Un estudio de las compactificaciones fibra a fibra

Juan Carlos Rocha Barriga

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia

2013

Un estudio de las compactificaciones fibra a fibra

Juan Carlos Rocha Barriga

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Maestría en Matemáticas

Director(a):
(Ph.D.) Clara Marina Neira Uribe

Línea de Investigación:
Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2013

A mi familia:

Por su apoyo y amor a lo largo de mi vida.

Agradecimientos

Agradezco de manera muy especial a mi directora Clara Marina Neira Uribe, sin su enorme sabiduría y paciencia este trabajo no hubiera sido posible. También agradezco a la profesora Ibeth Marcela Rubio Perilla, por la revisión del escrito final y aportar numerosas mejoras al mismo.

Resumen

Se estudia la extensión de los métodos de compactificación de Stone-Čech de la topología clásica al caso de la topología fibrada. En el primer capítulo se introducen los conceptos y resultados básicos de la topología fibrada. En el segundo capítulo se estudia el concepto de producto topológico parcial para después aplicarlo a la extensión del proceso de compactificación de Stone-Čech por medio de productos topológicos al ambito fibrado. Tambień se muestran propiedades de universalidad de la compactificación obtenida. En el tercer capítulo se estudian las ideas de b-z-conjunto y b-z-filtro, para después aplicarlas a la extensión del método de compactificación clásica por medio de cero conjuntos y z-filtros, al caso de la topología fibrada. Se muestran también propiedades de universalidad asociadas a la compactificación obtenida. Se señala que en el caso fibrado aun es incierta la coincidencia de los dos métodos de compactificación.

Palabras clave: Compactificación de Stone-Čech, topología fibrada, producto topológico parcial, filtro atado, b-z-conjunto, b-z-filtro.

Abstract

Extensions of the Stone-Čech compactification methods of classic topology to the case of fibrewise topology are studied. In the first chapter the basic ideas and results of fibrewise topology are introduced. In the second chapter the idea of partial topological product is studied and then applied to the extension to the fibrewise case of the Stone-Čech compactification method through topological products. Also, universal properties of the obtained compatification are exhibited. In the third chapter the ideas of b-z-set and b-z-filter are introduced, and then applied to the extension of the process of compatification through zero sets and z-filters to the case of fibrewise topology. Universal properties associated to the compatification obtained are shown. It is pointed out that in the fibrewise case, the equivalence of the two methods of compactification is not settled yet.

Keywords: Stone-Čech compactification , fibrewise topology, partial topological product, tied filter, b-z-set, b-z-filter.

Contenido

1 Introducción

La historia nos ha demostrado que el adoptar el punto de vista topológico para resolver problemas tiene muchas ventajas. Una de las ventajas más importantes de utilizar el lenguaje topológico se evidencia en el hecho que dentro de la categoría de los espacios topológicos podemos encapsular conjuntos con estructuras analíticas y algebraicas tan variadas como lo son los espacios métricos, los espacios uniformes, los grupos topológicos y las variedades. De esta manera se logra una gran uniformidad y claridad en la teoría, además de conseguir un ámbito en el cual la solución de un problema específico se puede lograr como solución de un problema más general, ampliando así el alcance de sus aplicaciones. De las muchas situaciones que ejemplifican este comportamiento, el problema de la compacidad es tal vez uno de las más representativos. La utilización de la compacidad permite resolver de manera muy elegante y bastante directa problemas en las más diversas ramas de la matemática. Ésto hace que sea natural querer trabajar siempre sobre espacios compactos. No obstante son raras las ocasiones en las que este ideal se cumple, muchos de los espacios que aparecen naturalmente no son compactos.

Ésto sugiere la necesidad de construir, a partir de un espacio dado, espacios compactos que sean de alguna manera minimales y tales que el espacio original se pueda considerar inmerso en este nuevo espacio compacto. Fue así que surgieron los procesos de compactificación. Los hay de varios tipos, desde los más sencillos como el de Alexandroff, pasando por el de Stone-Čech, hasta los más generales y elaborados como los de Wallman y Shannin.

Por otro lado, la necesidad de generalizar algunas construcciones y métodos de la topología general con la esperanza de encontrar nuevas direcciones de investigación o de reconocer nuevas propiedades escondidas, ha llevado al surgimiento de la topología fibrada. En esencia, la filosofía de la topología fibrada consiste en extender las ideas y métodos de la topología general, la topología de los espacios, a ideas y métodos que se apliquen a las funciones en general. Es decir, cuando trabajamos en la categoría de la topología general, **Top**, se consideran como objetos a los espacios topológicos y como morfismos entre los objetos a las funciones continuas entre estos espacios. En la categoría **Top** se busca describir a los objetos, los espacios topológicos, a la luz de diferentes propiedades internas y de distintos comportamientos que surgen al interactuar con los demás objetos de la categoría a través de los morfismos.

En el caso de la topología fibrada, los objetos son las funciones continuas entre espacios topológicos y los morfismos entre estos objetos son las funciones continuas compatibles con la estructura fibrada. Específicamente, se consideran como objetos todas las funciones continuas que van desde un espacio arbitrario y que tienen como codominio un espacio prefijado B y los morfismos entre dos objetos, $f : X \to B$ y $g : Y \to B$ son las funciones continuas $\lambda : X \to Y$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & B \end{tikzcd}$$

conmuta. Esta categoría se escribe normalmente como $\mathbf{Top_B}$. Una instancia importante, que guía de alguna manera el desarrollo de la topología fibrada, es el caso en el cual B es un espacio unitario. En este caso particular se cumple $\mathbf{Top}_B \cong \mathbf{Top}$. Es natural entonces preguntar qué forma adquiere el concepto de compacidad y cómo se pueden generalizar los métodos de compactificación clásicos al caso de esta categoría más general.
En lo que respecta al primer interrogante, se ha visto que para $\mathbf{Top_B}$ el concepto de función perfecta es el que más se ajusta al papel que cumplen los espacios compactos en la topología general. Una función perfecta de X en B es una función continua cerrada y con fibras, $f^{-1}(b)$, compactas para cada $b \in B$. Algunas de las muchas propiedades que hacen de las funciones perfectas la contra-parte fibrada ideal de la compacidad clásica son:

- El producto arbitrario de una familia de funciones es perfecto si y solo si cada una de las funciones de la familia es perfecta. ([4, 3.7.9])

- $f : X \to Y$ es perfecta si y solo si para cada $g : Z \to Y$ la función $\pi_2 : X \times_Y Z \to Z$ es cerrada. ([10, 4.3.2])

La primera propiedad es básicamente la extensión del teorema de Tychonoff al caso fibrado. La segunda propiedad representa la versión fibrada de la caracterización de Kuratowski-Mrówka de los espacios compactos.
El presente trabajo pretende abordar la respuesta a la segunda pregunta: ¿cómo se pueden generalizar los métodos de compactificación a la topología fibrada? Los estudios enfocados en esta dirección fueron considerados inicialmente por Whyburn [17, 18], Dickman [3] y Cain [1]. Después la escuela rusa encabezada por Pasynkov [13, 14, 15] se encargaría de hacer un estudio más sistemático, introduciendo nociones fundamentales como los axiomas de separación en su versión fibrada y aplicarlos al problema de "perfectificación". Una de las herramientas más importantes introducidas por Pasynkov fue la de producto parcial, con éste se buscó reproducir el método clásico de compactificación de hacer una inmersión de un espacio X en $\Pi_{f\in C^*} I_f$, donde C^* es el conjunto de todas las funciones continuas y acotadas de X en $\mathbb{R}$. Recientemente Nordo [11, 12] ha estudiado compactificaciones fibradas de Hausdorff obteniendo caracterizaciones muy similares a las de la compactificación de

Tychonoff obtenida por Pasynkov. En el capítulo 2 se desarrolla detalladamente el proceso de compactificación obtenido por medio de estas herramientas.
De manera independiente James [6], trabajó el problema de la compactificación fibrada utilizando como herramienta el concepto de filtro atado, en este caso tratando de extender el método clásico de compactificación de Wallman. En el capítulo 3 se propone un método de compactificación fibrada, que pretende extender el proceso clásico de compactificación por medio de z-conjuntos y z-filtros. Cabe anotar que esta es la primera vez que este problema es abordado en la literatura.

2 Topología fibrada básica

2.1. Definiciones y propiedades elementales

La categoría sobre la cual trabaja la topología general se denota **Top**, los objetos de **Top** son los espacios topológicos y los morfismos entre dos objetos X y Y son todas las funciones continuas de X en Y. Por otro lado, en la topología fibrada se trabaja con funciones continuas de un espacio topológico arbitrario en un espacio topológico fijo, el cual se llama el espacio base, es decir, desde un punto de vista categórico, los objetos son funciones continuas con un codominio común. Ahora si consideramos dos objetos arbitrarios, $f : X \to B$ y $g : Y \to B$, los morfismos de f en g son las funciones continuas $\lambda : X \to Y$, tales que $g \circ \lambda = f$, o en términos categóricos, las funciones continuas $\lambda : X \to Y$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Abusando de la notación escribiremos $\lambda : f \to g$. Esta categoría se denota $\mathbf{Top_B}$.
Se extienden ahora algunas definiciones propias de **Top** a $\mathbf{Top_B}$. Se verá a lo largo del trabajo que algunas de estas extensiones son bastante naturales mientras que algunas otras no son tan evidentes. Las definiciones y resultados de este capítulo se basan esencialmente en [6], [10] y [11]

Definición 1. *Dados $f : X \to B$, $g : Y \to B$ y $\lambda : f \to g$ decimos que λ es sobreyectiva si $\lambda(X) = Y$.*

En el caso de un morfismo sobreyectivo $\lambda : f \to g$, decimos que g es imagen de f.

Definición 2. *Dados $f : X \to B$, $g : Y \to B$ y $\lambda : f \to g$ decimos que λ es denso si $\lambda(X)$ es denso en Y.*
Dados $f : X \to B$ y $g : Y \to B$ decimos que $\lambda : f \to g$ es un homeomorfismo si $\lambda : X \to Y$ es un homeomorfismo en el sentido usual.

Dados $f : X \to B$ y $g : Y \to B$ decimos que el morfismo $\lambda : f \to g$ es una inmersión si $\lambda : X \to Y$ es una inmersión en el sentido usual.
Dado $f : X \to B$ diremos que $g : Y \to B$ es una extensión fibrada de f si existe una inmersión densa $\lambda : f \to g$.
Dadas $h : Z \to B$ y $g : Y \to B$ dos extensiones de $f : X \to B$ diremos que $\lambda : g \to h$ es un morfismo canónico si $\lambda|_X = id_X$. (Aquí estamos identificando X con su imagen homeomorfa tanto en Y como en Z)

Ejemplo 1. *Sean $X = \mathbb{Z}^+$ con la topología usual, $Y = \mathbb{R}$ con la topología de colas a derecha y $B = \{a, b\}$ con la topología grosera. Definimos las funciones $f : X \to B$ y $g : Y \to B$ como $f(x) = b$, $g(y) = a$ si $y \leq 0$ y $g(y) = b$ en otro caso. Es claro que tanto f como g son funciones continuas. Ahora si definimos $\lambda : f \to g$ como $\lambda(x) = x$, obtenemos un morfismo en $\mathbf{Top_B}$, más aún podemos asegurar que λ una función densa, pues $\overline{\lambda(\mathbb{N})} = \mathbb{R}$.*

Ejemplo 2. *Sean $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ y $Y = \{y \in \mathbb{R}^3 : \|y\| \leq 1\}$, con la topología de subespacio. Se definen las funciones $f : X \to \mathbb{R}$ y $g : Y \to \mathbb{R}$ como $f(x) = \|x\|$ y $g(y) = \|y\|$. Es bien conocido que tanto f como g son funciones continuas. Ahora definiendo $\lambda : f \to g$, como $\lambda(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0)$, se obtiene un morfismo en $\mathbf{Top}_{\mathbb{R}}$. De hecho se tiene que λ es una inmersión fibrada.*

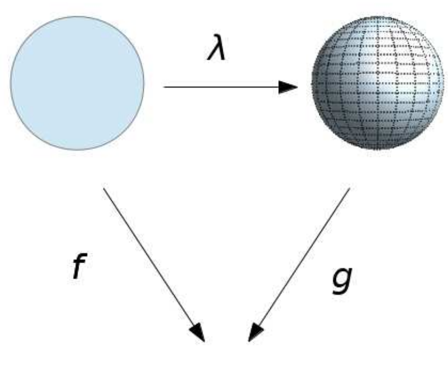


Figura **2-1**

Ejemplo 3. *Sean $X = \mathbb{Q}^2$ y $Y = \mathbb{R}^2$, donde Y tiene la topología usual y X tiene la topología de subespacio. Se definen las funciones $f : X \to \mathbb{R}$ y $g : Y \to \mathbb{R}$ como $f((x_1, x_2) = x_1 + x_2$ y $g((y_1, y_2)) = y_1 + y_2$. Las funciones f y g son claramente funciones continuas. Si se define $\lambda : f \to g$, como $\lambda(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$, se obtiene un morfismo en $\mathbf{Top}_{\mathbb{R}}$. El morfismo λ es una instancia sencilla de una inmersión fibrada densa, es decir, g es una extensión de f.*

Los axiomas de separación se generalizan a $\mathbf{Top_B}$ de la siguiente manera.

Definición 3. *Dada $f : X \to B$ diremos que f es T_0 si para cada $x \neq x'$ en X con $f(x) = f(x')$, existe una vecindad de x en X que no contiene a x' o una vecindad de x' en X que no contiene a x.*
Dada $f : X \to B$ diremos que f es T_1 si para cada $x \neq x'$ en X con $f(x) = f(x')$, existe una vecindad de x en X que no contiene a x' y una vecindad de x' en X que no contiene a x.
Dada $f : X \to B$ diremos que f es T_2 si para cada $x \neq x'$ en X con $f(x) = f(x')$, existen una vecindad O de x y una vecindad Q de x' tales que $O \cap Q = \emptyset$.

Alternativamente se dice también que la función $f : X \to B$ es T_0 fibra a fibra, T_1 fibra a fibra o T_2 fibra a fibra, según sea el caso. Es de observar que, como en el caso de la topología general, se tienen las siguientes contenencias: Toda función T_2 fibra a fibra es T_1 fibra a fibra y a su vez cada función T_1 fibra a fibra es T_0 fibra a fibra.

Ejemplo 4. *Si $f : X \to B$ es un objeto de $\mathbf{Top_B}$ y X es un espacio T_i, entonces f es una función T_i.*

Ejemplo 5. *Sea el espacio topológico X definido como la suma topológica de los espacios $X_1 = \mathbb{R}$ con la topología usual y $X_2 = \mathbb{R}$ con la topología de colas a derecha. Se define $f : X \to B$ como $f(x) = x$, donde $B = \mathbb{R}$ con la topología de colas a derecha.*

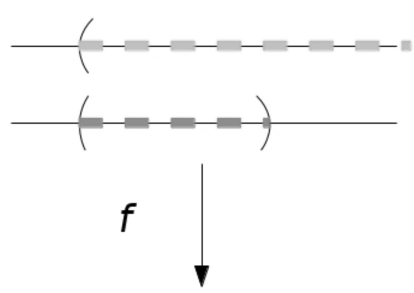


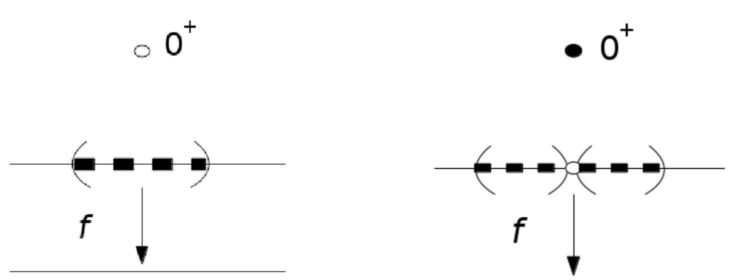
Figura **2-2**: Conjunto abierto típico de X

La función f es una función T_0, T_1 y T_2, a pesar que X_2 no es ni siquiera un espacio T_1. En efecto, para cada $b \in B$, la fibra $X_b = f^{-1}(b)$ está dada por $X_b = \{x_1, x_2\}$, con $x_1 = b = x_2$ y $x_1 \in X_1$ y $x_2 \in X_2$, al tomar como vecindad de x_1 cualquier vecindad contenida en X_1 y como vecindad de x_2 a todo X_2, obtenemos un par de vecindades disjuntas.

Ejemplo 6. *Sea $X = \mathbb{R} \cup \{0^+\}$ el conjunto con la topología definida de la siguiente manera: si $x \in \mathbb{R}$, los conjuntos $(x-\epsilon, x+\epsilon)$, con $0 < \epsilon$, forman un sistema fundamental de vecindades para x; si $x = 0^+$, los conjuntos $(-\epsilon, \epsilon) \cup \{0^+\}$, con $0 < \epsilon$, forman un sistema fundamental de vecindades para 0^+. Se define $f : X \to \mathbb{R}$, donde el codominio tiene la topología usual, como $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{R}$ y $f(0^+) = 0$. La función f es un objeto de $\mathbf{Top}_{\mathbb{R}}$. Se tiene también que f es tipo T_0, pues para $b \neq 0$ se tiene que $X_b = \{b\}$, luego se cumple la condición de separación trivialmente para estas fibras. Por otro lado, para $b = 0$ se tiene que $X_b = \{0, 0^+\}$ y se puede ver que el conjunto abierto $(-1, 1) \subseteq X$ cumple la condición $0 \in (-1, 1)$ y $0^+ \notin (-1, 1)$. Afirmamos que la función f no es de tipo T_1, pues para $X_0 = \{0, 0^+\}$, se tiene que toda vecindad de 0^+ contiene también a 0 como elemento.*

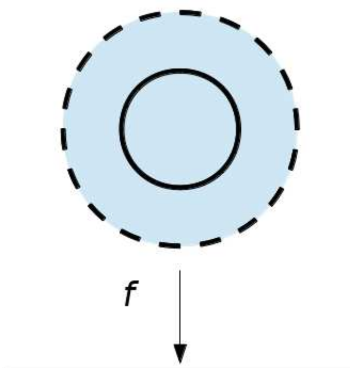
(a) Vecindad típica de 0 (b) Vecindad típica de 0^+

Ejemplo 7. *Hace falta muy poco en el ejemplo anterior para obtener una función T_1. De hecho, si se cambia el sistema fundamental de vecindades de 0^+, por la familia de conjuntos de la forma $(-\epsilon, 0) \cup (0, \epsilon) \cup \{0^+\}$, con $0 < \epsilon$, se obtiene una topología para X y la función f sigue siendo continua. Ahora bien, para esta función se tiene que $X_0 = \{0, 0^+\}$ y los conjuntos $(-\epsilon, \epsilon)$, $(-\epsilon, 0) \cup (0, \epsilon) \cup \{0^+\}$ son vecindades abiertas de 0 y 0^+, respectivamente, que cumplen la propiedad T_1. De igual manera se puede ver que esta función no es una función T_2, pues los elementos de X_0 no pueden ser separados por vecindades disyuntas.*

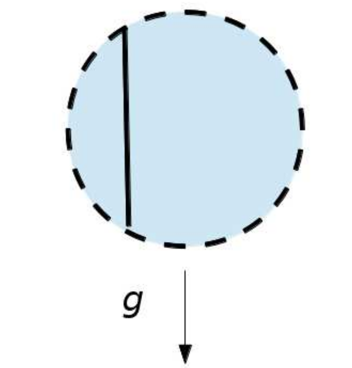


(c) Vecindad típica de 0 (d) Vecindad típica de 0^+

Ejemplo 8. *Sean* $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$*,* $f : X \to \mathbb{R}$ *definida como* $f(x) = \|x\|$ *y* $g : X \to \mathbb{R}$ *definida como* $g(x_1, x_2) = x_1$*, donde* X *y* $\mathbb{R}$ *tienen las topologías usuales. Para cada* $b \in \mathbb{R}$ *se tiene que* $f^{-1}(b) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = b\}$*, caso* $b \in [0, 1)$ *y* $f^{-1}(b) = \emptyset$ *caso* $b \in \mathbb{R} \setminus [0, 1)$*, mientras que para* g *se tiene que* $g^{-1}(b) = \{(b, y) \in \mathbb{R} : y^2 < 1 - b^2\}$ *caso* $|b| < 1$ *y* $g^{-1}(b) = \emptyset$ *caso* $1 \leq |b|$*. Como se mencionó en el ejemplo 4 ambas funciones son* T_2*, pues en cualquiera de los dos casos la topología del dominio es la misma.*



(e) Fibra típica de f



(f) Fibra típica de g

Una de las características más importantes de adoptar el punto de vista fibrado es que la topología general se puede ver como un caso particular de la topología fibrada, específicamente cuando consideramos el espacio base B como un conjunto unitario se tiene que $\mathbf{Top} = \mathbf{Top_B}$. Esta relación forma uno de los ejes centrales de desarrollo de la topología fibrada.

Proposición 1. *Sean* $f : X \to B$*,* $g : Y \to B$ *y* $\lambda : f \to g$*. Si* f *es* T_i*,* $i = 0, 1, 2$ *entonces* λ *también lo es.*

Demostración. Sean $x \neq x'$ en X, con $\lambda(x) = \lambda(x')$, como $f(x) = g \circ \lambda(x) = g \circ \lambda(x') = f(x')$ y f es T_i entonces:

- si $i = 0$ existe una vecindad de x que no contiene a x' o existe una vecindad de x' que no contiene a x.
- si $i = 1$ existen una vecindad de x que no contiene a x' y existe una vecindad de x' que no contiene a x.
- si $i = 2$ existen vecindades disyuntas de x y de x'.

Luego λ es T_i. □

Proposición 2. *Dadas $f : X \to B$, $g : Y \to B$ y $\lambda, \theta : f \to g$. Si $\lambda(x) = \theta(x)$ para todo x en un subconjunto denso $A \subseteq X$ y g es T_2 entonces $\lambda = \theta$.*

Demostración. Supongamos que existe $x \in X$ tal que $\lambda(x) \neq \theta(x)$. Por definición, es claro que $g \circ \lambda(x) = f(x) = g \circ \theta(x)$ y como g es T_2 entonces existen vecindades disyuntas de $\lambda(x)$ y $\theta(x)$ en Y, denótense por O y Q, respectivamente. Por la continuidad de λ y θ tenemos que $\lambda^{-1}(O)$ y $\theta^{-1}(Q)$ son vecindades de x. La densidad de A nos asegura que existe $x' \in \lambda^{-1}(O) \cap \theta^{-1}(Q) \cap A$, luego $\lambda(x') = \theta(x')$, es decir, $\lambda(x') \in O \cap Q$, pero esto es una contradicción, luego no es cierto que exista $x \in X$ con $\lambda(x) \neq \theta(x)$. □

Definición 4. *Dada $f : X \to B$ y $X' \subseteq X$, la restricción de f a X', $f|_{X'} : X' \to B$ se llama una subfunción de f.*
Si X' es un subconjunto cerrado de X a $f|_{X'}$ se le llama una subfunción cerrada de f y si X' es un subconjunto abierto de X a $f|_{X'}$ se le llama una subfunción abierta de f.

Proposición 3. *Sea $f : X \to B$ una función continua. Se tiene que f es una función cerrada si y solo si para cada $b \in B$ y cada vecindad abierta O de la fibra X_b, existe una vecindad abierta W de b, tal que $X_W \subseteq O$.*

Demostración.

- $\Rightarrow$ Sean $b \in B$ y O una vecindad abierta de X_b, entonces $b \notin \overline{f(X \setminus O)}$, luego existe una vecindad abierta W de b tal que $W \subseteq B \setminus \overline{f(X \setminus O)}$. Entonces $X_W \subseteq O$.
- $\Leftarrow$ Si F es un subconjunto cerrado de X y $b \notin f(F)$, entonces $X \setminus F$ es una vecindad abierta de X_b. Si W es una vecindad abierta de b, tal que $X_W \subseteq X \setminus F$, entonces $W \subseteq B \setminus f(F)$, es decir, f es una aplicación cerrada.

□

Como es de esperarse se tienen las siguientes propiedades:

Proposición 4. *Toda subfunción de una función T_i es de tipo T_i con $i = 0, 1, 2$.*

Demostración. Sean $f : X \to B$, $X' \subseteq X$ y $x, x' \in X'$ con $x \neq x'$ y $f(x) = f(x')$.

- Si $i = 0$, entonces existe una vecindad de x en X que no contiene a x' o existe una vecindad de x' en X que no contiene a x. Como las vecindades de $x \in X'$ son de la forma $X' \cap O$ con O vecindad de x en X se tiene que existe una vecindad de x en X' que no contiene a x' o existe una vecindad de x' en X' que no contiene a x.

- Si $i = 1$ entonces existe una vecindad de x en X que no contiene a x' y existe una vecindad de x' en X que no contiene a x. Puesto que las vecindades de $x \in X'$ son de la forma $X' \cap O$ con O vecindad de x en X se concluye que existe una vecindad de x en X' que no contiene a x' y existe una vecindad de x' en X' que no contiene a x.

