Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen VIII (1974), págs. 139 - 147

UNA GENERALIZACIÓN DE LAS LEYES DE ATRICIÓN DE LANCHESTER

por

Guillermo OWEN

Dedicado al profesor Henri Yerly

En su tratado clásico [2] , Lanchester nos da dos leyes para la atrición de dos fuerzas opuestas homogéneas, de tamaño m y n respectivamente. Estas son la primera ley (ley lineal)

$$\frac{dm}{dt} = -cn \qquad\qquad (1)$$

$$\frac{dn}{dt} = -c'm$$

y la segunda ley (ley cuadrática)

$$\frac{dm}{dt} = -cmn \qquad\qquad (2)$$

$$\frac{dn}{dt} = -c'mn$$

Cualquiera de las dos leyes *(1)* y *(2)* se puede justificar. Lanchester sugiere que la primera vale para un combate mano a mano , mientras que la segunda es válida para combate a distancia, pero dice poco para explicar esta conclusión. Deseamos aquí mostrar que ambas de estas leyes se pueden explicar como casos especiales límites de una ley más general así como aclarar la diferencia entre ellas.

Supongamos que un individuo, miembro de la fuerza azul, necesita un tiempo τ para disparar. Esto lo podrá hacer, sin embargo, sólo si durante este tiempo ha visto un miembro de la fuerza roja. Supondremos que la probabilidad de *no ver* a un miembro dado de los Rojos durante un intervalo de tiempo t es $e^{-\alpha t}$, donde α es un parámetro de "visibilidad", muy grande en un campo abierto, y pequeño, por ejemplo, en la oscuridad o en una emboscada. Si la fuerza roja tiene n miembros, entonces la probabilidad de que el individuo azul no vea a ninguno en el período t es $e^{-\alpha nt}$. Finalmente, asumiremos que, en caso de ver un Rojo, y disparar, hay una probabilidad k de eliminarlo.

Nuestro problema, ahora, consiste en determinar la tasa de disparos de un Azul. Clark [1] sugiere que, en el intervalo τ (necesario) disparará una vez con probabilidad $1-e^{\alpha n\tau}$; así la tasa de disparos es

$$r = \frac{1}{\tau}\left(1-e^{-\alpha n\tau}\right).$$

La tasa de aciertos es entonces kr, y, como hay m Azules disparando simultáneamente, la tasa de atrición de los Rojos es mkr, ó

$$\text{(3)} \qquad \frac{dn}{dt} = -\frac{mk}{\tau}\left(1-e^{-\alpha n\tau}\right).$$

Así mismo obtenemos, como atrición de los Azules,

$$\text{(4)} \qquad \frac{dm}{dt} = -\frac{nk'}{\tau}\left(1-e^{-\alpha' m\tau'}\right)$$

donde τ', k', α' son el tiempo de disparo, la probabilidad de acierto, y el parámetro de visibilidad de los Rojos, respectivamente.

El modelo de Clark no fue desarrollado específicamente para este caso, y por lo tanto parece no ser completamente válido. El problema es que él asume que el Azul disparará seguramente durante el intervalo τ, posiblemente a un blanco menos importante. En nuestro modelo, nosotros asumimos fuerzas homogéneas, de manera que no hay blancos de mayor o menor prioridad.

En lugar de esto, consideremos el modelo siguiente : el Azul debe, ante todo, gastar un tiempo τ en preparar su arma. Después de este período, debe esperar hasta ver un Rojo, y sólo entonces disparará. Según nuestra discusión previa, el tiempo necesario para esto será una variable aleatoria T, con la distribución exponencial

$$F(t) = 1 - e^{-\alpha n t} \qquad t \geq 0 \tag{5}$$

y expectación

$$E[T] = \frac{1}{\alpha n}. \tag{6}$$

De esta manera, el tiempo promedio entre disparos sucesivos de un Azul es de $\tau + \frac{1}{\alpha n}$. Como hay m Azules, y tienen una probabilidad de acierto k, obtenemos la ley de atrición

$$\frac{dn}{dt} = -mk \frac{\alpha n}{\alpha n \tau + 1}, \tag{7}$$

y, para la atrición Azul,

$$\frac{dm}{dt} = -nk' \frac{\alpha' m}{\alpha' m \tau' + 1}. \tag{8}$$

De nuevo vemos una objeción posible a este modelo, y es que hemos asumido que los dos elementos -la preparación del arma, y la búsqueda del blanco- se deben llevar a cabo sucesivamente. Tal vez se puedan hacer éstos simultáneamente, así que el Azul puede disparar en el segundo de dos momentos : (a) el momento en que esté lista su arma ; (b) el momento en que vea un Rojo. Este tiempo, T, es entonces una variable aleatoria con distribución

$$(9) \qquad F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < \tau \\ 1 - e^{-\alpha n t} & \text{si} \quad t \geq \tau \end{cases}$$

