



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

OBJETO VIRTUAL DE APRENDIZAJE (OVA) PARA ENSEÑAR A INTERPRETAR GRÁFICAS DESDE TEMÁTICAS DE LAS GEOCIENCIAS

MARCOS ALBERTO ÁVILA PABÓN

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Bogotá, Colombia

2.014

OBJETO VIRTUAL DE APRENDIZAJE (OVA) PARA ENSEÑAR A INTERPRETAR GRÁFICAS DESDE TEMÁTICAS DE LAS GEOCIENCIAS

Marcos Alberto Ávila Pabón

Tesis o trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magíster en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

Geólogo, M Sc. Guillermo A. Camargo Cortes

Línea de Investigación:

Didáctica de las Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Bogotá, Colombia

2.014

Dedicatoria

Agradezco infinitamente al todo poderoso, Rey de reyes, permitirme alcanzar esta meta personal y profesional.

Agradezco al profesor Guillermo Camargo por su apoyo, guía y estímulo para alcanzar los objetivos propuestos en el trabajo y a todo el cuerpo docente de la Universidad Nacional de Colombia por ser ejemplo de vida.

Agradezco a mis padres y hermanos por el acompañamiento en esta interesante labor académica.

Agradezco a los estudiantes que me permiten autoevaluar mi práctica docente para poder mejorar en todos los aspectos del ser humano.

“Enseñar situaciones sencillas de la vida conlleva aprendizajes significativos de las realidades circundantes.”

Resumen

El trabajo que se da a conocer a la comunidad educativa parte del interés y necesidad de mejorar la práctica docente. La didáctica de las matemáticas debe ser animada por la interdisciplinariedad. El permitir que varias disciplinas dialoguen es positivo para todos los involucrados en el proceso de enseñar y aprender. En las Geociencias se encuentra una oportunidad para el intercambio de conocimiento y la matemática debe articular sus conceptualizaciones a otras áreas del saber. Así mismo las Geociencias tienen varias ramas de las cuales se escogieron dos que son la Meteorología y la Geología. En la Meteorología se estudia la atmósfera con las variables involucradas de presión atmosférica y temperatura, y en Geología se trabaja la determinación de las capas internas de la Tierra. Con las gráficas seleccionadas de las Geociencias se desarrolla una unidad didáctica para enseñar a interpretar gráficas cartesianas contextualizadas para estudiantes de noveno grado que ya tienen unas bases apropiadas para seguir su construcción académica en el área de las ciencias. La unidad se elaboró sobre una herramienta tecnológica llamada OVA, Objeto Virtual de Aprendizaje, empleando el software eXeLearning de licencia GNU.

Palabras clave: Matemáticas, Interdisciplinariedad, Geociencias, Graficas cartesianas, Competencia interpretativa, OVA, eXeLearning.

Abstract

The work that is disclosed to the educational community of the interest and need to improve teaching practice. The teaching of mathematics should be encouraged by interdisciplinary. Allowing multiple disciplines dialogue is positive for all involved in the process of teaching and learning. In Geoscience is an opportunity to exchange knowledge and mathematics to articulate their conceptualizations to other areas of knowledge. Also Geosciences have several branches of which two were chosen that are Meteorology and Geology. The atmosphere is studied meteorology with the variables involved in atmospheric pressure and temperature, and Geology determining the inner layers of the Earth works. With the selected graphs of Geosciences develops a teaching unit for teaching contextualized to interpret graphs Cartesian freshmen who already have a suitable to continue their academic construction in the area of science bases. The unit was developed on a technological tool called OVA, Virtual Learning Object using the eXeLearning GNU software license.

Keywords: Mathematics, Interdisciplinary, Earth Science, Cartesian graphs, Interpretative jurisdiction, OVA, eXeLearning

CONTENIDO

	Pág.
Resumen	IV
Lista de figuras	IX
Lista de tablas	XI
Lista de símbolos y abreviaturas	XII
Introducción	1
1. FUNDAMENTACIÓN HISTÓRICO - EPISTEMOLÓGICA	3
1.1. Frente a la matemática	3
1.1.1. Origen de la Geometría	3
1.1.1. El Álgebra Geométrica	4
1.1.2. Etapa Medieval	5
1.1.3. Etapa del Renacimiento	8
1.1.4. Geometría de Coordenadas (Matemática del Siglo XVII)	9
1.1.5. El Concepto de Función	14
1.1.6. Las Matemáticas del Siglo XVIII	15
1.1.7. Concepciones Sobre Variable	15
1.1.8. Intervalo	16
1.1.9. Los Fundamentos de la Teoría de Conjuntos	16
1.1.10. Siglos XIX-XX	17
1.2. Frente a las Geociencias	19
1.2.1. Climatología y Meteorología	19
1.2.1.1. Presión Atmosférica	20
1.2.2. La Inspección de la Atmósfera	22
1.2.3. La atmósfera Estándar	23
1.2.4. Epistemología de las Capas de la Tierra	23
1.2.4.1. Descubrimiento de los Límites Internos de la Tierra	24
1.2.4.2. Discontinuidad de Mohorovicic	24
1.2.4.3. Límite Núcleo-Manto	26
1.2.4.4. Descubrimiento del Núcleo Interno	27
2. FUNDAMENTOS CONCEPTUALES	29
2.1. Frente a las Matemáticas	29
2.1.1. Conjunto	29
2.1.1.1. Determinación de un conjunto	29
2.1.1.2. Pertenencia	30
2.1.1.3. Conjuntos fundamentales	30
2.1.1.4. Diagrama de Venn	31
2.1.1.5. Subconjunto (\subseteq)	32
2.1.1.6. Variable Y Constante	32

2.1.1.7. Pareja o Par ordenado	34
2.1.1.8. Producto Cartesiano	35
2.1.2. Relación Matemática	35
2.1.2.1. Definición formal de relación matemática	37
2.1.2.2. Relación Binaria	37
2.1.2.3. Dominio Y Recorrido de una Relación	38
2.1.2.4. Variable Real	38
2.1.3. Grafica De Relaciones Matemáticas	39
2.1.3.1. Grafica de Proposición Abierta en una Variable	39
2.1.3.2. Relaciones de un conjunto en otro	40
2.1.3.3. Plano Cartesiano o Coordinado	41
2.1.4. Relación Funcional	46
2.1.5. Intervalos	46
2.1.6. Características de las relaciones binarias	47
2.1.7. Gráfica	50
2.1.7.1. Parámetros para Interpretar Gráficas Cartesianas	50
2.2. Frente a las Geociencias	55
2.2.1. La Tierra como un Sistema	56
2.2.2. La Atmósfera: Nuestra Capa Gaseosa	58
2.2.2.1. Propiedades Físicas de la Atmósfera	59
2.2.2.2. Composición de la Atmósfera	60
2.2.2.3. Características de la Atmósfera	61
2.2.2.4. Energía de la Atmósfera	62
2.2.2.5. Formas de Transmisión del Calor	63
2.2.2.6. Calor y Temperatura del Aire	64
2.2.2.7. Variación de la Temperatura con la Altura	65
2.2.2.8. La Atmósfera estándar	67
2.2.2.9. Capas de la Atmósfera	69
2.2.3. El Aire Pesa: Presión Atmosférica	77
2.2.3.1. Concepto y Medición	78
2.2.3.2. Variaciones de la Presión	82
2.2.3.3. Modelación Ideal de la Presión Atmosférica	88
2.2.3.4. Variación Horizontal de la Presión Atmosférica	90
2.2.3.5. El Campo de Presiones de la Atmósfera	90
2.2.4. El Interior Misterioso de la Tierra	92
2.2.4.1. Sismología	93
2.2.4.2. Principios de Sismología	93
2.2.4.3. Ondas Elásticas	94
2.2.4.4. Características de las Ondas Sísmicas	99
2.2.4.5. El Interior de la Tierra	100
2.2.4.6. Sondeo del Interior de la Tierra	100
2.2.4.7. Ondas Sísmicas y Estructura de la Tierra	101
2.2.4.8. Capas Definidas por su Composición	103
2.2.4.9. La Corteza	104
2.2.4.10. El Manto	105
2.2.4.11. El Núcleo	107

2.2.4.12. Capas Definidas por sus Propiedades Físicas	108
3. FUNDAMENTO PEDAGÓGICO	111
3.1. Enfoque Pedagógico	116
3.2. Interdisciplinariedad	119
3.3. Propuesta Didáctica	121
3.3.1. Contextualización de la propuesta didáctica	122
3.4. TIC	125
3.4.1. OVA	126
3.4.2. Elementos estructurales de un Objeto de Aprendizaje (OA)	127
3.4.3. Diseño	128
3.4.4. ExeLearning	129
3.4.4.1. Desarrollo de la propuesta didáctica	130
3.4.5. Ejecutar el OVA	132
4. CONCLUSIONES	133
Recomendaciones	134
Anexo	135
Referencia Bibliográfica	136

Lista de figuras

	Pág.
Figura 1-1. Representación de álgebra geométrica	4
Figura 1-2. Representación de un gráfico de Oresme	6
Figura 1-3. Representación de variabilidad por Oresme	7
Figura 1-4. Esquema gráfico de Fermat	10
Figura 1-5. Representación gráfica de Descartes	13
Figura 1-6. Modelo del experimento de Torricelli	21
Figura 1-7. Determinación de la discontinuidad de Moho	25
Figura 1-8. Modelo del interior de la Tierra por ondas P y S	27
Figura 1-9. Determinación del límite del núcleo	28
Figura 2-1. Esquema de diagrama de Venn	32
Figura 2-2. Esquema de un subconjunto	32
Figura 2-3. Gráfica de la recta con los números Enteros	39
Figura 2-4. Ubicación de un conjunto de números en la recta Z	40
Figura 2-5. Ubicación de un conjunto de números Reales en la recta numérica	40
Figura 2-6. Representación de un diagrama sagital	41
Figura 2-7. Plano cartesiano	42
Figura 2-8. Punto en plano cartesiano	43
Figura 2-9. Ubicación de una pareja ordenada	44
Figura 2-10. Puntos en plano cartesiano	44
Figura 2-11. Secuencia de puntos en sistema coordenado	45
Figura 2-12. Línea recta en plano coordenado	45
Figura 2-13. Gráficas de función creciente, decreciente y constante	48
Figura 2-14. Gráfica de relación discontinua	48
Figura 2-15. Gráfica de relación con simetría par	49
Figura 2-16. Gráfica de relación con simetría impar	49
Figura 2-17. Gráfica de relación periódica	50
Figura 2-18. Los subsistemas terrestres	55
Figura 2-19. Una perspectiva de la atmósfera	58
Figura 2-20. Representación de planetas del sistema solar con envoltura gaseosa	59
Figura 2-21. Espectro de luz	62
Figura 2-22. Variación de la temperatura con la altura en la atmósfera estándar	66
Figura 2-23. Representación de la magnetósfera	76
Figura 2-24. Una semblanza de la presión atmosférica	77
Figura 2-25. Gráfica de la presión atmosférica vs altitud	84
Figura 2-26. Estado inicial de dos gases iguales en similares condiciones	88
Figura 2-27. Variaciones de presión atmosférica relacionados a procesos de enfriamiento y calentamiento	87
Figura 2-28. Atmósfera en equilibrio estático	90
Figura 2-29. El maravilloso planeta Tierra	92

Figura 2-30. Cubo en compresión (a) y en cizalla (b)	94
Figura 2-31. Representación de la transmisión de ondas	94
Figura 2-32. Ilustración de las ondas P y S	95
Figura 2-33. Representación de ondas reflejadas y refractadas	96
Figura 2-34. Esquema de ondas transversales y compresionales	97
Figura 2-35. Refracción de una onda en ángulo crítico	98
Figura 2-36. Modelo de un planeta homogéneo con el desplazamiento de las ondas sísmicas	101
Fig. 2-37. Modelo de viaje de las ondas sísmicas en un planeta con aumento de velocidad por la profundidad	102
Figura 2-38. Modelo real de desplazamiento de ondas sísmicas en un planeta	102
Figura 2-39. Perfil de las ondas P y S en el interior del planeta Tierra	103
Figura 2-40. Estructura interna de la Tierra	104

Lista de tablas

	Pág.
Tabla 2-1. Formatos de relación	36
Tabla 2-2. Esquema de intervalos	47
Tabla 2-3. Composición de la atmósfera	60
Tabla 2-4. Medios de transmisión del calor	64
Tabla 2-5. Variables físicas de la atmosfera standard	69
Tabla 2-6. Variación de la presión atmosférica con la altura	85
Tabla 3-7. Reorganización por ciclos Sed Bogotá	114
Tabla 3-8. IDevices de ExeLearning	129

Lista de símbolos y abreviaturas

\mathbb{N} : Números naturales

\mathbb{Z} : Números enteros

\mathbb{Q} : Números racionales

\mathbb{R} : Números reales

\mathbb{I} : Números irracionales

\emptyset : Conjunto Vacío

\wedge : "Y"

\vee : "O"

\in : Pertenencia

\mathfrak{R} : Relación

\mathcal{D} : Dominio de una relación

\mathcal{R} : Recorrido de una relación

ρ : Densidad

INTRODUCCIÓN

Ante todo, desarrollar una maestría en educación y especialmente cuando tiene un énfasis en la enseñanza de las ciencias exactas y naturales, se visualiza un horizonte y es el de mejorar la práctica docente. Desde el ser interior del profesor es donde parten los deseos de alcanzar nuevos retos profesionales para mejorar la calidad educativa de un país.

En la realidad de un profesor de matemáticas se descubren situaciones que requieren una intervención pedagógica adecuada para su solución. Los estándares básicos de competencias del Ministerio de Educación Nacional son una guía para el docente en las temáticas que debe enseñar en el aula de clase y así mismo las editoriales tienen un referente para publicar los textos escolares.

Desde mi práctica pedagógica las gráficas cartesianas se han trabajado en el aula de clase de manera instructiva, donde solo se dan las directrices para el trazado y correspondiente presentación. Además se trabajan gráficas abstractas y las gráficas en contexto que se relacionen con alguna realidad no se tienen en cuenta.

Se emprendió la labor de buscar en las fuentes primarias de contenidos curriculares como son los textos escolares de matemáticas. Se revisaron diferentes libros de básica primaria, básica secundaria y media, de diferentes editoriales y años de publicación. Se encontró que el tema de las gráficas cartesianas es descontextualizado y centrado en gráficas abstractas. Además se dan aspectos de análisis de gráficas pero sin un aparente sentido interpretativo. Se veía que mi labor docente se asemejaba a lo que indicaban los libros que se habían revisado.

Se propuso romper esta deficiencia pedagógica proponiendo establecer un mecanismo de trabajo con gráficas contextualizadas. En el área de las Geociencias, se trabajan diferentes gráficas cartesianas con interesantes contextos, entonces se decidió por dos ramas que son la Meteorología y la Geología. En la Meteorología se puede estudiar la atmósfera y las variables fundamentales de presión atmosférica y de la temperatura. En la Geología se puede estudiar cómo se determinaron las capas internas del planeta Tierra. Son temáticas de interés general y a la vez presentan gráficas de un valor pedagógico significativo.

En el trabajo del estado del arte se encontró que la realidad de la interpretación de gráficas no era el mejor. Alayo & Shell [1.990] mencionan: “Muchos alumnos están familiarizados con gráficas, tablas de números y expresiones algebraicas, y pueden manipularlas con razonable exactitud, pero son incapaces de interpretar las características globales de la información contenida en ellas” p. 9

En el trabajo doctoral de García [2.005] señala que la gráfica tiene un valor: “En el campo educativo y cultural, la utilización de medios de comunicación visual, como ilustraciones y

gráficos, ha pasado progresivamente a un primer plano en todos los ámbitos de la vida de las sociedades modernas y especialmente en el ámbito educativo (Barquero, Schnotz y Reuter 2.000)” p. 50.

La gráfica se debe saber usar para poderla interpretar y así rescatar toda la información que nos pueda suministrar. Así lo señala García [2.005]:

Igualmente la habilidad para tratar la información presentada en formato gráfico está llegando a ser esencial para tomar decisiones y desenvolverse en la sociedad actual. Puede decirse que se hace necesaria y urgente una verdadera alfabetización gráfica que complemente las ya tradicionales, alfabetización literaria y matemática y que ayude a los estudiantes a descifrar mensajes gráficos de una manera autónoma en lugar de dejarse llevar simplemente por la fuerza y aparente sencillez e inmediatez de la imagen (Postigo y Pozo 2.000). p. 51

Finalmente se destaca la siguiente disertación presentada por García [2.005]:

Los estudiantes entienden más aquellos fenómenos que pueden visualizar que aquellos que no, y las gráficas dan un formato visible a las relaciones existentes entre variables representadas por grupos de datos inicialmente dispersos e inconexos. Así, las representaciones gráficas proveen un sustrato visible a procesos subyacentes en los fenómenos científicos que no son evidentes a simple vista (Kozma 2.003) p. 52

El uso de las TIC está revolucionando la educación y se ofrece una herramienta de trabajo, como es un OVA, Objeto Virtual de Aprendizaje, el cual se puede emplear desde cualquier sistema computacional, para generar aprendizaje autónomo y contextualizado, donde el docente es guía y colaborador, rompiendo el esquema tradicional de transmisor supremo.

El OVA complementa el discurso del docente, del texto escolar, abre espacios para que se pueda enriquecer con más temáticas de las Geociencias o de otras áreas del conocimiento, no es un sistema cerrado, se da para ser revisado, revaluado y reestructurado nuevamente. La dinámica del proceso de enseñar está en que no se puede estancar, todo está en continuo cambio y como tal la acción de enseñar – aprender está viva para que se pueda acomodar a otras áreas del conocimiento.

Partiendo del interés de poder dar otras temáticas alternativas en el contexto de la educación básica secundaria, se ha encontrado en las Geociencias una posibilidad de trabajo didáctico rico de conocimiento, alcanzado por otros científicos que han podido ver en el planeta Tierra fuente de inspiración. Buscar otros caminos alternos a los contenidos fijos de un plan curricular lleva a mirar otras áreas del conocimiento y proponiendo unos parámetros base para la interpretación de gráficos contextualizados, se da la oportunidad de encontrar una solución al dilema planteado inicialmente.

1. FUNDAMENTACIÓN HISTÓRICO - EPISTEMOLÓGICA

“Las raíces del presente se hunden profundamente en el pasado, y casi nada de ese pasado resulta irrelevante para el hombre que trata de entender como el presente llegó a ser lo que es”

[Kline, 1.992; Vol. 1 p. 15]

1.1. Frente a la matemática

El análisis epistemológico provee de historicidad a los fundamentos matemáticos, muestra la dinámica evolutiva de los conceptos, posibilita la observación de las disparidades entre el saber científico y el enseñado y señala que los objetos de enseñanza no son copias simplificadas de los objetos de la ciencia [Camargo & Guzmán, 2.005]

Boyer [1.987] indica que establecer un origen de las matemáticas, sea de la aritmética o de la geometría, es arriesgado y conjetural, ya que son más antiguas que la misma escritura.

1.1.1. Origen de la Geometría

El hombre neolítico revela con sus dibujos y diseños un interés en las relaciones espaciales, así mismo en la alfarería, la cestería y los tejidos se muestra ejemplos de congruencia y simetrías que prepara el camino a la geometría. [Boyer, 1.987]

En India se encontraron los “Sulvasutras” o reglas de cuerda, son relaciones sencillas que al parecer se utilizaban en la construcción de altares y de templos. Así mismo los egipcios tuvieron a su “tensador de cuerdas” o agrimensor porque las cuerdas se usaron para bosquejar los planos de los templos y reconstruir las fronteras borradas entre los terrenos. [Boyer, 1.987]

El desarrollo de la geometría puede haberse estimulado tanto por las necesidades prácticas de la construcción y de la agrimensura como por un sentimiento estético de diseño y orden. [Boyer, 1.987]

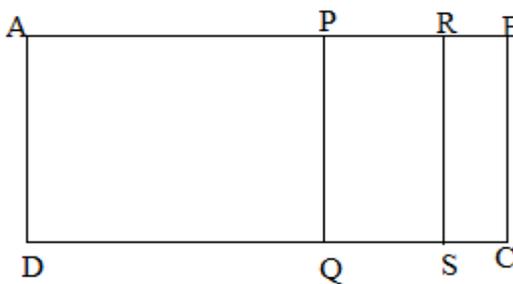
Ahora la matemática entendida como disciplina racional bien organizada e independiente, no existía antes de que entraran los griegos de la época clásica (600 - 300 a.C.). Las contribuciones más importantes del periodo clásico son los *Elementos* de Euclides (330 a.C. - 275 a.C.) y las *Secciones Cónicas* de Apolonio (262 a.C. - 180 a.C.). No se cuenta con manuscritos directos de

Euclides, pero sus escritos llegaron por las manos de los griegos. Los *Elementos* constan de 13 libros, con 467 proposiciones. [Kline, 1.992, Vol. 1]

1.1.1.1. El Álgebra Geométrica

El libro II de los *Elementos*, contiene 14 proposiciones, y fue importante en su época, de las cuales ninguna está presente en los textos actuales, esto se explica porque actualmente se tiene un álgebra simbólica y una trigonometría que han remplazado a sus equivalentes geométricos griegos. Como ejemplo tenemos la proposición 1: “si tenemos dos líneas rectas y cortamos una de ellas en un numero cualquiera de segmentos, entonces el rectángulo contenido por las dos líneas rectas es igual a los rectángulos contenidos por la línea recta que no fue cortada y cada uno de los segmentos anteriores”. [Boyer, 1.987, p.151] Esto de manera gráfica sería:

Figura 1-1. Representación de álgebra geométrica



Fuente: BOYER, Carl B. [1.987] Historia de la matemática. Ed. Alianza España: Madrid

De manera escrita es: $AD \cdot (AP + PR + RB) = AD \cdot AP + AD \cdot PR + AD \cdot RB$, esta formulación geométrica es una ley fundamental de la aritmética que se conoce como propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma. Actualmente las magnitudes se representan por letras que se sobreentiende son números conocidos o desconocidos, con los cuales se operan usando las reglas algorítmicas del álgebra, pero en tiempos de Euclides las magnitudes se representaban como segmentos de línea recta obedeciendo a los axiomas y teoremas de la geometría. Este libro II de los *Elementos* era la geometría con Álgebra, es decir un álgebra geométrica de la época. [Boyer, 1.987]

Apolonio de Perga (c. 262 - 180 a.C.) fue reconocido como el “Gran Geómetra”. Su obra “*Las Secciones Cónicas*” son 8 libros que contienen 487 proposiciones. Las secciones cónicas habían sido estudiadas previamente por *Aristeo el Viejo* y *Euclides* en sus obras. Así mismo Arquímedes (287-212 a.C.) presentó algunos resultados. Apolonio pulió el tema, despejándolo de irrelevancias y le dio forma sistemática. En la obra contiene material original, ingenioso, hábil y

organizado. Se puede considerar como la culminación de la geometría griega clásica [Kline, 1.992 Vol. 1]

Además Kline [1.992 Vol. 1] menciona que la matemática estrictamente deductiva de Euclides y Apolonio ha alentado la impresión de que “los matemáticos crean razonando deductivamente” p. 141. La insistencia en la deducción como método demostrativo y la preferencia por lo abstracto en contra de lo concreto determino el carácter de las matemáticas.

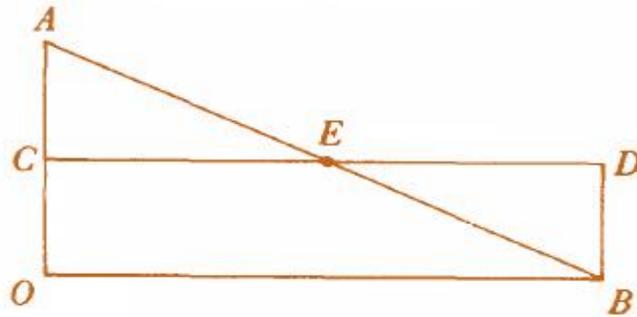
La Trigonometría fue creada en el período Greco-Alejandrino por tres personajes como son Hiparco, Menelao y Ptolomeo. Este trabajo fue motivado por el deseo de construir una astronomía cuantitativa, la cual sería utilizada para predecir las trayectorias y posiciones de los cuerpos celestes y para ayudar a medir el tiempo, el cálculo del calendario, la navegación, y la geografía. Esta trigonometría era esférica (geometría esférica) pero también incluyo ideas básicas de la trigonometría elemental. [Kline, 1.992 Vol. 1]

Lo que impulso a los griegos a crear y apreciar la matemática fue el deseo urgente e irreprimible de comprender el mundo físico. La matemática era una parte importante de la investigación de la naturaleza y la clave para la comprensión del Universo, pues las leyes matemáticas son la esencia de su diseño. [Kline, 1.992 Vol. 1]

1.1.2. Etapa Medieval

Kline [1.992] señala que el periodo medieval tuvo un discreto impacto en las matemáticas. Se destaca Leonardo de Pisa (c. 1.170-1.250) conocido como Fibonacci. Escribió el *Liber Abaci*, era una traducción libre de materiales árabes y griegos al latín. Otro matemático fue Nicolás Oresme (c.1.323-1.382) se interesó por la concepción de cambio y la velocidad del cambio cuantitativamente. Sobre este tema escribió *De Uniformitate et Difformitate Intensionum* (c.1.350) y *Tractatus Latitudinibus Formarum*. Para estudiar el cambio y la velocidad del cambio, Oresme siguió la tradición griega afirmando que las cantidades medibles distintas de números podían representarse mediante puntos, líneas y superficies. Para representar el cambio de la velocidad con el tiempo, representa el tiempo a lo largo de una línea horizontal, que llama la *Longitud*, y las velocidades en distintos instantes de tiempo mediante líneas verticales, que llamo *Latitudes*. Para representar una velocidad que decrece uniformemente desde el valor OA en O a cero en B, dibuja una figura triangular. También apunta que el rectángulo OBDC, determinado por E, el punto medio de AB, tiene la misma área que el triángulo OAB y representa un movimiento uniforme a lo largo del mismo intervalo de tiempo. Oresme asociaba el cambio físico con toda la figura geométrica. El área completa representa la variación en cuestión; no había referencia a valores numéricos. Como se puede ver en la siguiente figura.

Figura 1-2. Representación de un gráfico de Oresme

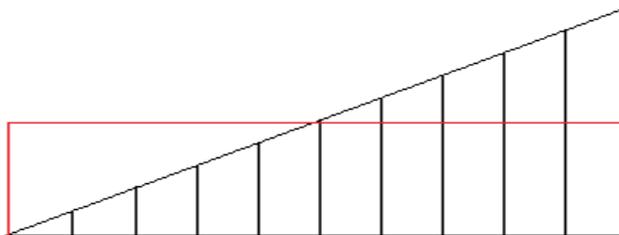


Fuente: Kline, Morris [1.992] El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días, Ed. alianza universidad, España.

Se menciona que Oresme contribuyó a la formación del concepto de Función, a la representación funcional de las leyes físicas, y a la clasificación de las Funciones. Se le ha acreditado también la creación de la geometría de coordenadas y la representación gráfica de Funciones. En realidad la *latitud* de las formas es una idea poco clara, como mucho un tipo de gráfico. Aunque la representación de Oresme de la intensidad bajo el nombre de *latitudines formarum* fue una técnica importante en el objetivo escolástico de estudiar el cambio físico y fue aplicada en algunos intentos de revisar la teoría de Aristóteles sobre el movimiento, su influencia sobre el pensamiento posterior fue pequeña. Galileo utilizó esta figura de manera más adecuadamente. [Kline, 1.992]

Adicionalmente Boyer [1.987] menciona que a Oresme hacia el 1.361 se le ocurrió una idea: ¿Por qué no hacer un dibujo o gráfica de la manera en que las cosas varían? Aquí se ve una sugerencia primitiva de lo que ahora se llama la representación gráfica de una Función. Todo lo que varía, se sepa medir o no, se puede imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo. Así para el caso de un cuerpo moviéndose con un movimiento uniformemente acelerado, Oresme dibujó una gráfica velocidad - tiempo en la que los puntos de una recta horizontal representan los sucesivos instantes de tiempo (o longitudes) y, para cada uno de estos instantes traza un segmento (latitud) perpendicular a la recta de longitudes en dicho punto, cuya longitud representa la velocidad en ese instante. Los extremos superiores de todos estos segmentos están en una recta, tal como lo considero Oresme, y si el movimiento uniformemente acelerado parte del reposo, entonces la totalidad de los segmentos velocidades (ordenadas) cubren el área de un triángulo rectángulo. Ver la siguiente figura.

Figura 1-3. Representación de variabilidad por Oresme.



Fuente: BOYER, Carl B. [1.987] Historia de la matemática. Ed. Alianza España: Madrid

Boyer [1.987] señala también que esta área representa la distancia recorrida, así Oresme obtiene una verificación geométrica de la regla del Merton College, la cual decía que la velocidad de cambio de una forma “*uniformemente diforme*” es constante, puesto que la velocidad en el punto medio del intervalo de tiempo es exactamente la mitad de la velocidad al final de dicho intervalo. Además, este mismo diagrama conduce de una manera obvia a la ley del movimiento que se suele atribuir a Galileo, ya en pleno siglo XVII, ya que resulta claramente en la figura de que el área correspondiente a la primera mitad del intervalo de tiempo es a la que corresponde a la segunda mitad como 1 es a 3; si se subdivide el intervalo en tres partes iguales entonces las distancias recorridas (dadas por las áreas correspondientes) estarán en la razón 1:3:5; para cuatro subdivisiones iguales las distancias estarán en la razón 1:3:5:7. En general, como lo observaría más tarde Galileo, las distancias estarán entre sí como los números impares, y como la suma de los n primeros números impares consecutivos es igual al cuadrado de n , la distancia total recorrida variara como el cuadrado del tiempo, que es ya la conocida ley Galileana de la caída de los cuerpos.

Los términos *latitud* y *longitud* que uso Oresme son los equivalentes a las ordenadas y abscisas respectivamente, y sus representaciones gráficas se parecen a las que se emplean en geometría analítica. Lo nuevo es la representación gráfica de una cantidad variable. Antes de Oresme otros matemáticos como Apolonio emplearon un formato algo similar al del sistema de coordenadas. [Boyer, 1.987]

También Boyer [1.987] menciona que Oresme escribió: “cualquier cualidad uniformemente *diforme* que termine en una intensidad cero se puede imaginar como un triángulo rectángulo” p. 340. Oresme subraya la propiedad que tiene su gráfica de un movimiento uniformemente acelerado de tener pendiente constante, observación que equivale a la ecuación de la recta que pasa por dos puntos en la geometría analítica moderna y que a la vez conduce a la idea del triángulo diferencial local.

El “*Tractatus de latitudinibus formarum*” escrito posiblemente por Oresme o quizá por alguno de sus estudiantes, apareció en numerosas copias manuscritas y se imprimió al menos en 4 ocasiones entre 1.482 y 1.515, pero esto era solo un resumen de una obra más amplia de Oresme titulada “*Tractatus de figuratione potentiarum et mensurarum*”. En esta obra sugiere la extensión a las tres dimensiones de su “*latitud de las formas*”, en la que se representaba una Función de dos variables independientes como un volumen formado por todas las ordenadas levantadas de acuerdo con una regla dada sobre los puntos de una región del plano de referencia. [Boyer, 1.987]

1.1.3. Etapa del Renacimiento.

Kline [1.992] señala que en la época del Renacimiento (1.400 - 1.600) se dieron cambios transcendentales. Johann Gutenberg (1.399 - 1.468) hacia el año 1.450 invento la imprenta con tipos móviles, permitiendo la difusión del conocimiento. Entre las obras que se imprimieron se destaca “*Elementos*” de Euclides en Venecia (1.482), luego se imprimieron los cuatro primeros libros de “*Secciones Cónicas*” de Apolonio, trabajos de Pappus, la “*Arithmetica*” de Diofanto entre otros tratados. Casi como consecuencia del Renacimiento y de los valores griegos, sobrevino el renacimiento del interés por las matemáticas.

Kline [1.992] menciona: “El énfasis pitagórico-platónico sobre las relaciones cuantitativas como la esencia de la realidad se hizo dominante en forma gradual. Copérnico, Kepler, Galileo, Descartes, Huygens y Newton eran, en este aspecto, pitagóricos y, mediante su trabajo, establecieron el principio de que el objetivo de la actividad científica debe ser la obtención de leyes matemáticas cuantitativas”. Vol. 1 p. 295.

Otro matemático importante fue François Viète (1.540 - 1.603). Este francés contribuyó a la aritmética, al álgebra, la trigonometría y la geometría. Se presentó en la obra “*Isagoge*” (introducción) de 1.591. En el álgebra propuso utilizar una vocal para representar una cantidad que se supone desconocida o indeterminada y una consonante para representar una magnitud o un número que se supone conocido o dado. Se establece una distinción clara entre el concepto de parámetro y la idea de incógnita. [Boyer, 1.987]

Boyer [1.987] indica que el álgebra de Viète es sincopada más que simbólica, adopta sabiamente los símbolos germánicos para la suma y la resta y símbolos diferentes para parámetros e incógnitas, el resto de su álgebra consistía en palabras y abreviaturas. Por ejemplo la tercera potencia de la incógnita no se representaba por A^3 , ni por AAA sino por *A cubus*, y la segunda potencia como *A quadratus*; en la multiplicación por la partícula latina “*in*”; la división se indicaba por medio de la línea de fracción y para la igualdad una abreviatura de la palabra latina “*aequalis*”. Además otros contribuyeron al cambio como Thomas Harriot quien recupero

la idea de Stifel de escribir el cubo de la incógnita como AAA. Esta notación se usó en la obra titulada *Artis analyticae praxis (Harriot) que fue impresa en 1.631*

1.1.4. Geometría de Coordenadas (Matemática del Siglo XVII)

Pierre de Fermat (1.601 - 1.665) y Rene Descartes (1.596 - 1.650) fueron los dos creadores de la geometría de coordenadas o “*analítica*”. La idea central era asociar ecuaciones algebraicas a las curvas y superficies. [Kline, 1.992]

Kline [1.992] menciona que la dependencia del algebra de la geometría empezó a invertirse en cierta manera cuando Viète, y después Descartes, emplearon el álgebra para resolver problemas de construcciones geométricas. Viète llamo a su algebra “arte analítico”, pues llevaba a cabo el proceso de análisis, particularmente en problemas geométricos. Este fue el punto de partida del pensamiento de Descartes sobre la Geometría Analítica. Se encuentra que entre los siglos XVI y XVII se toma conciencia de desarrollar el álgebra como sustitución de los métodos geométricos introducidos por los griegos.

Pierre de Fermat no fue un matemático de formación, estudio derecho. Fermat abordo la tarea de reconstruir los *Lugares planos de Apolonio*, apoyándose en las referencias contenidas en la *Colección matemática de Pappus*. Un importante subproducto de este esfuerzo fue el descubrimiento, probablemente antes de 1.636, del principio fundamental de la geometría analítica: “Siempre que en una ecuación final aparezcan dos cantidades incógnitas, tenemos un lugar geométrico, al describir el extremo de una de ellas una línea, recta o curva.” [Boyer, 1.987, P. 437]

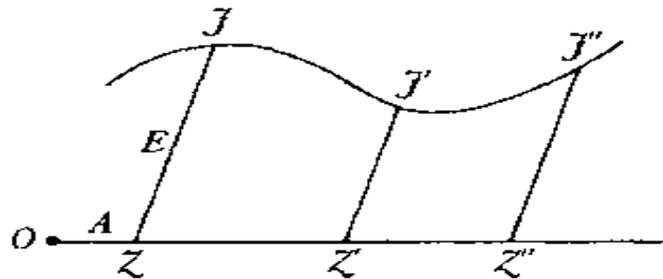
Boyer [1.987] señala que esta afirmación, breve y profunda, escrita un año antes de que apareciera la “*Géometrie*” de Descartes, parece haberle venido sugerida a Fermat por su aplicación del análisis de Viète al estudio de los lugares geométricos de Apolonio. El uso de las coordenadas no surge de consideraciones de tipo práctico ni de la representación gráfica de funciones medieval, sino que aparece al aplicar el álgebra renacentista a problemas geométricos de la antigüedad griega. Fermat pone el énfasis en la representación gráfica de las soluciones de ecuaciones indeterminadas, en vez de la construcción geométrica de las raíces de ecuaciones algebraicas determinadas. Fermat se limitó en su exposición contenida en su obra “*Ad locos planos et solidos isagoge*” (introducción a los lugares geométricos planos y solidos), únicamente a los lugares geométricos más sencillos. Mientras que Descartes empezó por el lugar de las tres y cuatro rectas, utilizando una de ellas como eje de abscisas. Fermat comienza por la ecuación lineal y elige un sistema de coordenadas arbitrario para representarlas.

La obra de Fermat “*Ad locos planos et solidos isagoge*” no se presentó en vida del autor, lo que favoreció la impresión general de que la geometría analítica había sido invención de Descartes

únicamente. Su obra se presentó únicamente en forma manuscrita hasta que se publicó en 1.679 en la “*Varia opera mathematica*” de Fermat. Esta geometría analítica está más cerca a la actual, ya que el eje de ordenadas se toma generalmente perpendicular al eje de abscisas.

En la obra de Fermat “*Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*” considera “una curva cualquiera y un punto genérico J sobre ella. La posición de J viene fijada por una longitud A , medida desde un punto O sobre una línea de base a un punto Z , y la longitud E de Z a J .” [Kline, 1.992, p.402] Fermat emplea así lo que hoy se llama coordenadas oblicuas, aunque no aparece explícitamente algún eje de las Y , ni se emplean coordenadas negativas. Sus A y E son nuestras X e Y . Como se aprecia en la siguiente figura.

Figura 1-4. Esquema gráfico de Fermat



Fuente: Kline, Morris [1.992] El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días, Ed. alianza universidad, España

Kline [1.992] indica que Fermat había enunciado con anterioridad su principio general: “siempre que en una ecuación se hallen dos cantidades incógnitas, tenemos un lugar geométrico, cuyo extremo describe una línea recta o curva” p. 402 así los extremos J, J', J'', \dots de E en sus diversas posiciones describen la “línea”. Sus cantidades desconocidas A y E es indeterminada. Aquí Fermat usa la idea de Viète de representar con una letra toda una clase de números. Fermat no uso coordenadas negativas, sus ecuaciones no podían representar las curvas completas que se podían describir. Afirma que una ecuación de primer grado en A y E tiene como lugar geométrico una recta, y todas las ecuaciones de segundo grado tienen cónicas como lugares geométricos. Finalmente Marín Mersenne (1.588-1.648) ayuda a difundir la obra de Fermat [Boyer, 1.987]

Por otro lado Rene Descartes francés de familia acomodada se convirtió en el “padre de la filosofía moderna”, así mismo presenta una nueva concepción científica del mundo y crea una nueva rama de la matemática. En su más famoso tratado ‘*Discours de la methode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les science*’ (Discurso del método para dirigir bien la

razón y buscar la verdad en las ciencias) de 1.637, a través de la duda sistemática, esperaba alcanzar unas ideas claras y distintas de las que sería posible entonces deducir una cantidad innumerable de consecuencias válidas. Esto lo condujo, en el campo de la ciencia, a suponer que todo podía explicarse en términos de materia (o extensión) y de movimiento. La ciencia cartesiana gozo de popularidad durante casi un siglo, pero cedió su lugar a la teoría razonada matemáticamente de Newton. [Boyer, 1.987]

Boyer [1.987] indica que la matemática crece generalmente por acumulaciones sucesivas, en las que raramente se necesita desechar partes innecesarias, mientras que la ciencia natural crece casi siempre por medio de sustituciones, cuando se ha encontrado una teoría más satisfactoria que las anteriores.