- Si $i = 2$ entonces existen vecindades disyuntas de x y x' en X. Dado que las vecindades de $x \in X'$ son de la forma $X' \cap O$ con O vecindad de x en X se tiene que existen vecindades disyuntas de x y x' en X'.

□

La regularidad completa de una función continua se define de la siguiente manera

Definición 5. *Decimos que una función $f : X \to B$ es completamente regular si para cada subconjunto cerrado $F \subseteq X$ y cada $x \in X \setminus F$ existen una vecindad W de $f(x)$ en B y una función continua $s : X_W \to [0, 1]$ tales que $s(x) = 1$ y $s(F \cap X_W) \subseteq \{0\}$.*

Como en el caso de los otros axiomas de separación, a una función completamente regular también se le llama función completamente regular fibra a fibra. En esta definición se puede ver que la atención se desplaza del comportamiento sobre fibras individuales al comportamiento sobre franjas.
Completamos el conjunto de axiomas de separación que utilizaremos a lo largo del trabajo con la siguiente definición

Definición 6. *Decimos que una función $f : X \to B$ es de Tychonoff si f es una función completamente regular y de tipo T_o.*

Ejemplo 9. *Como en el caso de las propiedades T_0, T_1 y T_2, si $f : X \to B$ es un objeto de* $\mathbf{Top_B}$ *y X es un espacio completamente regular (de Tychonoff) entonces f es una función completamente regular (de Tychonoff).*

Ejemplo 10. *Si consideramos los ejemplos 6 y 7, se ve que en ambos casos $\{0^+\}$ es un conjunto cerrado y claramente $0 \notin \{0^+\}$. No obstante, no existen una vecindad abierta W de 0 y una función continua $s : X_W \to [0, 1]$ tales que $s(0) = 0$ y $s(0^+) = 1$, pues para una tal función los conjuntos $s^{-1}([0, 1/3))$ y $s^{-1}((2/3, 1])$ serían vecindades abiertas disyuntas en X_W de 0 y 0^+, respectivamente. Pero por los ejemplos 6 y 7 esto es imposible.*

Proposición 5. *Toda función de Tychonoff es una función de tipo T_2.*

Demostración. Sea $f : X \to B$ una función de Tychonoff y $x \neq x'$ dos elementos de X tales que $f(x) = f(x')$. Como f es una función tipo T_0, suponemos sin perdida de generalidad, que existe una vecindad abierta O de x tal que $x' \notin O$. Luego existen una vecindad W de $f(x)$ en B y una función continua $s : X_W \to [0, 1]$ tales que $s(x) = 1$ y $s((X \setminus O) \cap X_W) \subseteq \{0\}$, ésto producto de la propiedad de completa regularidad de f. Ahora, como $x' \in (X \setminus O) \cap X_W$, se tiene que $s(x') = 0$, luego si consideramos los conjuntos $R = s^{-1}([0, 1/3))$ y $Q = s^{-1}((2/3, 1])$, es claro que $x \in Q$, $x' \in R$ y $Q \cap R = \emptyset$. Observamos también que tanto R como Q son conjuntos abiertos, gracias a la continuidad de s. Concluimos entonces que f es una función tipo T_2. □

Proposición 6. *Toda subfunción de una función completamente regular (Tychonoff) es también completamente regular (Tychonoff).*

Demostración. Sean $f : X \to B$ una función completamente regular (Tychonoff), $X' \subseteq X$ y $f|_{X'} : X' \to B$ la restricción de f a X'. Si $F \subseteq X'$ es un subconjunto cerrado de X' y $x \in X' \setminus F$ entonces, como X' tiene la topología heredada de X, el conjunto F es de la forma $F = E \cap X'$, con E un subconjunto cerrado de X y $x \in X \setminus E$. Entonces existen una vecindad W de $f(x)$ y una función $s : X_W \to [0, 1]$ tales que $s(x) = 1$ y $s(X_W \cap E) \subseteq \{0\}$, pues f es una función completamente regular. La restricción de s a $X' \cap X_W$ también es continua y $s|_{X' \cap X_w} : X' \cap X_W \to [0, 1]$ satisface $s|_{X' \cap X_w}(x) = 1$ y $s|_{X' \cap X_w}(F) \subseteq \{0\}$. Nótese la relación $X' \cap X_W = X'_W$. Concluimos que $f|_{X'}$ es completamente regular.
Por último, si además de ser f completamente regular es de tipo T_0, la Proposición 4 nos dice que $f|_{X'}$ es también de tipo T_0. □

Proposición 7. *Si B es un espacio topológico de Tychonoff y $f : X \to B$ es una función de Tychonoff entonces X es un espacio topológico de Tychonoff.*

Demostración. Sean F un subconjunto cerrado de X y $a \in X \setminus F$. Puesto que la función f es de Tychonoff, existen una vecindad abierta W de $f(a)$ y una función continua $s : X_W \to [0, 1]$, tales que $s(a) = 1$ y $s(F \cap X_W) \subseteq \{0\}$. Ahora si consideramos $f(a)$ y el conjunto cerrado $B \setminus W$, es claro que $f(a) \notin B \setminus W$, luego existe una función $r : B \to [0, 1]$, tales que $r(f(a)) = 1$ y $r(B \setminus W) \subseteq \{0\}$, pues B es un espacio topológico de Tychonoff.
Definimos $h : X \to [0, 1]$ por:

$$h(x) = \begin{cases} c(x) * r(f(x)) & x \in X_W \\ 0 & x \in X \setminus X_W. \end{cases}$$

Se tiene que $h(a) = s(a) * r(f(a)) = 1$ y $h(F) \subseteq \{0\}$, pues si $x \in F$, o bien $x \in F \cap X_W$ en cuyo caso $h(x) = s(x) * r(f(x)) = 0 * r(f(x)) = 0$, o bien $x \in F \setminus X_W$ en cuyo caso $h(x) = 0$. Afirmamos que $h : X \to [0, 1]$ es continua. En efecto, sea A un subconjunto abierto de $[0, 1]$ y $x \in h^{-1}(A)$. Se pueden dar dos casos $h(x) \neq 0$ ó $h(x) = 0$. En el primer caso se tiene que

$x \in X_W$, por lo tanto se puede considerar la restricción de h a X_W, que es la composición de dos funciones continuas, de donde $h|_{X_W}$ es continua. Por lo tanto existe una vecindad abierta O de x en X_W, y por lo tanto abierta en todo X, tal que $h(O) \subseteq A$. En el caso que $h(x) = 0$, existe un $0 < c \leq 1$, tal que $[0, c) \subseteq A$. Se define el conjunto $O = f^{-1}(r^{-1}([0, c)))$. Observamos que O es un subconjunto abierto de X, dado que f y r son continuas, y tal que $x \in O$. Ahora, se cumple que $h(O) \subseteq [0, c)$, pues si $x' \in O$ se presentan dos casos, o bien $x' \in O \cap (X \setminus X_W)$ o bien $x' \in O \setminus (X \setminus X_W)$. En el primer caso $h(x') = 0$. En el segundo caso se cumple que $0 \leq r(f(x')) < c$ y $0 \leq s(x') \leq 1$, por lo tanto $0 \leq s(x') * r(f(x')) < c$.
□

Definición 7. *Sea $\{g_\alpha : X_\alpha \to B\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de funciones continuas con codominio común. Definimos el producto fibrado $\Pi_B X_\alpha$ de la familia $\{g_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ como el subespacio del producto cartesiano ΠX_α, cuyos elementos satisfacen la condición*

$$x \in \Pi_B X_\alpha \iff g_\alpha(\pi_\alpha(x)) = g_\gamma(\pi_\gamma(x))$$

para cada par α, $\gamma \in \Lambda$.

Dotamos al espacio $\Pi_B X_\alpha$ de la topología heredada de ΠX_α. Adicionalmente definimos $p : \Pi_B X_\alpha \to B$ por $g_\alpha(\pi_\alpha(x))$, para un $\alpha \in \Lambda$. Se puede ver que está función esta bien definida y es continua, pues g_α y π_α son funciones continuas.
Veremos ahora que las propiedades de separación se conservan también por productos fibrados.

Proposición 8. *Sea $\{g_\alpha : X_\alpha \to B\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de funciones continuas con codominio común, cuyo producto fibrado es no vacío. Si $g_\alpha : X_\alpha \to B$ es una función de tipo T_i para cada $\alpha \in \Lambda$ entonces el producto fibrado de la familia $\{g_\alpha : X_\alpha \to B\}_{\alpha\in\Lambda}$ también es de tipo T_i.*

Demostración. Sean $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \neq \{z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ dos elementos de $\prod_B X_\alpha$ tales que $p(\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}) = p(\{z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$, donde $p : \prod_B X_\lambda \to B$ es la función inducida por la familia $\{g_\alpha : X_\alpha \to B\}_{\alpha\in\Lambda}$. Dado que $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \neq \{z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $x_\alpha \neq z_\alpha$ y $g_\alpha(x_\alpha) = g_\alpha(z_\alpha)$.

T_0). Como $g_\alpha : X_\alpha \to B$ es una función tipo T_0, existe, sin pérdida de generalidad, un conjunto abierto O_α en X_α, tal que $x_\alpha \in O_\alpha$ y $z_\alpha \notin O_\alpha$. Ahora el conjunto $Q = \pi_\alpha^{-1}(O_\alpha) \cap \prod_B X_\alpha$ es una vecindad básica de $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, tal que $\{z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \notin Q$, es decir, $p : \prod_B X_\alpha \to B$ es una función de tipo T_0.

T_1.) Dado que $g_\alpha : X_\alpha \to B$ es de tipo T_1, existen vecindades O y Q de x_α y z_α, respectivamente, tales que $z \notin O$, $x \notin Q$. Si consideramos los conjuntos $O' = \pi_\alpha^{-1}(O) \cap \prod_B X_\alpha$ y $Q' = \pi_\alpha^{-1}(Q) \cap \prod_B X_\alpha$, vemos que éstos forman vecindades básicas de $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y $\{z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, respectivamente, tales que $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \notin Q'$ y $\{z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \notin O'$. Concluimos que $p : \prod_B X_\alpha \to B$ es una función de tipo T_1.

T_2.) Como $g_\alpha : X_\alpha \to B$ es una función de tipo T_2, existen subconjuntos de X_α abiertos disjuntos O y Q tales que $x_\alpha \in O$ y $z_\alpha \in Q$. Se consideran entonces las vecindades básicas de $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y $\{z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, dadas por $O' = \pi_\alpha^{-1}(O) \cap \prod_B X_\alpha$ y $Q' = \pi_\alpha^{-1}(Q) \cap \prod_B X_\alpha$, respectivamente.
Se tiene que $O' \cap Q' = \emptyset$, pues de lo contrario si $\{y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in O' \cap Q'$ entonces $\pi_\alpha(\{y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}) \in O \cap Q = \emptyset$, una contradicción. Concluimos entonces que $p : \prod_B X_\alpha \to B$ es una función de tipo T_2.

$\square$

Proposición 9. *Sea $\{g_\alpha : X_\alpha \to B\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de funciones continuas con codominio común, cuyo producto fibrado es no vacío. Si $g_\alpha : X_\alpha \to B$ es una función completamente regular (de Tychonoff) para cada $\alpha \in \Lambda$ entonces el producto fibrado de la familia $\{g_\alpha : X_\alpha \to B\}_{\alpha\in\Lambda}$ también es una función completamente regular (de Tychonoff).*

Demostración. Sean $F \subseteq \prod_B X_\alpha$ un conjunto cerrado y $x = \{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in \prod_B X_\alpha$, tales que $x \notin F$. Existe una familia finita $\{O_i\}_i$, con O_i un subconjunto abierto de X_{α_i}, tal que $x \in \cap_i \pi_{\alpha_i}^{-1}(O_i) \subseteq (\prod_B X_\alpha) \setminus F$. Es claro que $x_{\alpha_i} \in O_i$ para cada $i = 1, 2, .., n$ y puesto que cada $g_{\alpha_i} : X_{\alpha_i} \to B$ es completamente regular entonces existen vecindades W_i de $g_{\alpha_i}(x_{\alpha_i})$ en B y funciones $s_i : (X_{\alpha_i})_{W_i} \to [0,1]$ tales que $s_i(x_{\alpha_i}) = 1$ y $s_i((X_{\alpha_i})_{W_i} \cap (X_{\alpha_i} \setminus O_i)) \subseteq \{0\}$. Si consideramos $W = \cap_i W_i$, tenemos que W es un conjunto abierto de B con $g_{\alpha_i}(x_{\alpha_i}) = p(x) \in W$, donde $p : \prod_B X_\alpha \to B$ es la función inducida por la familia $\{g_\alpha : X_\alpha \to B\}_{\alpha\in\Lambda}$. Definimos las funciones $r_i = s_i \circ \pi_{\alpha_i} : p^{-1}(W) \to [0,1]$ y consideramos la función $r : p^{-1}(W) \to [0,1]$ definida como $r(x) = min\{r_i(x) : i = 1, 2, ..., n\}$. Observamos que r es continua, pues cada una de las r_i es continua. Ahora la función r cumple $r(x) = 1$, pues para cada i se tiene que $r_i(x) = 1$, además si $z \in p^{-1}(W) \setminus \cap_i \pi_{\alpha_i}^{-1}(O_i)$ entonces existe i tal que $\pi_{\alpha_i}(z) \notin O_i$ y $\pi_{\alpha_i}(z) \in g_i^{-1}(W)$, luego $r_i(z) = s_i(\pi_{\alpha_i}(z)) = 0$ y $r(z) = 0$. Por otro lado tenemos que $F \cap p^{-1}(W) \subseteq p^{-1}(W) \setminus (\cap_i \pi_{\alpha_i}^{-1}(O_i))$, luego $r(F \cap p^{-1}(W)) \subseteq \{0\}$, es decir, $p : \prod_B X_\alpha \to B$ es una función completamente regular.
Finalmente, si además de ser completamente regular, cada $g_\alpha : X_\alpha \to B$ es una función de tipo T_0, la Proposición 8 nos permite decir que $p : \prod_B X_\alpha \to B$ también es de Tychonoff. $\square$

2.2. Compacidad

Definición 8. *Dada una función continua $f : X \to B$, diremos que f es compacta si f es una función perfecta, esto es, f es una función cerrada y $f^{-1}(b)$ es compacto para cada $b \in B$.*

Como en el caso de los axiomas de separación diremos alternativamente que la función $f : X \to B$ es compacta fibra a fibra.

Las funciones compactas fibra a fibra gozan de un conjunto de propiedades similares a las de los espacios compactos de la topología general, a continuación detallamos algunas de ellas.

Proposición 10. *Toda imagen de una función compacta $f : X \to B$ por un morfismo de* $\mathbf{Top_B}$ *es compacta.*

Demostración. Sean $f : X \to B$ una función compacta y $\lambda : f \to g$ un morfismo sobreyectivo de f en $g : Y \to B$.

Si $w, z \in Y$ son tales que $g(w) = g(z)$, entonces $w = \lambda(x)$ y $z = \lambda(x')$, para algún par x, $x' \in X$. Luego $f(x) = g(\lambda(x)) = g(w) = g(z) = g(\lambda(x')) = f(x')$, es decir, w y z son imágenes de elementos en la misma fibra por f. Luego cada fibra en g es imagen de una fibra en f. Ahora, como cada fibra en f es compacta y λ es continua, se tiene que las fibras en $\lambda(X)$ son compactas.

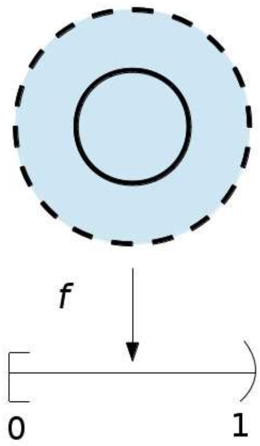
La función g es cerrada. Pues si $F \subseteq Y$ es un conjunto cerrado entonces $\lambda^{-1}(F)$ es un conjunto cerrado en X. Ahora, $f(\lambda^{-1}(F))$ es un conjunto cerrado, ya que f es una función cerrada, y $\lambda(\lambda^{-1}(F)) = F$, por sobreyectividad de λ. Luego $f(\lambda^{-1}(F)) = g(\lambda(\lambda^{-1}(F))) = g(F)$ es un conjunto cerrado.

□

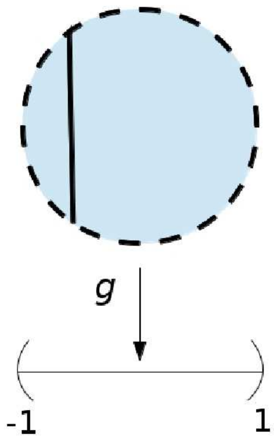
Ejemplo 11. *Si consideramos el espacio $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$ del ejemplo 8 y las funciones $f : X \to [0, 1)$ y $g : X \to (-1, 1)$ definidas como $f(x) = \|x\|$ y $g(x_1, x_2) = x_1$, tenemos que f es compacta y g no lo es. En efecto, para cada $b \in (-1, 1)$ el conjunto $g^{-1}(b)$ no es compacto, pues éste es homeomorfo a $(0, 1)$.*

Por otro lado, para cada $b \in [0, 1)$ se puede ver que $f^{-1}(b)$ es un conjunto compacto, pues se puede identificar con $\mathbb{S}^1$ o con un punto, caso $b > 0$ o $b = 0$, respectivamente. Falta pues comprobar que f es una función cerrada. Utilizamos la Proposición 3. Si O es una vecindad abierta de la fibra $f^{-1}(b)$, con $b \in [0, 1)$, entonces el conjunto $F = X \setminus O$ es cerrado y $f^{-1}(b) \bigcap F = \emptyset$. Como $f^{-1}(b)$ es compacto, existe $\nu > 0$ tal que para todo $z \in F$ y todo $x \in f^{-1}(b)$ se cumple $\|z - x\| > \nu$. En efecto, supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ existen $z_n \in F$ y $x_n \in f^{-1}(b)$ tales que $\|z_n - x_n\| < 1/n$. Por compacidad de $f^{-1}(b)$, existe una subsucesión de $\{x_n\}$, digamos $\{x_{n_k}\}$, convergente a un $p \in f^{-1}(b)$. Luego $\|p - z_{n_k}\| \leq \|p - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - z_{n_k}\|$ y puesto que $\|p - x_{n_k}\| \to 0$, $\|z_{n_k} - x_{n_k}\| \to 0$ cuando $k \to \infty$, se concluye que $\{z_{n_k}\} \to p$. Como F es cerrado, se tiene que p está en F, una contradicción.

Afirmamos que $f^{-1}(b - \nu, b + \nu) \subseteq O$. Si $x \in X \setminus O$ entonces $\|x - (b * x/\|x\|)\|$ es la mínima distancia de x a un punto de $f^{-1}(b)$, por lo tanto $\nu \leq \|x - (b * x/\|x\|)\|$, es decir, $b + \nu \leq \|x\|$ o $\|x\| \leq b - \nu$. Concluimos que $x \notin f^{-1}(b - \nu, b + \nu)$.



(g) La función f es compacta



(h) La función g no es compacta

Es de notar que si se considera la función f obtenida al cambiar $[0,1)$ por $[0,1]$, se tendrá una función que no es cerrada. Para ver ésto basta considerar $f^{-1}(1) = \emptyset$ y la vecindad de $\emptyset$ dada por $\{x : \|x\| < 1/2\}$. Es claro que para toda vecindad W de 1 en $[0,1]$ existe $x \in X_W$ tal que $\|x\| > 1/2$.

Proposición 11. *Toda subfunción cerrada de una función compacta f es una función compacta.*

Demostración. Sean $f : X \to B$ una función compacta y $X' \subseteq X$ un conjunto cerrado en X. Como $X'_b = X_b \cap X'$, X_b es compacto y X' es un conjunto cerrado entonces X'_b es un subconjunto cerrado de X_b. Ahora como cada subconjunto cerrado de un conjunto compacto es compacto, se tiene que cada fibra en X' es un compacto.
La imagen de un conjunto cerrado F en X' es cerrada. Pues $F = X' \cap E$, con E un conjunto cerrado en X, luego F es cerrado también en X y su imagen es un conjunto cerrado, pues f es una función cerrada. □

Proposición 12. *Toda subfunción compacta de una función de tipo T_2 es una subfunción cerrada.*

Demostración. Sean $f : X \to B$ una función de tipo T_2 y $X' \subseteq X$, tales que $f|_{X'} : X' \to B$ es una función compacta. Queremos ver que X' es un subconjunto cerrado de X. Tomemos $x \in X \setminus X'$. Si $x \notin f^{-1}(f|_{X'}(X'))$ entonces, al ser $f|_{X'}$ compacta, se tiene que $f|_{X'}(X')$ es un conjunto cerrado de B y $f(x) \notin f|_{X'}(X')$. Luego existe una vecindad W de $f(x)$, tal que $W \cap f|_{X'}(X') = \emptyset$. Por lo tanto se tiene que $X_W \cap X' = \emptyset$, es decir, existe una vecindad X_W de x tal que $X_W \cap X' = \emptyset$.

Ahora, si $x \in X \setminus X'$ y $x \in f^{-1}(f|_{X'}(X'))$, se puede ver que para cada $a \in X' \cap f^{-1}(f(x))$ existen conjuntos abiertos $O_a \ni a$ y $Q_a \ni x$, tales que $O_a \cap Q_a = \emptyset$, pues f es una función de tipo T_2. La familia $\{O_a\}$ es un cubrimiento por conjuntos abiertos de $X' \cap f^{-1}(f(x))$ y $f|_{X'}$ es una función compacta, luego existe una subfamilia finita $\{O_{a_i}\}$ de $\{O_a\}$, que cubre a $X' \cap f^{-1}(f(x))$. Ahora, por construcción de los conjuntos Q_{a_i}, se tiene que $x \in \cap Q_{a_i}$. Como la función $f|_{X'}$ es cerrada, para el cubrimiento $\{O_{a_i}\}$ de la fibra $X' \cap f^{-1}(f(x))$ existe una vecindad W de $f(x)$ en B (Proposición 3), tal que $X' \cap X_W \subseteq \cup O_{a_i}$. Concluimos que $x \in X_W \cap (\cap Q_{a_i})$ y $[(\cap Q_{a_i}) \cap X_W] \cap X' = \emptyset$, pues $[(\cap Q_{a_i}) \cap X_W] \cap X' = (\cap Q_{a_i}) \cap [X_W \cap X'] \subseteq (\cap Q_{a_i}) \cap (\cup O_{a_i}) = \emptyset$. □

Proposición 13. *Todo morfismo de una función compacta en una función de tipo T_2 es compacto.*

Demostración. Sean $f : X \to B$ una función compacta, $g : Y \to B$ una función de tipo T_2 y $\lambda : f \to g$ un morfismo en $\mathbf{Top_B}$.
Veamos primero que $\lambda^{-1}(y)$ es compacto para cada $y \in Y$. En efecto, existe algún $b \in B$ tal que $y \in g^{-1}(b)$ y podemos asegurar que existe un conjunto cerrado $F \subseteq Y$ tal que $F \cap g^{-1}(b) = \{y\}$, pues g es de tipo T_2. Adicionalmente, la continuidad de λ implica que $\lambda^{-1}(F)$ es un conjunto cerrado en X. Por otro lado, tenemos que $\lambda^{-1}(F) \cap f^{-1}(g(y)) = \lambda^{-1}(y)$, pues si $x \in \lambda^{-1}(y)$ entonces $\lambda(x) = y \in F$, luego $x \in \lambda^{-1}(F)$ y $g(\lambda(x)) = g(y) = f(x)$, por lo tanto $x \in f^{-1}(g(y))$, es decir, $\lambda^{-1}(y) \subseteq \lambda^{-1}(F) \cap f^{-1}(g(y))$. En la otra dirección, se tiene que si $x \in \lambda^{-1}(F) \cap f^{-1}(g(y))$, entonces $x \in f^{-1}(g(y))$, luego x esta sobre la fibra de $g(y)$ en X y $\lambda(x) \in F$, donde F solo tiene a y como elemento sobre la fibra de b en Y, es decir, $x \in \lambda^{-1}(y)$. Tenemos entonces que $\lambda^{-1}(y)$ es un subconjunto cerrado del conjunto compacto $f^{-1}(g(y))$, concluimos que $\lambda^{-1}(y)$ es compacto.
Veamos ahora que λ es una función cerrada. Sea $E \subseteq X$ un conjunto cerrado. Como f es una función compacta, la Proposición 11 nos dice que $f|_E : E \to B$ es compacta, luego su imagen $g|_{\lambda(E)} : \lambda(E) \to B$ es compacta y por lo tanto $\lambda(E)$ es un conjunto cerrado de Y, ésto por la Proposición 10 y la Proposición 12. □

Una herramienta útil de determinar la compacidad de una función viene dada por la siguiente proposición

Proposición 14. *Una función $f : X \to B$ es compacta si y solo si para cada $b \in B$ y cada cubrimiento $\mathcal{O}$ de X_b por subconjuntos abiertos, existen una vecindad W de b y una subfamilia finita de $\mathcal{O}$ que cubre a X_W.*

Demostración.