Es decir que T tiene un salto en τ, y una distribución exponencial de ahí en adelante. Aquí, T tiene la expectación

$$(10) \qquad E[T] = \tau + \frac{e^{-\alpha n \tau}}{\alpha n} .$$

Continuando así, obtenemos, como atrición roja,

$$(11) \qquad \frac{dn}{dt} = -mk \frac{\alpha n}{\alpha n \tau + e^{-\alpha n \tau}}$$

y, como atrición azul ,

$$(12) \qquad \frac{dm}{dt} = -nk' \frac{\alpha' m}{\alpha' m \tau' + e^{-\alpha' m \tau'}}$$

Se puede, sin embargo, decir que este modelo yerra en sentido opuesto. Es probablemente imposible encargarse de toda la preparación del arma mientras se busca un blanco. Preferiríamos, pues, un modelo intermedio, dándonos, posiblemente, una desigualdad tal que

$$(13) \qquad -mk \frac{\alpha n}{\alpha n \tau + e^{-\alpha n \tau}} \leq \frac{dn}{dt} \leq -mk \frac{\alpha n}{1 + \alpha n \tau} ,$$

con una desigualdad semejante para la atrición de los Azules.

Al analizar (3), (7) u (11), consideramos dos casos límites importantes : (a)

$\alpha n\tau$ muy pequeño ; (b) $\alpha n\tau$ muy grande .

Caso (a) . En este caso, $\alpha n\tau$ es muy pequeño; es decir, que la visibilidad es muy mala, el ejército rojo es muy pequeño, las armas de los Azules son muy rápidas, o una combinación de dos o tres de estos factores. Tenemos entonces las aproximaciones

$$1-e^{-\alpha n\tau} \cong \alpha n\tau$$

$$\frac{\alpha n}{\alpha n\tau + 1} \cong \alpha n$$

$$\frac{\alpha n}{\alpha n\tau + e^{-\alpha n\tau}} \cong \alpha n$$

y vemos que, ya sea que aceptemos el modelo (3), (7), u (11), obtendremos la aproximación

$$(14) \qquad \frac{dn}{dt} \cong \alpha kmn$$

que corresponde a la segunda ley de Lanchester (2) .

Caso (b) . En este caso $\alpha n\tau$ es muy grande debido a buena visibilidad, un ejército rojo muy grande, o unas armas azules muy lentas (o alguna combinación de estos factores). Tenemos entonces las aproximaciones

$$1-e^{-\alpha n\tau} \cong 1$$

$$\frac{\alpha n}{\alpha n\tau + 1} \cong \frac{1}{\tau}$$

$$\frac{\alpha n}{\alpha n\tau + e^{-\alpha n\tau}} \cong \frac{1}{\tau}$$

y (3), (7), (11) toman la forma $\frac{dn}{dt} = -\frac{k}{\tau}m$ que es la primera ley de Lanchester (1) .

Vemos, así, que las dos leyes de Lanchester (1)-(2) se obtienen como casos especiales de las leyes (3), (7), u (11), y, por lo tanto, también de cualquier ley intermedia entre (7) y (11), es decir, la ley (13). Más importante aún, nuestro análisis determina las circunstancias para preferir una u otra de las leyes (1) y (2) (o alguna intermedia). Además es posible un análisis más extenso. Vemos, por ejemplo, que los tres parámetros α, k, τ aparecen en la ley general (13). Pero de estos tres, solamente k aparece en los dos casos límites (14) y (15). El parámetro α de visibilidad aparece en (14) pero no en (15), mientras que el parámetro de velocidad, τ, aparece en (15) pero no en (14). Esto nos permite sacar varias conclusiones .

En cuanto a k, vemos que la atrición roja es directamente proporcional a k. Podemos, pues, concluir que siempre es ventajoso para Azul aumentar k. Esto se puede hacer mejorando su puntería, o aumentando la fuerza de cada disparo. En cambio, Rojo siempre tiene interés en disminuir k, cosa que puede hacer fortificando sus elementos. (Naturalmente cualquiera de éstos puede dar lugar a ciertas desventajas, pero si nada más cambia, esto siempre es ventajoso) .

