra a través de flechas de forma clara y precisa lo cual le permitió organizar las figuras en un nuevo rectángulo ABKE dicho rectángulo es más sencillo de entender para el estudiante el cual da un informe en lengua natural diciendo que el área sombreada de color azul es un  $\frac{1}{2}$  de la figura ABCD lo cual es correcto. Lo anterior demuestra que los procesos metodológicos utilizados como heurísticas para entender problemas geométricos como el que presenta la tarea 7 son de gran ayuda para el razonamiento y son heurísticas diferentes a las tradicionales lo cual permite dejar de lado las fórmulas para tomar otros caminos en el razonamiento de las figuras y específicamente el de áreas sombreadas.

El estudiante O21 realiza una deconstrucción de la forma inicial y lo indica a través de flechas y sombrear con lápiz las regiones en donde se ubicará la subfigura que previamente tuvo que analizar su equivalencia de área para desplazarla hasta ese sitio, el estudiante reorganiza todas las figuras en un nuevo rectángulo O R Q P dicha propuesta del estudiante es válida y permite realizar el siguiente razonamiento por parte del estudiante “la figura que logre hacer con los trazos fue un rectángulo o RQP que es la zona azul y que ocupa un medio de la figura inicial ABCD” dicha conjetura efectivamente es válida (ver p.231).

El estudiante el R26 no muestra unas marcas perceptibles para el investigador de los tratamientos realizados al interior de la figura se conjetura que posiblemente iba rayando la parte azul con el lápiz y dichas figura la Eva rayando en la cuadrícula de respuesta lo cual es una heurística válida también dentro del proceso de la deconstrucción y reconfiguración y a pesar de que no utilizó la lengua natural para escribir sus procedimientos coloca como respuesta 6/12 que equivalen a un medio de la figura (ver p.232).

veamos como los estudiantes a pesar de aplicar diferentes heurísticas son capaces de llegar a respuestas verdaderas sin la necesidad de aplicar fórmulas lo que es muy importante para este trabajo de indagación.

Tarea 8 situación 3  
Encuentra una estrategia para definir cuál es la fracción de la parte sombreada de color rojo con respecto a la unidad cuadrada  $AEIM \triangle ABCD$   
Explica los procedimientos realizados

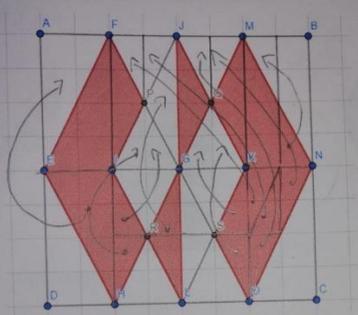


Figura 53 (19)  $\frac{28}{64} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}$

Respuesta

la fracción que representa el área sombreada es  $\frac{7}{16}$  y para poder hacer esta fracción se tuvo que realizar muchos trazos complementarios y muchos movimientos de traslación y rotación

Figura 179. Solución del estudiante C07

La tarea 8 de la situación 3 presenta un grado de dificultad mayor a la anterior tarea 7, el estudiante C07 sortea dicha tarea de la misma forma como lo hizo con la tarea 7 haciendo la traslación y rotación de las figuras en espacio que ocupa iguales áreas y lo indica con flechas. En lengua natural conjetura que: "la fracción que representa el área sombreada de  $7/16$  y para poder hallar esta fracción me tocó realizar muchos trazos complementarios y muchos movimientos de traslación y rotación. El estudiante 07 tiene bien en claro que una heurística potente es la realización de trazos suplementarios los cuales le permiten visualizar espacios de áreas iguales a las que se encuentran de color anaranjado lo que le permite reordenarlas a través de procesos mereológicos como la traslación y la rotación. Es importante tener en cuenta que en esta tarea no se indicaban los trazos suplementarios y el estudiante tuvo que tomar estas decisiones de trazos para comprender los procesos a realizar y los resolvió de la mejor forma.

El estudiante O21 no logra realizar la tarea 8 de la situación 3, dicha situación para el investigador es de tipo contradictorio puesto que en la tarea 7 tenía que hacer un procedimiento con unas heurísticas similares es posible que el hecho de tener que tomar decisiones acerca de la realización de los trazos suplementarios no fue tan evidente como en el caso anterior y esto puede haber llevado al estudiante a un bloqueo mental lo anterior es sólo una conjetura (ver p.233).

El estudiante R26 muestra que realizó una deconstrucción de tipo mereológica en la tarea 8 en donde mostraba con flechas y con algunos enunciados que estaba realizando traslaciones rotaciones lo cual es potente y le permitió llegar a una respuesta, en donde explica que el área sombreada de color anaranjado es equivalente a  $28/64$  y esto es verdadero aunque no realicé la simplificación y de la respuesta de  $7/16$  qué era lo que se esperaba pero en conclusión el ejercicio tuvo una apuesta válida dentro del marco de lo esperado (ver p.234).

**Tarea 9 situación 3 (Área de regiones circulares)**  
 Observa detenidamente la figura S3 (20) y determina una expresión fraccionaria que represente la región sombreada de color gris, teniendo en cuenta que la unidad está dada por la circunferencia de radio EK

Figura S3 (20)

Unidad de referencia

Respuesta

la fraccion que representa el area sombreada es  $\frac{6}{4}$  la cual es equivalente a un círculo y medio

Figura 180. Solución del estudiante C07

A partir de la tarea 9 de la situación 3 nos encontramos con situaciones en donde el área sombreada tiene porciones de tipo circular para lo cual permitirá observar las heurísticas que realizaron los estudiantes en este tipo de tareas.

El estudiante es C07 realiza una reconfiguración de la figura inicial lo cual le permite afirmar que la fracción que representa el área sombreada es  $\frac{6}{4}$  pero además dice en lengua natural que esta fracción es equivalente a "un círculo y medio" lo cual permite observar que el estudiante tiene muy en claro la relación parte todo y es capaz de pasar realizar tratamientos de un registro figural a un registro numérico y a su vez hacer tratamientos dentro del mismo registro lo cual permite visualizar que el estudiante a alcanzado un nivel de comprensión apropiado dentro de las tareas realizadas.

El estudiante O21 presentó serias dificultades a la hora de realizar la tarea 9 puesto que no realizó la deconstrucción de la figura inicial en una nueva que fuera más sencilla de entender y en su explicación los valores arrojados no son correctos esto puede llevarnos

a concluir que el estudiante no tiene claro la relación parte todo y por ello se le dificulta este tipo de tareas (ver p.235).

El estudiante R26 muestra a través de flechas reconfiguraciones de la figura inicial, pero al dar la respuesta está no es concluyente, es posible que al tratarse de regiones circulares esto haya causado confusión en los procesos heurísticos del estudiante y sus posibles razonamientos (ver p.236).

**Tarea 10 situación 3**  
En la siguiente figura nos encontramos con un cuadrado ABCD que contiene una región sombreada de color gris, deconstruye esta región y forma un rectángulo que te permita determinar el área en  $\text{cm}^2$  de dicha región.

**Figura 53 (21)**

**Respuesta**

después de construir nuevamente el rectángulo y multiplicar sus lados supe que su área era 72 cm ✓

Figura 181. Solución del estudiante C07

En tarea 10 situación 3, el estudiante sin ningún problema hace la reconfiguración de la figura inicial y muestra los procedimientos de traslación a través de flechas consiguiendo formar una nueva figura que es más sencilla para la comprensión y que le permite definir que si una de las aristas de la nueva figura es de 12 cm esto le permitirá realizar una multiplicación lado por lado del nuevo rectángulo para definir que el área total sombreado es de 72 cm el estudiante C07, olvida que la unidad es en centímetros cuadrados.

El estudiante O21 realiza unas flechas casi imperceptibles que indican que está trasladando sus figuras y raya con lápiz la zona a la que se va a trasladar, realizando una comparación de áreas entre la figura sombreada y el espacio donde lo va a ubicar la subfigura, posteriormente dice que el área sombreada es de  $72 \text{ cm}^2$  lo que es correcto y dice que el procedimiento que utilizó fue la traslación (ver p.237).

El estudiante R26 además de indicar los procesos meteorológicos con flechas y la respectiva comparación de áreas deja algunos enunciados de tipo explicativo dentro de la figura, este tipo de heurística se ha venido utilizando durante todo su proceso de la solución de las tres situaciones didácticas y parece ser que le funciona bien. Finalmente, da una respuesta en lengua natural donde dice que la fracción del cuadrado es de  $1/2$  aquí en esta parte se sobreentiende que estaría hablando de la región sombreada y dice que dichas zonas sombreadas son igual a  $72 \text{ cm}$  y al igual que el estudiante 07 olvida colocar correctamente la unidad ya que ésta es en centímetros cuadrados (ver p.238).

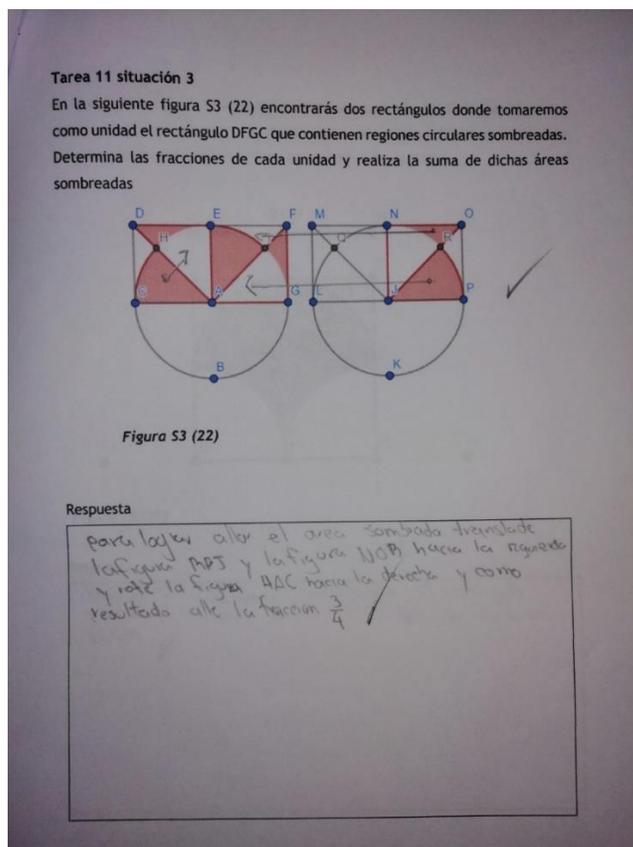


Figura 182. Solución del estudiante C07

En tarea 11 situación 3, el estudiante C07 igual que en otras tareas muestra proceso de tipo mereológicos y los representa a través de flechas, también es evidente que la

comparación de áreas que hace el estudiante es correcta, en cuanto a la respuesta en lengua natural el estudiante informa “para lograr hallar el área sombreada traslade la figura RPJ y la figura NOR hacia la izquierda y rote la figura HAC hacia la derecha y como resultado halle la fracción  $\frac{3}{4}$ .

veamos como el estudiante se ha fortalecido en los procesos no sólo de tipo mereológicos sino también en la designación de las figuras para utilizarlo en su explicación en lengua natural y sus resultados son claros y precisos a pesar de que comete algunos errores de tipo ortográfico, pero ello no está dentro de nuestra indagación.

El estudiante O21 no realiza ninguna marca perceptual que indique tratamiento en las figuras y su respuesta en lengua natural no es del todo correcto y confunde la relación parte todo y su representación fraccionaria (ver p.239).

El estudiante R26 a través de flechas indica que trasladó subfiguras y deja unos rótulos como nos tiene acostumbrados dentro de este proceso de indagación, procesos que son válidos en la respuesta sólo nos deja la representación fraccionaria  $\frac{3}{4}$  que es correcto, pero no explica sus procedimientos es decir la respuesta está sin justificación (ver p.240).

Tarea 12 situación 3  
Reconfigura la siguiente figura y encuentra el área en  $\text{cm}^2$ .  
Explica los procedimientos utilizados.

32 cm

Figura S3 (23)

Área de la circunferencia:  
 $A_c = \pi r^2$

2 | 1,135,87  $\text{cm}^2$

Respuestas

primero que todo se halla el área del cuadrado  
después se multiplica el  $r^2 \cdot \pi$  y el resultado se  
lo restamos al área del cuadrado y el resultado  
se divide en 2 y finalmente esto se le suma  
al área del cuadrado

Figura 183. Solución del estudiante C07

En la tarea 12 situación 3 particularmente buscaba además de trabajar los procesos de tipo mereológicos, la deconstrucción, la rotación, la simetría, e incluye un elemento como lo es el número irracional  $\pi$  tarea que implicaba realizar además de las habilidades adquiridas durante toda la secuencia didáctica una aplicación de fórmulas y razonamientos

para llegar a la respuesta. El estudiante C07 indica a través de flechas la reconfiguración de la figura inicial en una figura final más sencilla y da una respuesta en lengua natural que dice “primero que todo, se halla el área del cuadrado, después se multiplica el radio al cuadrado por  $\pi$  y el resultado se le resta al área del cuadrado y el resultado se divide en dos y finalmente esto se le suma al área del cuadrado”, esta explicación está apoyado con una figura que se encontró al respaldo de la hoja que se agrega a continuación y que le permitió al estudiante realizar la conjetura que el área sombreada era de 1133 , 83 cm cuadrados resultado que es totalmente válido.

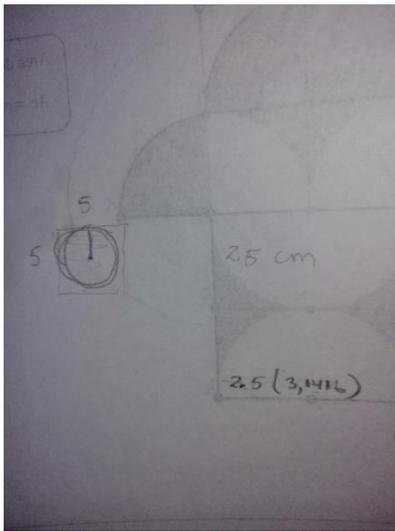


Figura 184. Solución del estudiante C07

El estudiante O21 intenta través de flechas mostrar los procesos de traslación y rotación y realiza con lápiz el sombrero de algunas zonas de la figura para indicar que las traslado, pero no es muy claro este procedimiento y podríamos decir que es errónea en la explicación en lengua natural da unos resultados que no son válidos (ver p.241).

se puede concluir que el estudiante O21 a partir de la tarea de la relación parte-todo en la cual cometió errores en todos los puntos no pudo ser concluyente o definitivo a la hora de razonar las siguientes tareas de allí que cometió varios errores en la apreciación de los dos que tenía que encontrar y sobre todo de la representación fraccionaria que conllevaba cada tarea es evidente que dentro de una secuencia didáctica las tareas van incrementándose en su complejidad y que los elementos adquiridos inicialmente serán respaldo de las posteriores tareas el maestro debe entrar a fortalecer al estudiante en el concepto de relación parte todo para que supere algunas falencias visualizadas en esta indagación.

El estudiante R26 realiza una explicación con flechas y nos deja un rótulo indicando que está trasladando una figura en su explicación en lengua natural dice "lo primero que hice fue trasladar la figura para hacer una figura más fácil de observar (cuadrado). Después saca el área del cuadrado (1024 cm) y lo reste por el área de la circunferencia (80 3,84) dándome como resultado 220.16 y esto lo divide por dos para poder saber el resultado del área sombreada restante que me dio 110.08 el resultado final es 1134 cm cuadrados"(ver p.242).

El estudiante describe con detalles como fueron los procedimientos para llegar a la respuesta.

## **4.6 Conclusión final del capítulo heurísticas de los estudiantes.**

se puede notar que la aplicación de la situación didáctica en general logra que los estudiantes tengan avances significativos en cuanto a la deconstrucción y reconfiguración de figuras que les permiten hacer unos razonamientos precisos acerca de áreas sombreadas y que la designación, los trazos suplementarios, la traslación y la rotación, la simetría son parte fundamental a la hora de comprender conceptos como el área de una región sombreada y qué es fundamental para nuestro caso que el estudiante tenga claro la relación *parte-todo* puesto que si esto no es así el estudiante no es capaz de llegar a unas conclusiones verdaderas dentro de las tareas trabajadas, pero dejar que la figura comunique propiedades por sí sola, no es lo pertinente puesto que los elementos descritos anteriormente debe ser enseñados por el docente y es él quién es el mediador para que los estudiantes puedan visualizar de forma diferente y llegar a hacer razonamientos dentro de nuestro tema indagación.

En el apartado anterior se describió cada una de las tareas trabajadas por los estudiantes a continuación se realiza una descripción de cuatro categorías relevantes dentro de la aplicación de la secuencia didáctica como lo es: *El análisis de los procesos de visualización, diferentes aprehensiones en el inicio de la construcción del concepto de área de una región sombreada, el papel de la designación en el razonamiento figural y la articulación de la lengua natural y el registro figural.*

A continuación, agrupamos cuatro categorías relevantes dentro del análisis de la secuencia didáctica en relación con los componentes teóricos.

## 4.7 Análisis de los procesos de visualización.

La visualización y la coordinación con la lengua natural fueron dos de los pilares en este trabajo de indagación (en el apartado 4.10 ampliaremos a cerca del registro en lengua natural) pero el pensarse desde qué punto de vista se debe enseñar la geometría fue fundamental para el desarrollo de una secuencia didáctica bien planificada y soportada por la teoría semiótico cognitiva, al tomar la decisión de fortalecer la visualización no icónica siendo este el camino que tomamos para trabajar la visualización, tuvimos que hacernos preguntas como las siguientes ¿cómo enseñar a visualizar a unos estudiantes de grado noveno los cuales habían tenido una enseñanza tradicional? y que está enseñanza tradicional estaba a miles de kilómetros de acercarse a la teoría semiótica cognitiva entonces se toma la decisión de crear una secuencia didáctica amplia que permitiera ir abordando elementos de la visualización a través de cada tarea que se le planteaba a los estudiantes entonces tuvimos que formular otra pregunta si vamos a empezar por enseñar a razonar desde la deconstrucción ¿qué elementos permiten al estudiante visualizar de forma diferente una figura? Entonces comenzamos por enseñar los trazos suplementarios, pero había dos caminos uno en donde al estudiante se le diera una consigna que guiará la realización de trazos auxiliares reorganizadores a través de herramientas como la regla como la tarea 2B situación 1 que se muestra a continuación.

### **Tarea 2B situación 1**

*Se presenta una figura inicial (figura 34) de vértices ABCD que contiene cuatro puntos designados con las letras E, F, G y H.*

*Se solicita realizar la siguiente tarea como se muestra a continuación:*

*- Realiza los trazos suplementarios siguiendo las instrucciones: Realice un trazo con regla desde el punto E hasta el punto F; Realice un segundo trazo del punto G hasta el punto H  
¿Cuáles figuras reconoce después de haber realizado los trazos suplementarios con su respectiva designación?*

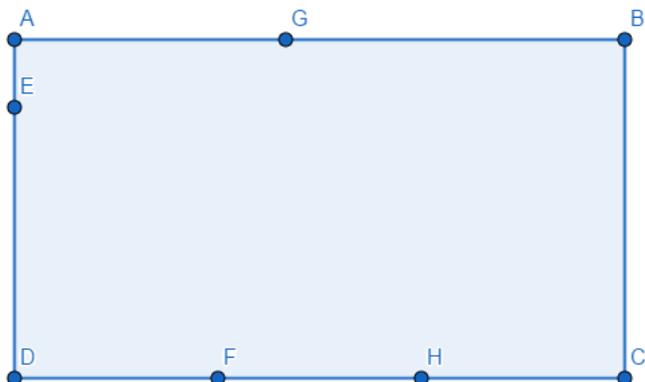


Figura 185. Figura que acompaña SD1-T2B

y otra en donde él estudiante tuviese que pensar qué trazos realizar a nivel mental que le permitieran visualizar la forma de reordenamiento de la figura para llegar a la solución del problema como ejemplo mostramos las situaciones que implicaron lo anteriormente descrito en la figura 186.

A) Subdivida la figura 186 en un rectángulo, dos triángulos y cuatro cuadrados.

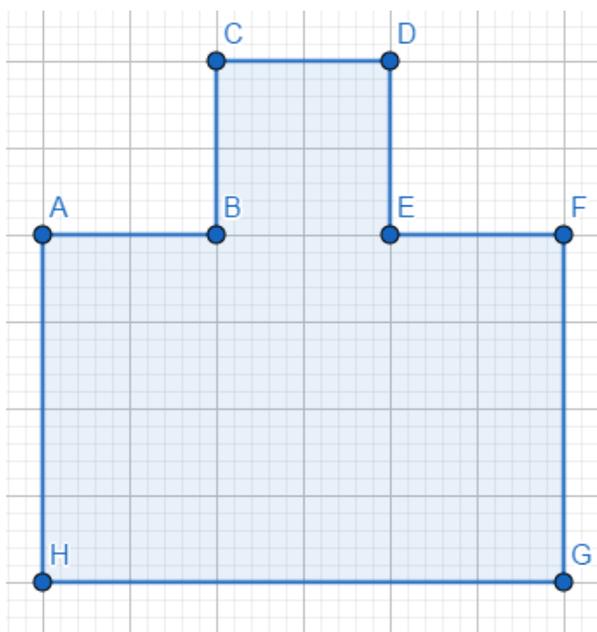


Figura 186. Figura que acompaña SD2-T1A

Pero para fortalecer las heurísticas en los estudiantes y que fueran capaces de visualizar los trazos suplementarios reorganizadores, fue necesario primero lanzar unas tareas a nivel del reconocimiento de las formas y la designación de vértices y figuras para que fuese

más sencillo y comprensible el trabajar con trazos suplementarios y la reorganización de las figuras a continuación se muestra en la figura la tarea específica.

### Tarea 3 situación 1

*¿Cuántos cuadrados de diferente área puedes identificar en la siguiente figura 187)?*

*Designa cada una de ellos con sus vértices.*

*Realiza un escrito explicando los procedimientos utilizados.*

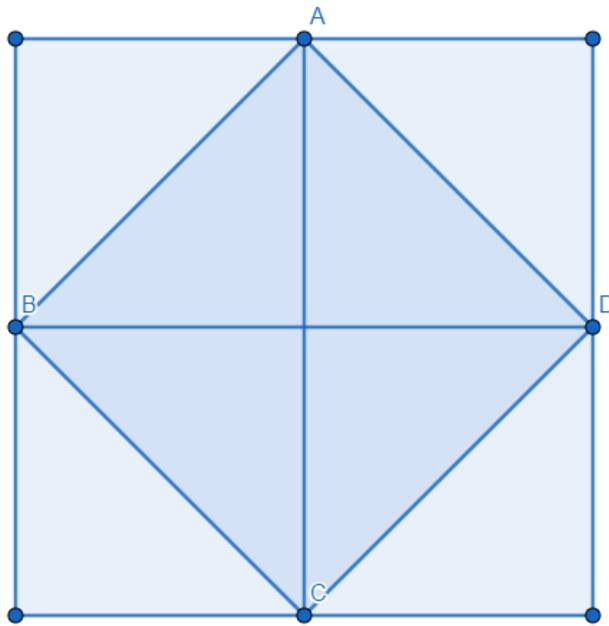


Figura 187. Figura que acompaña SD1-T3

Es claro que con los anteriores elementos de visualización los estudiantes no iban a lograr todo lo que pretendíamos en esta indagación por ello avanzamos a otro nivel como lo es la descomposición heurística por división mereológica de las formas con el fin que los estudiantes pudieran visualizar las subfiguras de las tareas como piezas de rompecabezas pero estos rompecabezas se podrían reorganizar de diferentes formas para crear una nueva figura más comprensible o más sencilla para resolver los problemas planteados, es decir que el estudiante de descomponer una figura para lograr una metamorfosis en ella que le permitiera visualizar de forma distinta dicha figura, pero a su vez que fuera potente para el análisis, como ejemplo mostramos las siguientes figuras realizadas por algunos estudiantes en donde se apropiaron de este tipo heurística para llegar a la visualización, se muestra en la siguiente tarea.