- $\Rightarrow$ Como X_b es compacto, existe una subfamilia finita $\mathcal{A}$ de $\mathcal{O}$ que cubre a X_b. Entonces $\bigcup \mathcal{A}$ es una vecindad abierta de X_b, luego dado que f es una función cerrada, la Proposición 3 nos dice que existe una vecindad abierta W de b tal que $X_W \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. Tenemos pues que $\bigcup \mathcal{A}$ cubre a X_W.

$\Leftarrow$ Dados $b \in B$, W una vecindad abierta de b y $\mathcal{O}$ un cubrimiento de la fibra X_b por conjuntos abiertos de X, tenemos, por hipótesis, que existe una subfamilia finita $\mathcal{A}$ que cubre a X_W y por lo tanto también a X_b, es decir, la fibra X_b es compacta. Ahora, para ver que la función f es cerrada basta observar que toda vecindad abierta O de la fibra X_b forma un cubrimiento de la misma, luego por hipótesis existe una vecindad abierta W de b tal que $X_W \subseteq O$, pero ésto es equivalente a ser una función cerrada, de acuerdo a la Proposición 3.

$\square$

Ejemplo 12. *Consideremos el espacio $I^n = \Pi^n[0,1]$. Para las funciones $f : I^n \to \mathbb{R}$, $g_j : I^{n-1} \to \mathbb{R}$ y $\lambda_j : I^n \to I^{n-1}$, definidas como $f((x_i)_{i=1,2,\ldots,n}) = x_1$, $g_j((x_i)_{i=1,2,\ldots,n-1}) = x_1$ (las proyecciones en la primera componente) y $\lambda_j((x_i)_{i=1,2,\ldots,n}) = (x_i)_{i=1,2,..,j-1,j+1,\ldots,n}$ donde $1 \neq j$. Tenemos que λ_j es un morfismo entre las funciones f y g_j, es decir, $f = g_j \circ \lambda_j$. Además, se cumple que:*

- *La función f es compacta: Sea $\mathcal{O}$ un cubrimiento por conjuntos abiertos de X_b. Existe, para cada $x \in X_b$, una bola abierta $B_{\epsilon_x}(x)$ alrededor de x contenida en un elemento de $\mathcal{O}$. Puesto que X_b es producto de compactos y $\{B_{\epsilon_x}(x)\}_{x\in X_b}$ es un cubrimiento por conjuntos abiertos, existen finitos x_1 x_2, ..., $x_n \in X_b$ tales que $X_b \subseteq \bigcup B_{\epsilon_{x_i}}(x_i)$ y $B_{\epsilon_{x_i}}(x_i) \subseteq O_i$, donde $O_i \in \mathcal{O}$. Definimos $\epsilon = min\{\epsilon_{x_i}\}$. Se tiene que*

$$X_b \subseteq X_{(b-\epsilon,b+\epsilon)} \subseteq \bigcup B_{\epsilon_{x_i}}(x_i) \subseteq \bigcup O_i.$$

  Así, por la Proposición 14, la función f es compacta.

- *Las funciones λ_j son compactas: Puesto que las funciones g_j son funciones tipo T_2 y f es compacta, la Proposición 13 nos dice que λ_j es una función compacta.*

- *Las funciones g_j son compactas: Es claro que las funciones λ_j son sobreyectivas, luego por la Proposición 10, las funciones g_j son compactas.*

2.3. Filtros atados y compacidad

En esta sección introducimos el concepto filtro atado y desarrollamos algunas de sus propiedades básicas. Cerramos la sección con una caracterización de las funciones fibradas compactas por medio de filtros atados. El contenido de esta sección esta basado en [10].

Definición 9. *Sea $f : X \to B$ un objeto de $\mathbf{Top_B}$. Un filtro $\mathfrak{F}$ sobre X, es un b-filtro o un filtro atado a un punto $b \in B$, si el filtro $f_*\mathfrak{F}$ generado por la base $\{f(G) : G \in \mathfrak{F}\}$ converge a b.*

Ejemplo 13. *Consideramos el espacio $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$ del ejemplo 8 y las funciones $f : X \to [0,1)$, $g : X \to (-1,1)$ definidas como $f(x) = \|x\|$, $g(x_1, x_2) = x_1$. Sea $b \in (0,1)$, para el filtro $\mathfrak{F}$, sobre X, generado por la familia de conjuntos $G = \{x \in X : a < \|x\| < c \text{ con } a < b < c\}$, tenemos que $\mathfrak{F}$ es un b-filtro para la función f, mas no es un b-filtro para la función g, pues para esta última las vecindades $(b - \epsilon, b + \epsilon)$ no son, en general, superconjuntos de los conjuntos g_*G, puesto que $-b \in g_*G$, para todo G.*

Definición 10. *Sean $f : X \to B$ una función continua y $\mathfrak{F}$ un b-filtro. Una colección $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$ es una base para $\mathfrak{F}$, si para cada $G \in \mathfrak{F}$ existen $H \in \mathfrak{B}$ y W vecindad de b tales que $X_W \cap H \subseteq G$.*

Proposición 15. *Sean $f : X \to B$ una función continua y $\mathfrak{B}$ una base para un b-filtro $\mathfrak{F}$. Se tiene que:*

1. *Si H_1, $H_2 \in \mathfrak{B}$ entonces existen $H \in \mathfrak{B}$ y W vecindad de b, tales que $H \cap X_W \subseteq H_1 \cap H_2$.*

2. *$\mathfrak{B} \neq \emptyset$ y $H \cap X_W \neq \emptyset$ para todo $H \in \mathfrak{B}$ y toda vecindad W de b.*

Demostración.

1. Por hipótesis, tenemos que $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$, con $\mathfrak{F}$ un b-filtro. Por lo tanto $H_1 \cap H_2 \in \mathfrak{F}$ y, por definición de base, existen $H \in \mathfrak{B}$ y W vecindad de b, tales que $H \cap X_W \subseteq H_1 \cap H_2$.

2. Es claro que $\mathfrak{B}$ es no vacía. Ahora, sean $H \in \mathfrak{B}$ y W una vecindad de b. Como $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$ y $f_*\mathfrak{F}$ genera un filtro convergente a b, se tiene que $f(H) \cap W \neq \emptyset$. Luego existe $x \in H$, tal que $f(x) \in W$ o equivalentemente $x \in H \cap X_W$.

□

Proposición 16. *Sean $f : X \to B$ una función continua y $b \in B$. Si $\mathfrak{B}$ es una colección de subconjuntos de X que satisface 1. y 2. de la Proposición 15, entonces la familia*

$$\mathfrak{F} = \{G \subseteq X : H \cap X_W \subseteq G \text{ para algún } H \in \mathfrak{B} \text{ y alguna vecindad } W \text{ de } b\}$$

es un b-filtro y $\mathfrak{B}$ es una base para $\mathfrak{F}$.

Demostración. Primero observamos que $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$. Basta tomar en la definición de $\mathfrak{F}$, la vecindad de b, $W = B$, y ver que $H \cap X_W = H$, para cada $H \in \mathfrak{B}$.
La colección $\mathfrak{F}$ es un filtro. La observación $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$ y la condición 2. de la Proposición 15, nos dicen que $\mathfrak{F}$ es una colección no vacía. De igual manera podemos observar que $\emptyset \notin \mathfrak{F}$, ésto por la condición 2. y la definición de $\mathfrak{F}$. Ahora, si G_1, $G_2 \in \mathfrak{F}$ entonces existen H_1, $H_2 \in \mathfrak{B}$ y

vecindades W_1, W_2 de b, tales que $H_1 \cap X_{W_1} \subseteq G_1$ y $H_2 \cap X_{W_2} \subseteq G_2$. Por lo tanto, utilizando la propiedad 1., existen $H \in \mathfrak{B}$ y W vecindad de b, tales que $H \cap X_W \subseteq H_1 \cap H_2$. Luego $H \cap X_{W \cap W_1 \cap W_2} \subseteq H_1 \cap H_2 \cap X_{W \cap W_1 \cap W_2} \subseteq G_1 \cap G_2$, es decir, $G_1 \cap G_2 \in \mathfrak{F}$. El hecho que $f_*\mathfrak{F}$ genera un filtro que converge a b se obtiene fácilmente al notar que, por la condición 2., se tiene trivialmente que $\{X_W\}_{W \in \mathcal{V}(b)} \subseteq \mathfrak{F}$, luego $\mathcal{V}(b) \subseteq f_*\mathfrak{F}$.
Finalmente, que la familia $\mathfrak{B}$ es una base es claro de la definición. □

Proposición 17. *Sean $f : X \to B$, $g : Z \to B$ dos objetos de* $\mathbf{Top_B}$ *y $\lambda : f \to g$ un morfismo. Si $\mathfrak{B}$ es una base para un b-filtro sobre X entonces $\lambda_*\mathfrak{B} = \{\lambda(H) \subseteq Z : H \in \mathfrak{B}\}$ es una base para un b-filtro sobre Z.*

Demostración. Observemos primero que para cada vecindad W de b y cada subconjunto $A \subseteq X$, se tiene que $\lambda(A \cap X_W) = \lambda(A) \cap Z_W$. Es obvio que $\lambda(A \cap X_W) \subseteq \lambda(A) \cap \lambda(X_W) \subseteq \lambda(A) \cap Z_W$. Veamos que $\lambda(A) \cap Z_W \subseteq \lambda(A \cap X_W)$. Si $z \in \lambda(A) \cap Z_W$ entonces $z = \lambda(x)$, con $x \in A$ y $f(x) = g(\lambda(x)) = g(z) \in W$. Luego $x \in X_W$ y $x \in A$, por lo tanto $x \in A \cap X_W$ y $z = \lambda(x) \in \lambda(A \cap X_W)$.
Sean G_1, $G_2 \in \lambda_*\mathfrak{B}$. Entonces existen H_1, $H_2 \in \mathfrak{B}$ tales que $G_1 = \lambda(H_1)$ y $G_2 = \lambda(H_2)$. Por la condición 1. de la Proposición 15, tenemos que existen $H \in \mathfrak{B}$ y W vecindad de b, tales que $H \cap X_W \subseteq H_1 \cap H_2$. Teniendo en cuenta que $\lambda(H \cap X_W) = \lambda(H) \cap Z_W$ y que $\lambda(H_1 \cap H_2) \subseteq \lambda(H_1) \cap \lambda(H_2)$, obtenemos $\lambda(H) \cap Z_W \subseteq \lambda(H_1) \cap \lambda(H_2)$.
Por otro lado, es claro que $\lambda_*\mathfrak{B} \neq \emptyset$, pues por hipótesis, $\mathfrak{B} \neq \emptyset$. Ahora, si $G \in f_*\mathfrak{B}$, tenemos $G = \lambda(H)$, con $H \in \mathfrak{B}$. Luego $H \cap W \neq \emptyset$, para toda vecindad W de b. Por lo tanto, $G \cap Z_W = \lambda(H \cap X_W) \neq \emptyset$, para cada vecindad W de b. □

Definición 11. *Sean $f : X \to B$ una función continua y $b \in B$. Decimos que el b-filtro $\mathfrak{F}$ sobre X converge a $x \in X$, si $x \in X_b$ y el conjunto de vecindades de x, $\mathcal{V}(x)$, satisface $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathfrak{F}$.*

Definición 12. *Sean $f : X \to B$ una función continua , $b \in B$ y $\mathfrak{F}$ un b-filtro sobre X. Decimos que un punto $x \in X$ es adherente a $\mathfrak{F}$, si $x \in X_b$ y $x \in \overline{G}$ para todo $G \in \mathfrak{F}$.*

Ejemplo 14. *Sean $f : X \to B$ una función continua y $\mathfrak{F}$ un filtro sobre X que converge a $x \in X$. De la continuidad de f, es claro que $\mathfrak{F}$ es un $f(x)$-filtro y que $\mathfrak{F}$ converge a x en el sentido de la Definición 11.*

Ejemplo 15. *Para el espacio $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$ del ejemplo 8 y la función $f : X \to [0, 1)$ definida como $f(x) = \|x\|$, el b-filtro $\mathfrak{F}$ generado por la familia de conjuntos $G = \{x \in X : a < \|x\| < c$ con $a < b < c\}$ no converge a ningún punto, pues para cada $x \in X$, con $\|x\| = b$, se tiene $\mathcal{V}(x) \nsubseteq \mathfrak{F}$.*

Ejemplo 16. *Sean los espacios* $X = \{c, d\}$*, con la topología dada por* $\{\emptyset, \{d\}, \{c, d\}\}$*, y* $B = \{a, b\}$*, con la topología grosera. Definimos la función* $f : X \to B$*, como* $f(c) = a$ *y* $f(d) = b$*. El conjunto* $\mathfrak{F} = \{\{c, d\}\}$ *es un b-filtro más no es un b-filtro convergente en el sentido de la Definición 11. En efecto, si* $\mathfrak{F}$ *fuera un b-filtro convergente la única opción sería converger a* $d \in X_b$*, pero ésto es imposible pues* $\{d\} \notin \mathfrak{F}$*. Nótese que* $\mathfrak{F}$ *es un filtro convergente a* $c \in X$*, pero* $c \notin X_b$*. Por otro lado,* $\mathfrak{F}$*, también se puede ver como un a-filtro y utilizando la observación anterior, se tiene que* $\mathfrak{F}$ *converge a* c *en el sentido de la Definición 11.*

Proposición 18. *Sea* $f : X \to B$ *en* $\mathbf{Top_B}$*. Se tiene que* f *es una función de tipo* T_2 *si y solo si cada b-filtro converge a lo más a un punto* $x \in X_b$*.*

Demostración.

- $\Rightarrow$ Razonamos por contradicción. Suponga que exista un b-filtro $\mathfrak{F}$ sobre X que converge a dos puntos distintos x, $x' \in X_b$. Como f es una función tipo T_2, existen vecindades disjuntas O, O' de x y x', respectivamente. Por convergencia de $\mathfrak{F}$ se cumple que O, $O' \in \mathfrak{F}$, luego por propiedades de filtro $\emptyset = O \cap O' \in \mathfrak{F}$, una contradicción.

- $\Leftarrow$ Razonamos por contradicción. Supongamos que f no sea una función tipo T_2. Entonces existen $b \in B$ y puntos distintos x,$x' \in X_b$, tales que para todo par de vecindades $O \in \mathcal{V}(x)$ y $O' \in \mathcal{V}(x')$, se cumple que $O \cap O' \neq \emptyset$. Definimos la familia

  $$\mathfrak{F} = \{H \subseteq X : H \supseteq O \cap O' \text{ para algún par } O \in \mathcal{V}(x) \text{ , } O' \in \mathcal{V}(x')\}$$

  Se tiene que $\mathfrak{F}$ es un b-filtro con la propiedad $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathfrak{F}$ y $\mathcal{V}(x') \subseteq \mathfrak{F}$, es decir, converge a x y a x'. Una contradicción.

$\square$

Definición 13. *Sean* $f : X \to B$ *una función continua,* $b \in B$ *y* $\mathfrak{U}$ *un b-filtro sobre* X*. Decimos que* $\mathfrak{U}$ *es un b-ultrafiltro si* $\mathfrak{U}$ *no esta contenido propiamente en ningún otro b-filtro.*

Proposición 19. *Todo b-filtro esta contenido en algún b-ultrafiltro.*

Demostración. Sea $\mathfrak{F}$ un b-filtro y $\mathcal{N}$ la familia de todos los b-filtros que contienen a $\mathfrak{F}$. Definimos una relación de orden en $\mathcal{N}$ de manera que para $\mathfrak{F} \in \mathcal{N}$ y $\mathfrak{E} \in \mathcal{N}$ se tiene que $\mathfrak{F} \leq \mathfrak{E}$ si y solo si $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}$. Afirmamos que toda cadena en $\mathcal{N}$ está acotada superiormente. En efecto, si $\mathcal{A}$ es una cadena, ésta tiene a $\bigcup \mathcal{A}$ como cota superior. El lema de Zorn nos permite concluir que en $\mathcal{N}$ hay elementos máximales, es decir, b-ultrafiltros. $\square$

Proposición 20. *Dada $f : X \to B$ en $\mathbf{Top_B}$, son equivalentes*

1. *f es una función compacta.*
2. *Todo b-filtro sobre X tiene un punto adherente sobre X_b.*
3. *Todo b-ultrafiltro sobre X converge a un punto sobre X_b.*

Demostración.

1.⇒2. Supongamos que el b-filtro $\mathfrak{F}$ sobre X no tiene puntos adherentes. Para cada $x \in X_b$ existen una vecindad O_x en X y un elemento $H_x \in \mathfrak{F}$, tales que $H_x \cap O_x = \emptyset$. Puesto que X_b es compacto, existen puntos $x_1,..., x_n \in X_b$ que satisfacen $X_b \subseteq \cup_{i=1,...,n} O_{x_i}$ y puesto que f es cerrada, existe una vecindad abierta W de b en B, tal que $X_W \subseteq \cup_{i=1,...,n} O_{x_i}$. Sea $F = \cap_{i=1,...,n} H_{x_i}$. Si $b' \in f(F) \cap W$, existe $a \in F \cap X_W$, tal que $f(a) = b'$. Entonces $a \in O_{x_i} \cap H_{x_i}$, para algún $i \in \{1, ..., n\}$. Esto es contradictorio, luego $f(F) \cap W = \emptyset$ y $\mathfrak{F}$ no es un b-filtro. Concluimos que el b-filtro $\mathfrak{F}$ tiene por lo menos un punto adherente.

2.⇒3. Supongamos que $\mathfrak{U}$ es un b-ultrafiltro sobre X y que $x \in X_b$ es adherente a $\mathfrak{U}$. Si $O \in \mathcal{V}(x)$, entonces $O \in \mathfrak{U}$, de lo contrario, $\{O \cap H : H \in \mathfrak{U}\}$ generaría un b-filtro sobre X, que contiene propiamente a $\mathfrak{U}$.

3.⇒1. Sean $b \in B$ y $\mathcal{O}$ un cubrimiento de X_b por subconjuntos abiertos de X. Supongamos que para cada vecindad abierta W de b y cada subcolección finita $\mathcal{A}$ de $\mathcal{O}$ se tiene que $X_W \setminus \cup\mathcal{A} \neq \emptyset$. Afirmamos que la colección

$$\mathfrak{B} = \{X_W \setminus \cup\mathcal{A} : W \text{ es una vecindad abierta de } b,\ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{O} \text{ es finito}\}$$

es base para un b-filtro. En efecto, si $H_1, H_2 \in \mathfrak{B}$, existen vecindades abiertas W_1, W_2 de b y subcolecciones finitas $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ de $\mathcal{O}$, tales que $H_1 = X_{W_1} \setminus \cup\mathcal{A}_1$ y $H_2 = X_{W_2} \setminus \cup\mathcal{A}_2$. Es claro que $H = X_{W_1 \cap W_2} \setminus \cup(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) \subseteq H_1 \cap H_2$. Tenemos que $H \in \mathfrak{B}$, pues $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ también es una subcolección finita de $\mathcal{O}$. Por otro lado tenemos que, por definición, $\mathfrak{B} \neq \emptyset$. Finalmente, si V es una vecindad de b y $H \in \mathfrak{B}$, entonces $H = X_W \setminus \cup\mathcal{A} \neq \emptyset$, para alguna vecindad W de b y alguna subfamilia finita $\mathcal{A}$ de $\mathcal{O}$, luego $H \cap X_V = (X_W \setminus \cup\mathcal{A}) \cap X_V = X_{W \cap V} \setminus \cup\mathcal{A}$, siendo ésta última diferente de vacío, por hipótesis.

La Proposición 19 nos dice que el b-filtro generado por $\mathfrak{B}$ esta contenido en un b-ultrafiltro $\mathfrak{U}$ sobre X que , por hipótesis, converge a un punto $x \in X_b$. Ahora bien, existe $O \in \mathcal{O}$ tal que $x \in O$, entonces $O \in \mathfrak{U}$, pero también $X \setminus O = X_B \setminus O \in \mathfrak{U}$, lo cual es absurdo. Entonces existen una vecindad abierta W de b y una subcolección finita de $\mathcal{O}$ que cubre a X_W, que es equivalente a decir que f es una función compacta, gracias a la Proposición 14.

□

La siguiente proposición extiende al caso fibrado el teorema de Tychonoff.

Proposición 21. *Sea $\{g_\alpha : X_\alpha \to B\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de funciones continuas con codominio común. Entonces el producto fibrado de la familia $\{g_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es compacto si y solo si $g_\alpha : X_\alpha \to B$ es una función compacta para cada $\alpha \in \Lambda$.*

Demostración.

$\Rightarrow$ La Proposición 10 y el hecho que $\pi_\gamma : \prod_B g_\alpha \to g_\gamma$ es una función fibrada continua y sobreyectiva, nos aseguran que $g_\gamma : X_\gamma \to B$ es una función compacta.

$\Leftarrow$ Sea $\mathfrak{U}$ un b-ultrafiltro sobre $\prod_B X_\alpha$, con $b \in B$. Para cada $\alpha \in \Lambda$, se tiene que la familia $\mathfrak{B}_\alpha = \{\pi_\alpha(G) : G \in \mathfrak{U}\}$ es base para un b-filtro $\mathfrak{U}_\alpha$ sobre X_α. En efecto, la familia $\mathfrak{B}_\alpha$ es no vacía, pues $\mathfrak{U} \neq \emptyset$. Ahora si $H \in \mathfrak{B}_\alpha$ y $W \subseteq B$ es una vecindad de b, entonces $H \cap (X_\alpha)_W \neq \emptyset$. Pues $H = \pi_\alpha(G)$, con $G \in \mathfrak{U}$, luego $G \cap (\prod_B X_\alpha)_W \neq \emptyset$ y por lo tanto $\emptyset \neq \pi_\alpha(G \cap (\prod_B X_\alpha)_W) \subseteq H \cap (X_\alpha)_W$. Ahora si H_1, $H_2 \in \mathfrak{B}_\alpha$ entonces $H_1 = \pi_\alpha(G_1)$ y $H_2 = \pi_\alpha(G_2)$, con G_1, $G_2 \in \mathfrak{U}$, luego $G_1 \cap G_2 \in \mathfrak{U}$ y $\pi_\alpha(G_1 \cap G_2) \subseteq \pi_\alpha(G_1) \cap \pi_\alpha(G_2) = H_1 \cap H_2$.

Como $g_\alpha : X_\alpha \to B$ es una función compacta, cualquier b-ultrafiltro converge a un punto $x_\alpha \in (X_\alpha)_b$. En particular cualquier b-ultrafiltro que contenga a $\mathfrak{U}_\alpha$ converge a un punto $x_\alpha \in (X_\alpha)_b$. Se tiene entonces que el b-ultrafiltro $\mathfrak{U}$ converge a $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in (\prod_B X_\alpha)_b$.

$\square$

2.4. Compactificación

Empezamos esta sección definiendo qué es lo que entendemos como una compactificación de una función continua.

Definición 14. *Sea $f : X \to B$ una función continua. Diremos que $cf : X^c \to B$ es una compactificación de f, si cf es una extensión compacta de f.*

Ejemplo 17. *Para el espacio $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$ y la función $g : X \to (-1, 1)$ definida como $g(x_1, x_2) = x_1$, tenemos que $cg : X^c \to (-1, 1)$, con $X^c = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ y $|x_1| \neq 1\}$ y $cg(x_1, x_2) = x_1$, es una compactificación de g. En efecto, veamos que cg es compacta. Sean $b \in (-1, 1)$ y $\mathcal{O}$ un cubrimiento de X_b por conjuntos abiertos. Para cada $x \in X_b$ existe una bola $B_{\epsilon_x}(x)$ que está contenida en algún elemento de $\mathcal{O}$. Utilizando la compacidad de X_b, se puede asegurar la existencia de un conjunto finito $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq X_b$*

tal que $B_{\epsilon_{x_i}}(x_i) \subseteq O_i \in \mathcal{O}$ *y* $X_b \subseteq \bigcup B_{\epsilon_{x_i}}(x_i)$. *Definimos* $\epsilon = min\{\epsilon_{x_i}\}$. *Tenemos que* $X_{(b-\epsilon,b+\epsilon)}$ *es tal que*

$$X_{(b-\epsilon,b+\epsilon)} \subseteq \bigcup B_{\epsilon_{x_i}}(x_i) \subseteq \bigcup_i \mathcal{O}_i.$$

luego por la Proposición 14 cg es compacta.
La función cg es una extensión de la función g. Basta observar que al definir $\lambda : X \to X^c$ *como* $\lambda(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ *obtenemos una inmersión en* $\mathbf{Top}_{(-1,1)}$ *y que* $\overline{X} = X^c$.