Pasando a α, vemos que la atrición (14) es proporcional a α, mientras que (15) es independiente de α. Concluimos que, cuando es difícil encontrar el enemigo, cualquier aumento de visibilidad es útil. En cambio, si $\alpha n \tau$ es grande, para que valga la aproximación (15), no se gana nada con aumentar α. Es decir que la inteligencia (en cuanto a la posición del enemigo) puede ser muy útil en una emboscada; no sirve de mucho en un combate mano a mano.

Finalmente consideremos el papel de τ. La atrición (15) es inversamente proporcional a τ. Por lo tanto, en el combate abierto es siempre ventajoso aumentar la velocidad de las armas ; es muy útil entonces una ametralladora. En cambio (14) es independiente de τ , y concluímos que en tal caso no se gana nada con incrementar la rapidez de las armas . En una emboscada , pues, encontramos que una ametralladora pierde gran parte de su valor.

Debe notarse que nuestras conclusiones aquí son contrarias a las de Lanchester [2] en un análisis semejante. Pues Lanchester sugiere que un grupo de hombres con rifles, opuesto por un grupo más pequeño con ametralladoras, debería acercarse, de manera a pasar de la ley (14) a la (15), en la cual el tamaño (de m contra n) es muy importante. En cambio, nuestro análisis nos dice que, aunque esto sí aumenta la ventaja relativa del tamaño, también aumenta la ventaja de las ametralladoras (fuego rápido). Por lo tanto esto no parece ventajoso para el primer grupo.

Haremos una última observación. En la teoría original de Lanchester, sólo aparecen las dos leyes (1) y (2). No se considera la posibilidad de una ley mixta; (1) vale de cerca y (2) de lejos. En nuestro análisis vemos que escoger (14) o (15) (o alguna ley intermedia) depende de los parámetros α y τ , y de la variable n. Pero no hay razón para que estos tengan que ser iguales de ambos lados, y podemos considerar ocasiones en que $\alpha n \tau$ sea pequeño, y $\alpha' m \tau'$ sea grande. Así, si un grupo rojo pequeño da una emboscada a un ejército azul, entonces α será pequeño y α' grande, de manera que m y n sufrirán atrición según las dos leyes

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{k'}{\tau'}\, n$$

$$\frac{dn}{dt} = -\alpha\, k m n \ .$$

Podemos ahora (si lo deseamos) resolver este sistema (independiente del tiempo). Tenèmos

$$\frac{dn}{dm} = \frac{dn/dt}{dm/dt} = \frac{\alpha\, k \tau'}{k'}\, m \ ,$$

que tiene la solución general

$$n = \frac{\alpha k \tau'}{2k'} m^2 + C .$$

Aquí C es una constante de integración, con valor

$$C = n_o - \frac{\alpha k \tau'}{2k'} m_o^2 ,$$

siendo m_o y n_o los valores iniciales de m y n respectivamente. Vemos que gana Rojo si $C > 0$, y Azul $C < 0$. Habrá un empate si $C = 0$, caso que nos dará

$$n = \frac{\alpha k \tau'}{2k'} m^2 .$$

Debemos recordar naturalmente que el coeficiente $\alpha k \tau'/2k'$ es aquí muy pequeño. Por ejemplo, podemos tener

$$\alpha = 0{,}002$$

$$k = k' = 0.5 ,$$

$$\tau = \tau' = 1 ,$$

$$m_o = 400 ,$$

$$n_o = 160 ,$$

lo que nos da

$$n = 0{,}001\ m^2 .$$

Entonces, a medida que progresa la batalla, tendremos $m = 300$ cuando $n = 90$, $m = 200$ cuando $n = 40$, y $m = 100$ cuando $n = 10$. Así los emboscadores (Rojo) aumentan su ventaja a medida que se pelea : pierden 70 hombres para eliminar los primeros 100 Azules, pero 10 Rojos son suficientes para eliminar los últimos 100 Azules.

BIBLIOGRAFÍA

1. *Clark, Gordon M., y Bishop, Albert. The Tank Weapon System,* Final Report to U. S. Army Combat Developments Command, AR69-2B (u) Octubre 1969.
2. *Lanchester, F. W. "Mathematics in Warfare", en The World of Mathematics,* ed. J. R. Newman (New York, 1956), pp. 2138-2157.

Departamento de Ciencias Matemáticas
Rice University
Houston, Texas, E. U. A.

(Recibido en enero de 1974)