**Tarea 2 situación 2**

A partir de la figura inicial ABCDEFGJ construya la figura final KLMNOPQRST. Explica tu procedimiento detallando cada una de los trazos o movimientos realizados para llegar a la figura sugerida.

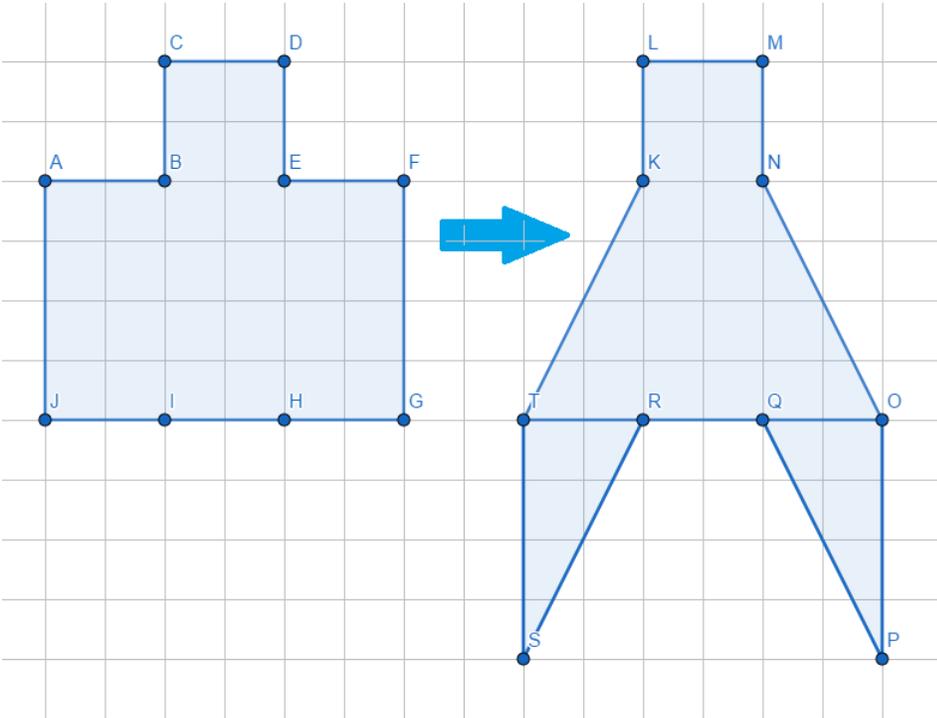


Figura 188. Figura que acompaña SD2-T2

Y finalmente que el estudiante pudiera visualizar procesos que le permitieran llegar a la conclusión de cuanta área sombreada había en una figura como se muestra a continuación figuras 189,190 y 191.

**Tarea 8 situación 3**

Encuentra una estrategia para definir cuál es la fracción de la parte sombreada de color rojo con respecto a la unidad cuadrada AEIM. Explica los procedimientos realizados.



Pero la visualización va mucho más allá y se hace necesario un engranaje con la lengua natural debido a que, a través de las palabras también podemos visualizar apartado que ampliaremos en el punto 4.10 “La articulación de la lengua natural y el registro figural.”

## 4.8 Diferentes aprehensiones en el inicio de la construcción del concepto de área de una región sombreada.

Es evidente que la situación 3 es un apartado dedicado a la comprensión del concepto de área de región sombreada pero los estudiantes tuvieron que seguir un camino para poder comprender este apartado en donde fueron adquiriendo diferentes herramientas heurísticas que les permitieron abordar el conocimiento acerca de área de regiones sombreada, las aprehensiones trabajadas en la situación uno y dos fueron de tipo perceptual y operatorio en donde los estudiantes realizaron situaciones como: trazos complementarios, rotaciones y traslaciones simetría axial entre otras transformaciones que son necesarias para para abordar la situación 3 a continuación se comparte una situación desarrollada por el estudiantes C07 a través del desarrollo de la situación didáctica.

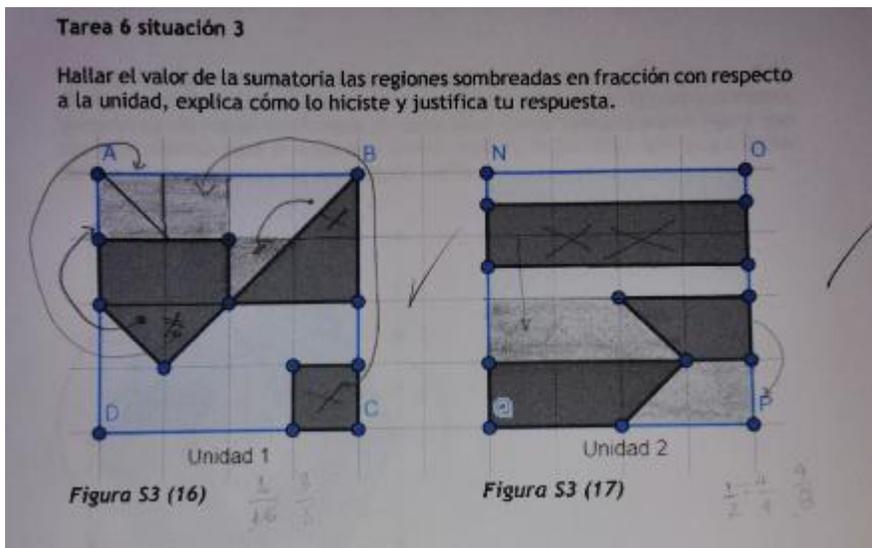


Figura 192 Solución con diferentes heurísticas

En esta solución figura 191 vemos que los estudiantes están realizando transformaciones que les permiten entender el área de la región sombreada y aplican rotación, traslación, simetría y realizan comparación de áreas de subfiguras.

## 4.9 El papel de la designación en el razonamiento figural.

Cuando se entregó por primera vez la guía para desarrollar las tres situaciones didácticas los estudiantes comenzaron a realizar preguntas como, por ejemplo: profesor, ¿qué tenemos que hacer para encontrar las figuras de la de la situación 1? ¿les ponemos nombres a las figuras?, ¿lo hacemos con números profesor o por colores?, tales preguntas hace necesario del acompañamiento del docente investigador para aclarar que la designación de las figuras geométricas es uno de los elementos más importantes dentro de la identificación de subfiguras subyacentes a los problemas y que se hacía necesario designar no sólo dichas figuras sino también alguno vértices para dar un orden en la visualización y el hallazgo de cada una de las subfiguras a partir de allí los estudiantes comienzan a designar y con dicha designación viene también la visualización de las diferentes configuraciones dentro de la figura inicial hay que destacar que es a partir de la designación que los estudiantes comenzaron a justificar propiedades y procedimientos inherentes a las tareas asignadas.

Surge una pregunta y es ¿Cómo saber si el estudiante esta razonando? En muchas ocasiones se confunde la explicación con el razonamiento y para nuestro caso que es el trabajo con figuras a un más es importante decir que una secuencia de figuras reorganizadas a través de procesos mereológicos habría dado cuenta del razonamiento pero esto no se visualizó puesto que se mostraba una figura inicial y una final entonces encontramos dos formas para determinar si hubo razonamiento la primera a con las flechas que indicaban los traslados o rotaciones que debían hacer para reconfigurar una figura en otra más sencilla de analizar como se muestra a continuación figura 193.

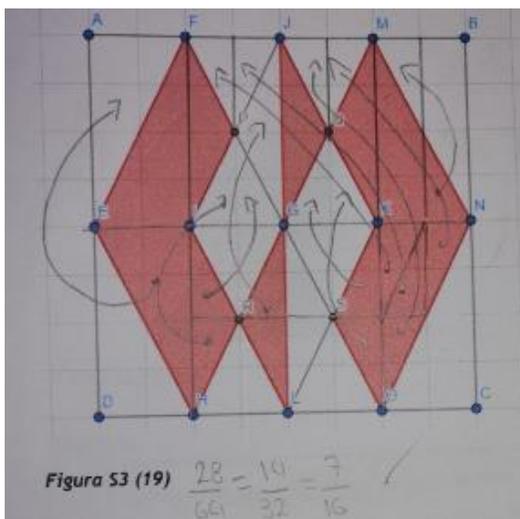


Figura 193. Procedimiento a través de flechas realizada por el estudiante C07

Y la segunda forma de darnos cuenta de los razonamientos fue a través de las producciones en lengua natural que daban cuenta de los procedimientos realizados para llegar a la respuesta como se muestra en la figura 194.

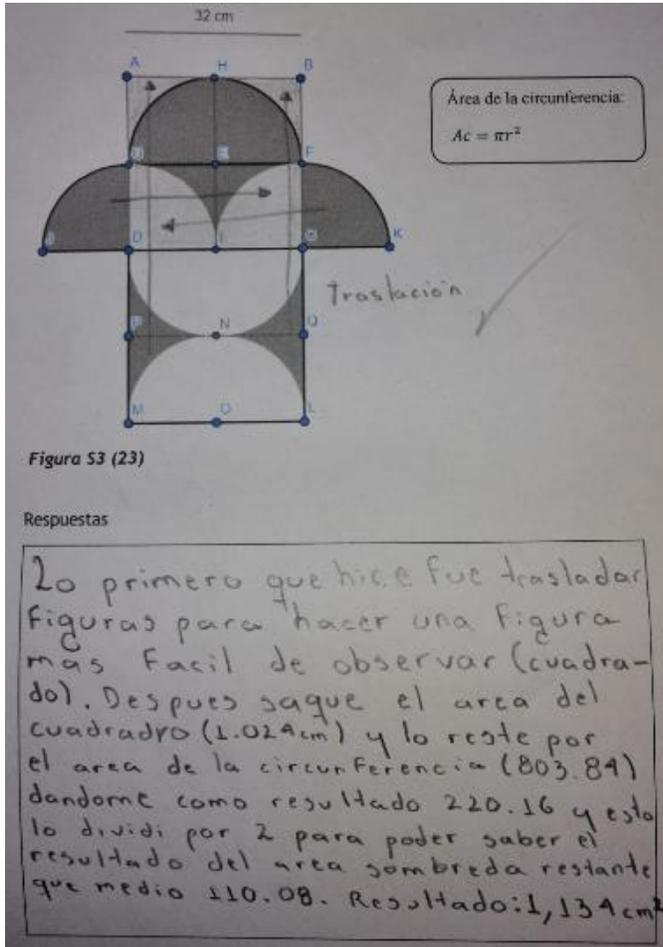


Figura 194. Descripción en lengua natural del estudiante R26

En conclusión, vemos que si es posible razonar a través de las figuras y con la expresión de las ideas en lengua natural como se observó en las tareas realizadas por los estudiantes.

#### 4.10 La articulación de la lengua natural y el registro figural.

Es importante destacar que en geometría la coordinación del registro figural y la lengua natural debe estar presente para que los estudiantes adquieran los conceptos disciplinares del área, en la geometría estos dos registros no se pueden desligar a pesar de que existe

un hiato entre estos dos registros no se puede concebir el trabajo de la geometría suprimiendo alguno de ellos pues son soportes el uno del otro puesto que en geometría se hace necesario la explicitación de propiedades y procedimientos que sólo se pueden realizar dentro del lenguaje matemático.

La secuencia didáctica que se aplicó cuenta en todas las tareas con un elemento esencial que es la justificación o explicación de los procedimientos utilizados para realizar las tareas esto con la finalidad de ir fortaleciendo la enunciación de propiedades y vocabulario propio de la geometría fundamental en la visualización y aunque es difícil que los estudiantes hagan uso de la lengua natural para explicar propiedades este elemento estuvo siempre presente en la secuencia didáctica aplicada.

Traemos como ejemplo algunos casos de estudiantes que resolvieron la situación didáctica y plasmaron en lengua natural sus procedimientos y propiedades.

**Tarea 7 situación 3**

Realiza los siguientes trazos suplementarios, haz un trazo del segmento FH y JL, igualmente realiza esta tarea con los segmentos OR, EK y PQ posteriormente deconstruye la región sombreada de color azul. Construye una nueva figura para el análisis y define cuál es la fracción que ocupa dicha zona azul con respecto del rectángulo ABCD.

**Figura S3 (18)**

Dibuja aquí la nueva figura hallada

**Respuesta**

el área sombreada representa la fracción  $\frac{1}{2}$  respecto a la figura ABCD y para lograr visualizar esto tuve que realizar trazos complementarios y también realizar movimientos de rotación y traslación

Figura 195. Solución estudiante C07 con reconfiguraciones y explicación en LN

En esta tarea 7 de la situación 2 vemos como el estudiante C07 además de resolver la situación a través de reconfiguraciones hace un escrito donde comunica la respuesta, habla de la figura con su correspondiente designación y aclara los procedimientos utilizados con transformaciones como la rotación y la traslación.

Lo anterior muestra la apropiación de la lengua natural como herramienta fundamental para dar a conocer conjeturas, propiedades y respuestas lo cual evidencia la coordinación entre los registros figurales y la lengua natural.

Como conclusión del capítulo de análisis a posteriori, se puede afirmar que la secuencia didáctica aplicada evidencia que los estudiantes si pueden adquirir elementos de la geometría desde una teoría tan compleja pero tan potente como es la semiótica cognitiva y hay que aclarar que para las pocas sesiones que tuvimos y todas las interrupciones debido a paros y otras situaciones que se presentaron en nuestro sistema educativo, se tuvieron muchos avances y comprensiones en los estudiantes, pero es necesario que se sigan estas construcciones desde grados inferiores y en los que siguen, para ver mayores resultados. Es decir, estos aprendizajes necesitan continuidad y la intención de enseñar a ver, a designar en la geometría.

## **5. Conclusiones y recomendaciones**

### **5.1 Conclusiones**

El desarrollo de la indagación generó una serie de conclusiones que contribuyen de forma significativa a la indagación y a la enseñanza de las matemáticas, específicamente a la enseñanza de la geometría en la educación básica secundaria. Dichas conclusiones se exhiben en cinco apartados. El primero centra su mirada en los progresos de tipo teórico que se lograron en concordancia al registro semiótico de tipo figural, a sus tratamientos y conversiones, la potencialidad de la deconstrucción a la hora de superar aprehensiones de tipo perceptual y operatoria; el segundo apartado son los aportes en relación con el objeto matemático interés de esta indagación; el tercero está dado por el análisis de los procesos de visualización; el cuarto son las conclusiones con base en los objetivos propuestos; el quinto es cómo este trabajo aportó a los estudiantes en la solución de situaciones alrededor de un colegio agropecuario y se proponen tres recomendaciones a la luz de todo el proceso indagativo. Finalmente exponemos algunas preguntas que se dejan abiertas para posibles indagaciones futuras

#### **5.1.1 Importancia del marco teórico en la indagación.**

En este proceso de indagación se concluye que el marco teórico semiótico cognitivo fue uno de los pilares debido a sus fortalezas en cuanto a la coordinación de registros semióticos, las transformaciones de tipo mereológicas, la deconstrucción de las formas para propiciar la visualización entre otros elementos, que permitieron la construcción de una propuesta que llevó a los estudiantes a mejorar algunos procesos cómo lo fue la visualización, ésta pensada como el razonamiento que tenían los estudiantes a la hora de resolver situaciones didácticas de áreas de figuras bidimensionales.

También se evidenció que este marco teórico potencializó la adquisición de herramientas heurísticas para el investigador y para la construcción de las situaciones diseñadas, para

superar aprehensiones de tipo perceptual y operatorias que permitieron a los estudiantes avanzar en la adquisición de nuevos conocimientos que les permitieron robustecer las capacidades para enfrentarse a la resolución de situaciones relacionadas con área de regiones sombreadas.

Cabe destacar otro elemento teórico muy importante como lo es la coordinación de registros semióticos cognitivos, tales como el registro en lengua natural y el registro figural, es de vital importancia que la coordinación de al menos dos registros esté siempre presente en la enseñanza de las matemáticas abordado desde diferentes sistemas de representación para llegar a potencializar la enseñanza-aprendizaje durante toda la escolaridad.

La designación de las figuras, los vértices y en general los objetos matemáticos, fueron fundamentales en esta indagación, de hecho fue el primer elemento donde se tuvo que hacer hincapié porque los estudiantes no eran capaces de justificar sus procedimientos de forma clara al no saber designar las figuras, por eso concluyo que en la escolaridad se hace necesario enseñar de entrada la designación para fortalecer la lengua natural que es la que permite explicitar las propiedades y conjeturas acerca de los procedimientos de tipo figural.

De manera particular los procesos de tipo mereológicos tales como: Rotación, traslación, la simetría y otras transformaciones en el registro figural, se potencializaron de forma puntual para que los estudiantes pudieran visualizar las figuras como rompecabezas que podían reconfigurarse para generar nuevas figuras más comprensibles y analizables dentro de las situaciones planteadas generando así razonamientos más espontáneos en diferentes tareas.

La deconstrucción dimensional de las formas debe ser considerada como la entrada por excelencia en la enseñanza de la geometría porque es la forma de introducir a los estudiantes en el mundo geométrico, porque privilegia la visualización de las formas que es fundamental para apropiarse de los objetos matemáticos en la vida escolar.

### **5.1.2 Aportes relacionados con el objeto matemático de la indagación (áreas de regiones sombreadas).**

Es de gran relevancia señalar que enseñar a los estudiantes desde los primeros años de escolaridad la designación de las figuras y a ver en la figura, y que estos procesos sean continuos durante los posteriores años escolares es vital para los estudiantes. Esto debido

a que estos procesos les permitirá explicar los procesos que trabajan en geometría y en consecuencia ser precisos en sus justificaciones o explicaciones, lo anterior se argumenta porque uno de los mayores problemas encontrado fue que durante el proceso de indagación y específicamente cuando los estudiantes desarrollaron las tres situaciones didácticas (SD), el docente investigador tuvo que hacer varias intervenciones y mediar para que los educandos fueran comprendiendo la importancia de la designación, para que ellos pudieran justificar en lengua natural (LN) las propiedades o procedimientos.

La visualización en las figuras es un asunto que debe ser enseñado al estudiante en la construcción de la noción de área sombreada, las figuras por sí mismas no permiten dar cuenta de todas las formas o subconfiguraciones que en ellas se encierran, por ello el docente debe propiciar espacios de reflexión a través de SD basados en la teoría semiótica cognitiva donde se tenga como objetivo enseñar a razonar en geometría.

### **5.1.3 Análisis de los procesos de visualización**

Inicialmente, como maestro en formación del programa de maestría creía que estaba enseñando bien la geometría en el aula, pero a medida que fui conociendo y comprendiendo una teoría tan compleja pero enriquecedora como lo es la teoría semiótica cognitiva, me fui dando cuenta que tanto los procesos de aula utilizados así como los elementos teóricos que dominaba no eran correctos dado que una cosa es transmitir conocimientos y otra muy diferente es enseñar a visualizar en las figuras, esto me lleva a repensar en posibles reestructuraciones de clases para así lograr que los estudiantes aprendan a razonar en el que permite la geometría.

Cuando se aplicaron los pilotajes diagnósticos se evidenció que los estudiantes tenían diferentes dificultades o más bien desconocimiento de los razonamientos que se pueden hacer en las figuras, puesto que no se había hecho bien la tarea de enseñar geometría bajo unos parámetros claros como los que plantea la teoría semiótica cognitiva. Esto implicó que se empezara a explicar los términos y procesos más básicos, como por ejemplo la designación, sin esta construcción discursiva se les dificultaba a los estudiantes expresar la información de lo que estaban observando o poder justificar.

Con relación a lo expuesto en el párrafo anterior se evidenció que los estudiantes utilizaban frases de la vida cotidiana (adverbios de posición) como -el triángulo está al lado de arriba, -el cuadrado de abajo es más grande; en conclusión, no tenían elementos del lenguaje

propio de la geometría que les permitieran hacer unas justificaciones claras siendo clara en las designaciones de las figuras o las transformaciones que se le efectuaban a las figuras. Debido a estas situaciones se toma la decisión de construir un camino en dónde se pudiera mejorar o apropiarse de algunos aspectos en el registro de la lengua natural fundamental para justificar los procesos y propiedades de las figuras. Este camino al que hacemos referencia fue la construcción de una secuencia didáctica la cual fue muy difícil puesto que a medida que el autor, como maestro en formación, se iba apropiando de la teoría semiótica también se iba apropiando de los elementos disciplinarios necesarios para enseñar geometría, al mismo tiempo tenía que ir construyendo dicha secuencia didáctica. Esta secuencia didáctica en su primera fase centro la mirada en cómo introducir a los estudiantes en la visualización, pero había una situación y es que no contaban con tantos elementos propios de la geometría para subsanar esta barrera se creó una estrategia que nos permitiera ir fortaleciendo y adquiriendo esos elementos de la geometría con los cuales los estudiantes no contaban, como lo fue la realización de trazos suplementarios que permitieran ver las figuras como un puzle y no como una figura inamovible y allí promover a los estudiantes, introducirse en la reconfiguración de figuras.

Los estudiantes debían aplicar transformaciones como la rotación, la traslación y la simetría acompañado de una buena designación de los vértices y las figuras entonces se introdujo estos elementos en la parte inicial de la secuencia didáctica (en su versión final) para que se fueran fortaleciendo de dichas transformaciones y cuándo los estudiantes llegarán a la deconstrucción de las figuras, tuvieran elementos bien constituidos para abordar estas situaciones de alta complejidad, debido a esta buena planeación de la secuencia didáctica los estudiantes lograron construir diferentes elementos dentro de la visualización alrededor del concepto de área.

Exponemos algunos avances en la visualización por parte de los estudiantes en el desarrollo de la secuencia didáctica aplicada:

- a) Los estudiantes aprendieron a designar figuras para lograr la explicación de procedimientos y propiedades.
- b) Se evidenció la apropiación de heurísticas como por ejemplo la realización de trazos suplementarios para reorganizar figuras.
- c) Los estudiantes se apropiaron de heurísticas de transformaciones como la rotación, traslación, y simetría en la reconfiguración de figuras afianzando procesos mereológicos

- d) Hay apropiación por parte de los estudiantes en cuanto la relación parte todo y la comparación de áreas y perímetros.
- e) El estudiante es capaz de visualizar para encontrar áreas de regiones sombreadas tanto en figuras básicas, polinómicas o circulares.