Ejemplo 18. *Si se modifica ligeramente la función g del ejemplo anterior colocando* $g^* : X \to (-1, 1]$, *se puede ver que la función* $cg^* : X^c \to (-1, 1]$, *con* X^c *como en el ejemplo anterior, no es una compactificación de* g^*. *En efecto,* cg^* *no es una función compacta. Si se considera el conjunto* $X^c_1 = \emptyset$ *y el cubrimiento* $\mathcal{O} = \{\{x \in X^c : \|x\| < 1/2\}\}$ *de* X^c_1, *se tiene que para toda vecindad W de 1 en* $(-1, 1]$, *se cumple*

$$X_W \setminus \{x \in X^c : \|x\| < 1/2\} \neq \emptyset.$$

dado que siempre existe $x \in X_W$ *tal que* $\|x\| > 1/2$.

Definición 15. *Sean* $kf : X^k \to B$ *y* $cf : X^c \to B$ *dos compactificaciones de una función* $f : X \to B$. *Decimos que*

- kf *es projectivamente mayor que* cf *y lo denotamos como* $kf \geq cf$, *si existe un morfismo canónico* $\lambda : kf \to cf$ *(Definición 2).*
- kf *es equivalente a* cf *y lo denotamos como* $kf \simeq cf$, *si existe un homeomorfismo canónico* $\lambda : kf \to cf$.

Proposición 22. *Sean* $kf : X^k \to B$ *y* $cf : X^c \to B$ *dos compactificaciones de Hausdorff de una función* $f : X \to B$. *Se tiene que* $kf \simeq cf$ *si y solo si* $kf \geq cf$ *y* $cf \geq kf$.

Demostración.

$\Rightarrow$ Si existe un homeomorfismo canónico $\lambda : kf \to cf$ es claro que $\lambda^{-1} : cf \to kf$ es un homeomorfismo canónico también. Luego $kf \geq cf$ y $cf \geq kf$.

$\Leftarrow$ Si $\lambda : kf \to cf$ y $\theta : cf \to kf$ son dos morfismos canónicos, entonces $\theta \circ \lambda$ y id_{X^k} son dos morfismos sobre la función de tipo T_2, $kf : X^k \to B$. Estos morfismos coinciden sobre la imagen de X en X^k, que por definición es densa en X^k. Luego, por la Proposición 2, $\theta \circ \lambda = id_{X^k}$. Razonando de igual manera se obtiene que $\lambda \circ \theta = id_{X^c}$. Por lo tanto λ es un homeomorfismo canónico de kf en cf.

□

El resultado anterior nos permite definir una relación de equivalencia sobre la familia de todas las compactificaciones de Hausdorff de una función dada y la Definición 15 nos permite establecer una relación de orden sobre las clases de equivalencias así obtenidas. Por lo tanto de aquí en adelante identificamos cada compactificación de Hausdorff con su clase de equivalencia.

3 Compactificación y productos topológicos parciales

3.1. Productos topológicos parciales

En este capítulo se desarrolla la versión fibrada del método clásico de compactificación de Stone-Čech por medio de productos topológicos. Primero se introducen las nociones de producto topológico parcial elemental y producto topológico parcial, para después desarrollar algunas propiedades de compacidad importantes sobre éstos. Las definiciones y proposiciones de este capítulo están basados en [11], [14] y [15].

Definición 16. *Sean B y Z espacios topológicos y W un subconjunto abierto de B. Se define el producto topológico parcial elemental, EPTP (por sus siglas en inglés), con base B y fibra Z relativa a W como el conjunto:*

$$P = (B \setminus W) \cup (W \times Z)$$

En caso de ser necesario se utilizará la notación $P = P(B, Z, W)$, para especificar la base y la fibra del EPTP.
Asociado a $P = P(B, Z, W)$ se define una función $p : P \to B$, que se llama la proyección de P, de la siguiente manera:

$$p(x) = \begin{cases} x & x \in B \setminus W \\ pr_W(x) & x \in W \times Z \end{cases}$$

donde pr_W es la proyección de $W \times Z$ en W.
Adicionalmente, $P = P(B, Z, W)$ estará dotado de la topología generada por la base

$$\mathcal{B} = p^{-1}(\tau(B)) \cup \tau(W \times Z)$$

Donde $\tau(B)$ y $\tau(W \times Z)$ son las topologías de B y $W \times Z$, respectivamente.
La colección $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre P. En efecto,

- $P = \cup\mathcal{B}$: Si $x \in P$ entonces $x \in B \setminus W$ o $x \in W \times Z$. En el primer caso tenemos que $x = p(x) \in p^{-1}(B)$ y obviamente $B \in \tau(B)$. En el segundo caso tenemos que $x \in W \times Z = p^{-1}(W)$ y $W \in \tau(B)$

- Si $x \in A_1 \cap A_2$, con $A_1,\ A_2 \in \mathcal{B}$, entonces existe $A_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in A_3 \subseteq A_1 \cap A_2$:
  - Cuando $A_1,\ A_2 \in \tau(W \times Z)$ el resultado se obtiene pues $x \in A_1 \cap A_2 \in \tau(W \times Z)$.
  - Análogamente, cuando $A_1,\ A_2 \in p^{-1}(\tau(B))$ se puede ver que $A_1 = p^{-1}(V_1)$ y $A_2 = p^{-1}(V_2)$, con $V_1,\ V_2 \in \tau(B)$. Luego $x \in A_1 \cap A_2 = p^{-1}(V_1) \cap p^{-1}(V_2) = p^{-1}(V_1 \cap V_2) \in p^{-1}(\tau(B))$.
  - Supóngase que $A_1 \in p^{-1}(\tau(B))$ y $A_2 \in \tau(W \times Z)$. Como $x \in A_2$ entonces $x = (x_1, x_2)$, con $x_1 \in W$ y $x_2 \in Z$, más aún podemos considerar abiertos $V_1 \in \tau(W)$ y $U_2 \in \tau(Z)$, tales que $(x_1, x_2) \in V_1 \times U_2 \subseteq A_2$. Ahora como $x \in A_1 \in p^{-1}(\tau(B))$, existe $W_1 \in \tau(B)$, tal que $p^{-1}(W_1) = A_1$. Además, dado que $x = (x_1, x_2)$, entonces $p(x) = x_1$ y $x_1 \in W_1$. Consideremos entonces el conjunto $V_1 \cap W_1$. Como $V_1 \in \tau(W)$ y $W \in \tau(B)$ entonces $V_1 \cap W_1 \in \tau(W)$ y $V_1 \cap W_1 \in \tau(B)$. Se concluye que $(V_1 \cap W_1) \times U_2 \in \tau(W \times Z)$ y $(x_1, x_2) \in (V_1 \cap W_1) \times U_2 \subseteq A_2$. Ahora bien, $(V_1 \cap W_1) \times U_2 \subseteq (V_1 \cap W_1) \times Z = p^{-1}(V_1 \cap W_1) \subseteq p^{-1}(W_1) = A_1$. Luego $x \in (V_1 \cap W_1) \times U_2 \subseteq A_1 \cap A_2$.

Observación 1.

- *Con la topología generada por la base $\mathcal{B}$ la función $p : P \to B$ es continua, pues para cualquier $V \in \tau(B)$ se cumple $p^{-1}(V) \in \tau(P)$.*
- *Cuando $Z \neq \emptyset$ la función p es sobreyectiva, pues si $x \in B \setminus W$ entonces $x = p^{-1}(x)$; ahora si $x \in W$ entonces $x = p(x, x_2)$ con $x_2 \in Z$ y $(x, x_2) \in W \times Z$.*

Proposición 23. *Si $Z \neq \emptyset$ entonces $p : P \to B$ es abierta.*

Demostración. Sea $O \in \tau(P)$, entonces $O = \cup_{\alpha \in \Lambda} O_\alpha$, con $O_\alpha \in \mathcal{B}$. Como $p(\cup_{\alpha \in \Lambda} O_\alpha) = \cup_{\alpha \in \Lambda} p(O_\alpha)$, si se muestra que $p(O_\alpha) \in \tau(B)$, tanto para $O_\alpha \in p^{-1}(\tau(B))$ como para $O_\alpha \in \tau(W \times Z)$, se obtendrá el resultado. Si $O_\alpha \in p^{-1}(\tau(B))$, la sobreyectividad de p garantiza que $p(O_\alpha) \in \tau(B)$. Si $O_\alpha \in \tau(W \times Z)$, se tiene que $p(O_\alpha) = pr_W(O_\alpha)$, la proyección sobre W, pero pr_W es abierta en W y $W \in \tau(B)$, luego $p(O_\alpha)$ es un conjunto abierto en B.

$\square$

Se consideran ahora algunos casos particulares de EPTP's.
Supóngase $W = \emptyset$. En este caso se tiene que $B \setminus W = B$ y $W \times Z = \emptyset$. Por lo tanto $P = P(B, Z, W) = B$, la proyección p se reduce a la función identidad y la topología de P es la topología de B.
Si $W = B$, se tiene que $B \setminus W = \emptyset$ y $W \times Z = B \times Z$. Luego $P = P(B, Z, W) = B \times Z$, p es la proyección en la primera coordenada y $\tau(P)$ es la topología producto.

Si $Z = \emptyset$, se tiene que $W \times Z = \emptyset$. Se tiene entonces que $P = P(B, Z, W) = B \setminus W$, p es la inmersión de $B \setminus W$ en B y $\tau(P)$ es la topología de subespacio.
La siguiente definición generaliza el concepto de EPTP.

Definición 17. *Sean B un espacio topológico, $\{Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos, $\{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \tau(B)$ y $\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ con $P_\alpha = P(B, Z_\alpha, W_\alpha)$. Definimos el producto topológico parcial, PTP, de los P_α como el producto fibrado de la familia $\{p_\alpha : P_\alpha \to B\}_{\alpha\in\Lambda}$.*

$$P = \Pi_B P_\alpha$$

El espacio B se llama la base del PTP y $\{Z_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ se llama la fibra del PTP. Al espacio P asociamos las funciones $p : P \to B$ y $\{\pi_\alpha : P \to P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, llamadas proyección larga y proyecciones cortas, respectivamente, definidas por:

$$\begin{aligned} \pi_\alpha(x) &= pr_\alpha|_P(x) \qquad \textit{la proyección usual restringida a } P \\ p(x) &= p_\alpha(\pi_\alpha(t)) \quad \forall \alpha \in \Lambda \end{aligned}$$

La topología de P es la topología de subespacio de $\prod_{\alpha\in\Lambda} P_\alpha$.

Se usará también la notación $P = P(B, \{Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, \{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ para especificar las familias $\{Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y $\{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ cuando sea necesario.
Para cada uno de los productos $W_\alpha \times Z_\alpha$ definimos las proyecciones laterales $q_\alpha : W_\alpha \times Z_\alpha \to Z_\alpha$ de $W_\alpha \times Z_\alpha$ en Z_α como $q_\alpha(x_1, x_2) = x_2$.

Observación 2. *La proyección larga p es una función continua, pues p está definida como la composición de las funciones continuas p_α y π_α.*

Como en el caso de los EPTP es interesante analizar algunos casos especiales de los PTP.
Si $W_\alpha = \emptyset$ para todo $\alpha \in \Lambda$ entonces $P_\alpha = B$ y p_α es la función identidad, para cada $\alpha \in \Lambda$. Se puede ver que $\prod_B P_\alpha \backsimeq B$, pues $P = \{(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \prod_{\alpha\in\Lambda} B | \quad x_\gamma = x_\alpha \quad \forall \alpha, \gamma \in \Lambda\}$, luego la función $f : P \to B$ definida como $f(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} = x_\gamma$, con $\gamma \in \Lambda$, es una biyección continua con inversa continua.
Si para todo $\alpha \in \Lambda$, $W_\alpha = B$, entonces $P_\alpha = B \times Z_\alpha$, para todo $\alpha \in \Lambda$, y $P = \Pi_B(B \times Z_\alpha)$. Ahora, para cada $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in P$, se tiene que $p_\gamma(x_\gamma) = p_\alpha(x_\alpha)$. Por lo tanto, cada $x_\alpha \in (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ tiene la misma primera coordenada, es decir, $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} = ((x, x'_\alpha))_{\alpha\in\Lambda}$. Entonces la función $f : P \to B \times (\prod_{\alpha\in\Lambda} Z_\alpha)$, definida por $f(((x, x'_\alpha))_{\alpha\in\Lambda}) = (x, (x'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda})$, es una biyección continua con inversa continua.

Proposición 24. *Sean B un espacio topológico, $\{Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos, $\{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \tau(B)$ y $P = P(B, \{Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, \{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$. Una base para la topología de P está dada por la familia:*

$$\mathcal{B} = \{O \subseteq P| \quad O = p^{-1}(V) \bigcup (\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(q_{\alpha_i}^{-1}(V_i)))\},$$

donde p es la proyección larga del PTP de P sobre B, $V \in \tau(B)$, $q_{\alpha_i} : W_{\alpha_i} \times Z_{\alpha_i} \to Z_{\alpha_i}$ es la proyección lateral de $W_{\alpha_i} \times Z_{\alpha_i}$ sobre Z_{α_i} y $V_i \in \tau(Z_{\alpha_i})$.

Demostración. Se muestra primero que para todo $x \in O_1 \cap O_2$, con O_1, $O_2 \in \mathcal{B}$, existe $O_0 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in O_0 \subseteq O_1 \cap O_2$. Como O_1, $O_2 \in \mathcal{B}$, entonces

$$O_1 = p^{-1}(V_1) \cup \bigcap_{i=1}^{m} \pi_{\alpha_i}^{-1}(q_{\alpha_i}^{-1}(V_{1,i})),$$

$$O_2 = p^{-1}(V_2) \cup \bigcap_{j=1}^{n} \pi_{\gamma_j}^{-1}(q_{\gamma_j}^{-1}(V_{2,j})),$$

con V_1, $V_2 \in \tau(B)$, $V_{1,i} \in \tau(Z_{\alpha_i})$ y $V_{2,j} \in \tau(Z_{\gamma_j})$. Si consideramos $O_1 \cap O_2$, se obtiene que

$$\begin{aligned} O_1 \cap O_2 = \left[p^{-1}(V_1) \cap p^{-1}(V_2)\right] &\bigcup \left[\bigcap_{i=1}^{m} \pi_{\alpha_i}^{-1}(q_{\alpha_i}^{-1}(V_{1,i})) \cap p^{-1}(V_2)\right] \\ &\bigcup \left[\bigcap_{j=1}^{n} \pi_{\gamma_j}^{-1}(q_{\gamma_j}^{-1}(V_{2,j})) \cap p^{-1}(V_1)\right] \\ &\bigcup \left[\bigcap_{k=1}^{l} \pi_{\eta_k}^{-1}(q_{\eta_k}^{-1}(V_k))\right] \end{aligned}$$

donde $V_k \in \{V_{1,i}\} \cup \{V_{2,j}\}$ y $\{\eta_k\} = \{\alpha_i\} \cup \{\gamma_j\}$.
Para los términos $p^{-1}(V_1)\cap p^{-1}(V_2) = p^{-1}(V_1\cap V_2)$ y $\cap_{k=1}^{l} \pi_{\eta_k}^{-1}(q_{\eta_k}^{-1}(V_k))$, se cumple trivialmente la existencia de $O_0' \in \mathfrak{B}$ y $O_0^* \in \mathfrak{B}$, tales que $O_0' \subseteq p^{-1}(V_1) \cap p^{-1}(V_2)$ y $O_0^* \subseteq \cap_{k=1}^{l} \pi_{\eta_k}^{-1}(q_{\eta_k}^{-1}(V_k))$. Basta entonces mostrar que existe $O_0 \in \mathfrak{B}$, tal que $O_0 \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} \pi_{\gamma_j}^{-1}(q_{\gamma_j}^{-1}(V_{2,j})) \cap p^{-1}(V_1)$. No hay pérdida de generalidad al considerar solo uno de los términos $\pi_\gamma^{-1} q_\gamma^{-1}(U) \cap p^{-1}(V)$, pues se trabaja con intersecciones finitas. Como W_γ es un conjunto abierto, entonces q_γ y π_γ son funciones abiertas. Luego $(q_\gamma \circ \pi_\gamma)(p^{-1}(V))$ es un conjunto abierto en Z_γ, y por lo tanto $U \cap (q_\gamma \circ \pi_\gamma)(p^{-1}(V))$ también es un conjunto abierto (en Z_γ).

Es claro que $\pi_\gamma^{-1}q_\gamma^{-1}(U\cap(q_\gamma\circ\pi_\gamma)(p^{-1}(V)))\subseteq p^{-1}(V)$ y que $\pi_\gamma^{-1}q_\gamma^{-1}(U\cap(q_\gamma\circ\pi_\gamma)(p^{-1}(V)))\subseteq \pi_\gamma^{-1}q_\gamma^{-1}(U)$, por lo tanto, definiendo $O_0=\pi_\gamma^{-1}q_\gamma^{-1}(U\cap(q_\gamma\circ\pi_\gamma)(p^{-1}(V)))$, se cumple que $O_0\subseteq \pi_\gamma^{-1}q_\gamma^{-1}(U)\cap p^{-1}(V)$.
Ahora se muestra que $\mathcal{B}$ genera $\tau(P)$. $\mathcal{B}\subseteq\tau(P)$, pues las funciones p, π_{α_i} y q_{α_i} son continuas. Ahora consideremos $x\in O$, con $O\in\tau(P)$. Por definición, $O=R\cap P$, con R un conjunto abierto en la topología de $\prod P_\alpha$. Entonces, si $x=(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, existen R_1, R_2, ... ,R_n, conjuntos abiertos en P_{α_1}, P_{α_2}, ... ,P_{α_n}, tales que $x\in\bigcap_{i=1}^n pr_{\alpha_i}^{-1}(R_i)\subseteq R$. Luego $(\bigcap_{i=1}^n pr_{\alpha_i}^{-1}(R_i))\cap P\subseteq R\cap P$, pero $(\bigcap_{i=1}^n pr_{\alpha_i}^{-1}(R_i))\cap P=\bigcap_{i=1}^n[pr_{\alpha_i}^{-1}(R_i)\cap P]$ y para cada i se cumple $pr_{\alpha_i}^{-1}(R_i)\cap P=\pi_{\alpha_i}^{-1}(R_i)$. Ahora, dado que $R_i\in\tau(P_{\alpha_i})$ y como para cada P_{α_i} se tomó la base $\mathfrak{B}_{\alpha_i}=p_{\alpha_i}^{-1}(\tau(B))\cup\tau(W_{\alpha_i}\times Z_{\alpha_i})$, entonces existen $V_i\in\tau(B)$ y $U_i\in\tau(W_{\alpha_i}\times Z_{\alpha_i})$, tales que $x_{\alpha_i}\in p_{\alpha_i}^{-1}(V_i)\cup U_i\subseteq R_i$.
Así $x\in\pi_{\alpha_i}^{-1}(p_{\alpha_i}^{-1}(V_i)\cup U_i)\subseteq\pi_{\alpha_i}^{-1}(R_i)$, para cada $i=1,2,...,n$. Pero $\pi_{\alpha_i}^{-1}(p_{\alpha_i}^{-1}(V_i)\cup U_i)=\pi_{\alpha_i}^{-1}(p_{\alpha_i}^{-1}(V_i))\cup\pi_{\alpha_i}^{-1}(U_i)=p^{-1}(V_i)\cup\pi_{\alpha_i}^{-1}(U_i)$.
Si se consideran los x_{α_i} tales que $x_{\alpha_i}\in U_i$, para $i=1,2,...,n$, entonces, como $x_{\alpha_i}\in U_i\in\tau(W_{\alpha_i}\times Z_{\alpha_i})$, existen abiertos $S_i\subseteq W_{\alpha_i}$ y $T_i\subseteq Z_{\alpha_i}$ tales que $x_{\alpha_i}\in S_i\times T_i\subseteq U_i$, pero $S_i\times T_i=(S_i\times Z_{\alpha_i})\cap(W_{\alpha_i}\times T_i)=pr_{W_{\alpha_i}}^{-1}(S_i)\cap q_{\alpha_i}^{-1}(T_i)$. Luego $x\in\pi_{\alpha_i}^{-1}(x_{\alpha_i})\in\pi_{\alpha_i}^{-1}(pr_{W_{\alpha_i}}^{-1}(S_i)\cap q_{\alpha_i}^{-1}(T_i))$, y

$$\begin{aligned}\pi_{\alpha_i}^{-1}(pr_{W_{\alpha_i}}^{-1}(S_i)\cap q_{\alpha_i}^{-1}(T_i)) &=\pi_{\alpha_i}^{-1}(pr_{W_{\alpha_i}}^{-1}(S_i))\quad\bigcap\quad\pi_{\alpha_i}^{-1}(q_{\alpha_i}^{-1}(T_i))\\ &=p^{-1}(S_i)\quad\bigcap\quad\pi_{\alpha_i}^{-1}(q_{\alpha_i}^{-1}(T_i)).\end{aligned}$$

Esto último se tiene para cada α_i tal que $x_{\alpha_i}\in U_i$, luego

$$x\in\bigcap_i\left[p^{-1}(S_i)\cap\pi_{\alpha_i}^{-1}(q_{\alpha_i}^{-1}(T_i))\right]=p^{-1}(\cap_iS_i)\bigcap(\cap_i\pi_{\alpha_i}^{-1}(q_{\alpha_i}^{-1}(T_i))).\tag{3-1}$$

Para $x_{\alpha_i}\notin U_i$, necesariamente se tiene $x_{\alpha_i}\in p_{\alpha_i}^{-1}(V_i)$. Así $x\in\pi_{\alpha_i}^{-1}(x_{\alpha_i})\subseteq\pi_{\alpha_i}^{-1}(p_{\alpha_i}^{-1}(V_i))$, para cada $x_{\alpha_i}\in p_{\alpha_i}^{-1}(V_i)$, entonces

$$x\in\bigcap_i\pi_{\alpha_i}^{-1}(p_{\alpha_i}^{-1}(V_i))=\bigcap_i p^{-1}(V_i)=p^{-1}(\cap_iV_i)\tag{3-2}$$

De (3-1) y (3-2) se obtiene

$$x\in p^{-1}(\cap_iV_i)\bigcap p^{-1}(\cap_iS_i)\bigcap\cap_i\pi_{\alpha_i}^{-1}(q_{\alpha_i}^{-1}(T_i))=p^{-1}(\cap_iV_i\bigcap\cap_iS_i)\bigcap\cap_i\pi_{\alpha_i}^{-1}(q_{\alpha_i}^{-1}(T_i)),$$

de donde, reescribiendo $S=\cap V_i\bigcap\cap S_i\in\tau(B)$, obtenemos

$$x\in p^{-1}(S)\bigcap\cap\pi_{\alpha_i}^{-1}(q_{\alpha_i}^{-1}(T_i)).$$

Como $p^{-1}(S)\in\mathcal{B}$, $\pi_{\alpha_i}^{-1}(q_{\alpha_i}^{-1}(T_i))\in\mathcal{B}$ y todas las intersecciones consideradas son finitas, existe $O_0\in\mathcal{B}$ con $x\in O_0\subseteq p^{-1}(S)\bigcap\cap\pi_{\alpha_i}^{-1}(q_{\alpha_i}^{-1}(T_i))\subseteq R\cap P=O$ $\square$

Definimos ahora una función fibrada que hará el papel de la función evaluación de la topología general. Empezamos definiéndola para un EPTP y después la extendemos al caso general de un PTP.

Definición 18. *Sean $f : X \to B$, $P = P(B,Z,W)$ y $s : f^{-1}(W) \to Z$. Definimos el producto diagonal de f y s como la función $\Delta(f,s) : X \to P$ dada por:*

$$\Delta(f,s)(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \setminus f^{-1}(W) \\ (f(x), s(x)) & x \in f^{-1}(W) \end{cases}$$

Es claro que si $W = \emptyset$ entonces $\Delta(f,s) = f$.

Proposición 25. *Sean $f : X \to B$, $P = P(B,Z,W)$ un EPTP con proyección $p : P \to B$ y $s : f^{-1}(W) \to Z$. El producto diagonal $\Delta(f,s)$ cumple:*

1. *$p \circ \Delta(f,s) = f$.*
2. *Si f y s son continuas entonces $\Delta(f,s)$ también lo es.*

Demostración.

1. Si $x \in X \setminus f^{-1}(W)$ entonces $\Delta(f,s)(x) = f(x) \in B \setminus W$, luego $p(\Delta(f,s)(x)) = p(f(x)) = f(x)$. Ahora si $x \in f^{-1}(W)$ entonces $f(x) \in W$ y $\Delta(f,s)(x) = (f(x), s(x))$, luego $p(\Delta(f,s)(x)) = p(f(x), s(x)) = f(x)$.

2. Sea $O \subseteq P$ un abierto básico en P. Entonces $O = Q \cup V$, con $Q = p^{-1}(U)$ y U un conjunto abierto de B, y $V = A \times C$ con A y C conjuntos abiertos en W y Z, respectivamente. Ahora, tomemos $x \in \Delta^{-1}(f,s)(Q \cup V) = \Delta^{-1}(f,s)(Q) \cup \Delta^{-1}(f,s)(V)$. Pueden ocurrir dos casos, $x \in \Delta^{-1}(f,s)(V)$ o $x \in \Delta^{-1}(f,s)(Q)$.