Hacia 1.628 se estima que los fundamentos de la geometría analítica se habían hecho. Descartes aplico su nueva metodología matemática y pudo resolver el problema de *las tres y cuatro rectas de Pappus*, esto lo lleva a escribir la obra "*La Géométrie*", cuya lectura permitió conocer la nueva rama de la matemática: *Geometría analítica*. [Boyer, 1.987]

Además Boyer [1.987] indica que el "*Discours de la méthode*" tiene tres apéndices, que son "*La Géométrie*", "*La Dioptrique*", (contenía la primera presentación de la ley de la refracción). Y "*Les Météores*", que incluye la primera explicación cuantitativa del arco iris. Por no percibirse una conexión con los tres apéndices mencionados, la obra "*Discours de la méthode*" se omitieron en las siguientes ediciones del trabajo de Descartes.

Hoy en día la geometría cartesiana es sinónimo de geometría analítica. Se ha visualizado como la algebrización de la geometría. Suministra un marco geométrico para realizar las operaciones suma, resta, multiplicación, división y raíces cuadradas en construcciones con el uso de la regla y el compás. [Boyer, 1.987]

Por otra parte Boyer [1.987] menciona que el álgebra simbólica formal tiene su punto más elevado, para la época, en *La Géométrie*. Como es el uso de las primeras letras del alfabeto para los parámetros constantes y de las últimas letras para las variables o incógnitas, adoptando la notación exponencial y la utilización de los símbolos germánicos de: (+ y -), hace que toda esta combinación se parezca a la actual. Se da una diferencia y es que para Descartes las variables y parámetros (constantes) son segmentos y actualmente se toman como números (valores numéricos). Rompe la tradición griega de ver al área como X^2 y al volumen como X^3 , ahora solo como un segmento.

Boyer [1.987] señala que Descartes acusaba a la geometría de apoyarse excesivamente en diagramas y figuras que llegaban a fatigar la imaginación, y a la vez acusaba al algebra de ser un arte confuso y oscuro que desconcierta a la mente. El objetivo de su método era pues doble:

“1. Liberar en lo posible a la geometría, a través de los métodos algebraicos, del uso de las figuras.

2. Darle un significado concreto a las operaciones del algebra por medio de su interpretación geométrica.” p. 429

Descartes en *La Géométrie* razona con el estudio de un problema puramente geométrico, para traducirlo al lenguaje de una ecuación algebraica, y una vez simplificada dicha ecuación todo lo posible, resuelve esta ecuación de una manera geométrica, análogamente a como había hecho previamente con las ecuaciones cuadráticas. Para las ecuaciones cuadráticas son suficientes rectas y circunferencias y para las cúbicas y las cuárticas bastan las cónicas. [Boyer, 1.987]

En *La Géométrie* no hay algo sistemático acerca del uso de las coordenadas rectangulares, ya que se puede tomar como dado un sistema de coordenadas oblicuas como tal para el problema que se estudia. Descartes reconoció de una manera muy general que las ordenadas negativas estaban dirigidas en un sentido opuesto al que se toma como positivo, pero nunca hizo uso, en cambio, de abscisas negativas. [Boyer, 1.987]

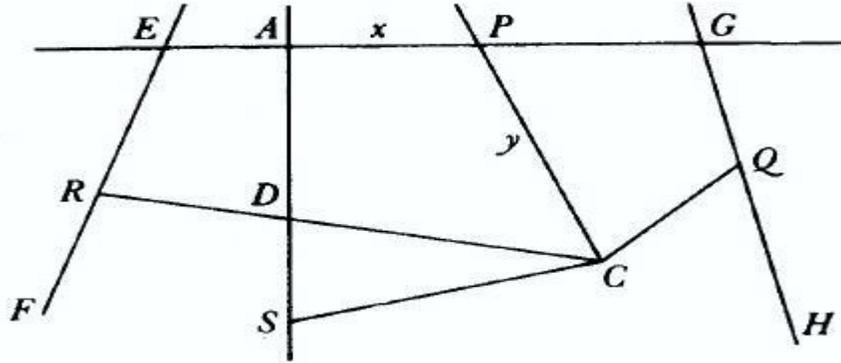
Boyer [1.987] menciona que Descartes no toma un cierto sistema de ejes de coordenadas para localizar con respecto a él la posición de determinados puntos, como podría hacer un topógrafo, ni tampoco consideraba a sus coordenadas como parejas de números; a este respecto el nombre de “producto cartesiano” (debido al matemático francés *M. Fréchet*), usado actualmente, resulta una contradicción.

También Boyer [1.987] menciona que “*La Géométrie*” fue publicada inicialmente en francés pero el ilustre Frans Van Shooten la publicó en latín, la lengua de los eruditos e intelectuales, una versión ampliada con aclaraciones y material suplementario como el de Debeaune demostrando las ecuaciones $y^2=xy + bx$; $y^2= - 2dy + bx$; $y^2=bx - x^2$ representan respectivamente hipérbola, parábola y elipse; en 1.649. Una versión renovada “*La Geometría a Renato Descartes*” en dos volúmenes entre 1.659 y 1.661, y nuevas ediciones entre 1.683 y 1.695.

La geometría analítica estuvo eclipsada por el cálculo durante más de un siglo y Gaspard Monge (1.746 - 1.818) administrador, matemático y maestro le dio un lugar en la escuela. Entre los años de 1.798 y 1.802 aparecieron cuatro geometrías analíticas elementales de las plumas de sus discípulos Sylvestre Francois Lacroix (1.765 - 1.843), Jean-Baptiste Biot (1.774 - 1.862), Louis puissant (1.769 - 1.843) y F.L. Lefrançais (1.732 - 1.807), todas ellas inspiradas por las lecciones en la *Ecole Polytechnique*. Se imprimieron muchas ediciones de estas obras permitiendo la difusión de la geometría analítica a nivel global de una manera clara y asequible. El término de “*Geometría Analítica*” se había usado de manera general durante el siglo XVIII, pero solo en las obras de Lefrançais de 1.804 y de Biot de 1.805 se consolida.

Asimismo Kline [1.992] menciona que Descartes usa el teorema de Pappus para ilustrar lo que sucede cuando un problema da lugar a una ecuación con dos incógnitas. En el libro II, Descartes trata el problema de Pappus para el caso de las cuatro rectas. Estas son AG, GH, EF, y AD, como se aprecia en la figura siguiente:

Figura 1-5. Representación gráfica de Descartes.



Fuente: Kline, Morris [1.992] El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días, Ed. alianza universidad, España

Descartes establece una recta AG como línea base con un origen en el punto A. Los valores X son, pues longitudes a lo largo de esta recta, y los valores Y son longitudes que comienzan en la línea base y forman un ángulo fijo con ella. Este sistema de coordenadas es oblicuo. Las X, Y de Descartes son positivas, sin embargo sus ecuaciones cubren porciones de la curva que están solo en el primer cuadrante, como se conoce actualmente. En el tercer libro de *La Géométrie* retoma el tema del libro I, es la resolución de problemas de construcciones geométricas que al formularse algebraicamente dan lugar a ecuaciones determinadas de grado tercero o superior y que, de acuerdo con el álgebra, precisan de las secciones cónicas y curvas de grado superior. [Kline, 1.992]

Por otro lado Kline [1.992] señala que en la geometría analítica, los conceptos geométricos podían formularse algebraicamente y los objetivos geométricos podían alcanzarse por medio del álgebra. Los objetos son básicamente figuras geométricas y las trayectorias de los objetos móviles son curvas. La geometría analítica posibilitó la expresión de formas y trayectorias en forma algebraica, de la cual se podía extraer información cuantitativa.

La disciplina de “geometría analítica”, debió llamarse “geometría de coordenadas” o “geometría algébrica” pero esta última ya tiene otra connotación en la actualidad. El término “analítica” no es el adecuado. Esto se debió a que Descartes y Vieta, permitía que la palabra “análisis” era todavía apropiada para describir la aplicación del álgebra a la geometría, ya que el álgebra servía para “analizar” el problema de construcción geométrica considerado. El término de

“geometría analítica” se refiere tanto a la demostración como al uso del método algebraico. [Kline, 1.992]

El álgebra para Descartes antecede a las demás ramas de la matemática. Es una extensión de la lógica útil para tratar cantidades, e incluso más fundamental que la geometría, es decir, lógicamente anterior a ella. En la *Géométrie* dice que un producto de líneas puede resultar una línea; pensaba en cantidades y no en términos geométricos como habían hecho los griegos. Le parecía claro que el cálculo algebraico era independiente de la geometría. [Kline, 1.992]

Finalmente John Wallis, influido por Viète, Descartes, Fermat y Harriot, libero la aritmética y el álgebra de la representación geométrica. En su “Algebra” (1.685) dedujo algebraicamente todos los resultados del libro V de Euclides. Vio en el álgebra brevedad y transparencia. [Kline, 1.992]

1.1.5. El Concepto de Función

Las matemáticas obtuvieron del estudio del movimiento un concepto fundamental, que fue central en prácticamente todo el trabajo de los siguientes 200 años, el concepto de Función o Relación entre variables. Se encuentra esta noción casi a lo largo de dos nuevas ciencias, de Galileo, el libro en que fundo la mecánica moderna. Galileo expreso sus relaciones funcionales en palabras y en el lenguaje de las proporciones. Muchas de las Funciones introducidas durante el siglo XVII fueron estudiadas en primer lugar como curvas, antes de que el concepto de Función fuera totalmente identificado. [Kline, 1.992]

Kline [1.992] indica que en la época griega, pocas curvas, como la Cuadratriz y la espiral de Arquímedes, estaban definidas en términos de movimiento, pero en aquellos tiempos tales curvas estaban fuera de los límites de las matemáticas legítimas. En el siglo XVII, Mersenne (1.615) definió la cicloide como el lugar geométrico que describe un punto fijo, de una rueda que gira sobre el suelo. Galileo demostró que la trayectoria de un proyectil disparado en el aire formando un ángulo con respecto al suelo es una parábola, considerando la curva como el lugar geométrico de un móvil.

La definición más explícita del concepto de Función en el siglo XVII fue dada por James Gregory en su *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura* (1.667). Definió una función como una cantidad que se obtiene de otras cantidades mediante una sucesión de operaciones algebraicas o mediante cualquier otra operación imaginable. [Kline, 1.992]

Además Kline [1.992] señala que Newton (1.665) utilizo el término “fluent” (fluyente) para representar cualquier relación entre variables. En un manuscrito de 1.673, Leibniz utilizo la palabra “función” para significar cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva. Leibniz introdujo las palabras constante, variable y parámetro, esta última utilizada en conexión con una familia de curvas. Tratando con Funciones, Jean Bernoulli hablaba ya desde 1.697 de

una cantidad formada, de “cualquier manera” posible, es decir mediante expresiones algebraicas y trascendentes, de variables y constantes. Leibniz utilizó la palabra “función” para significar cantidades que dependen de una variable.

1.1.6. Las Matemáticas del Siglo XVIII

Leonard Euler (1.707 - 1.783), en su “*Introductio in Analysi Infinitorum*” (1.748), enaltece el álgebra como muy superior a los métodos sintéticos de los griegos. En el comienzo de *Introductio*, define una Función como cualquier expresión analítica formada, de modo arbitrario, a partir de una cantidad variable y de constantes. Comienza con la noción de función algebraica, en la que las operaciones que se hacen sobre la variable independiente son únicamente algebraicas, las cuales a su vez se dividen en dos clases: racionales e irracionales. Las primeras intervienen las cuatro operaciones elementales y en las segundas intervienen raíces. Esta obra fue la primera en que se implantó el concepto de Función como una noción básica para dictaminar el material de los otros manuscritos. [Kline, 1.992]

Kline [1.992] señala que Euler en su *Introductio* (1.748), incorpora la representación paramétrica de las curvas, donde X e Y son coordenadas, en términos de una tercera variable. Euler trató sistemáticamente la geometría plana con coordenadas. Con el trabajo de Euler, LaGrange y Monge, la geometría analítica se convirtió en una rama de las matemáticas independiente y acabada. El uso de valores negativos de X e Y aparece en el trabajo de La Hire y Wallis, Newton no emplea únicamente los dos ejes y valores negativos de X como Y, sino que traza los cuatro cuadrantes.

1.1.7. Concepciones Sobre Variable

Cauchy (1.789 - 1.857) empieza su trabajo de 1.821 con la definición de una Variable. “se llama variable a una cantidad que se considera tiene que tomar sucesivamente muchos valores diferentes unos de los otros” Además “cuando se relacionan cantidades variables entre ellas de modo que estando dado el valor de una de estas, se puedan determinar los valores de todas las otras, ordinariamente se concibe a estas cantidades diversas expresadas por medio de la que está entre ellas, la cual entonces toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son aquellas que uno llama funciones de esta variable” [Kline, 1.992, p. 1.254]

Por otro lado Kline [1.992] indica que Dirichlet (1.805-1.889) dio la definición de una Función *univaluada* que es la que se emplea actualmente, qué Y es una función de X cuando a cada valor de X en un intervalo dado le corresponde un único valor de Y. Agregó que no importa si en todo este intervalo Y depende de X de acuerdo a una ley o más, o si la dependencia de Y de X puede

expresarse por medio de operaciones matemáticas. El trabajo de Weierstrass (1.815 - 1.897) ataco la frase “una variable se acerca a un límite”, la cual sugiere tiempo y movimiento. Interpreta una variable simplemente como una letra que se usa para denotar cualquier valor de los de un conjunto dado que se le puede asignar a la letra. Así se elimina la idea de movimiento. Una variable continua es tal que si X es cualquier valor del conjunto de valores de la variable y δ cualquier número positivo, hay otros valores de la variable en el intervalo $(X_0 - \delta, X_0 + \delta)$.

1.1.8. Intervalo

Por lo demás Kline [1.992] menciona que Heine (1.821-1.881) se inspiró en los trabajos de Georg Cantor y Weierstrass, definiendo la continuidad uniforme para Funciones de una o varias variables y luego demostró que una Función que es continua en un intervalo cerrado y acotado de los números Reales es uniformemente continua. Heine empleo el siguiente teorema: “sean dados un intervalo cerrado $[a, b]$ y un conjunto infinito numerable Δ de intervalos, todos en $[a, b]$, tales que todo punto X de $a \leq x \leq b$ sea un punto interior de al menos uno de los intervalos de Δ . (Los extremos a y b se consideran como puntos interiores cuando a es el extremo izquierdo de un intervalo y b el extremo derecho de otro intervalo). Entonces un conjunto con un numero finito de intervalos de Δ tiene la misma propiedad, a saber, todo punto del intervalo cerrado $[a, b]$, es un punto interior de al menos uno de los intervalos de este conjunto finito (a y b pueden ser extremos).” p. 1.259

1.1.9. Fundamentos de la Teoría de Conjuntos

Los griegos exploraron intermitentemente el tema de conjuntos pero fue Bolzano (1.781 - 1.848), en su obra: *Paradojas del infinito* (1.851), publicada tres años después de su muerte, fue el primero en dar pasos decisivos hacia una teoría definitiva de Conjuntos. Defendió la existencia de conjuntos infinitos, esto como una posición más filosófica que matemática y puso el acento en la noción de equivalencias de dos conjuntos, con la que aludía a lo que más tarde se llamaría correspondencia biunívoca entre los elementos de ambos conjuntos. [Kline, 1.992]

Kline [1.992] señala que el verdadero creador de la teoría de conjuntos fue Georg Cantor (1.845-1.918). En 1.874 publicó su primer artículo sobre *Teoría de conjuntos infinitos*, el cual tuvo críticas en su momento. Siguió publicando artículos sobre teoría de conjuntos y números *transfinitos* hasta 1.897. Para Cantor conjunto “era una colección de objetos definidos y separados que puede ser concebida por la mente y sobre la que podemos decidir si un determinado objeto pertenece o no a ella” (p. 1.312). Por otro lado para cantor “un conjunto es infinito si puede ponerse en correspondencia biunívoca con una parte de sí mismo” (p. 1.313).

Conjuntamente definió la unión e intersección de conjuntos, entre otros aportes temáticos de su amplio trabajo matemático.

El pensamiento matemático de Cantor tuvo sus contradictores entre ellos al matemático alemán Kronecker (1.823 - 1.893) pero así mismo otros que vieron virtudes en las ideas de Cantor, entre ellos Adolf Hurwitz y Hadamard. En 1.926 Hilbert expreso: “Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor creo para nosotros” (p. 1.323) y elogio la aritmética Transfinita como “el producto más impresionante del pensamiento matemático, una de las realizaciones más bellas de la actividad humana en el dominio de lo puramente inteligible” [Kline, 1.992, p. 1323]

Kline [1.992] señala que el matemático alemán Ernst Zermelo (1.871 - 1.953) emprendió la tarea de axiomatizar la teoría de conjuntos para poderle quitar el toque de intuición puesta por Cantor. Su sistema de axiomas contenía conceptos y relaciones fundamentales que estaban definidas implícitamente por las afirmaciones de los axiomas mismos. Entre tales conceptos los fundamentales eran el de conjunto y la relación de pertenencia de un elemento a un conjunto. Así mismo la existencia de un conjunto infinito y las operaciones tales como la unión de conjuntos o la formación de subconjuntos. Como también el llamado “axioma de elección”, según el cual, “dada cualquier colección de conjuntos no vacíos disjuntos, es posible elegir en cada uno de ellos un elemento para formar un nuevo conjunto” p. 1.322.

La fundamentación de la teoría de conjuntos hecha por Zermelo fue mejorada por Abraham A. Fraenkel (1.891 - 1.965) y Von Neuman entre otros. A. Fraenkel indica que se deben restringir los tipos de conjuntos que se admiten, donde los admitidos sean suficientes para las necesidades del análisis. Y Von Neuman estableció una distinción entre conjuntos y *clases propias*. Esto permitió desarrollar la teoría de conjuntos que se necesita para todo el análisis clásico y evitar paradojas. “Pero la consistencia de la teoría axiomática de conjuntos no ha sido demostrada” [Kline, 1.992, p. 1.568]

Finalmente la teoría de conjuntos fue una rama autónoma de las matemáticas y tuvo a mediados del siglo XX unos efectos tan profundos en la enseñanza de las matemáticas en todos sus niveles. [Boyer, 1.987]

1.1.10. Siglos XIX-XX

Kline [1.992] exterioriza que los griegos, así como Descartes, Newton, Euler por nombrar algunos grandes pensadores, creían que las matemáticas proporcionan la descripción precisa de los fenómenos reales y que consideraban sus trabajos como desvelamientos de la estructura matemática del universo. Los matemáticos trataban con abstracciones, pero estas no eran más que las formas ideales de los objetos físicos o de los sucesos.

Kline [1.992] señala que la introducción y la aceptación gradual de conceptos que no tienen contrapartida inmediata en el mundo real obligo a reconocer que la matemática es una creación humana, en cierto modo arbitrario, más que una idealización de las realidades de la naturaleza, obtenida únicamente a partir de esta. Pero acompañando a este reconocimiento, y empujando de hecho a su aceptación, se produjo un descubrimiento más profundo: que la matemática no es un conjunto de verdades acerca de la naturaleza. El desarrollo que planteo la cuestión de la verdad fue la *Geometría No Euclidiana*, aunque su impacto se vio aplazado por el característico conservadurismo y estrechez de miradas de la mayoría de los matemáticos. El filósofo David Hume (1.711 - 1.776) había señalado que la naturaleza no se acomoda a patrones fijos ni leyes necesarias.

El grupo de matemáticos franceses que escribieron bajo el seudónimo de *Nicolás Bourbaki* muestra su optimismo con las siguientes palabras: “Hace veinticinco siglos que los matemáticos vienen practicando la costumbre de corregir sus errores, viendo así su ciencia enriquecida y no empobrecida; esto les da derecho a contemplar el futuro con serenidad” pero así mismo el matemático Hermann Weyl (1.885 - 1.955) expresa: “El problema de los fundamentos últimos y del significado último de la matemática sigue abierto; no sabemos en qué dirección hallará su solución final, ni siquiera si cabe esperar en absoluto una respuesta final objetiva. El “matematizar” muy bien pudiera ser una actividad creativa del hombre, como el lenguaje o la música, de una originalidad primaria, cuyas decisiones históricas desafíen una racionalización objetiva completa” [Kline, 1.992, p. 1.600] La matemáticas está abierta a experiencias mentales nuevas.

1.2. Frente a las Geociencias.

Frente al hecho de estudiar la atmósfera, capa que nos protege y con el gas que se respira todos los días, se debe conocer algunos aspectos de la evolución conceptual que sustentan la presión atmosférica y la temperatura de la atmósfera.

1.2.1. Climatología y Meteorología

La meteorología y la climatología son disciplinas que comparten el mismo objeto de estudio: **la atmósfera**. [Ayllón, 2.003]

La meteorología tiene raíces griegas “*meteoros*”: elevado en el aire y “*logos*”: estudio. Por lo tanto estudia las causas, estructura, naturaleza, evolución y relación de los fenómenos atmosféricos, así como las condiciones dominantes en un periodo corto llamado “tiempo meteorológico”. La meteorología hace parte de las ciencias físicas y durante mucho tiempo la base de investigación ha sido la observación, y no la experimentación. Tiene carácter geográfico por la distribución de los fenómenos atmosféricos, ya que su variación tiene relación con las características de cada región. [Ayllón, 2.003]

La climatología es una ciencia que requiere de la información de cada una de las variables meteorológicas de grandes periodos para obtener valores medios, que permitan detectar y apreciar la interrelación de los fenómenos atmosféricos con la geografía del lugar y de esa manera determinar el Clima. [Ayllón, 2.003]

Cuadrat & Pita [1.997] señalan que “Clima seria lo permanente, lo habitual, lo característico de la atmosfera sobre un lugar; en suma, aquellas condiciones atmosféricas susceptibles, por su permanencia, de generar un medio propio.” p. 9. Es decir el clima seria el conjunto de tendencias resultantes de condiciones habituales durante un largo periodo, que como mínimo se suele establecer en treinta años.

El tiempo se puede entender como una combinación atmosférica coyuntural y efímera. “Es el conjunto de valores que en un momento dado y en un lugar determinado caracterizan el estado atmosférico” p. 9 [Cuadrat & Pita, 1.997]

La aparición de la climatología como ciencia no se tiene un referente histórico. Los pueblos antiguos como los babilonios, griegos y hebreos miraban a la naturaleza en aspectos de condiciones atmosféricas para poderla descifrar. Las observaciones hechas a la atmósfera estaban influidas por las creencias religiosas y por la astrología. En esta primera etapa se cubrió en deducciones, basado en la observación sistemática con valor relativo y local. [Albentosa, 1.990]

Albentosa [1.990] señala que el inicio de la concepción de tiempo atmosférico comienza con los griegos, y es Aristóteles con su obra “*Meteorología*” (s. IV a. C.), donde aparecen los principales conocimientos de la época. Se considera como el primer meteorólogo formal. Intento establecer una relación de causa – efecto de diferentes fenómenos atmosféricos, como vientos, tormentas, las nubes y la lluvia. Este trabajo de meteorología fue considerado como básico e indiscutible durante más de 2.000 años por la racionalidad con que fue escrito. La aportación griega fue fundamental en la meteorología, constituyéndose la base de esta ciencia naciente, alcanzando su influencia hasta el siglo XVII.

En la edad media la meteorología se estancó. En el año de 1.210 el concilio de París condeno la obra de Aristóteles y tres siglos más tarde Galileo fue condenado a muerte por ir en contra del Universo Aristotélico. Solo entre el tercero y cuarto decenio del siglo XIV, bajo la dirección de William Merle, en Oxford se inician las observaciones sistemáticas a la atmósfera. [Albentosa, 1.990]

Albentosa [1.990] indica que Galileo en 1.592 introduce el indicador de Temperatura, tiempo después se le incluiría una escala arbitraria, transformándose en un termómetro. Este hecho marca la transición de la observación visual a la observación instrumental y constituye el primer paso hacia la exactitud.

En el siglo XVII se inicia la primera revolución de la meteorología, estimulada por los descubrimientos geográficos de finales del siglo XV y del siglo XVI, en construcción de aparatos de medida y la aparición de la nueva física. A principios de la segunda mitad del siglo XVII, Huygens introduce los puntos de congelación y de ebullición del agua como índices de referencia en la escala termométrica. Pero solo hasta el siglo XVIII, aparecen las escalas del inglés Fahrenheit y la del francés Réaumur. En 1.742 el sueco Celsius introduce la escala centígrada. [Albentosa, 1.990]

1.2.1.1. Presión Atmosférica

Aristóteles (384 - 322 a. C), supone por intuición que el aire pesa y para comprobarlo tomo un odre, primero lo peso vacío de aire y luego lo peso con aire. La diferencia seria el peso del aire pero el resultado dio el mismo. Entonces Aristóteles pensó que el aire era una especie de fluido etéreo sin peso. Esta idea persistió hasta el siglo XVII. [Ledesma, 2.011]

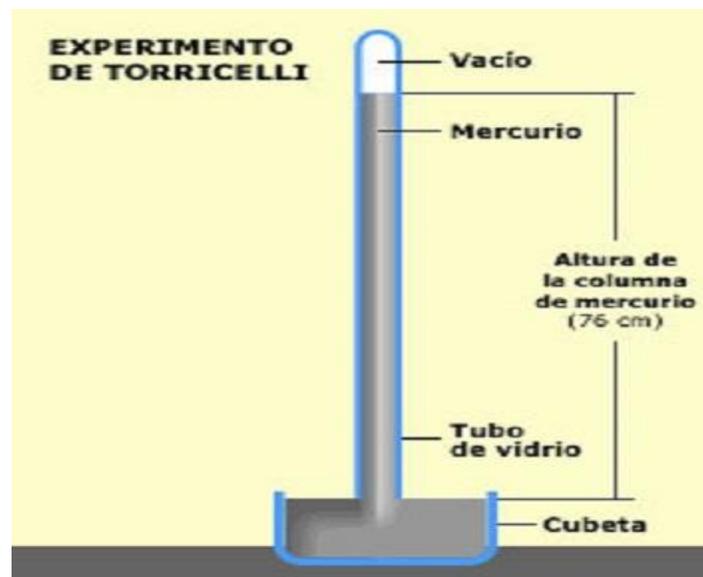
Ledesma [2.011] señala que el físico alemán del siglo XVII Otto Von Guericke (1.602 - 1.687), realizo un experimento similar al de Aristóteles, pero en este caso uso una botella de vidrio. Primero la peso con una balanza y después atornillo la botella a su máquina neumática con la que hizo el vacío correspondiente. Al pesarlo nuevamente comprobó que el peso había

disminuido. El error de Aristóteles estuvo en que no se había percatado de la variación de volumen en el orbe.

Zambrano [2.003] menciona que el físico italiano Evangelista Torricelli (1.608 - 1.647) en 1.643 determinó la presión atmosférica, para ello tomó un tubo de vidrio de un metro de longitud y de un centímetro cuadrado de sección, abierto por un extremo, por donde lo llenó de Mercurio (Hg), lo tapó con un dedo y luego lo introdujo en una cubeta llena del mismo metal.

Al quitar el dedo de la boca del tubo, observó que el Mercurio descendió, pero no hasta vaciarse el tubo, sino hasta una altura determinada, lo que le indicó la existencia de una fuerza igual que actúa, en sentido contrario, sobre la superficie libre de la cubeta. Midió la altura y encontró que era igual a 76 cm y que dicha columna de Mercurio, a nivel del mar y 0 °C de temperatura, representaba una masa de 1.033,6 gr. Este fue el primer barómetro de Hg. [Zambrano, 2.003]

Figura 1-6. Modelo del experimento de Torricelli



Recuperada de: <https://encrypted->

[tbn3.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcS3sfua9hOpYYcBWCHUHQX1AOstAdinsycy0yYkkP4Zr2boiQW3iw](https://encrypted-tbn3.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcS3sfua9hOpYYcBWCHUHQX1AOstAdinsycy0yYkkP4Zr2boiQW3iw)

Además Zambrano [2.003] señala que el matemático, físico y filósofo francés Blas Pascal (1.623 - 1.662), comprueba que cuando se lleva el barómetro a una gran elevación, como la cima de una montaña, la altura de la columna de Mercurio desciende considerablemente; este descenso se debe a que hay una menor presión hacia abajo sobre la superficie libre de Mercurio, lo que favorece el vaciado de la columna de Mercurio, en una mayor cantidad, una disminución de presión que obedece al hecho de que por encima de ese punto hay menos aire.

1.2.2. La Inspección de la Atmósfera

Albentosa [1.990] señala que al principio del siglo XIX se inicia de forma sistemática el estudio de las partes altas de la atmósfera. Jacques Alexandre César Charles (1.746-1.823) realiza en París el primer ascenso científico en globo y en 1.862 fue ejecutada por James Glashier (1.809 - 1.903). En la segunda mitad del siglo XIX se ve la necesidad de intensificar estudios en las capas elevadas de la atmósfera, y es donde se inician las observaciones de la atmósfera libre por medio de globos que transportan aparatos registradores. En 1.901, Suring y Bersou alcanzan los 10.800 m de altura en el interior de un globo. En 1.902 Léon Teisserenc de Bort y Richard Assman, de manera individual descubren la continuidad de la Tropopausa y la capa superior que denominan Estratósfera. Pero ya con el invento del avión y de la radio las observaciones a la atmósfera fueron más científicas.

En 1.860 Christophorus Buys-Ballot (1.817 - 1.890) descubre la “ley del viento”, estableciendo la relación del viento y la distribución de la presión. En 1.869, Buchant publica el primer planisferio de la distribución de presiones. A la par se inicia el estudio de las variaciones periódicas y no periódicas y de falta de ritmo de los diferentes elementos del clima. En 1.887, el alemán Hans publica el primer atlas meteorológico. [Albentosa, 1.990]

Durante el siglo XIX se construyen los aparatos que constituyen una estación meteorológica de primera categoría. Por el desarrollo de la nueva física se pudieron desarrollar estudios acerca del calor por Carnot y especialmente la presentación de la ley de los gases por J. Dalton. Estableciendo una explicación del calentamiento y enfriamiento de los gases por compresión y rarefacción. Estos procesos son fundamentales en los fenómenos atmosféricos. Luego se establecen los servicios meteorológicos en diferentes puntos del planeta para luego surgir en 1.878 la Organización Meteorológica Internacional. [Albentosa, 1.990]

La gran exploración no solo de la atmósfera sino también del espacio comienza el 4 de octubre de 1.957, cuando se lanza el Sputnik-1. Iba dotado de instrumentos para medir la presión, temperatura, radiación cósmica, campo geomagnético, radiación solar entre otros parámetros. Otra gran hazaña fue la de los norteamericanos el 16 de julio de 1.969 cuando lanzan el Apolo XI, llegando a la luna cuatro días después. [Ledesma, 2.011]

Albentosa [1.990] menciona que con el desarrollo de las ciencias de la aeronáutica y del espacio se dan las estaciones de observación meteorológica extraterrestre. El lanzamiento del satélite meteorológico artificial “*Tiros I*” por los Estados Unidos, el primero de abril de 1.960, constituyó el hecho más importante de la historia de la meteorología. Se pudo observar la capa gaseosa desde el espacio y luego se han enviado más satélites con mayor desarrollo tecnológico, para un total de 51 satélites meteorológicos entre la década de los sesenta y setenta.

La primera guerra mundial intensificó la aviación, lo cual facilitó el desarrollo de la meteorología. La invención de la radio permitió el intercambio rápido de valores

meteorológicos, tanto entre estaciones meteorológicas como con los navíos. Después de la segunda guerra mundial se da una etapa en la climatología y más con el desarrollo de otras ciencias afines. Se sistematizaron las teorías de turbulencia y de transferencia de calor; avanzó el conocimiento acerca de la radiación solar, la condensación y procesos de observación estructurados. [Albentosa, 1.990]

1.2.3. La atmósfera Estándar

Inicialmente la atmósfera estándar fue desarrollada por el *Weather Bureau*, la oficina meteorológica de los Estados Unidos de América en el año de 1.922 a solicitud de la NACA (National Advisory Comitee for Aeronautics), establecida en las condiciones atmosféricas medias en los EUA a 40°lat N y uno de sus especialistas, Brombacher en 1.935, preparo las primeras tablas para dar la presión atmosférica en función de la altitud [Ledesma, 2.011]

Al mismo tiempo en Europa la ICAN (International Commission for Aerial Navigation) estableció otra atmósfera tipo para el territorio europeo y otras zonas del mundo con el resultado de que entre ambas solo había pocas diferencias no significativas. Posteriormente estas divergencias fueron ajustadas por la ICAO (International Civil Aviation Organization) para conseguir una atmosfera para todos. A partir de 1.982 nuevos comités, disponen de mejores medios de exploración, extendiendo el modelo estándar hasta los 700 km de altitud. [Ledesma, 2.011]

1.2.4. Epistemología de las Capas de la Tierra

La Geología es una ciencia que se ha encargado de estudiar el planeta Tierra, y por lo tanto ha tenido su evolución desde tiempos antiguos [Tarbuck & Lutgens, 2.010]

Tarbuck & Lutgens [2.010] mencionan que los escritos sobre fósiles, gemas, terremotos y volcanes se remontan a los griegos, hace más de 2.300 años. El filósofo griego Aristóteles elaboro opiniones del planeta de manera arbitraria. Creía que las rocas habían sido creadas bajo la “influencia” de las estrellas y que los terremotos se producían cuando el aire entraba con fuerza en la tierra, se calentaba por el fuego interior y salía de manera explosiva. Durante la edad media las ideas de Aristóteles fueron tenidas en cuenta y no tuvieron mucho cambio.

El plutonismo, formulada por James Hutton (1.726 - 1.797), es la teoría que explica el origen y naturaleza de las rocas que forman la corteza terrestre por la acción del calor interno de la tierra. Esta idea del calor interno como elemento motor de la evolución del globo terrestre había sido sugerida por Rene Descartes en su obra “*Principios de Filosofía*” (1.644). Descartes considero a la Tierra como una estrella en proceso de enfriamiento, por un interior caliente,

idea que fue también considerada por Athanasius Kircher (1.602 - 1.680) en su obra *Mundus Subterraneus* (1.665) [Calvo, 2.011]

Tarback & Lutgens [2.010] señalan que a finales del siglo XVIII, se inició la geología moderna cuando el escocés James Hutton publicó su obra "Teoría de la Tierra". Estableció un principio fundamental conocido como el *Uniformismo*. Este consiste en que "las leyes físicas, químicas y biológicas que actúan hoy, lo han hecho también en el pasado geológico" p. 4. Esto mismo se puede entender como "*el presente es la clave del pasado*".

William Whewell (1.794 - 1.866) enuncia la doctrina del *Catastrofismo*, la cual influyó en el pensamiento de la dinámica de la Tierra. Esta proclamaba que los paisajes de la Tierra habían sido formados por grandes catástrofes, donde las causas eran desconocidas [Tarback & Lutgens, 2.010]

El principal geólogo del siglo XIX fue el escocés Charles Lyell (1.797 - 1.875), su mayor obra fue *Principios de geología*, escrita entre 1.830 y 1.833. Luego escribió la obra *Elementos de geología* (1.838), que es el primer manual publicado en el mundo sobre geología, estableciendo un método científico riguroso basado en la observación y también en la experimentación. [Calvo, 2.011]

1.2.4.1. Descubrimiento de los Límites Internos de la Tierra

Tarback & Lutgens [2.010] señalan que durante el siglo XIX, los sismólogos se reunieron para analizar datos sismológicos recogidos de muchas estaciones sismográficas. A partir de esta información, los sismólogos desarrollaron una imagen detallada del interior de la Tierra. Este modelo se ha estado ajustando a medida que se dispone de más datos y que se emplean nuevas técnicas sísmicas. Además, los estudios de laboratorio determinan experimentalmente las propiedades de los diversos materiales de la Tierra bajo los ambientes extremos de las zonas profundas de nuestro planeta, que añaden más información del planeta.

1.2.4.2. Discontinuidad de Mohorovicic

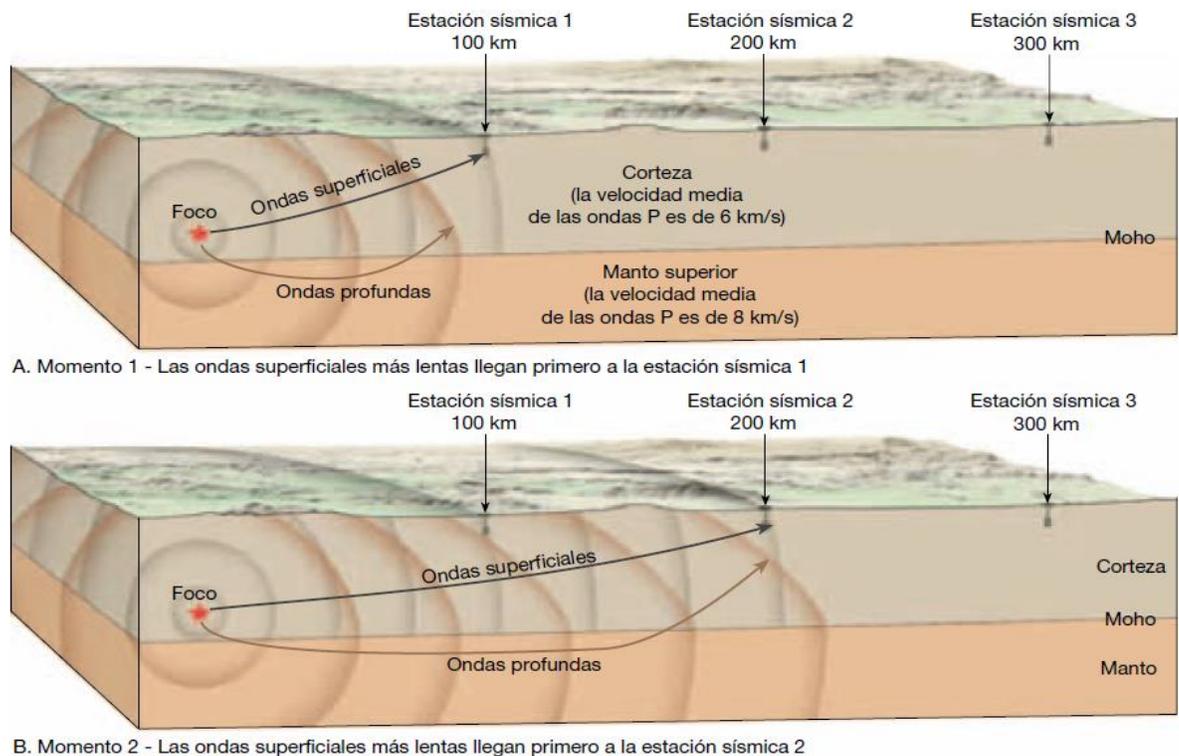
En 1.909, el sismólogo yugoslavo, Andrija Mohorovicic (1.857 - 1.936), dio a conocer la primera prueba convincente de la distribución en capas del interior de la Tierra. El límite que descubrió separa los materiales de la corteza de las rocas de composición diferente del manto subyacente y se denominó discontinuidad de Mohorovicic en su honor. El nombre de este límite se abrevió a Moho. [Tarback & Lutgens, 2.010]

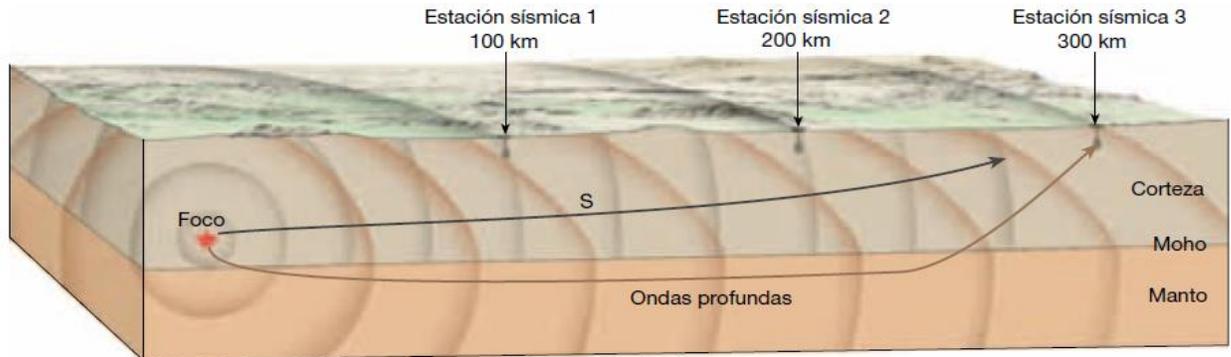
Tarback & Lutgens [2.010] indican que mediante un análisis minucioso de los sismogramas de los terremotos superficiales, Mohorovicic descubrió que las estaciones sismográficas alejadas

más de 200 kilómetros de un terremoto obtenían velocidades medias apreciablemente mayores para las ondas P que las estaciones localizadas más cerca del sismo (Figura 1-7). La velocidad media de las ondas P, que eran las primeras en llegar a las estaciones más próximas, eran de unos 6 kilómetros por segundo. Por el contrario, la energía sísmica registrada en estaciones más distantes transitaba a velocidades aproximadas a los 8 kilómetros por segundo. Este brusco salto de velocidad no se ajustaba con el modelo general que se había observado previamente. A partir de esta información, Mohorovicic concluyó que por debajo de los 50 kilómetros existía una capa con propiedades notablemente diferentes de las correspondientes a la capa más externa de la Tierra.