Se debe reconocer que al aplicar en las instituciones públicas de educación una metodologías nueva y diferente no es sencillo y más aún con todas las dificultades que conlleva el estar en un colegio público en donde los paros, las reuniones, las capacitaciones y otros factores que inciden en el desarrollo de clases continuas, afectan los tiempos del aprendizaje de los estudiantes. No obstante con todas estas dificultades, continuamos y culminamos la aplicación total de la secuencia didáctica y nos encontramos que efectivamente los estudiantes al enfrentarse a una propuesta puntual para un procesos del pensamiento espacial no fue fácil, pero consiguieron buenos resultados y se pudieron observar al escuchar a los estudiantes hablar de la designación de la realización de trazos suplementarios de la reconfiguración de una figura para formar una más sencilla, ver la alegría de los estudiantes al encontrar el área de una zona sombreada de la cual no sé tenía ninguna fórmula para realizar, estas evidencias son gratas de escuchar.

Es razonable que no todos los estudiantes alcanzaron los objetivos que la propuesta de indagación planteaba porque el tiempo es muy corto y con una sola secuencia didáctica, no se va a solucionar tantas problemáticas de la enseñanza de la geometría.

También hay que decir que es complejo hacer una investigación sin tener elementos tan importantes como lo es un laboratorio de matemáticas, que permita observar cómo son los procesos que tienen los estudiantes al enfrentarse a los objetos matemáticos y en particular a los objetos geométricos.

Se concluye que a pesar de los obstáculos mencionados la teoría semiótica cognitiva arrojó buenos resultados debido fortalezas a la hora de enseñar en el aula los objetos matemáticos y específicamente los geométricos pues llevan al estudiante a razonar a pensar a dialogar a discutir y a encontrar caminos diferentes en la solución de situaciones problemas.

#### **5.1.4 Conclusiones a la luz de los objetivos de indagación**

El objetivo general era analizar los procesos de visualización y fomentar diferentes tipos de aprehensiones figurales en la construcción del concepto de áreas de regiones sombreadas. El alcance de este objetivo se puede visualizar en varios momentos, el

primero en la construcción de un marco teórico que está fortalecido, la comprensión del autor, la consolidación de una secuencia centrada en los procesos de visualización como lo es la teoría semiótica cognitiva y no solamente en los procesos de visualización sino también en las aprehensiones y los procesos mereológicos que fueron fundamentales para que los estudiantes pudieran alcanzar de alguna manera la comprensión de lo que es el área de una región sombreada.

Se destaca que todo lo anterior fue posible por la construcción de una secuencia didáctica bien construida desde tres pilares fundamentales: El primero La identificación, la discriminación de las figuras y subconfiguraciones, el segundo la transformación del contorno global de una figura en otra de igual cantidad de superficie a través de procesos mereológicos y el tercero la coordinación de tratamientos y operaciones figurales que permitieron la comparación de áreas sombreadas, estos tres pilares fundamentados o cimentados en la teoría semiótica cognitiva.

También se concluye sobre el primer objetivo que la teoría semiótica cognitiva puede cambiar la forma de pensar y de enseñar la geometría en los maestros que la empiecen a estudiar y en los estudiantes en la forma de abordar los conocimientos en dicha asignatura. La teoría brinda elementos supremamente necesarios en la formación de un maestro y en el diseño de situaciones didácticas para abordar la enseñanza -aprendizaje en la geometría, que le permita a los alumnos empezar a ver en las figuras de manera que visualicen diferentes formas de transformar las figuras para hallar el área solicitada.

Uno de los objetivos específicos era identificar los procesos de visualización desde las diferentes aprehensiones figurales que le permitan al estudiante resolver problemas, se da respuesta a esa pregunta diciendo que las aprehensiones de tipo perceptual, de tipo operatorio y mereológicas fueron emergiendo a través del trabajo con las figuras, en el momento que el estudiante demuestra que es capaz de hacer rotaciones y traslaciones, es decir reconfiguración de las figuras, trazos complementarios deconstrucciones dimensionales entre otras aprehensiones como mostramos en los análisis a posteriori.

El concepto de visualización es fundamental y se hace necesario introducirlo en la enseñanza de la geometría porque les permite a los estudiantes aprender a ver de forma distinta y analítica las figuras geométricas. La construcción de los objetos matemáticos como: área de una región sombreada es fundamental en el aprendizaje de la geometría y esto se evidenció de forma eficiente al aplicar y desarrollar las situaciones didácticas, lo que permitió ver cómo el estudiante transforma el contorno de una figura y la convierte en una nueva más sencilla.

El desarrollo de la situación didáctica también fue potente para que el estudiante realizara análisis y razonamientos, lo anterior se pudo evidenciar cuando el estudiante utilizó heurísticas en comparación de áreas y realizó cálculos de áreas de regiones sombreadas sin la utilización exclusiva de fórmulas en todos los procesos hasta construir la respuesta solicitada, evidenciando todas las capacidades ganadas en el transcurso de las tareas que estuvieron de antesala.

A la pregunta ¿cuáles fueron los procesos de visualización que generaron las aprehensiones en las áreas? podemos decir: los estudiantes a través de la secuencia didáctica pudieron realizar modificaciones posicionales a través de la rotación y la traslación, la simetría los trazos suplementarios entre otros elementos que le permitieron la construcción de área de regiones sombreadas como se mostró en los análisis a posteriori.

### **5.1.5 Cómo este trabajo aporto a los estudiantes en la solución de las situaciones alrededor de un colegio agropecuario.**

Los estudiantes de colegios agropecuarios deben enfrentarse a diario con situaciones tales como: ¿Cuánto alambre se necesita para cercar un potrero?, ¿Qué medidas tiene un corral?, ¿Cuánta área de pasto hay sembrado en el colegio? ¿Qué cantidad de terreno se necesita para albergar un número determinado de vacas?, entre otras situaciones cotidianas.

Las heurísticas fomentadas en los estudiantes a través del desarrollo de la secuencia didáctica abrieron un espacio de reflexión diferente en cuanto al mundo que los rodea, puesto que las situaciones de la vida cotidiana no siempre están enmarcadas en un mundo geométrico de medidas y formas regulares, ahora están en la capacidad de visualizar esas formas irregulares como piezas que se pueden reconfigurar para que sean más fáciles de analizar.

El estudiante ahora tiene claro que la relación área-perímetro no es directamente proporcional y esto le ayudará en sus labores agropecuarias, puesto que se presentan muchas situaciones en donde tiene que optimizar materiales como, por ejemplo: el alambre para cercar un potrero.

Fue de vital importancia que los estudiantes vieran las diferencias entre el área de un terreno como medida y como magnitud para que pudiera tener una idea amplia y clara del concepto de área, en esta secuencia didáctica se trabajó el área como magnitud puesto que nos permite comparar áreas por superposición de figuras y por reconfiguraciones

figurales, pensando en el área como una superficie y no como una medida solamente, siendo esta última la que más se aplica en la vida escolar y que poco privilegia los procesos de visualización.

Finalmente, se concluye que los estudiantes al enfrentarse a una secuencia didáctica donde trabajaron con una perspectiva semiótico cognitiva lograron posicionarse en el mundo agropecuario desde un lugar diferente donde la visualización entendida como el razonamiento les permite ver el mundo de una forma distinta y que la geometría y la vida cotidiana ahora son más cercanos y tienen sentido cuando convergen.

## **5.2 Recomendaciones**

Como maestros debemos darnos cuenta qué al enfrentarnos a un salón de clases el compromiso que se tiene no es sólo de tipo transmisionista, sino que está en la necesidad de generar en los estudiantes algunos procesos que permitan ser más analíticos y realizar razonamientos más intuitivos a la hora de enfrentarse a las figuras geométricas. Pero para llegar a esto el maestro debe contar con unas apropiaciones disciplinares del corpus teórico de la geometría y si estos están fortalecidos, lo digo desde mi experiencia como estudiante de la maestría puesto que no contaba con dichos saberes disciplinarios o las metodologías que utilizaba estaban obsoletas y tuve que ir los adquiriendo elementos de la teoría semiótica cognitiva, elementos propios de la geometría y al mismo tiempo aplicarlas al realizar este trabajo de indagación.

En la misma línea es evidente que las estrategias utilizadas en las aulas de clases son obsoletas y qué debemos adquirir nuevos conocimientos, para que los estudiantes del siglo 21 salgan mejor preparados y puedan enfrentarse al mundo que lo rodea. Se propone como una teoría potente para repensarse la geometría y la matemática, la teoría semiótica cognitiva debido a que en muchos estudios a nivel nacional ha dado excelentes resultados y se está posicionando como una de las teorías más confiables a la hora de enseñar para llegar a la comprensión.

Se recomienda que el diseño de secuencias didácticas se plantee bajo perspectivas potentes que solo se encuentran en tesis de maestría o doctorados puesto que si nos guiamos del material que aparece en los textos escolares o en el basto mundo del internet no lograremos potencializar a los estudiantes en el conocimiento de la geometría y se continuaran cometiendo errores como el de privilegiar los métodos tradicionales y en el caso del estudio del área seguiremos enseñándola como medida a través de fórmulas y

no como magnitud realizando procesos mereológicos que permitan comprenderla como una superficie.

Invitó a los maestros que tienen la oportunidad de leer este trabajo de indagación a que revisen la teoría que aquí plasmó de forma sencilla y clara y a que lean otros autores cómo Teresa pontón (2008, 2012), Gustavo marmolejo (2007, 2013, 2015), Jhon Fredy Galvis (2017) y muchos otros que han trabajado en esta perspectiva semiótica cognitiva y lingüística y por supuesto autores internacionales como Raymond Duval (1993, 1998, 1999, 2004, 2005.), que es pionero en esta perspectiva y que han visto en ella una gran herramienta para mejorar los procesos de visualización y las aprehensiones al enfrentarse a problemas de matemática y geometría.

### **5.2.1 Asuntos que se dejan para posteriores indagaciones y reflexiones.**

Ahora bien, queda una incógnita y es si grandes investigadores como Padilla (1979), Duval (1999), Pontón (2007) y Marmolejo (2007), Jhon Fredy Galvis (2017) entre otros que han aportado reflexiones en la misma vía ¿porque seguimos encontrando dificultades en el razonamiento geométrico como las identificadas en los estudiantes del Valle del Cauca? ¿Por qué la teoría semiótico cognitiva no se ha implementado en los currículos colombianos de la mayoría de las instituciones públicas para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en general? ¿Cómo impactaría una maestría en geometría los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas? ¿cómo potencializar la deconstrucción de las formas en la enseñanza de la geometría? ¿Cómo realizar la coordinación de tres o más registros semióticos en geometría? ¿Qué implicaciones tiene el efecto de la lengua materna de manifestación de la discursividad que se requiere como elemento complementario a la aprehensión figural en geometría?



## **A. Anexo: Guía con las situaciones didácticas aplicadas a los estudiantes.**



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
SEDE PALMIRA  
FACULTAD DE INGENIERÍA Y ADMINISTRACIÓN

Institución Educativa San José

Código del estudiante: \_\_\_\_\_

Grado 9

El propósito de esta secuencia didáctica, es mejorar los procesos de visualización de los estudiantes a través de la teoría semiótica cognitiva trabajado desde una secuencia que está pensada desde el desarrollo de unas tareas ordenadas y estructuradas de tal manera que su complejidad será cada vez mayor, con el fin de alcanzar el objetivo de fomentar diferentes tipos de aprehensiones figurales en la construcción del concepto de área de regiones sombreadas en los estudiantes de grado noveno.

A continuación, se presentan tres situaciones que tienen por objetivo mejorar los procesos de visualización y fortalecer el concepto de áreas de regiones sombreadas en donde debes utilizar los siguientes instrumentos:

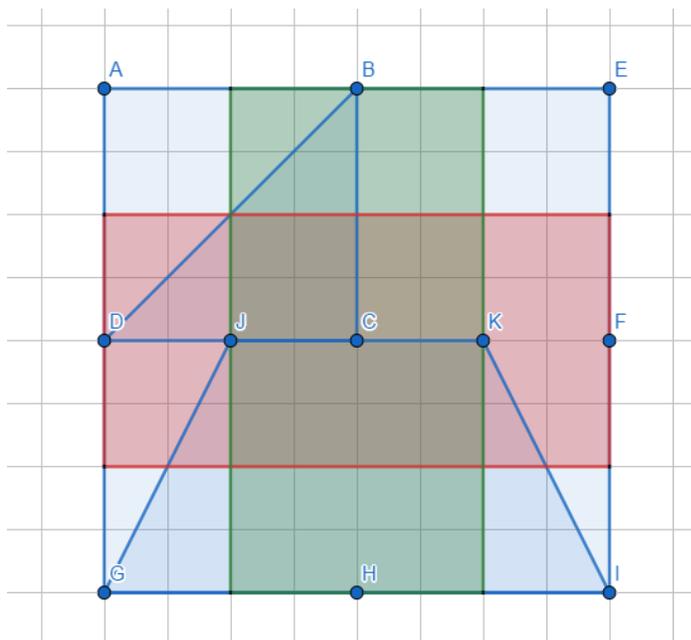
Regla, compás, transportador, lápiz y papel

**SITUACIÓN 1 “Identificar y discriminar figuras”**

El objetivo de esta situación es: Identificar y discriminar figuras y subconfiguraciones que permitan visualizar y superar aprehensiones de tipo perceptual, para lo cual se plantean las siguientes tareas.

**Tarea 1 situación 1**

Identifica en la Figura S1(1) cuáles son las subfiguras geométricas que puedes distinguir y consígnalas en la tabla 1 con sus vértices. Ejemplo  $\Delta ABC$  es un Triángulo rectángulo



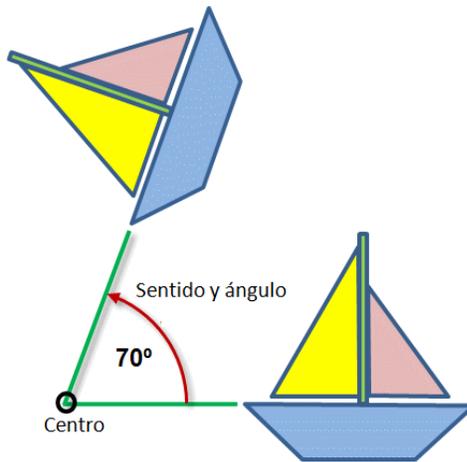
**Figura S1(1)**

<i>Designación de la figura</i>	<i>Nombre de la figura</i>
$\Delta ABC$	Triángulo rectángulo

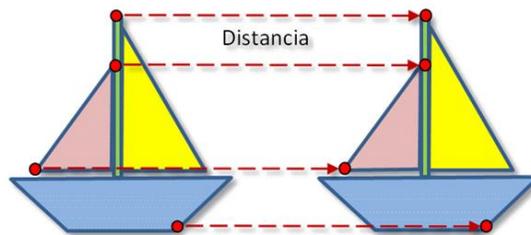
**Tabla 1**

**Tarea 2 situación 1**

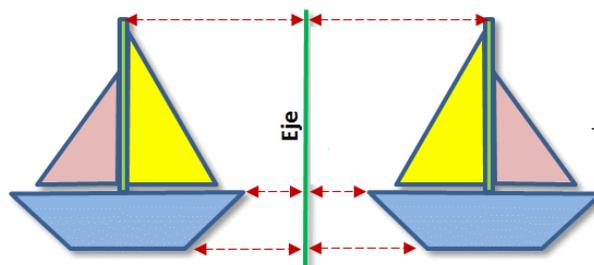
A. Escribe al frente de cada figura que clase de movimiento se está representado (Rotación, traslación o reflexión)



\_\_\_\_\_



\_\_\_\_\_



\_\_\_\_\_

B. Realiza los trazos suplementarios siguiendo las instrucciones:

- Realice un trazo con regla desde el punto E hasta el punto F
- Realice un segundo trazo del punto G hasta el punto H

Cuáles figuras reconocer después de haber realizado los trazos suplementarios con su respectiva designación, debes organizar tu respuesta en la tabla 2.

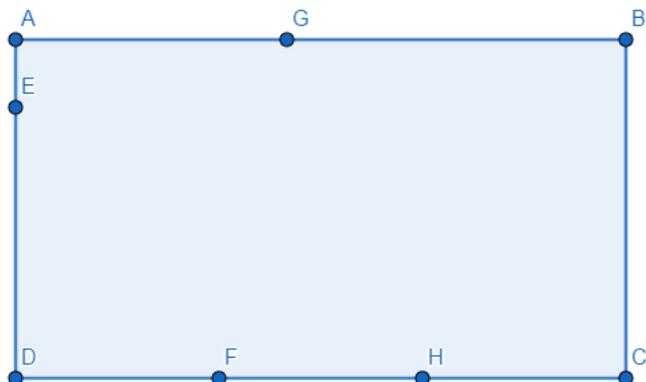


Figura S1(2)

<i>Designación de la figura</i>	<i>Nombre de la figura</i>

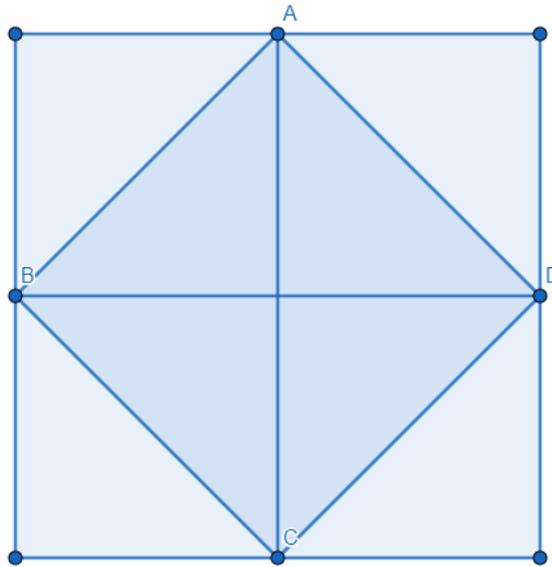
Tabla 2

**Tarea 3 situación 1**

¿Cuántos cuadrados de diferente área puedes identificar en la siguiente figura S1(3)?

Designa cada una de ellos con sus vértices.

Realiza un escrito explicando los procedimientos utilizados.



**Figura S1(3)**

Designación de la figura	Nombre de la figura

**Procedimiento**

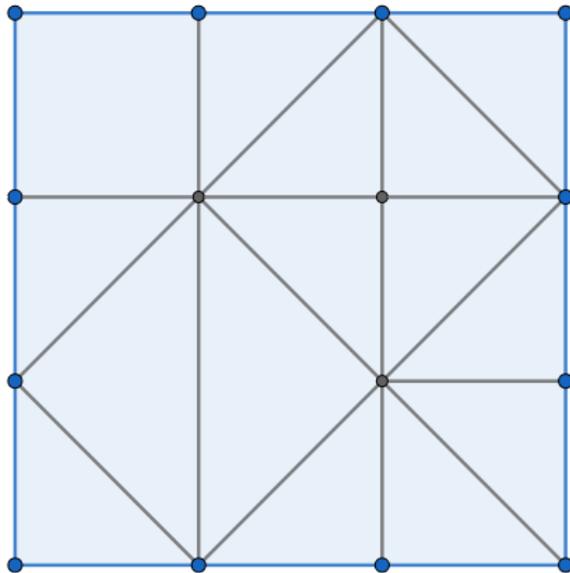
**Tarea 4 situación 1**

¿Cuántos cuadrados y cuántos triángulos hay en la siguiente figura S1(4)?

¿Qué procedimientos utilizaste para realizar esta segunda tarea?

¿Designa otras figuras geométricas que se distinguen en la figura?

Justifica tu respuesta.



**Figura S1(4)**

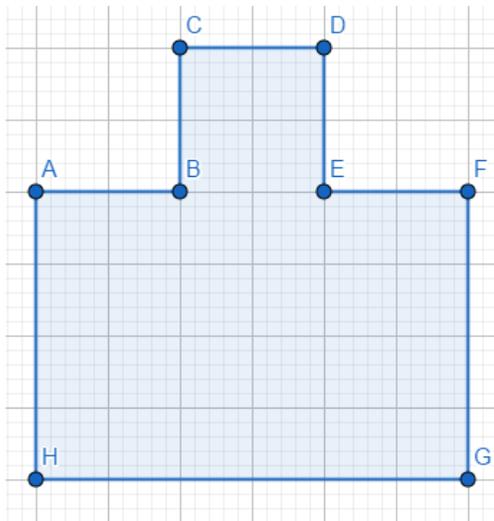
Respuesta

### **SITUACIÓN 2 “Comparación de áreas”**

El objetivo de esta situación es: Transformar el contorno global de una figura en otra de igual cantidad de área a través de procesos mereológicos como: (traslación, rotación, cambios de posición y trazos complementarios) para visualizar superar aprehensiones de tipo operatorias

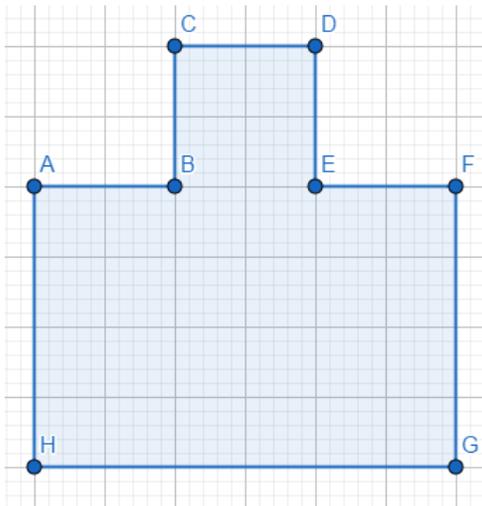
#### **Tarea 1 de la situación 2**

**A)** Subdivida la Figura S2(1) en un rectángulo, dos triángulos y cuatro cuadrados.



**Figura S1(1) figura inicial**

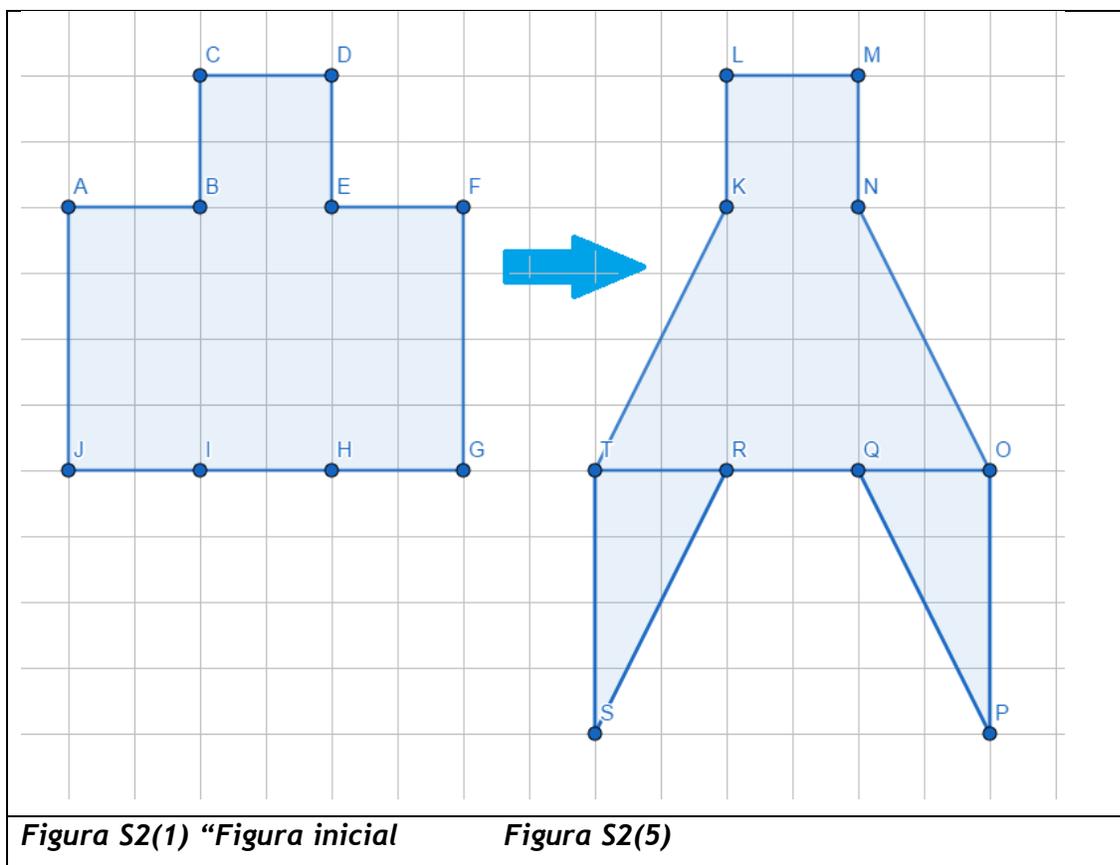
B) Subdivida la figura inicial en un trapecio, un triángulo y un cuadrado.