   Si $x \in \Delta^{-1}(f,s)(V)$, entonces $(f(x), s(x)) \in V$. La continuidad de f y s en x nos permite asegurar la existencia de vecindades abiertas de x, $R \subseteq X$ y $S \subseteq X$, tales que $f(R) \subseteq A$ y $s(S) \subseteq C$, luego $x \in R \cap S \subseteq \Delta^{-1}(f,s)(O)$.

   Por otro lado si $x \in \Delta^{-1}(f,s)(Q)$, como $Q = p^{-1}(U)$, entonces $\Delta^{-1}(f,s)(p^{-1}(U)) = f^{-1}(U)$. Luego por continuidad de f, $f^{-1}(U) = \Delta^{-1}(f,s)(p^{-1}(U)) = \Delta^{-1}(f,s)(Q)$ es un conjunto abierto en X.

   En total tenemos que para cada abierto básico $O = Q \cup V$ de P se cumple que $\Delta^{-1}(f,s)(O)$ es un conjunto abierto en X.

□

Habiendo definido $\Delta(f,s)$, consideramos ahora el caso general de una función diagonal $\Delta : X \to P(B, \{Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, \{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ definida a partir de una función $f : X \to B$ y una familia de funciones $\{s_\alpha : f^{-1}(W_\alpha) \to Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.

Definición 19. *Sean $f : X \to B$ una función, $P = P(B, \{Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, \{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ un PTP, $\{s_\alpha : f^{-1}(W_\alpha) \to Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de funciones y $\Delta_\alpha = \Delta(f, s_\alpha)$ el producto diagonal de f y s_α, con $\alpha \in \Lambda$. Definimos el producto diagonal de $f : X \to B$ y la familia $\{s_\alpha : f^{-1}(W_\alpha) \to Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, denotado por $\Delta(f, \{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}) : X \to P$, como*

$$\Delta(f, \{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}) = \Pi_{\alpha\in\Lambda}(\Delta(f, s_\alpha))$$

donde el codomio de esta última se restringe a $\Pi_B P_\alpha$.

Observemos que efectivamente $\Delta(f, \{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})(X) \subseteq P$. En efecto, si $x \in X$ entonces $\Delta_\alpha(x) \in P(B, Z_\alpha, W_\alpha)$(Definición 18). Luego, la Proposición 25 nos asegura que, para $\alpha \in \Lambda$, se cumple $p_\alpha \circ \Delta_\alpha = f$, con $p_\alpha : P(B, Z_\alpha, W_\alpha) \to B$ la proyección asociada a $P(B, Z_\alpha, W_\alpha)$. Concluimos entonces que

$$p_\alpha(pr_\alpha(\{\Delta_\alpha(x)\}_{\alpha\in\Lambda})) = f(x) = p_\gamma(pr_\gamma(\{\Delta_\alpha(x)\}_{\alpha\in\Lambda}))$$

para cada $\alpha, \gamma \in \Lambda$, es decir, $\{\Delta_\alpha(x)\}_{\alpha\in\Lambda} \in P$.
Como en el caso del producto diagonal $\Delta(f,s)$ tenemos que el comportamiento de el producto diagonal $\Delta(f, \{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ está determinado por el comportamiento de f y de la familia $\{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.

Proposición 26. *Sean $P = P(B, \{Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, \{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ un PTP con proyección larga $p : P \to B$, $f : X \to B$ una función, $\{s_\alpha : f^{-1}(W_\alpha) \to Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de funciones y $\Delta(f, \{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ su producto diagonal. Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *$p \circ \Delta(f, \{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}) = f$.*
2. *Si f es continua y s_α es continua para cada $\alpha \in \Lambda$ entonces $\Delta(f, \{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ es continua.*
3. *Para cada $\gamma \in \Lambda$, se tiene que si $q_\gamma : W_\gamma \times Z_\gamma \to Z_\gamma$ es la proyección lateral de $W_\gamma \times Z_\gamma$ en Z_γ y $pr_\gamma : P \to P(B, Z_\gamma, W_\gamma)$ es la proyección usual del producto P en $P(B, Z_\gamma, W_\gamma)$, entonces $s_\gamma = (q_\gamma \circ pr_\gamma \circ \Delta(f, \{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}))|_{f^{-1}(W_\gamma)}$.*

Demostración.

1. Sea $x \in X$. Por definición, se tiene que $\Delta(f, \{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})(x) = \{\Delta(f, s_\alpha)(x)\}_{\alpha\in\Lambda}$, luego por la Definición 17 y la Proposición 25, tenemos que $p(\{\Delta(f, s_\alpha)(x)\}_{\alpha\in\Lambda}) = p_\gamma \circ \Delta_\gamma = f(x)$, para cualquier $\gamma \in \Lambda$.

2. Es un hecho que para cualquier familia $\{g_\alpha : A \to C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, se tiene que, si $g_\alpha : A \to C_\alpha$ es continua, para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces la función $g : A \to \prod_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha$, definida por $g(x) = \{g_\alpha(x)\}_{\alpha\in\Lambda}$, es continua. En efecto, sea $x \in A$ y $U = \cap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ una vecindad básica de $g(x)$, dada por la familia finita de conjuntos abiertos $U_{\alpha_i} \subseteq C_{\alpha_i}$. Se tiene que $g_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ es un conjunto abierto de A y $x \in g_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$, ésto producto de la continuidad de cada g_α y la definición de g. Luego $O = \cap_{i=1}^{n} g_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ es un conjunto abierto de X, tal que $x \in O$ y $g(O) \subseteq \cap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$.

3. Sea $x \in f^{-1}(W_\gamma)$. Por definición de $\Delta(f, s_\gamma)$ se tiene $\Delta(f, s_\gamma)(x) = (f(x), s_\gamma(x))$. Luego, $pr_\gamma(\Delta(f, \{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}))|_{f^{-1}(W_\gamma)}(x)) = (f(x), s_\gamma(x))$ y por lo tanto, al aplicar q_γ, obtenemos $q_\gamma(pr_\gamma(\Delta(f, \{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})|_{f^{-1}(W_\gamma)}(x))) = q_\gamma((f(x), s_\gamma(x))) = s_\gamma(x)$.

□

Desarrollamos ahora algunas propiedades de los EPTP y PTP relacionadas con los axiomas de separación y la compacidad, éstas serán herramientas fundamentales para la construcción de la compactificación en la siguiente sección.

Proposición 27. *Sea $P = P(B, Z, W)$ un EPTP. Si Z es compacto entonces $p : P \to B$ es una función compacta.*

Demostración. Como Z es compacto, la caracterización de Kuratowski-Mrówka nos dice que $\pi_1 : B \times Z \to B$ es una función cerrada. Es claro también que la función π_1 tiene fibras compactas, porque para cada $b \in B$ se cumple $\pi_1^{-1}(b) = \{b\} \times Z \cong Z$. Ahora, utilizando la proyección lateral $q : W \times Z \to Z$ y el hecho que $\pi_1^{-1}(W) = W \times Z$, definimos el producto diagonal $\Delta(\pi_1, q)$. Como π_1 y q son funciones continuas, la función $\Delta(\pi_1, q) : B \times Z \to P$ también lo es.
Afirmamos que $\Delta(\pi_1, q)$ es un morfismo sobreyectivo entre las funciones π_1 y p. En efecto, para $x \in P$ se dan dos casos, o bien $x \in B\backslash W$ o bien $x \in W \times Z$. En el primer caso se cumple $\Delta(\pi_1, q)(x, z) \notin W \times Z = \pi_1^{-1}(W)$, para cualquier $z \in Z$. Luego, $\Delta(\pi_1, q)(x, z) = \pi_1(x, z) = x$. Por otro lado, si $x \in W \times Z$ entonces $x = (a, z)$, con $a \in W$ y $z \in Z$. Por lo tanto, al evaluar $\Delta(\pi_1, q)$ en x, obtenemos $\Delta(\pi_1, q)(x) = \Delta(\pi_1, q)(a, z) = (\pi_1(a, z), q(a, z)) = (a, z) = x$. Observamos también que, por la Proposición 25, $p \circ \Delta(\pi_1, q) = \pi_1$, luego $\Delta(\pi_1, q)$ es un morfismo de $\mathbf{Top_B}$.
Finalmente, aplicando la Proposición 10 y las observaciones anteriores, concluimos que $p : P \to B$ es una función compacta. Pues es la imagen de la función compacta $\pi_1 : B \times Z \to B$ por medio del morfismo $\Delta(\pi_1, q)$. □

Proposición 28. *Sea $P = P(B, \{Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, \{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ un PTP, con proyección larga $p : P \to B$. Si Z_α es compacto para cada $\alpha \in \Lambda$ entonces $p : P \to B$ es una función compacta.*

Demostración. Por la Proposición 27, se tiene que la función $p_\alpha : P(B, Z_\alpha, W_\alpha) \to B$ es compacta, para cada $\alpha \in \Lambda$. Luego, por la proposición 21 y la definición de $p : P \to B$ como un producto fibrado, se concluye que $p : P \to B$ es una función compacta. $\square$

Proposición 29. *Sea $P = P(B, Z, W)$ un EPTP con proyección $p : P \to B$. Se cumple que:*

1. *Si Z es un espacio topológico T_0 entonces $p : P \to B$ es una función de tipo T_0.*

2. *Si Z es un espacio topológico T_1 entonces $p : P \to B$ es una función de tipo T_1.*

3. *Si Z es un espacio topológico T_2 entonces $p : P \to B$ es una función de tipo T_2.*

4. *Si Z es un espacio topológico completamente regular entonces $p : P \to B$ es una función completamente regular.*

5. *Si Z es un espacio topológico de Tychonoff entonces $p : P \to B$ es una función de Tychonoff.*

Demostración. Observamos primero que si $x, x' \in P(B, Z, W)$, son tales que $x \neq x'$ y $p(x) = p(x')$, entonces $x \notin B \setminus W$ y $x' \notin B \setminus W$. Pues, caso contrario se concluye que $x = p(x) = p(x') = x'$, una contradicción. Por lo tanto $\{x, x'\} \subseteq W \times Z$. De la condición $p(x) = p(x')$, se obtiene que $x = (y, z_1)$ y $x' = (y, z_2)$,con $y \in W$, $z_1, z_2 \in Z$ y $z_1 \neq z_2$.

1. Como Z es T_0, existe una vecindad abierta A de z_1 en Z, tal que $z_2 \notin A$. Ahora, si consideramos una vecindad básica $W \times A$ de (y, z_1), es claro que $(y, z_2) \notin W \times A$. Es decir, existe una vecindad de $x = (y, z_1)$ que no tiene a $x' = (y, z_2)$ como elemento.

2. Dado que Z es un espacio T_1, existen vecindades abiertas A, C, de z_1 y z_2, respectivamente, tales que $z_2 \notin A$ y $z_1 \notin C$. Si consideramos las vecindades básicas $W \times A$, $W \times C$ de $x = (y, z_1)$ y $x' = (y, z_2)$, respectivamente, es claro que $x' \notin W \times A$ y $x \notin W \times C$. Luego $p : P \to B$ es una función tipo T_1.

3. Por ser Z un espacio T_2 existen vecindades abiertas disyuntas A, C, de z_1 y z_2, respectivamente. Luego los abiertos básicos $W \times A$ y $W \times C$, son disyuntos y tales que $(y, z_1) \in W \times A$, $(y, z_2) \in W \times C$. Concluimos que $p : P \to B$ es una función de tipo T_2.

4. Sean $F \subseteq P(B, Z, W)$ un conjunto cerrado y $x' \in P(B, Z, W)$, tales que $x' \notin F$. Como F es un conjunto cerrado, existe una vecindad básica $O \in p^{-1}(\tau(B)) \cup \tau(W \times Z)$, de x', tal que $O \cap F = \emptyset$. Ahora, hay dos posibilidades, o bien $x' \in B \setminus W$ o bien $x' \in W \times Z$. En el primer caso podemos considerar $O \in p^{-1}(\tau(B))$ y definir $s : O \to [0, 1]$, por $s(x) = 1$ para todo $x \in O$. Por otro lado, si $x' \in W \times Z$ entonces podemos considerar

$O = A \times C$, con $A \subseteq W$ y $C \subseteq Z$ conjuntos abiertos. Es claro que el conjunto $Z \setminus C$ es un conjunto cerrado y que para la proyección lateral q, se cumple $q(x') \notin Z \setminus C$. Utilizando la propiedad de completa regularidad de Z, fijamos una función continua $r : Z \to [0,1]$, tal que $r(q(x')) = 1$ y $r(Z \setminus C) \subseteq \{0\}$. Ahora se define la función continua $s : A \times Z \to [0,1]$, por $s(x) = r(q(x))$. Se puede observar que $s(x') = r(q(x')) = 1$ y $s(x) = 0$, para cada $x \in A \times Z \setminus A \times C$, porque para $x \in A \times Z \setminus A \times C$ se cumple $q(x) \notin C$ y por lo tanto $r(q(x)) = 0$. En particular se tiene $s(F \cap p^{-1}(A)) \subseteq \{0\}$. Concluimos que $p : P \to B$ es una función completamente regular.

5. De los numerales 1. y 4. se concluye que $p : P \to B$ es una función de Tychonoff.

□

Ahora generalizamos la proposición anterior al caso de los PTP

Proposición 30. *Sea $P = P(B, \{Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, \{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ un PTP con proyección $p : P \to B$. Se cumple que:*

1. *Si Z_α es un espacio topológico T_0 para cada $\alpha \in \Lambda$ entonces $p : P \to B$ es una función de tipo T_0.*

2. *Si Z_α es un espacio topológico T_1 para cada $\alpha \in \Lambda$ entonces $p : P \to B$ es una función de tipo T_1.*

3. *Si Z_α es un espacio topológico T_2 para cada $\alpha \in \Lambda$ entonces $p : P \to B$ es una función de tipo T_2.*

4. *Si Z_α es un espacio topológico completamente regular para cada $\alpha \in \Lambda$ entonces $p : P \to B$ es una función completamente regular.*

5. *Si Z_α es un espacio topológico de Tychonoff para cada $\alpha \in \Lambda$ entonces $p : P \to B$ es una función de Tychonoff.*

Demostración. Los numerales 1., 2. y 3. son consecuencia directa de la definición de $p : P \to Y$ como un producto fibrado, la Proposición 8 y la Proposición 29.
Los numerales 4. y 5. son consecuencia de la definición de $p : P \to Y$, la Proposición 9 y la Proposición 29. □

Una de las características del conjunto de funciones continuas y acotadas que más importancia tiene en la construcción clásica de la compactificación de Stone-Čech de un espacio de Tychonoff es la propiedad de separar puntos del espacio y separar puntos de subconjuntos cerrados. Como es de esperarse, al desarrollar métodos de compactificación en el caso fibrado es necesario definir propiedades de este tipo, solo que en este caso necesitamos separar puntos sobre la misma fibra y separar puntos de conjuntos cerrados de una manera más general. La siguiente definición se ocupa de precisar estas ideas.

Definición 20. *Sean $P = P(B, \{Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, \{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ un PTP, $f : X \to B$ una función continua y $\{s_\alpha : f^{-1}(W_\alpha) \to Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de funciones continuas.*
Diremos que la familia $\{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ separa puntos en $f : X \to B$, si para cada par de elementos $x, x' \in X$, tales que $x \neq x'$ y $f(x) = f(x')$, existe una función $s_\gamma \in \{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ para la cual $s_\gamma(x) \neq s_\gamma(x')$.
Diremos que la familia $\{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ separa puntos de conjuntos cerrados en $f : X \to B$, si para todo conjunto cerrado $F \subseteq X$ y cada $x \in X\setminus F$, tales que $f(x) \in \overline{f(F)}^B$, existe $s_\gamma \in \{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, tal que $s_\gamma(x) \notin \overline{s_\gamma(F \cap f^{-1}(W_\gamma))}^{Z_\gamma}$.

Proposición 31. *Sean $P = P(B, \{Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, \{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ un PTP, $f : X \to B$ una función continua tipo T_0, y $\{s_\alpha : f^{-1}(W_\alpha) \to Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un familia de funciones continuas. Si la familia $\{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ separa puntos de conjuntos cerrados en f, entonces $\{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ separa puntos en f.*

Demostración. Sean x, $x' \in X$, tales que $f(x) = f(x')$ y $x \neq x'$. Como $f : X \to B$ es una función tipo T_0, se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que existe una vecindad abierta O de x, tal que $x' \notin O$. Es claro que $f(x) = f(x') \in \overline{f(X \setminus O)}^B$, pues $x' \in X \setminus O$. Para el conjunto cerrado $X \setminus O$, existe, por hipótesis, una función $s_\gamma \in \{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, con $s_\gamma : f^{-1}(W_\gamma) \to Z_\gamma$, tal que $\{x, x'\} \subseteq f^{-1}(W_\gamma)$ y $s_\gamma(x) \notin \overline{s_\gamma((X \setminus O) \cap f^{-1}(W_\gamma))}^{Z_\gamma}$. En particular se tiene $x' \in (X \setminus O) \cap f^{-1}(W_\gamma)$. Luego, $s_\gamma(x) \neq s_\gamma(x')$, es decir, la familia $\{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ separa puntos en f. □

La siguiente es la extensión al caso fibrado del teorema de inmersión de un espacio topológico X en el producto de los codominios de una familia de funciones que separa puntos de X.

Proposición 32. *Sean $f : X \to B$ una función continua, $P = P(B, \{Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, \{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ un PTP y $\{s_\alpha : W_\alpha \to Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de funciones continuas que separa puntos en f y separa puntos de cerrados en f. Entonces la función diagonal, $\Delta(f, \{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}) : X \to P$, es una inmersión de f en p.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "f"'] & P \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Demostración. Denotamos $\Delta(f, \{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ como Δ, $P_\alpha = P(B, Z_\alpha, W_\alpha)$ y $\Delta(f, s_\alpha)$ como Δ_α. Recordamos también que Δ es el producto fibrado de las Δ_α.
La función $\Delta : X \to P$ es continua. Ésto es claro por la Proposición 26.
La función $\Delta : X \to P$ es uno a uno. En efecto, si x, $x' \in X$ son tales que $x \neq x'$ entonces, o bien $f(x) \neq f(x')$ o bien $f(x) = f(x')$. En el primer caso, para cada $\alpha \in \Lambda$, se cumple que

$\Delta_\alpha(x) \neq \Delta_\alpha(x')$, luego $\Delta(x) \neq \Delta(x')$. Ahora, si $f(x) = f(x')$ entonces existe $s_\gamma \in \{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, tal que $s_\gamma : f^{-1}(W_\gamma) \to Z_\gamma$, $\{x, x\} \subseteq f^{-1}(W_\gamma)$ y $s_\gamma(x) \neq s_\gamma(x')$. Por lo tanto

$$\Delta_\gamma(x) = (f(x), s_\gamma(x)) \neq (f(x'), s_\gamma(x')) = \Delta_\gamma(x')$$

lo cual implica $\Delta(x) \neq \Delta(x')$.
La función $\Delta : X \to \Delta(X)$ es cerrada. Sea $\Delta(x) \in \overline{\Delta(F)}^{\Delta(X)}$, con F un subconjunto cerrado de X. Se afirma que $x \in F$. En efecto, utilizando $p \circ \Delta = f$ (Proposición 26) y la continuidad de $p : P \to B$, se tiene que $f(x) = p(\Delta(x)) \in p(\overline{\Delta(F)}^P) \subseteq \overline{p(\Delta(F))}^B = \overline{f(F)}^B$. Luego $f(x) \in \overline{f(F)}^B$. Ahora, si $x \notin F$ entonces, por hipótesis, existe $s_\gamma \in \{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, tal que $s_\gamma : f^{-1}(W_\gamma) \to Z_\gamma$, $x \in f^{-1}(W_\gamma)$ y $s_\gamma(x) \notin \overline{s_\gamma(F \cap f^{-1}(W_\gamma))}^{Z_\gamma}$. Fijamos una vecindad abierta V de $s_\gamma(x)$ en Z_γ, tal que $V \cap s_\gamma(F \cap f^{-1}(W_\gamma)) = \emptyset$. El conjunto $W_\gamma \times V$ es una vecindad básica de $\Delta_\gamma(x)$ en P_γ, para la cual $(W_\gamma \times V) \cap \Delta_\gamma(F) = \emptyset$, pues para cada $a \in F$ se tiene que, o bien $a \in F \cap f^{-1}(W_\gamma)$, en cuyo caso $\Delta_\gamma(a) \notin W_\beta \times V$, pues $V \cap s_\gamma(F \cap f^{-1}(W_\gamma)) = \emptyset$, o bien $a \in F \setminus f^{-1}(W_\gamma)$, en cuyo caso $\Delta_\gamma(a) = f(a) \notin W_\gamma \times V$ (Definición 18). Ahora, como $(W_\gamma \times V) \cap \Delta_\gamma(F) = \emptyset$ y $\Delta_\gamma(x) \in W_\gamma \times V$, concluimos que $\Delta(x) \in \pi_\gamma^{-1}(W_\gamma \times V)$ y $\pi_\gamma^{-1}(W_\gamma \times V) \cap \Delta(F) = \emptyset$, es decir, $\Delta(x) \notin \overline{\Delta(F)}^{\Delta(X)}$, una contradicción. Por lo tanto $x \in F$. □

3.2. Construcción de la compactificación

Es bien sabido en la topología general que la familia de espacios topológicos compactos y de Hausdorff coincide con la familia de espacios topológicos compactos y de Tychonoff. Caso contrario a lo que uno esperaría, esta propiedad no se cumple para los espacios topológicos fibrados, es decir, existen funciones compactas y de tipo T_2 que no son de Tychonoff. Específicamente se puede construir una función compacta de un espacio regular, más no de Tychonof, en un espacio de Tychonoff ([2]). Ahora la función resultante es de tipo T_2 pues el dominio es Hausdorff, pero no puede ser de Tychonoff, pues la Proposición 7 nos diría que el dominio también sería de Tychonoff. Este punto de divergencia entre la teoría clásica y la teoría fibrada hace que sea necesario tratar separadamente las funciones compactas y de Tychonoff y las funciones compactas y de tipo T_2.

