PIERRE DE FERMAT

PIERRE DE FERMAT

Juan D. Vélez
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

Resumen

Pierre de Fermat (1601-1665) fue uno de los más grandes matemáticos del siglo XVII. Descubrió de manera independiente el método de coordenadas cartesianas en geometría, realizó contribuciones a la óptica y al cálculo variacional, anticipando el método de la derivada para calcular tangentes y determinar máximos y mínimos. Fermat es el fundador, junto con Pascal, de la teoría de probabilidades. Sus aportes más importantes fueron en el campo de la teoría de números donde su obra se erige como una de las creaciones más hermosas y profundas del intelecto humano.

Datos biográficos

Pierre de Fermat es sin duda una de las figuras más insólitas y románticas en toda la historia de las matemáticas, uno de los más grandes matemáticos del siglo XVII y uno de los pensadores más profundos de toda la historia. Su *último teorema* ha contribuído a que su nombre sea conocido universalmente, aún por fuera del ámbito de las matemáticas.

Fermat nunca fue lo que podría llamarse un matemático de formación. En el estricto sentido de la palabra, Fermat fue sólo un aficionado a las matemáticas, quizá el más famoso aficionado en toda la historia de la ciencia. Su vida transcurrió en forma tranquila, excepto quizás por algunas disputas aisladas que sostuvo con Descartes sobre la validez de algunos razonamientos matemáticos, debidas en parte a la falta de claridad de este último, pero que el tacto y cortesía de Fermat permitieron que fueran finalmente saldadas en forma amistosa.

Es muy poco lo que se conoce sobre su vida privada. Se sabe que nació en el mes de agosto de 1601 cerca a Montauban y vivió casi toda su vida en Toulouse, en donde se desempeño como jurista. Recibió su educación en casa y es muy poco lo que se sabe de sus años de estudio. Sí se sabe que fue un hombre de una gran erudición, aficionado a la filología griega y latina, conocedor de las principales lenguas de Europa continental, así como de su literatura. Se dice además que era un excelente escritor de versos latinos, franceses y españoles, actividad en la que mostraba un refinado gusto. Fermat fue un hombre tranquilo y modesto en extremo. Excepto por unos pocos artículos aislados, y por el apéndice que escribió en forma anónima para un libro escrito por un amigo, Fermat nunca publicó nada. Su obra se conoce gracias a la correspondencia que sostuvo con algunos matemáticos famosos de la época, y a la recopilación de algunos de sus trabajos, hecha por su hijo Clément-Samuel, quien se convirtió en el testamentario científico de su padre. Fermat se desempeño en la conserjería real en el parlamento local de Toulouse, cargo que desempeño con dignidad y talento durante diecisiete años de su vida.

Durante estos años Fermat tuvo suficiente tiempo libre para dedicarse a las matemáticas, que fueron la gran pasión de su vida. La contribuciones de Fermat pueden dividirse en cuatro grupos: sus contribuciones a la teoría de números, a la geometría analítica, al análisis, y su creación, junto con Pascal, de la teoría de las probabilidades. Analizaremos a continuación algunos de sus aportes en estas áreas.

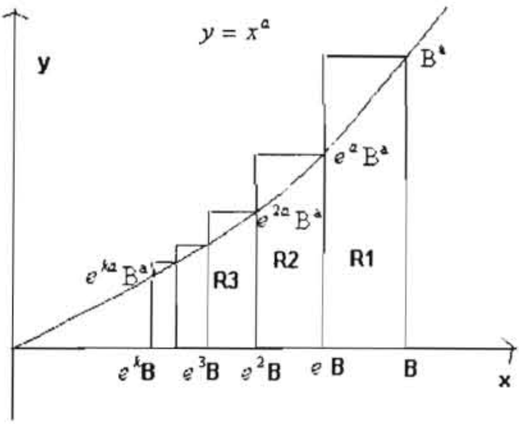
Contribuciones al análisis infinitesimal