**Figura S2(1) "Figura inicial"**

**Tarea 2 situación 2**

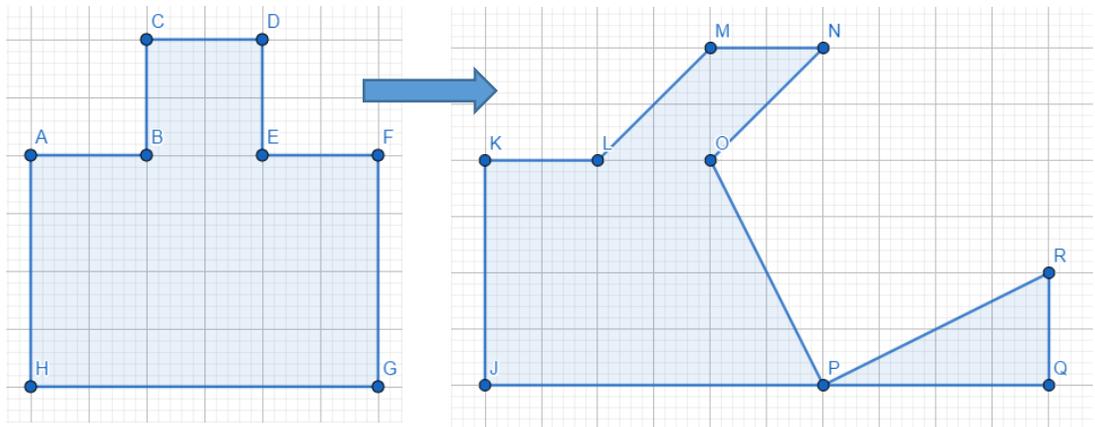
A partir de la figura inicial S2(1) construya la figura S2 (5). Explica tu procedimiento detallando cada una de los trazos o movimientos realizados para llegar a la figura sugerida.



Respuesta

### Tarea 3 situación 2

Transforma la figura inicial S2(1) en la figura S2 (6). Explica tu procedimiento detallando cada una de los trazos o movimientos realizados para llegar a la figura sugerida.



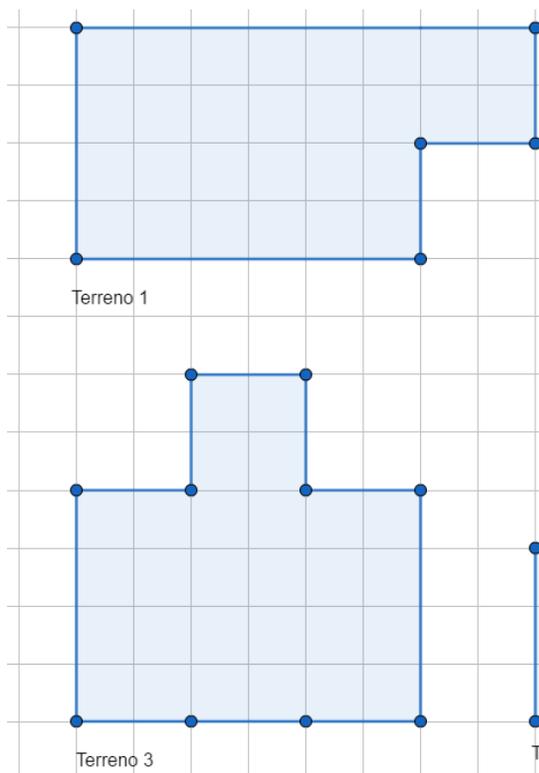
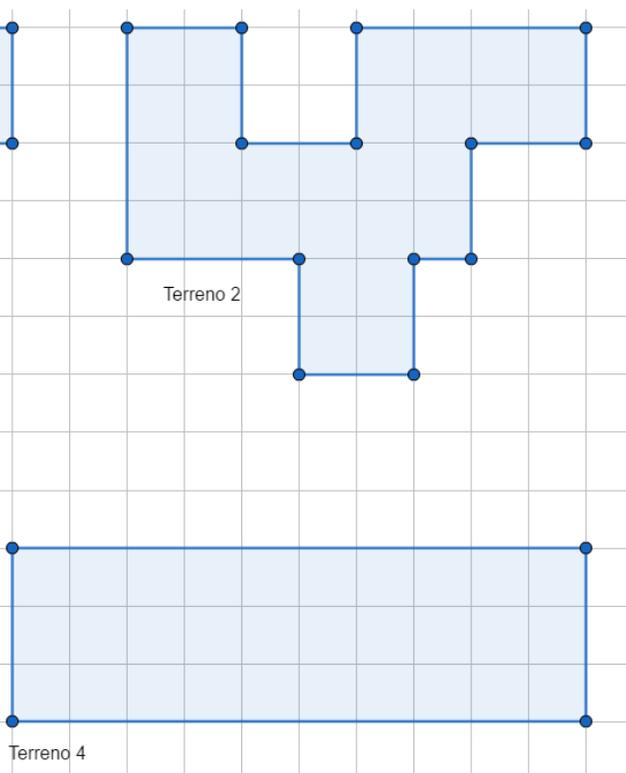
**Figura inicial S2(1)**

**Figura S2(6)**

Respuesta

**Tarea 4 Situación 2**

- A) ¿Cuál de estos cuatro terrenos de forma diferente es el de mayor área?
- B) ¿Se podría afirmar que la figura S2(8) por tener un perímetro de 32 metros y ser la que tiene mayor perímetro de las cuatro figuras es la que contiene más área?
- C) ¿A qué conclusión llegaste en cuanto a las áreas de las cuatro figuras y sus respectivos perímetros? Justifica tus respuestas.

**Figura S2(7)****Figura S2(8)****Figura S2(9)**

Respuesta

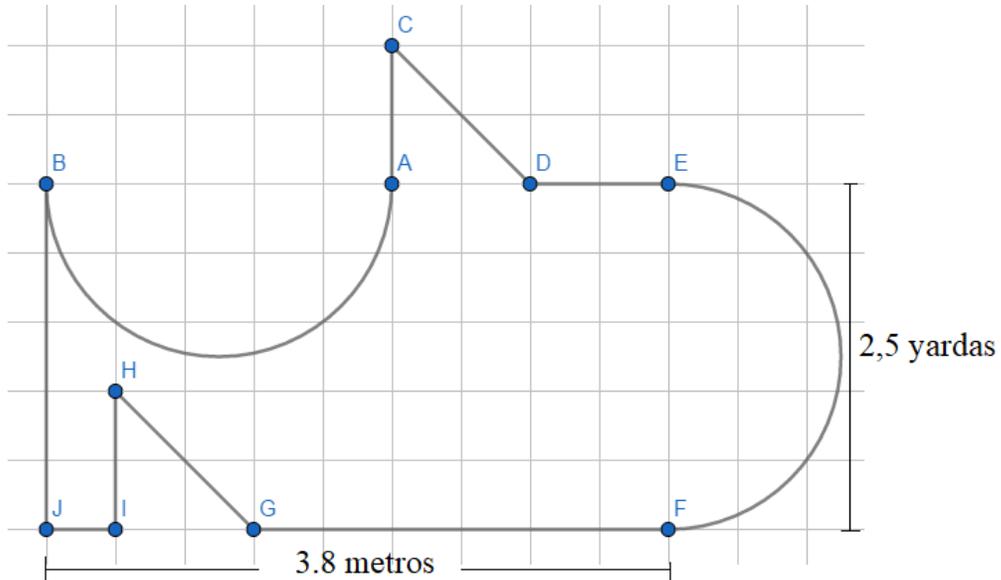
**Figura S2(10)****SITUACIÓN 3 “Áreas sombreadas”**

El objetivo de esta situación es: Combinar tratamientos y operaciones figurales que permitan la comparación de dos áreas sombreadas que ocupan la misma superficie de forma equivalente.

**Tarea 1 situación 3**

Con la siguiente información ayuda a don Juan, quien trabaja en Marroquinería a saber: cuál es el área de una pieza de cuero para evitar desperdiciar materia prima, a continuación, se muestra la silueta con algunos datos.

Realiza trazos suplementarios que te permitan ver algunas subfiguras que podrás trasladar para reconfigurar la figura S3 (1) en un rectángulo el cual facilitara tu análisis. Explica tu procedimiento detallando cada una de los trazos o movimientos optimizar el área requerida.

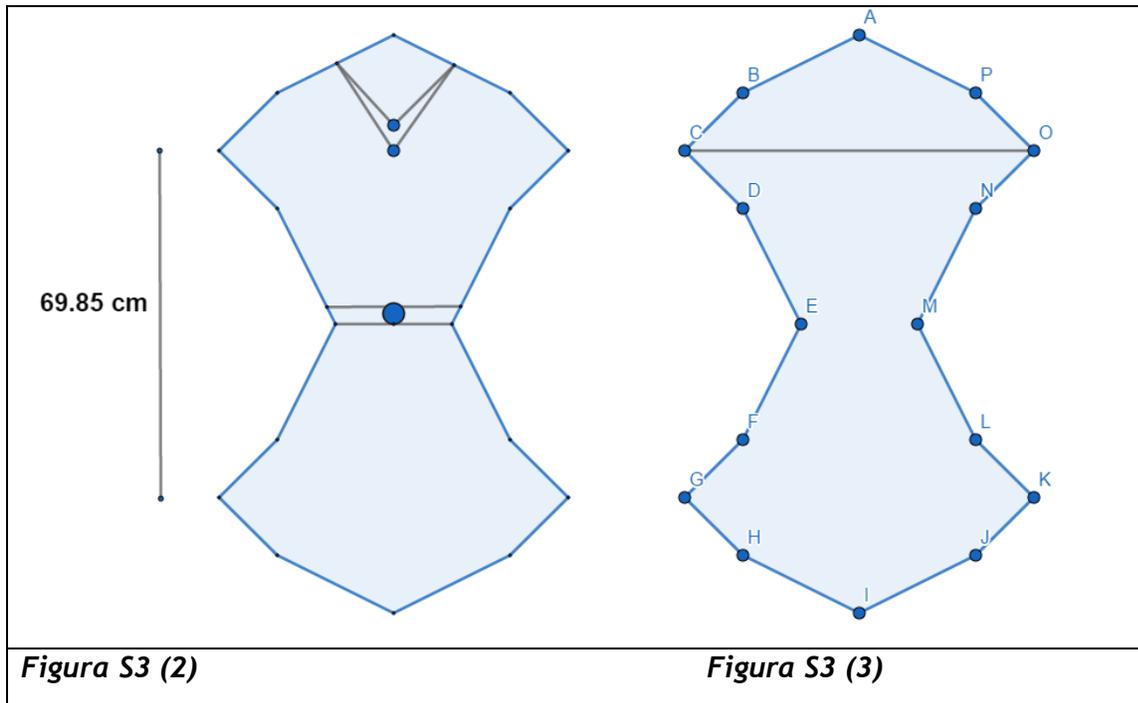


**Figura S3 (1)**

Respuesta

Doña María va a realizar un vestido que tiene las medidas y contorno como se muestra en la siguiente figura. Ayúdala a comprar un retazo de tela con el que pueda cubrir de forma exacta el área del vestido sin desperdiciar materia prima, dar la respuesta en pulgadas cuadradas.

Realiza trazos suplementarios y reconfigura la figura S3 (3) en una figura más sencilla para resolver el ejercicio

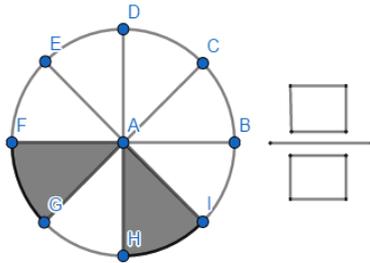


Respuesta

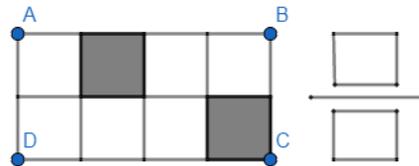
Tarea 3 situación 3

La siguiente consigna tiene por objetivo introducir al estudiante en el concepto de relación fraccionaria “*parte todo*” para lo cual se plantean ocho tareas que le permitirá razonar sobre las áreas sombreadas y su relación con la unidad de referencia.

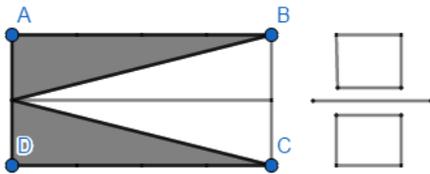
¿Qué parte de la figura esta sombreada con relación a la unidad de referencia presentada en cada una de las ocho tareas?



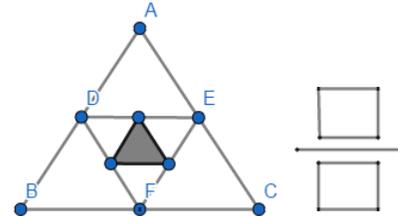
**Figura S3 (4)**



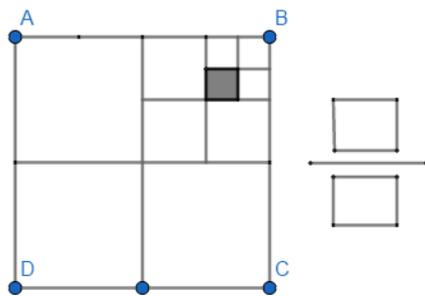
**Figura S3 (5)**



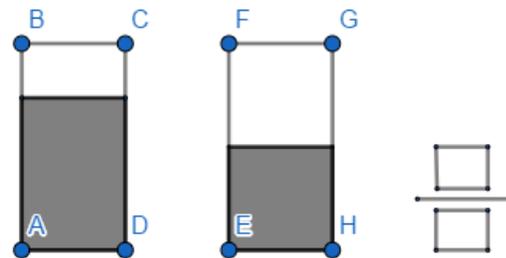
**Figura S3 (6)**



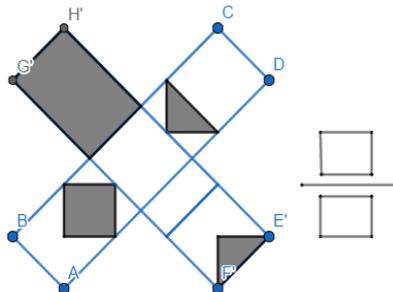
**Figura S3 (7)**



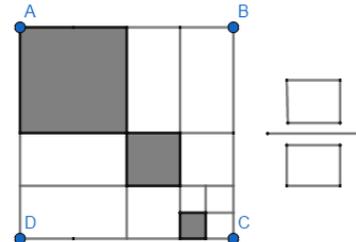
**Figura S3 (8)**



**Figura S3 (9)**



**Figura S3 (10)**

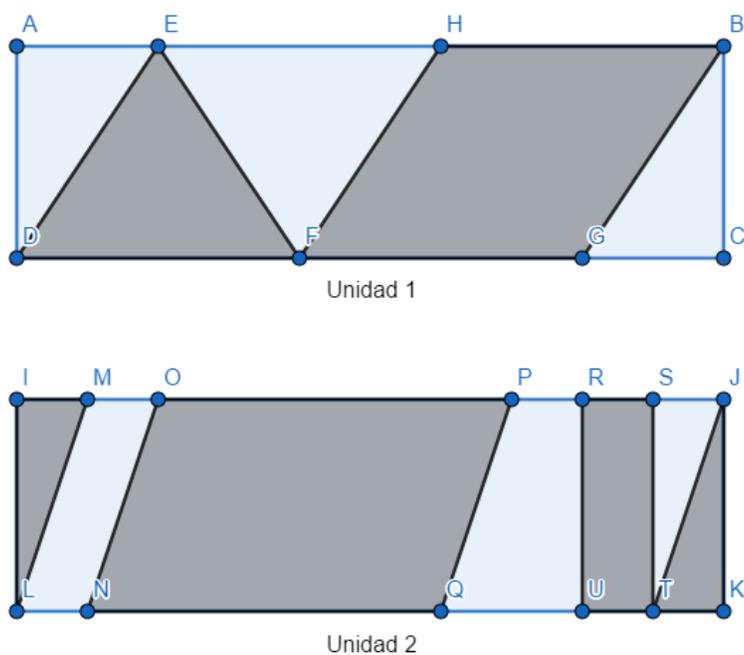


**Figura S3 (11)**

**Tarea 4 situación 3**

A) Halle el área de la región sombreada de la unidad 1 teniendo en cuenta como parámetro de medida el triángulo DEF que equivale a  $6 \text{ m}^2$

B) El triángulo ILM de la unidad 2 es la cuarta parte del triángulo DEF de la unidad 1 con esta información encuentra la sumatoria de las áreas sombreadas de la figura 1 y 2

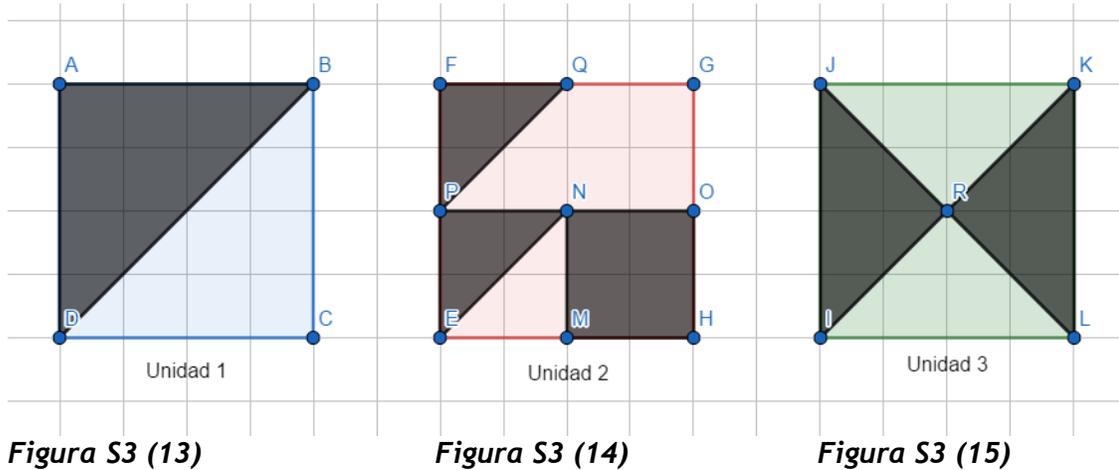


**Figura S3 (12)**

Respuesta

**Tarea 5 situación 3**

Escribe la fracción que corresponde a la superficie sombreada con respecto a la unidad (que es el cuadrado externo) y determina la sumatoria de zona sombreada de color gris oscuro de las 3 unidades



Respuesta

**Tarea 6 situación 3**

Hallar el valor de la sumatoria las regiones sombreadas en fracción con respecto a la unidad, explica cómo lo hiciste y justifica tu respuesta.

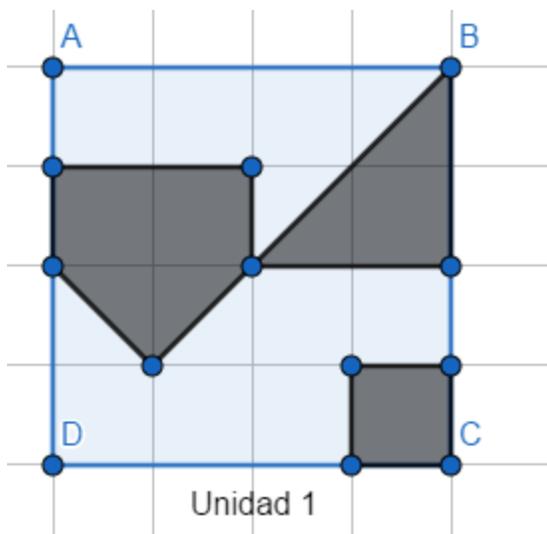


Figura S3 (16)

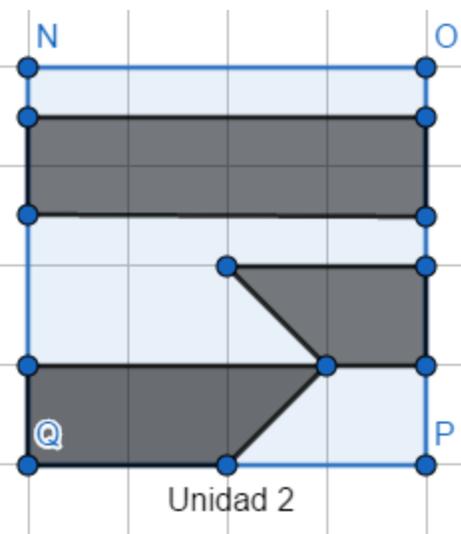
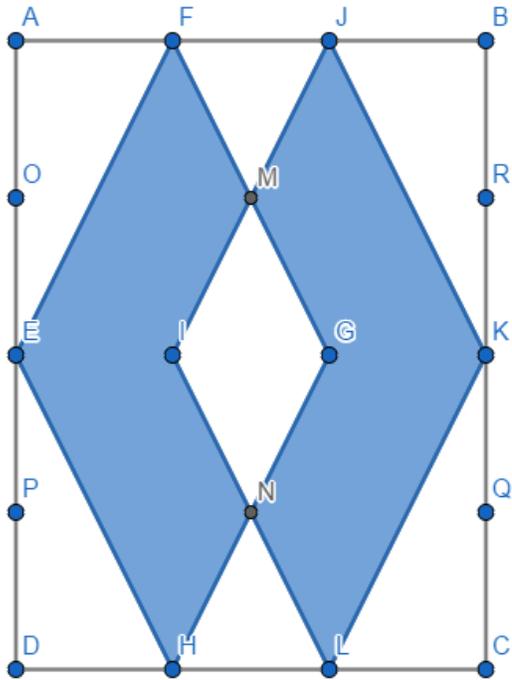


Figura S3 (17)

Respuesta

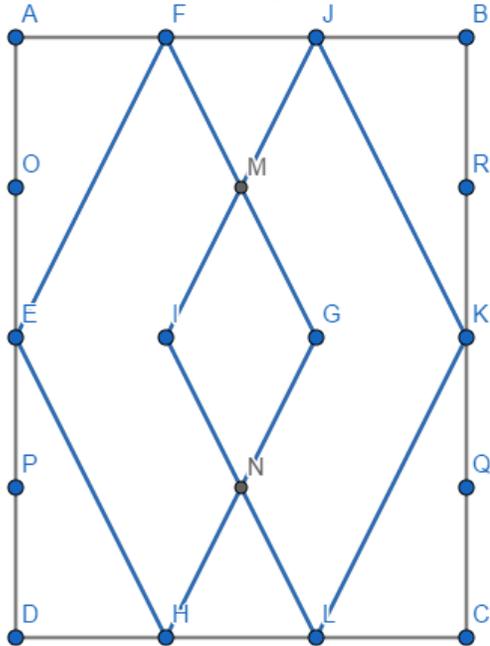
### Tarea 7 situación 3

Realiza los siguientes trazos suplementarios, haz un trazo del segmento FH y JL, igualmente realiza esta tarea con los segmentos OR, EK y PQ posteriormente deconstruye la región sombreada de color azul. Construye una nueva figura que sea más sencilla para el análisis y define cuál es la fracción que ocupa dicha zona azul con respecto del rectángulo ABCD.