Definición 21. *Sea $f : X \to B$ una función continua y $\tau(B)$ la familia de conjuntos abiertos de B. Denotamos por $C^*(f)$ a la familia de funciones parciales sobre f, definida por*

$$C^*(f) = \{s : X_W \to \mathbb{R} : W \in \tau(B), s \text{ es continua y acotada } \}.$$

Proposición 33. *Sea $f : X \to B$ una función continua. A toda subfamilia de $C^*(f)$ que separa puntos en f y que separa puntos de conjuntos cerrados en f, corresponde una compactificación de Tychonoff de f.*

Demostración. Sea $\{s_\alpha : X_{W_\alpha} \to I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq C^*(f)$, una familia de funciones que separa puntos en f y que separa puntos de conjuntos cerrados en f. Como cada I_α es compacto, la Proposición 27 nos dice que si $P_\alpha = P(B, I_\alpha, W_\alpha)$ entonces la función $p_\alpha : P_\alpha \to B$ es una función compacta. Entonces, utilizando la Proposición 28, se obtiene que la función $p : P \to B$ es también compacta, donde $P = P(B, \{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, \{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$. Ahora, la Proposición 32 nos dice que $\Delta : X \to P$ es una inmersión, luego solo falta ver que $p : P \to B$ es una función de Tychonoff. Pero ésto es trivial, gracias a la Proposición 29 y la Proposición 30. Concluimos que la compactificación de Tychonoff de f determinada por la familia $\{s_\alpha : X_{W_\alpha} \to I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, está dada por $p|_{\overline{\Delta(X)}} : \overline{\Delta(X)} \to B$. □

Proposición 34. *Si $f : X \to B$ es una función de Tychonoff entonces la familia $C^*(f)$ separa puntos en f y separa puntos de conjuntos cerrados en f.*

Demostración. Sean x, $x' \in X$, tales que $x \neq x'$ y $f(x) = f(x')$. Como f es una función tipo T_0, suponemos sin perdida de generalidad, que existe un conjunto abierto $O \subseteq X$, tal que $x \in O$ y $x' \notin O$. Ahora, como f es una función completamente regular, existen una vecindad W de $f(x)$ y una función continua $s : X_W \to [0,1]$, tales que $s(x) = 1$ y $s(X_W \cap (X \setminus O)) \subseteq \{0\}$. Es claro que $x' \in X_W \cap (X \setminus O)$, por lo tanto, $s(x') = 0$. Concluimos que $s(x) \neq s(x')$.
Ahora, si $F \subseteq X$ y $x \in X \setminus F$, son tales que F es un conjunto cerrado y $f(x) \notin \overline{f(F)}$, entonces, puesto que f es una función completamente regular, existen una vecindad W de $f(x)$ y una función continua $s : X_W \to [0,1]$, tales que $s(x) = 1$ y $s(F \cap X_W) \subseteq \{0\}$. En particular se tiene que $1 = s(x) \notin \overline{s(F \cap X_W)} \subseteq \{0\}$. □

Corolario 1. *Toda función de Tychonoff tiene una compactificación de Tychonoff.*

Demostración. Ésto es resultado directo de la Proposición 33 y la Proposición 34. □

Definición 22. *Sea $f : X \to B$ una función de Tychonoff. Al conjunto de todas las compactificaciones de Tychonoff de f lo denotamos por $TK(f)$.*

Proposición 35. *Sea $f : X \to B$ una función continua de Tychonoff. Si $kf : X^k \to B$ es una compactificación de Tychonoff de f, entonces $kf : X^k \to B$ está determinada por una familia de funciones que separa puntos en f y que separa puntos de conjuntos cerrados en f.*

Demostración. Por hipótesis, $kf : X^k \to B$ es compacta y existe una inmersión densa $\lambda : X \to X^k$, tal que $f = kf \circ \lambda$. Como kf es una función de Tychonoff, la familia $C^*(kf) = \{s_\alpha : X^k_{W_\alpha} \to I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, separa puntos en kf y separa puntos de conjuntos cerrados en kf(Proposición 34). Teniendo en cuenta que kf es una función de Tychonoff compacta, una aplicación de la Proposición 10, la Proposición 12 y la Proposición 33 nos dice que $X^k \cong \Delta_k(X^k) = \overline{\Delta_k(X^k)}$, donde $\Delta_k : X^k \to P$ y $P = (B, \{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, \{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$ (ver demostración de la Proposición 33). Ahora, al considerar una función $s : X^k_W \to I \in C^*(kf)$, se tiene que $(s \circ \lambda)|_{X_W} : X_W \to I$, es una función parcial continua y acotada, es decir, $(s \circ \lambda)|_{X_W} \in C^*(f)$. Por lo tanto, $\{(s_\alpha \circ \lambda)|_{X_{W_\alpha}}\}_{s_\alpha\in C^*(kf)} \subseteq C^*(f)$. Aun más, puesto que λ es una inmersión, se tiene que $\{(s_\alpha \circ \lambda)|_{X_{W_\alpha}}\}_{s_\alpha\in C^*(kf)}$, separa puntos en f y separa puntos de cerrados en f. La Proposición 33 nos dice que la familia $\{(s_\alpha \circ \lambda)|_{X_{W_\alpha}}\}_{s_\alpha\in C^*(kf)}$ determina una compactificación de Tychonoff de f, $\overline{\Delta_x(X)}$, donde $\Delta_x : X \to P$ y de nuevo $P = (B, \{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, \{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$. Es claro que $\Delta_x(x) = \Delta_k(\lambda(x))$, pues $f = kf \circ \lambda$. Por otro lado la densidad de X en X^k implica que

$$\Delta_k(X^k) = \Delta_k(\overline{\lambda(X)}) \subseteq \overline{\Delta_k(\lambda(X))} \subseteq \overline{\Delta_k(X^k)} = \Delta_k(X^k)$$

Pero $\Delta_k(\lambda(X)) = \Delta_x(X)$, luego $\overline{\Delta_x(X)} = \overline{\Delta_k(\lambda(X))} = \Delta_k(X^k) \cong X^k$, es decir, $p|_{\overline{\Delta_x(X)}}$ y kf son equivalentes(Definición 15). Tenemos pues que $kf : X^k \to B$ está determinada por la familia $\{s_\alpha \circ \lambda|_{X_{W_\alpha}}\}_{s_\alpha\in C^*(kf)}$. □

Las proposiciones 33 y 35 nos muestran la correspondencia bidireccional que existe entre el conjunto de compactificaciones de una función de Tychonoff $f : X \to B$ y las subfamilias de $C^*(f)$ que separan puntos en f y que separan puntos de cerrados en f. A la compactificación correspondiente a toda la familia $C^*(f) = \{s_\alpha : X_{W_\alpha} \to I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, la denotamos por

$$\beta f : \beta_f X \to B$$

donde $\beta_f X = \overline{\Delta(X)}$ y $\Delta : X \to P$, con $P = P(B, \{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, \{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$, el producto diagonal de la función f y la familia $C^*(f)$.

Veremos ahora que la compactificación $\beta f : \beta_f X \to B$ de una función de Tychonoff f posee propiedades de extensión similares a las de su homóloga clásica. Comenzamos con un lema bastante útil.

Lema 1. *Sea $f : X \to B$ una función de Tychonoff. Si $\beta f : \beta_f X \to B$ es la compactificación determinada por $C^*(f)$, entonces para cada $s : X_W \to I \in C^*(f)$ existe una función continua $\tilde{s} : \beta f^{-1}(W) \to I$, única, tal que $\tilde{s} \circ (\Delta|_{X_w}) = s$.*

$$\begin{tikzcd}
X_W \arrow[r, "\Delta|_{X_W}"] \arrow[dr, "s"'] & \beta f^{-1}(W) \arrow[d, "\tilde{s}"] \\
& I
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sean la familia $C^*(f) = \{s_\alpha : X_{W_\alpha} \to I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y la función $\Delta : X \to P$, con $P = P(B, \{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, \{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$. Sabemos que $\beta f^{-1}(W) \subseteq p^{-1}(W)$, donde $p : P \to B$, es la proyección larga. Ahora, como $s : X_W \to I \in C^*(f)$, se tiene que $s = s_\gamma$, para algún $\gamma \in \Lambda$, luego :

$$\begin{aligned} &W = W_\gamma \\ &I = I_\gamma \\ &p \circ \Delta = f \end{aligned}$$

y

$$q_\gamma \circ \pi_\gamma \circ \Delta|_{X_W} = s$$

(ver Proposición 26). Definimos $\bar{s} : p^{-1}(W) \to I$, como $\bar{s}(x) = (q_\gamma \circ \pi_\gamma)(x)$. Es claro que $\bar{s}$ es continua, pues es composición de dos funciones continuas. Ahora, para $x \in X_W$ se tiene que $\Delta(x) = \{\Delta(f, s_\alpha)(x)\}_{s_\alpha \in C^*(f)}$, por lo tanto para γ se cumple $\pi_\gamma(\Delta(x)) = \Delta(f, s)(x) = (f(x), s(x))$, luego

$$\begin{aligned} \bar{s}(\Delta(x)) =& (q_\gamma \circ \pi_\gamma)(\Delta(x)) \\ =& q_\gamma(\pi_\gamma(\Delta(x))) \\ =& s(x). \end{aligned}$$

Ahora, dado que $\beta f^{-1}(W) \subseteq p^{-1}(W)$, definimos $\tilde{s} : \beta f^{-1}(W) \to I$, por $\tilde{s}(x) = \bar{s}|_{\beta f^{-1}(W)}(x)$. La unicidad de $\tilde{s}$ se obtiene al observar que $\Delta(X_W)$ es denso en $\beta f^{-1}(O)$ y que I es un espacio de Hausdorff. □

A la usanza del caso clásico, se acostumbra a identificar a X con su imagen por Δ sobre $\beta_f X$ y decir que $\tilde{s}$ es una extensión de s. En estos términos, la proposición anterior toma la forma: Para toda función parcial sobre X_W existe una extensión única a todo $\beta_f X_W$.

Proposición 36. *Sean $f : X \to B$ y $g : Y \to B$ dos funciones de Tychonoff y $bg : Y^b \to B$ una compactificación de Tychonoff de g. Si $\lambda : f \to g$ es un morfismo en* $\mathbf{Top_B}$*, entonces existe un morfismo perfecto, único, $\check{\lambda} : \beta f \to bg$, tal que $\check{\lambda} \circ \Delta_X = \Delta_Y \circ \lambda$.*

$$\begin{tikzcd} \beta f \arrow[r, "\check{\lambda}"] & bg \\ f \arrow[u, "\Delta_X"] \arrow[r, "\lambda"] & g \arrow[u, "\Delta_Y"'] \end{tikzcd}$$

Demostración. Como $bg : Y^b \to B$ es una compactificación de Tychonoff, la Proposición 35 nos dice que ésta está determinada por una subfamilia $S = \{s_\alpha : Y_{W_\alpha} \to I_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq C^*(g)$. Entonces podemos suponer, sin perdida de generalidad, que $Y^b = \overline{\Delta_Y(Y)}$, con

$\Delta_Y : Y \to P(B, \{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, \{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$. Ahora, para cada $s_\alpha \in S$ el morfismo $\lambda : f \to g$ induce una función $\bar{s}_\alpha : X_{W_\alpha} \to I_\alpha$, dada por $\bar{s}_\alpha = s_\alpha \circ \lambda$. Por el Lema 1, podemos extender cada $\bar{s}_\alpha$ a una función $\tilde{s} : \beta_f X_{W_\alpha} \to I_\alpha$. Definimos entonces el producto diagonal de la función $\beta f : \beta_f X \to B$ y la familia de funciones $\{\tilde{s}_\alpha : \beta_f X_{W_\alpha} \to I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ (Definición 19), dado por

$$\Delta : \beta_f X \to P(B, \{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, \{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$$

Mostraremos ahora que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\beta_f X \arrow[r, "\Delta"] & P(B, \{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, \{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}) \\
X \arrow[u, "\Delta_X"] \arrow[r, "\lambda"] & Y \arrow[u, "\Delta_Y"']
\end{tikzcd}$$

Consideremos $\Delta_Y(\lambda(x)) \in P(B, \{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, \{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda})$. Para cada $s_\alpha \in S$ tenemos que:

- Si $\lambda(x) \in Y_{W_\alpha}$ entonces

$$\begin{aligned}
\pi_\alpha(\Delta_Y(\lambda(x))) =& (g(\lambda(x)), s_\alpha(\lambda(x))) \\
=& (f(x), \bar{s}_\alpha(x)) \\
=& (\beta f(\Delta_X(x)), \tilde{s}_\alpha(\Delta_X(x))) \\
=& \pi_\alpha(\Delta(\Delta_X(x)))
\end{aligned}$$

- Si $\lambda(x) \notin Y_{W_\alpha}$ entonces $x \notin X_{W_\alpha}$ y

$$\begin{aligned}
\pi_\alpha(\Delta_Y(\lambda(x))) =& g(\lambda(x)) \\
=& f(x) \\
=& \beta f(\Delta_X(x)) \\
=& \pi_\alpha(\Delta(\Delta_X(x)))
\end{aligned}$$

Es decir, $\Delta \circ \Delta_X$ y $\Delta_Y \circ \lambda$ coinciden en cada dimensión. Por lo tanto $\Delta \circ \Delta_X = \Delta_Y \circ \lambda$. Por otro lado, la continuidad de las funciones y la observación anterior implican

$$\begin{aligned}
\Delta(\beta_f X) =& \Delta(\overline{\Delta_X(X)}) \\
\subseteq& \overline{\Delta(\Delta_X(X))} \\
=& \overline{\Delta_Y(\lambda(X))} \\
\subseteq& \overline{\Delta_Y(Y)} \\
=& Y^b
\end{aligned}$$

Así $\Delta(\beta X) \subseteq Y^b$, luego podemos considerar $\check{\lambda} : \beta X \to Y^b$ definida como $\check{\lambda}(x) = \Delta(x)$.
Para determinar la unicidad de la función $\check{\lambda}$ basta observar que toda función $\ddot{\lambda}$ que cumpla $\ddot{\lambda} \circ \Delta_X = \Delta_Y \circ \lambda$, necesariamente coincide con $\check{\lambda}$ en $\Delta_X(X)$, un conjunto denso de $\beta_f X$, además bg es una función de Tychonoff y por lo tanto también de Hausdorff, luego, por Proposición 2, se obtiene que $\ddot{\lambda} = \check{\lambda}$.
Para ver que $\check{\lambda}$ es una función perfecta, observamos que βf es una función compacta y bg es una función de Hausdorff, entonces, por la Proposición 13, $\check{\lambda}$ es una función perfecta. □

El siguiente resultado extiende la caracterización de la compactificación de Stone-Čech al caso de la compactificación βf.

Proposición 37. *Sea $f : X \to B$ una función de Tychonoff. Si $bf : X^b \to B$ es una compactificación de $f : X \to B$, entonces existe un único morfismo canónico y perfecto $\lambda_b : \beta f \to bf$.*

Demostración. Si consideramos el morfismo identidad $i : f \to f$, tenemos que, por la Proposición 36, existe un único morfismo perfecto $\lambda_b : \beta f \to bf$, tal que $\lambda_b \circ \Delta_X = \Delta_b \circ i = \Delta_b$, donde $\Delta_b : X \to X^b$ es la inmersión determinada por la compactificación $bf : X^b \to Y$. □

4 Compactificación por medio de filtros atados

En la topología clásica se estudian normalmente dos métodos distintos de compactificación para un espacio de Tychonoff. El primero de ellos se basa en la idea de construir un espacio compacto por medio del producto de intervalos de la forma $[0,1]$ y ver que es posible hacer una inmersión del espacio de Tychonoff original en este nuevo espacio compacto; la extensión de esta idea al caso fibrado fue básicamente el contenido del capítulo anterior. El segundo método clásico de compactificación se basa en la utilización de z-conjuntos, z-filtros y la idea de hacer converger todos los z-ultrafiltros que no convergen en el espacio original. De hecho este método es un caso particular de un método de compactificación diseñado por Wallman (ver [19]). El objetivo de este capítulo es generalizar este método filtrado de compactificación al caso fibrado. Es de notar que los resultados de este capítulo aparecen por primera vez en la literatura y son obra del autor de este trabajo.

4.1. b-z-conjuntos y b-z-filtros

Definición 23. *Sea $f : X \to B$ una función continua. Decimos que $M \subseteq X$ es un b-z-conjunto, si existen una vecindad W de b en B y una función continua $s : f^{-1}(W) \to [0,1]$, tales que $s^{-1}(0) = M \cap X_W$.*

En el caso particular de una función de Tychonoff se puede asegurar la existencia de suficientes b-z-conjuntos.

Observación 3. *Si M es un b-z-conjunto, W es una vecindad abierta de b y $s : f^{-1}(W) \to [0,1]$ es una función continua, tales que $M \cap X_W = s^{-1}(0)$, entonces M es un c-z-conjunto para todo $c \in W$.*

Observación 4. *Un b-z-conjunto es un conjunto cerrado en $f^{-1}(W)$, pero no necesariamente es cierto que M es cerrado en todo X. Por otra parte, si para cada vecindad W de b se define la función constante $s : X_W \to [0,1]$, dada por $s(x) = 0$, es claro que X_W es un b-z-conjunto. De manera similar, tomando la función constante $f(x) = 1$ se puede ver que $\emptyset$ es un b-z-conjunto. Finalmente, en el caso que el espacio B sea un conjunto unitario se* *tiene trivialmente que la definición de b-z-conjunto coincide con la definición de z-conjunto de la topología general.*

De ahora en adelante usamos la tripleta (M, W, s), para representar un b-z-conjunto M, donde W es una vecindad de b y $s : X_W \to [0,1]$ es una función continua, con $M \cap X_W = s^{-1}(0)$.

Proposición 38. *Sea $f : X \to B$ una función continua. Si $b \in B$, W es una vecindad de b y $s : X_W \to [0,1]$ una función continua entonces los conjuntos $s^{-1}([\delta, 1])$ y $s^{-1}([0, \delta])$ son b-z-conjuntos, para cada $\delta \in [0,1]$.*

Demostración. Sean b, W y s como en el enunciado. Si consideramos las funciones $r(x) = max\{0, \delta - s(x)\}$ y $t(x) = max\{0, s(x) - \delta\}$, ambas definidas en X_W, tenemos que r y t son continuas, pues son obtenidas como composición de funciones continuas, con $r^{-1}(0) = s^{-1}([\delta, 1])$ y $t^{-1}(0) = s^{-1}([0, \delta])$. □

Proposición 39. *La intersección de dos b-z-conjuntos es un b-z-conjunto.*

Demostración. Sean $f : X \to B$ una función continua y (M, W, s), (N, V, r) dos b-z-conjuntos. Si consideramos la función continua $t : X_{V \cap W} \to [0,1]$, definida como $t(x) = (s(x) + r(x))/2$, tenemos que $t^{-1}(0) = \{x \in X_{V \cap W} : s(x) = 0 \text{ y } r(x) = 0\}$, es decir, $t^{-1}(0) = s^{-1}(0) \cap r^{-1}(0) \cap X_{W \cap V} = M \cap N \cap X_{W \cap V}$. □

Proposición 40. *La unión de dos b-z-conjuntos es un b-z-conjunto.*

Demostración. Sean $f : X \to B$ una función continua y (M, W, s), (N, V, r) dos b-z-conjuntos. Si consideramos la función $t : X_{V \cap W} \to [0,1]$, definida como $t(x) = (s(x) * r(x))$, se obtiene $t^{-1}(0) = \{x \in X_{V \cap W} : s(x) = 0 \text{ o } r(x) = 0\}$, es decir, $t^{-1}(0) = (s^{-1}(0) \cup r^{-1}(0)) \cap X_{W \cap V} = (M \cup N) \cap X_{W \cap V}$. □

Definición 24. *Dadas $f : X \to B$ y $b \in B$, decimos que una familia $\mathfrak{F}$ no vacía de b-z-conjuntos no vacíos en X es un b-z-filtro si cumple las siguientes condiciones:*

i. Para cada M_1 y M_2 en $\mathfrak{F}$ se tiene que $M_1 \cap M_2 \in \mathfrak{F}$.

ii. Si $M \in \mathfrak{F}$ y M' es un b-z-conjunto tal que $M \subseteq M'$ entonces $M' \in \mathfrak{F}$.

iii. La colección $\{f(M) : M \in \mathfrak{F}\}$ genera un filtro en B que converge a b.

Definición 25. *Decimos que el b-z-filtro $\mathfrak{U}$ es un b-z-ultrafiltro, si no hay un b-z-filtro que lo contenga propiamente.*

Definición 26. *Se dice que el b-z-filtro $\mathfrak{F}$ converge a $x \in X_b$, si para todo b-z-conjunto M, con $x \in M$, se tiene que $M \in \mathfrak{F}$.*

Definición 27. *Se dice que $x \in X_b$ es un punto de adherente del b-z-filtro $\mathfrak{F}$, si $x \in M$ para todo $M \in \mathfrak{F}$.*

Proposición 41. *Todo b-z-filtro está contenido en un b-z-ultrafiltro.*

Demostración. Sea $\mathfrak{F}$ un b-z-filtro y $\mathcal{N}$ la colección de todos los b-z-filtros que contienen a $\mathfrak{F}$. Claramente $\mathcal{N} \neq \emptyset$, pues $\mathfrak{F} \in \mathcal{N}$. Definimos una relación de orden en $\mathcal{N}$ de la siguiente manera: para $\mathfrak{H} \in \mathcal{N}$, $\mathfrak{E} \in \mathcal{N}$ se tiene que $\mathfrak{H} \leq \mathfrak{E}$ si y solo si $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{E}$. Toda cadena en $\mathcal{N}$ está acotada superiormente. En efecto, si $\mathcal{A}$ es una cadena, ésta tiene a $\bigcup \mathcal{A}$ como cota superior. El lema de Zorn nos permite decir que en $\mathcal{N}$ hay elementos máximales, es decir, b-z-ultrafiltros. $\square$

Proposición 42. *Todo b-z-ultrafiltro $\mathfrak{U}$ es primo, es decir, si M y N son b-z-conjuntos, tales que $M \cup N \in \mathfrak{U}$, entonces $M \in \mathfrak{U}$ o $N \in \mathfrak{U}$.*

Demostración. Sean $f : X \to B$ una función continua, $b \in B$, $\mathfrak{U}$ un b-z-ultrafiltro sobre f y M, N dos b-z-conjuntos, con $M \cup N \in \mathfrak{U}$. Supongamos que $M \notin \mathfrak{U}$ y consideremos la familia $\mathfrak{F} = \{G \subseteq X : G \text{ es un b-z-conjunto y } G \cup M \in \mathfrak{U}\}$.
La familia $\mathfrak{F}$ es un b-z-filtro. En efecto:

- La familia $\mathfrak{F}$ es no vacía ya que $N \in \mathfrak{F}$.
- La familia $\{f(G) : G \in \mathfrak{F}\}$ genera un filtro en B que converge a b. Observamos que $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$. Si $G \in \mathfrak{U}$, entonces $G \subseteq G \cup M$ y $G \cup M \in \mathfrak{U}$, puesto que $\mathfrak{U}$ es cerrado por superconjuntos. Concluimos que $\{f(G) : G \in \mathfrak{F}\}$ genera un filtro que converge a b, pues la familia $\{f(G) : G \in \mathfrak{U}\}$ así lo hace.
- La familia $\mathfrak{F}$ es cerrada para superconjuntos. Sean $G \in \mathfrak{F}$ y H es un b-z-conjunto, tal que $G \subseteq H$. Entonces, por definición de $\mathfrak{F}$, $G \cup M \in \mathfrak{U}$, luego, $G \cup M \subseteq H \cup M$ y $H \cup M \in \mathfrak{U}$. Concluimos que $H \in \mathfrak{F}$.
- La familia $\mathfrak{F}$ es cerrada para intersecciones. Sean $G \in \mathfrak{F}$ y $H \in \mathfrak{F}$. Entonces $H \cup M \in \mathfrak{U}$ y $G \cup M \in \mathfrak{U}$, luego $(H \cup M) \cap (G \cup M) \in \mathfrak{U}$, y puesto que $(H \cup M) \cap (G \cup M) = (H \cap G) \cup M$, se concluye que $G \cap H \in \mathfrak{F}$.

Como se observó anteriormente $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$. Luego, siendo $\mathfrak{U}$ un b-z-ultrafiltro, se tiene que $\mathfrak{U} = \mathfrak{F}$, lo cual implica que $N \in \mathfrak{U}$. $\square$

Proposición 43. *Todo b-z-filtro primo está contenido en un único b-z-ultrafiltro.*

Demostración. Razonamos por contradicción. Sea $\mathfrak{F}$ un b-z-filtro primo y supongamos que existan dos b-z-ultrafiltros distintos $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{U}'$, tales que $\mathfrak{F} \in \mathfrak{U}$, $\mathfrak{F} \in \mathfrak{U}'$. Puesto que $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{U}'$, existen b-z-conjuntos $(M, W, s) \in \mathfrak{U}$ y $(N, V, r) \in \mathfrak{U}'$, tales que $M \cap N = \emptyset$. Se definen $t : X_{W\cap V} \to [0, 1]$ y $u : X_{W\cap V} \to [0, 1]$ como:

$$t(x) = \begin{cases} s(x) - r(x) & \text{si } s(x) \geqslant r(x) \\ 0 & \text{si } s(x) < r(x) \end{cases}$$

y

$$u(x) = \begin{cases} r(x) - s(x) & \text{si } r(x) \geqslant s(x) \\ 0 & \text{si } r(x) < s(x) \end{cases}$$

Consideremos ahora $G = t^{-1}(0) \cup [M \setminus t^{-1}(0)]$ y $H = u^{-1}(0) \cup [N \setminus u^{-1}(0)]$. Afirmamos que $G \in \mathfrak{U}$ y $H \in \mathfrak{U}'$. En efecto, G y H son b-z-conjuntos con la particularidad que $M \subseteq G$ y $N \subseteq H$, pues $M \cap X_{W\cap V} \subseteq t^{-1}(0)$ y $N \cap X_{W\cap V} \subseteq u^{-1}(0)$. Luego como $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{U}'$ son b-z-ultrafiltros se tiene que $G \in \mathfrak{U}$ y $H \in \mathfrak{U}'$.
Observemos que:

1. $t^{-1}(0) \cap N = \emptyset$, $u^{-1}(0) \cap M = \emptyset$. Puesto que $M \cap X_w = s^{-1}(0)$ y $N \cap X_V = r^{-1}(0)$, para $x \in X_{W\cap V} \cap N$, se tiene que $t(x) \neq 0$ y para $x \in X_{W\cap V} \cap M$, se tiene que $u(x) \neq 0$.

2. $X_{W\cap V} = t^{-1}(0) \cup u^{-1}(0)$. Pues para $x \in X_{W\cap V}$ se tiene que $r(x) \geqslant s(x)$ o $s(x) \geqslant r(x)$

3. $N \cap G = \emptyset$ y $M \cap H = \emptyset$. Pues $t^{-1}(0) \cap N = \emptyset$, $u^{-1}(0) \cap M = \emptyset$ y $M \cap N = \emptyset$.

4. Existe $L \in \mathfrak{F}$, tal que $f(L) \subseteq W \cap V$, o equivalentemente, $L \subseteq X_{W\cap V}$. Pues $\mathfrak{F}$ es un b-z-filtro.

De las observaciones 2 y 4 concluimos que $L = (L\cap G)\cup(L\cap H) = (L\cap t^{-1}(0))\cup(L\cap u^{-1}(0))$. Luego, como $L \in \mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}$ es primo, tenemos que alguno, $L \cap G$ o $L \cap H$, pertenece a $\mathfrak{F}$. Supongamos que $L \cap G \in \mathfrak{F}$. Entonces, por hipótesis, $L \cap G \in (\mathfrak{U} \cap \mathfrak{U}')$ y por lo tanto $L \cap G \in \mathfrak{U}'$. Pero, $N \in \mathfrak{U}'$ y la observación 3, nos dicen que $\emptyset = N \cap (L \cap G) \in \mathfrak{U}'$, una contradicción. El caso en el que $L \cap H \in \mathfrak{F}$ produce un resultado similar. Luego no es posible que el b-z-filtro primo $\mathfrak{F}$ esté contenido en dos b-z-ultrafiltros distintos. $\square$

Proposición 44. *Si la función $f : X \to B$ es una función de Tychonoff entonces son equivalentes:*

a) $f : X \to B$ *es compacto fibra a fibra.*

b) *Todo b-z-filtro tiene un punto adherente.*

c) *Todo b-z-ultrafiltro converge.*

Demostración.