Todo parece indicar que Fermat descubrió de manera independiente el método de coordenadas en geometría, mucho antes de leer *La Géométrie* de Descartes. Los problemas que ocuparon a Fermat tiene que ver con la manera de construir tangentes a curvas, con sus cuadraturas (determinación de áreas) y con cuestiones relacionadas con máximos y mínimos de funciones. Sus manuscritos datan de 1663 pero sin duda estos métodos fueron inventados por él mismo, muchísimo antes, posiblemente alrededor de 1628-1629. Todo parece indicar que Fermat poseía el método general de cálculo de tangentes por medio de la derivación de funciones, aunque es posible que nunca lo hubiese aislado y reconocido como un método general, aparte de los cómputos de cada problema particular. En su forma definitiva, este método fue enunciado por primera vez por Barrow y redescubierto por Newton. Como todos los creadores del cálculo, Fermat hacía uso de analogías mecánicas y cinemáticas para la solución de sus problemas. Fermat, haciendo uso de su método, pudo construir tangentes a elipses, cicloides, cisoides, conchoides y cuadratrices.

En lo que concierne al problema de determinar áreas bajo curvas, no existe ninguna evidencia de que Fermat poseyera un método general para encontrar su solución. La invención de un método general, como bien se sabe, se atribuye a Newton y Leibnitz, y es quizá el hallazgo con mayores consecuencias en la historia del pensamiento científico de occidente. De todas formas el trabajo de Fermat contribuyó a preparar el terreno para el descubrimiento del cálculo. En el momento en el que Newton hizo su aparición se conocía la manera de computar áreas bajo curvas dadas por polinomios (métodos de Fermat y Descartes) y la manera de computar el área bajo la hipérbola $y = 1/x$, debida a Gregory of St. Vincent, quien la descubrió en 1647. Los métodos que desarrolló Fermat hacen uso de fórmulas explícitas para la suma de los términos que resultan de subdividir el área bajo la curva en la suma de áreas de pequeños rectángulos, y de aplicar un método de paso al límite o método exhaustivo, que dependía del cómputo de un límite en cada problema particular.

Para ilustrar estas ideas mostraremos a continuación la manera como Fermat determinó el área bajo la curva $y = x^a$, $a > -1$, entre los ejes $x = 0$ y $x = B$.

Se comienza por escoger un número positivo $e < 1$, y cuyo valor esté muy cercano a 1. Después se procede a dividir el área bajo la curva, entre $x = 0$ y $x=B$, en pequeños rectángulos determinados por la progresión $B, eB, e^2B, \dots, e^kB, \dots$, y de alturas $B^a, e^aB^a, e^{2a}B^a, \dots, e^{ka}B^a \dots$ (Ver figura 1).



El área pude aproximarse entonces como la suma de los rectángulos R_1 ,R_2 ,...R_n ..., de la siguiente forma

$$Area \approx B(1-B)B^a + B(e-e^2)e^a B^a + B(e^2-e^3)e^{2a}B^a + \ldots =$$

$$= B^{a+1}(1-e)(1+e^{a+1}+e^{2(a+1)}+\ldots+\ldots$$

Sumando esta progresión geométrica se obtiene

$$Area \approx B^{a+1}\frac{1-e}{1-e^{a+1}}$$

Si el denominador de esta fracción se escribe nuevamente como la suma de la progresión geométrica $1 + e + e^2 + \ldots + e^a$, se obtiene

$$Area \approx B^{a+1}\frac{1-e}{(1-e)(1+e+e^2+\cdots+e^a)} =$$

$$= B^{a+1}\frac{1}{1+e+e^2+\cdots+e^a}.$$

Tomando valores de e, más y más cercanos a 1, $(es\ decir,\ si\ e \to 1)$ se obtienen sumas que cada vez se aproximan más y más al área bajo la curva. En el límite se obtiene