**Figura S3 (18)**

Dibuja aquí la nueva figura hallada

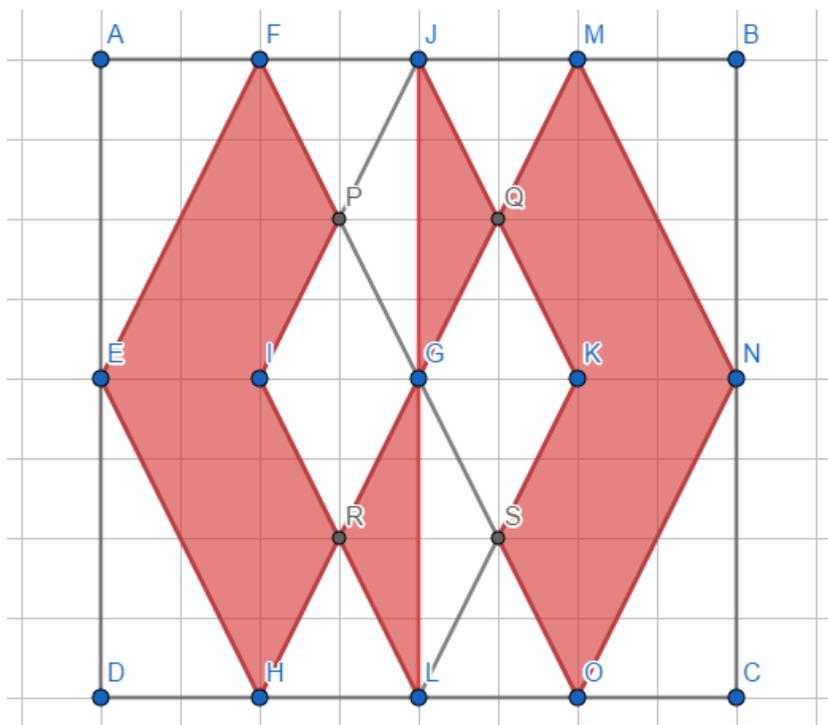


Respuesta

**Tarea 8 situación 3**

Encuentra una estrategia para definir cuál es la fracción de la parte sombreada de color rojo con respecto a la unidad cuadrada AEIM

Explica los procedimientos realizados



**Figura S3 (19)**

Respuesta

**Tarea 9 situación 3 (Área de regiones circulares)**

Observa detenidamente la figura S3 (20) y determina una expresión fraccionaria que represente la región sombreada de color gris, teniendo en cuenta que la unidad está dada por la circunferencia de radio EK

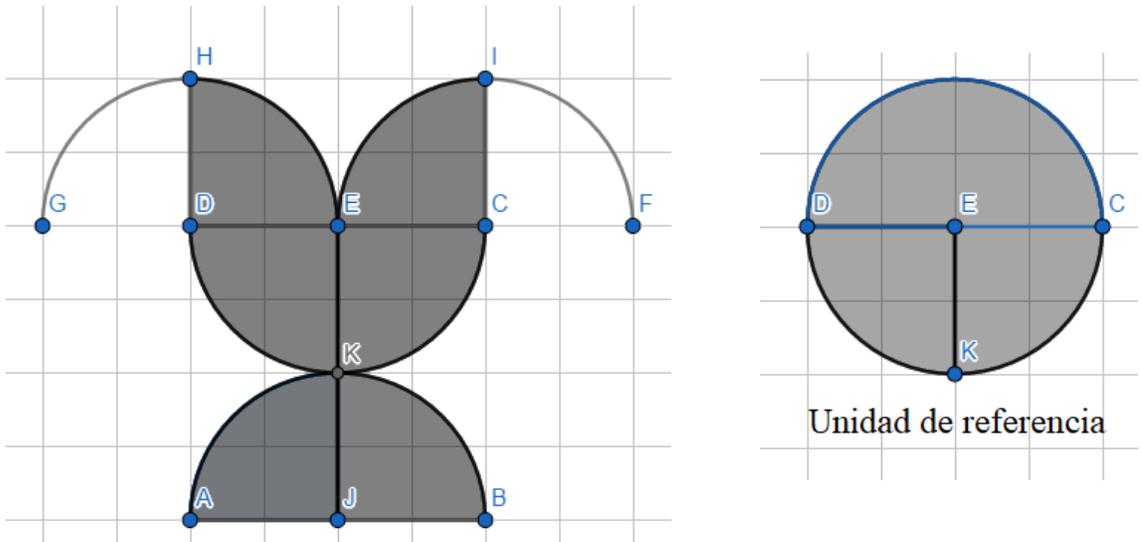


Figura S3 (20)

Respuesta

Tarea 11 situación 3

En la siguiente figura S3 (22) encontrarás dos rectángulos donde tomaremos como unidad el rectángulo DFGC que contienen regiones circulares sombreadas. Determina las fracciones de cada unidad y realiza la suma de dichas áreas sombreadas

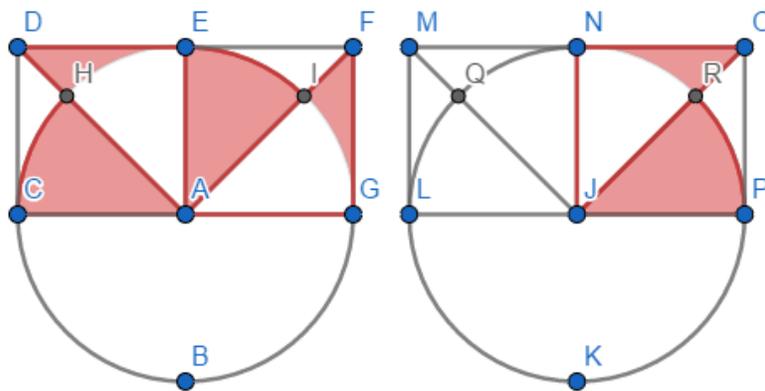
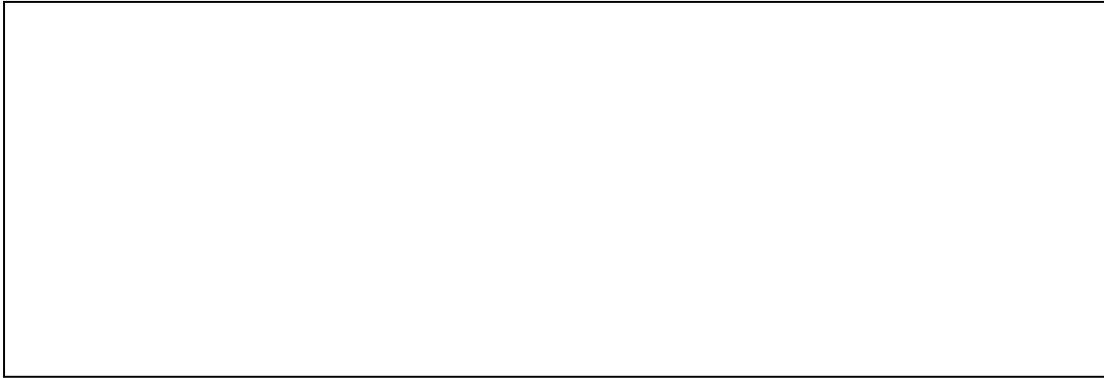
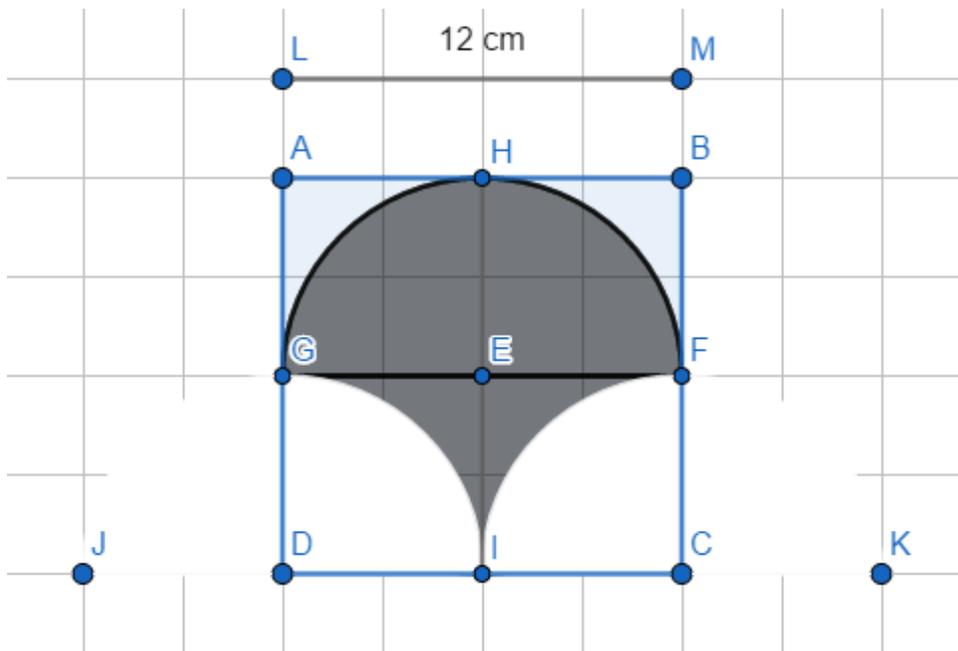


Figura S3 (22)

Respuesta

**Tarea 10 situación 3**

En la siguiente figura nos encontramos con un cuadrado ABCD que contiene una región sombreada de color gris, deconstruye esta región y forma un rectángulo que te permita determinar el área en  $\text{cm}^2$  de dicha región.



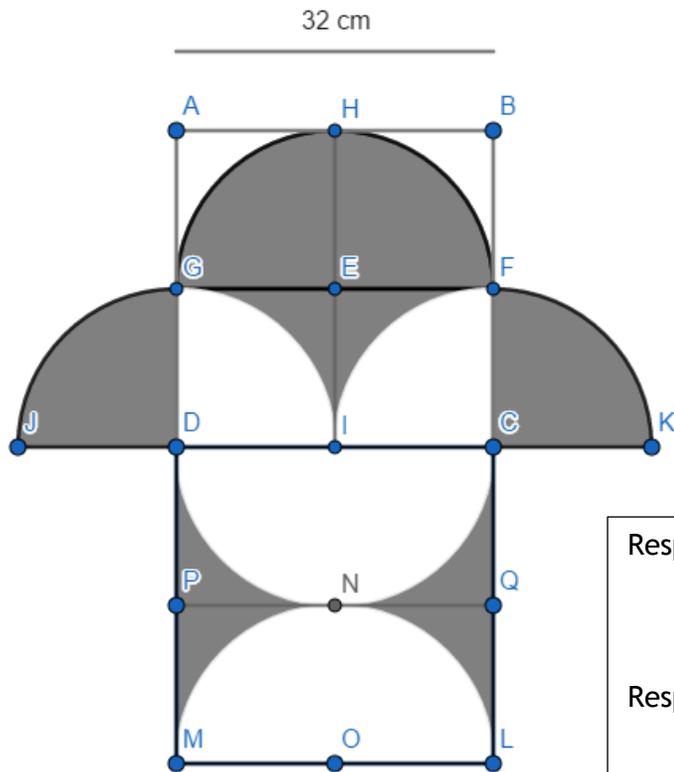
**Figura S3 (21)**

Respuesta

**Tarea 12 situación 3**

Reconfigura la siguiente figura y encuentra el área en  $\text{cm}^2$ .

Explica los procedimientos utilizados.



Área de la  
circunferencia:  
 $A_c = \pi r^2$

Respuestas

Respuestas

**Figura S3 (23)**



## B. Anexo: Se consignan las fotos de las heurísticas realizadas por los estudiantes en cada una de las tareas de los estudiantes O21 Y R26

Tarea 1 situación 1, solución por parte del estudiante O21

**Tarea 1 situación 1**  
 Identifica en la Figura S1(1) cuáles son las subfiguras geométricas que puedes distinguir y consígnalas en la tabla 1 con sus vértices. Ejemplo  $\triangle ABC$  es un Triángulo rectángulo

**Figura S1(1)**

Designación de la figura	Nombre de la figura
$\triangle ABC$	Triángulo rectángulo
$\square ABCD$	cuadrado
$\square JKIG$	trapecio
$\triangle BCD$	triángulo
$\triangle DJC$	triángulo
$\square BEIKC$	polígono
$\triangle ABO$	triángulo

**Tabla 1**

## Tarea 1 situación 1, solución por parte del estudiante R26

## Tarea 1 situación 1

Identifica en la Figura S1(1) cuáles son las subfiguras geométricas que puedes distinguir y consígnalas en la tabla 1 con sus vértices. Ejemplo  $\triangle ABC$  es un Triángulo rectángulo

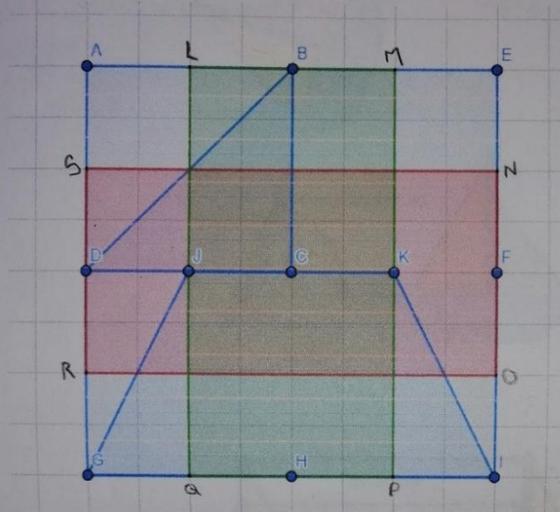


Figura S1(1)

Designación de la figura	Nombre de la figura
$\triangle ABC$	Triángulo rectángulo
$\square ABCD$	Cuadrado
$\square QJKI$	Trapezia
$\square LQPM$	Rectangulo
$\triangle SDC$	Triangulo
$\square SNOR$	Rectangulo
$\triangle DJA$	Triangulo
$\square QJKI$	Trapezia
$\square JQPK$	Cuadrado

Tabla 1

Tarea 2A situación 1, solución por parte del estudiante O21

**Tarea 2 situación 1**

A. Escribe al frente de cada figura que clase de movimiento se está representado (Rotación, traslación o reflexión)

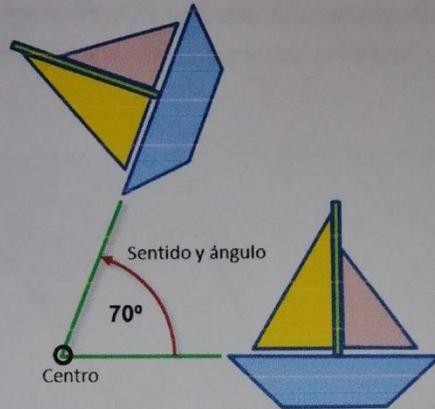
The image shows three diagrams illustrating different types of geometric transformations applied to a sailboat:

- Diagram 1 (Rotation):** Shows a sailboat being rotated around a central point labeled "Centro". A green line indicates the axis of rotation, and a red arc shows a rotation of  $70^\circ$ . The text "Sentido y ángulo" is written next to the arc. A handwritten note says: "se está rotando  $30^\circ$  de derecha a izquierda".
- Diagram 2 (Translation):** Shows two identical sailboats. Dashed red lines connect corresponding points on the two boats, with the word "Distancia" written between them. A handwritten note says: "se está trasladando de izquierda a derecha".
- Diagram 3 (Reflection):** Shows two identical sailboats as mirror images of each other. A vertical green line between them is labeled "Eje" (axis). A handwritten note says: "esta clase de movimiento es reflexión".

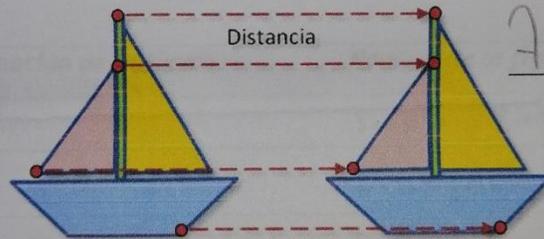
## Tarea 2A situación 1, solución por parte del estudiante R26

**Tarea 2 situación 1**

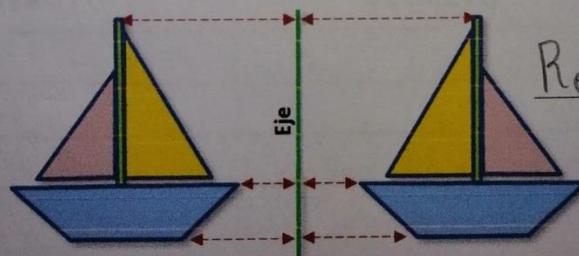
A. Escribe al frente de cada figura que clase de movimiento se está representado (Rotación, traslación o reflexión)



Rotación



Traslación



Reflexión

Tarea 2B situación 1, solución por parte del estudiante O21

B. Realiza los trazos suplementarios siguiendo las instrucciones:

- Realice un trazo con regla desde el punto E hasta el punto F
- Realice un segundo trazo del punto G hasta el punto H

Cuáles figuras reconocer después de haber realizado los trazos suplementarios con su respectiva designación, debes organizar tu respuesta en la tabla 2.

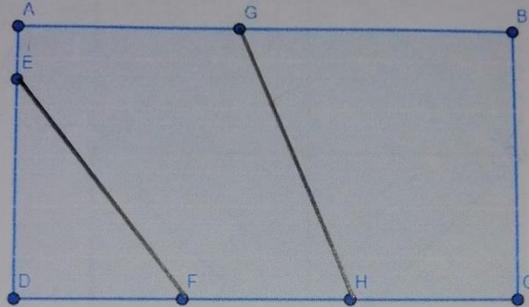


Figura S1(2)

Designación de la figura	Nombre de la figura
$\square$ G H C B	Trapezio Rectangular
$\triangle$ D E F	Triangulo
$\square$ F E A G H	Poligono Irregular
$\square$ D A G H	Trapezio Rectangular
$\square$ A B C D	Rectangulo
$\square$ C F E A B	Poligono

Tabla 2

## Tarea 2B situación 1, solución por parte del estudiante R26

B. Realiza los trazos suplementarios siguiendo las instrucciones:

- Realice un trazo con regla desde el punto E hasta el punto F
- Realice un segundo trazo del punto G hasta el punto H

Cuáles figuras reconocer después de haber realizado los trazos suplementarios con su respectiva designación, debes organizar tu respuesta en la tabla 2.

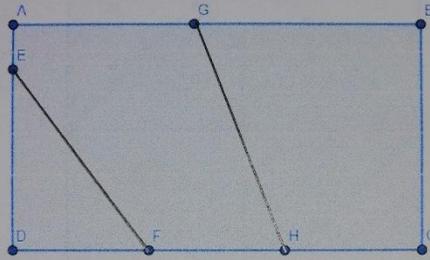


Figura S1(2)

Designación de la figura	Nombre de la figura
EFD	triángulo
GBCH	trapecio
AGHFE	polígono
GBC	triángulo rectángulo

Tabla 2

Tarea 3 situación 1, solución por parte del estudiante O21

Tarea 3 situación 1

¿Cuántos cuadrados de diferente área puedes identificar en la siguiente figura S1(3)? Designa cada uno de ellos con sus vértices.

Realiza un escrito explicando los procedimientos utilizados.

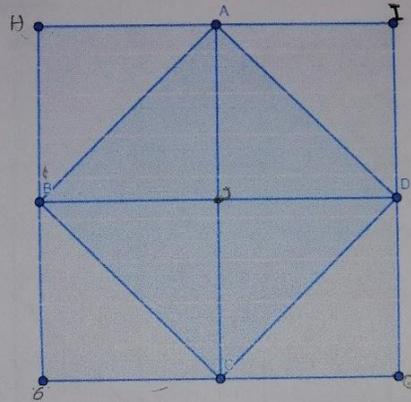


Figura S1(3)

Designación de la figura	Nombre de la figura
ABCD	Cuadrado
eohi	Cuadrado
BJCG	Cuadrado
JDEC	Cuadrado
AIOJ	Cuadrado
HAIJ	Cuadrado

Procedimiento

para contar todos los cuadrados, agregue 5 vértices, 4 en los esquinos y 1 en el centro de la figura.  
 entonces para encontrar los empiece a unir de a 4 vértices, había una figura en forma de rombo entonces lo que hice fue rotarla para convertirla en un cuadrado

Tarea 3 situación 1, solución por parte del estudiante R26

**Tarea 3 situación 1**

¿Cuántos cuadrados de diferente área puedes identificar en la siguiente figura S1(3)? Designa cada una de ellos con sus vértices.

Realiza un escrito explicando los procedimientos utilizados.