En la figura 1-7 se ilustra cómo Mohorovicic llegó a esta importante conclusión. Se observa que la primera onda que alcanzó el sismógrafo localizado a 100 kilómetros del epicentro siguió la ruta más corta directamente a través de la corteza. Pero en el sismógrafo localizado a 300 kilómetros del epicentro, la primera onda P que llegó viajó a través del manto, una zona de mayor velocidad. Por lo tanto, aunque esta onda viajó una distancia mayor, alcanzó el instrumento de registro antes de que lo hicieran los rayos que siguieron la ruta más directa. Esto se debe a que una gran parte de su viaje la realizó a través de una zona cuya composición facilitaba el desplazamiento de las ondas sísmicas. [Tarbuck & Lutgens, 2.010]

Figura 1-7. Determinación de la discontinuidad de Moho





C. Momento 3 - Las ondas más profundas y más rápidas llegan primero a la estación sísmica 3

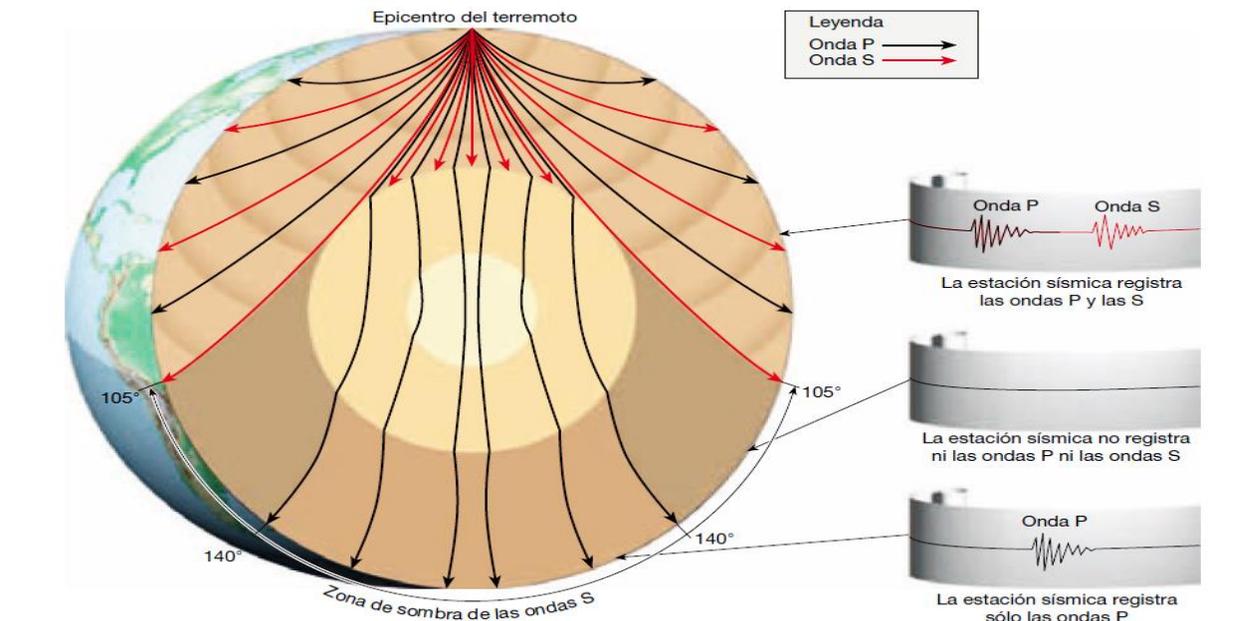
Recuperada de TARBUCK, Edward J. LUTGENS, Frederick K. [2.010] Ciencias de la Tierra, una introducción a la geología física.

1.2.4.3. Límite Núcleo-Manto

Luego en 1.914, el sismólogo alemán Beno Gutenberg (1.889-1.960) estableció la localización de otro límite importante. Este descubrimiento se fundamentó en la observación de que las ondas **P** disminuyen y finalmente desaparecen por completo a unos 105° a partir de un sismo (Figura 1-8). Luego, en la posición de 140° más lejos, vuelven, pero unos 2 minutos después de lo que cabría esperar en función de la distancia recorrida. Este cinturón, donde las ondas sísmicas directas están ausentes, tiene una amplitud de unos 35° y se ha denominado zona de sombra de las ondas **P** (Figura 1-8). [Tarbuck & Lutgens, 2.010]

Tarbuck & Lutgens [2.010] mencionan que Gutenberg y otros investigadores antes que él se dieron cuenta de que la zona de sombra de la onda **P** podría explicarse si la Tierra tuviera un núcleo compuesto de un material diferente al del manto superior. Lo que ocurre es que las ondas **P** no se interrumpen, sino que la zona de sombra se produce por la refracción de dichas ondas, que entran en el núcleo como se muestra en la figura 1-8. El núcleo, que Gutenberg calculó se localiza a una profundidad de 2.900 kilómetros

Figura 1-8. Modelo del interior de la tierra por ondas P y S



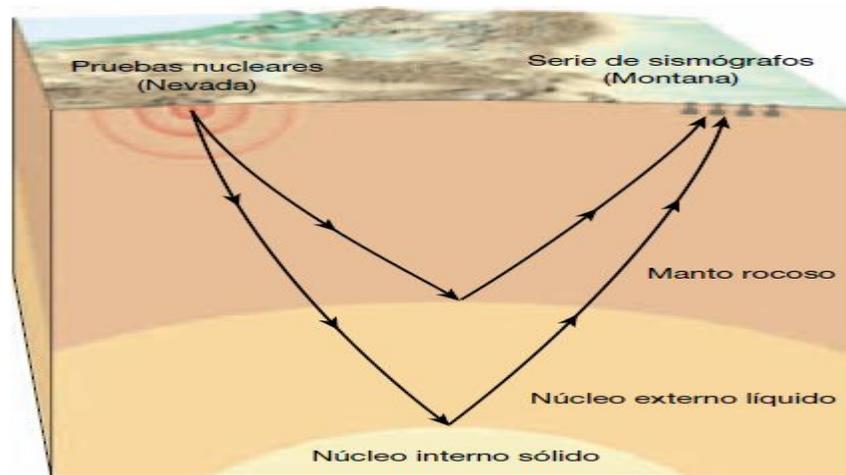
Recuperada de TARBUCK, Edward J. LUTGENS, Frederick K. [2.010] Ciencias de la Tierra, una introducción a la geología física.

Después se determinó que las ondas **S** no atraviesan el núcleo. Este hecho promovió a los geólogos a concluir que, al menos una parte de esta región, es líquida (Figura1-8). Esta conclusión se apoyó posteriormente por la observación de que las velocidades de las ondas P disminuyen de manera súbita, aproximadamente un 40 %, cuando entran en el núcleo. Dado que la fusión reduce la elasticidad de las rocas, esta evidencia apunta a la existencia de una capa líquida por debajo del manto rocoso. [Tarbuck & Lutgens, 2.010]

1.2.4.4. Descubrimiento del Núcleo Interno

Tarbuck & Lutgens [2.010] indican que en 1.936, Inge Lehmann (1.888 - 1.993), sismóloga danesa, comunicó la última subdivisión importante del interior de la Tierra. Lehmann descubrió una nueva región de reflexión y refracción sísmicas dentro del núcleo. Por consiguiente, se descubrió un núcleo dentro del núcleo. El tamaño del núcleo interno no se estableció con precisión hasta principios de los años sesenta, cuando se llevaron a cabo pruebas nucleares subterráneas en Nevada. Al conocerse la localización y el momento exactos de las explosiones, los ecos de las ondas sísmicas que rebotaban del núcleo interior proporcionaron una medida precisa para determinar su tamaño, como se aprecia en la figura 1-9.

Figura 1-9. Determinación del límite del núcleo



Recuperada de TARBUCK, Edward J. LUTGENS, Frederick K. [2.010] Ciencias de la tierra, una introducción a la geología física.

A partir de estos datos, se descubrió que el núcleo interno tiene un radio de unos 1.216 kilómetros. Además, las ondas **P** que atraviesan el núcleo interno tienen velocidades medias apreciablemente más rápidas que las que sólo penetran en el núcleo externo. El aparente aumento de elasticidad del núcleo interno es una prueba de que esta región más interna es sólida. En las últimas décadas, los avances en sismología y mecánica de rocas han permitido mayores refinamientos del modelo interno de la Tierra. [Tarbuck & Lutgens, 2.010]

2. FUNDAMENTOS CONCEPTUALES

2.1. *Frente a las Matemáticas*

La estructura de la propuesta didáctica parte de la teoría de Conjuntos, trazada por el matemático alemán Georg Cantor. Luque, Mora & Torres [2.005] señalan que la teoría de conjuntos es un lenguaje apropiado para expresar ideas matemáticas.

2.1.1. Conjunto

En la literatura no se ha establecido una definición formal y se da de manera intuitiva. Varios autores dan su concepto, entre ellos tenemos a Soler & Núñez [2.009]: “es la reunión de elementos bien determinados” (p. 31). Veerarajan [2.008]: “es una colección de objetos bien definida, significa que debe ser posible determinar si un elemento dado se encuentra en el conjunto bajo escrutinio” (p.51), y García [2.001]: “es una estructura fundamental discreta sobre la que se basan otras estructuras. Se utilizan para agrupar objetos que, con frecuencia, poseen las mismas propiedades. El lenguaje de los conjuntos constituye una manera de estudiar colecciones de una forma organizada” (p. 107) De lo anterior se infiere que un Conjunto reúne elementos con unas características específicas.

Partiendo de la definición intuitiva de Conjunto se desarrollan los siguientes referentes conceptuales:

Los conjuntos se notan con letras mayúsculas (A, B, C,...) y los elementos con letras minúsculas (a, b, c,...), números o símbolos apropiados, como se aprecia en el siguiente ejemplo [Soler & Núñez, 2.009] por ejemplo:

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

2.1.1.1. *Determinación de un conjunto*

Muñoz [2.012] indica que un conjunto se puede determinar de dos maneras diferentes:

- Por extensión: Dando una lista de los objetos o elementos que lo conforman.

Se debe tener en cuenta escribir sus elementos entre dos llaves separados por comas, por ejemplo el conjunto de las vocales:

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

- Por comprensión: Dando la condición o las condiciones que deben cumplir sus elementos; estas condiciones deben ser lo suficientemente precisas para no tener dudas si el elemento pertenece o no al conjunto en cuestión.

Su forma de presentación puede ser: $\{X \mid X \text{ es un...}\}$ Y se puede leer como: “el conjunto de los elementos X tales que...”

2.1.1.2. *Pertenencia*

Es la forma de indicar que un elemento hace parte de un conjunto, y se emplea el símbolo: \in . Cuando un elemento no hace parte del conjunto se indica con: \notin [Muñoz, 2.012]

Por ejemplo: sea el conjunto $P = \{\text{mercurio, venus, tierra}\}$

Mercurio $\in P$, se puede leer: “mercurio está en el conjunto P”.

Marte $\notin P$, se puede leer: “marte no está en el conjunto P”.

2.1.1.3. *Conjuntos fundamentales*

Conjunto unitario es aquel que está constituido por un solo elemento.

Por ejemplo sea el conjunto por comprensión $E = \{X \mid X \text{ es una estrella} \wedge X \text{ es la más cercana a la tierra}\}$, donde su forma por extensión es $E = \{\text{SOL}\}$

Conjunto Vacío es aquel que no posee elementos y su forma de representación es:

$A = \{\}$, o también de la forma: \emptyset

Por ejemplo indicar: $H = \{X \in \mathbb{Z} \mid X^2 < 0\} = \emptyset$

Conjunto referencial: es un conjunto no vacío, cuyos elementos nos referimos en la condición. Cada vez que se remplace “X” por un elemento del referencial, la condición se debe transformar en una proposición verdadera o falsa [Muñoz, 2.012]

Soler & Núñez [2.009] nos mencionan que en matemáticas se considera como referencial, conjuntos numéricos como los números Naturales \mathbb{N} , los números Enteros \mathbb{Z} , los números Racionales \mathbb{Q} , los números Reales \mathbb{R} , el conjunto de los números Irracionales \mathbb{I} entre otros. Estos se pueden ilustrar a continuación:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\}$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Nota: el símbolo “U” designa la unión entre conjuntos, siendo esta una operación entre conjuntos. Es otro conjunto que contiene aquellos elementos de \mathbb{Q} o de \mathbb{I} o de ambos.

Con la siguiente situación se puede establecer el conjunto referencial para el lanzamiento de un dado y determinar el número de puntos de la cara superior. Este experimento determina el conjunto referencial U, como:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Una vez establecido el conjunto referencial U, se puede construir el conjunto A de elementos que cumplan una propiedad dada P: $A = \{X \mid P(X)\}$ [Soler & Núñez 2.009].

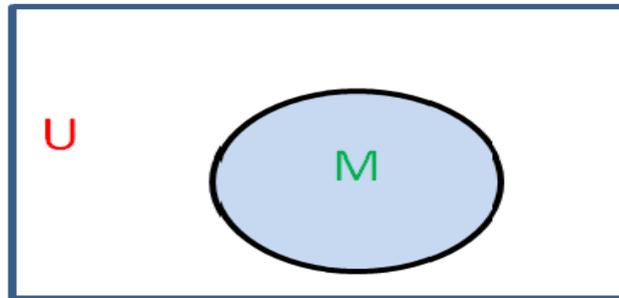
Es importante definir un conjunto de referencia o Universal ya que pueden aparecer contradicciones al suponer, la existencia de un conjunto que tenga a todos los conjuntos como elementos, conocido esto como la paradoja de Russell [Luque, Mora & Torres. 2.005]

2.1.1.4. Diagrama de Venn

Es usual representar los conjuntos *gráficamente*, donde el conjunto referencial se representa por un rectángulo y los conjuntos por círculos contenidos en el rectángulo; esta representación se conoce como diagrama de Venn – Euler [Soler & Núñez 2.009].

Otras referencias hacen mención solo al matemático John Venn para representación de un conjunto de manera gráfica. Zill & Dewar [2.012] menciona: “Una representación gráfica de los conjuntos y de las relaciones entre ellos se lleva a cabo en unos diagramas de figuras planas cerradas, el conjunto U se representa por el interior de un rectángulo y los otros conjuntos mediante discos incluidos en el rectángulo.”(p.26) Y Dunham [2.006] nos expresa: “Un diagrama de Venn es un campo dentro del cual varias áreas circulares representan grupos de cosas que comparten algunas propiedades comunes”. (p.373) Un esquema de lo mencionado se puede observar a continuación:

Figura 2-1. Esquema de diagrama de Venn

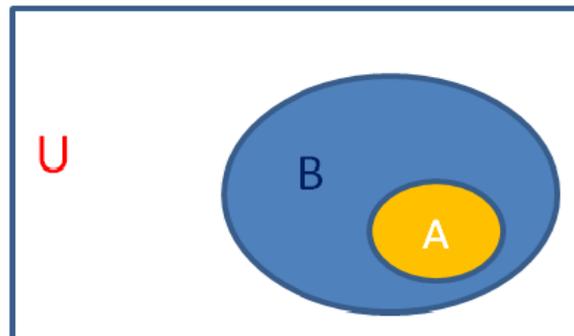


Fuente: Ávila M.

2.1.1.5. Subconjunto (\subseteq)

Un conjunto A es un subconjunto de B , ($A \subseteq B$) si y solo si todo elemento de A es un elemento de B . Muñoz [2.012]

Figura 2-2. Esquema de un subconjunto



Fuente: Ávila M.

2.1.1.6. Variable y Constante

Para la propuesta didáctica es fundamental definir los términos de Variable y Constante. Granville [2012] menciona que **Variable** es “una cantidad a la que se le puede asignar, durante el curso de un proceso de análisis, un número ilimitado de valores”. **Constante** “es una cantidad

que durante el curso de un proceso tiene un valor fijo” (p.11). Además una Constante numérica o absoluta es la que conserva los mismos valores en todos los problemas, como 3, $\sqrt{3}$, $\frac{3}{4}$, etc.

Granville [2.012] considera también que una *Constante arbitraria o parámetro*, “es aquella a la que se puede asignar valores numéricos, y que durante todo el proceso conservan esos valores asignados” (p.11). Comúnmente se representa por las primeras letras del alfabeto.

Se establece que el *Intervalo de una variable*: “se puede limitar a una porción del sistema de números”. Por ejemplo, se puede restringir la variable de manera que tome únicamente valores comprendidos entre **a** y **b**, también puede ser que **a** y **b** sean incluidos o que uno o ambos sean excluidos. Se emplea el símbolo **[a, b]**, siendo **a < b**, para representar los números **a** y **b** y todos los números comprendidos entre ellos. Se lee “intervalo de **a** a **b**” [Granville, 2.012]

Variable independiente: variable a la cual se pueden asignar valores a voluntad dentro de límites que dependen del problema particular [Granville, 2.012]

Variable dependiente: variable cuyo valor queda fijado cuando se asigna un valor a la variable independiente. [Granville, 2.012]

Además Granville [2.012] indica que cuando dos variables se ligan, el investigador decide elegir cuál de ellas es la variable independiente; pero hecha esta elección, NO es permitido cambiar de variable independiente sin tomar ciertas precauciones y hacer las transformaciones pertinentes.

Por otro lado Muñoz [2.012] llama **Variable** cuando se establece un conjunto referencial R fijo, si P(**X**) es una condición sobre los elementos de R, al símbolo “**X**” que puede remplazarse por un elemento cualquiera del referencial y llama **Constante** a un símbolo que representa un elemento bien determinado del conjunto referencial, permaneciendo en todo el estudio.

Es costumbre utilizar las últimas letras del abecedario para designar las variables. Una variable numérica puede ser *continua o infinita*, si la condición lo amerita, por ejemplo si el conjunto Universal son los números Reales, entonces se podría considerar a todos los números Reales y positivos como **X > 0** [Courant & Robbins, 1.979]

Lozano et al. [2.004] indican que se debe tener en cuenta este otro tipo de variables como son:

Variable numérica: es la variable conformada por los conjuntos numéricos.

Estas variables numéricas son de índole cuantitativa, ya que se pueden medir en una escala numérica, y se distinguen dos tipos [Morales et al., 2.010]:

Variable Continúa: es cuando se tienen los puntos de la relación seguidos sobre el eje y pertenecen al conjunto de los números Reales.

Variable Discreta: es cuando se tienen los puntos de la relación aislados sobre el eje y pertenecen al conjunto de los números Enteros.

Variable no numérica: la variable está definida dentro de aspectos cualitativos. [Morales et al., 2.010]

2.1.1.7. Pareja o Par ordenado

Muñoz [2.012] explica con figuras geométricas de manera didáctica, la idea de pareja en un contexto de conjunto. “Sea el caso de un conjunto con dos elementos $\{\square, \Delta\}$; si en la ordenación deseada aparece “ \square ” como primer elemento, la colección P en cuestión sería”:

$$P = \{\{\square\}, \{\square, \Delta\}\}$$

A este conjunto, que es una ordenación de $\{\square, \Delta\}$, se llamara la “pareja ordenada”, con \square como primera componente y Δ como segunda componente.

Con la terminología de letras del alfabeto se puede expresar como el conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ donde se designa por (a, b) y se llamara la **pareja ordenada** con primera componente a y segunda componente b ¹.

El teorema: “La igualdad entre parejas ordenadas se tiene cuando y solamente cuando son iguales componente a componente” [Muñoz, 2.012]; se puede expresar en lenguaje matemático de la siguiente forma:

$$(\forall a, b, c, d) [(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a=c \wedge b=d]$$

El término **componente** se remplaza por **coordenada**, por ser el término que se acostumbra usar.

Así mismo Muñoz [2.012] establece el siguiente corolario de que las parejas ordenadas no se pueden conmutar:

$$(\forall a, b) (a \neq b \rightarrow (a, b) \neq (b, a))$$

Si para los elementos de una pareja ordenada, a y b son diferentes entre sí entonces la pareja ordenada (a, b) no es la misma que si se tuviera la pareja ordenada (b, a) .

¹ La definición fue dada por Norbert Wiener (1.914) “A simplification of the logic of relations. Proc. Of the Cambridge philosophical soc., vol. 17, p. 387-390”. Y acogida y popularizada por el matemático de Polonia Kazimiers Kuratowski en 1.921. “Sur la notion d’ordre dans la theorie des ensembles. Fundamenta Mathematicae, vol. 2, p. 161-171. Con la cual se redujo la teoría de relaciones a la teoría de conjuntos, sin necesidad de introducir un nuevo axioma para caracterizar la pareja ordenada. (Quiñonez)

2.1.1.8. Producto Cartesiano

Se define con el siguiente teorema: “Para A, B conjuntos cualesquiera, existe un único conjunto constituido por todas las parejas ordenadas que pueden formarse tomando su primera coordenada de A y su segunda de B.”. Se denota por: $(A \times B)$ [Muñoz, 2.012]

En términos matemáticos:

Si $Z=(x, y)$ con $X \in A \wedge Y \in B$, entonces

$$Z \in A \times B \leftrightarrow (\exists X) (\exists Y) (X \in A \wedge Y \in B \wedge Z=(x, y))$$

Por lo tanto:

$$A \times B = \{Z | (\exists X) (\exists Y) (X \in A \wedge Y \in B \wedge Z=(x, y))\}$$

Se puede profundizar el tema revisando la obra del profesor Muñoz Quevedo [2.012]²

De manera simplificada:

$$A \times B = \{(X, Y) | X \in A \wedge Y \in B\}$$

Finalmente Muñoz [2.012] enuncia el teorema que establece que el producto cartesiano $A \times B$ es vacío solo cuando uno de los conjuntos o los dos son vacío

Es decir:

$$A \times B = \emptyset \leftrightarrow (A = \emptyset \vee B = \emptyset)$$

2.1.2. Relación Matemática

El concepto intuitivo de “Relación” está ligado al “vínculo entre dos entidades”. De acuerdo a la Real academia de la lengua española, RAE, el término tiene varios significados entre ellos se pueden mencionar: “Conexión, correspondencia de algo con otra cosa”. Y en el ámbito matemático: “Resultado de comparar dos cantidades expresadas en números.” [RAE, 2.013]

El consejo nacional de profesores de matemáticas de Estados Unidos de América y Canadá (NCTM), en su obra titulada “*Gráficas, Relaciones y Funciones*” [1.992] nos da una ejemplificación de la siguiente manera:

² Para ver el desarrollo axiomático de manera rigurosa se puede estudiar en pág. 66-67 de la obra referenciada.

Tabla 2-1. Formatos de relación.

NOMBRE DE LA RELACIÓN	COSAS QUE SE RELACIONAN
Es un múltiplo de ...	Enteros
Tiene pelo más claro que...	Personas
Es paralela a...	Líneas rectas
Es un hermano de....	Personas
Es un subconjunto de ...	Conjuntos
Es congruente con...	Triángulos
Da más leche que...	Vacas
No es igual a...	Números
Es el cuadrado de...	Números
Etc.	Etc.

Fuente: NCTM [1.992], Gráficas, Relaciones y Funciones.

La Relación se debe definir en un contexto matemático para poder alcanzar unos objetivos. Cada relación es parte de una proposición sobre un par de elementos, por ejemplo “12 es un múltiplo de 3”. El orden de los elementos del par debe ser tenido en cuenta. Para la proposición “12 es un múltiplo de 3” es verdadera pero si se expresa “3 es múltiplo de 12” esta es falsa. Esto se puede asociar con una proposición en dos variables: “r es un múltiplo de s” que se puede indicar en forma de conjunto:

$$M = \{(r, s) \mid r \text{ es un múltiplo de } s\}$$

En conclusión, “La ventaja de tomar el conjunto de verdad como la *Relación*, es que nos indica que elementos se considera deben estar relacionados con que otros elementos. Es decir, si el par ordenado (a, b) es uno de los elementos de cierta relación, entonces se sabe que “a” está relacionado con “b” por esa *Relación*”. [NCTM, 1.992]

Muñoz [2.012] indica que lo primero que se debe hacer es establecer los conjuntos referenciales para cada caso, de donde se van a tomar los “valores” de X como de Y . Se puede simbolizar con una situación de la vida cotidiana, para el caso: “ X persona escribió la obra Y ”, el referencial para X debe ser un conjunto A de personas escritoras y para Y un conjunto B de títulos de obras literarias. Para otra situación: “ X pesa Y kilogramos”, el referencial A para X debe ser un conjunto de personas y el B para Y un conjunto de números Reales positivos.

Con base a los casos planteados, se pueden formar los conjuntos de la relación de la siguiente manera:

Caso *literario*:

$$R = \{(X, Y) \in A \times B \mid X \text{ escribió } Y\}$$

Caso *peso de personas*:

$$R = \{(X, Y) \in A \times B \mid X \text{ pesa } Y\}$$

A toda “Relación” dada en la forma usual entre los elementos de dos conjuntos, se le hace corresponder un único conjunto de parejas ordenadas; por este motivo podemos considerar que la *Relación* es en realidad el conjunto de parejas ordenadas. [Muñoz, 2.012]

En muchas situaciones una *Relación* dada asocia algunos elementos de cierto conjunto con otros elementos del mismo conjunto, como se podría ilustrar en el ejemplo: “*es un múltiplo de*” entre números Naturales, se dice que la relación está definida sobre ese conjunto numérico, pero también se podría definir sobre el conjunto de los números Enteros. Es decir “una *Relación* está definida sobre un conjunto **A** si los dos componentes de cada uno de los pares ordenados de la relación son elementos de **A**”. [NCTM, 1.992]

2.1.2.1. Definición formal de relación matemática

El profesor González [2.004] da una definición de Relación matemática como: “Sean los conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n . Una relación \mathfrak{R} sobre $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ es cualquier subconjunto de este producto cartesiano, es decir

$$\mathfrak{R} \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

Si $\mathfrak{R} = \emptyset$, llamaremos a \mathfrak{R} , la relación vacía.

Si $\mathfrak{R} = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, llamaremos a \mathfrak{R} la relación universal.

Si $A_i = A$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, entonces \mathfrak{R} es una relación n -aria sobre A

Si $n = 2$, se dice que \mathfrak{R} es una relación *binaria* y si $n = 3$ es una relación *ternaria*.”

2.1.2.2. Relación Binaria

Teniendo en cuenta la definición de relación matemática antes mencionada, Muñoz [2.012] establece que una relación binaria es un conjunto de parejas ordenadas, además enuncia el teorema: “Toda relación es un **subconjunto** de un producto cartesiano”.

Muñoz [2.012] indica Si $\mathfrak{R} \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, se acostumbra decir que \mathfrak{R} es una relación de \mathbf{A} en \mathbf{B} , \mathbf{A} se llama la **fuentes** y \mathbf{B} la **meta** de \mathfrak{R} . Otros autores mencionan la palabra conjunto de partida en vez de “fuente” y conjunto de llegada en vez de “meta”. [Dimaté & Rodríguez, 2.000]

Si $\mathfrak{R} \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ se dice que \mathfrak{R} es una relación en \mathbf{A} .

Si $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in \mathfrak{R}$, se dice que \mathbf{X} está relacionada con \mathbf{Y} mediante \mathfrak{R} y se indica: $\mathbf{X} \mathfrak{R} \mathbf{Y}$ [Muñoz, 2.012], [NCTM, 1.992]

Para el ejemplo: $T = \{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mid \mathbf{X} \text{ es un múltiplo de } \mathbf{Y}\}$, sea la pareja ordenada $(4,2)$, entonces se puede expresar como $(4,2) \in T$ o $4T2$, como otra forma de indicar la relación definida en el conjunto T .

Veerarajan [2.008] dice de forma similar que “Cuando A y B son conjuntos, un subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$ es una relación binaria entre A y B . Es decir, si R es una relación binaria entre A y B , R es un conjunto de pares ordenados (a, b) , donde $a \in A$ y $b \in B$.” p. 66. La relación binaria se escenifica en la propuesta y así mismo tiene transcendencia en el contexto escolar.

2.1.2.3. Dominio Y Recorrido de una Relación

Muñoz [2.012] define los términos Dominio y Recorrido de la siguiente manera:

Dominio:

Se llama **Dominio de una relación** \mathfrak{R} al conjunto de las primeras componentes de las parejas de la relación \mathfrak{R} y se denota por $D(\mathfrak{R})$

Recorrido:

Se llama **Recorrido de una relación** \mathfrak{R} al conjunto de las segundas componentes de las parejas de la relación y se denota por $R(\mathfrak{R})$

Por lo tanto:

$$\mathfrak{R} \subseteq D(\mathfrak{R}) \times R(\mathfrak{R})$$

En otras palabras la relación matemática definida es un subconjunto del producto cartesiano del conjunto Dominio y del conjunto Recorrido de dicha relación.

2.1.2.4. *Variable Real*

Soler & Núñez [2.009] establecen para el conjunto de los números Reales \mathbb{R} , el producto cartesiano:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mid \mathbf{a} \in \mathbb{R} \wedge \mathbf{b} \in \mathbb{R}\}$$

Si las Relaciones cuyo dominio y recorrido son números Reales, combinamos de manera válida la variable **X** con los números Reales y sus operaciones. En los números Reales el dominio más importante de una variable son los *intervalos*, se indica que **X** es una variable continua. En particular el dominio de una variable continua pueden ser todos los números \mathbb{R} o los Reales positivos.

2.1.3. *Gráfica De Relaciones Matemáticas*

El consejo nacional de profesores de matemáticas de Estados Unidos de América y Canadá (NCTM), referenciando la obra “*Gráficas, Relaciones y Funciones*” [1.992] indica que hay dos formas estándar de representar las relaciones. Una es por diagrama de flechas y la otra es por gráficas. La atención se centra en la segunda forma de representación ya que es el punto de estudio.

La NCTM plantea la gráfica de proposición abierta en una variable y la gráfica de Relaciones de un conjunto en otro.

2.1.3.1. *Gráfica de Proposición Abierta en una Variable*

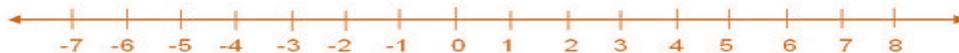
De acuerdo a la NCTM [1.992] a cada número de cualquiera de los conjuntos: \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , o \mathbb{R} corresponde un único punto sobre la recta numérica.

La recta numérica se puede definir como:

La recta numérica es un gráfico unidimensional de una línea. Tiene su origen en el cero, y se extiende en ambas direcciones, los positivos en un sentido (normalmente hacia la derecha) y los negativos en el otro (normalmente a la izquierda). Existe una correspondencia uno a uno entre cada punto de la recta y un número Real. Se elige de manera arbitraria un punto de una línea recta para que represente el cero o punto origen. p.2 [Mendoza, 2.013]

Ejemplo: La recta numérica del conjunto de los números \mathbb{Z} se representa a continuación:

Figura 2-3. Gráfica de la recta con los números Enteros.



Fuente: Ávila M.

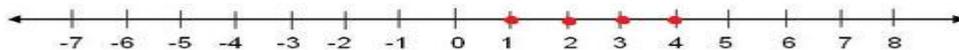
A la representación del conjunto de verdad de una proposición abierta a través de un dibujo, se le conoce como gráfica de la proposición [NCTM, 1.992]

Un ejemplo práctico sea el conjunto A por comprensión: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge X \leq 4\}$

Este mismo conjunto por extensión sería: $A = \{1, 2, 3, 4\}$

Su forma de representación en la recta numérica sería la ubicación de cada punto en la recta numérica como se indica a continuación:

Figura 2-4. Ubicación de un conjunto de números en la recta Z



Fuente: Ávila M.

Otro ejemplo es el conjunto B que se define por comprensión como:

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge -2 \leq X \leq 3\}$$

Este conjunto B al ser representado en la recta numérica sería delimitado por el segmento en la recta numérica, siendo el conjunto de puntos que están entre -2 y 3:

Figura 2-5. Ubicación de un conjunto de números Reales en la recta numérica



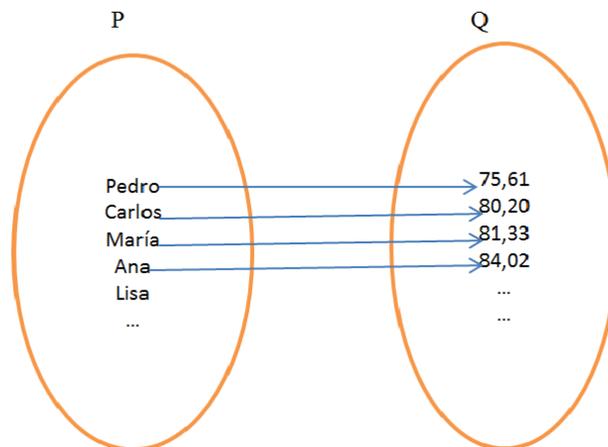
Fuente: Ávila M.

2.1.3.2. Relaciones de un conjunto en otro

Existen relaciones que enlazan elementos de un conjunto con elementos de otro conjunto diferente. Por ejemplo el “peso corporal de una persona”, relaciona personas con números Reales. Si los primeros componentes de todos los pares ordenados de una relación \mathfrak{R} son elementos de un conjunto P, y los segundos componentes de todos los pares ordenados de \mathfrak{R} son elementos de un conjunto Q, se dice que la relación es de P a Q así la relación: “peso corporal de una persona”, es una relación del conjunto personas con el conjunto de los números Reales. [NCTM, 1.992]

Se puede emplear un diagrama en forma de una “*representación sagital*” de una relación de la siguiente manera: colocar dentro de una curva cerrada los elementos del conjunto fuente y dentro de otra los del conjunto meta. Si un elemento **X** de P está relacionado con otro **Y** de Q, se traza una flecha de **X** hacia **Y** [Muñoz, 2.012] Con base al ejemplo anterior, se puede representar la relación como:

Figura 2-6. Representación de un diagrama sagital.



Fuente: Ávila M.

Así mismo tienen su forma de representación con gráfica, donde la recta horizontal y vertical se rotula de acuerdo a cada conjunto. Para el caso mencionado se tiene al conjunto personas en la línea horizontal y al conjunto de números Reales positivos en la línea vertical. [NCTM, 1992]

2.1.3.3. Plano Cartesiano o Coordinado

Las parejas ordenadas se pueden tabular, es decir expresarlo en una tabla o de manera gráfica se puede usar dos rectas numéricas que se entrelazan de manera perpendicular dándose en un plano coordinado [NCTM, 1.992]; [García, 2.001]. Así mismo es útil visualizar las relaciones mediante gráficas o diagramas. Para representarlas gráficamente se imita lo que generalmente se hace con un sistema de coordenadas cartesianas en el plano: si \mathfrak{R} es una relación de **a** en **b**, se acostumbra trazar una vertical por cada elemento de **a** y una horizontal por cada elemento de **b**, sobre los cruces se marcan los puntos correspondientes a las parejas de la relación, teniéndose presente la prioridad (en el orden) que se da a los elementos de la fuente sobre los de la meta. [Muñoz, 2.012]

Normalmente las curvas matemáticas se representan en un juego de dos ejes perpendiculares, denominados **X** e **Y**, establecido en dos dimensiones. Todo punto del plano puede ser identificado con un “*par ordenado*” (**X**, **Y**) que especifica sus distancias a los ejes **Y** y **X** [Brown, 2.012]

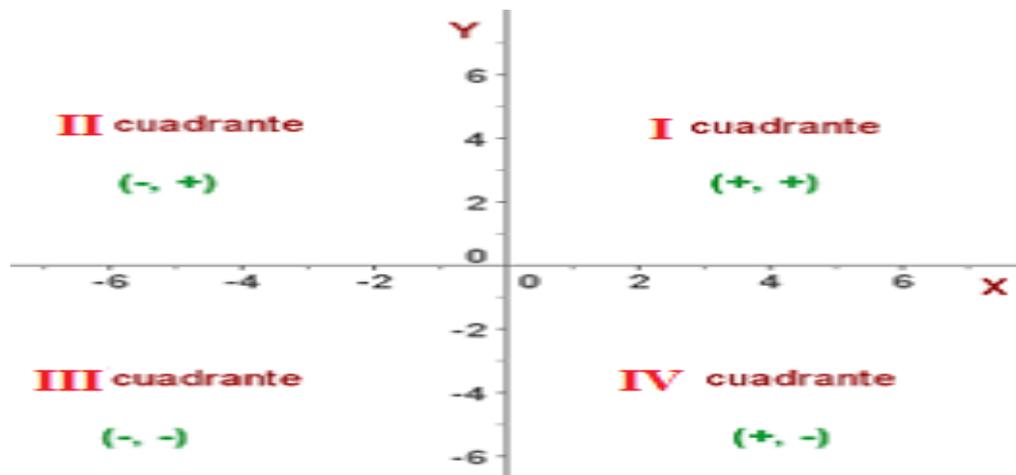
Dunham [2.006] y García [2.001] mencionan que el eje horizontal, llamado eje de las **X** o eje de abscisas, se representa con una escala creciente hacia la derecha, y el eje vertical, el eje de las **Y** o eje de ordenadas, tiene una escala creciente hacia arriba.