$$Area = \frac{B^{a+1}}{a+1}$$

Contribuciones a la teoría de números

La teoría de números fue el verdadero amor de Fermat. Como se puede inferir de su correspondencia, Fermat consideraba el estudio de las propiedades de los números enteros como el más grande reto al poder del razonamiento matemático. Sus aportes fueron numerosos, muchos de ellos inspirados en *La Aritmética* de Diophanto, uno de los grandes clásicos de la matemática griega, y el cual había sido traducido al Latín unos años antes del nacimiento de Fermat. Muchos de sus teoremas aparecen en la forma de notas al margen, que Fermat hizo en su copia personal de *La Aritmética*, traducción de Bachet, y que su hijo Samuel se encargó de recopilar e incorporar, a manera de apéndice, en una nueva edición. Una de estas notas, la cual aparece cerca al problema 8, Libro II, dice: *es imposible que un cubo sea escrito como suma de dos cubos, que una cuarta potencia sea escrita como suma de cuartas potencias, o en general, que cualquier número que sea una potencia más grande que dos, sea escrito como sumas de potencias de la misma clase. He encontrado una maravillosa demostración de esta proposición, pero el margen es muy pequeño para contenerla.* Por supuesto esta afirmación es la proposición que se conoce como *El último teorema de Fermat,* aunque parece que fue escrita treinta años antes de su muerte, en la década de 1630-1640, y ciertamente no corresponde a su último teorema. Posiblemente este nombre hace más bien referencia a que esta proposición, entre todas las proposiciones de Fermat, fue la última pendiente de demostración, y que finalmente se vino a probar en 1993.

Entre sus descubrimientos más famosos están los siguientes:

a) Si p es un número primo, y a es un entero que no es divisible por p, entonces $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$,, en otras palabras, p divide a $a^{p-1} - 1$.

Esta proposición, conocida como el *pequeño teorema de Fermat*, fue demostrada más tarde, y en forma más general, por
Euler.

b) Fermat afirma que *el área de un triángulo rectángulo de lados racionales no puede ser un racional*. Esta proposición puede reformularse así: no existen tres enteros x,y,z, tales que $x^2 + y^2 = z^2$ (x,y,z denotan las longitudes de los catetos y la hipotenusa, respectivamente) y que $\frac{1}{2}(xy)$ (el área del triángulo) sea un número entero. Esta es la única proposición, en toda la obra de Fermat, de la cual éste dio una demostración. Como es usual con los problemas de Fermat, estos no salen de la nada, y están inspirados en la obra de Diophanto. Este problema está inspirado en problemas similares planteados por Diophanto en su *Aritmética*, Libro VI. Su demostración es como sigue:

Si el área de un triángulo rectángulo fuese un cuadrado, entonces existirían dos bicuadrados, la diferencia de los cuales sería un cuadrado. Por lo tanto, existirían dos cuadrados cuya suma y diferencia serían ambos cuadrados. En consecuencia, *tendríamos un cuadrado igual a la suma de un cuadrado más el doble de otro, mientras que los cuadrados de los cuales esta suma está hecha tendrían a su vez un cuadrado por suma. Pero si un cuadrado está hecho de un cuadrado y el doble de otro cuadrado, su lado, como soy capaz de probar fácilmente, también esta hecho de un cuadrado y del doble de otro cuadrado. De aquí concluyo que dicho lado es la suma de los lados del triángulo rectángulo, y que el cuadrado simple contenido en la suma es la base, y el doble del otro cuadrado es la perpendicular.*

Entonces, este triángulo esta hecho de dos cuadrados, la suma y diferencia de los cuales serían a su vez cuadrados. Pero ambos cuadrados son más pequeños que aquellos que inicialmente se suponían que tenían suma y diferencia igual a un cuadrado. Por lo tanto hemos encontrado una pareja de cuadrados con suma más pequeña, y con la misma propiedad. Con el mismo razonamiento hallamos una suma más pequeña, y podemos seguir así ad infinitum. Esto sin embargo es imposible porque no puede haber una secuencia infinita de enteros más pequeños que cualquier entero que deseemos. La margen es muy pequeña para permitirme dar una prueba completa con todos los detalles.