$a) \Rightarrow b)$. Razonamos por contradicción. Sea $\mathfrak{F}$ un b-z-filtro sin punto de adherencia. Entonces, para cada $x \in X_b$ existen un conjunto abierto O_x en X y un $G_x \in \mathfrak{F}$, tales que $x \in O_x$ y $O_x \cap G_x = \emptyset$. Como la familia $\{O_x\}_{x \in X_b}$ es un cubrimiento por conjuntos abiertos de X_b, la compacidad de f nos dice que existe una subcubrimiento finito $\{O_{x_i}\}_{i=1,\ldots,n}$ de X_b. Ahora, para cada O_{x_i} existe un G_{x_i}, tal que $O_{x_i} \cap G_{x_i} = \emptyset$. Puesto que $\{G_{x_i}\}_{i=1,2,\ldots,n} \subseteq \mathfrak{F}$, se tiene que $\cap_{i=1}^n G_{x_i} \in \mathfrak{F}$. Observamos que $\cap_{i=1}^n G_{x_i} \cap (\cup_{i=1}^n O_{x_i}) = \emptyset$, luego $\cap_{i=1}^n G_{x_i} \subseteq (X \setminus \cup_{i=1}^n O_{x_i})$, donde $X \setminus (\cup_{i=1}^n O_{x_i})$ es un conjunto cerrado. Finalmente, como f es una aplicación cerrada, tenemos que $f(X \setminus \cup_{i=1}^n O_{x_i})$ es un conjunto cerrado en B, $b \notin f(X \setminus \cup_{i=1}^n O_{x_i})$ y $f(\cap_{i=1}^n G_{x_i}) \subseteq f(X \setminus \cup_{i=1}^n O_{x_i})$. Luego el filtro en B generado por $\mathfrak{F}$ no converge a b, una contradicción. Así pues $\mathfrak{F}$ debe tener un punto de adherencia.

$b) \Rightarrow c)$. Sea $\mathfrak{U}$ un b-z-ultrafiltro. Por b), $\mathfrak{U}$ tiene un punto de adherencia, $x \in X_b$. Por lo tanto, $x \in G$ para cada $G \in \mathfrak{U}$. Además, todo b-z-conjunto M, con $x \in M$, debe estar en $\mathfrak{U}$, pues para cada $G \in \mathfrak{U}$ se tiene que $M \cap G \neq \emptyset$ y $\mathfrak{U}$ es un b-z-ultrafiltro, luego necesariamente $M \in \mathfrak{U}$. De esto último se concluye que $\mathfrak{U}$ converge a x.

$c) \Rightarrow a)$. Supongamos que $f : X \to B$ no es compacta. Entonces, existen $b \in B$ y un cubrimiento $\mathcal{O}$ por conjuntos abiertos de X_b, tales que para cada vecindad W de b en B y cada subfamilia finita $\{O_i\}$ de $\mathcal{O}$, se tiene que $X_W \setminus \cup^n O_i \neq \emptyset$ (Proposición 14). Si dejamos variar W y consideramos la familia $\mathfrak{B}$ de b-z-conjuntos que contienen a algún $X_W \setminus \cup^n O_i$, se tiene que $\mathfrak{B}$ forma una base para un b-z-filtro. En efecto, $\mathfrak{B}$ es no vacía, pues X es un b-z-conjunto que contiene a cualquier $X_W \setminus \cup^n O_i$. Por otro lado, si G y H son tales que $X_{W_1} \setminus \cup^n O_i \subseteq G$ y $X_{W_2} \setminus \cup^m O_j \subseteq H$, vemos que $X_{W_1 \cap W_2} \setminus ((\cup^m O_j) \cup (\cup^n O_i)) \subseteq G \cap H$, es decir, $G \cap H \in \mathfrak{B}$.

Si consideramos un b-z-ultrafiltro generado por $\mathfrak{B}$, tenemos que éste converge por hipótesis, digamos a $x \in X_b$. Por otro lado, en $\mathcal{O}$ existe O, tal que $x \in O$ y $X \setminus O$ es un conjunto cerrado. Como f es una función completamente regular, existen una vecindad W de b y una función continua $s : X_W \to [0, 1]$, tales que $s(x) = 1$ y $s(X_W \cap (X \setminus O)) \subseteq \{0\}$. Observamos que $X_W \cap (X \setminus O) = X_W \setminus O$, luego $X_W \setminus O \subseteq s^{-1}(0)$ y $x \notin s^{-1}(0)$, es decir, $X_W \setminus O \in \mathfrak{B}$. Concluimos que hay un b-z-conjunto en el b-z-ultrafiltro que no tiene a x como elemento, ésto contradice la suposición que el b-z-ultrafiltro converge a x. Por lo tanto, no es cierto que f no es compacta.

$\square$

4.2. Construcción de la compactificación

Para $f : X \to B$ una función de Tychonoff se construye una función compacta, $\kappa f : \kappa X \to B$, de tal manera que X es denso en κX. Se introduce primero la siguiente propiedad de las funciones de Tychonoff.

Proposición 45. *Sean $f : X \to B$ una función de Tychonoff y $x \in X_b$. Entonces, la familia $\mathfrak{U} = \{M \subseteq X : M$ es un b-z-conjunto y $x \in M\}$ es un b-z-ultrafiltro. Además, $\mathfrak{U}$ es el único b-z-ultrafiltro que converge a x.*

Demostración.

- $\mathfrak{U}$ es no vacía, pues X es un b-z-conjunto y obviamente $x \in X$.
- $\emptyset \notin \mathfrak{U}$, pues la definición de $\mathfrak{U}$ exige que x debe pertenecer a cada conjunto en $\mathfrak{U}$.
- Si $M \in \mathfrak{U}$ y N es un b-z-conjunto tal que $M \subseteq N$ entonces $N \in \mathfrak{U}$. En efecto, si $M \subseteq N$, entonces $x \in M \subseteq N$. Luego, por definición de $\mathfrak{U}$, $N \in \mathfrak{U}$.
- Si $M \in \mathfrak{U}$ y $N \in \mathfrak{U}$ entonces $M \cap N \in \mathfrak{U}$. En efecto, por la Proposición 39, $M \cap N$ es un b-z-conjunto y por la definición de $\mathfrak{U}$, $x \in M$ y $x \in N$, luego $x \in M \cap N$. Por lo tanto $M \cap N$ está en $\mathfrak{U}$.
- La familia $\{f(M) : M \in \mathfrak{U}\}$ genera un filtro en B que converge a b. Basta mostrar que para cada vecindad W de b existe un $M \in \mathfrak{U}$, tal que $f(M) \subseteq W$. Para esto tomamos el b-z-conjunto $M = X_W$ (Observación 4).

Por el momento se tiene que $\mathfrak{U}$ es un b-z-filtro. A continuación se muestra que $\mathfrak{U}$ no está contenido en ningún otro b-z-filtro y que $\mathfrak{U}$ es el único b-z-filtro que converge a x.

- $\mathfrak{U}$ es un b-z-ultrafiltro. Suponga que existe un b-z-filtro $\mathfrak{C}$ tal que $\mathfrak{U} \subsetneq \mathfrak{C}$. Entonces, existe un b-z-conjunto (M, W, s), con $M \in \mathfrak{C} \setminus \mathfrak{U}$. Por definición de $\mathfrak{U}$, se tiene $x \notin N$. Como $x \in X_W$ y $x \notin M$, entonces $s(x) \neq 0$. Ahora, por la Proposición 38, el conjunto $A = s^{-1}([s(x), 1])$, es un b-z-conjunto, caracterizado por: $x \in A$ y $A \cap M = \emptyset$. Por definición de $\mathfrak{U}$, se tiene que $A \in \mathfrak{U}$ y la relación $\mathfrak{U} \subsetneq \mathfrak{C}$, implica que $A \in \mathfrak{C}$. Por lo tanto, $A \in \mathfrak{C}$, $M \in \mathfrak{C}$ y $A \cap M = \emptyset$, una contradicción.
- $\mathfrak{U}$ es el único b-z-ultrafiltro que converge a x. Por definición de convergencia de un b-z-filtro a x, se debe tener que los elementos de $\mathfrak{U}$, los b-z-conjuntos M con $x \in M$, deben estar en cada b-z-filtro convergente a x, es decir, cada b-z-ultrafiltro que converge a x debe contener a $\mathfrak{U}$. Por el ítem anterior se concluye que $\mathfrak{U}$ es el único b-z-ultrafiltro que converge a x.

$\square$

Definición 28. *Sea $f : X \to B$ una función continua. Para cada $b \in B$, definimos $\kappa X_b = \{\mathfrak{U} : \mathfrak{U}$ es un b-z-ultrafiltro$\}$. Consideramos la unión disyunta de los κX_b, la cual denotamos $\kappa X = \uplus \kappa X_b$, y definimos la función $\kappa f : \kappa X \to B$ como $\kappa f(\mathfrak{U}, b) = b$, para cada $(\mathfrak{U}, b) \in \kappa X$.*

Observación 5. *Para $(\mathfrak{U}, b) \in \kappa X$, se utiliza la notación $(\mathfrak{U}, b) = \mathfrak{U}$, siempre que sea claro que se está hablando de un b-z-ultrafiltro. El conjunto $\uplus_{b\in W} \kappa X_b = \kappa f^{-1}(W)$, se denota por κX_W.*

La Proposición 45 y la Definición 28 dan sentido a la siguiente definición

Definición 29. *Sean $f : X \to Y$ una función de Tychonoff, $x \in X_b$ y κX el conjunto dado por la Definición 28. Definimos $\Theta : X \to \kappa X$, como $\Theta(x) = \mathfrak{U}$, donde $\mathfrak{U}$ es el único b-z-ultrafiltro que converge a x.*

Definición 30. *Sean $f : X \to B$ una función continua y M un b-z-conjunto. Se define*

$$[M]_b = \{\mathfrak{U} |\ \mathfrak{U} \text{ es un b-z-ultrafiltro y } M \in \mathfrak{U}\}.$$

Definición 31. *Se define el operador $\widehat{\ }: \wp(\kappa X) \to \wp(\kappa X)$ como sigue: Dados $H \subseteq \kappa X$ y $\mathfrak{U} \in \kappa X_b$, diremos que $\mathfrak{U} \in \widehat{H}$, si $\mathfrak{U} \in [M]_b$ para cada b-z-conjunto (M, W, s), tal que $H \cap \kappa X_W \subseteq \cup_{c\in W}[M]_c$.*

Proposición 46. *El operador $\widehat{\ }: \wp(\kappa X) \to \wp(\kappa X)$ es un operador de clausura.*

Demostración.

- $H \subseteq \widehat{H}$. Sean $\mathfrak{U} \in H$ un b-z-ultrafiltro y (M, W, s) un b-z-conjunto, tales que $H \cap \kappa X_W \subseteq \cup_{c\in W}[M]_c$. Es claro que $\mathfrak{U} \in H \cap \kappa X_W$, pues W es vecindad de b y $\mathfrak{U}$ es un b-z-ultrafiltro que esta en H. Entonces, $\mathfrak{U} \in \cup_{c\in W}[M]_c$ y en particular en $\mathfrak{U} \in [M]_b$. Como el conjunto M es arbitrario, se cumple $\mathfrak{U} \in \widehat{H}$.
- $\widehat{\emptyset} = \emptyset$. Recordamos que $\emptyset$ es un b-z-conjunto, para cada $b \in B$ (Observación 4). Como no hay b-z-ultrafiltros que tengan a $\emptyset$ como elemento, se tiene que $[\emptyset]_b = \emptyset$. Luego $\emptyset \subseteq \cup_{c\in B}[\emptyset]_c = \emptyset$.
- $\widehat{\widehat{H}} = \widehat{H}$. Por el primer ítem se tiene $\widehat{H} \subseteq \widehat{\widehat{H}}$. Veamos que $\widehat{\widehat{H}} \subseteq \widehat{H}$. Observamos primero que los elementos de $\widehat{H} \cap \kappa X_b$ son aquellos b-z-ultrafiltros que se encuentran en cada $[N]_b$, donde (N, V, r) es un b-z-conjunto, tal que $H \cap \kappa X_V \subseteq \cup_{c\in V}[N]_c$. Luego, si (M, W, s) es un b-z-conjunto, tal que $H \cap \kappa X_W \subseteq \cup_{c\in W}[M]_c$, entonces $\widehat{H} \cap \kappa X_b \subseteq [M]_b$. Por lo tanto, se tiene que $\widehat{H} \cap \kappa X_W \subseteq \cup_{c\in W}[M]_c$. Concluimos que $\widehat{\widehat{H}} \subseteq \widehat{H}$.

- $\widehat{H \cup L} = \widehat{H} \cup \widehat{L}$. Veamos primero que $\widehat{H \cup L} \subseteq \widehat{H} \cup \widehat{L}$. Sea $\mathfrak{U} \notin \widehat{H} \cup \widehat{L}$, un b-z-ultrafiltro. Entonces existen b-z-conjuntos (M, W, s) y (N, V, r), tales que $H \cap \kappa X_W \subseteq \cup_{c \in W}[M]_c$, $L \cap \kappa X_V \subseteq \cup_{c \in V}[N]_c$ y $\mathfrak{U} \notin [M]_b$, $\mathfrak{U} \notin [N]_b$. Por la Proposición 40, $M \cup N$ es un b-z-conjunto. Ahora, para la vecindad $W \cap V$ de b y la función $s * r : X_{W \cap V} \to [0, 1]$, se cumple que $(H \cup L) \cap \kappa X_{W \cap V} \subseteq \cup_{c \in W \cap V}[M \cup N]_c$ y $\mathfrak{U} \notin [M \cup N]_b$, esto último producto de la Proposición 42 y el hecho que $\mathfrak{U}$ es un b-z-ultrafiltro. Luego $\mathfrak{U} \notin \widehat{H \cup L}$.

  Veamos ahora que $\widehat{H} \cup \widehat{L} \subseteq \widehat{H \cup L}$. Sea $\mathfrak{U} \notin \widehat{H \cup L}$, un b-z-ultrafiltro. Entonces, existe un b-z-conjunto (M, W, s), tal que $(H \cup L) \cap \kappa X_W \subseteq \cup_{c \in W}[M]_c$ y $\mathfrak{U} \notin [M]_b$. En particular, se cumple que $H \cap \kappa X_W \subseteq \cup_{c \in W}[M]_c$ y $L \cap \kappa X_W \subseteq \cup_{c \in W}[M]_c$ y puesto que $\mathfrak{U} \notin [M]_b$, concluimos que $\mathfrak{U} \notin \widehat{L}$ y $\mathfrak{U} \notin \widehat{H}$.

□

De aquí en adelante se asume que κX tiene la topología inducida por el operador $\widehat{\ }$. Se muestra ahora que esta topología hace de $\kappa f : \kappa X \to B$ una función continua y de $\Theta : f \to \kappa f$ un morfismo de $\mathbf{Top_B}$.

Proposición 47. *La topología definida sobre κX hace de $\kappa f : \kappa X \to B$ una función continua.*

Demostración. Sea $F \subseteq B$ un conjunto cerrado y consideremos $\kappa f^{-1}(F) = \kappa X_F$. Si $\mathfrak{U}$ es un b-z-ultrafiltro tal que $\mathfrak{U} \notin \kappa f^{-1}(F)$, entonces $\kappa f(\mathfrak{U}) = b \notin F$. Como F es un conjunto cerrado, existe una vecindad V de b, tal que $V \cap F = \emptyset$. Ahora, como $\mathfrak{U}$ es un b-z-ultrafiltro, existe un b-z-conjunto (M, W, s), con $M \in \mathfrak{U}$ y tal que $f(M) \subseteq V$. De esto podemos concluir que $M \subseteq X_V$ y que la restricción $s|_{X_{W \cap V}}$, cumple $s|_{X_{W \cap V}}^{-1}(0) = s^{-1}(0)$. Puesto que $W \cap F = \emptyset$, se tiene que $X_F \cap X_{W \cap V} = \emptyset$. Se define el b-z-conjunto $N = s|_{X_{W \cap V}}^{-1}([1/2, 1])$. Observamos que:

1. $M \cap N = \emptyset$. Pues $M \cap X_{W \cap V} = s|_{X_{W \cap V}}^{-1}(0)$ y $N = s|_{X_{W \cap V}}^{-1}([1/2, 1])$.

2. $\mathfrak{U} \notin [N]_b$. Pues $M \in \mathfrak{U}$ y $M \cap N = \emptyset$.

3. $\emptyset = \kappa X_F \cap \kappa X_{W \cap V} \subseteq \cup_{c \in W \cap V}[N]_c$. Obvio.

De los items 1. y 2. concluimos que $\mathfrak{U} \in \widehat{\kappa f^{-1}(F)}$. □

Proposición 48. *La topología definida sobre κX hace de $\Theta : X \to \kappa X$ una función continua.*

Demostración. Sea $F \subseteq \kappa X$ un conjunto cerrado y $\Theta^{-1}(F)$ su preimagen en X. Si $a \in X \setminus \Theta^{-1}(F)$, entonces obviamente $\Theta(a) \notin F$. Denotemos $b = f(a)$. Ahora, como F es un conjunto cerrado, existe un b-z-conjunto (M, W, s), son W una vecindad abierta de b, tal que $F \cap \kappa X_W \subseteq \cup_{c \in W}[M]_c$ y $\Theta(a) \notin [M]_b$. Entonces, $M \notin \Theta(a)$ y consecuentemente

$a \notin M$. Fijemos $l = s(a) \in [0,1]$, existe pues $a \in X_W$. Puesto que $a \notin M$, se tiene que $l \neq 0$, luego existe δ, tal que $0 < \delta < l$. Para este δ, el conjunto $s^{-1}((\delta, 1])$ es un conjunto abierto en X_W, y por lo tanto en todo X, tal que $a \in s^{-1}((\delta, 1])$.
Observamos que para cada $x \in s^{-1}((\delta, 1])$, se tiene que el b-z-conjunto $s^{-1}([s(x), 1])$ está en $\Theta(x)$ y $M \notin \Theta(x)$, pues $x \notin M$. Luego, $\Theta(x) \notin [M]_b$ y por lo tanto $\Theta(x) \notin F$. Concluimos que $s^{-1}((\delta, 1]) \cap \Theta^{-1}(F) = \emptyset$.
Entonces, de $a \in s^{-1}((\delta, 1])$ y $s^{-1}((\delta, 1]) \cap \Theta^{-1}(F) = \emptyset$, se tiene que $a \notin \overline{\Theta^{-1}(F)}$, pues $s^{-1}((\delta, 1])$ es un conjunto abierto de X. Por lo tanto, $\Theta^{-1}(F)$ es un conjunto cerrado de X. $\square$

Observación 6. *Si $x \in X_b$, entonces $\Theta(x) \in \kappa X_b$ y $f(x) = b = \kappa f(\Theta(x))$ (Definiciones 28 y 29). Luego, por la proposición anterior, Θ es un morfismo en* $\mathbf{Top_B}$.

Lema 2. *Sean $b \in B$, un b-z-conjunto $M \subseteq X$ y $\mathfrak{U} \in \kappa X_b$. Se tiene que, $\mathfrak{U}$ está en la adherencia de $\Theta(M)$ si y solo si $\mathfrak{U} \in [M]_b$.*

Demostración.

- $\mathfrak{U} \in \widehat{\Theta(M)} \Rightarrow \mathfrak{U} \in [M]_b$. Supongamos, sin perdida de generalidad, que $M = (M, W, s)$, con W una vecindad abierta de b. Por la Observación 3, se tiene que M es un c-z-conjunto para cada $c \in W$. Luego, si $\mathfrak{U} \in \Theta(M) \cap \kappa X_W$, entonces $\mathfrak{U}$ es un c-z-ultrafiltro, con $c \in W$, convergente a un punto en $M \cap X_c$, tal que $M \in \mathfrak{U}$, o equivalentemente, $\mathfrak{U} \in [M]_c$. Por lo tanto, se cumple que $\Theta(M) \cap \kappa X_W \subseteq \cup_{c \in W}[M]_c$.

  Ahora, si $\mathfrak{U} \in \widehat{\Theta(M)}$ entonces, para cada b-z-conjunto (N, V, r) tal que $\Theta(M) \cap \kappa X_V \subseteq \cup_{c \in V}[N]_c$, se tiene que $\mathfrak{U} \in [N]_b$. Por el párrafo anterior la elección $(N, V, r) = (M, W, s)$ es válida. Luego $\mathfrak{U} \in [M]_b$.

- $\mathfrak{U} \in [M]_b \Rightarrow \mathfrak{U} \in \widehat{\Theta(M)}$. Observemos primero que si (N, V, r) es un b-z-conjunto tal $\Theta(M) \cap \kappa X_V \subseteq \cup_{c \in V}[N]_c$, entonces $M \cap X_V \subseteq N \cap X_V$. En efecto, sea $x \in M \cap X_V$, entonces $\Theta(x) \in \Theta(M) \cap \kappa X_V$. Entonces, puesto que $\Theta(M) \cap \kappa X_V \subseteq \cup_{c \in V}[N]_c$, se tiene que $\Theta(x) \in [N]_b$, o equivalentemente, $N \in \Theta(x)$, lo cual implica que $x \in N$.

  Ahora, si $\mathfrak{U} \notin \widehat{\Theta(M)}$, entonces existe un b-z-conjunto (N, V, r), tal que $\Theta(M) \cap \kappa X_V \subseteq \cup_{c \in V}[N]_c$ y $\mathfrak{U} \notin [N]_b$. Entonces, por la observación anterior y la clausura por superconjuntos del b-z-ultrafiltro $\mathfrak{U}$, concluimos que $\mathfrak{U} \notin [M]_b$.

$\square$

Proposición 49. *La función $\Theta : X \to \kappa X$ es una inmersión continua de X en κX, con $\Theta(X)$ denso en κX.*

Demostración.

- La función Θ es inyectiva. En efecto, sean x y x' dos elementos distintos de X. Se presentan dos casos, o bien $f(x) \neq f(x')$ o bien $f(x) = f(x')$. En el primer caso, se tiene que $\kappa f(\Theta(x)) = f(x) \neq f(x') = \kappa f(\Theta(x'))$, luego $\Theta(x) \neq \Theta(x')$. En el segundo caso, se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que existe un $f(x)$-z-conjunto M que contiene x y que no contiene a x', pues $f : X \to B$ es una función de Tychonoff. Luego M está en $\Theta(x)$ y no está en $\Theta(x')$, es decir, $\Theta(x) \neq \Theta(x')$.

- La función $\Theta(X)$ es denso en κX. Por el Lema 2, se tiene que $\mathfrak{U} \in \widehat{\Theta(X)}$ si y solo si $\mathfrak{U} \in [X]_b$. Como X es un b-z-conjunto para todo $b \in B$, se tiene que para todo $b \in B$ y todo b-z-ultrafiltro $\mathfrak{U}$ siempre se cumple $X \in \mathfrak{U}$, o equivalentemente, $\mathfrak{U} \in [X]_b$. Luego, $\widehat{\Theta(X)} = \kappa X$.

- La función Θ es continua. Ésto se demostró en la Proposición 48.

- La función $\Theta^{-1} : \Theta(X) \to X$ es continua. Sea $F \subseteq X$ un conjunto cerrado y $\Theta(F)$ su imagen en $\Theta(X)$. Si $\mathfrak{U} \in \Theta(X)$ es tal que $\mathfrak{U} \notin \Theta(F)$, entonces $\mathfrak{U}$ es un b-z-ultrafiltro que converge a algún punto $x \in X_b$, es decir, $\mathfrak{U} = \Theta(x)$ y $x \notin F$. Entonces, dado que $f : X \to B$ es una función de Tychonoff, existen una vecindad abierta W de $f(x)$ y una función $s : X_W \to [0,1]$, tales que $s(x) = 1$ y $s(X_W \cap F) \subseteq \{0\}$. Ahora, por la Proposición 38, el conjunto $s^{-1}(1)$ es un $f(x)$-z-conjunto, y como $x \in s^{-1}(1)$, entonces $s^{-1}(1) \in \Theta(x)$. Como $x \notin s^{-1}(0)$, se tiene que $s^{-1}(0) \notin \Theta(x)$, o equivalentemente, $\Theta(x) \notin [s^{-1}(0)]_b$. Por otro lado, es claro que $\Theta(F) \cap \kappa X_W \subseteq \cup_{c\in W}[s^{-1}(0)]_c$, pues si $\mathfrak{C} \in \Theta(F) \cap \kappa X_W$, entonces $\mathfrak{C}$ converge a algún punto $l \in F \cap X_W$ y $s(l) = 0$, luego $s^{-1}(0) \in \Theta(l)$, o equivalentemente, $\Theta(l) \in [s^{-1}(0)]_{f(l)}$. Concluimos entonces que $\Theta(x) = \mathfrak{U} \notin \widehat{\Theta(F)}$, y por lo tanto $\mathfrak{U} \notin \widehat{\Theta(F)} \cap \Theta(X)$.