García [2.001] como Muñoz [2.012] indican que si los conjuntos fuente y meta son los números Reales \mathbb{R} , entonces el cuadrado cartesiano \mathbb{R}^2 es la representación cartesiana clásica del plano, es decir: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$, es el conjunto de pares Reales (**X**, **Y**) que corresponde al punto del plano. “A cada número Real se puede asociar con exactamente un punto de la recta numérica o recta de coordenadas” [Zill & Dewar, 2.012]

Zill & Dewar [2.012] describen que un sistema coordinado rectangular se forma con dos rectas numéricas perpendiculares que se intersecan en el punto correspondiente al número cero de cada recta. El punto de intersección se llama origen. Esos dos ejes dividen al plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes, que se numeran como se indica en la figura 2-7. Las escalas en los ejes **X** y **Y** no necesitan ser iguales. Se puede suponer que una marca corresponde a una unidad.

Un plano que contiene un sistema coordinado rectangular se llama plano **X Y**, plano coordinado, sistema de coordenadas cartesianas o plano cartesiano. [Zill & Dewar, 2.012]

Figura 2-7. Plano cartesiano



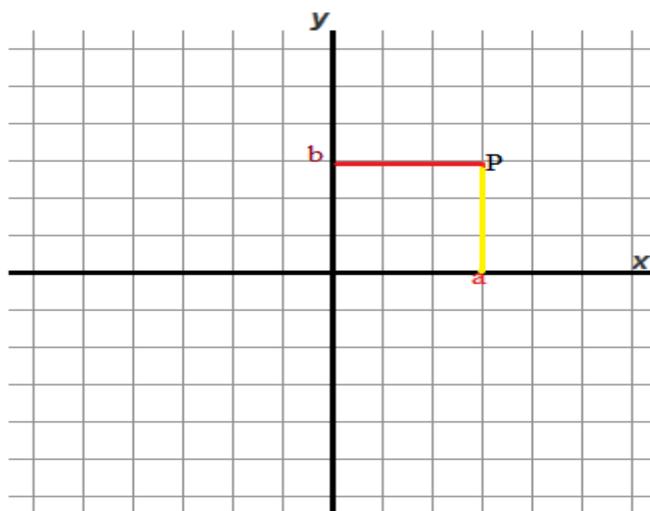
Fuente: Modificada por Ávila M.

En la figura 2-7 se indican los signos algebraicos de la abscisa y la ordenada de cualquier punto (X, Y) en cada uno de los cuatro cuadrantes. Se considera que los puntos en cualquiera de los ejes NO están en algún cuadrante. Como un punto en el eje X tiene la forma $(X, 0)$. De igual modo, un punto en el eje Y tiene la forma $(0, Y)$. Cuando se ubica un punto en el plano coordenado, que corresponde a un par ordenado de números, y se representa usando un punto lleno, se dice que se grafica el punto. [Zill & Dewar, 2.012]

Coordenadas de un Punto

Sea un punto P en el plano coordenado. Se asocia un par ordenado de números Reales con P trazando una recta vertical desde P al eje X , y una recta horizontal desde P al eje Y . Si la recta vertical corta al eje X en el número a , y la recta horizontal intersecciona el eje Y en el número b , asociamos el par ordenado de números Reales (a, b) con el punto. En otras palabras, a cada par ordenado (a, b) de números Reales corresponde un punto P en el plano. Este punto está en la intersección de la línea vertical que pasa por a en el eje X , y la línea horizontal que pasa por b en el eje Y . Por lo tanto a un par ordenado se le llamara un punto y se representa por $P(a, b)$ o bien (a, b) . El número a es la abscisa o coordenada X del punto, y el número b es la ordenada, o coordenada Y del punto, y se dice que P tiene las coordenadas (a, b) . Las coordenadas del origen son $(0,0)$. [Zill & Dewar, 2.012] Se representa en la siguiente figura:

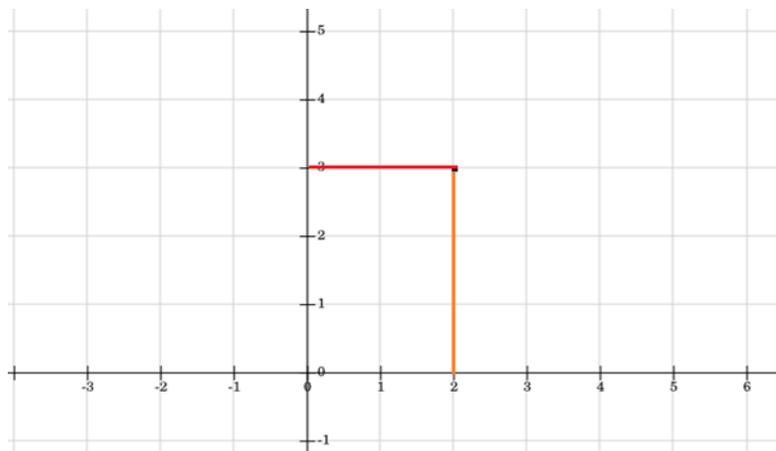
Figura 2-8. Punto en plano cartesiano



Fuente: Modificada por Ávila M.

A continuación se ilustra con la posición de la pareja ordenada (2,3):

Figura 2-9. Ubicación de una pareja ordenada

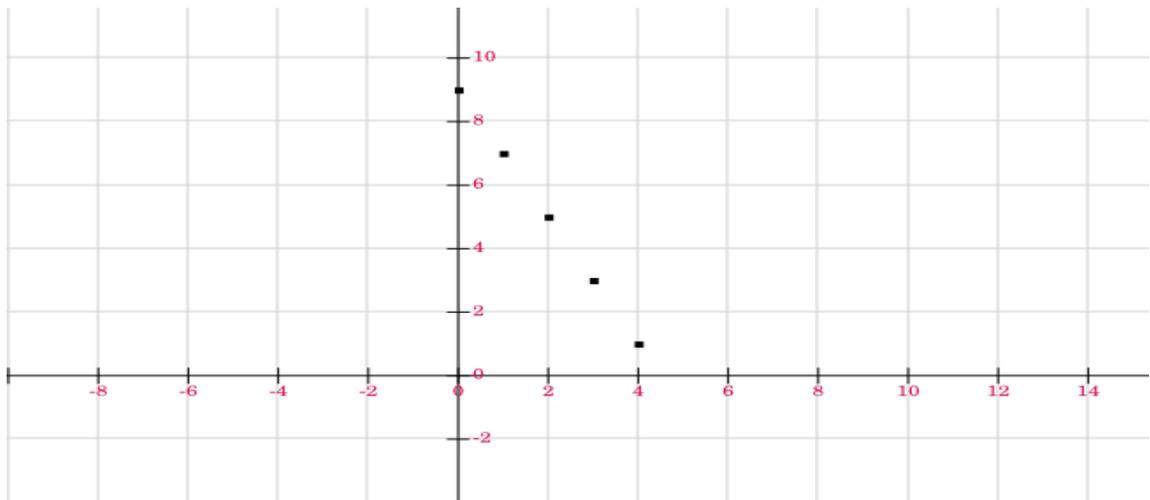


Fuente: Ávila M

Las gráficas de relaciones numéricas, se definen sobre conjuntos numéricos [NCTM, 1992] Por ejemplo el caso de $P = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} \wedge (2x + y) = 9\}$, se define en el conjunto de los números Naturales.

El conjunto por extensión es $P = \{(0, 9) (1,7) (2,5) (3,3) (4,1)\}$, su representación en el plano cartesiano son los puntos que se señalan a continuación:

Figura 2-10. Puntos en plano cartesiano



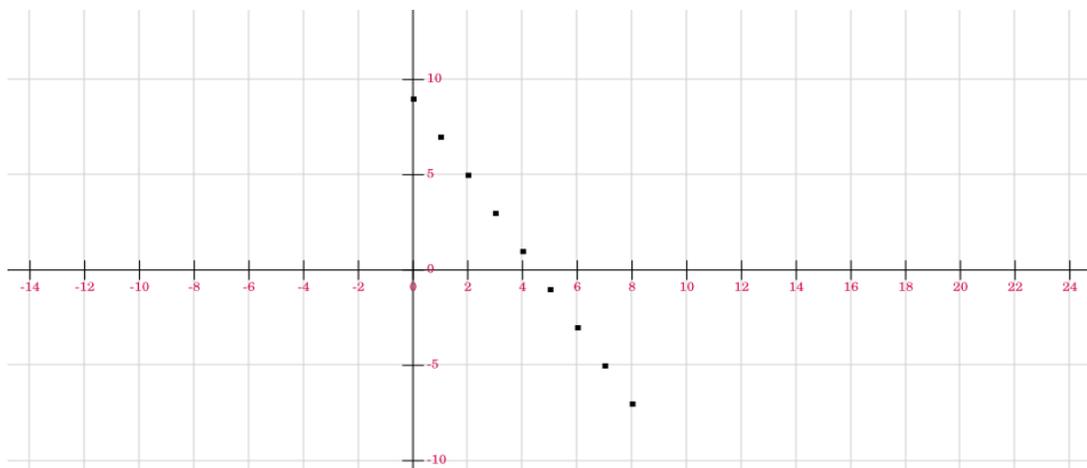
Fuente: Ávila M.

Si la anterior relación se define en un conjunto referencial distinto como es el conjunto de los números Enteros se tienen las siguientes parejas ordenadas

$$Q = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z} \wedge (2x + y) = 9\} = \{(0, 9) (1, 7) (2, 5) (3, 3) (4, 1) (5, -1) (6, -3) (7, -5) \dots\}$$

Se observa que el número de parejas ordenadas es mayor al primer caso y su representación en el plano cartesiano está dada por cada punto que se visualiza, pero no olvidar que es una parte ya que existen más puntos en el cuarto cuadrante.

Figura 2-11. Secuencia de puntos en sistema coordenado

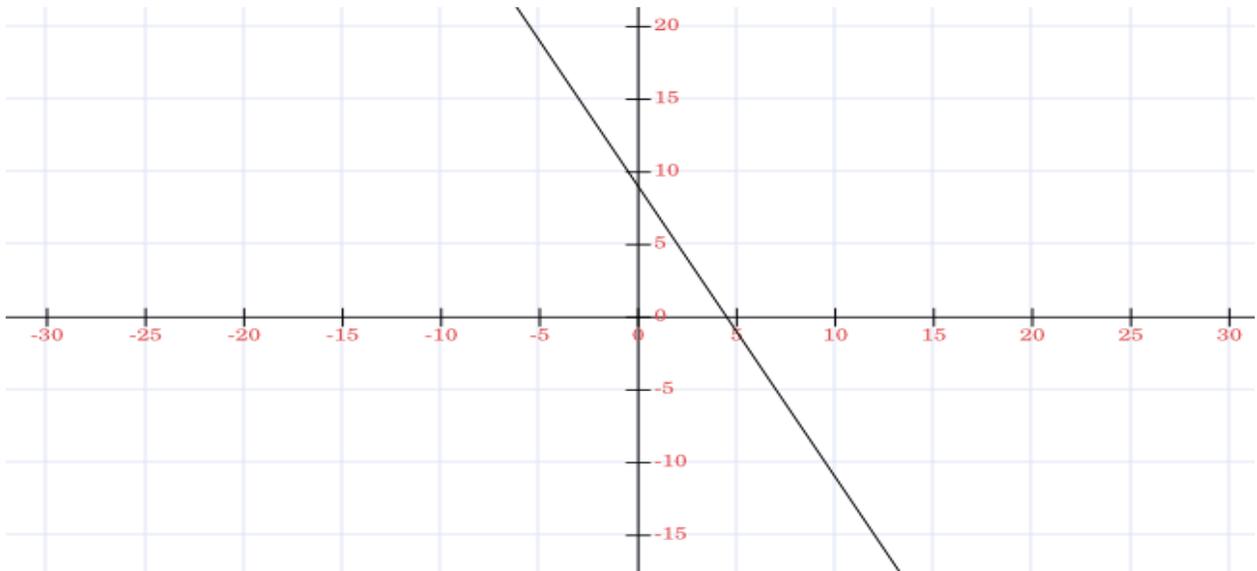


Fuente: Ávila M.

Si la relación se define en el conjunto referencial de los números Reales se obtiene una línea recta como se aprecia en el siguiente gráfico:

$$Q = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \wedge (2x + y) = 9\}$$

Figura 2-12. Línea recta en plano coordenado



Fuente: Ávila M.

El hecho de graficar pares ordenados conlleva de manera similar a graficar relaciones en conjuntos numéricos definidos previamente.

2.1.4. Relación Funcional

Debemos tener en cuenta que se destaca un tipo particular de relación que se denomina Función

[Muñoz, 2.012] menciona que *Función* es una relación en la cual no existen dos o más parejas distintas con la misma primera componente; o lo que es lo mismo:

Si se indica que “F” es una Función \Leftrightarrow F es una Relación y

$$(\forall x, y, z) ((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow y = z)$$

Una Función de A en B es una Función F tal que:

$$D(f) = A \wedge R(f) \subseteq B$$

Una Función de **a** en **b** es una relación F de **a** en **b** tal que todo elemento de **a** esta relacionado (por f) con un único elemento de **b**.

Courant & Robbins [1.979] mencionan que el concepto de Función aparece en cuanto se relacionan cantidades mediante una relación física determinada, apropiado en las aplicaciones prácticas. Una Función matemática no es más que una ley que regula la interdependencia de cantidades variables.

Así mismo están enmarcadas en proposiciones que sugieren la idea de que una “condición” o “estado” depende de otro. “Es una relación en la que no hay dos pares ordenados diferentes que tengan el mismo primer componente” [NCTM, 1.992]

Adicionalmente una relación funcional de variable Real es una función en la cual los conjuntos de partida y llegada son subconjuntos del conjunto de los números Reales. [Morales et al. 2.010]

2.1.5. Intervalos

Las relaciones funcionales de variable Real se definen sobre intervalos. Un intervalo es un subconjunto de los números Reales, comprendidos entre otros datos, **a** y **b** que se denominan extremos del intervalo. Cuando un intervalo incluye sus extremos se denomina intervalo cerrado. Cuando un intervalo no incluye sus extremos se denomina intervalo abierto. [Morales et al. 2.010]

Otros tipos de intervalo y su representación se indican en la siguiente tabla:

Tabla 2-2. Esquema de intervalos

cerrado	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	
abierto	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	
semiabierto o semicerrado	$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	
semiabierto o semicerrado	$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	
semirrecta cerrada	$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$	
semirrecta abierta	$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$	
semirrecta cerrada	$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$	
semirrecta abierta	$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$	
recta real	$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$	

2.1.6. Características de las relaciones binarias

De las características de las relaciones matemáticas que se presentan de manera gráfica se destacan las siguientes:

➤ **Relación Creciente**

Una relación funcional en un intervalo $[a, b]$ se da un comportamiento creciente, si al aumentar los valores de X aumentan los valores de $f(x)$, es decir para cualquier par de números X_1 y X_2 se tiene que si $X_1 < X_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$ [Ramírez et al. 2.010]. Ver figura 2-13.

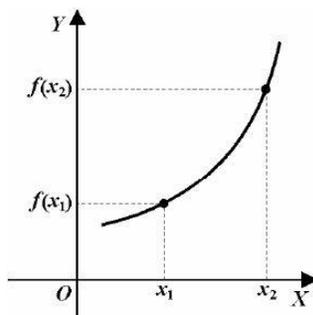
➤ **Relación Decreciente**

Un comportamiento decreciente en un intervalo $[a, b]$ se presenta si al aumentar los valores de X disminuyen los valores de $f(x)$, es decir para cualquier X_1 y X_2 se tiene que si $X_1 < X_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$. [Ramírez et al. 2.010]. Ver figura 2-13.

➤ **Relación Constante**

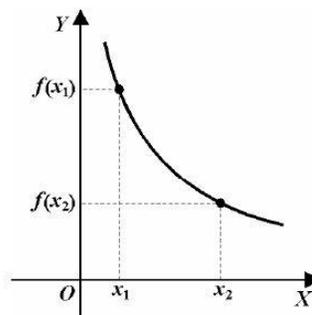
Una relación es constante en un intervalo $[a, b]$ se presenta si para cualquier par de números X_1 y X_2 se tiene que si $X_1 < X_2$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$, [Ramírez et al. 2.010]. Ver figura 2-13.

Figura 2-13. Gráficas de función creciente, decreciente y constante.



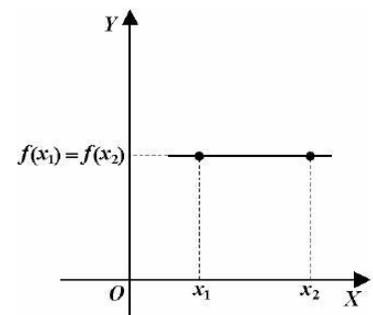
Función creciente

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



Función decreciente

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



Función constante

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Fuente: <http://e-educativa.catedu.es/44700165/aula/archivos/repositorio//500/549/html/Unidad04/imagenes/63.JPG>

➤ **Relación Continúa**

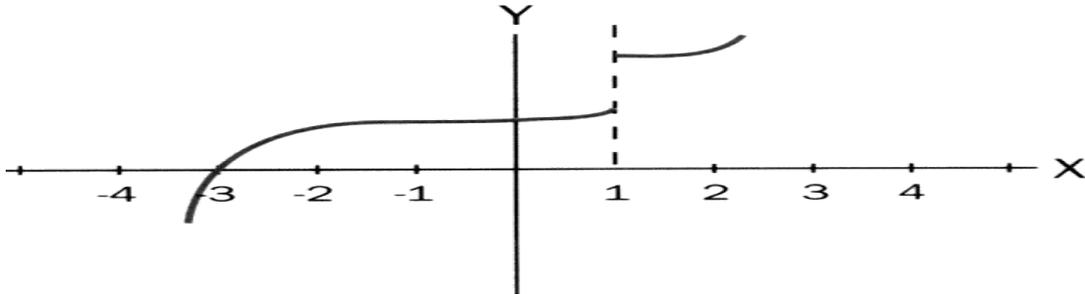
Una relación es continua cuando a pequeñas variaciones de la variable independiente corresponde pequeñas variaciones de la variable dependiente [Morales et al. 2.010]. Se visualiza si su gráfica no presenta cortes ni saltos

Como se aprecia en las figuras anteriores 2-13.

➤ **Relación Discontinua**

Una relación es discontinua cuando no es continua es decir no se verifica alguna condición de continuidad en el intervalo. Se visualiza si su gráfica presenta cortes o saltos. [Morales et al. 2.010]

Figura 2-14. Gráfica de relación discontinua.

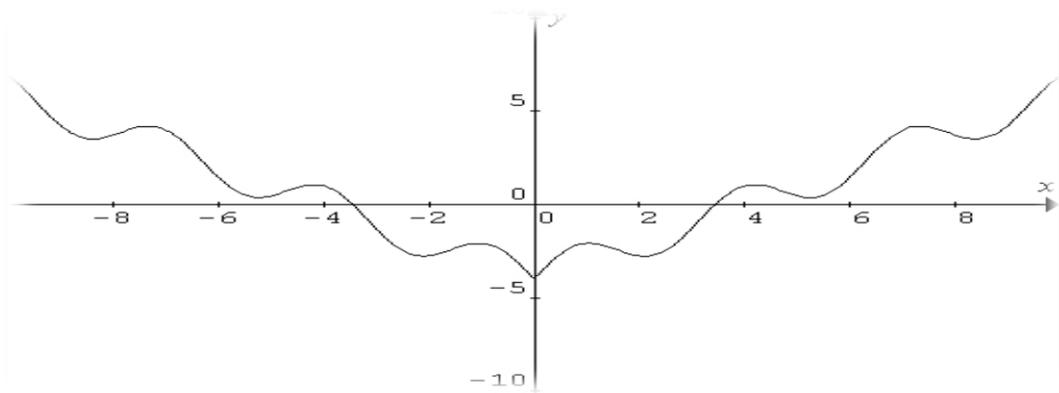


Fuente: <http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Multidis/01/Image41.gif>

➤ **Relación Simétrica**

La simetría se presenta en una relación si es **par** es decir si $\forall (X, Y) \in f$ se tiene que $(-X, Y) \in f$. En otras palabras $f(x)=f(-x)$. Aquí la gráfica es simétrica con respecto al eje Y. [Ramírez et al. 2.010]

Figura 2-15. Gráfica de relación con simetría par

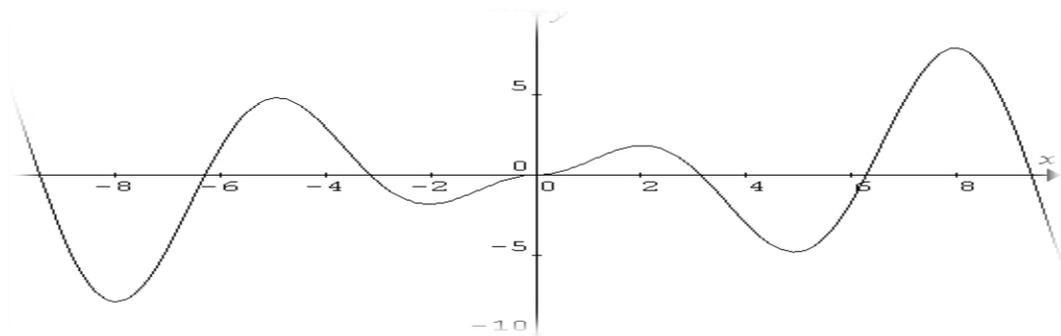


Fuente: Contreras & Del pino, Modelos matemáticos y funciones. Universidad de Talca.

Otra situación es cuando una relación es **impar** si $\forall (X, Y) \in f$ se tiene que $(-X, -Y) \in f$.

Es decir $f(-x)=-f(x)$ [Ramírez et al. 2.010]

Figura 2-16. Gráfica de relación con simetría impar

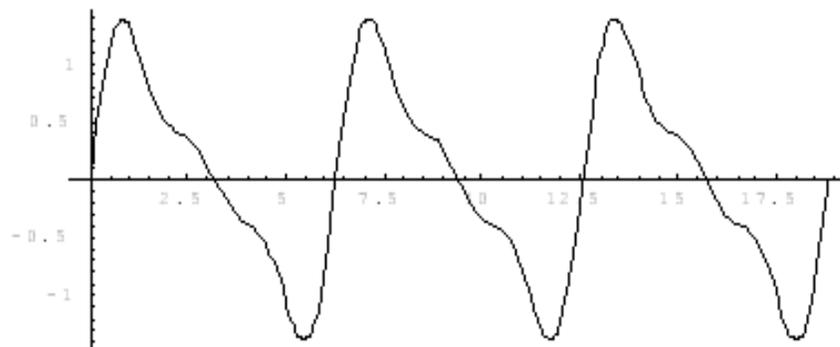


Fuente: Contreras & Del pino, Modelos matemáticos y funciones. Universidad de Talca

➤ *Relación Periódica*

Una relación es periódica si se cumple $f(x)=f(x + P)$, es decir si las imágenes se repiten después de que la variable independiente recorre un cierto intervalo regular. La longitud del intervalo P es el **periodo**. Se visualiza a continuación:

Figura 2-17. Gráfica de relación periódica.



Fuente: http://www.albaiges.com/matematicas/musica/matematicamusica1_archivos/image007.gif

2.1.7. Gráfica

Una frase célebre del Dr. John Tukey (1.915.-.2.000) dice: “Un gráfico puede valer más que mil palabras, pero puede tomar muchas palabras para hacerlo”, es totalmente cierto y además su lectura e interpretación no se puede dejar a la intuición sutil de lo que se pueda pensar del

mismo. Una gráfica de una Relación o Función consta de todos los puntos del plano coordenado, cuyas coordenadas satisfacen la Relación o Función. [Fuller & Tarwater, 1.999]

Además un gráfico estadístico es un resumen visual de la tabla de frecuencias y sirve para informar de manera clara y sintética el comportamiento de una variable estadística. Entre ellos encontramos: barras, circulares, diagrama de tallo y hojas, el histograma de frecuencias, el polígono de frecuencias, entre otros. [Joya et al 2.010]

2.1.7.1. Parámetros para Interpretar Gráficas Cartesianas

Una realidad de la forma como se percibe la interpretación de gráficos lo expone Alayo & Shell [1.990]: “Muchos alumnos, incapaces de tratar las gráficas como representaciones abstractas de relaciones, parecen interpretarlas como si fueran meros dibujos de las situaciones que sirven de base” p.47

Correa & Gonzales [2.012] mencionan a William Playfair (1.759 - 1.823), considerado el pionero de la estadística gráfica (Costigan - Eaves y Macdonald - Ross, 1.990). El trabajo de Playfair en gráficas lo realizó durante más de 36 años. El actuó basado en los siguientes principios que el estableció (p.7):

1. El método gráfico es una forma de simplificar lo tedioso y lo complejo.
2. Los hombres ocupados necesitan alguna clase de ayuda visual.
3. Un gráfico es más accesible que una tabla.
4. El método gráfico es concordante con los ojos.
5. El método gráfico ayuda al cerebro, ya que permite entender y memorizar mejor.

Según la propuesta pedagógica de Lozano et al. [2.004] indican que las gráficas como temática del pensamiento variacional deben tener unos antecedentes para su construcción y lectura. Así mismo en la formación básica secundaria se debe alcanzar una conceptualización de los conjuntos numéricos como de su ubicación en la recta numérica; plano cartesiano y la ubicación de parejas ordenadas en el mismo; tener el concepto de gráfica; entender variable dependiente e independiente como variable continua y discreta; dominio y rango; reconocer puntos máximos y mínimos de la gráfica; distinguir gráficas continuas y discontinuas; gráficas crecientes, decrecientes y constantes como gráficas periódicas y de gráficas simétricas.

Lozano et al. [2.004] establecen unos parámetros para ser tenidos en cuenta durante la lectura e interpretación de un gráfico cartesiano:

1. *Conocer el título del gráfico correspondiente, esto implica tomar una decisión de interés para estudiar el gráfico.*
2. *Establecer la procedencia de la gráfica y fecha de elaboración.*
3. *Diferenciar las variables que se estudian, distinguiendo cual se representa en el eje horizontal y cual en el eje vertical con las unidades en que vienen expresadas.*
4. *Leer la leyenda que explica colores o símbolos que se puedan estar usando.*
5. *Establecer la relación que se da entre variables: dependencia.*
6. *Revisar la escala utilizada, esta depende de las variables representadas y la relación entre ellas.*
7. *Tendencia de la gráfica: deducir a partir de lo dibujado, como podría continuar la relación entre las magnitudes. No siempre es posible saber cuál será la tendencia de la gráfica, porque a veces es impredecible el comportamiento de la variable dependiente para nuevos valores de la variable independiente.*
8. *Relacionar la gráfica con su información respectiva.*
9. *Revisar si existen diferentes relaciones en un mismo gráfico: a veces se tiene varias representaciones con las mismas variables, en magnitud, unidad, escala.*
10. *Identificar puntos máximos y mínimos.*
11. *Identificar si existe periodicidad: en algunas gráficas existe una parte que se repite exactamente igual y de forma continua a lo largo de todo el trazado en intervalos determinados.*

Se debe tener en cuenta que la escala son las unidades que se emplean para realizar divisiones en cada uno de los ejes. Las unidades en cada eje tienen que ser iguales y deben ser proporcionales a los datos que representan. [Lozano et al., 2.004]

Lozano et al. [2.004] manifiesta que los puntos máximos y mínimos de una gráfica se pueden definir como (p. 263):

Máximo relativo: si el valor de la variable dependiente en ese punto es mayor que en los puntos próximos a él. Un máximo relativo es también un punto en el que la gráfica pasa de ser creciente a su izquierda a ser decreciente a su derecha.

Mínimo relativo: si el valor de la variable dependiente en ese punto es menor que en los puntos próximos. Un mínimo relativo es un punto de la gráfica donde pasa a ser decreciente a su izquierda a ser creciente a su derecha.

Mínimo absoluto: es el punto de la gráfica que tiene el menor valor.

Máximo absoluto: es el punto de la gráfica que tiene el valor mayor de la variable dependiente.

Otros autores como Suarez et al. [2.005] mencionan que se debe tener dos momentos para la lectura e interpretación de gráficos cartesianos:

Momento I, elementos de forma.

En este momento los estudiantes toman decisiones explícitas o implícitas sobre algunos de los siguientes aspectos del sistema de ejes coordenados:

- La elección de las variables que intervienen en la situación.
- Las unidades de medición de las variables.
- El cuadrante y los valores máximos y mínimos para cada variable.
- La elección de un punto de referencia.

Momento II, elementos de interpretación.

En este momento los estudiantes recurren a distintos argumentos donde ponen en juego los significados explícitos o implícitos del momento anterior.

Por otra parte la propuesta de Mckenzie y Padilla [1.986]; Padilla, McKenzie y Shawn [1.986], citados por García [2.005] indican que se debe tener en cuenta unas habilidades y requisitos necesarios para la interpretación de gráficas numéricas como son:

- *Determinar las coordenadas correspondientes a un punto dentro del espacio gráfico.*
- *Identificar de forma apropiada las variables en las gráficas y manipularlas apropiadamente.*
- *Interpolar y / o extrapolar los datos dentro de la representación gráfica.*
- *Identificar las tendencias descritas en el grupo de datos presentes en la gráfica.*
- *Describir adecuadamente la interrelación entre las variables que son presentadas en la gráfica.*
- *Dado un grupo de datos, seleccionar la gráfica que los describa correctamente.*
- *Dadas dos gráficas que representen relaciones interrelacionadas entre sí, el estudiante deberá identificar una generalización que describa dicha interrelación.*

Adicionalmente García & Sánchez [2.009] mencionan que los ejes del plano cartesiano deben llevar claramente indicada la magnitud que representan, el intervalo de medida y las unidades en que se expresan los datos.

Por otro lado el intervalo representado en el eje de la gráfica debe concordar con el rango de la magnitud representada, de manera que todos los datos figuren dentro de la gráfica y ocupen el mayor espacio de esta. Además las escalas que se utilizan en cada uno de los ejes de coordenadas son escalas lineales, es decir la unidad de magnitud que se representa corresponde con un segmento de longitud constante a lo largo de todo el eje, es decir a diferencias numéricas iguales corresponden segmentos de igual longitud.

Cuando en ambos ejes del plano cartesiano, la unidad de la magnitud que se representa corresponde a un segmento de igual longitud se dice que son escalas isótropas.

Al lado de lo presentado no pueden faltar las gráficas de contexto, donde se muestran realidades físicas o de otra naturaleza y como tal se deben tener en cuenta las bases conceptuales de las variables que le son propias. Estas variables se expresan en magnitud y su valor de unidad.

De acuerdo a Martínez [2.014] se entiende por magnitud:

Es algo cuantificable, es decir, medible, ponderable. Las magnitudes pueden ser directamente apreciables por nuestros sentidos, como los tamaños y pesos de las cosas, o más indirectas. Medir implica realizar un experimento de cuantificación, normalmente con un instrumento especial. Cuando se consigue que la cuantificación sea objetiva se llama magnitud física (tiempos, longitudes, masas, temperaturas, aceleraciones, energías) p.1

Unidad: “Los patrones básicos se llaman unidades de medida. Para especificar el valor de una magnitud hay que dar la unidad de medida y el número que relaciona ambos valores”. p 1 [Martínez, 2.014]

Finalmente se puede señalar que la lectura e interpretación de gráficas cartesianas no se puede dejar a la simple sospecha de saber trazar un gráfico coordenado.

2.2. Frente a las Geociencias.

Figura 2-18. Los subsistemas terrestres



Recuperada de: <http://construyendoelconocimientoinformatica.blogspot.com/2012/04/ciencias-naturales.html>

El planeta Tierra es diminuto frente a la inmensidad del universo. Suministra los recursos para que el ser humano viva en ella. Se requiere del conocimiento y la comprensión del planeta para tener un bienestar social y se pueda mantener la supervivencia de todos los seres vivos que la habitan. [Tarbuck & Lutgens, 2.010]

Un aspecto importante de la ciencia moderna ha sido el descubrimiento de que la Tierra es un sistema multidimensional gigante. Nuestro planeta consta de muchas partes separadas, pero que interactúan mutuamente. El cambio en una parte puede producir cambios en otra o en todas las demás, a menudo de maneras que no son obvias ni evidentes inmediatamente. Aunque no es posible estudiar el sistema entero de una vez, es posible desarrollar un conocimiento y apreciación del planeta como de muchas de las interrelaciones importantes del sistema. [Tarbuck & Lutgens, 2.010]

2.2.1. La Tierra como un Sistema

La Tierra, tercer planeta del sistema solar, es un sistema conformado por unos subsistemas como son: la atmósfera, la biosfera, la hidrósfera y la geósfera, todos ellos interactuando mutuamente.

Cuando la Tierra se estudia, se aprende que el planeta es un cuerpo dinámico con muchas partes o capas separadas pero que interactúan. La hidrósfera, la atmósfera, la biosfera, la Tierra sólida y todos sus componentes pueden estudiarse por separado. Sin embargo, las partes no están aisladas. Cada una se relaciona de alguna manera con las otras para producir un todo complejo y continuo que se denomina sistema [Tarbuck & Lutgens, 2.010]

Atmósfera

La Tierra está rodeada de una capa gaseosa denominada Atmósfera. En comparación con la Tierra sólida, la atmósfera es delgada y tenue. La mitad se encuentra por debajo de una altitud de 5,6 kilómetros y el 90 por ciento ocupa una franja de tan sólo 16 kilómetros desde la superficie de la tierra. En comparación al radio terrestre (distancia desde la superficie hasta el centro) es de unos 6.400 kilómetros. Considerando sus modestas dimensiones, esta capa delgada de aire es una parte integral del planeta. No sólo proporciona el aire que respiramos, sino que también nos protege del intenso calor solar y de las peligrosas radiaciones ultravioletas (UV). Los intercambios de energía que se producen de manera continua entre la atmósfera y la superficie de la Tierra y entre la atmósfera y el espacio, producen los efectos que denominamos tiempo y clima. [Tarbuck & Lutgens, 2.010]

Si la Tierra no tuviera atmósfera, no sólo carecería de vida, sino que además, no actuarían muchos de los procesos e interacciones que hacen de la superficie un lugar dinámico. Sin la meteorización y la erosión, la faz del planeta Tierra se parecería mucho a la superficie lunar, que no ha cambiado apreciablemente en casi tres mil millones de años de historia. [Tarbuck & Lutgens, 2.010]

Biosfera

La biosfera incluye toda la vida del planeta Tierra. Está concentrada cerca de la superficie en una zona que se extiende desde el suelo oceánico hasta varios kilómetros de la atmósfera. Las plantas y los animales dependen del medio ambiente físico para los procesos básicos de la vida. Pero los organismos hacen algo más que responder a su medio ambiente físico, a través de incontables interacciones, las formas de vida ayudan a mantener su medio y lo alteran. Sin la

vida, la constitución y la naturaleza de la Tierra sólida, la hidrosfera y la atmósfera serían muy diferentes. [Tarbuck & Lutgens, 2.010]

Hidrosfera

A la Tierra se le conoce como el planeta azul. El agua, hace que la Tierra sea única. La hidrosfera es una masa de agua dinámica que está en movimiento continuo, evaporándose de los océanos a la atmósfera, precipitándose sobre la Tierra y volviendo de nuevo al océano por medio de los ríos. El océano terrestre es el rasgo más destacado de la hidrosfera: cubre casi el 71 % de la superficie hasta una profundidad media de unos 3.800 metros y representa alrededor del 97 % del agua de la Tierra. Sin embargo, la hidrosfera incluye también el agua dulce que se encuentra en los arroyos, lagos y glaciares. Además, el agua es un componente importante de todos los seres vivos. Aunque estas últimas fuentes constituyen tan sólo una diminuta fracción del total, es importante para lo que indica su escaso porcentaje. Además de proporcionar el agua dulce, tan vital para la vida en la Tierra, los torrentes, glaciares y aguas subterráneas son responsables de esculpir y crear muchos de los variados paisajes del planeta. [Tarbuck & Lutgens, 2.010]

Geósfera

Debajo de la atmósfera y los océanos se encuentra la Tierra sólida. Gran parte del estudio de la Tierra sólida se concentra en los accidentes geográficos superficiales más cercanos. Muchos de los accidentes constituyen las expresiones externas del comportamiento dinámico de los materiales que se encuentran debajo de la superficie. Escudriñando los rasgos superficiales más destacados y su extensión global, se pueden obtener las huellas para explicar los procesos dinámicos que ha sufrido el planeta Tierra. [Tarbuck & Lutgens, 2.010]

2.2.2. La Atmósfera: Nuestra Capa Gaseosa

Figura 2-19. Una perspectiva de la atmósfera.



Cortesía de Earth Sciences and Image Analysis Laboratory, NASA, Johnson Space Center

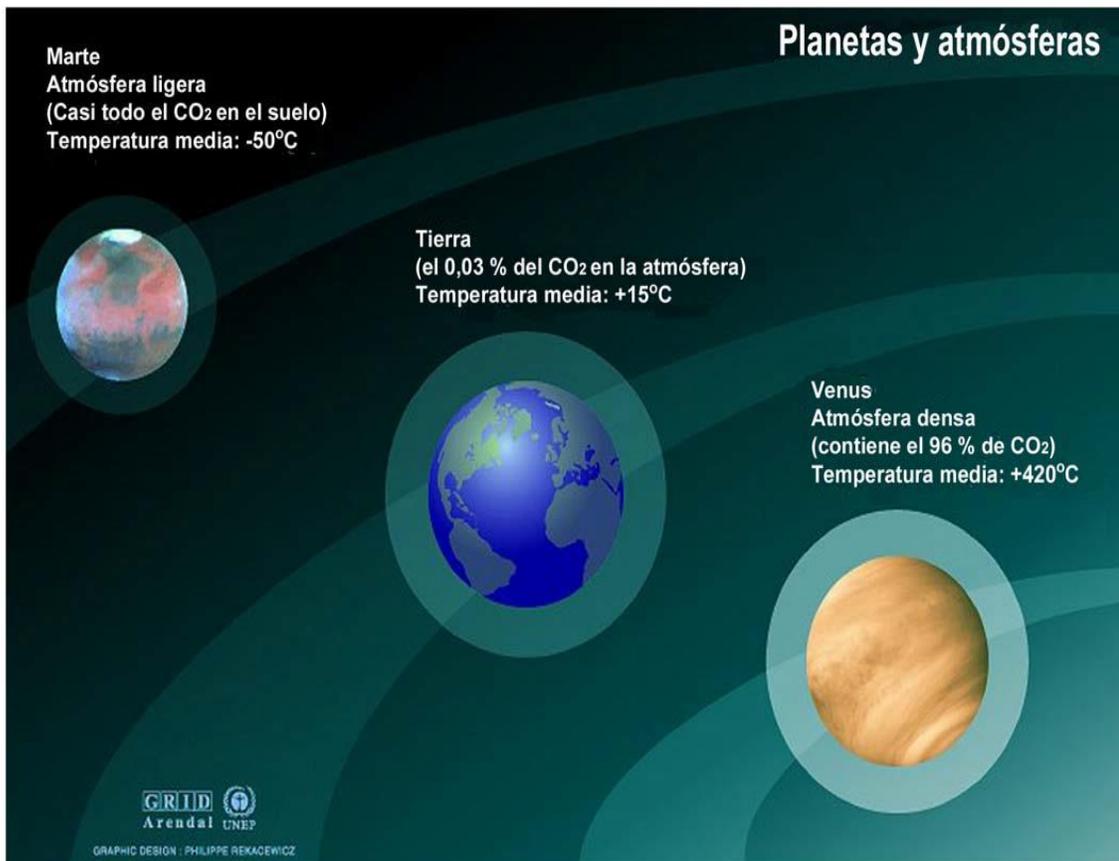
Recuperada de: Min educación de Argentina Explora. Las ciencias en el mundo contemporáneo Consulta 2013

La atmósfera es la envoltura gaseosa del planeta Tierra. La palabra **atmósfera** se deriva de las raíces griegas: **atmos**: vapor de agua y **sphaira**: esfera. Posee la atracción gravitacional terrestre que la retiene sobre el planeta, y tiene su propia fuerza expansiva que tiende a difundirla hacia el espacio [Ayllón, 2.003]

Ledesma [2.011] menciona que ninguno de los planetas del sistema solar tiene una atmósfera similar. Mercurio no posee y los otros planetas tienen pero es irrespirable para el ser humano, pues se compone de dióxido de carbono, metano, ácido sulfúrico, hidrogeno o Helio.