Esta prueba tiene algunos puntos oscuros. En lenguaje moderno diría lo siguiente: en primer lugar, como $x^2 + y^2 = z^2$, se tiene que x,y,z es una terna pitagórica. Fermat conocía la solución general de esta ecuación, (de hecho este resultado era conocido por los griegos, [Elementos de Euclides, X 29, Lema 1]) la cual está dada por

$$x = 2pqd,\ \ y = (p^2 - q^2)d,\ \ z = (p^2 + q^2)d$$

en la cual $p > q$ denotan dos enteros, primos relativos y de paridad diferente, y d denota un entero positivo. El problema consiste en hacer que la siguiente expresión sea un cuadrado

$$\frac{1}{2}xy = pq(p^2 - q^2)d^2$$

Esto es verdad sólo en el caso en el que $pq(p^2-q^2)$ sea un cuadrado. De aquí que $p,q,p^2 - q^2$ tengan que ser cuadrados. Esta última diferencia es entonces una diferencia de cuartas potencias, *bicuadrados,* en la terminología de Fermat, y cuya diferencia es un cuadrado.

Ahora, los dos factores de $p^2 - q^2$, que son $p - q$ y $p + q$, son primos relativos, ya que de tener un factor en común lo tendrían su suma y su diferencia, $2p$ y $2q$, respectivamente, lo cual forzaría a que este factor sea 2 (p y q son primos relativos), pero como p y q tienen paridad contraria, su suma y su diferencia son necesariamente números impares. De lo anterior se deduce que, como $p^2 - q^2$ es un cuadrado, y $p^2-q^2 = (p-q)(p+q)$, con $p - q$ y $p + q$ primos relativos, entonces $p - q$ y $p + q$ tienen que ser ambos cuadrados. Esto es lo que Fermat afirma cuando dice que "...son cuadrados cuya suma y diferencia son cuadrados". La tercera afirmación de Fermat hace referencia a las ecuaciones

$$(p - q) + 2q = p + q,\ \ (p - q) + q = p,$$

en las cuales $p,q,\ p - q, p + q$, son cuadrados.

Las dos afirmaciones que hace Fermat a continuación son obscuras. Sean

$$p + q = r^2, p - q = s^2.$$

La primera de las afirmaciones dice que r puede ser escrito en la forma $r = u + v$, en la que uno de los números es un cuadrado y el otro el doble de un cuadrado. A continuación dice que u y v son lados de un triángulo rectángulo, es decir, que $u^2 + v^2$ es un cuadrado. La primera afirmación, dice Fermat, es fácil de probar, y afirma que la segunda se sigue de la primera. No es difícil ver cómo probarlas, aunque sólo podría conjeturarse si Fermat procedió o no en esta forma. Es posible que Fermat haya razonado de la siguiente manera: como p y q tienen paridad opuesta, se sigue que $p - q = s^2$ y $p + q = r^2$ son impares. De aquí que r y s también lo sean. Por otro lado, ya sabíamos que $p - q$ y $p + q$ son primos relativos, y por lo tanto r y s también lo son. Definamos u y v de la siguiente manera

$$u = \frac{r-s}{2}, \quad v = \frac{r+s}{2}.$$

Estos dos números son a su vez primos relativos, ya que de tener un factor común, también lo tendrían su suma y su diferencia, $r = u + v$ y $s = v - u$. Más aún,

$$uv = \frac{r^2 - s^2}{4} = \frac{(p+q)-(p-q)}{4} = \frac{q}{2}$$

Entonces, $q/2$ es un entero, luego q es par; pero por ser un cuadrado tendrá que ser divisible por 4, y por lo tanto, $\frac{1}{2}uv$ es un entero. Además, como $\frac{1}{2}uv = q/4$, y q es un cuadrado, se tiene que $\frac{1}{2}uv$ también es un cuadrado. Ahora, entre u y v, uno de ellos deberá ser par (pero no ambos, ya que son relativamente primos) de donde se concluye, dado que $uv/2$ es un cuadrado, que el par es dos veces un cuadrado, y el impar otro cuadrado. De aquí se sigue que $r = u + v$ es la suma de un cuadrado y dos veces un cuadrado, como corresponde a la primera de las afirmaciones antes mencionadas, y que

$$u^2 + v^2 = \left(\frac{r-s}{2}\right)^2 + \left(\frac{r+s}{2}\right)^2 = \frac{r^2 + s^2}{2} = p,$$

Lo cual corresponde a la segunda afirmación.