$\square$

La siguiente es la característica más importante de $\kappa f : \kappa X \to B$.

Proposición 50. *La función $\kappa f : \kappa X \to B$ es compacta.*

Demostración. La prueba se hará en dos partes. Primero se muestra que para todo b-z-filtro $\mathfrak{U}$, sobre el espacio original X, se tiene que $(\cap_{M\in\mathfrak{U}}\widehat{\Theta(M)}) \cap \kappa X_b \neq \emptyset$, es decir, existe al menos un b-z-ultrafiltro en la intersección de las clausuras en κX de los elementos de $\mathfrak{U}$. En efecto, si $\mathfrak{U}$ es un b-z-filtro convergente a $x \in X_b$, entonces, por definición de convergencia de b-z-filtros, tenemos que $x \in M$ y por lo tanto $\Theta(x) \in [M]_b$, para cada $M \in \mathfrak{U}$. Entonces, por el Lema 2, se tiene que $\Theta(x) \in \widehat{\Theta(M)}$, para cada $M \in \mathfrak{U}$. Por otro lado, si $\mathfrak{U}$ es un b-z-filtro no convergente, la Proposición 41 nos asegura que $\mathfrak{U}$ esta contenido en un b-z-ultrafiltro $\mathfrak{C}$. Veamos que $\mathfrak{C} \in \cap_{M\in\mathfrak{U}}\widehat{\Theta(M)}$. Para cada $M \in \mathfrak{U}$, se tiene que $M \in \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{C}$, luego $\mathfrak{C} \in [M]_b$.

Ahora, por el Lema 2, se tiene que $\widehat{\Theta(M)} \cap \kappa X_b = [M]_b$, para cada $M \in \mathfrak{U}$. Entonces, $\mathfrak{C} \in \cap_{M\in\mathfrak{U}}[M]_b = \cap_{M\in\mathfrak{U}}(\widehat{\Theta(M)} \cap \kappa X_b) \subseteq \cap_{M\in\mathfrak{U}}\widehat{\Theta(M)}$
Ahora veremos que cada b-filtro sobre $\kappa f : \kappa X \to B$, tiene un punto de adherencia, ésto demostrará la compacidad de la función κf (Proposición 20). Sea $\mathbf{U}$ un b-filtro en $\kappa f : \kappa X \to B$. Se define $\mathfrak{G}$ como la familia de b-z-conjuntos $(M, W, s) \subseteq X$ tales que $F \cap \kappa X_W \subseteq \cup_{c\in W}[M]_c$, para algún $F \in \mathbf{U}$. Afirmamos que $\mathfrak{G}$ es un b-z-filtro sobre $f : X \to B$. En efecto,

- Se tiene que $\mathfrak{G} \neq \emptyset$. Pues $X \in \mathfrak{G}$.

- Se cumple que $\emptyset \notin \mathfrak{G}$. Pues para cada $F \in \mathfrak{U}$ y cada vecindad W de b se tiene que $F \cap \kappa X_W \neq \emptyset$ y $[\emptyset]_b = \emptyset$.

- La familia $\mathfrak{G}$ es cerrada para superconjuntos. Pues si tenemos $(M, W, s) \in \mathfrak{G}$ y un b-z-conjunto (N, V, r), tales que $M \subseteq N$, entonces, por definición de $\mathfrak{G}$, existe $F \in \mathbf{U}$ tal que $F \cap \kappa X_W \subseteq \cup_{c\in W}[M]_c$. Como $N \cap X_{W\cap V} = r|^{-1}_{X_{W\cap V}}(0)$ y $M \cap X_{W\cap V} \subseteq N \cap X_{W\cap V}$, se tiene que $\cup_{c\in W\cap V}[M]_c \subseteq \cup_{c\in W\cap V}[N]_c$. Por lo tanto, $F \cap \kappa X_{W\cap V} \subseteq \cup_{c\in W\cap V}[N]_c$, es decir, $N \in \mathfrak{G}$.

- La familia $\mathfrak{G}$ es cerrada para intersecciones finitas. Sean $(M, W, s) \in \mathfrak{G}$ y $(N, V, r) \in \mathfrak{G}$, con W, V vecindades abiertas de b. Por definición de $\mathfrak{G}$, existen $F \in \mathbf{U}$ y $E \in \mathbf{U}$, tales que $F \cap \kappa X_W \subseteq \cup_{c\in W}[M]_c$ y $E \cap \kappa X_V \subseteq \cup_{c\in V}[N]_c$. Ahora, para la función $u : X_{W\cap V} \to [0, 1]$, definida por $u(x) = (s(x) + r(x))/2$, se tiene que $u^{-1}(0) = M \cap N \cap X_{W\cap V}$.

  Observamos que $F \cap E \cap \kappa X_{W\cap V} \subseteq \cup_{c\in W\cap V}[M \cap N]_c$. En efecto, si $\mathfrak{B} \in F \cap E \cap \kappa X_{W\cap V}$, entonces $\mathfrak{B}$ es un b'-z-ultrafiltro, con $b' \in W \cap V$. Ahora, para este b', los b-z-conjuntos M y N, también son b'-z-conjuntos ya que $W \cap V$ es una vecindad de b' y $M \cap X_{W\cap V} = s|^{-1}_{X_{W\cap V}}(0)$, $N \cap X_{W\cap V} = r|^{-1}_{X_{W\cap V}}(0)$. Puesto que $F \cap E \cap \kappa X_{W\cap V} \subseteq F \cap \kappa X_W \subseteq \cup_{c\in W}[M]_c$, se tiene que $\mathfrak{B} \in [M]_{b'}$. De manera análoga se puede ver que $\mathfrak{B} \in [N]_{b'}$. Luego $M \in \mathfrak{B}$ y $N \in \mathfrak{B}$. Entonces, $M \cap N \in \mathfrak{B}$, o equivalentemente, $\mathfrak{B} \in [M \cap N]_{b'}$. Como esto ocurre para cada $\mathfrak{B} \in F \cap E \cap BX_{W\cap V}$, se concluye que $F \cap E \cap BX_{W\cap V} \subseteq \cup_{c\in W\cap V}[M \cap N]_c$.

  Del hecho que $F \cap E \in \mathbf{U}$ y la observación $F \cap E \cap \kappa X_{W\cap V} \subseteq \cup_{c\in W\cap V}[M \cap N]_c$, se concluye que el b-z-conjunto $(M \cap N, W \cap V, u)$ está en $\mathfrak{G}$.

- La familia $\{f(M) : M \in \mathfrak{G}\}$ genera un filtro que converge a b. Pues los b-z-conjuntos X_W, con W una vecindad de b, están en $\mathfrak{G}$.

Por el primer paso de la demostración se tiene que existe un b-z-ultrafiltro $\mathfrak{C}$, tal que $\mathfrak{C} \in \cap_{M\in\mathfrak{G}}\widehat{\Theta(M)}$. Veamos que $\mathfrak{C}$ es un punto adherente del b-filtro $\mathbf{U}$. Sean $F \in \mathbf{U}$ y (M, W, s) un b-z-conjunto en X, tales que $F \cap \kappa X_W \subseteq \cup_{c\in W}[M]_c$. Por definición de $\mathfrak{G}$, se tiene que $M \in \mathfrak{G}$. Como $\mathfrak{C} \in \cap_{M\in\mathfrak{G}}\widehat{\Theta(M)}$, se cumple que $\mathfrak{C} \in [M]_b$ (Lema 2). Luego, como

M fue escogido arbitrariamente, se tiene que $\mathfrak{C} \in \widehat{F}$. Ésto ocurre para cada $F \in \mathbf{U}$, luego, $\mathfrak{C}$ es un punto adherente de $\mathbf{U}$. $\square$

Como en el caso de la topología general, en muchas aplicaciones no es suficiente que una función sea compacta. No obstante, cuando la compacidad es complementada con propiedades de separación adecuadas, las funciones compactas se vuelven realmente útiles. La siguiente proposición asegura que la compactificación $\kappa f : \kappa X \to B$ tiene buenas propiedades de separación.

Proposición 51. *La función compacta $\kappa f : \kappa X \to B$ es una función tipo T_2.*

Demostración. Utilizaremos la construcción desarrollada en la prueba de la Proposición 43. Sean $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{C} \in \kappa X$, dos b-z-ultrafiltros distintos. Entonces, existen b-z-conjuntos $(M, W, s) \in \mathfrak{U}$ y $(N, V, r) \in \mathfrak{C}$, con W y V vecindades abiertas de b, tales que $M \cap N = \emptyset$. Se definen $t : X_{W\cap V} \to [0, 1]$ y $u : X_{W\cap V} \to [0, 1]$ como:

$$t(x) = \begin{cases} s(x) - r(x) & \text{si } s(x) \geqslant r(x) \\ 0 & \text{si } s(x) < r(x) \end{cases}$$

y

$$u(x) = \begin{cases} r(x) - s(x) & \text{si } r(x) \geqslant s(x) \\ 0 & \text{si } r(x) < s(x) \end{cases}$$

Es claro que $M \cap X_{W\cap V} \subseteq t^{-1}(0)$ y $N \cap X_{W\cap V} \subseteq u^{-1}(0)$. Luego

$$\mathfrak{U} \in \widehat{\Theta(M)} \cap \kappa X_{W\cap V} \subseteq \widehat{\Theta(t^{-1}(0))} \cap \kappa X_{W\cap V}.$$

y

$$\mathfrak{C} \in \widehat{\Theta(N)} \cap \kappa X_{W\cap V} \subseteq \widehat{\Theta(u^{-1}(0))} \cap \kappa X_{W\cap V}.$$

Observamos que κX_U es un conjunto abierto en κX, para todo conjunto abierto U en B, pues κf es continua. En particular, $\kappa X_{W\cap V}$ es un conjunto abierto. Tenemos que $\kappa X_{W\cap V} \setminus \widehat{\Theta(t^{-1}(0))}$ y $\kappa X_{W\cap V} \setminus \widehat{\Theta(u^{-1}(0))}$, son conjuntos abiertos en $\kappa X_{W\cap V}$ y luego , por la observación anterior, abiertos en todo κX. Afirmamos que $\kappa X_{W\cap V} \setminus \widehat{\Theta(u^{-1}(0))}$ y $\kappa X_{W\cap V} \setminus \widehat{\Theta(t^{-1}(0))}$ son conjuntos disyuntos. En efecto, por la Proposición 42 y la observación $X_{W\cap V} = t^{-1}(0) \cup u^{-1}(0)$, se tiene que para cada b'-z-ultrafiltro $\mathfrak{P}$, donde $b' \in W \cap V$, se cumple que $t^{-1}(0) \in \mathfrak{P}$ o $u^{-1}(0) \in \mathfrak{P}$. Ahora, si existiera un b'-z-ultrafiltro

$\mathfrak{P} \in [\kappa X_{W\cap V} \setminus \Theta(\widehat{u^{-1}(0)})]_{b'} \cap [\kappa X_{W\cap V} \setminus \Theta(\widehat{t^{-1}(0)})]_{b'}$, tendríamos que $\mathfrak{P} \notin \widehat{u^{-1}(0)}$ y $\mathfrak{P} \notin \widehat{t^{-1}(0)}$, luego $t^{-1}(0) \notin \mathfrak{P}$ y $u^{-1}(0) \notin \mathfrak{P}$, una contradicción.
Como $M \cap u^{-1}(0) = \emptyset$, se tiene que M y $u^{-1}(0)$ no pueden estar ambas en un mismo b-z-filtro. En particular, ningún b-z-ultrafiltro tiene a ambos conjuntos como miembros, luego, $[M]_b \cap [u^{-1}(0)] = \emptyset$. De igual manera $N \cap t^{-1}(0) = \emptyset$, implica $[N]_b \cap [t^{-1}(0)] = \emptyset$. Entonces, se tiene que

$$[M]_b \subseteq \kappa X_{W\cap V} \setminus \Theta(\widehat{u^{-1}(0)})$$

y

$$[N]_b \subseteq \kappa X_{W\cap V} \setminus \Theta(\widehat{t^{-1}(0)})$$

Puesto que $\kappa X_{W\cap V} \setminus \Theta(\widehat{u^{-1}(0)})$ y $\kappa X_{W\cap V} \setminus \Theta(\widehat{t^{-1}(0)})$ son conjuntos abiertos disyuntos y $\mathfrak{U} \in [M]_b$, $\mathfrak{C} \in [N]_b$, concluimos que κf es una función T_2. $\square$

La función $\kappa f : \kappa X \to B$ goza de una propiedad de extensión semejante a la de su contraparte clásica.

Proposición 52. *Sean $f : X \to B$ una función de Tychonoff y $g : Y \to B$ una función de Tychonoff compacta. Si $\lambda : f \to g$ es un morfismo de $\mathbf{Top_B}$, entonces existe un morfismo $\check{\lambda} : \kappa f \to g$, en $\mathbf{Top_B}$, tal que $\check{\lambda} \circ \Theta = \lambda$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{U} \in \kappa X$ un b-z-ultrafiltro. Se define la familia

$$\mathfrak{G} = \{F \subseteq Y : F \text{ es un b-z-conjunto y } \lambda^{-1}(F) \in \mathfrak{U}\}$$

.

Afirmamos que $\mathfrak{G}$ es un b-z-filtro primo en Y. En efecto:

- $G \neq \emptyset$. Puesto que $\lambda^{-1}(Y) = X \in \mathfrak{U}$, se tiene $Y \in \mathfrak{G}$.
- $\emptyset \notin \mathfrak{G}$. Pues $\emptyset = \lambda^{-1}(\emptyset) \notin \mathfrak{U}$.
- $\mathfrak{G}$ es cerrada por superconjuntos. Sean $F \in \mathfrak{G}$ y (E, W, s) un b-z-conjunto, tales que $F \subseteq E$. Observamos que $\lambda^{-1}(E)$ es un b-z-conjunto en X, pues $s \circ \lambda : X_W \to [0, 1]$, es tal que $\lambda^{-1}(E) \cap X_W = (s \circ \lambda)^{-1}(0)$. Por otro lado, se tiene $\lambda^{-1}(F) \subseteq \lambda^{-1}(E)$ y puesto que $\lambda^{-1}(F) \in \mathfrak{U}$, se concluye que $\lambda^{-1}(E) \in \mathfrak{U}$, es decir, $E \in \mathfrak{G}$.
- $\mathfrak{G}$ es cerrada para intersecciones finitas. Si $F \in \mathfrak{G}$ y $E \in \mathfrak{G}$, entonces $\lambda^{-1}(F) \in \mathfrak{U}$ y $\lambda^{-1}(E) \in \mathfrak{U}$. Luego $\lambda^{-1}(F) \cap \lambda^{-1}(E) = \lambda^{-1}(F \cap E) \in \mathfrak{U}$, es decir, $F \cap E \in \mathfrak{G}$.
- $\{g(F) : F \in \mathfrak{G}\}$ genera un filtro en B que converge a b. Como la función λ es fibrada, se tiene que $\lambda(X_W) \subseteq Y_W$, para cada vecindad W de b. Luego, $\lambda^{-1}(Y_W) = X_W$, para cada vecindad W de b. Por lo tanto $Y_W \in \mathfrak{G}$ y $W \in \{g(F) : F \in \mathfrak{G}\}$, para cada vecindad W de b.

- $\mathfrak{G}$ es primo. Si E y F son b-z-conjuntos tales que $E \cup F \in \mathfrak{G}$, entonces $\lambda^{-1}(E \cup F) = \lambda^{-1}(E) \cup \lambda^{-1}(F) \in \mathfrak{U}$. Ahora, $\mathfrak{U}$ es un b-z-ultrafiltro, luego es primo, entonces $\lambda^{-1}(F) \in \mathfrak{U}$ o $\lambda^{-1}(E) \in \mathfrak{U}$, es decir, $E \in \mathfrak{G}$ o $F \in \mathfrak{G}$.

Como $\mathfrak{G}$ es un b-z-filtro primo en Y existe un único b-z-ultrafiltro $\mathfrak{C}$, tal que $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{C}$ (Proposición 43). Utilizando la Proposición 44, se tiene que existe $y \in Y_b$, tal que $\mathfrak{C}$ converge a y. Observamos que y es único. En efecto, dado que $g : Y \to B$ es una función de Tychonoff, se tiene que para cada $a \in Y_b$, con $a \neq y$, siempre existe un b-z-conjunto M, con $y \in M$ y $a \notin M$. Por lo tanto, para cada $\mathfrak{U} \in \kappa X$, se tiene un único $\check{\lambda}(\mathfrak{U}) \in Y$ asociado, es decir, una función $\check{\lambda} : \kappa X \to Y$. Explícitamente, se define $\check{\lambda}(\mathfrak{U})$ como el único elemento $y \in Y$, al que converge el único b-z-ultrafiltro $\mathfrak{C}$ que contiene el b-z-filtro primo $\mathfrak{G} = \{F \subseteq Y : F \text{ es un b-z-conjunto y } \lambda^{-1}(F) \in \mathfrak{U}\}$.
Se cumple que $\check{\lambda} \circ \Theta = \lambda$. En efecto, si $x \in X_b$ y $\lambda(x) \in Y$ es su imagen en Y, entonces el b-z-ultrafiltro $\mathfrak{C}$ en Y que converge a $\lambda(x)$ cumple $\lambda^{-1}(F) \in \Theta(x)$, para cada $F \in \mathfrak{C}$. Pues, si (F, W, s) es un b-z-conjunto en Y, tal que $\lambda(x) \in F$, entonces $s \circ \lambda : X_W \to [0, 1]$ es una función continua, con $x \in \lambda^{-1} \circ s^{-1}(0)$ y tal que $\lambda^{-1}(F) \cap X_W = \lambda^{-1} \circ s^{-1}(0)$. Es decir, $\lambda^{-1}(F) \in \Theta(x)$. Por lo tanto, $\check{\lambda}(\Theta(x)) = \lambda(x)$.
Por último se tiene que $\check{\lambda} : \kappa X \to Y$ es un morfismo en $\mathbf{Top_B}$, de κf en g. El hecho que $\kappa f = g \circ \check{\lambda}$ es claro, pues los elementos de κX_b tienen su imagen en Y_b. Para ver la continuidad de $\check{\lambda}$, fijemos $\check{\lambda}(\mathfrak{U})$ y $O \subseteq Y$ una vecindad abierta de $\check{\lambda}(\mathfrak{U})$. Como g es una función de Tychonoff, existen una vecindad abierta W de $g(\check{\lambda}(\mathfrak{U}))$ en B y una función continua $s : Y_W \to [0, 1]$, tales que $s(\check{\lambda}(\mathfrak{U})) = 1$ y $s(Y \setminus O) \subseteq \{0\}$. Es claro que $G = s^{-1}([1/3, 1])$ y $E = s^{-1}([0, 2/3])$, son b-z-conjuntos en Y, tales que $\check{\lambda}(\mathfrak{U}) \in Int(G)$, $\check{\lambda}(\mathfrak{U}) \notin E$, $G \subseteq O$ y $G \cup E = Y_W$. Consideremos ahora los conjuntos $\lambda^{-1}(G)$ y $\lambda^{-1}(E)$. Ambos son b-z-conjuntos en X, pues son iguales a $\lambda^{-1}(s^{-1}([1/3, 1]))$ y $\lambda^{-1}(s^{-1}([0, 2/3]))$, respectivamente. También se tiene $X_W = \lambda^{-1}(G) \cup \lambda^{-1}(E)$. Luego, por la densidad de X en κX y la definición de Θ, se tiene que $\kappa X_W = \Theta(\widehat{\lambda^{-1}(G)}) \cup \Theta(\widehat{\lambda^{-1}(E)})$.
Observamos que $\mathfrak{U} \notin \Theta(\widehat{\lambda^{-1}(E)})$, pues caso contrario, se tendría que $\mathfrak{U} \in [\lambda^{-1}(E)]_b$ (Lema 2), luego $\lambda^{-1}(E) \in \mathfrak{U}$. Ahora, teniendo en cuenta la definición

$$\mathfrak{G} = \{F \subseteq Y : F \text{ es un b-z-conjunto y } \lambda^{-1}(F) \in \mathfrak{U}\}$$

y la definición de $\check{\lambda} : \kappa X \to Y$, se tendría que $\check{\lambda}(\mathfrak{U}) \in E$, lo que contradice la construcción de E. Deducimos entonces que $\mathfrak{U} \in \Theta(\widehat{\lambda^{-1}(G)})$.
Como $\kappa X_W = \Theta(\widehat{\lambda^{-1}(G)}) \cup \Theta(\widehat{\lambda^{-1}(E)})$, se tiene que si $\mathfrak{C} \in \kappa X_W \setminus \Theta(\widehat{\lambda^{-1}(E)})$, un conjunto abierto de κX, entonces $\mathfrak{C} \in \Theta(\widehat{\lambda^{-1}(G)})$, luego en particular se tiene que $\lambda^{-1}(G) \in \mathfrak{C}$ y $\check{\lambda}(\mathfrak{C}) \in G$. Luego, $\check{\lambda}(\mathfrak{C})$ converge a un punto en G, es decir, $\check{\lambda}(\kappa X_W \setminus \Theta(\widehat{\lambda^{-1}(E)})) \subseteq G \subseteq O$. Por lo tanto, de $\mathfrak{U} \in \kappa X_W \setminus \Theta(\widehat{\lambda^{-1}(E)})$ y $\check{\lambda}(\kappa X_W \setminus \Theta(\widehat{\lambda^{-1}(E)})) \subseteq O$, se concluye que $\check{\lambda}$ es una función continua. $\square$

Así las cosas, se puede ver que la compactificación obtenida en este capítulo es proyectivamente mayor que la compactificación de Stone-Čech obtenida en el capítulo anterior. No obstante, la equivalencia entre las dos compactificaciones aún es incierta. Es decir, contrario a lo que sucede en el caso clásico, no se ha podido demostrar o refutar que la compactificación de Stone-Čech del capítulo anterior sea proyectivamente mayor que la compactificación obtenida en este capítulo. Nótese que la equivalencia en el caso clásico se resuelve fácilmente al observar que un espacio topológico es compacto y T_2 si y solo si él es compacto y de Tychonoff. Como ya se observó anteriormente, en el caso fibrado la relación anterior no se cumple (ver primer párrafo de la sección 2.2). Este punto de ruptura constituye un punto de partida para una nueva investigación que puede dar continuidad a las ideas presentadas en este trabajo.

Bibliografía

[1] G.L. CAIN. *Compactification of mappings*. Proc. Amer. Math. Soc. 23, 1969, 298-303.

[2] R.E. CHANDLER *Hausdorff compactifications*. Marcel Dekker , New York, 1976.

[3] R.F. DICKMAN Jr. *On closed extensions of functions*. Proc. Nat. Acd. Sci. U.S.A 62, 1969, 326-332.

[4] R. ENGELKING. *General Topology*. Heldermann , Berlin, 1989.

[5] L. GILLMANN y M. JERISON. *Rings of Continuous Functions*. D. Van Nostrand Company , New Jersey, 1960.

[6] I.M. JAMES. *Fibrewise Topology*. Cambridge university press, Cambridge, 1989.

[7] Y. KONAMI y T. MIWA. *Fibrewise extensions, Shanin compactification and extensions of fibrewise maps*. Acta mathematica hungarica, 122, 2009, 1-28.

[8] K. MORITA y J. NAGATA edts. *Topics in general topology*. North-Holland, Amsterdam, 1989.

[9] C.M. NEIRA. *Topología General: Notas de clase* . Universidad Nacional de Colombia, Bogotá,2011.

[10] C.M. NEIRA. *Topología Fibrada: Notas de clase, preprint*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá,2012.

[11] G. NORDO. *Compattificazioni perfette di funzioni*. Tesis de doctorado, Universidad de Messina, Italia, 1998.

[12] G. NORDO. *A brief survey on fibrewise general topology*, 1999.

[13] B.A. PASYNKOV. *Partial topological products*. Akad. Nauk S.S.S.R 154, 1964, 767-770.

[14] B.A. PASYNKOV. *Partial topological products*. Trans. Moskow Math. Soc 13, 1965, 153-272.

[15] B.A. PASYNKOV. *On extension to mappings of certain notions and assertions concerning spaces* . En Mappings and Functors. Moscow state university, 1984.

[16] R. WALKER. *The Stone-Čech compactification.* Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[17] G.T. WHYBURN. *A unified space for mappings.* Trans. AMS 74, 1953, 344-350.

[18] G.T. WHYBURN. *Compactification of mappings.* Math. Ann. 166, 1966, 168-174.

[19] S. WILLARD. *General Topology.* Addison-Wesley, Reading, 1970.