Se puede apreciar una representación hecha por Calvin J. Hamilton de este hecho, para ilustrar. Referenciado en: *Ministerio de medio ambiente, España; CEE. La Atmosfera, Como la piel de una manzana.*

Figura 2-20. Representación de planetas del sistema solar con envoltura gaseosa.



Fuente: Calvin J. Hamilton. Vista del sistema solar. www.planetscape.com; Bill Arnett, Los nueve planetas, un recorrido multimedia por el sistema solar. www.seds.org/billa/tnp/nineplanets.html
Imagen cedida por: Programa de Medio Ambiente de Naciones Unidas / GRID-Arendal

Recuperado de: http://www.cma.gva.es/areas/educacion/educacion_ambiental/clarity/castellano/download/background-materials-poster06.pdf

2.2.2.1. *Propiedades Físicas de la Atmósfera*

Ayllón [2.003] menciona las siguientes propiedades físicas de la atmósfera:

- Movilidad: El aire se encuentra en constante movimiento.
- Compresibilidad: La presión de la atmósfera varía proporcionalmente a la densidad y temperatura de la misma.
- Expansibilidad: Al disminuir la presión el aire se expande.
- Transparente, incolora e inodora.
- Diatermancia: Es transparente a las radiaciones solares.
- Tiene la forma de la tierra, es decir aplastada en los polos y ensanchada en el Ecuador.

Quereda [2.005] complementa diciendo que la mezcla de gases de la atmósfera es compresible, es decir que las capas inferiores son más densas que las superiores. Así el 75% de la masa atmosférica está incluida en los 10 km inferiores de la atmósfera; un 90% de la masa atmosférica está comprendida en los 20 km inferiores de la atmósfera y el 99% del total de la masa atmosférica se halla en los 30 primeros kilómetros de atmósfera. Esta consideración de masa determina que hasta esa altura (30km) e incluso menos, hasta los 10-15 km, se extienda la parte de la atmósfera meteorológicamente activa.

2.2.2.2. *Composición de la Atmósfera*

Ayllón [2.003] indica que el ser humano vive en un océano de aire y su existencia depende de las condiciones favorables de presión, temperatura y composición química de la atmósfera.

La atmósfera es una mezcla de gases, pero no una combinación, es decir los gases no reaccionan químicamente entre sí. Los gases cumplen la ley de Dalton según la cual, los gases contenidos en un espacio si no reaccionan mutuamente se comportan de manera independiente. El gas se comporta de acuerdo con sus características propias variando con la altitud según la respectiva densidad. [Ledesma, 2.011]

La composición de la atmósfera es homogénea en relación con los componentes fijos permanentes que son nitrógeno, oxígeno, argón, criptón, neón, xenón, helio e hidrógeno pero varía marcadamente con la cantidad de vapor de agua y la presencia de sustancias producidas por motivos antropogénicos así como provocados por la misma naturaleza. La atmósfera puede ser contaminada también por partículas de polvo y otras impurezas con variaciones diurnas, mensuales, estacionales y anuales, dependientes de la latitud, longitud y altitud. [Ledesma, 2.011]

Ayllón [2.003] hace referencia a la siguiente composición porcentual de la atmósfera donde se da la presencia de componentes permanentes y de otros que son accidentales:

Tabla 2-3. Composición de la atmósfera

PERMANENTES		ACCIDENTALES	
Nitrógeno	78 %		Hollín
Oxígeno	21 %		Polvo
Argón	0,94 %		Sales marinas
Dióxido de carbono	0,03 %		Cenizas volcánicas
Gases raros: neón, helio, criptón, xenón, radón. Y vapor de agua	0,03%		Impurezas

Fuente: AYLLÓN, Teresa. [2.003] Elementos de meteorología y climatología. México: Trillas 2 ed.

Ledesma [2.011] menciona que el Nitrógeno y el Oxígeno forman el 99% de la atmósfera por volumen, y el 99,9% si se incluye el Argón uno de los gases nobles presentes en el aire. Las proporciones de Nitrógeno y Oxígeno sufren variaciones con la altura coincidiendo con la disminución del peso molecular. Hasta una altitud de 80 km el peso molecular del aire se mantiene constante y las proporciones son 78% para el nitrógeno y 21% para el oxígeno aproximadamente. La disminución del peso molecular en la atmósfera superior indica que el Nitrógeno y el Oxígeno se encuentran de forma atómica. A partir de los 200 km de altura el Oxígeno está completamente disociado y su proporción es del 33,5% y la del Nitrógeno se ha reducido al 66,5%. A mayor altitud se produce un mecanismo de ionización aumentando la proporción de Nitrógeno hasta un 80% y se reduce el Oxígeno hasta en un 20%. Se deduce que la causa principal de la disminución del peso molecular con la altura en la atmósfera superior está relacionado con la separación por difusión del Nitrógeno y el Oxígeno sin alejar la influencia del Helio y del Hidrogeno por causas similares.

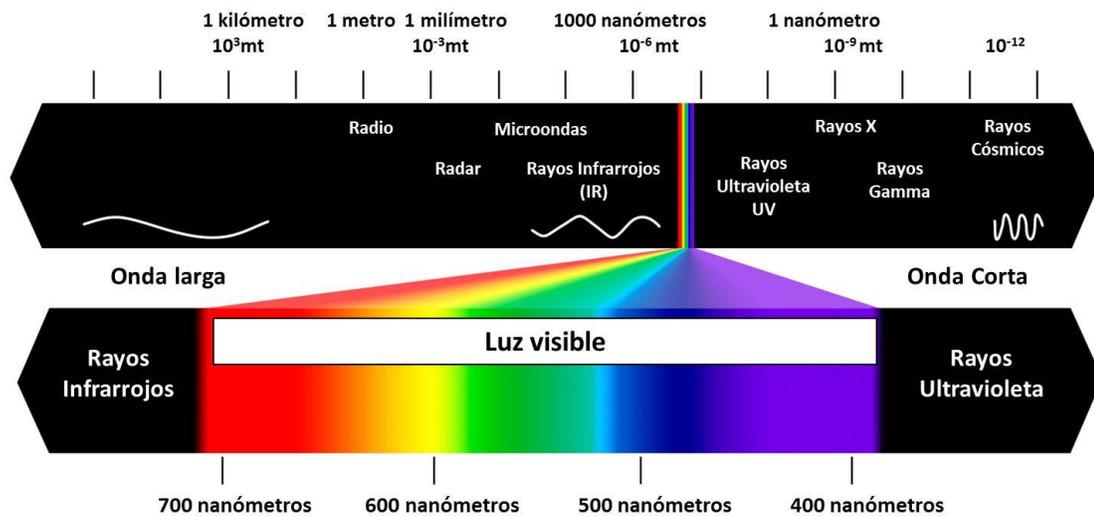
2.2.2.3. Características de la Atmósfera

Ayllón [2.003] menciona que el aire tiene una densidad relativamente grande en las capas bajas, por el hecho de estar comprimidas debido al peso de las que están encima, y una densidad decreciente al aumentar la altura. Conjuntamente el aire está compuesto por moléculas de distinto peso, a medida que se escasea con la altitud, solo van quedando moléculas de los gases más ligeros, hasta lograr alcanzar la velocidad de escape de la tierra y estas se escapan al espacio.

Debido a la disminución de la densidad, no se puede determinar el espesor o altura de la atmósfera, sino únicamente señalar a que altura se producen determinados fenómenos o cual es el valor de su densidad. [Ayllón, 2.003]

Ayllón [2.003] menciona que el color de la atmósfera en los niveles inferiores es azul y a medida que aumenta la altura, pasa del azul oscuro al violeta y finalmente al negro, donde el Sol brilla con un blanco resplandeciente. Este fenómeno se debe a que las partículas del aire dispersan la luz solar como si fuera un prisma, en una gama de colores que van del violeta al rojo. Como el número de partículas grandes (gotas de agua, polvo, etc.) es mayor en los niveles inferiores de la atmósfera, la dispersión es mayor en esta zona. Ver a continuación el espectro de la luz.

Figura 2-21. Espectro de luz.



Recuperada de: <http://www.artinaid.com/wp-content/uploads/2013/02/Espectro-Electromagn%C3%A9tico.jpg>

Ayllón [2.003] señala que los rayos luminosos chocan con las partículas del aire y hacen un movimiento de “zigzag” antes de llegar al suelo, de ahí que la luz parezca venir de todas partes. Además las ondas más cortas, en este caso las azules y violetas, son las que más se desvían, al difundirse en todas las direcciones hacen que el cielo tenga una coloración azul. En cambio los rayos rojos y amarillos, que son los que experimentan menos difusión, provocan que a su salida y puesta, el Sol se vea con una coloración amarilla y rojiza al atravesar el mayor espesor de la atmósfera. Finalmente a grandes alturas, y debido a la escasez de partículas, ya no se produce esta desviación, por lo que el manantial de luz queda concentrado en el Sol y el cielo aparece negro.

2.2.2.4. Energía de la Atmósfera

Ayllón [2.003] menciona que el calor es la cantidad de energía que absorbe un cuerpo y la temperatura es la unidad de medida de esa cantidad de energía.

Ledesma [2.011] señala que la atmósfera es un ente móvil y en continuo movimiento de tal manera que no tiene dos momentos iguales. Mecanismos complejos intervienen en la movilidad de la atmósfera. La energía que produce el movimiento de la atmósfera es el Sol. El calor que procede del interior de la Tierra a través de la corteza terrestre o el que viene de las estrellas se puede considerar despreciable. No toda la radiación emitida por el sol llega a la Tierra, parte es absorbida por los diferentes componentes de la atmósfera, entre ellos el vapor de agua de gran importancia por su capacidad para absorber y emitir radiaciones de onda larga en el espectro de

radiación infrarroja. La variabilidad de muchos de los componentes de la atmósfera, hacen que la cantidad de calor (energía), necesario para elevar la temperatura varié de un lugar a otro.

La atmósfera actúa como una maquina termodinámica en la que el gas es comprimido y luego se expande o el gas se expande primero y luego se comprime, para realizar un trabajo capaz de mover el sistema. La región caribe constituye el manantial de calor y las regiones polares los sumideros fríos, en una interacción compleja. Los vientos circulan en remolinos ciclónicos o en grandes anticiclones estableciendo los fenómenos dinámicos que gobiernan el conjunto atmosférico. [Ledesma, 2.011]

2.2.2.5. Formas de Transmisión del Calor

Ledesma [2.011] menciona que el calor se transmite, según el medio en que se propaga de tres maneras diferentes:

1. Radiación
 2. Conducción
 3. Translación del cuerpo caliente o Convección según Ayllón [2.003]
- ✓ **Radiación:** Ledesma [2.011] indica que la transmisión por radiación se verifica por medio de ondas electromagnéticas, y la atmósfera terrestre se calienta por la radiación que llega del sol. Ayllón [2.003] la define como la transferencia de calor de un cuerpo a otro sin que exista contacto entre ellos.
 - ✓ **Conducción:** es cuando el calor se transmite por contacto directo. Como el aire es mal conductor del calor, este tipo de transmisión se desprecia.
 - ✓ **Convección:** las partículas calientes se dilatan, pierden densidad y ascienden; las frías que están encima descienden, y se producen corrientes de ascenso y descenso de origen térmico, mediante el cual se transmite calor. [Ayllón, 2.003]

El transporte por desplazamiento del cuerpo caliente desde las regiones cálidas a las frías se verifica por **Advección**, es decir en movimientos casi horizontales. También por procesos verticales **Convectivos**. La convección implica el intercambio vertical de masas de aire cada una con su propia densidad, cantidad de calor, humedad y cantidad de movimiento (masa*Velocidad). El desplazamiento vertical puede ser libre o forzado. En el primer caso si la densidad de una masa es inferior a la de su entorno la masa asciende por el empuje hidrostático pero si se tiene mayor densidad es más pesada que el aire exterior y por lo tanto se cae. El movimiento forzado se verifica cuando una masa que recorre un terreno accidentado es obligada a subir y bajar estimulada por el viento [Ledesma, 2.011]

Adicionalmente Ayllón [2.003] menciona a la **Turbulencia** cuando existe movimiento desorganizado de partículas de aire, por fricción, que da a lugar que las partículas frías ocupen el lugar de las partículas calientes y viceversa, formándose remolinos pequeños de área limitada.

Igualmente Ayllón [2.003] alude que los medios de transmisión de calor son: los continentes, los océanos y la atmósfera. Esta organización de medio y formas de transmisión del calor se resume a continuación:

Tabla 2-4. Medios de transmisión del calor

MEDIO	FORMA
Continentes	Conducción
Océanos	Conducción Convección Turbulencia
Atmósfera	Conducción Convección Turbulencia Radiación

Fuente: AYLLÓN, Teresa. [2.003] Elementos de meteorología y climatología. México: Trillas 2 ed.

2.2.2.6. Calor y Temperatura del Aire

El calor es una forma de energía producida por la vibración acelerada de las moléculas que componen el cuerpo o sustancia. Puede transformarse en trabajo mecánico o en otra forma de energía ya sea eléctrica o luminosa y puede comunicarse entre cuerpos bajo ciertas condiciones. [Ledesma, 2.011]

La temperatura es una sutileza para medir el nivel térmico de un cuerpo y para ello se utiliza el termómetro. El científico Anders Celsius (1.701 - 1.744), un astrónomo sueco, en el siglo XVIII invento la escala termométrica Centígrada. Para ello utilizo un tubo de cristal graduado dentro del cual llevaba una columna de Mercurio en un capilar y estableció dos puntos fijos de referencia, uno a la temperatura del hielo fundente que marco con el cero y el otro el de la ebullición del agua que marco con el 100, dividiendo el intervalo en cien partes iguales a cada una de ellas llamo grado centígrado, o grado Celsius. Luego extrapolo los valores por debajo de cero grados para establecer temperaturas negativas y por encima de los 100 grados para extender la escala centígrada. [Ledesma, 2.011]

La temperatura en el sistema internacional de medidas se mide en grados absolutos, establecida por Lord William Kelvin (1.824 - 1.907), físico ingles del siglo XIX. En la escala Kelvin

no hay temperaturas negativas pues comienza en el cero absoluto que corresponde a una temperatura de **-273,15°C** de la escala Centígrada, en la cual los cuerpos no desprenden calor y las moléculas de la sustancia están en absoluto reposo. [Ledesma, 2.011]

Se emplean las siguientes expresiones para la conversión de temperatura entre grados Centígrados y grados Kelvin:

$$^{\circ}\text{C} = ^{\circ}\text{K} - 273,15^{\circ}\text{C} \quad \text{o} \quad ^{\circ}\text{K} = ^{\circ}\text{C} + 273,15^{\circ}\text{C}$$

Ayllón [2.003] menciona que la temperatura del aire es el grado sensible de calor y se debe principalmente a la radiación calorífica de onda larga que emite la superficie del planeta. Por otro parte durante el día las capas inferiores del aire se calientan, al dilatarse disminuye su densidad y se produce un movimiento generalizado de ascenso del aire caliente, el cual se enfría a medida que se eleva.

La compresión o expansión que sufre el aire también influye en la variación de la temperatura. Si un gas se comprime, el trabajo mecánico de la compresión se convierte en calor y produce un aumento de temperatura. Si el gas se expande, gasta una parte de su propio calor en forma de trabajo, por lo cual disminuye su temperatura. [Ayllón, 2.003]

Ayllón, [2.003] alude que cuando un volumen de aire asciende va disminuyendo su presión y por tanto se expande y enfría. Si desciende, se comprime y aumenta su temperatura (proceso adiabático). El valor del gradiente térmico de estas variaciones con la altura depende de varias circunstancias; entre ellas la temperatura del suelo, la liberación de calor latente por condensación del vapor de agua y la velocidad con que se mueve el aire. En promedio se calcula un gradiente de 6 °C/km de altura.

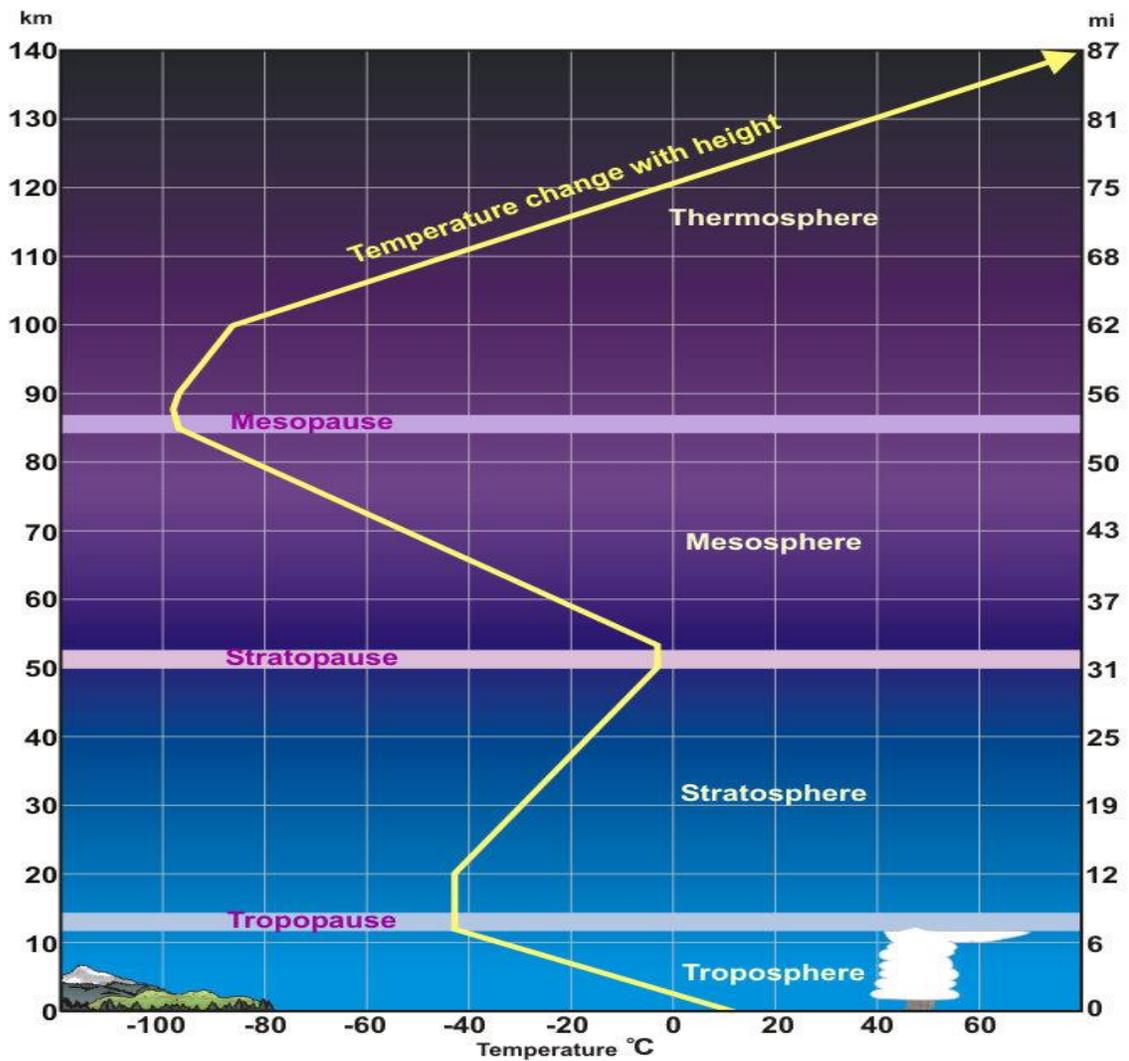
2.2.2.7. Variación de la Temperatura con la Altura

Ledesma [2.011] señala que desde hacía mucho tiempo se sabía que la temperatura desciende con la altura y se suponía que bajaba indefinidamente. Esto no es cierto ya que la exploración del espacio con satélites y cohetes meteorológicos ha permitido conocer con gran exactitud los valores de la temperatura en toda la atmósfera.

Se han considerado en su aspecto general dos regiones. La biosfera que se extiende desde el nivel del mar hasta los 700 km de altitud y la exósfera por encima de ese límite. Se puede indicar que las leyes de la Física se aplican en la biosfera mientras en la exosfera apenas tienen significado. [Ledesma, 2.011]

La estructura térmica de la biosfera se conoce con precisión y con la abundante información acumulada se ha podido determinar los valores estándar en las distintas regiones. Como se puede apreciar en la siguiente gráfica.

Figura 2-22. Variación de la temperatura con la altura en la atmósfera estándar (ISA).



Recuperada de: <http://www.brighthub.com/environment/science-environmental/articles/121482.aspx#>

Ledesma [2.011] señala que el gradiente vertical de temperatura γ se define como la variación de temperatura por unidad de distancia. En la atmósfera estándar (s) se considera:

$$\gamma_s = 0,65 \text{ } ^\circ\text{C} / 100\text{m}$$

El gradiente es positivo cuando la temperatura disminuye con la altura, queda constante en las capas isotérmicas y es negativo si la temperatura asciende, en cuyo caso se dice que hay una inversión térmica. [Ledesma, 2.011]

2.2.2.8. La Atmósfera Standard

Ledesma [2.011] indica que la atmósfera *estándar* o atmósfera *tipo* se ha establecido por un grupo de ingenieros y científicos, relacionados especialmente con instrumentos a bordo de aviones así como con procedimientos aeronáuticos. El conocimiento de la atmósfera estándar no solo es importante para la aviación. Es fundamental y básica en las aplicaciones de los modelos climáticos actuales y en general en todas las ramas de la geofísica.

Ledesma [2.011] menciona que la atmósfera estándar se considera como un *gas ideal* donde se cumplen dos hipótesis básicas:

1. Es un gas perfecto. Por tanto se cumplen las leyes de Boyle – Mariotte y de Charles de las que se deduce, la ecuación de los gases perfectos.

El gas perfecto:

Ledesma [2.011] define un gas perfecto cuando cumple *la ley de Boyle* y *la ley de Charles*. La ley de Boyle indica que a temperatura constante la presión experimentada por un gas es inversamente proporcional a su volumen específico, es decir:

$$V_e = V/m$$

$$P * V_e = cte$$

V_e : volumen específico

V : volumen del gas

M : masa del gas

P : presión del gas

Cte : constante de proporcionalidad.

Ledesma [2.011] indica que la ley de Charles se basa en los experimentos de Gay-Lussac y significa que el producto de la presión por el volumen específico es proporcional a la temperatura. Ambas leyes se representan como:

$$P * V_e = R * T$$

R : constante universal para los gases perfectos

T : Temperatura del gas (°K)

Esta ecuación de estado de los gases perfectos se puede expresar también de la siguiente forma:

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

En donde n: número de moles del gas.

2. Se cumple la ecuación hidrostática, lo que supone que la atmósfera es estática con respecto a la Tierra.

Ledesma [2.011] señala que la ecuación hidrostática es una relación básica asociada a una atmósfera que se conjetura en equilibrio estático relativo a la superficie terrestre.

La presión atmosférica se puede plantear de la siguiente forma:

$$p = m \cdot g$$

$$p = V \cdot \rho \cdot g$$

p: presión atmosférica

m: masa

g: gravedad terrestre

V: volumen

ρ : Densidad

El volumen por unidad de superficie es la altura (z), de la columna, entonces se obtiene la ecuación barométrica:

$$p = \rho \cdot g \cdot z$$

En forma diferencial:

$$dp = -g \cdot \rho \cdot dz$$

Ledesma [2.011] dice que se supone la densidad constante y se toma la gravedad negativa ya que la presión va disminuyendo con la altura.

Se han determinado experimentalmente una serie de parámetros a partir de los cuales se ha constituido una atmosfera tipo hasta los 700 km de altitud y se han observado otros fenómenos esporádicos a mayores alturas. [Ledesma, 2.011]

Las constantes adoptadas teniendo en cuenta que el subíndice cero significa valores al nivel del mar, en unidades métricas M K S (metro, kilogramo, segundo) son:

Tabla2-5. Variables físicas de la atmósfera standard

VARIABLE	VALOR
Presión: P_0	= $1,013250 \cdot 10^5$ newtons /m ² = 1013,25 hPa.
Densidad: ρ_0	= 1,225 kg/ m ³
Temperatura: T_0	= 15°C=288,15 °K
Cero absoluto: T	= -273,15 °K
Aceleración de la gravedad a 45º lat.: g_0	= 9,80665 m/seg ²
Peso molecular: M_0	=28,9644 (adimensional)
Numero de Avogadro: N	= $6,02257 \cdot 10^{26}$ 1/kg* mol
Peso específico: ω_0	=12,013 kg / (m ² *seg ²)
Constante universal de los gases perfectos: R*	= 8,31432julios/ (°K mol)

Fuente: LEDESMA Jimeno, Manuel. [2.011] Principios de meteorología y climatología. España: Paraninfo

2.2.2.9. Capas de la Atmósfera

Ayllón [2003] indica que con base en la temperatura, se pueden distinguir las siguientes capas de la atmósfera:

- Tropósfera
- Estratósfera
- Mesósfera
- Termósfera (ionósfera)
- Exósfera

El límite de cada capa está definido y se llama PAUSA. Su altura varía con la latitud y la estación del año [Ayllón, 2.003]

❖ **Tropósfera**

Tropósfera del griego *thropos*: cambio y *sphaira*: esfera. Ayllón [2003] señala que es la capa que está en contacto directo con la superficie de la Tierra. Es dominada por las fuerzas de gravedad, presión y radiación visible del sol. Las características principales son:

- Es la capa más densa de la atmósfera; en ella se concentran las tres cuartas partes del aire.
- Contiene casi todo el vapor de agua atmosférico.
- La temperatura disminuye con la altura, aproximadamente $0,6\text{ }^{\circ}\text{C}$ por cada 100 m en aire húmedo, y $1^{\circ}\text{C}/100\text{ m}$ en aire seco. A dicha disminución se le llama gradiente vertical de temperatura.
- Se producen movimientos *convectivos*, es decir corrientes ascendentes de aire, provocadas principalmente por el calentamiento de las capas bajas del aire. Es una capa inestable.
- Todos los fenómenos meteorológicos se producen en ella.
- Es esta capa se localiza la biosfera, zona en donde se desarrolla la vida, ubicada entre cero y cuatro km de altitud, ya que reúne las condiciones adecuadas de temperatura, humedad y densidad de aire.
- Tiene como límite superior la tropopausa, localizada a 17 km de altura en la zona ecuatorial, y a 8 km en las zonas polares. Se considera el espesor medio de 12 km.
- En su borde superior la temperatura es (-50°C) aproximadamente.

Quereda [2.005] subraya que la Tropósfera es el lugar de todos los procesos meteorológicos y climáticos importantes para los seres vivos y se caracteriza por cuatro aspectos:

- Disminución térmica con la altura.
- Disminución de presión con la altura.
- Variación en el contenido de CO_2 y H_2O (g).
- Turbulencia térmica y dinámica.

Disminución térmica con la altura: el gradiente térmico en esta zona es de $0,6^{\circ}\text{C}/100\text{m}$. Un gradiente que puede cambiar según el estado de la atmósfera y la estación del año. Los rayos solares que llegan a la Tierra transmiten calor una vez se han transformado en radiación infrarroja, sobre la superficie terrestre. Por lo tanto, al aumentar la altura, como se aleja de la fuente de calor que es la superficie terrestre, la temperatura va disminuyendo. [Quereda, 2005]

Disminución de presión con la altura: a medida que se asciende, se deja una porción de masa aérea. En consecuencia la presión atmosférica disminuye a medida que se escala. Inicialmente la

presión decrece a razón de $1hPa/8m$, y a partir de unos 700 m a razón de $1hPa/10m$. Así a 5.000m de altura la presión es la mitad que en la superficie terrestre. [Quereda, 2005]

Variación en el contenido de CO₂ y H₂O (g): La tropósfera contiene casi todo el contenido de CO₂ y H₂O (g) de la atmósfera. El CO₂ ocupa el 0,03% de la masa troposférica. El H₂O (g) está básicamente todo en la tropósfera. [Quereda, 2005]

Turbulencia térmica y dinámica: La turbulencia que se presenta permite distinguir la existencia de una llamada **capa geográfica**, entre los (2.000 o 3.000) m de altura, donde están definidos los factores geográficos: topografía, relieve, continentes, océanos y mares; en donde se experimenta los efectos turbulentos con más intensidad que la capa superior llamada libre. [Quereda, 2.005]

Además Ledesma [2.011] dice que la tropósfera es la región inferior de la atmosfera donde la temperatura desciende regularmente obedeciendo al gradiente estándar, desde los 288,15 °K (15°C) establecidos para el nivel del mar hasta una temperatura estimada en 216,65 °K (- 56,5°C) donde el descenso se detiene.

Teniendo en cuenta que el gradiente térmico de la atmósfera estándar es $\gamma_s = 0,0065$ °C/m, puede calcularse la altitud estándar de la tropósfera como Z:

$$Z = \frac{T_o - T}{\gamma_s} = \frac{288,15 - 216,65}{0,0065} = \mathbf{11.000 \text{ m}}$$

Para condiciones medias a 45° lat.

El límite superior de 11.000m (11 km) se denomina tropopausa. No es una superficie geométrica sino física que constituye una capa delgada de mezcla y transición entre la tropósfera y la atmósfera superior. Sobre el ecuador la tropopausa estándar se ubica hasta los 16 km, por lo que la temperatura desciende hasta alcanzar valores próximos a los (-70°C). Sobre las regiones polares está más baja alcanzando apenas los 8 km de altitud con temperaturas próximas a los (- 45°C). La altitud de la tropopausa experimenta importantes variaciones tanto diurnas como estacionales o anuales. En el verano no esta alta y baja en invierno e incluso puede desaparecer como sucede ocasionalmente en la Antártida. [Ledesma, 2.011]

❖ *Tropopausa*

Ayllón [2.003] señala que la tropopausa es la zona que divide la tropósfera de la estratósfera. Es de poco espesor, por lo que es una capa de transición y se caracteriza por:

- Es una capa estable.
- La temperatura cesa de disminuir con la altura y se mantiene constante.
- Los vientos alcanzan grandes velocidades, pero el aire tiene poca densidad por lo que el efecto es poco perceptible.

❖ *Estratósfera*

Ledesma [2.011] menciona que la estratósfera es la región comprendida entre la tropopausa y los 50 km de altitud. En su segmento inferior la temperatura se mantiene constante hasta los 20 km de altitud. El gradiente es cero y se configura así una capa Isoterma. Más arriba la temperatura aumenta con algunas variaciones poco significativas. Hacia los 50 km de altitud se ha detectado una reducida capa isoterma de unos 5 o 6 km de espesor donde la temperatura es de unos 0°C, coincidiendo con la estratopausa.

De acuerdo a Ayllón [2.003] la estratósfera es importante porque filtra la radiación ultravioleta (UV) que se da en esta zona y además se caracteriza por:

- Está formada por estratos de aire con poco movimiento vertical y por lo tanto es estable.
- La temperatura empieza a aumentar con la altura y llega a (-30 °C) (a 25 km aprox.), debido a procesos fotoquímicos que se producen.
- Se localiza la capa de ozono que actúa como pantalla contra la dañina radiación ultravioleta. Por las reacciones químicas que se producen, suele denominarse también como Quimiosfera u Ozonósfera.
- Tiene poco vapor de agua, por lo que no se origina nubosidad ni algún otro fenómeno ligado a la humedad.
- El límite superior se denomina estratopausa y se localiza aproximadamente a 50 km de altitud.

Quereda [2.005] señala que en la estratósfera se da la existencia de la capa de ozono (O₃), entre los 15 y 35 km de altura, originada como consecuencia de las radiaciones UV del sol que disocian las moléculas de Oxígeno (O₂) y permiten formar nuevas moléculas triatómicas de oxígeno (O₃).



Quereda [2.005] menciona que la capa de ozono absorbe la radiación UV y por ello la desaparición provocaría la llegada de mayores cantidades de radiación ultravioleta al suelo. De ahí que un debilitamiento o disminución en la densidad del ozono podría provocar efectos negativos:

- ✓ Mayor calentamiento climático de la tierra.
- ✓ Aumento de cánceres cutáneos, de cataratas y de inmunodeficiencias.
- ✓ Efectos mutagénicos sobre las especies.

De modo contrario, una capa de ozono más densa anularía los beneficiosos efectos que las actuales dosis moderadas de UV provocan, tanto como bactericida como por reducción en la síntesis de la vitamina D determinando mayores secuelas de raquitismo y osteoporosis. [Quereda, 2.005]

El ozono es un componente esencial del clima ya que la absorción del UV solar determina el calentamiento de la estratósfera entre los 10 y 40 km de altura, contribuyendo al efecto invernadero. Esto indica que toda modificación natural o artificial de la capa de ozono genera repercusiones sobre el clima y la vida en el planeta. [Quereda, 2.005]

Además Quereda [2.005] indica que la mayor parte del ozono, 90%, presente en la estratósfera está en concentraciones moleculares de 5 a 10 ppm. Además la principal fuente natural de ozono estratosférico procede de la foto disociación de oxígeno molecular por la radiación de UV de longitud de onda corta, de 0,24 a 0,32 mm (UV-B y UV-C). Esta disociación produce oxígeno monoatómico que se recombina formando ozono y simultáneamente se destruye según el ciclo de Chapman (1.930)

❖ **Mesósfera**

Ayllón [2.003] indica que en la mesósfera siguen actuando las fuerzas de gravedad, presión y rayos ultravioleta y se caracteriza por:

- El aire es seco. La radiación solar disocia las escasas moléculas de vapor de agua.
- A partir de los 50 km, su límite inferior, la temperatura comienza a disminuir rápidamente hasta llegar a (- 110 °C) en su límite superior.
- Se producen movimientos turbulentos sobre la capa de aire caliente de la estratósfera.
- Se han detectado bandas de ácido nítrico y nubes noctilucetas, formadas por polvo cósmico.
- El aire está enrarecido.
- Su límite superior, la mesopausa, se localiza a unos 80 km.

Ledesma [2.011] señala que la mesopausa se sitúa a unos 85 km de altitud, y es una amplia región isoterma de unos 9 km de espesor donde la temperatura se mantiene constante con un valor aproximado de (-90°C), donde la atmósfera es más fría

❖ *Ionósfera o Termósfera*

Ayllón [2.003] menciona que la termósfera es una masa de gases neutros e ionizados. En esta capa predomina la influencia del campo magnético, la radiación corpuscular del sol y los campos magnéticos producidos por corrientes eléctricas y se caracteriza por:

- Se localiza entre los 80 y los 500 km aprox.
- Las moléculas de los gases están disociados en átomos, por lo cual ya no tienen densidad suficiente para proteger de la acción ardiente de los rayos solares; un ser vivo ardería si estuviera del lado del sol y se congelaría del lado de la sombra.
- La energía de los rayos UV de longitudes de onda menores de 1.800 Å son absorbidos por el oxígeno molecular, de tal manera que no penetren más allá de 100 km. Lo mismo pasa con los rayos X, de longitud de onda más corta. Al absorber el aire estos rayos UV, sube la temperatura e irradia calor en infrarrojo, con el mismo ritmo que absorbe la energía UV, lo que explica las altas temperaturas de la ionósfera.
- La temperatura aumenta hasta 800 °C a 200 km de altura y llega a 1.500 °C en el límite superior de esta capa, por lo que también se le llama termósfera.
- Los rayos solares actúan sobre los átomos ocasionando el desprendimiento de electrones, cuando esto ocurre en el átomo predomina la carga positiva del núcleo, así el átomo se convierte en un ion con carga positiva, de ahí el nombre de Ionósfera.
- Debido a las bajas presiones que hay en la alta atmósfera, los procesos de ionización son muy activos, de lo cual resulta altas concentraciones de electrones libres.
- Se distinguen varias capas eléctricamente cargadas que reflejan las ondas de radio y permiten la recepción de onda corta.
- Se producen las auroras boreales o australes, que solo se observan en altas latitudes. La causa de ellas es el paso de una corriente de electrones de oxígeno solar a través de la alta atmósfera, y al chocar estos con los átomos de aire enrarecido se produce el resplandor. La formación de auroras polares está ligada al magnetismo terrestre y a las fulguraciones solares y por ello, también con la variación de las manchas solares.
- Se distinguen varias capas cargadas eléctricamente que reflejan las ondas de radio y permiten la recepción de la onda corta. Las más importantes son:

- Capa D: es la inferior, refleja las ondas de radio de baja frecuencia y solo se presenta durante horas de insolación.
- Capa E: capa de Kennelly-Heaviside. Se ubica entre los 100 y 130 km y es reflectora de ondas. Se origina por los rayos X del sol.
- Capa F: capa de Apleton. Se localiza a los 200 km aproximadamente, a veces se rompe en capas difusas. Se usa en las transmisiones de radio a larga distancia. También se origina por los rayos X del sol.

Ledesma [2.011] menciona que la termósfera sube la temperatura incesantemente hasta la termopausa situada a 700 km de altitud en cuyo nivel se ha podido determinar una temperatura exacta de 1.507,6°C.