El resto de la prueba es fácil de seguir. La tripleta pitagórica cuyos "lados" son u, v, con suma p, es primitiva porque u y v son primos relativos, y como era ya conocido por él, deberían tener la forma:

$$2PQ,\ P^2 - Q^2,\ P^2 + Q^2,$$

en la cual $P > Q$, son primos relativos de paridad opuesta. Como $\frac{1}{2}uv$ (que es igual a $PQ(P^2 - Q^2)$) es un cuadrado, ya que de u y v, uno de ellos es un cuadrado y el otro el doble de un cuadrado, se sigue por un razonamiento similar al del párrafo anterior, que P, Q, $P - Q$, $P + Q$ son todos cuadrados, y no es difícil ver que

$$P + Q \leq (P + Q)PQ(P - Q)\frac{1}{2}uv < p + q.$$

El proceso puede repetirse, y con ello se producen cuadrados P', Q' tales que $P' + Q'$, $P' - Q'$ son también cuadrados y $P' + Q' < P' + Q'$ Esto nos lleva a un *descenso infinito,* un método de demostración inventado por Fermat, del cual éste se sentía supremamente orgulloso. En una larga carta escrita al final de su vida, Fermat hace un resumen de todos sus resultados en teoría de números y afirma que la prueba de cada proposición hace uso de su método de descenso al infinito. Por supuesto, este método no es otra cosa que el principio de inducción completa, reconocido por primera vez por Fermat.

c) Otros resultados famosos de Fermat incluyen un estudio de la *ecuación de Pell,* $x^2 - Ay^2 = 1$, los números de Fermat, $F_n = 2^{2^n} + 1$, aquellas proposiciones que hacen referencia a la posibilidad de descomponer un entero en suma de cuadrados y su *último teorema,* el cual afirma que la ecuación $x^n + y^n + z^n = 0$, no tiene ninguna solución en enteros x, y, z, con $xyz \neq 0$, y $n > 2$.

La ecuación de Pell aparece por primera vez en 1657, como un reto que Fermat envió en una carta a otros matemáticos, en particular a los matemáticos ingleses, con la esperanza de hacer que estos se interesaran en el estudio de los números enteros.

Desafortunadamente, los matemáticos ingleses creyeron que Fermat proponía que se encontraran soluciones racionales en vez de enteras, pensando así que el problema en cuestión admitía una solución diofantina trivial, a lo cual Fermat respondió señalando la ridiculez de estos, al pensar que él hubiese planteado un problema tan tonto.

No es clara la manera como Fermat llegó a esta ecuación, que después demostraría ser de fundamental importancia en toda la teoría de números, pero parece ser que ésta estaba contenida de manera implícita en algunos de los comentarios de Bachet a la obra de Diophanto. Hay varias cosas que sugieren que Arquímedes conocía esta ecuación para $A = 3$ y conocía la solución $1351^2 - 3 \times 780^2 = 1$. Parece haber evidencia de que los griegos conocían bastante sobre este tipo de problemas, aunque muchos de sus resultados se perdieron. Hay evidencia de que esta ecuación también se conocía en la India, varios siglo antes de Cristo. La solución $1151^2 - 92 \times 120^2 = 1$, caso $A = 92$, es obtenida por medio de una técnica bastante sofisticada, debida a Brahmagupta (598 a.c.), y lo que resulta aún más sorprendente, Bháscara Achárya (1114 d.c.) encontró una solución con $x = 226153980$, para el caso en el que $A = 61$, cinco siglos antes que Fermat.