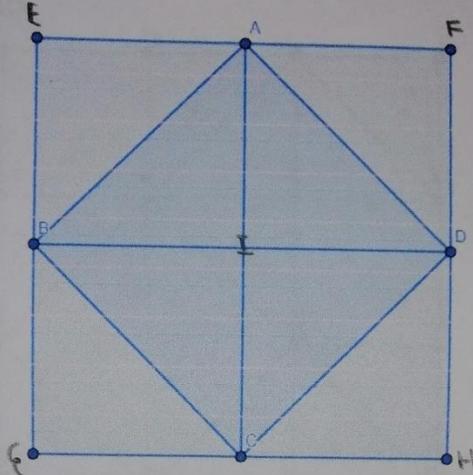


Figura S1(3)

Designación de la figura	Nombre de la figura
□ ABCD	Cuadrado
□ EFGH	Cuadrado
□ CI DH	Cuadrado

**Procedimiento**

• Para poder encontrar las figuras lo primero que hice fue ubicar mas vertices.  
 - Para el Cuadrado ABCD Tuve que rotar el rombo de derecha a izquierda.  
 - Para los cuadrados (EFGH) (CI DH) solo es concentrarse en los diferentes vertices ya señalados y se encontraron de una forma muy sencilla.

Tarea 4 situación 1, solución por parte del estudiante O21

Tarea 4 situación 1

¿Cuántos cuadrados y cuántos triángulos hay en la siguiente figura S1(4)?

¿Qué procedimientos utilizaste para realizar esta segunda tarea?

¿Designa otras figuras geométricas que se distinguen en la figura?

Justifica tu respuesta.

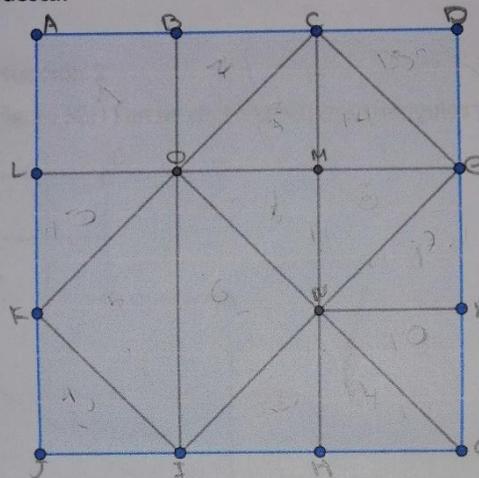


Figura S1(4)

- A C K
- B C O
- C M O
- C D E
- C M E
- M E N
- O M N
- E F N
- N F G
- N G H
- N A I
- E G I
- O E I
- O N I
- O R I
- K J I
- L O K
- O I G
- I N G
- O N E
- O C E

Respuesta

El total de cuadrados es de 10 cuadrados.  
 el total de triángulos es de 24 triángulos  
 tambien hay 2 rombos y 7 rectangulos

mi procedimiento fue el siguiente:  
 agregue vertices para ordenar y saber cual era  
 cada figura tambien habian dos rombos esos  
 2 rombos los rote para sacar 2 cuadrados y  
 para sacar triángulos y rectangulos haci saque  
 las figuras correspondientes

## Tarea 4 situación 1, solución por parte del estudiante R26

## Tarea 4 situación 1

¿Cuántos cuadrados y cuántos triángulos hay en la siguiente figura S1(4)?

¿Qué procedimientos utilizaste para realizar esta segunda tarea?

¿Designa otras figuras geométricas que se distinguen en la figura?

Justifica tu respuesta.

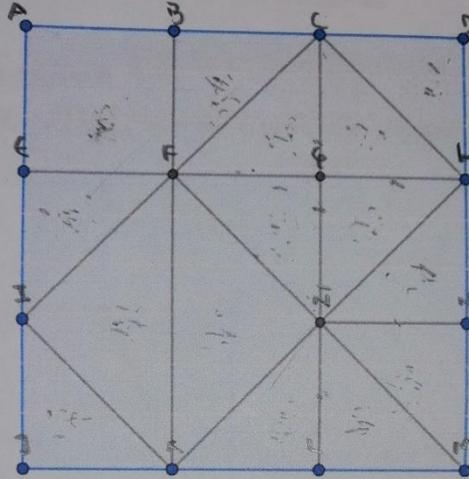


Figura S1(4)

## Respuesta

Cuadrados:  $\bullet$  ADMD  $\bullet$  ABEG  $\bullet$  BCEF  $\bullet$  CGHO  $\bullet$  FMNN  $\bullet$  NNML  
 $\bullet$  EQLD  $\bullet$  FIKN  $\bullet$  FNMC  $\bullet$  FHMK: En total hay 10 Cuadros pero  
 para encontrar los cuadrados con los vertices FIKN y  
 FNMC tuve que rotar los rombos.  
 Triangulos:  $\bullet$  ACI  $\bullet$  EFI  $\bullet$  FIK  $\bullet$  IKJ  $\bullet$  BFC  $\bullet$  CFG  $\bullet$  FEN  $\bullet$  FAK  
 $\bullet$  FRN  $\bullet$  NKL  $\bullet$  CHG  $\bullet$  CHD  $\bullet$  FHN  $\bullet$  KHN  $\bullet$  NNM  $\bullet$  NML  $\bullet$  HNM  
 $\bullet$  FHK  $\bullet$  FHN  $\bullet$  PCH  $\bullet$  FMH: En total hay 21 Triangulos  
 Diferentes figuras: Rombos:  $\bullet$  CFNH  $\bullet$  FNIK  $\bullet$  Trapecios:  
 $\bullet$  BKHD  $\bullet$  Rectangulos:  $\bullet$  BKLC

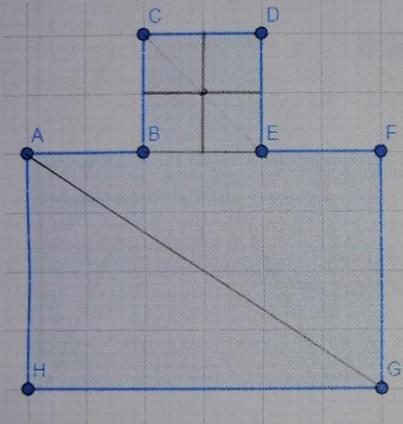
## Tarea 1 situación 2, solución por parte del estudiante O21

**SITUACIÓN 2 “Comparación de áreas”**

El objetivo de esta situación es: Transformar el contorno global de una figura en otra de igual cantidad de área a través de procesos mereológicas como: (traslación, rotación, cambios de posición y trazos complementarios) para visualizar superar aprehensiones de tipo operatorias

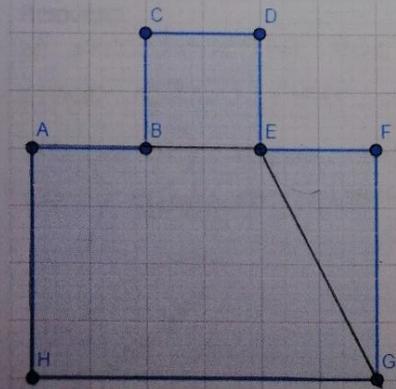
**Tarea 1 de la situación 2**

A) Subdivida la Figura S2(1) en un rectángulo, dos triángulos y cuatro cuadrados.



*Figura S1(1) figura inicial*

B) Subdivida la figura inicial en un trapecio, un triángulo y un cuadrado.



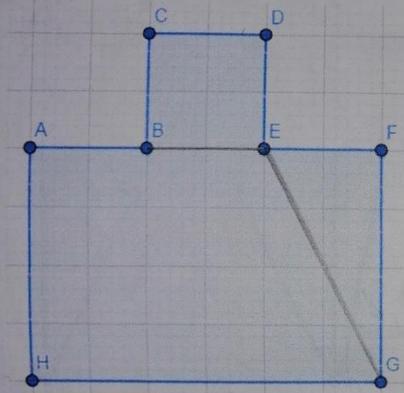
## Tarea 1 situación 2, solución por parte del estudiante R26

**SITUACIÓN 2 "Comparación de áreas"**

El objetivo de esta situación es: Transformar el contorno global de una figura en otra de igual cantidad de área a través de procesos mereológicos como: (traslación, rotación, cambios de posición y trazos complementarios) para visualizar superar aprehensiones de tipo operatorias

**Tarea 1 de la situación 2**

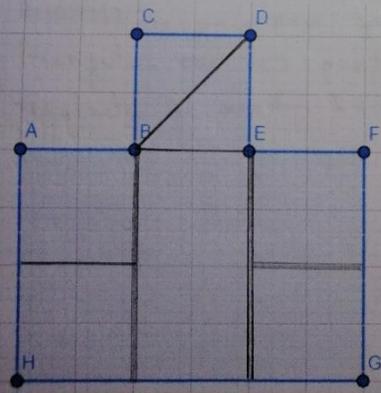
A) Subdivida la Figura S2(1) en un rectángulo, dos triángulos y cuatro cuadrados.



Confundido los  
Trazos

**Figura S1(1) figura inicial**

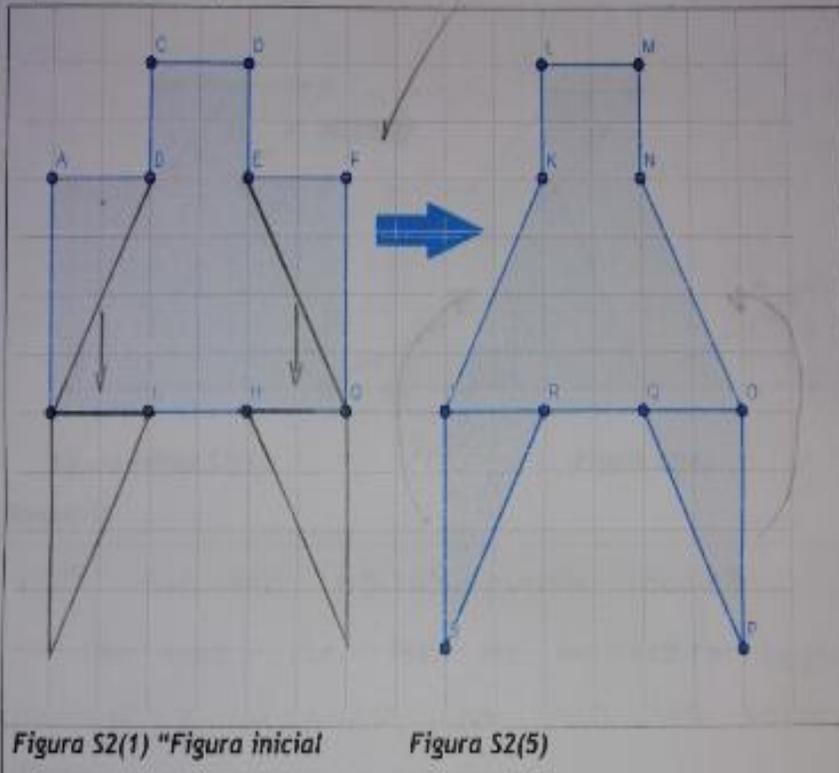
B) Subdivida la figura inicial en un trapecio, un triángulo y un cuadrado.



Tarea 2 situación 2, solución por parte del estudiante O21

Tarea 2 situación 2

A partir de la figura inicial S2(1) construya la figura S2 (5). Explica tu procedimiento detallando cada una de los trazos o movimientos realizados para llegar a la figura sugerida.



Respuesta

el procedimiento que hice para que la figura S2(1) fuera igual que la figura S2(5) fue rotar hacia abajo 2 triángulos y hacer quedaron igual los 2 figuras.

## Tarea 2 situación 2, solución por parte del estudiante R26

## Tarea 2 situación 2

A partir de la figura inicial S2(1) construya la figura S2 (5). Explica tu procedimiento detallando cada una de los trazos o movimientos realizados para llegar a la figura sugerida.

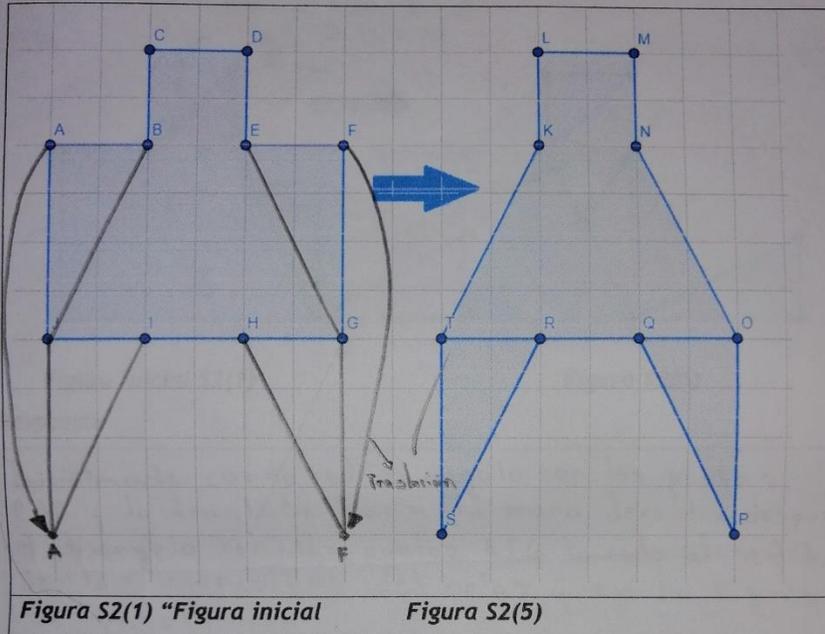


Figura S2(1) "Figura inicial"

Figura S2(5)

Respuesta Lo primero que hice fue cortar los triángulos con los puntos EFG y ABS y los trasladé de arriba hacia abajo.

Tarea 3 situación 2, solución por parte del estudiante O21

**Tarea 3 situación 2**

Transforma la figura inicial S2(1) en la figura S2 (6). Explica tu procedimiento detallando cada una de los trazos o movimientos realizados para llegar a la figura sugerida.

**Figura inicial S2(1)** **Figura S2(6)**

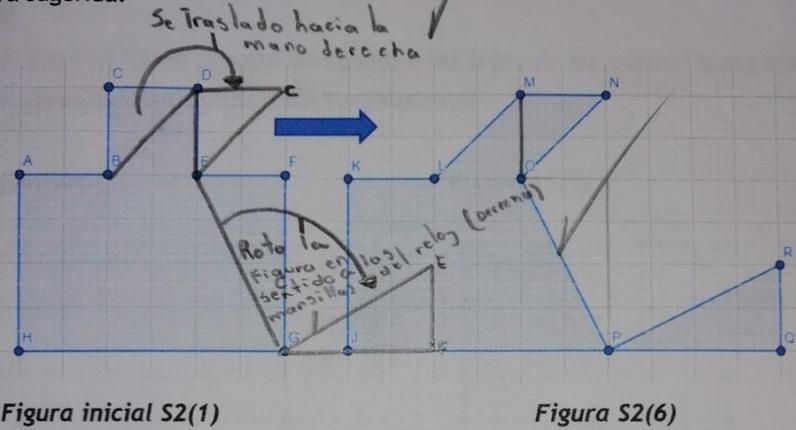
Respuesta

para que las figuras fueran iguales  
 lo que hice fue que en la figura S2(1)  
 translate 2 triángulos uno con los vértices  
 BCD y otro con los vértices EFG.  
con rotación

Tarea 3 situación 2, solución por parte del estudiante R26

Tarea 3 situación 2

Transforma la figura inicial S2(1) en la figura S2 (6). Explica tu procedimiento detallando cada una de los trazos o movimientos realizados para llegar a la figura sugerida.



Respuesta

Inicialmente corto el triángulo con los puntos CDB y lo traslado hacia la mano derecha despues el triángulo con los puntos EFG lo roto al sentido de las manesillas del reloj y así la figura se transforma.

Tarea 4 situación 2, solución por parte del estudiante O21

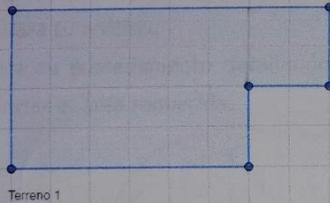
**Tarea 4 Situación 2**

A) ¿Cuál de estos cuatro terrenos de forma diferente es el de mayor área?

B) ¿Se podría afirmar que la figura S2(8) por tener un perímetro de 32 metros y ser la que tiene mayor perímetro de las cuatro figuras es la que contiene más área?

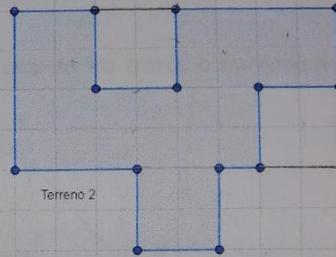
C) ¿A qué conclusión llegaste en cuanto a las áreas de las cuatro figuras y sus respectivos perímetros? Justifica tus respuestas.

**Figura S2(7)**

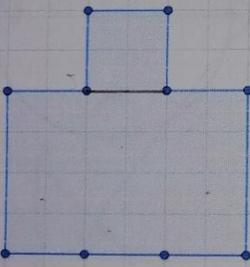


Terreno 1

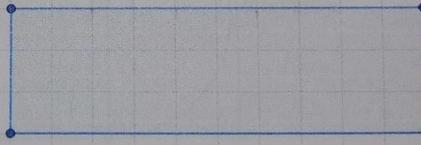
**Figura S2(8)**



Terreno 2



Terreno 3



Terreno 4

**Figura S2(9)**

**Figura S2(10)**

Respuesta

- A) el de mayor area es el terreno 4 ✓
- B) NO porque el perimetro es solo la forma y el area es todo el espacio que tiene ✓
- C) mi conclusion fue que el area no esta relacionada con el perimetro porque un terreno puede tener mayor perimetro que otro terreno pero al otro asi tenga el perimetro mas pequeño puede tener mas area ✓

## Tarea 4 situación 2, solución por parte del estudiante R26

## Tarea 4 Situación 2

- A) ¿Cuál de estos cuatro terrenos de forma diferente es el de mayor área?
- B) ¿Se podría afirmar que la figura S2(8) por tener un perímetro de 32 metros y ser la que tiene mayor perímetro de las cuatro figuras es la que contiene más área?
- C) ¿A qué conclusión llegaste en cuanto a las áreas de las cuatro figuras y sus respectivos perímetros? Justifica tus respuestas.

Figura S2(7)

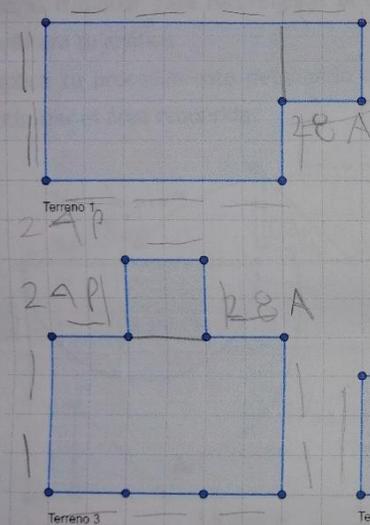


Figura S2(8)

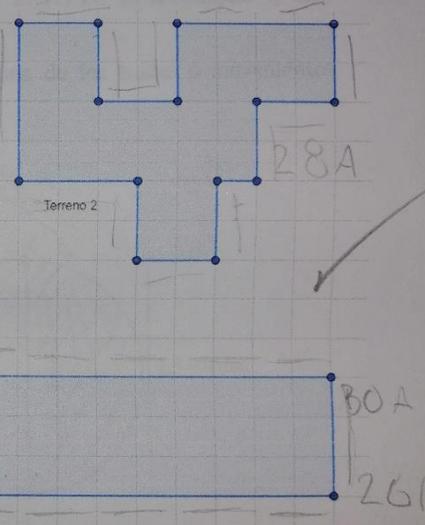


Figura S2(9)

Figura S2(10)

## Respuesta

- A) El terreno con mayor área es el número 4 ✓
- B) No se puede afirmar nada porque el perímetro y área son designaciones totalmente diferentes en todos los sentidos. ??
- C) Tuve la conclusión de que los terrenos 1 y 3 son los mismos solo que tienen una parte en diferente lado. ✓  
 y que las figuras por tener más perímetro necesariamente no tienen más área.  
 y que por tener más área necesariamente no tiene más perímetro ✓

Tarea 1 situación 3, solución por parte del estudiante O21

**SITUACIÓN 3 “Áreas sombreadas”**

El objetivo de esta situación es: Combinar tratamientos y operaciones figurales que permitan la comparación de dos áreas sombreadas que ocupan la misma superficie de forma equivalente.

**Tarea 1 situación 3**

Con la siguiente información ayuda a don Juan, quien trabaja en Marroquinería a saber: cuál es el área de una pieza de cuero para evitar desperdiciar materia prima, a continuación, se muestra la silueta con algunos datos.

Realiza trazos suplementarios que te permitan ver algunas subfiguras que podrás trasladar para reconfigurar la figura S3 (1) en un rectángulo el cual facilitara tu análisis.

Explica tu procedimiento detallando cada una de los trazos o movimientos optimizar el área requerida.

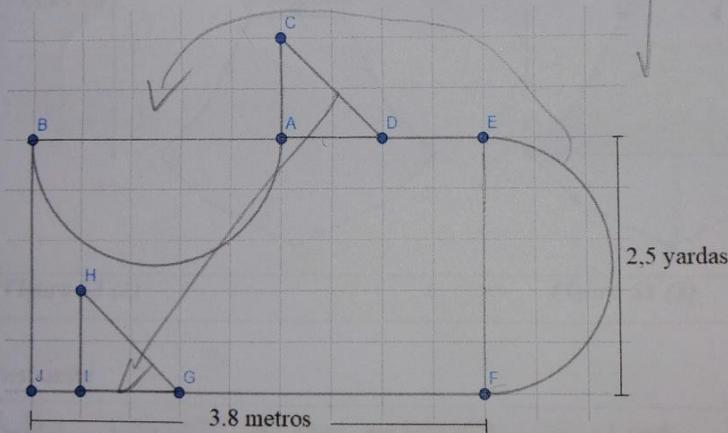


Figura S3 (1)

Respuesta

hice los trazos necesarios y encontré un semicírculo y un triángulo y rote donde cambia

y trasladar!

## Tarea 1 situación 3, solución por parte del estudiante R26

**SITUACIÓN 3 “Áreas sombreadas”**

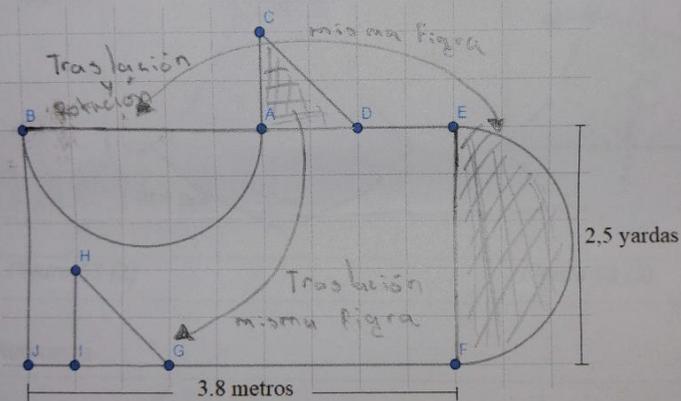
El objetivo de esta situación es: Combinar tratamientos y operaciones figurales que permitan la comparación de dos áreas sombreadas que ocupan la misma superficie de forma equivalente.

**Tarea 1 situación 3**

Con la siguiente información ayuda a don Juan, quien trabaja en Marroquinería a saber: cuál es el área de una pieza de cuero para evitar desperdiciar materia prima, a continuación, se muestra la silueta con algunos datos.