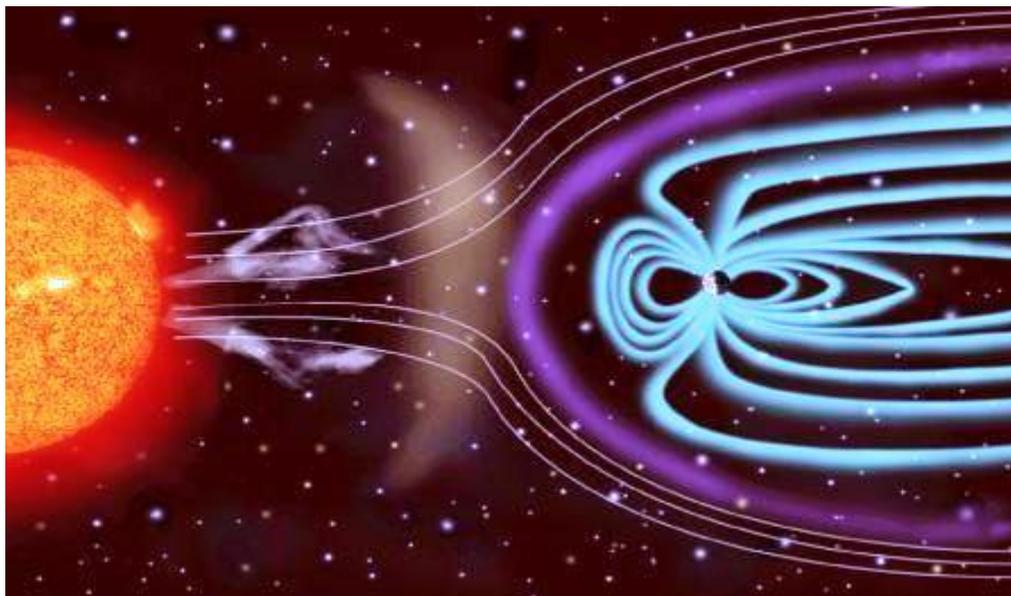
❖ *Exósfera*

Ayllón [2.003] señala que la exósfera se localiza a partir de los 500 km de altura hasta el límite del campo magnético terrestre, es decir hasta la magnetopausa, que se sitúa a unos 10 radios terrestres de altura aproximadamente. Este límite exterior está determinado por la interacción del viento solar y el campo magnético terrestre. Su densidad es mínima llevando a que ocasionalmente se produzcan colisiones entre las partículas presentes. Dentro de este límite las partículas de aire cargadas eléctricamente son atrapadas por la Tierra de un modo relativamente permanente. Además algunas partículas se elevan y después caen, otras se colocan en orbitas alrededor de la Tierra y otras escapan al espacio interplanetario. Esto ocurre con las partículas neutras, mientras los movimientos de las partículas cargadas eléctricamente como son protones e iones están controlados por el campo magnético terrestre.

Se puede destacar la presencia de la magnetósfera que se rige por el campo magnético de la tierra y la radiación corpuscular del sol. El viento solar, que es un flujo continuo de electrones y protones (tempestades magnéticas) contornea el campo magnético de la Tierra, lo aplasta en el frente de choque y lo estira como una gran cola magnética. [Ayllón, 2.003]

Finalmente Ayllón [2.003] menciona que la magnetósfera protege la superficie terrestre de la radiación iónica procedente del sol, en forma de electrones y protones presentes en el viento solar. Cuando se encuentra con la magnetosfera, las partículas son atrapadas y retenidas entre las líneas de fuerza del campo magnético, después escapan por la cola de la magnetósfera. Sin esta capa la vida en la tierra no sería posible. Ver la siguiente representación:

Figura 2-23. Representación de la magnetósfera



Recuperada de: <http://www.ecured.cu/images/5/5d/Magnetosfera.JPG>

2.2.3. El Aire Pesa: Presión Atmosférica

Figura 2-24. Una semblanza de la presión atmosférica



Recuperada de: <http://circuitoaleph.files.wordpress.com/2013/08/atmosfera.jpg>

El principal motor que impulsa al aire a moverse es la diferencia de presión existente entre los diferentes lugares del planeta, de forma tal que el aire se pone en movimiento precisamente para suavizar estos desequilibrios de presión. A su vez el viento, al desplazar masas de aire desde unos lugares a otros, genera vacíos y agolpamientos de aire que contribuyen a alterar la distribución de presiones en el planeta. [Cuadrat & Pita, 1.997]

Cuadrat & Pita [1.997] mencionan que la circulación atmosférica ejerce un papel importante en el equilibrio climático mundial, al redistribuir la energía planetaria desde las excedentarias latitudes bajas a las deficitarias latitudes altas. Sin esta redistribución el desequilibrio energético daría lugar a un progresivo calentamiento de las latitudes bajas y a un enfriamiento de las altas, rompiéndose así la estabilidad de los climas de la Tierra.

Los gases de la atmósfera por su propiedad de expansión, tienden a difundirse en el espacio [Ayllón, 2.003]; además Cuadrat & Pita [1.997] indican que la atmósfera terrestre con sus componentes sólidos, líquidos y gaseosos, está dotada de una masa y es atraída hacia la Tierra por la aceleración de la gravedad, en consecuencia, ejerce una presión sobre esta que recibe el nombre de “presión atmosférica” y puede definirse como el peso que ejerce la columna de aire

sobre la superficie terrestre. “La presión del aire desde un punto cualquiera es la misma en todas las direcciones, cuando el aire está en reposo” [Ayllón, 2.003]

El experimento de Torricelli permitió la evaluación de la presión atmosférica y constituyó la base de los principales instrumentos de medición de esta magnitud conocidos como los barómetros de mercurio [Cuadrat & Pita, 1.997]

2.2.3.1. Concepto y Medición

Ayllón [2.003] cita que en términos físicos la presión se define como la fuerza por unidad de superficie:

$$P=F/s$$

P: presión

F: fuerza

s: superficie

Zambrano [2003] indica que la segunda ley de Newton define la fuerza como el producto de la masa por la aceleración además Cuadrat & Pita [1997] señalan que si la Fuerza está determinada por la aceleración de la gravedad, entonces se habla de peso.

$$F = m \cdot a$$

a: aceleración

$$P_{atm} = (m \cdot g)/s$$

m: masa de aire

g: Aceleración de la gravedad

Patm: presión atmosférica

Quereda [2.005] menciona que la medida de presión atmosférica en peso de mercurio (Hg), puede causar algún error. Se sabe que si se lleva el mismo Hg a otro lugar de la Tierra su peso no será exactamente igual, ya que el peso depende de la gravedad en cada punto de la Tierra. Si esta gravedad es función directa de las masas en juego e inversa a los cuadrados de las distancias al centro de la Tierra, la configuración achatada del planeta determina una mayor

fuerza gravitatoria en las altitudes altas que en las zonas ecuatoriales. Por lo tanto, dos alturas o masas iguales en la columna de Mercurio que se observan en sitios diferentes, podría ocurrir que no dan el mismo valor de presión atmosférica. Por ello, para evitar este inconveniente, se ha decidido expresar el valor de la presión en unidades de fuerza y no de peso y medirla en el sistema físico absoluto, CGS. En el sistema CGS, la unidad de presión en peso, el **mm Hg/cm²** o "**Torr**", es sustituida por una unidad de fuerza que es la **dina**. Esta presión que está en función de fuerza se expresa como **dina/cm²**.

Una (1) dina es la fuerza necesaria para comunicar a una masa de 1 g una aceleración de 1cm/s², por lo tanto *Baria* (Ba) es una unidad de presión atmosférica, que se define como:

$$\text{Baria} = \text{dina/cm}^2$$

Una (1) baria es la presión ejercida por la fuerza de una dina sobre una superficie de 1 cm² (CGS). [Cuadrat & Pita, 1.997]

La correspondencia entre unidades de fuerza y de peso puede establecerse ya que **F=m*a** y la masa se puede expresar en función del volumen y la densidad como **m=V*ρ** del tubo cilíndrico de Torricelli, entonces se puede deducir la correspondencia entre mm Hg y las unidades de presión del sistema CGS en fuerza, F. [Quereda, 2.005]

Para calcular el volumen V, suponemos una columna barométrica (Torricelli) cuya sección es 1cm² y cuya altura es de 76cm, entonces:

$$V=1\text{cm}^2*76\text{cm}=76\text{cm}^3$$

Este valor en $m=V* \rho$, tenemos:

Si la densidad de Hg es 13,6 g/cm³ a 0°C, entonces:

$$m= 76\text{cm}^3*13,6 \text{ g/cm}^3=1.033,66 \text{ g de masa Hg}$$

Se debe tener en cuenta que la gravedad estándar es el valor de la gravedad a la latitud de 45° y al nivel del mar, que corresponde a 980,62 cm/s². [Ayllón, 2.003]

Por lo tanto:

$$F=1.033, 66 \text{ g}*980, 6 \text{ cm/s}^2 = 1. 013. 606, 996 \text{ (g*cm/s}^2\text{) o (Dinas)}$$

En términos de presión sería:

$$\text{Presión atmosférica} = 1.013.606,996 \text{ dinas/cm}^2 = 1 \text{ atm}$$

Este valor representa la presión atmosférica al nivel del mar y equivale a una atmosfera de presión. [Zambrano, 2.003]

$$\text{Presión atmosférica} = 1.013.606,996 \text{ barias}$$

Lo elevado de estas cantidades medidas en barias, sugirieron a Vilhelm Bjerknes (1862 - 1951), uno de los grandes meteorólogos del siglo XX, emplear como unidad básica otra unidad mayor, conocida como “bar”, y un bar equivalente a $1 \cdot 10^6$ (dinas /cm²) o (baria) y su submúltiplo el milibar (mb) para expresar la fuerza ejercida por 1000 dinas/cm². Esta unidad es la básica en climatología y meteorología [Quereda, 2005]

$$1 \text{ bar} = 1.000.000 \text{ barias}$$

$$1 \text{ bar} = 1 * 10^6 \text{ dinas/cm}^2$$

$$1 \text{ mb} = 1 * 10^3 \text{ dinas/cm}^2$$

$$1 \text{ atm} = 1,014 \text{ bar} = 1.014 \text{ mb}$$

El valor de **1.014 mb** se conoce como presión atmosférica normal [Ayllón, 2.003]

También se tiene en el sistema Giorgi (MKS), donde la fuerza se puede expresar en:

$$\text{Newton} = 1 \text{ kg} * 1 \text{ m/s}^2$$

El pascal (Pa) es la presión ejercida por una fuerza de 1 newton (Nw) sobre una superficie de 1 m² [Cuadrat & Pita, 1.997]

Por lo tanto las unidades de presión atmosférica y sus equivalencias son:

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ Nw/m}^2$$

$$1 \text{ hPa} = 100 \text{ N/ m}^2$$

$$1 \text{ Hectopascal (hPa)} = 100 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ Pa} = 10^5 \text{ dinas/10}^4 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ Pa} = 10 \text{ barias}$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ mb} = 100 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ mb} = 1 \text{ hPa}$$

Presión normal de la atmósfera estándar=1.013,2 hPa [Quereda, 2.005]

El milibar y el hectopascal son unidades equivalentes y pueden usarse indistintamente, en la actualidad tiende a imponerse el hectopascal. Estos valores solo se registran en momentos y lugares muy concretos, dado que la presión atmosférica se caracteriza por experimentar grandes variaciones en el espacio, tanto en la dimensión vertical como en la horizontal. [Cuadrat & Pita, 1.997]

Ayllón [2.003] indica que el peso de una columna de aire al nivel del mar, a la temperatura de 0°C y a la gravedad existente a 45° de latitud, está equilibrado por el peso de una columna de mercurio de 760 mm de longitud, y la densidad del Mercurio es de 13,595 g/cm³ como se mencionó previamente, entonces:

$$P_{\text{atm}} = 760 \text{ mm} \times 13,595 \text{ g/cm}^3$$

$$P_{\text{atm}} = 76 \text{ cm} \times 13,595 \text{ g/cm}^3$$

$$P_{\text{atm}} = 1.033, 22 \text{ g/cm}^2$$

$$P_{\text{atm}} = 1, 0332 \text{ kg/cm}^2$$

Esto significa que la atmósfera ejerce una presión de poco más de un kilogramo por centímetro cuadrado sobre la superficie terrestre.

Además Ayllón [2.003] menciona que el milibar corresponde aproximadamente en peso a $\frac{3}{4}$ de un (1) mm Hg, por lo tanto, sin gran error puede pasarse de una presión dada en milímetros (mm) a milibares, añadiendo al número de mm su tercera parte, por ej.:

$$760 + (760/3) = 1.013,3 \text{ mb}$$

Por el contrario, se pasa de milibar a milímetro restando a estos su cuarta parte:

$$1.013,3 - (1.013,3) / 4 = 760 \text{ mm}$$

Finalmente Zambrano [2.003] dice que según el principio de PASCAL, “un gas transmite en todas las direcciones y en todo sentido, con la misma intensidad, cualquier presión que se ejerza sobre uno cualquiera de sus puntos, por lo que la presión atmosférica NO se manifiesta solamente de arriba abajo, sino en todas las direcciones”. p. 179

2.2.3.2. Variaciones de la Presión

Ayllón [2.003] manifiesta que la presión atmosférica varía según la temperatura, la altitud y la humedad.

✓ Temperatura

A un aumento de temperatura corresponde una dilatación del aire y por tanto una disminución de presión entre las moléculas del aire y viceversa, un descenso de temperatura produce una contracción del aire, y en consecuencia un aumento en la presión. Esta variación de la presión en función de la temperatura, se observa en el transcurso del día y en el transcurso del año, con el cambio de las estaciones y da lugar a *oscilaciones barométricas diarias y anuales*. [Ayllón, 2.003]

Además Ayllón [2.003] menciona también que la oscilación anual de la presión es insignificante en el Ecuador y aumenta hacia las altas latitudes, como también es mayor en los océanos que en los continentes. Se considera que estas oscilaciones se deben a las variaciones de temperatura y presión de la baja estratósfera.

Adicionalmente Zambrano [2.003] señala que cuando el aire se calienta, este pierde densidad y por lo tanto tiende a ascender. La temperatura y la presión son inversas, es decir a mayor temperatura, menor presión o viceversa. Por lo tanto aire frío se relaciona con aire denso, alta presión o relacionada a los anticiclones; aire caliente se relaciona con aire liviano, baja presión o vinculada a los ciclones.

Por otro lado Adsuar [2.002] manifiesta que la radiación solar calienta la superficie terrestre, pero esta radiación directa o reflejada no es suficiente para hacer lo mismo con la atmósfera. El calentamiento de la atmósfera se produce a causa del calentamiento del aire en contacto con la superficie de la Tierra y por este motivo la temperatura disminuye a medida que aumenta la altitud hasta los niveles de la tropopausa.

De la energía solar que llega a la Tierra, aproximadamente el 50% se refleja por la atmósfera, y el resto es absorbida por la superficie terrestre. Parte de la energía solar recibida por la Tierra se regresa al espacio en forma de radiación terrestre en la zona de rayos infrarrojo. La mayor parte de esta radiación terrestre es absorbida por nubes, vapor de agua, **CO₂**, gases de la atmósfera, etc., desempeñándose como una envoltura, que mantiene los niveles de temperatura y dificulta el regreso de la radiación al espacio exterior [Adsuar, 2.002]

✓ **Altitud:**

Ayllón [2.003] indica que las capas inferiores de la atmósfera son más densas y soportan el peso de las capas superiores por lo que en el suelo la presión es mayor y va disminuyendo con la altura. Esta relación se expresa con la siguiente ecuación hidrostática:

$$-\Delta p = \rho g \Delta z$$

Dónde:

$-\Delta p$: Disminución de la presión

ρ : Densidad del aire

g : Gravedad

Δz : Aumento de la altura

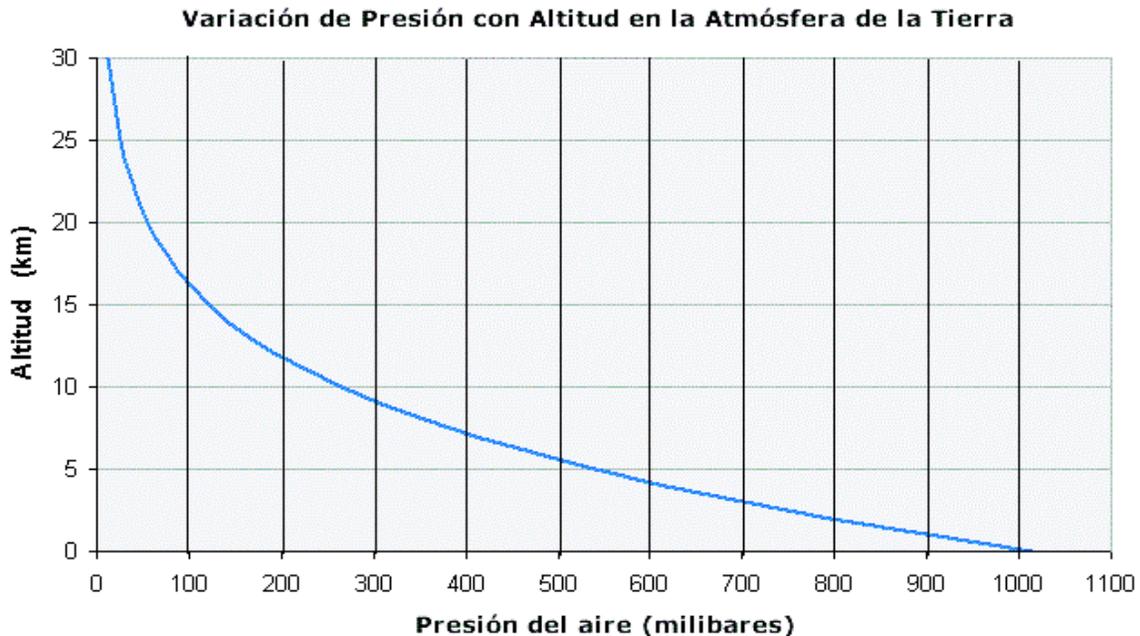
La densidad del aire depende de la temperatura y la presión, puede calcularse la disminución de la presión por unidad de elevación y se encuentra que en la proximidad del suelo la presión decrece 1mm de Hg por cada 11 m de altura; después de los 1.000 m decrece más lentamente. [Ayllón, 2.003]. Se debe tener en cuenta que la densidad del aire al nivel del mar tiene un valor de 1.225 g/cm³ [Adsuar, 2.002]

La presión atmosférica en un sitio mide el peso de la columna de aire en ese punto. En la superficie terrestre es toda la columna de aire la que está ejerciendo la presión; a medida que nos elevamos en altura, la columna de aire va siendo progresivamente menor y su peso también es inferior. [Cuadrat & Pita, 1.997]

Cuadrat & Pita [1.997] indican que el proceso de disminución de la presión con la altura no es un proceso lineal. La masa atmosférica es atraída por la fuerza de la gravedad hacia las proximidades de la superficie terrestre; por otro lado las capas bajas de la atmósfera tienden a comprimirse por el peso de las capas superiores que descansan sobre ellas. El resultado es que la mayor parte de la masa atmosférica se concentra en las capas inferiores, en las cuales la densidad del aire es muy elevada, en tanto que esta disminuye cuando ascendemos en altura. Ello determina que la disminución de la presión con la altura sea muy brusca en las capas bajas de la atmósfera y vaya haciéndose más suave y gradual a medida que ascendemos hacia los niveles más altos. En consecuencia, la curva que dibuja las relaciones existentes entre la presión y la altura presenta una disminución exponencial, como se aprecia en la gráfica de altitud vs presión atmosférica. En la cual conviene destacar el hecho de que aproximadamente la mitad del peso de toda la columna de aire (505 mb) se concentra solo en los primeros 5.500 m de altura. [Cuadrat & Pita, 1.997]

Para fines prácticos se puede presumir que la atmósfera termina a los 80 km de altitud. Más arriba el aire es escaso y su contribución al peso total puede considerarse despreciable. [Ledesma, 2.011]

Figura 2-25. Gráfica de presión atmosférica vs altitud



Fuente: [http://www.windows2universe.org/earth/Atmosphere/pressure vs altitude.html&lang=sp](http://www.windows2universe.org/earth/Atmosphere/pressure_vs_altitude.html&lang=sp) por Randy Russell

Hay que indicar que esta configuración de las presiones no refleja las situaciones atmosféricas reales que se van produciendo a lo largo de los sucesivos días, sino las condiciones existentes en la atmósfera estándar. [Cuadrat & Pita, 1.997]

Cuadrat & Pita [1.997] mencionan que la atmósfera estándar es una atmósfera tipo, usada por los meteorólogos y que se define por los siguientes parámetros:

1. La temperatura y la presión son uniformes al nivel del mar, con valores constantes de 15°C y $1.013,3\text{ hPa}$.
2. La temperatura disminuye $0,65^{\circ}\text{C}$ por cada 100 m de elevación en la tropósfera, siendo constante en la estratósfera.
3. La densidad del aire es constante para todos los puntos situados a la misma altitud.
4. Las superficies isobaras e isotermas son paralelas a la superficie media del mar.
5. La tropopausa se sitúa en un nivel fijo de 11 km y presenta una presión de 225 hPa y una temperatura de $-36,5^{\circ}\text{C}$.
6. Es una atmósfera en estado ideal de equilibrio estático, en la cual todos los puntos de un mismo nivel tendrían la misma presión, la misma temperatura y la misma densidad. Es

un estado de tendencia de la atmósfera real, solo por los aportes de energía que le llegan del sol le impiden alcanzarlo. [Recuperado en: Medina, 1.976, p. 33]

Zambrano [2.003] menciona que el origen de la presión atmosférica es el propio peso del aire, sin intervención de otras fuerzas compresoras extrañas y decrece en progresión geométrica, cuando la altura aumenta en progresión aritmética; cerca de la superficie terrestre, la presión disminuye un milibar por cada 8,5 m de ascenso, mientras que a los 5.500 m de altitud, es necesario ascender 15 m para obtener el mismo descenso de presión y para altitudes superiores se requerirá un desnivel aun mayor para lograr una disminución igual. Se presenta a continuación una tabla que resume el comportamiento de la presión atmosférica en la atmósfera estándar.

Tabla 2-6. Variación de la presión atmosférica con la altura

Altitud (km)	Presión (mb)
0,000	1014,0
0,110	1000,0
0,195	990,0
0,280	980,0
0,540	950,0
0,806	920,0
0,987	900,0
1,456	850,0
2,465	750,0
3,588	650,0
5,570	550,0
7,180	400,0
9,158	300,0
10,000	265,0
20,000	55,3
30,000	12,0
40,000	2,87
50,000	0,798
60,000	0,225
70,000	0,0552
80,000	0,0104
90,000	0,0016
100,000	0,0003

Recuperada de: Zambrano [2.003], Adaptado de Jansa G., J.M. (1.962) y Retallack B.J. (1.973)

Existe una estrecha relación entre Presión atmosférica y altitud, que se usa para fabricar Altímetros, donde la presión se ha reemplazado por una escala graduada directamente en altitudes. [Zambrano, 2.003]

Adsuar [2.002] indica que los cambios de presión sobre la superficie de la tierra se encuentran regulados por los cambios en las masas de aire que se encuentran en la tropósfera. La tasa de

decrecimiento de la presión con la altura depende de las condiciones meteorológicas. No obstante, para las capas bajas de la tropósfera, hasta aprox. 5.000 pies (1.524m), se considera como aceptable una relación aproximada de decrecimiento de 1 mb por cada 8 m.

En la atmósfera real las variaciones de la presión con la altura no son rígidas ni fijas, sino cambiantes, siendo uno de los factores determinantes de ese cambio la temperatura del aire, de forma tal que la disminución de la presión con la altura es más brusca en el aire frío y más suave en el aire cálido. La razón de este fenómeno estriba en el carácter gaseoso de la atmósfera, el cual determina que el aire atmosférico se ajuste a la ecuación de estado de los gases. Con arreglo a esta ecuación, la presión, el volumen y la temperatura de un gas (los parámetros definitorios de su estado) no son independientes, sino que están ligados por medio de la ecuación de estado de los gases perfectos [Cuadrat & Pita, 1.997]

Ayllón [2.003] menciona que Robert Boyle (1.660) indicó que el aire era una materia elástica o sea que es compresible y expansible. A partir de esto, dedujo una relación cuantitativa entre la presión y el volumen de un gas la cual señalaba que “a temperatura constante el volumen es inversamente proporcional a la presión”, como se expresa a continuación:

$$V_e * p = R * T$$

Dónde:

V_e : Volumen ocupado por la unidad de masa

p: Presión atmosférica

T: Temperatura absoluta (°K)

R: Constante del gas o mezcla de gases

La ecuación de estado de un gas, en este caso aire, establece que la presión debe ser proporcional al producto de la temperatura por la densidad, siendo las tres variables interdependientes, es decir que las tres dependen mutuamente. [Cuadrat & Pita, 1.997]

Quereda [2.005] señala que la presión atmosférica constituye, junto a la temperatura y la humedad, el tercer elemento del clima. Las variaciones reales de la presión, a nivel del mar, son tan pequeñas que pueden considerarse como una constante geográfica, sin efectos sensibles sobre los seres vivos. La única excepción son los climas de altitud y al estudio de la climatología médica que investiga las alteraciones del pH sanguíneo, las cardíacas y los pulmones que obedecen a este elemento climático.

Además Quereda [2.005] menciona que el decrecimiento de la presión atmosférica se puede calcular aproximadamente con la siguiente ecuación:

$$P_2 = P_1 * e^{\left(-\frac{gh}{RT}\right)}$$

Ecuación fundamental de la presión estática atmosférica:

P_2 y P_1 : presión atmosférica entre dos niveles

e: base de los logaritmos naturales

g : aceleración de la gravedad en m/s^2

R: constante de los gases, 287

T: temperatura media absoluta de la columna de aire existente entre los dos niveles

H: diferencia de altura entre los niveles, m

Adicionalmente Ayllón [2.003] señala que la presión externa no se percibe, porque se equilibra, dentro de ciertos límites, con la presión interna ejercida por los líquidos y gases de nuestro organismo. Esta acción de la presión atmosférica explica los trastornos de adaptación que sufren las personas al pasar del nivel del mar a zonas de alta montaña.

El aire es compresible, esto determina que las capas inferiores estén muy comprimidas y por ello son más densas. A medida que se asciende, tanto la densidad como la presión disminuyen con rapidez. [Ayllón, 2.003]

Finalmente los efectos fisiológicos de la disminución de la presión sobre los seres humanos, es notoria. La baja presión hace que disminuya la cantidad de oxígeno que entra a la sangre a través de los pulmones. En altitudes entre 3.000 y 4.000 m puede producirse la “enfermedad de montaña” o de altura, caracterizada por dolor de cabeza, hemorragias nasales y náuseas, así como dificultad para respirar. Por eso los aviones comerciales que vuelan a más de 8.000 m tienen cabinas presurizadas a 850 milibares (mb) que equivale a una altitud aproximada de 1.500 m, en contraste con la presión que puede ser solo de 200 a 300 mb [Ayllón, 2.003]

2.2.3.3. Modelación Ideal de la Presión Atmosférica

Cuadrat & Pita [1.997] explican que si se tienen dos columnas de aire atmosférico A y B con valores idénticos de presión, temperatura y densidad, en un primer momento, como se aprecia en la figura (2-26) Si la columna A se somete a un proceso de enfriamiento y si la presión permanece constante, la densidad de la columna A aumenta, dado que la masa no cambia, lo que ocurre es comprimirse y reducir su volumen, pasando al estado representado en la columna A'.

Figura 2-26. Estado inicial de dos gases iguales en similares condiciones

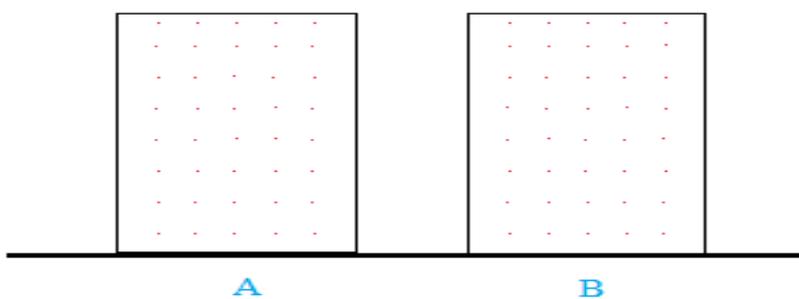
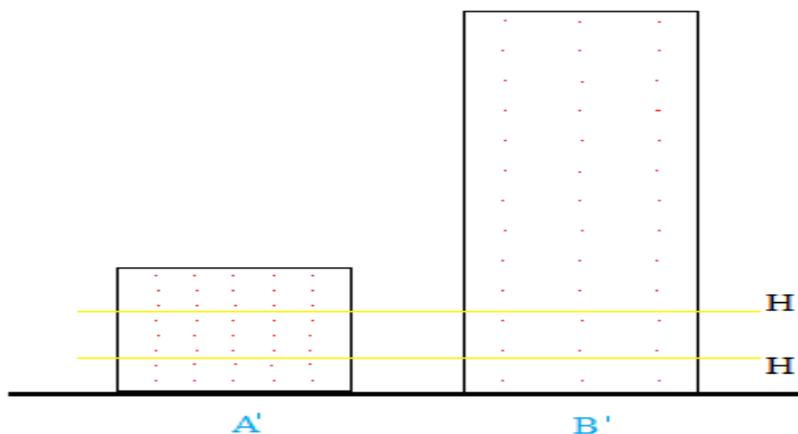


Figura 2-27. Variaciones de presión atmosférica relacionadas a procesos de enfriamiento y calentamiento.



Fuente: CUADRAT, José M. & PITA, María F. [1.997] Climatología. España: Ed. Cátedra.

A \longrightarrow A': enfriamiento; B \longrightarrow B': Calentamiento; Molécula de aire: ●

La columna B se ve sometida a un proceso de calentamiento. Si se mantiene la presión constante, la densidad del aire disminuye, para lo cual la columna se expande aumentando su volumen y pasando al estado representado por la columna B'. Con lo anterior se puede indicar que a presión constante, el aire es más denso cuando está frío y más liviano cuando está caliente. [Cuadrat & Pita, 1.997]

Además se puede indicar que la variación de la presión con la altura es mucho más atribuida con el aire frío (denso) que en el aire cálido (ligero). Esto se puede visualizar como al ascender una altura idéntica en las columnas A' y B' y situarnos en el nivel H de ambas, la disminución del peso de la columna de aire ha sido más brusca en A' que en B'. [Cuadrat & Pita, 1.997]

Si se realiza una elevación suficiente en altura sobre las dos columnas y se mide la presión en ambas para un mismo nivel, esta es más alta en el aire cálido que en el aire frío, de ahí que el aire cálido genere zonas de alta presión en altura y el aire frío zonas de baja presión. (La altitud debe ser por encima de 1 km del suelo) [Cuadrat & Pita, 1.997]

Puede resultar paradójico que el aire cálido, supuestamente menos denso, genere altas presiones en altura, en tanto que el aire frío, más denso, genere bajas presiones. La singularidad no es tal, se debe tener en cuenta que la relación entre aire denso-alta presión y aire ligero-baja presión solo se produce a igual temperatura, pero una vez que las temperaturas son diferentes la relación no tiene por qué verificarse. En nuestro caso las columnas A' y B' no tienen la misma temperatura, de ahí se puede concluir que en el nivel H la presión sea más alta en B' que en A' (ver fig. 2-27) [Cuadrat & Pita, 1.997]

La relación aire frío-aire denso y aire cálido-aire ligero solo se produce a igual presión, por eso esta relación solo se aplica para los mismos niveles atmosféricos y no para niveles diferentes. Esto permite entender, por ejemplo, que dentro de una columna de aire las capas superiores estén más frías que las inferiores y sin embargo, sean menos densas que estas, la razón es que la presión no es la misma en ambos niveles. Por eso cuando se habla de altas o bajas presiones y se realizan comparaciones entre ellas, se hace referencia siempre a un mismo nivel atmosférico, por ejemplo al nivel de la superficie, al de 1km, al de 6 km, etc. [Cuadrat & Pita, 1.997]

En conclusión la variación de la presión con la altura responde a los siguientes parámetros: la presión atmosférica disminuye con la altura de manera exponencial. Esta disminución depende de la temperatura del aire, siendo más intensa en el aire frío y más suave en el aire cálido, de forma tal que en las capas altas de la atmósfera el aire cálido genera presiones más altas que el aire frío. [Cuadrat & Pita, 1.997]

2.2.3.4. Variación Horizontal de la Presión Atmosférica

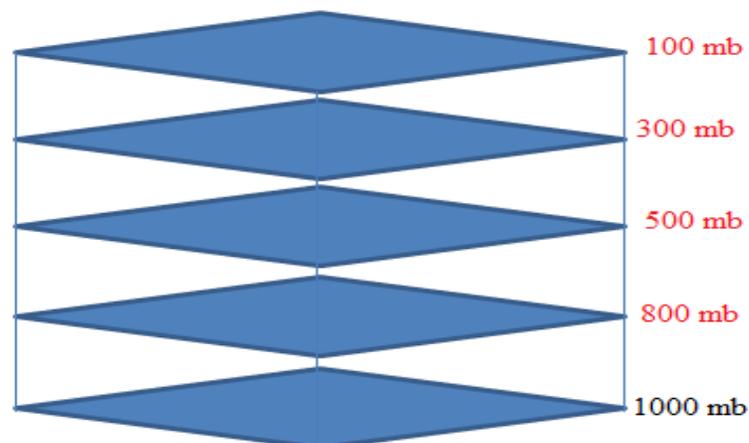
Cuadrat & Pita [1.997] indican que las variaciones horizontales se deben esencialmente a dos tipos de mecanismos: térmicos y dinámicos. Los térmicos determinan que en las capas de aire inmediatas a la superficie terrestre los procesos de calentamiento se acompañen de bajadas de presión y los procesos de enfriamiento de subidas, al contrario de lo que sucede en las capas altas de la atmósfera.

Los mecanismos dinámicos, estos son los asociados al movimiento del aire, dado que estos movimientos pueden conducir a agolpamientos de aire en ciertos puntos (aumentar la presión) o a vacíos de aire en otros (disminuir la presión). El resultado es que la distribución horizontal de las presiones en los distintos niveles de la atmosfera no es nunca homogénea, sino que dibuja zonas de altas y bajas presiones de gran trascendencia en climatología. [Cuadrat & Pita, 1.997]

2.2.3.5. El Campo de Presiones de la Atmósfera

Cuadrat & Pita [1.997] señalan que el conocimiento combinado de las variaciones horizontales y verticales de la presión permite conocer el campo de presiones en la atmósfera, el cual se define como el conjunto de todos los valores alcanzados por la presión en el interior de la atmósfera en un instante dado. La disposición adoptada por las principales superficies isobaras permite obtener una imagen muy aproximada de este campo. En el caso hipotético de que la atmósfera fuera un fluido en reposo, cualquier plano horizontal dentro de ella englobaría puntos con idéntica presión. Ello supone que no habría variaciones horizontales de presión, las superficies isobaras serian planos horizontales. Ver la siguiente representación:

Figura 2-28. Atmósfera en equilibrio estático



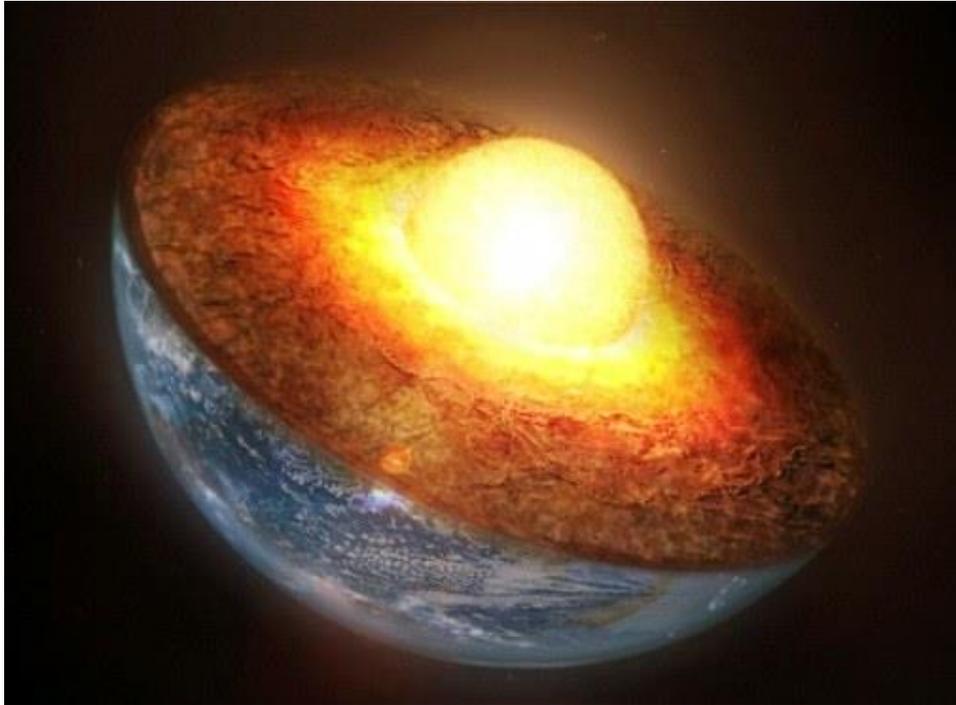
Fuente: Adaptada de Cuadrat & Pita [1.997]

Un fluido en equilibrio estático goza de que las temperaturas y densidad sean constantes para un mismo nivel, con lo cual la superficie isobara, además de ser horizontal, coincide con la superficie isoterma y la superficie isopicnica (superficie donde todos los puntos presentan la misma densidad). Tal fluido está en equilibrio estático, además el fluido está encerrado, si no se le somete a movimientos ni a cambios de temperatura, está en reposo. La atmósfera tiende a estar en equilibrio estático pero los aportes permanentes de energía que recibe y los desequilibrios energéticos que continuamente se crean en su interior le impiden alcanzarlo. De hecho las variaciones horizontales de la presión para un nivel fijo, el superficial u otro, son un fenómeno cotidiano, con lo cual en la atmósfera real las superficies isobaras no suelen ser nunca planas, sino curvas, presentando amplias ondulaciones. [Cuadrat & Pita, 1.997]

Finalmente Zambrano [2.003] menciona que la tropósfera contiene aproximadamente el 75% de los gases que componen la atmósfera y no es igual en las diferentes latitudes, la presión tomara valores máximos en el ecuador donde el espesor de la capa alcanza los 16 km, y mínima en las regiones polares donde este llega solo a 8 km.

2.2.4. El Interior Misterioso de la Tierra

Figura 2-29. El maravilloso planeta Tierra.



Recuperada de: <http://universitam.com/academicos/?p=9643#>

Como referente para presentar el tema del interior de la Tierra, Tarbuck & Lutgens [2.010] indican que la geología, del griego *GEO: tierra* y *LOGOS: discurso*, es “la ciencia que persigue la comprensión del planeta Tierra” p. 2. La geología se ha dividido en dos ramas que son la geología física y la geología histórica. La geología física estudia los materiales que componen la Tierra y permite comprender los diferentes procesos que actúan debajo y encima de la superficie terrestre. La geología histórica estudia el origen de la Tierra y su evolución a lo largo del tiempo. Finalmente Tarbuck & Lutgens [2.010] dicen que la geología requiere una comprensión y a su vez una aplicación del conocimiento y de los principios de la física, química y de la biología.