Este problema fue parcialmente resuelto por los matemáticos ingleses, al parecer por John Wallis o por un tal Lord Brouncker, aunque Fermat, en una carta dirigida a Carcavi, señala que los ingleses sólo habían resuelto este problema en algunos casos particulares y que jamás habían proporcionado una prueba completa de que existieran infinitas soluciones a este problema, para el caso en el que A no sea un cuadrado. Es muy posible que Fermat no conociera tampoco su solución, aunque éste afirma poseer una demostración usando su método de descenso al infinito. Es muy dudoso que el método sea aplicable en este caso, o al menos nadie sabe como hacerlo. El problema anterior también derrotó a Euler, y su solución se vino a conocer sólo 100 años más tarde, la cual fue dada por Lagrange. Curiosamente, esta ecuación descubierta en occidente por Fermat, lleva el nombre de Pell, un matemático inglés de la época de Wallis, a quien Euler le atribuyó en forma equivocada la solución presentada por Lord Brouncker, y quien al parecer no tiene nada que ver en este asunto.

El "último teorema de Fermat"

Pocos problemas de la matemática han llegado a ser tan famosos y conocidos por el gran público como el problema que pide demostrar que la ecuación

$$x^n + y^n + z^n = 0,$$

no tiene ninguna solución en enteros x, y, z con $xyz \neq 0$, y $n > 2$.

¿Poseía en verdad Fermat una demostración? Muy pocas personas se inclinan a creer que así sea, y es muy dudoso que exista una prueba simple o "elemental" de esta proposición, si por elemental entendemos una prueba que sólo involucre propiedades y teoremas elementales de divisibilidad de números enteros. Es muy dudoso que Fermat tuviese una prueba correcta, incluso para el caso $n = 3$, aunque con seguridad si la poseía para $n = 4$, la cual es fácil de deducir como consecuencia de su teorema sobre el área de un triángulo pitagórico, discutida más arriba.

La primera prueba para exponente $n = 3$ fue dada por Euler en 1753, aunque ésta contiene un paso erróneo en el argumento, difícil de arreglar, pero que ciertamente es corregible usando los métodos de Euler. Habría de transcurrir noventa años antes de que Kummer desarrollara un método que permitiese dar una prueba que sirviera para conjuntos amplios de exponentes. Durante este período se demostraron los casos $n = 5$, por Sophie Germain, Legendre y Dirichlet y el caso $n = 7$, por Dirichlet y Lamé. En 1847, Kummer dio una demostración para todos los exponentes que fueran primos regulares. Aún se desconoce si estos son infinitos, y se ve todavía muy lejana una solución a este problema mediante una extensión de los métodos de Kummer.

En forma insospechada y de manera accidental, el matemático alemán G. Frey encontró en 1985 una conexión entre la teoría de curvas elípticas y el último teorema de Fermat. Después del descubrimiento de Frey, y como resultado de las investigaciones de muchos matemáticos, Andrew, Wiles, de la universidad de Princeton, logró finalmente probar el teorema, en 1993, y su demostración apareció en forma definitiva en los *Annals of Mathematics* en mayo de 1995. Sobre este problema existe una extensa literatura. El lector interesado en la historia del problema y su solución final, puede consultar [3] - [4].

La inmensa cantidad de matemáticas generada alrededor del famoso problema es prueba de la fecundidad de las ideas de Fermat y de la tremenda influencia que éstas habrían de tener para la posteridad. El legado de Fermat es inmenso, sus ideas precursoras del cálculo, su creación de la teoría de probabilidades y su teoría de números se erigen como una de las creaciones más hermosas y desconcertantes del intelecto humano.

Bibliografía

[1] Ball, Rouse, *A Short Account of the History of Mathematics*
[2] Bell, E. T., *Grandes matemáticos*
[3] Edwards, Harold, *Fermat's Last Theorem*
[4] Hellegouarch, Yves , *Invitation aux mathématiques de Fermat-Wiles*