Realiza trazos suplementarios que te permitan ver algunas subfiguras que podrás trasladar para reconfigurar la figura S3 (1) en un rectángulo el cual facilitara tu análisis.

Explica tu procedimiento detallando cada una de los trazos o movimientos optimizar el área requerida.



**Figura S3 (1)**

**Respuesta**

Para no perder materia prima y facilitar el trabajo es necesario armar un rectángulo el cual daría las mismas cantidades de cuero necesario, y de esta manera ahorrar tiempo y no desperdiciarlo.

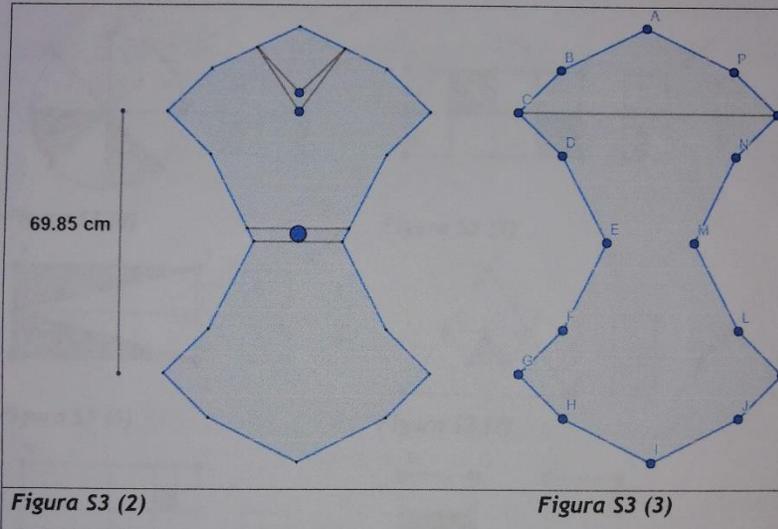
Área total ??

Tarea 2 situación 3, solución por parte del estudiante C07 el cual no resolvió.

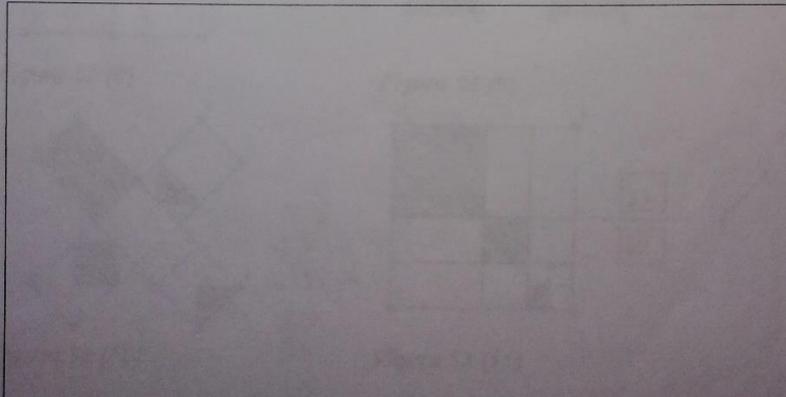
**Tarea 2 situación 3**

Doña María va a realizar un vestido que tiene las medidas y contorno como se muestra en la siguiente figura. Ayúdala a comprar un retazo de tela con el que pueda cubrir de forma exacta el área del vestido sin desperdiciar materia prima, dar la respuesta en pulgadas cuadradas.

Realiza trazos suplementarios y reconfigura la figura S3 (3) en una figura más sencilla para resolver el ejercicio



Respuesta

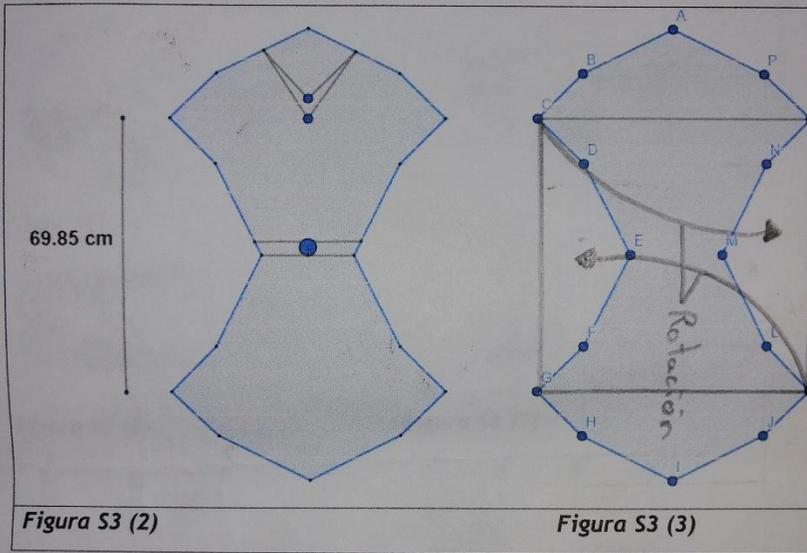


Tarea 2 situación 3, solución por parte del estudiante R26

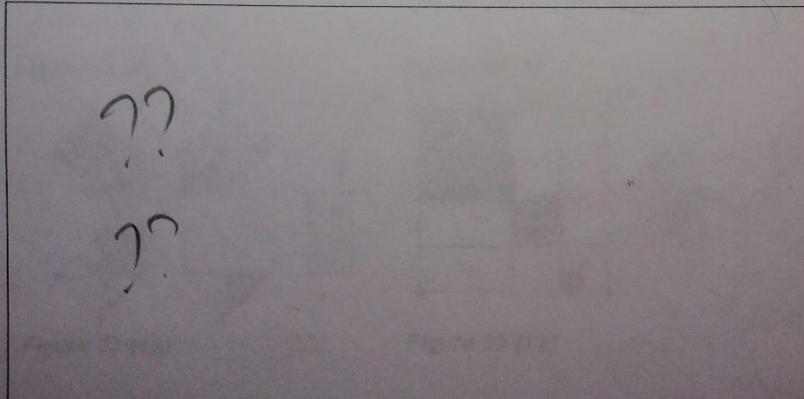
**Tarea 2 situación 3**

Doña María va a realizar un vestido que tiene las medidas y contorno como se muestra en la siguiente figura. Ayúdala a comprar un retazo de tela con el que pueda cubrir de forma exacta el área del vestido sin desperdiciar materia prima, dar la respuesta en pulgadas cuadradas.

Realiza trazos suplementarios y reconfigura la figura S3 (3) en una figura más sencilla para resolver el ejercicio



Respuesta



Tarea 3 situación 3, solución por parte del estudiante O21

**Tarea 3 situación 3**

La siguiente consigna tiene por objetivo introducir al estudiante en el concepto de relación fraccionaria "parte todo" para lo cual se plantean ocho tareas que le permitirá razonar sobre las áreas sombreadas y su relación con la unidad de referencia.

¿Qué parte de la figura esta sombreada con relación a la unidad de referencia presentada en cada una de las ocho tareas?

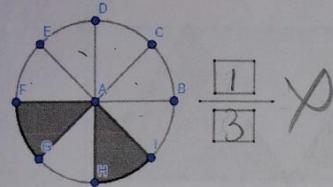


Figura S3 (4)

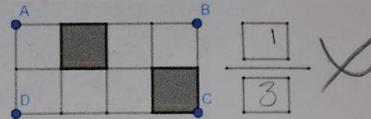


Figura S3 (5)

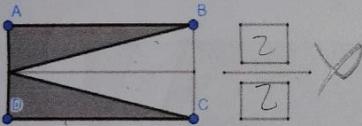


Figura S3 (6)

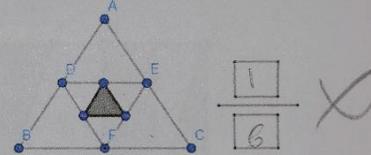


Figura S3 (7)

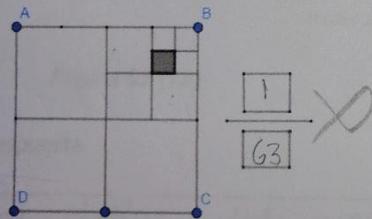


Figura S3 (8)

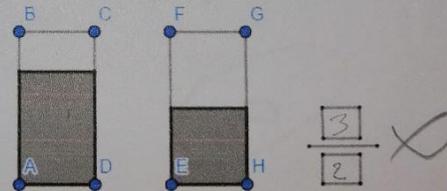


Figura S3 (9)

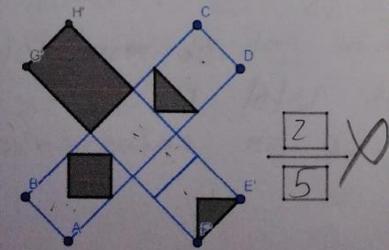


Figura S3 (10)

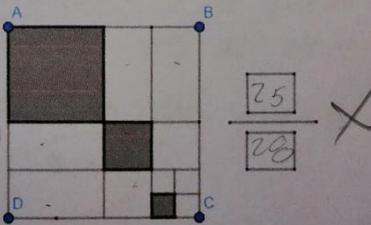


Figura S3 (11)

Tarea 3 situación 3, solución por parte del estudiante R26

**Tarea 3 situación 3**

La siguiente consigna tiene por objetivo introducir al estudiante en el concepto de relación fraccionaria "parte todo" para lo cual se plantean ocho tareas que le permitirá razonar sobre las áreas sombreadas y su relación con la unidad de referencia.

¿Qué parte de la figura esta sombreada con relación a la unidad de referencia presentada en cada una de las ocho tareas?

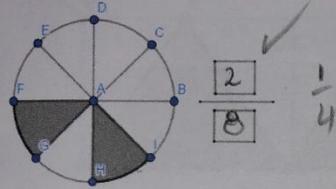


Figura S3 (4)

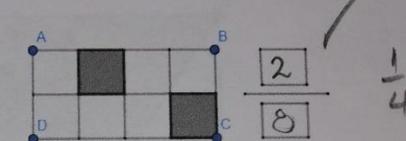


Figura S3 (5)

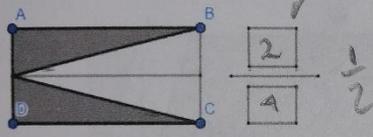


Figura S3 (6)

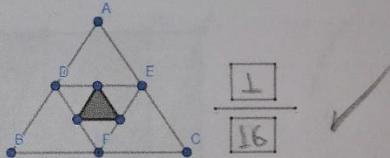


Figura S3 (7)

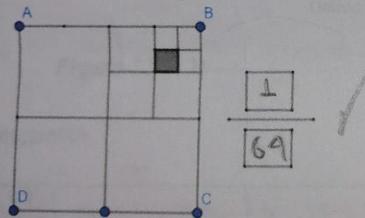


Figura S3 (8)

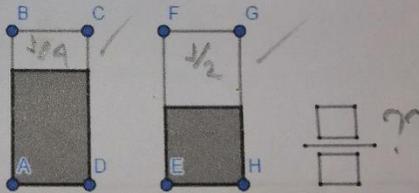


Figura S3 (9)

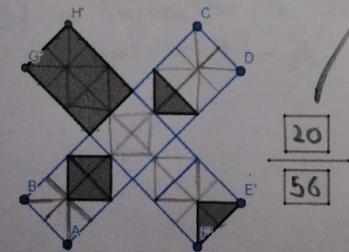


Figura S3 (10)

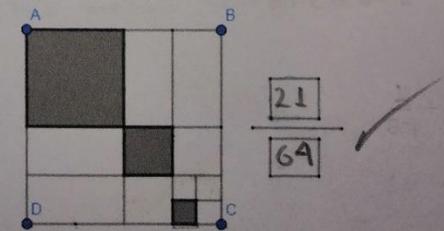


Figura S3 (11)

Tarea 4 situación 3, solución por parte del estudiante O21

**Tarea 4 situación 3**

A) Halle el área de la región sombreada de la unidad 1 teniendo en cuenta como parámetro de medida el triángulo DEF que equivale a  $6 \text{ m}^2$

B) El triángulo ILM de la unidad 2 es la cuarta parte del triángulo DEF de la unidad 1 con esta información encuentra la sumatoria de las áreas sombreadas de la figura 1 y 2

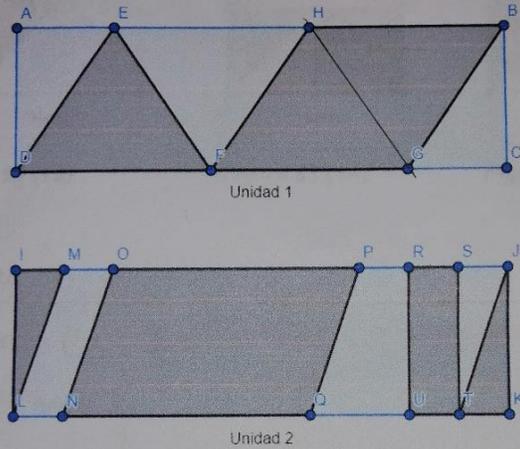


Figura S3 (12)

Respuesta

el total del area sombreada de la unidad 1 es de  $14 \text{ m}^2$  y el total del area de la unidad 2 es de  $14 \text{ m}^2$  así que el total de los dos areas sombreadas es de  $28 \text{ m}^2$ .

NO

NO

## Tarea 4 situación 3, solución por parte del estudiante R26

## Tarea 4 situación 3

A) Halle el área de la región sombreada de la unidad 1 teniendo en cuenta como parámetro de medida el triángulo DEF que equivale a  $6 \text{ m}^2$

B) El triángulo ILM de la unidad 2 es la cuarta parte del triángulo DEF de la unidad 1 con esta información encuentra la sumatoria de las áreas sombreadas de la figura 1 y 2

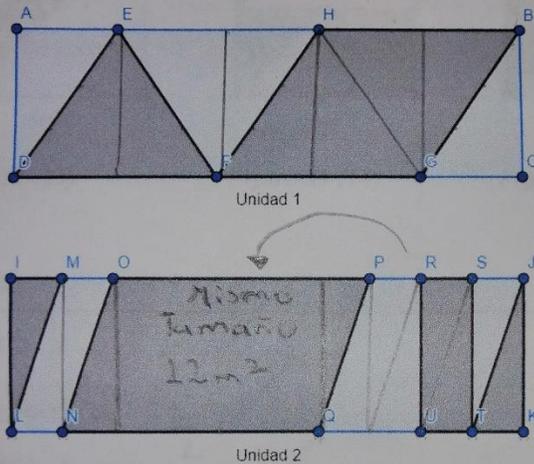


Figura S3 (12)

Respuesta

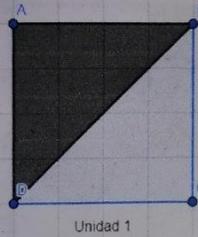
A) El área de la región sombreada es igual a  $18 \text{ m}^2$ .

B) La sumatoria de las áreas sombreadas es igual a  $21$ .

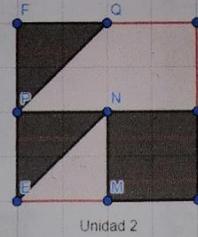
Tarea 5 situación 3, solución por parte del estudiante O21

**Tarea 5 situación 3**

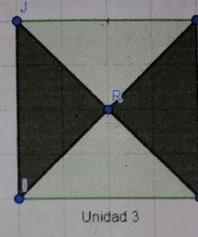
Escribe la fracción que corresponde a la superficie sombreada con respecto a la unidad (que es el cuadrado externo) y determina la sumatoria de zona sombreada de color gris oscuro de las 3 unidades



**Figura S3 (13)**



**Figura S3 (14)**



**Figura S3 (15)**

Respuesta

Figura 13 =  $\frac{1}{2}$   
 Figura 14 =  $\frac{1}{2}$   
 Figura 15 =  $\frac{1}{2}$   
 Total resultado de las 3 figuras  
 en fracción es  
 $= \frac{1}{2}$   
 conclusión errónea

## Tarea 5 situación 3, solución por parte del estudiante R26

## Tarea 5 situación 3

Escribe la fracción que corresponde a la superficie sombreada con respecto a la unidad (que es el cuadrado externo) y determina la sumatoria de zona sombreada de color gris oscuro de las 3 unidades

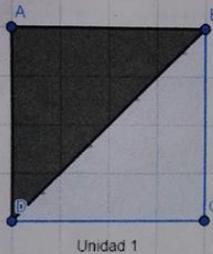


Figura S3 (13)

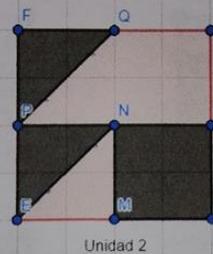


Figura S3 (14)

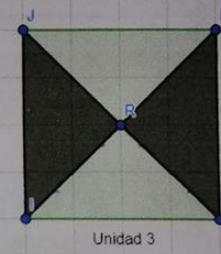


Figura S3 (15)

## Respuesta

Unidad 1.  $\frac{1}{2}$  ✓  
 Unidad 2.  $\frac{1}{2}$  ✓  
 Unidad 3.  $\frac{1}{2}$  ✓

Suma:  $\frac{1+1+1}{2} = \frac{3}{2}$

Error en los algoritmos utilizados para sumar

Tarea 6 situación 3, solución por parte del estudiante O21

Tarea 6 situación 3

Hallar el valor de la sumatoria las regiones sombreadas en fracción con respecto a la unidad, explica cómo lo hiciste y justifica tu respuesta.

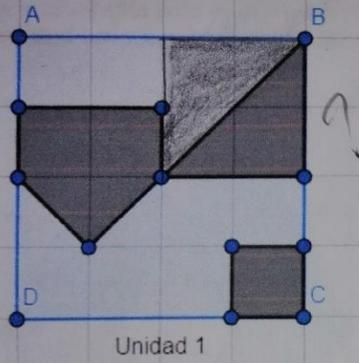


Figura S3 (16)

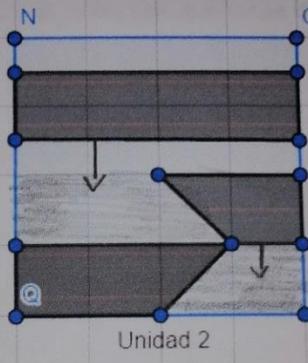


Figura S3 (17)

Respuesta

resultado de la unidad 1 =  $\frac{5}{11}$   
 resultado de la unidad 2 =  $\frac{1}{2}$

lo que hice fue rotar y trasladar  
 las figuras para poder darle una respectiva  
 forma y que lograra encajar en el lugar  
 deseado

10

## Tarea 6 situación 3, solución por parte del estudiante R26

**Tarea 6 situación 3**

Hallar el valor de la sumatoria las regiones sombreadas en fracción con respecto a la unidad, explica cómo lo hiciste y justifica tu respuesta.

**Figura S3 (16)** **Figura S3 (17)**

**Respuesta**

Unidad 1.  $\frac{6}{16}$  Lo primero que hice fue hacer trazos suplementarios y desarmar cada figura para organizarla de una manera diferente y así mismo que sea más fácil para el análisis.

Unidad 2. Hice traslaciones de las diferentes áreas sombreadas y con el trapecio lo gire para poder que quepa en el área necesitada.

Simetría

sumatoria 77

Tarea 7 situación 3, solución por parte del estudiante O21

Tarea 7 situación 3

Realiza los siguientes trazos suplementarios, haz un trazo del segmento FH y JL, igualmente realiza esta tarea con los segmentos OR, EK y PQ posteriormente deconstruye la región sombreada de color azul. Construye una nueva figura que sea más sencilla para el análisis y define cuál es la fracción que ocupa dicha zona azul con respecto del rectángulo ABCD.

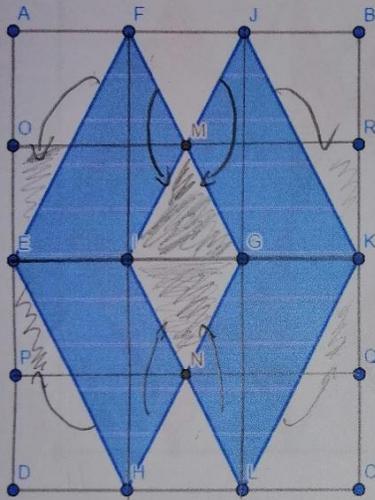
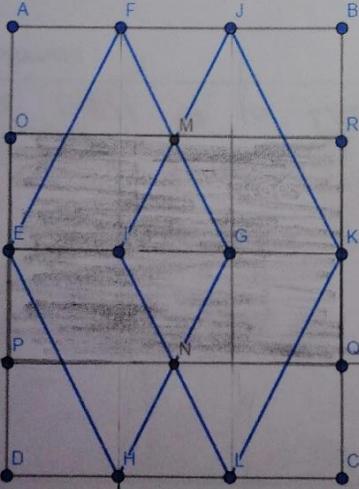


Figura S3 (18)

Dibuja aquí la nueva figura hallada



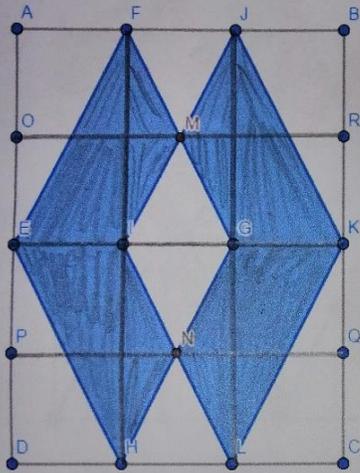
Respuesta

La figura que logre hacer con los trazos dichos fue un rectángulo el rectángulo esta conformado por los segmentos ORQP. etc  
 La zona azul con el rectángulo hallado ocupa  $\frac{1}{2}$  del rectángulo ABCD

Tarea 7 situación 3, solución por parte del estudiante R26

Tarea 7 situación 3

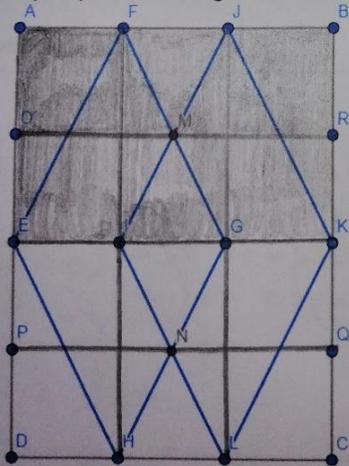
Realiza los siguientes trazos suplementarios, haz un trazo del segmento FH y JL, igualmente realiza esta tarea con los segmentos OR, EK y PQ posteriormente deconstruye la región sombreada de color azul. Construye una nueva figura que sea más sencilla para el análisis y define cuál es la fracción que ocupa dicha zona azul con respecto del rectángulo ABCD.