El planeta Tierra es un cuerpo dinámico, con diversas partes que interactúan y con una historia larga y compleja. Es cambiante ya que se dan los cambios de manera rápida y violenta, como por ejemplo una erupción volcánica. A la vez se dan lentos ya que no se aprecian durante toda una existencia humana. Así mismo se dan de tamaño pequeño o a una escala continental o global. [Tarbuck & Lutgens, 2.010]

2.2.4.1. Sismología

Tarback & Lutgens [2.010] señalan que la sismología es el estudio de las ondas sísmicas, y la palabra sismología tiene sus raíces griegas **seismos**: sacudida; **ology**: estudio de. Viene de los intentos realizados por los chinos, hace casi 2.000 años, para determinar la dirección desde la que se originaban dichas ondas. Además los sismógrafos son los instrumentos que detectan las ondas sísmicas. Los registros obtenidos con los sismógrafos se llaman sismogramas y proporcionan mucha información relativa al comportamiento de las ondas sísmicas. Las ondas sísmicas son una forma de energía de tipo elástica que se irradia en todas las direcciones desde el origen.

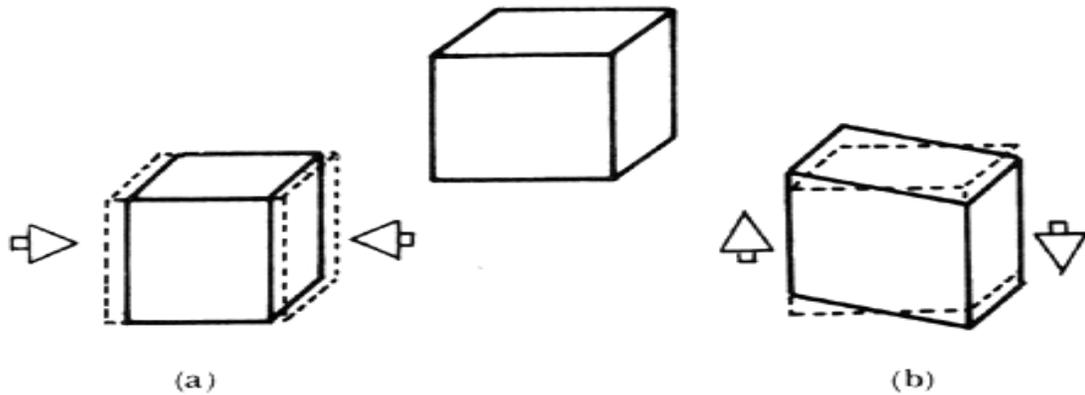
Los sismógrafos revelan que el deslizamiento de una masa de roca genera dos grupos principales de ondas sísmicas. Uno de esos grupos de ondas que viajan sobre la parte externa de la Tierra se conoce como ondas superficiales. Otras ondas viajan a través del interior de la Tierra y se denominan ondas de cuerpo. Las ondas de cuerpo se dividen a su vez en dos tipos, que se denominan ondas primarias o P y ondas secundarias o S.

2.2.4.2. Principios de Sismología

Nava [2.000] expone que si se aplica una fuerza sobre un material y luego se deja de aplicar la fuerza, y si el material recobra su forma original, entonces se dice que éste material es elástico (se comporta elásticamente); si no recobra su forma original, entonces el material es plástico (se comporta plásticamente). Un material totalmente plástico no puede almacenar energía elástica; por lo tanto, los sismos se deben al comportamiento elástico de la Tierra.

La forma en que una fuerza deforma un material depende sobre qué superficie actúa y con qué orientación se aplica la fuerza. La figura 2-30 (a) muestra el efecto de aplicar fuerzas perpendiculares a las caras de un cubo de material elástico; el cubo se deforma en compresión. Ahora si aplicamos al cubo fuerzas de la misma magnitud que las aplicadas anteriormente, pero ahora en dirección paralela a sus caras, como se muestra en la figura 2-30 (b), el resultado es completamente distinto: el cubo se deforma en cizalla o corte. [Nava, 2.000]

Figura 2-30. Cubo en compresión (a) y en cizalla (b).



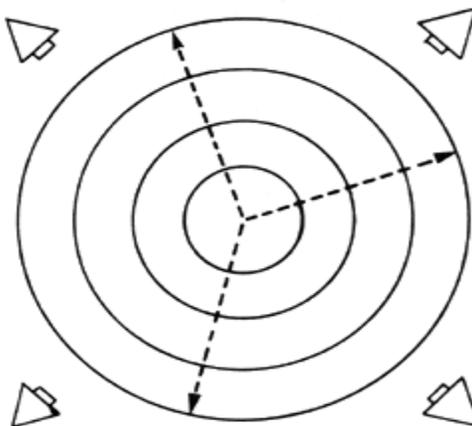
Recuperada de: Nava [2.000] Terremotos. México: Fondo de cultura económica.

2.2.4.3. Ondas Elásticas

Nava [2.000] indica que si una deformación viaja a través de un medio elástico esta se llama onda elástica y si el medio a través del cual se desplaza es la Tierra, se llama onda sísmica.

Si se trazan líneas (imaginarias) perpendiculares a los frentes de onda (indicadas por líneas punteadas en la figura), se está indicando la dirección en la que viajan las ondas. Estas líneas son llamadas *rayos*, y son muy útiles para describir las trayectorias de la energía sísmica. [Nava, 2.000]

Figura 2-31. Representación de la transmisión de ondas.



Recuperada de: Nava [2.000] Terremotos. México: Fondo de cultura económica.

Nava [2.000] menciona que las ondas sísmicas deforman el terreno a través del cual pasan, lo cual indica que pueden hacer trabajo, y por lo tanto, corresponde a energía elástica que se

desplaza. En el caso de ondas generadas por explosiones, la energía es el resultado de las reacciones químicas o nucleares que causaron la explosión; en el caso de ondas generadas por sismos, es la que estaba almacenada como energía de deformación en las rocas.

La teoría de la elasticidad expone que son posibles dos tipos de ondas elásticas que viajan a través de la Tierra, y que son conocidas como ondas de cuerpo u ondas internas, las cuales pueden ser compresionales o de cizalla. [Nava, 2.000]

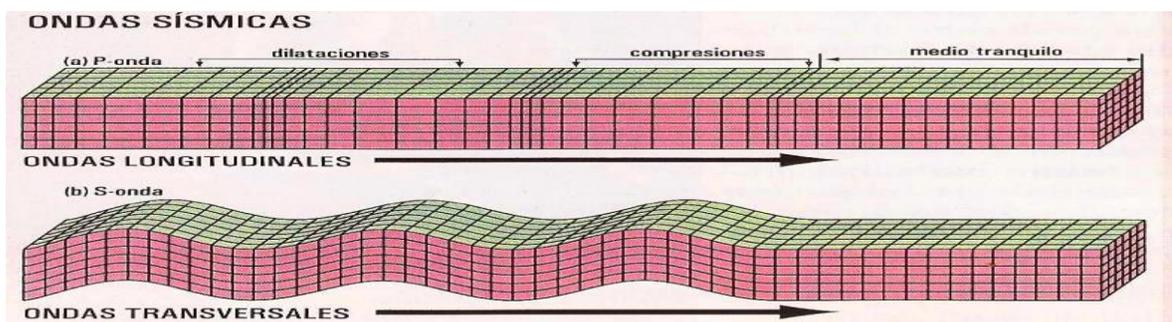
Nava [2.000] establece las Ondas **P** como las ondas compresionales que son las que se transmiten cuando las partículas del medio se desplazan en la dirección de propagación, produciendo compresiones y dilataciones en el medio. Además Espíndola [2.000] menciona que estas mismas ondas se conocen también como Ondas longitudinales y por llegar de primeras se conocen como ondas **P** (primus)

Las ondas **P** son la más veloz de todas las ondas sísmicas (más de 5 km/s en las rocas graníticas cercanas a la superficie, y alcanza más de 11 km/s en el interior de la Tierra) y, por lo tanto, es la primera en llegar a cualquier punto, en ser sentida y en ser registrada en los sismogramas, por lo que se llamó onda Primera y de allí el nombre de **P** (en inglés se asocia también con push que significa empujón o empujar). [Nava, 2.000]

Así mismo Nava [2.000] menciona que las ondas **S**, son las ondas de corte o de cizalla, son aquellas en las cuales las partículas del medio se desplazan perpendicularmente a la dirección de propagación, por lo que están asociadas con deformaciones del terreno de tipo cizalla Espíndola [2.000] indica que estas ondas se conocen también como ondas transversales, y llegan después de las **P** por eso son conocidas como ondas **S** (secundus).

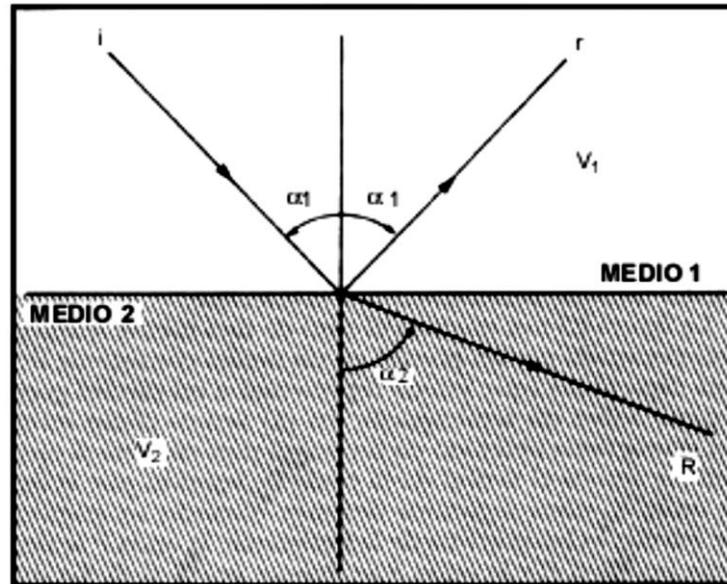
La onda **S** es más lenta que la onda **P**. En una amplia gama de rocas su velocidad, V_s , es aproximadamente igual a la velocidad de la onda **P**, V_p , dividida entre $\sqrt{3}$ (esto es conocido como condición de Poisson). Como la onda **S** es la segunda en llegar se le llamó Secundaria, y de allí su nombre (en inglés se asocia con shake, que significa sacudir). Como los líquidos no pueden soportar esfuerzos cortantes, las ondas **S** no se propagan a través de ellos [Nava, 2.000].

Figura 2-32. Ilustración de las ondas P y S



Ondas Convertidas. Cuando una onda de cuerpo que viaja a través de un medio incide sobre una interfase (una superficie) que lo separa de otro medio con distintas propiedades elásticas, como se muestra en la figura 2-33, parte de la energía se transmite al segundo medio y parte se refleja. [Nava, 2.000]

Figura 2-33. Representación de ondas reflejadas y refractadas.



Fuente: NAVA, Alejandro. [2.000] Terremotos. México: Fondo de cultura económica.

Tener en cuenta que ***i***: rayo incidente; ***r***: rayo reflejado; ***R***: rayo refractado

Nava [2.000] menciona que si se tiene una línea perpendicular a la interfase (la normal), y se miden los ángulos α_1 , α_2 que forman los distintos rayos con ella, se puede ver que están relacionados según la siguiente fórmula, conocida como ley de Snell:

$$\sin \alpha_1 / \sin \alpha_2 = V_1 / V_2$$

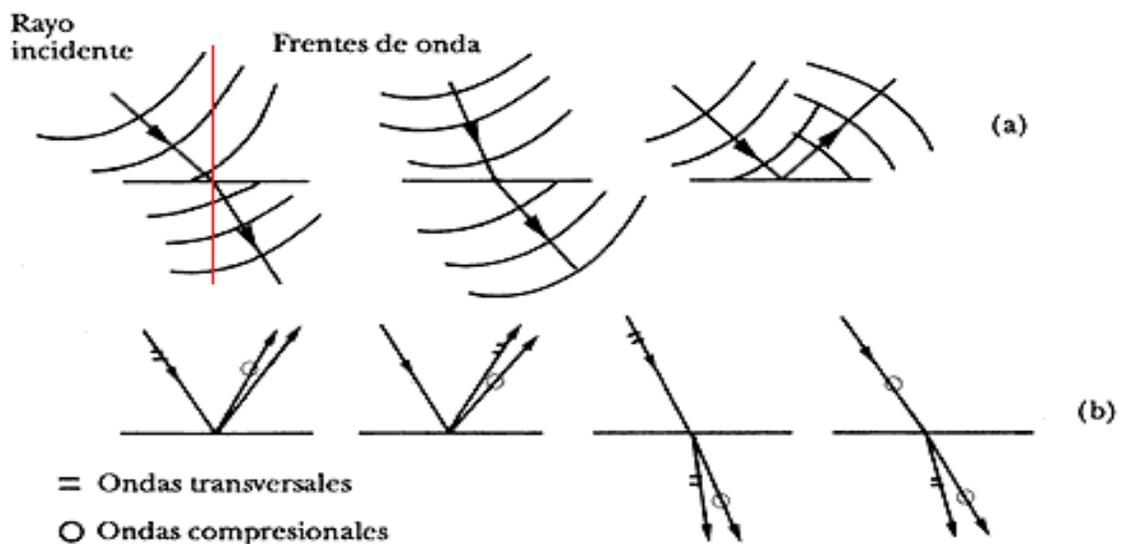
Alonso & Acosta [1.984] explican que la velocidad de propagación de un movimiento ondulatorio depende de las características del medio y de la naturaleza de la perturbación. Así mismo las ondas cuando se propagan por el medio con una velocidad en una dirección determinada están establecidas por la distancia que avanza la perturbación en una unidad de tiempo. Si el medio es homogéneo, es decir si posee las mismas propiedades en todas sus partes, la velocidad de propagación es la misma en todos sus puntos, y si el medio es isótropo, igual dirección, la velocidad es constante en todas las direcciones del medio.

V_1 es la velocidad (**P** o **S**) del rayo en el primer medio y V_2 su velocidad en el segundo medio. La aplicación de la ley de Snell nos permite saber cómo se comportan los rayos sísmicos cuando encuentran alguna de las discontinuidades que presenta la Tierra. [Nava, 2.000]

Nava [2.000] explica que la ley de Snell establece que si un rayo pasa de un medio de menor velocidad a otro de mayor velocidad se aleja de la normal, mientras que si pasa de un medio de mayor velocidad a otro de menor velocidad se acercará a ella. En particular, cuando $\sin \alpha_2=1$ el ángulo de refracción es de 90° , y el rayo, llamado críticamente refractado viaja por el medio inferior, paralelamente a la interfase.

Espíndola [2.000] señala que las ondas sísmicas se comportan de manera similar a las ondas luminosas pues son fenómenos del mismo tipo. Se conoce que las ondas luminosas sufren reflexiones y refracciones cuando inciden en un medio con diferentes propiedades, este mismo efecto se observa en las ondas sísmicas. Si se representa por rayos la propagación de las ondas luminosas, los fenómenos de reflexión y refracción ocurren como se ilustra en la figura 2-34 parte (a)

Figura 2-34 Esquema de ondas transversales y compresionales



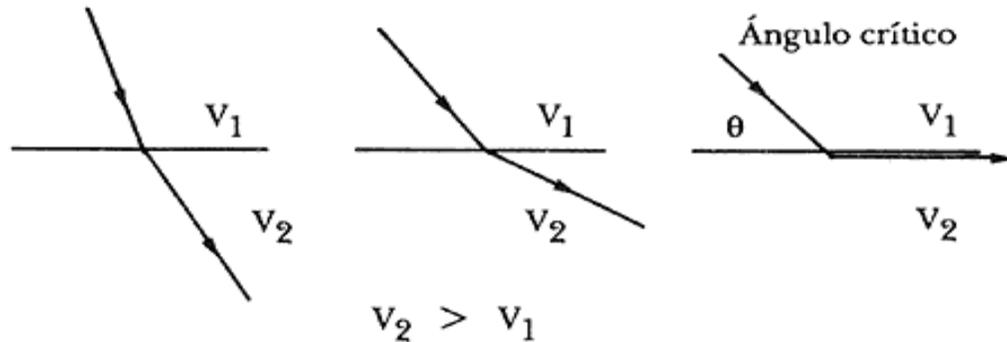
Fuente: ESPÍNDOLA, Juan M. [2.000] El tercer planeta. México: Fondo de cultura económica.

En el caso de las ondas sísmicas el fenómeno es más complejo, ya que la incidencia de ondas **P** y **S** produce ondas **P** y **S** reflejadas y refractadas. Esta situación se aprecia en la figura 2-34 parte (b)

Además Espíndola [2.000] menciona que si una onda incide sobre una superficie en que las ondas tienen mayor velocidad es refractada hacia el exterior. Notemos que si el ángulo con que la onda incide va creciendo el rayo refractado se va acercando a la frontera entre los dos medios. Existe un ángulo en el que el rayo viaja paralelo a la frontera y aparentemente a lo largo

de ella (Figura 2-35). Al rayo que viaja en esa dirección se le llama rayo críticamente refractado y viaja con la velocidad del medio inferior como Navas [2.000] lo menciona.

Figura 2-35. Refracción de una onda en ángulo crítico.



Fuente: ESPÍNDOLA, Juan M. [2.000] El tercer planeta. México: Fondo de cultura económica.

Espíndola [2.000] indica también que cuando la velocidad de la onda es mayor en el medio en el que incide un rayo que la del medio en que viaja, el rayo se aparta de la perpendicular, y viceversa; cuando la velocidad es menor se aproxima a esta. Por eso las ondas **P** y **S** refractadas no siguen trayectorias iguales puesto que en un medio dado ambas ondas poseen diferentes velocidades. Además como la tierra es rígida, la velocidad de las ondas sísmicas aumenta continuamente hacia el interior, de manera que el efecto de la refracción hace que los rayos sigan trayectorias curvas.

Tarback & Lutgens [2.010] mencionan que los sólidos, los líquidos y los gases se oponen a un cambio de volumen cuando son comprimidos y recuperan elásticamente su forma cuando cesa la fuerza. Por consiguiente, las ondas **P**, que son ondas compresivas, pueden atravesar todos esos materiales. Por otro lado, las ondas **S** "sacuden" las partículas en ángulo recto con respecto a la dirección en la que viajan.

Las ondas **P** cambian transitoriamente el volumen del material por el que viajan comprimiéndolo y expandiéndolo alternativamente, las ondas **S** cambian transitoriamente la forma del material que las transmite. Dado que los fluidos (gases y líquidos) no responden elásticamente a cambios de forma, los gases y los líquidos no transmitirán las ondas **S**. [Tarback & Lutgens, 2.010]

Además Tarback & Lutgens [2.010] mencionan que la velocidad de las ondas **P** a través del granito, en el interior de la corteza es de unos 6 km/s. Bajo las mismas condiciones, las ondas **S** viajan a 3,6 km/s. Diferencias de densidad y por las propiedades elásticas de las rocas influyen mucho en las velocidades de las ondas. En general, en cualquier material sólido, las ondas **P** viajan aproximadamente 1,7 veces más de prisa que las ondas **S**.

Por otro lado las ondas **S** tienen una amplitud ligeramente mayor que las ondas **P** y por lo tanto son portadoras de mayor energía pero, cuanto más dure la corrida, la diferencia será mayor en los momentos de llegada a la línea final (estación sísmica). Por consiguiente, cuanto mayor sea el intervalo medido en un sismograma entre la llegada de la onda **P** y la primera onda **S**, la distancia será mayor al punto de origen del terremoto. [Tarbuck & Lutgens 2.010]

2.2.4.4. Características de las Ondas Sísmicas

Monroe & Wicander [1.999] indican que cualquier alteración sobre la superficie terrestre puede generar ondas sísmicas pero si son generadas por grandes terremotos, el vulcanismo explosivo, los impactos de los asteroides y las explosiones nucleares pueden viajar por completo a través de la Tierra. Además la velocidad de la onda sísmica es controlada en parte por la elasticidad, las rocas frías tienen mayor elasticidad, por lo tanto transmiten las ondas sísmicas más rápido que las rocas calientes.

Finalmente Tarbuck & Lutgens [2.010] señalan que para examinar la composición y estructura de la Tierra, se debe estudiar algunas de las propiedades básicas de la transmisión o propagación de ondas. La energía sísmica viaja desde su origen en todas las direcciones en forma de ondas.

Resumiendo todo lo anterior se puede señalar que:

1. La velocidad de las ondas sísmicas depende de la densidad y la elasticidad de los materiales que atraviesan. Las ondas sísmicas viajan más rápido en materiales rígidos, que retornan elásticamente a sus formas originales cuando cesa el esfuerzo causado por la onda sísmica.
2. Dentro de una capa determinada, la velocidad de las ondas sísmicas aumenta generalmente con la profundidad, porque la presión aumenta y comprime la roca transformándola en un material elástico más compacto.
3. Las ondas **P** (compresivas), vibran hacia atrás y hacia adelante en el mismo plano que su dirección de movimiento, son capaces de propagarse a través de líquidos y sólidos, estos materiales se comportan elásticamente, es decir se oponen a un cambio de volumen.
4. Las ondas **S** (cizalla), vibran en ángulo de 90 grados con respecto a su dirección de desplazamiento, no pueden propagarse a través de líquidos, porque estos no se oponen a la cizalla, es decir cuando los líquidos son sometidos a fuerzas que actúan para cambiar sus formas, fluyen en sólidos.
5. En todos los materiales las ondas **P** viajan más deprisa que las ondas **S**.
6. Cuando las ondas sísmicas pasan de un material a otro, la trayectoria de la onda se refracta, es decir que la onda no se desplace perpendicularmente al límite entre los

medios. Además, una discontinuidad, que es el límite entre dos materiales diferentes, refleja algo de la energía.

Por lo tanto, dependiendo de la naturaleza de las capas a través de las cuales pasan las ondas sísmicas, van rápidas o lentas y pueden reflejarse o refractarse. Estos cambios medibles en los movimientos de las ondas sísmicas permiten a los sismólogos sondear el interior de la Tierra. [Tarbuck & Lutgens, 2.010]

2.2.4.5. El Interior de la Tierra

Tarbuck & Lutgens [2.010] mencionan que la actividad volcánica se considera una ventana al interior de la Tierra, permitiendo una mirada a los 200 km más profundos del planeta. Así mismo indican que los geólogos han aprendido sobre la composición y estructura de la Tierra a través de modelos de computador, por medio de experimentos de laboratorio a altas presiones y de muestras del sistema solar (meteoritos) que chocan con la Tierra. Además se han obtenido pistas de las condiciones físicas reinantes en el interior de la Tierra a través del estudio de las ondas sísmicas generadas por los terremotos y las explosiones nucleares. Cuando dichas ondas atraviesan la Tierra, llevan información a la superficie sobre los materiales que atravesaron. Cuando se analizan los registros sísmicos proporcionan una imagen como si fuera los “rayos X” del interior del planeta Tierra.

2.2.4.6. Sondeo del Interior de la Tierra

Como lo expresa Monroe & Wicander [1.999] “el interior de la Tierra ha sido misterioso e inaccesible”. De lo que se sabe del interior de la Tierra procede en gran parte del estudio de las ondas sísmicas que cruzan el planeta. La técnica consiste en la determinación precisa del tiempo que las ondas **P** (compresivas) y **S** (cizalla) necesitan para desplazarse desde un terremoto o explosión nuclear hasta una estación sismográfica. Dado que el tiempo necesario para que las ondas **P** y **S** viajen a través de la Tierra depende de las propiedades de los materiales que cruzan, los sismólogos buscan variaciones relacionadas con el tiempo de desplazamiento que no puedan explicarse únicamente por diferencias en las distancias recorridas. Esas variaciones corresponden a cambios en las propiedades de los materiales atravesados. [Tarbuck & Lutgens, 2.010]

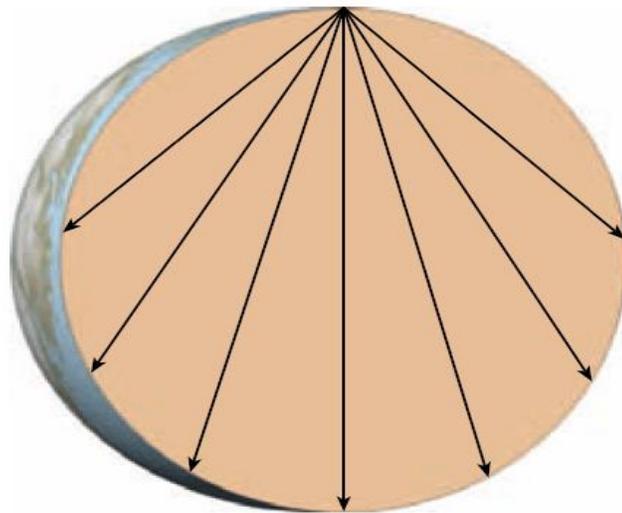
Tarbuck & Lutgens [2.010] precisan que para la obtención de tiempos de desplazamiento razonables, los sismólogos deben establecer la localización y el momento preciso de creación de un terremoto, pero esto es un problema ya que estos fenómenos naturales ocurren de manera inesperada y en zonas remotas. Por el contrario, el tiempo y la localización exactos de un ensayo

nuclear siempre se conocen con exactitud. Los sismólogos de la primera mitad del siglo XX fueron capaces de utilizar las ondas sísmicas generadas por terremotos para detectar las principales capas de la Tierra. Solo a principios de los años 60, en el desarrollo de pruebas nucleares, se desplegaron redes de centenares de sismógrafos sensibles, cuando se estableció con certeza la estructura interna de la Tierra.

2.2.4.7. Ondas Sísmicas y Estructura de la Tierra

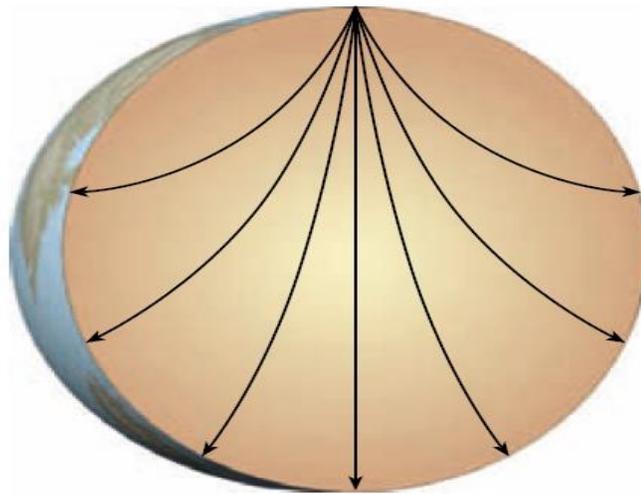
Tarbut & Lutgens [2.010] señalan que si la Tierra fuera un cuerpo perfectamente homogéneo, las ondas sísmicas se propagarían a través del planeta en todas las direcciones, y viajarían en línea recta a una velocidad constante, como se aprecia en la figura 2-36. Pero esto no es cierto en el caso de la Tierra. De hecho, ocurre que las ondas sísmicas que llegan a los sismógrafos localizados en los puntos más alejados de un terremoto viajan a velocidades medias mayores que las que se registran en localizaciones más próximas al acontecimiento. Este incremento general de la velocidad con la profundidad es una consecuencia del aumento de presión, que potencia las propiedades elásticas de las rocas enterradas interiormente. Como consecuencia, los caminos seguidos por los rayos sísmicos a través de la Tierra se refractan de la manera mostrada en la Figura 2-38

Figura 2-36. Modelo de un planeta homogéneo con el desplazamiento de las ondas sísmicas.



Fuente: TARBUCK, Edward J. LUTGENS, Frederick K. [2.010] Ciencias de la tierra, una introducción a la geología física. España: Prentice Hall

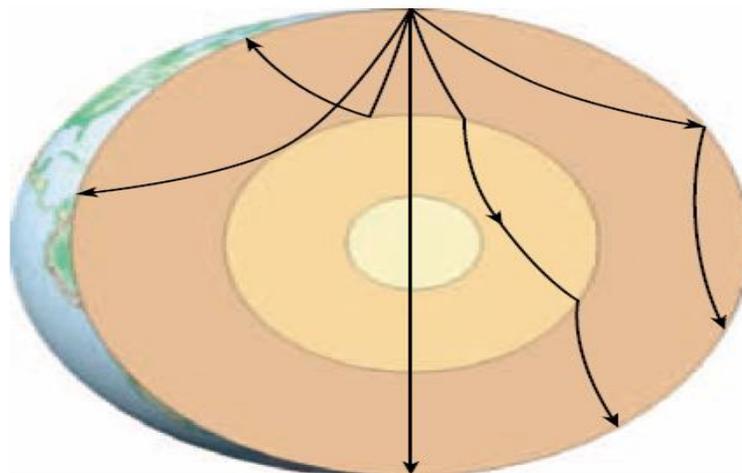
Fig. 2-37. Modelo de viaje de las ondas sísmicas en un planeta con aumento de velocidad por la profundidad



Fuente: TARBUCK, Edward J. LUTGENS, Frederick K. [2.010] Ciencias de la tierra, una introducción a la geología física. España: Prentice Hall

Tar buck & Lutgens [2.010] manifiestan que cuando se desarrollaron sismógrafos más sensibles, resultó más evidente que, además de cambios graduales en las velocidades de las ondas sísmicas, también se producen cambios de velocidad bastante abruptos a profundidades concretas. Dado que estas discontinuidades se detectaron en todo el mundo, los sismólogos llegaron a la conclusión de que la Tierra debía estar compuesta por distintas capas con propiedades mecánicas o composicionales, o ambas cosas.

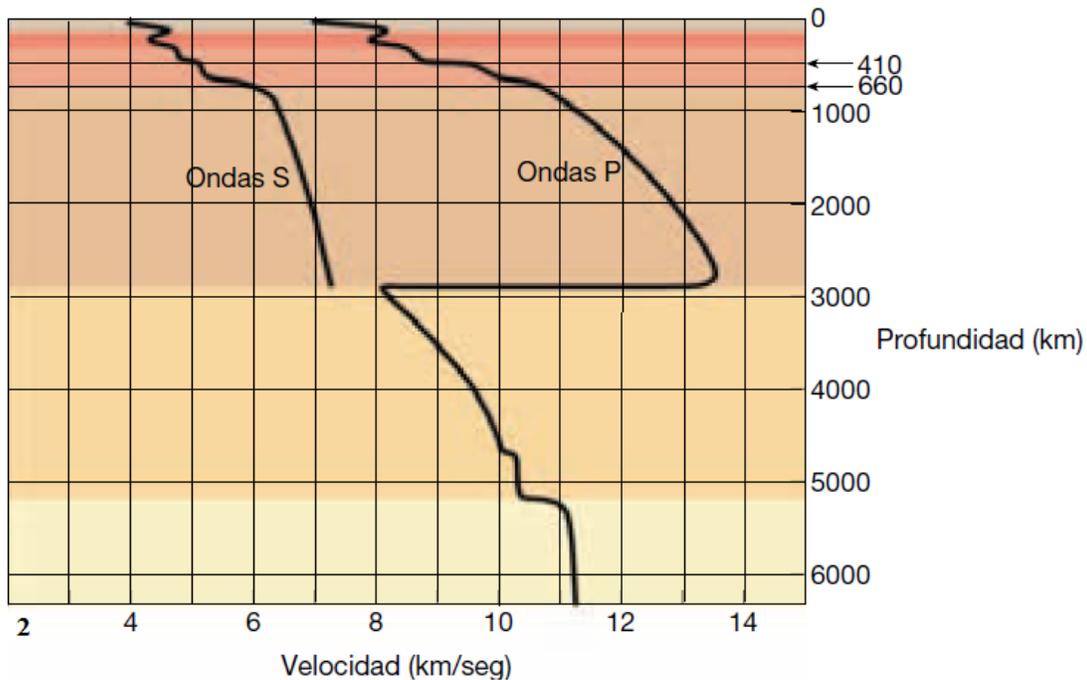
Figura 2-38. Modelo real de desplazamiento de ondas sísmicas en el planeta



Fuente: TARBUCK, Edward J. LUTGENS, Frederick K. [2.010] Ciencias de la tierra, una introducción a la geología física. España: Prentice Hall

Después de todos los estudios de geofísica correspondientes para estudiar el interior de la Tierra se llegó a modelar el planeta, resultando la siguiente gráfica de velocidad de las ondas **P** y **S** con respecto a la profundidad:

Figura 2-39. Perfil de las ondas P y S en el interior del planeta tierra



Recuperada de Tarbuck & Lutgens [2.010]. Modificada para cuestiones didácticas.

2.2.4.8. Capas Definidas por su Composición

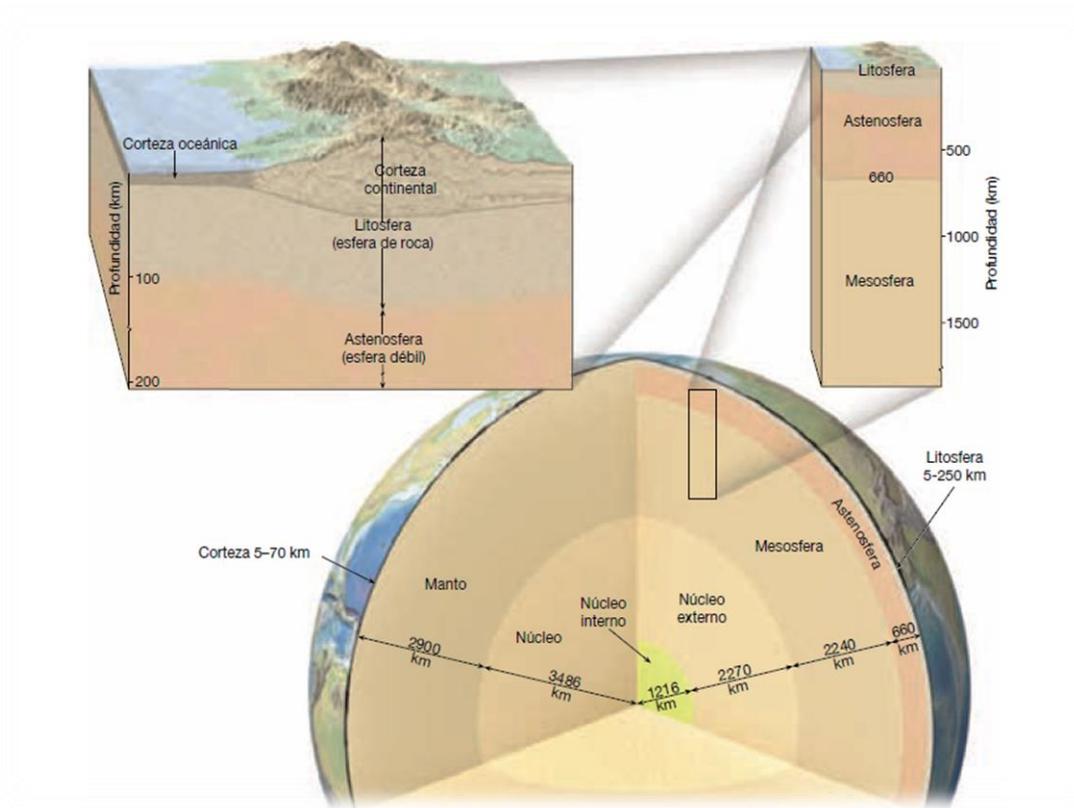
Tarbuck & Lutgens [2.010] revelan que la separación en capas de distinta composición se produjo probablemente por la estratificación por densidades que tuvo lugar durante el período de fusión parcial de las primeras etapas de la historia de la Tierra. Durante este período, los elementos más pesados, principalmente el hierro y el níquel, se fueron hundiendo a medida que los componentes rocosos más ligeros flotaban hacia arriba. Esta segregación del material sigue ocurriendo todavía, pero a un ritmo mucho más reducida. Debido a esta diferenciación química, el interior de la Tierra no es homogéneo. Consiste en tres regiones principales que tienen composiciones químicas notablemente diferentes.

Las principales capas que componen la Tierra son [Tarbuck & Lutgens, 2.010]:

- **La corteza**, capa externa comparativamente fina cuyo grosor oscila entre 3 kilómetros en las cordilleras oceánicas, y 70 kilómetros, en algunos cinturones montañosos como los Andes y el Himalaya.

- **El manto**, una capa de roca sólida (rica en sílice) que se extiende hasta una profundidad de unos 2.900 kilómetros.
- **El núcleo**, una esfera rica en hierro con un radio de 3.486 kilómetros.

Figura 2-40. Estructura interna de la Tierra



Recuperada de: TARBUCK, Edward J. LUTGENS, Frederick K. [2.010] Ciencias de la Tierra, una introducción a la geología física. España: Prentice Hall

2.2.4.9. La Corteza

Espíndola [2.000] menciona que en términos de masa, la corteza y sus vecinos externos, la hidrósfera y la atmósfera, constituyen menos del 0,5% de la masa total del planeta.

Tarbutck & Lutgens [2.010] indican que la corteza de la Tierra tiene un espesor medio inferior a 20 kilómetros, lo que la convierte en la más fina de las divisiones terrestres (Figura 2-40). A lo largo de esta delgada capa, parecida a la cáscara de un huevo, existen grandes variaciones de espesor. Las rocas de la corteza en el interior estable de los continentes tienen un espesor de 35 a 40 kilómetros. Sin embargo, en unas pocas regiones montañosas excepcionalmente destacadas, la corteza alcanza su mayor espesor, superando los 70 kilómetros. La corteza

oceánica es mucho más delgada, entre 3 y 15 kilómetros de grosor y un grosor medio de 7 kilómetros. Además, las rocas de la corteza de las cuencas oceánicas profundas son diferentes, desde el punto de vista de su composición, de sus colegas continentales.

Tarbuck & Lutgens [2.010] indican que las rocas continentales tienen una densidad media de alrededor de unos $2,7 \text{ g/cm}^3$, y se han descubierto algunas que superan los 4.000 millones de años de antigüedad. A partir de los estudios sísmicos y de las observaciones directas, se calcula que la composición media de las rocas continentales es comparable a la de las rocas ígneas félsicas de tipo granodiorita. Como esta última, la corteza continental es rica en los elementos sodio, potasio y silicio. Aunque son abundantes numerosas intrusiones graníticas y rocas metamórficas químicamente equivalentes, en los continentes se encuentran también con frecuencia grandes afloramientos de rocas basálticas y Andesíticas. Además, se cree que la corteza inferior tiene una composición similar al basalto.

Además Tarbuck & Lutgens [2.010] mencionan que las rocas de la corteza oceánica son más jóvenes (180 millones de años o menos) y más densas (unos $3,0 \text{ g/cm}^3$) que las rocas continentales. Las cuencas oceánicas profundas reposan debajo de 4 kilómetros de agua de mar, así como de centenares de metros de sedimento. Por tanto, hace poco, los geólogos tenían que depender de pruebas indirectas (como algunas unidades geológicas que se pensaba que eran restos de corteza oceánica que cabalgaban hacia tierra) para calcular la composición de esta región inaccesible. Con el desarrollo de barcos oceanográficos, se hizo posible recuperar muestras de sondeos del suelo oceánico profundo. Como se había previsto, las muestras obtenidas estaban compuestas fundamentalmente por basalto. Se debe tener en cuenta que las erupciones volcánicas de lavas basálticas han generado muchas islas, como la cadena de Hawái, localizadas dentro de las cuencas oceánicas profundas.