No es observable los procesos

Figura S3 (18)

Dibuja aquí la nueva figura hallada



Respuesta

$$\frac{6}{12} = \left(\frac{1}{2}\right)$$

Tarea 8 situación 3, solución por parte del estudiante O21

Tarea 8 situación 3

Encuentra una estrategia para definir cuál es la fracción de la parte sombreada de color rojo con respecto a la unidad cuadrada AEIM

Explica los procedimientos realizados

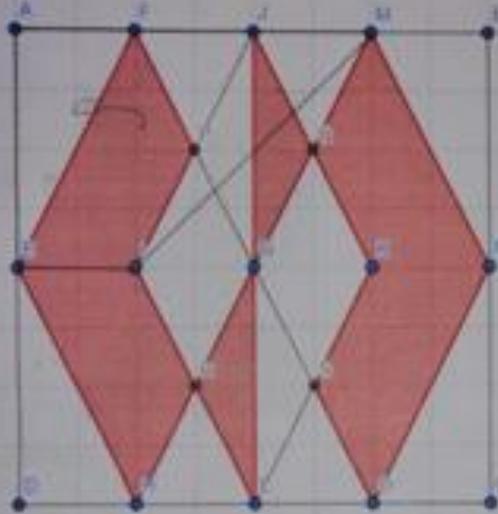


Figura S3 (19)

Respuesta

El total de la fracción de la unidad cuadrada AEIM es de  $\frac{4}{9}$   
 lo que hice fue notar: medir y homologar.

## Tarea 8 situación 3, solución por parte del estudiante R26

**Tarea 8 situación 3**  
Encuentra una estrategia para definir cuál es la fracción de la parte sombreada de color rojo con respecto a la unidad cuadrada AEIM

Explica los procedimientos realizados

**Figura S3 (19)**

Respuesta

$\left(\frac{1}{2}\right) \neq \frac{28}{64}$  Lo primero que hice fue hacer trazos suplementarios para observar figuras diferentes y así trasladarlas y organizarlas a los espacios dados.

Tarea 9 situación 3, solución por parte del estudiante O21

**Tarea 9 situación 3 (Área de regiones circulares)**  
 Observa detenidamente la figura S3 (20) y determina una expresión fraccionaria que represente la región sombreada de color gris, teniendo en cuenta que la unidad está dada por la circunferencia de radio EK

**Figura S3 (20)**

Unidad de referencia

Respuesta

La region sombreada observandola bien y detenidamente y teniendo en cuenta la unidad de referencia el resultado fraccionario seria  $\frac{1}{3}$

$\frac{2\pi}{3}$

## Tarea 9 situación 3, solución por parte del estudiante R26

**Tarea 9 situación 3 (Área de regiones circulares)**

Observa detenidamente la figura S3 (20) y determina una expresión fraccionaria que represente la región sombreada de color gris, teniendo en cuenta que la unidad está dada por la circunferencia de radio EK

Figura S3 (20)

Unidad de referencia

Respuesta

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Tarea 10 situación 3, solución por parte del estudiante O21

**Tarea 10 situación 3**

En la siguiente figura nos encontramos con un cuadrado ABCD que contiene una región sombreada de color gris, deconstruye esta región y forma un rectángulo que te permita determinar el área en  $\text{cm}^2$  de dicha región.

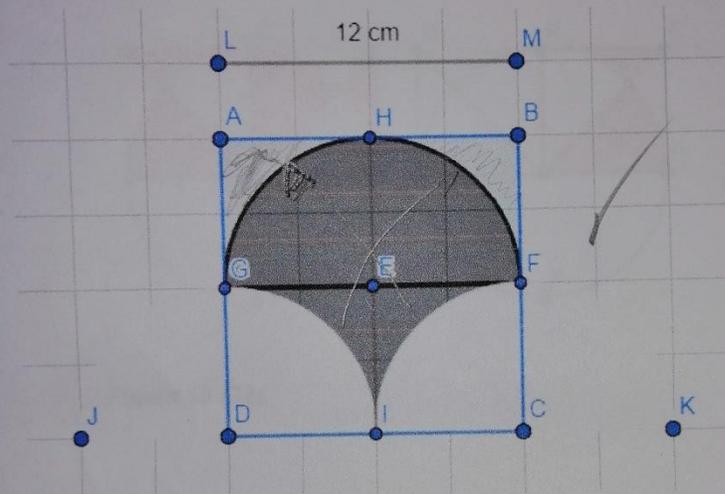


Figura S3 (21)

Respuesta

el total del rectángulo conformado por el área sombreada es de  $72\text{cm}^2$   
 el procedimiento que utilice fue transbalar



Tarea 11 situación 3, solución por parte del estudiante O21

Tarea 11 situación 3

En la siguiente figura S3 (22) encontrarás dos rectángulos donde tomaremos como unidad el rectángulo DFGC que contienen regiones circulares sombreadas. Determina las fracciones de cada unidad y realiza la suma de dichas áreas sombreadas

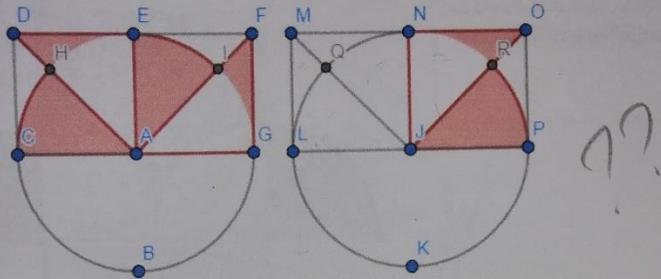


Figura S3 (22)

Respuesta

el resultado de la figura 1 es de  $\frac{1}{2}$  ✓ y el resultado de la figura 2 es de  $\frac{2}{3}$

NO  
 confunde la relación  
 parte todo y su representación  
 fracción

## Tarea 11 situación 3, solución por parte del estudiante R26

## Tarea 11 situación 3

En la siguiente figura S3 (22) encontrarás dos rectángulos donde tomaremos como unidad el rectángulo DFGC que contienen regiones circulares sombreadas. Determina las fracciones de cada unidad y realiza la suma de dichas áreas sombreadas

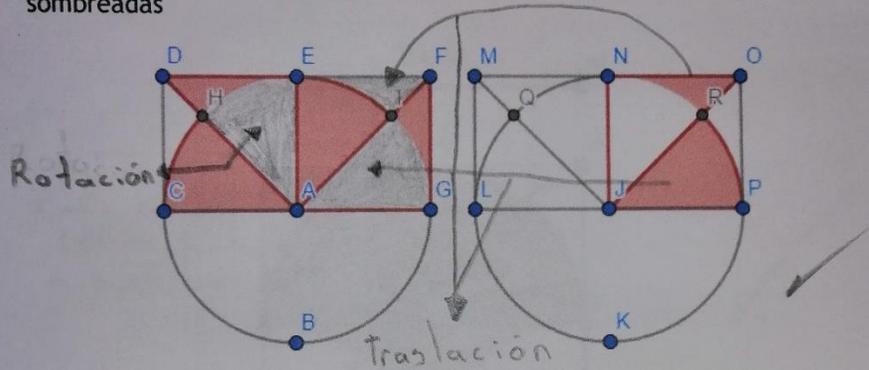


Figura S3 (22)

Respuesta

$$\frac{3}{4}$$

sin justificación

Tarea 12 situación 3, solución por parte del estudiante O21

**Tarea 12 situación 3**

Reconfigura la siguiente figura y encuentra el área en  $\text{cm}^2$ .

Explica los procedimientos utilizados.

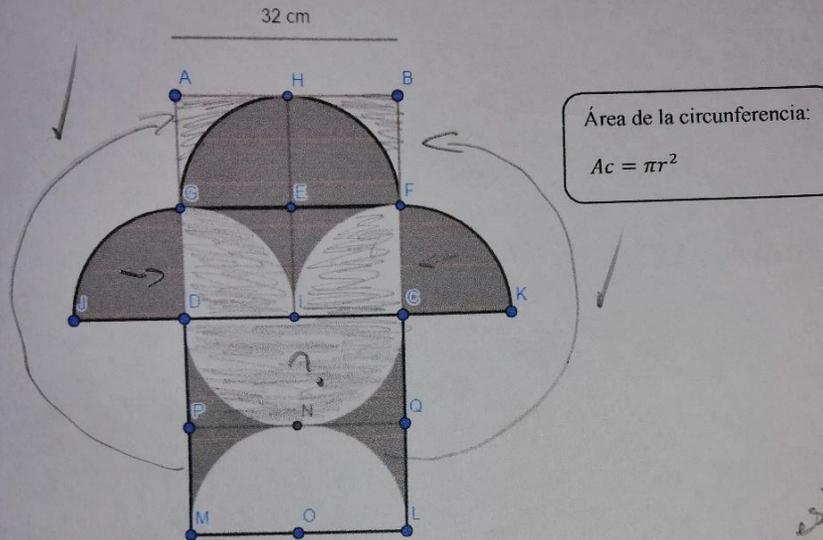


Figura S3 (23)

Respuestas

el total del area es de 19.5  $\text{cm}^2$   
 el procedimiento que utilice fue  
 rotar trasladar y medir y así  
 logre hallar el resultado

NO es Verdad

## Tarea 12 situación 3, solución por parte del estudiante R26

**Tarea 12 situación 3**  
 Reconfigura la siguiente figura y encuentra el área en  $\text{cm}^2$ .  
 Explica los procedimientos utilizados.

32 cm

Área de la circunferencia:  
 $A_c = \pi r^2$

Traslación ✓

**Figura S3 (23)**

Respuestas

Lo primero que hice fue trasladar figuras para hacer una figura más fácil de observar (cuadrado). Después saqué el área del cuadrado ( $1.024 \text{ cm}^2$ ) y lo reste por el área de la circunferencia ( $803.84$ ) dándome como resultado  $220.16$  y esto lo dividí por  $2$  para poder saber el resultado del área sombreada restante que me dio  $110.08$ . Resultado:  $1,134 \text{ cm}^2$ .

# C. Tabla en Excel con los resultados

Esta tabla se realizó en código binario para generar los porcentajes. (Al dar doble clic en la imagen se abre en excel)

SD y Tarea	variable	1	2	7	8	12	15	17	18	19	21	26	Sumator	porcent	porcentaj	porcentaje % Malas
Situación 1																
Tarea 1	Designación de la figura	si	si	si	si	si	si	si	si	si	si	si	11	100,00	0,00	0,00
Tarea 1	Errores de designación	0	0	0	1	0	1	1	2	0	0	0	4	96,84	0,00	3,17 126=100%
Tarea 1	Número de figuras identificadas	10	8	22	8	7	10	6	6	8	6	8	99	100,00	0,00	mínimo 126=100%
tarea 2A	Conceptos (Rotación Traslación Simetría)	si	si	si	si	si	si	si	no	si	si	si	10	90,91	0,00	9,09
tarea 2B	Trazos suplementarios	si	si	si	si	si	si	si	si	si	si	si	11	100,00	0,00	0,00
tarea 2B	Designación de la figura	si	si	si	si	si	si	si	si	si	si	si	11	100,00	0,00	0,00
tarea 2B	Errores de designación	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	1	90,01	0,00	9,09
tarea 2B	Errores de consigna	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	90,91	0,00	9,09
tarea 2B	Número de figuras identificadas	2	6	6	4	4	4	3	6	4	4	6	49	36,37	45,45	18,18
tarea3	Número de cuadrados identificados	1	3	3	2	1	3	5	6	6	6	3	39	63,64	18,18	18,18
tarea3	Designación de la figura	si	si	si	si	si	si	si	si	si	si	si	11	100,00	0,00	
tarea3	procedimientos en LN	no	si	si	si	no	si	si	si	si	si	si	9	81,82	0,00	18,18
tarea4	Número de cuadrados identificados	10	10	10	10	10	10	5	9	9	10	10	103	72,72	18,18	9,09
tarea4	Número de Triángulos identificados	21	21	23	22	21	21	14	14	26	24	21	228	81,81	18,18	0,00
tarea4	procedimientos en LN	si	si	si	si	si	no	si	si	si	si	si	10	90,91	0,00	9,09
Situación 2																
Tarea 1A	subdivisión de figuras	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	10	90,91		9,09
Tarea 1B	subdivisión de figuras	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	9	81,82		18,18
Tarea2	deconstrucción de figuras Traslación	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	5	45,45		54,55
Tarea2	justificación en LN	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	5	45,45		54,55
Tarea3	deconstrucción de figuras Traslación y rotación	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	9	81,82		18,18
Tarea3	justificación en LN	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	3	27,27		72,73
Tarea4 a	Comparación de áreas	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	10	90,91		9,09
Tarea4 b	relación área y perímetro	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	7	63,64		36,36
Tarea4 c	razonamiento	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	5	45,45		54,55
Situación 3																
Tarea 1	Traslación	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	100,00		0,00
Tarea 1	rotación	1	confund	1	confu	0	confunde r	1	confunde r	1	1	1	6	54,55		45,45
Tarea 1	cual es el área	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00		100,00
Tarea 1	justificación en LN	1	1	0	si pe	1	si pero con	si pero con	0	1	confunde r	1	5	45,45		54,55
Tarea 2	Traslación	NA	NA	NA	confu	confu	NA	NA	NA	NA	confunde r	NA		0,00		100,00
Tarea 2	rotación	1	1	0	confu	0	0	1	0	1	0	1	5	45,45		54,55
Tarea 2	justificación en LN	confur	1	0	1	si, co	no es clara	1	0	1	si, con erro	0	4	36,36		63,64
Tarea 3	relación parte todo Figura 4	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	7	63,64		36,36
Tarea 3	relación parte todo Figura 5	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	7	63,64		36,36
Tarea 3	relación parte todo Figura 6	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	7	63,64		36,36
Tarea 3	relación parte todo Figura 7	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	3	27,27		72,73
Tarea 3	relación parte todo Figura 8	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	5	45,45		54,55
Tarea 3	relación parte todo Figura 9	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9,09		90,91
Tarea 3	relación parte todo Figura 10	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	3	27,27		72,73
Tarea 3	relación parte todo Figura 11	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	4	36,36		63,64
Tarea 4	relación parte todo	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	5	45,45		54,55
Tarea 4A	Área de la región sombreada en metros cuad	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	3	27,27		72,73
Tarea 4B	sumatoria de áreas	0	0	0	0	0	0	0	0	con error	0	0		0,00		100,00
Tarea 5	Fracción correspondiente	1	0	1	0	1	1	0	no comprei	1	1	1	7	63,64		36,36
Tarea 5	justificación en LN	insufic	0	1	1	1	1	0	no comprei	1	0	1	6	54,55		45,45
Tarea 6	sumatoria de áreas	0	0	0	0	0	0	0	no comprei	0	0	1	1	9,09		90,91
Tarea 6	procesos mereológicos	1	0	1	1	0	0	0	no comprei	1	si, con erro	1	5	45,45		54,55
Tarea 6	justificación en LN	1	0	1	1	1	si pero con	0	no comprei	1	1	1	7	63,64		36,36
Tarea 7	deconstrucción y reconfiguración	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	7	63,64		36,36
Tarea 7	justificación en LN	si, per	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	5	45,45		54,55
Tarea 8	deconstrucción y reconfiguración	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	6	54,55		45,45
Tarea 8	Fracción correspondiente	error	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	5	45,45		54,55
Tarea 8	justificación en LN	1	0	1	si coi	1	1	0	0	1	0	1	6	54,55		45,45
Tarea 9	deconstrucción y reconfiguración	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9,09		90,91
Tarea 9	Fracción correspondiente	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	6	54,55		45,45
Tarea 10	deconstrucción y reconfiguración	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	6	54,55		45,45
Tarea 10	Área en metros cuadrados	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	8	72,73		27,27
Tarea 10	justificación en LN	1	0	1	1	1	0	si pero con	0	1	1	1	7	63,64		36,36
Tarea 11	deconstrucción y reconfiguración	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	4	36,36		63,64
Tarea 11	Fracción correspondiente	error	0	1	errad	0	1	0	0	1	0	1	4	36,36		63,64
Tarea 12	deconstrucción y reconfiguración	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	7	63,64		36,36
Tarea 12	Aplicación de algoritmos A=m*2	no se	0	no se	1	1	0	0	0	1	0	1	4	36,36		63,64
Tarea 12	Área en metros cuadrados	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	7	63,64		36,36
														44,258	55,742	
porcentaje global s3																



## Referencias Bibliográficas

- Abrate, R.; Delgado, G. y Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 39(1), 1-9. Recuperado el 22 de octubre de 2007 en <http://www.rieoei.org/deloslectores/1290Abrate.pdf>
- Aguilar, S y Barroso, J. (2015). La Triangulación de datos como estrategia en investigación educativa. Facultad de educación Universidad de Sevilla España.
- Almeida, M. (2002). Desarrollo Profesional Docente en Geometría: análisis de un proceso de Formación a Distancia. (Memoria de tesis doctoral). Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas. Universidad de Barcelona, Barcelona. Recuperado el 22 de octubre de 2007 en [http://www.tesisenxarxa.net/TESIS\\_UB/AVAILABLE/TDX-1008102-120710//TOL119.pdf](http://www.tesisenxarxa.net/TESIS_UB/AVAILABLE/TDX-1008102-120710//TOL119.pdf)
- Arenas, B. Lizarazo, N. Medina, M. & Rubiano, J. (2016). Áreas De Regiones Sombreadas Entre Polígonos Y Porciones Circulares. Programa de Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes.
- Artigue M, Douady R, Moreno L. (1995). Ingeniería Didáctica En Educación Matemática “Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas”. Editorial Iberoamericana, primera edición, julio de 1995.
- Báez, R. e Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL. “El Mácaro”. *Revista Enseñanza de la Matemática*, 12 al 16(número extraordinario), 67-87.
- Bohórquez, H. y Hernández, A. (2003). El razonamiento común: un obstáculo epistemológico en geometría. *Revista de Pedagogía*, 24, 7-37.
- Brousseau, G. (1982). Les objets de la didactique des mathématiques. Bourdeaux: IREM, p.1. Conferencia dictada en la Segunda Escuela de Verano sobre Didáctica de las Matemáticas que se realizó en Olivet (Orleans) entre el 5 y el 17 de julio de 1982.
- Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L. y Acosta, M. (2004). Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Colombia: Ministerio de Educación Nacional. Enlace Editores Ltda.
- Díaz, J. y Pedroza, D (2008). *Favorecer La Comprensión De Concepto Geométrico De Área A Través Del Trabajo Con Figuras Geométricas Planas Y Sus Propiedades En Atención A Los Estándares Curriculares Propuestos Por El Ministerio De Educación Nacional*.
- Duval, R. (1993). Semiosis y noesis. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Lecturas en didáctica de la matemática: Escuela Francesa* (pp. 118-144). México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.
- Duval, R. (1998). Representaciones gráficas: Funcionamiento y condiciones de su aprendizaje.
- Duval, R. (1999) *Semiosis y Pensamiento Humano: Registros semióticos y aprendizajes*

- intelectuales. (1ª. Ed. edición en español, Trad. Myriam Vega Restrepo). Cali: Peter Lang/ Universidad del Valle. [Original: Semiosis et pensée humaine. Bern:Peter Lang, 1995].
- Duval, R (2004) *Como hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas*. Traducción realizada por M<sup>a</sup> del Carmen Chamorro, Madrid España
- Duval, R. (2005). *Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría: desarrollo de la visualización, diferenciación de los razonamientos y coordinación de sus funcionamientos*. Traducción realizada por Jaime Humberto Romero Cruz, Doctorado Interinstitucional en Educación Universidad distrital Francisco José de Caldas, Bogotá (mayo 2008).
- Estrada, L. (2009). para jóvenes y adultos y la solución de un problema de área 1, 21(2008), 33-66.
- Fandiño, M. y D'Amore, B. (2009). Área y perímetro. Aspectos conceptuales y didácticos. Bogotá, Colombia: Magisterio.
- Flores, W. (2017). Aplicación De Recursos Didácticos Para La Mejora De La Competencia Actúa Y Piensa Matemáticamente En Situaciones De Forma En El Área De Matemática En Los Estudiantes Del Segundo Grado De Educación Secundaria De La Institución Educativa Daniel Becerra Ocam.
- Jaquet, F., 2000, 'Il conflitto área-perimetro', L'educazione Matematica, prima parte nel n. 2-giugno, 66-77, seconda parte nel n. 3-ottobre, 126-143.
- Jones, K. (2002). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. En L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics. Perspectives on practice* (pp. 121-139). London: Routledge Falmer.
- Galvis, J (2017). Identificación de las formas de aprehensión, desde la visualización de los registros figurales, el caso teorema de Pitágoras. Universidad Nacional de Colombia Sede Palmira.
- Gamboa, R.A. y Ballesteros, E.A. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare*, 14(2), 125-142.
- Goncalves, R. (2006, Enero-Junio). ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en la geometría? *Revista Ciencias de la Educación*, 1(27), 83-98.
- González, D. (2014). *Comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café (tesis de maestría)*. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. Recuperado el 17 de mayo de 2015, de: <http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/52/1/JC0874.pdf>
- Guzmán, M. de (2002): *La experiencia de descubrir en Geometría*. Edit. Nivola. Madrid.
- Luis, G.-P., Saúl Daniel, S.-G., Xu, T.-Y., Claudia Ivette, L.-J., & Jesús-Manuel, D. G. (2015). Acomodo de figuras irregulares en áreas irregulares para el corte de cuero. *Ingeniería, Investigación y Tecnología*, 16(1), 25-34. [https://doi.org/10.1016/S1405-7743\(15\)72104-9](https://doi.org/10.1016/S1405-7743(15)72104-9)
- Lukas Hernández. (2016). El color de la justicia.
- Marmolejo Avenía, G. A., & González Astudillo, M. T. (2015). El área de superficies planas en el campo de la educación matemática. Estado de la cuestión. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 10(1), 45-58. recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=273341286004>
- Marmolejo, G. A., & González, M. T. (2013). Visualización en el área de regiones poligonales. Una metodología de análisis de textos escolares. *Educación Matemática*, 25(3), 61-102.
- Marmolejo, G. A. (2007). *Algunos Tópicos a tener en cuenta en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras geométricas: Procesos de visualización y factores de*

- visibilidad*. Cali: Tesis de Maestría, Universidad del Valle.
- Men. (2006). Estandares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Documento tres, Revolución Educativa Colombia Aprende. pág. 86.
- Montis, A.M., Mallocci, P. y Polo, M. (2003). Congettura e argomentazione nella costruzione dei concetti di equiestensione e isoperimetria: un percorso didattico dalla prima alla quinta elementare. *L'educazione matematica*, 5(1), 1-12.
- Núñez, P. (2014). De la gráfica a la ecuación, la articulación de dos registros.
- Padilla, V. L. (1992). L'influence de une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques. These U.L.P: Strasbourg.
- Pontón, T. (2012). *Una propuesta multirregistro para la conceptualización inicial de las fracciones*. Tesis de Maestría, Universidad del Valle, Cali, Colombia. Texto tomado [www.ciaem-redumate.org](http://www.ciaem-redumate.org)
- Santa, Z., Londoño, R. y González, D. (2013). Comprensión de los conceptos de perímetro y área en el contexto de la agricultura del café. *Uni-pluri/versidad*, 13(3), 61-70. En <http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/unip/article/view/18619/159>
- Scheaffer, Richard L. Mendenhall, William; Ott, Lyman. *Elementos de Muestreo*. Editorial Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1986.
- Solivérez, E. (2009). *Del concepto intuitivo al concepto matemático de área*.