2.2.4.10. El Manto

Espíndola [2.000] menciona que el término *manto* proviene del vocablo en alemán "mantel" dado por Wiechert, Emil Johann. Tarbuck & Lutgens [2.010] indican que el 82 %, aproximadamente, del volumen terrestre está contenido dentro del manto, una capa gruesa de casi 2.900 kilómetros de espesor formada por rocas silicatadas que se extiende desde la base de la corteza (*Moho*) hasta el núcleo externo líquido. Nuestro conocimiento de la composición del Manto procede de datos experimentales y del examen de material traído a la superficie por la actividad volcánica. En concreto, se piensa a menudo que las rocas que constituyen las chimeneas de Kimberlita, en las cuales se encuentran a veces diamantes, tienen su origen en profundidades próximas a los 200 kilómetros, muy en el interior del manto. Los depósitos de Kimberlita están compuestos por peridotitas, rocas que contienen hierro y silicatos ricos en magnesio, fundamentalmente Olivino y Piroxeno, junto con cantidades menores de Granate. Además, dado que las ondas S viajan fácilmente a través del manto, sabemos que este último se

comporta como un sólido elástico. Por tanto, el manto se describe como una capa rocosa sólida, cuya porción superior tiene la composición de la roca Ultramáfica peridotita.

Tarback & Lutgens [2.010] señalan que el manto se divide en Mesósfera o Manto inferior, que se extiende desde el límite núcleo-manto hasta una profundidad de 660 kilómetros; y Astenosfera o Manto superior, que continúa hasta la base de la corteza. Además, se han identificado otras subdivisiones. A una profundidad de unos 410 kilómetros se produce un aumento relativamente abrupto de la velocidad sísmica (Figura 2-39). Mientras el límite corteza-manto representa un cambio de composición, la zona de aumento de velocidad sísmica al nivel de los 410 kilómetros se debe a un cambio de fase. (Se produce un cambio de fase cuando la estructura cristalina de un mineral se modifica en respuesta a cambios de la temperatura o de la presión, o ambas cosas.) Los estudios de laboratorio demuestran que el mineral rico en magnesio olivino (**MgSiO₄**), que es uno de los constituyentes principales de la peridotita, se transformará en el mineral de alta presión más compacto Espinela, a las presiones experimentadas a esta profundidad. Este cambio a una forma cristalina más densa explica el aumento observado de las velocidades sísmicas.

Tarback & Lutgens [2.010] señalan que se ha detectado otro límite dentro del manto como consecuencia de variaciones en la velocidad sísmica a una profundidad de 660 kilómetros (Figura 2-39). A esa profundidad, se cree que el mineral Espinela experimenta una transformación al mineral Perovskita (**Mg, Fe**) **SiO₃**. Se cree que la Perovskita domina en el manto inferior, por lo que quizá sea el mineral más abundante de la Tierra.

Además Tarback & Lutgens [2.010] indican que a los 200 kilómetros aproximadamente, inferiores del Manto, existe una región importante conocida como capa D". Recientemente, se ha publicado que las ondas sísmicas que atraviesan algunas partes de la capa D" experimentan un notable descenso en las velocidades de las ondas P. Hasta ahora, la mejor explicación para este fenómeno es que la capa inferior del Manto esté parcialmente fundida al menos en algunos lugares.

Tarback & Lutgens [2.010] mencionan que si existen zonas de roca parcialmente fundida son importantes, porque serían capaces de transportar calor desde el núcleo al manto inferior de una manera mucho más eficaz que la roca sólida. Un ritmo elevado de flujo de calor haría, a su vez, que el Manto sólido localizado por encima de esas zonas parcialmente fundidas se calentara lo bastante como para adquirir flotabilidad y ascender lentamente hacia la superficie. Estas plumas ascendentes de roca súper caliente pueden ser la fuente de la actividad volcánica asociada con los puntos calientes, como los encontrados en Hawái e Islandia. Si estas observaciones son exactas, una parte de la actividad volcánica que se ve en la superficie es una manifestación de procesos que se producen a 2.900 kilómetros por debajo.

2.2.4.11. El Núcleo

Tarback & Lutgens [2.010] indican que el Núcleo es más grande que el planeta Marte. El Núcleo es la esfera central densa de la Tierra con un radio de 3.486 kilómetros. Extendiéndose desde el borde inferior del Manto hasta el centro de la Tierra, el Núcleo constituye alrededor de una sexta parte del volumen de la Tierra y casi una tercera parte de su masa total. La presión en el centro es millones de veces mayor que la presión del aire en la superficie, y las temperaturas pueden superar los 6.700 °C. A medida que se obtenían datos sísmicos más precisos, se descubría que el Núcleo consiste en una capa externa líquida de unos 2.270 kilómetros de grosor y una esfera interna sólida con un radio de 1.216 kilómetros.

Densidad y Composición del Núcleo

Tarback & Lutgens [2.010] señalan que una de las características más interesantes del Núcleo es su gran densidad. La densidad media es de aproximadamente 11 g/cm³, y en el centro de la Tierra se aproxima a 14 veces la densidad del agua. Ni siquiera bajo las presiones extremas reinantes a estas profundidades, los silicatos comunes en la corteza (con densidades superficiales de 2,6 a 3,5 g/cm³) podrían estar lo bastante compactados como para ser responsables de la densidad calculada para el Núcleo. Por consiguiente, se ha intentado determinar qué material podría explicar esta propiedad.

Tarback & Lutgens [2.010] dicen que los meteoritos proporcionan pistas sobre la composición interna de la Tierra. Dado que los meteoritos son parte del Sistema Solar, se sospecha que son muestras representativas del material a partir del cual se desarrolló la Tierra en su origen. Su composición oscila entre meteoritos de tipo metálico, fundamentalmente compuestos por hierro y cantidades menores de níquel, y meteoritos rocosos, compuestos por sustancias rocosas que se parecen mucho a las peridotitas. Dado que la corteza y el manto de la Tierra contienen un porcentaje mucho menor de hierro del que se encuentra en los restos del Sistema solar, los geólogos concluyeron que el interior de la Tierra debe estar enriquecido en este metal pesado. Además, el hierro es, con diferencia, la sustancia más abundante del Sistema Solar que posee las propiedades sísmicas y una densidad que recuerda la medida para el núcleo. Cálculos actuales sugieren que el núcleo es fundamentalmente hierro con un 5 a un 10 por ciento de níquel y menores cantidades de elementos más ligeros, entre ellos, quizás, azufre y oxígeno.

Origen del Núcleo

Tarback & Lutgens [2.010] explican que el núcleo se pudo haber formado al principio de la historia de la Tierra a partir de lo que en origen era un cuerpo relativamente homogéneo:

Durante el período de acreción, la Tierra entera se calentó por la energía liberada por las colisiones de partículas que caían sobre ella. Algo después, en este período de crecimiento, la temperatura interna de la Tierra era lo bastante elevada como para fundir y movilizar el material acumulado. Gotas de materiales pesados ricos en hierro se reunieron y se hundieron hacia el centro. A la vez, las sustancias más ligeras quizá flotaron hacia la superficie para generar la corteza. En poco tiempo, hablando desde un punto de vista geológico, la Tierra adoptó una configuración en capas, no significativamente diferente de la que encontramos en la actualidad. p. 353

Además Tarback & Lutgens [2.010] mencionan que en la etapa de formación del Núcleo, era probablemente líquido. Esta aleación de hierro líquido estaba en un estado de mezcla pujante. Sin embargo, cuando la Tierra empezó a enfriarse, el hierro del Núcleo empezó a cristalizar y empezó a formarse el Núcleo interno. A medida que el núcleo sigue enfriándose, el Núcleo interno debe seguir creciendo a expensas del Núcleo externo.

La explicación sobre el campo magnético de la Tierra aceptada de manera más generalizada exige que el Núcleo esté compuesto por un material conductor de la electricidad, como el hierro, y que sea móvil. El modelo del Núcleo de la Tierra que se estableció en función de los datos sismológicos satisface esas condiciones. [Tarback & Lutgens, 2.010]

Una consecuencia descubierta del campo magnético de la Tierra es que afecta la rotación del Núcleo interno sólido. Los cálculos actuales indican que el núcleo interno gira en dirección Oeste a Este y aproximadamente un grado al año más deprisa que la superficie de la Tierra. Por tanto, el Núcleo hace una rotación extraordinaria aproximadamente cada 400 años. Además, el eje de rotación del Núcleo interno está desalineado unos 10° con respecto a los polos rotacionales de la Tierra. [Tarback & Lutgens, 2.010]

2.2.4.12. Capas Definidas por sus Propiedades Físicas

Tarback & Lutgens [2.010] indican que el interior de la Tierra se caracteriza por un aumento gradual de la temperatura, la presión y la densidad con la profundidad. Los cálculos sitúan la temperatura a una profundidad de 100 kilómetros entre los 1.200 °C y los 1.400 °C, mientras que la temperatura del centro de la Tierra supera los 6.700 °C. Está claro que el interior de la

Tierra ha retenido gran parte de la energía adquirida durante los años en que se formó, a pesar de que el calor fluye de manera continua hacia la superficie, donde se pierde en el espacio.

Tarbuck & Lutgens [2.010] mencionan que el aumento de la presión con la profundidad provoca un incremento correspondiente de la densidad de las rocas. El aumento gradual de la temperatura y la presión con la profundidad afecta las propiedades físicas y, por tanto, el comportamiento mecánico de los materiales terrestres. Cuando se calienta una sustancia, sus enlaces químicos se debilitan y su resistencia mecánica (resistencia a la deformación) se reduce. Si la temperatura supera el punto de fusión de un material terrestre, los enlaces químicos del material se rompen y se produce la fusión. Si la temperatura fuera el único factor que determina si una sustancia se funde, nuestro planeta sería una esfera fundida cubierta por una corteza externa delgada y sólida. Sin embargo, la presión también aumenta con la profundidad y tiende a incrementar la resistencia de las rocas. Además, puesto que la fusión va acompañada de un aumento del volumen, se produce a temperaturas más elevadas en profundidad debido a la mayor presión de confinamiento. Por tanto, según el entorno físico (temperatura y presión), un material terrestre particular puede comportarse como un sólido frágil, deformarse como la masilla o incluso fundirse y convertirse en líquido.

Tarbuck & Lutgens [2.010] señalan que la Tierra puede dividirse en cinco capas principales según sus propiedades físicas y su resistencia mecánica en:

- La Litósfera.
- La Astenosfera.
- La Mesósfera (manto inferior).
- El Núcleo externo y el Núcleo interno.

Litósfera y Astenosfera

Según sus propiedades físicas, la capa más externa de la Tierra está formada por la corteza y el manto superior y forma un caparazón relativamente frío y rígido. Aunque esta capa está compuesta por materiales con composiciones químicas notablemente diferentes, tiende a actuar como una unidad que exhibe un comportamiento rígido, principalmente porque es fría y, por tanto, fuerte. Esta capa, denominada Litósfera (esfera de roca), tiene un grosor medio de 100 kilómetros, pero puede extenderse 250 kilómetros o más por debajo de las porciones más antiguas de los continentes (Figura 2-40). Dentro de las cuencas oceánicas, la profundidad de la Litosfera es de sólo unos pocos kilómetros debajo de las dorsales oceánicas y aumenta hasta casi 100 kilómetros en las regiones de la corteza oceánica más antiguas y más frías. [Tarbuck & Lutgens, 2.010]

Tarback & Lutgens [2.010] señalan que debajo de la Litósfera, en el Manto superior (a una profundidad de unos 660 kilómetros), se extiende una capa blanda, relativamente débil, conocida como Astenosfera, del griego *astenos*: débil. En la parte superior de la Astenosfera se dan unas condiciones de temperatura/presión que provocan una pequeña cantidad de fusión. Dentro de esta zona de debilidad, la Litósfera está mecánicamente despegada de la capa inferior. El resultado es que la Litósfera puede moverse con independencia de la Astenosfera.

Tarback & Lutgens [2.010] indican que la resistencia de los diversos materiales terrestres es en función de su composición, así como de la temperatura y la presión de su entorno. Se debe tener la idea de que toda la Litósfera se comporta como un sólido frágil parecido a las rocas que se encuentran en la superficie. Las rocas de la Litósfera se calientan y se debilitan (se deforman más fácilmente) progresivamente al aumentar la profundidad. A la profundidad de la Astenosfera superior, las rocas están lo suficientemente cerca de su temperatura de fusión (de hecho, puede producirse algo de fusión) como para que se deformen con facilidad. Por tanto, la Astenosfera superior es débil porque está cerca de su punto de fusión, de la misma manera que la cera caliente es más plástica que la cera fría.

Mesósfera o Manto Inferior

Por debajo de la zona de debilidad de la Astenosfera superior, la mayor presión contrarresta los efectos de la temperatura más elevada y las rocas son gradualmente más resistentes con la profundidad. Entre las profundidades de 660 kilómetros y 2.900 kilómetros, se encuentra una capa más rígida llamada Mesósfera (esfera media) o Manto inferior. A pesar de su resistencia, las rocas de la Mesósfera están todavía muy calientes y pueden fluir de una manera muy gradual. [Tarback & Lutgens, 2.010]

Núcleo Interno y Externo

Tarback & Lutgens [2.010] concluyen que el Núcleo, que está compuesto principalmente por una aleación de hierro y níquel, se divide en dos regiones que exhiben resistencias mecánicas muy diferentes. El Núcleo externo es una capa líquida de 2.270 kilómetros de espesor. El flujo convectivo del hierro metálico en el interior de esta zona es el que genera el campo magnético de la Tierra. El Núcleo es una esfera con un radio de 3.486 kilómetros. A pesar de su temperatura más elevada, el material del Núcleo interno es más fuerte (debido a la inmensa presión) que el Núcleo externo y se comporta como un sólido.

3. FUNDAMENTO PEDAGÓGICO

“La libertad y la creatividad se convierten en los ejes de legitimación de las prácticas pedagógicas de signo progresista.”
[Torres, 1.998, p. 35]

La docencia se desarrolla con la interacción de tres elementos básicos que lo componen: *profesor, estudiante y saber disciplinar*, en compañía de los padres de familia y la comunidad educativa en general. Una interacción que hace posible formar al ciudadano.

El profesor ha enfrentado y sigue enfrentando la realidad de mejorar su práctica docente, con el fin de lograr los fines de la educación nacional como es el de formar a una persona de bien y además como : “La adquisición y generación de los conocimientos científicos y técnicos más avanzados, humanísticos, históricos, sociales, geográficos y estéticos, mediante la apropiación de hábitos intelectuales adecuados para el desarrollo del saber” (art. 5 - ley 115/94), es decir darle herramientas a la persona para que su ser cultural se apropie mejor de las realidades que le son cercanas.

El docente de matemáticas dinamiza el saber disciplinar ejerciendo su actividad educadora en el contexto de la educación matemática, entendiéndose esta como el “conocimiento matemático como objeto de enseñanza y aprendizaje” [D’Amore, 2.006, p. 16]

En palabras de D’Amore [2.006]: “La matemática es el lenguaje de la ciencia y da forma objetiva a multitud de problemas, permitiendo una crítica racional previa a la toma de decisiones” p. 15

El docente frente al dilema de qué enseñar y que requieren los estudiantes para aprender en la escuela, se dan unos parámetros de la política educativa nacional y son los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN), publicados en 1998 y los Estándares Básicos de Competencias del Ministerio de Educación Nacional del año 2.006.

Los Lineamientos Curriculares tienen el objetivo de orientar y dar criterios a nivel nacional sobre los currículos, sobre la función de las áreas y los nuevos enfoques para enseñar las áreas estipuladas en el artículo 23 de la ley general de educación (Ley 115/1.994). [MEN., 1.998].

En el artículo 23 de la ley general de educación (Ley 115/1.994), se indican las áreas obligatorias y fundamentales del conocimiento y se nombra a las Matemáticas como a las Ciencias Naturales y Educación Ambiental. No se da un indicio de la existencia en el currículo escolar de las ciencias de la Tierra o conocida mejor como Geociencias.

En los Lineamientos Curriculares [1.998] para el área de matemáticas se indica que se deben trabajar en los conocimientos básicos cinco pensamientos que son:

- Pensamiento numérico y sistemas numéricos.
- Pensamiento espacial y sistemas geométricos.
- Pensamiento métrico y sistemas de medidas.
- Pensamiento aleatorio y los sistemas de datos.
- Pensamiento variacional y sistemas algebraicos-analíticos.

La propuesta didáctica está enmarcada dentro del pensamiento variacional ya que se busca una confrontación pedagógica con la gráfica cartesiana.

En los Lineamientos Curriculares [1.998], el pensamiento variacional se relaciona con la gráfica matemática de la siguiente forma:

“En los contextos de la vida práctica y en los científicos, la variación se encuentra en contextos de dependencia entre variables o en contextos donde una misma cantidad varía (conocida como medición de la variación absoluta o relativa)”. P. 49

“Entre los diferentes sistemas de representación asociados a la variación se encuentran los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano o sagital, las representaciones pictóricas e icónicas, la instruccional (programación), la mecánica (molinos), las fórmulas y las expresiones analíticas.” p. 50

“La identificación de la variable independiente y dependiente es más significativa cuando se inicia desde la representación de situaciones concretas. Más adelante se formaliza el sistema cartesiano con el aprendizaje de su sintaxis.” p. 50

“Las gráficas cartesianas también pueden ser introducidas tempranamente en el currículo. Ellas hacen posible el estudio dinámico de la variación. La relación explícita entre las variables que determinan una gráfica puede ser iniciada con situaciones de variación cualitativa y con la identificación de nombres para los ejes coordenados. Particularmente la gráfica tiene como fin abordar los aspectos de la dependencia entre variables, gestando la noción de función como dependencia.” p. 50

“El estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas. El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica.” P 51

Además en los Lineamientos Curriculares [1.998], se indican unos procesos generales que se involucran en la actividad matemática como son:

- La resolución y el planteamiento de problemas.
- El razonamiento.
- La comunicación.
- La modelación.
- La elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

La propuesta didáctica se enmarca en la **modelación** ya que se establecen unos modelos de referencia de las Geociencias.

La modelación en los Lineamientos Curriculares [1.998], de acuerdo a la propuesta se plantea en los siguientes términos:

“El punto de partida de la modelación es una situación problemática real. Esta situación debe ser simplificada, idealizada, estructurada, sujeta a condiciones y suposiciones, y debe precisarse más, de acuerdo con los intereses del que resuelve el problema”. p. 76

“El proceso de modelación no solamente produce una imagen simplificada sino también una imagen fiel de alguna parte de un proceso real pre-existente. Más bien, los modelos matemáticos también estructuran y crean un pedazo de realidad, dependiendo del conocimiento, intereses e intenciones del que resuelve el problema.” “El estudio de las funciones en la educación básica secundaria tiene más sentido si se hace a partir de la modelación de situaciones de cambio” p. 76

Los Estándares básicos de competencias del Ministerio de Educación Nacional de 2006, para las áreas de conocimiento que los han enunciado entre ellas matemáticas, son una herramienta de trabajo para toda la sociedad colombiana, especialmente para el gremio educador y sus colaboradores.

Se define *estándar* como: “un criterio claro y público que permite juzgar si un estudiante, una institución o el sistema educativo en su conjunto cumplen con unas expectativas comunes de calidad”. p. 11 [MEN, 2.006]

Además los Estándares básicos de competencias se constituyen en una guía para (p. 11):

- El diseño del currículo, el plan de estudios, los proyectos escolares e incluso el trabajo de enseñanza en el aula.
- La producción de los textos escolares, materiales y demás apoyos educativos, así como la toma de decisión por parte de instituciones y docentes respecto a cuáles utilizar.
- El diseño de las prácticas evaluativas adelantadas dentro de la institución.

- La formulación de programas y proyectos, tanto de la formación inicial del profesorado, como de la cualificación de docentes en ejercicio.

Las competencias de acuerdo al Ministerio de Educación Nacional, se enmarcan en “saber hacer en situaciones concretas que requieren la aplicación creativa, flexible y responsable de conocimientos, habilidades y actitudes.” p. 12. [MEN, 2.006]

El Ministerio de Educación Nacional [2.006] señala: “Los estándares básicos de competencias plantean el qué y no el cómo, con lo cual el proyecto educativo de cada institución adquiere sentido y permite tener en cuenta las diferencias en los diversos contextos del país” p. 13. Es en este punto donde el docente sabe que debe enseñar pero bajo una condición del contexto escolar, y es ahí donde la didáctica toma sentido y validez pedagógica.

De acuerdo a Carlos Eduardo Vasco [2.003] la *Competencia* tiene una mayor connotación:

“Conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, Meta-cognitivas, socio-afectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad o de cierto tipo de tareas en contextos nuevos y retadores.” [Citado por Hernández, 2.014]. En esta se enmarca la formación de una manera integral y debe ser el hecho fundamental de la escuela colombiana.

El Ministerio de Educación Nacional promulga que las competencias matemáticas se alcanzan teniendo “ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problemas significativos y comprensivos”. Esto implica al docente un verdadero reto, compromiso y don de formar al ciudadano.

Los Estándares básicos de competencias [MEN, 2.006] del área de matemáticas siguen la misma línea de los Lineamientos Curriculares, en cuanto a procesos y conocimientos básicos que debe tener el estudiante.

En el área curricular de las matemáticas la modelación se relaciona con:

“Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible” y “todo modelo es una representación, pero no toda representación es necesariamente un modelo, como sucede con las representaciones verbales y algebraicas que no son propiamente modelos.” p. 53 [MEN, 2.006]

El pensamiento variacional tiene en cuenta los siguientes referentes:

“El pensamiento variacional se desarrolla en estrecha relación con los otros tipos de pensamiento matemático (el numérico, el espacial, el de medida o métrico y el aleatorio o probabilístico) y con otros tipos de pensamiento más propios de otras ciencias, en

especial a través del proceso de modelación de procesos y situaciones naturales y sociales por medio de modelos matemáticos.” p. 66 [MEN, 2.006]

“El estudio de los patrones está relacionado con nociones y conceptos propios del pensamiento variacional, como constante, variable, función, razón o tasa de cambio, dependencia e independencia de una variable” p. 66 [MEN, 2.006]

“El desarrollo del pensamiento variacional, dadas sus características, es lento y complejo, pero indispensable para caracterizar aspectos de la variación tales como lo que cambia y lo que permanece constante, las variables que intervienen, el campo de variación de cada variable y las posibles relaciones entre esas variables”. p. 67 [MEN, 2.006]

Para los diferentes grados de formación escolar como son, la educación básica primaria, educación básica secundaria y educación media, ahora se han organizado por ciclos, de acuerdo a la política distrital en educación de la Secretaria de educación de Bogotá, se tiene actualmente la división en cinco ciclos, establecido por el plan sectorial 2.008 – 2.012. Se implantó la Reorganización Curricular por Ciclos [Sec. Educación Bogotá, 2.011], la cual busca “modificar las concepciones, los imaginarios sociales, las prácticas pedagógicas, la relación del estudiante y del maestro con el conocimiento, los procesos de evaluación y la gestión administrativa” [Rincón, 2.010] de los procesos educativos en la ciudad capital.

Esta reorganización educativa llevo a establecer cinco ciclos educativos como a continuación se indica en la siguiente tabla.

Tabla 2-7. Reorganización por ciclos SED Bogotá

CICLO	GRADO
UNO (I)	0º, 1º, 2º
DOS (II)	3º, 4º
TRES (III)	5º, 6º, 7º
CUATRO (IV)	8º y 9º
CINCO (V)	10º y 11º

Fuente: Ávila M.- SED Bogotá

La propuesta didáctica está enmarcada para el ciclo cuatro que corresponde a los grados 8º y 9º. De acuerdo a los Estándares Básicos de Competencias del Ministerio de Educación Nacional [2.006], los estudiantes deben tener estas competencias para el pensamiento variacional:

Ciclo III:

- Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
- Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).
- Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.

Ciclo IV:

- Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.

La propuesta requiere del trabajo escolar previo, es decir la del ciclo III, que se concatena con el interés de manejar una interpretación no solo abstracta de gráficas, sino que tengan un escenario de aplicación interesante para el estudiante, para poder involucrarse en los deseos de la política educativa del Ministerio de Educación frente a los Estándares de competencias del ciclo IV.

3.1. Enfoque Pedagógico

Teniendo en cuenta la evolución de las acciones pedagógicas, destacamos a tres personajes que marcaron una revolución en la educación, ellos son *Jean Piaget*, *Lev S. Vygotsky* y *David Ausubel*.

Torres [1.998] indica que en la psicología de Jean Piaget (1.896 - 1.980), explica las características y cambios que se producen en la forma de pensar de los(a) niños(a), en su camino a ser adultos. Se Indican tres etapas fundamentales que son:

1. **Etapasensomotriz:** se presenta desde el momento del nacimiento hasta los dos años de edad. En este período la actividad sensorial y motora domina los comportamientos infantiles. La manera de relación con la realidad es mediante los sentidos y con las acciones físicas.
2. **Etapade las operaciones concretas:** presenta dos sub periodos, uno preoperatorio (entre los 2 a los 8 años de edad) y el otro de las operaciones concretas (entre los 8 a los

12 años). El lenguaje va a facilitar avances en la forma de comprender e intervenir sobre la realidad. Los(a) niños(a) pueden realizar operaciones mentales sobre realidades concretas.

3. **Etapas de las operaciones formales:** última etapa del desarrollo intelectual, se da para los(a) niños(a) mayores de 12 años y es el período donde comienzan a operar conceptos abstractos y a razonar de forma hipotética-deductiva.

Cada etapa condiciona las estrategias que se pueden utilizar para resolver las situaciones diferenciadoras donde se vea involucrado el niño o niña. En cada etapa el desarrollo de la inteligencia se produce sobre la base de unas determinadas operaciones cognitivas que condicionan las informaciones con las que se puede entrar en contacto y los procedimientos que se pueden realizar con ellas. [Torres, 1.998]

Con base a estas etapas del desarrollo cognitivo del niño se deben establecer las estrategias didácticas adecuadas para desarrollar las temáticas planteadas en cualquier área del conocimiento. Torres [1.998] indica que las situaciones didácticas planteadas pueden resultar interesantes y motivadoras cuando generan conflicto cognitivo y por lo tanto un aprendizaje para el estudiante, y la pedagogía de Jean Piaget apuesta por el aprendizaje por descubrimiento, donde el niño(a) tiene la libertad de aprender por sí mismo. Pero se desvalora en esta posición Piagetiana la intervención del adulto para dar instrucciones adecuadas. En esta perspectiva el niño(a) no tiene la posibilidad de aprender todo unas estructuras de conocimiento que se han llevado a cabo a través de la historia de la humanidad. Es aquí donde el adulto preparado pedagógicamente, el profesor, debe planificar y poner en práctica acciones para facilitar el aprendizaje del niño(a).

En otra posición pedagógica se tiene al psicólogo Lev S. Vygotsky (1.896 - 1.934) quien subraya en la necesidad de que las personas adultas deben ayudar a los niños(a) en la construcción y reconstrucción del conocimiento y a David P. Ausubel (1.918 - 2.008) quien le da relevancia al significado de los contenidos culturales con los que se trabaja en la escuela. [Torres, 1.998]

Lev S. Vygotsky con su teoría histórico-cultural indica que el papel de los adultos, del medio social y la instrucción tienen influencia en el aprendizaje y el desarrollo humano. Indica que se deben adaptar las estrategias y contenidos curriculares al contexto histórico-cultural específico del estudiantado. [Torres, 1.998]

En la psicología de Vygotsky condiciona las posibilidades de aprender de cada persona a los niveles de desarrollo alcanzado. Distingue dos niveles, el nivel de desarrollo efectivo y el potencial. El nivel de desarrollo efectivo es el que posee un estudiante en el momento del aprendizaje con sus aprendizajes y conceptos previos. El nivel de desarrollo potencial está definido por lo que el estudiante es capaz de aprender con la colaboración de otras personas o de instrumentos mediadores. En medio de estos dos niveles se encuentra la “zona de desarrollo

potencial", es aquí donde el docente puede intervenir adecuadamente planeando experiencias de aprendizaje que se apoyen en los conceptos asimilados y sus concepciones espontáneas. [Torres, 1.998]

Además Torres [1.998] establece que una educación que conecta los conceptos espontáneos y promueva su reconstrucción requiere trabajar con contenidos culturales relevantes, con un significado comprensible, sin fragmentación de asignaturas.

En la postura de Ausubel del aprendizaje interviene el proceso de memorización hasta un nivel de aprendizaje significativo. En este aprendizaje significativo tiene lugar cuando las nuevas informaciones y conocimientos pueden relacionarse de una manera no arbitraria con lo que la persona ya conoce. [Torres, 1.998]

Así mismo Torres [1.998] indica que es fundamental desarrollar situaciones didácticas en donde la relevancia de los contenidos culturales seleccionados para el proyecto curricular pueda interactuar y facilitar procesos de reconstrucción con los que ya posee el estudiantado.

Las nuevas argumentaciones de Piaget, Vygotsky y Ausubel promovieron un nuevo paradigma pedagógico, que fue conocido como el **Constructivismo**.

El Constructivismo permite que el aprendizaje sea un proceso individual, dinámico y significativo que relaciona los conocimientos previos de los estudiantes con los conocimientos nuevos de una manera interactiva y contextualizada. Promueve el cambio conceptual. [Bravo, Perafán & Badillo, 2.002]

Los profesores en el constructivismo son:

- ✓ Guías que facilitan los procesos de aprendizaje, creando condiciones que permitan el cambio conceptual.
- ✓ Se informan sobre los preconceptos y habilidades de sus estudiantes así como de las dificultades que tienen para entender temas científicos y resolver problemas prácticos.
- ✓ Deben promover el trabajo en equipo.
- ✓ Proponen actividades didácticas en las que involucran preguntas de los estudiantes.
- ✓ Promueven un dialogo de saberes con principios de respeto, tolerancia y convivencia.

Finalmente Martínez et al [2.005] mencionan que las principales características de la visión Constructivista son (p.31):

- Lo que hay en el cerebro del que va aprender tiene importancia.
- Encontrar sentido supone establecer relaciones: los conocimientos que pueden conservarse permanentemente en la memoria no son hechos aislados, sino aquellos muy estructurados que se relacionan de múltiples formas.

- Quien aprende construye activamente significados.
- Los estudiantes son responsables de su propio aprendizaje.

Se debe mencionar que esta filosofía educativa debe prevalecer en cualquier contexto escolar y bajo las nuevas corrientes pedagógicas que están mediadas por la ciencia y la tecnología.

3.2. Interdisciplinariedad

En la educación colombiana la propuesta de ejecutar un currículo integrado ha sido una meta utópica, pero se han planteado desde diferentes estudios su conceptualización y puesta en escena, entre ellos el grupo de investigación del Centro de Investigación y Educación Popular CINEP del profesor Vasco et al. [2.001] con el trabajo académico: “El saber tiene sentido, una propuesta de integración curricular”, donde proponen diferentes escenarios didácticos como puntos de referencia para la interdisciplinariedad. Así mismo desde la Secretaria de educación de Bogotá, en su documento institucional: “Orientaciones pedagógicas y marco de la política educativa para la ciencia, la tecnología, la informática y los medios de comunicación en la educación del Distrito Capital” [2011], exponen la necesidad de llevar al aula de clase la interconexión de las disciplinas fundamentales de conocimiento para que puedan dialogar y así se rompa los esquemas tradicionales. A la vez exponen ideas del investigador pedagógico Jurjo Torres, del cual se toman algunas disertaciones.

A nivel mundial se está buscando en los niveles obligatorios de formación la integración de las áreas de conocimiento y experimentación para facilitar una comprensión más reflexiva y crítica de la realidad [Torres, 1.998]

En el siglo XVII grandes pensadores como Rene Descartes, Auguste Comte, Emmanuel Kant, entre otros, mostraron preocupación por la fragmentación del conocimiento que se daba en campos especializados sin una comunicación explícita entre sí. Estos personajes trataron de plantear alguna propuesta de integralidad. [Torres, 1.998]

El profesor e investigador Torres [1.998] menciona que la unidad de las distintas áreas de conocimiento facilitaría un desarrollo más armonioso de cada disciplina en relación con las demás, por lo tanto permitirá solucionar de manera eficaz los problemas inherentes al desarrollo de la sociedad.

Para que exista interdisciplinariedad es básico que existan las disciplinas. Los planteamientos interdisciplinarios surgen y se desarrollan apoyándose en lo disciplinar [Torres, 1998]

En palabras de Morín [2.005] se puede destacar el siguiente referente de que se entiende por una disciplina:

La disciplina es una categoría organizacional en el seno del conocimiento científico; ella instituye allí la división y la especialización del trabajo y ella responde a la diversidad de los dominios que recubren las ciencias. Si bien está englobada a través de un conjunto científico más vasto, una disciplina tiende naturalmente a la autonomía, por la delimitación de sus fronteras, la lengua que ella se constituye, las técnicas que ella está conducida a elaborar o a utilizar, y eventualmente por las teorías que le son propias.

La interdisciplinariedad es un objetivo complejo de alcanzar en su totalidad y se debe trabajar en equipo disciplinar para alcanzarlo. Su ejecución se visibiliza en la práctica con acciones reales. [Torres, 1.998]. Como lo indica Vasco [2.001]: “la integración curricular es un desafío difícil, complicado y opaco, pero por ello más retador y estimulante” P. 8

Torres [1.998] menciona que la interdisciplinariedad vista desde Piaget, sería la asociación entre disciplinas, donde la cooperación entre varias disciplinas lleva a interacciones reales; es decir existe reciprocidad en los intercambios y un enriquecimiento mutuo entre las disciplinas.

Además en palabras de Torres [1.998]: “lo importante es explicar y hacer ver como existe información, conceptos, metodologías, procedimientos, etc., que tienen utilidad y sentido en más de una disciplina, algo que cualquier historia de la ciencia y tecnología puede demostrar profusamente”p.80 y “La interdisciplinariedad puede y debe servir también como estrategia para una mayor fluidez entre el trabajo práctico y el teórico”. p 81, referentes que promueven un cambio en el quehacer del docente.

Para la elaboración de un proyecto curricular integrado se puede seguir la idea de Pring, Richard (1.976) [citados en Torres, 1.998]:

Se asume que existen diferentes asignaturas y que de alguna manera sus rasgos diferenciales deben ser respetados en la planificación curricular; deben tratarse de manera separada. Sin embargo, dado que algunas partes de cada una de ellas, para poder ser entendidas, necesitan de contenidos que son típicos de otras, se establece una clara coordinación entre las disciplinas implicadas para superar tales obstáculos (p.204).

De acuerdo a De Lange [1.996] se asisten cuatro razones para integrar los problemas contextualizados en el currículum (p.25):

- a) Facilitan el aprendizaje de las matemáticas.
- b) Desarrollan las competencias de los ciudadanos.

- c) Desarrollan las competencias y actitudes generales asociadas a la resolución de problemas.
- d) Permiten ver a los estudiantes la utilidad de las matemáticas para resolver tanto situaciones de otras áreas como situaciones de la vida cotidiana.

3.3. Propuesta Didáctica

La construcción de la propuesta didáctica parte de unos principios de la *Matemática Realista* enunciados por Sánchez & Fernández [2.003]:

- ✓ Contribuye al bagaje cultural de las personas.
- ✓ Intenta salvar el dualismo saber – utilizar matemáticas.
- ✓ No debe ser separada de las demás ciencias.

Al lado de estos principios, la práctica pedagógica del docente de matemáticas se enmarca en el aula proponiendo y realizando acciones encaminadas al aprendizaje significativo, como lo enunciaba Ausubel. Esas acciones solo son posibles usando una adecuada didáctica. Como lo expresa D'Amore [2.006]: "La Didáctica de la Matemática se ocupa de indagar metódica y sistemáticamente sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas..." p.17

En búsqueda de aquello que sea significativo para el estudiante se dio la oportunidad de explorar y encontrar una riqueza conceptual y de posibilidades temáticas en las Geociencias. El hecho de romper el esquema de las matemáticas por las matemáticas, como muy bien lo expresa el investigador Vicenç Font Moll [2.007]: "se presentan unas matemáticas centradas sobre ellas mismas y muy alejadas de las otras ciencias. Los textos didácticos ofrecían pocas situaciones no matemáticas que permitiesen a los alumnos conocer la aplicación de las matemáticas a la realidad, lo cual facilitaba preguntas del tipo "*esto para qué sirve*". p. 21 Con acciones didácticas adecuadas y significativas se puede romper una frase célebre del estudiantado y así permitir darle respuesta a la misma.

La propuesta didáctica parte de los preconceptos que tiene el estudiante, y por preconcepto se entiende como "las habilidades y marcos de referencia que dotan de la capacidad para ir aprendiendo. Son herramientas que permiten la labor de asimilación y ordenación de experiencias posteriores más complejas" [Castro y Castro, 2.011]

Además se debe tener en cuenta que toda disciplina curricular marcada por un carácter de cientificidad posee una jerarquía de contenidos. Esto es lo que determina la estructura interna para jerarquizar y organizar las partes. [Sánchez & Fernández, 2.003]. Y en la didáctica de las matemáticas es un hecho que se visibiliza.

Además Sánchez & Fernández [2.003] señalan que no se debe olvidar que al establecer un método de enseñanza válido para la generalidad, no se da una distinción para las particularidades de cada uno de los estudiantes frente a su estilo de aprendizaje y que cada contenido tiene su forma particular de abordarlo.

Finalmente Sánchez & Fernández [2.003] mencionan que se establecen cuatro tipos de aprendizajes en las matemáticas:

- ✓ Por memorización
- ✓ Aprendizaje algorítmico
- ✓ Aprendizaje de conceptos
- ✓ Resolución de problemas

Memorización: busca apartados tipo “recuerda” que se ajusten a enunciados esquemáticos interrelacionados.

Aprendizaje algorítmico: se debe distinguir algoritmos de continuación (sumas, restas, etc.) e iniciación (división, sumas de decimales, etc.). Se reconocen actividades o ejercicios con tales características.

Resolución de problemas: se valora que los problemas planteados no sean, exclusivamente la aplicación de un algoritmo.

Aprendizaje de conceptos: se valora la presentación del concepto mediante nociones básicas y con un ejemplo esclarecedor. Además se basa en la jerarquización conceptual que impone las matemáticas

3.3.1. Contextualización de la propuesta didáctica

La propuesta didáctica planteada se enlaza con la que el estudiante aprenda conceptualmente a interpretar gráficas, donde se dan tres ejemplos fundamentados en realidades no ajenas al estudiante.

Ahora en palabras de Castro & Castro [2.011] se debe tener en cuenta que la matemática es una herramienta para el estudio de otras áreas del conocimiento como son la física, química, biología, ciencias sociales entre otras. Por lo tanto se puede llevar a cabo una interdisciplinariedad de las matemáticas con las ciencias naturales en el ámbito escolar de manera cierta y efectiva.

Los estudiantes del ciclo III han podido trabajar el tema de relación matemática y su forma de representación en gráficas. Aparte de esto los estudiantes del ciclo III se han podido estructurar

en temáticas de ciencias naturales relacionada con el planeta Tierra. Con esta formación llegan al ciclo IV para trabajar conceptos más elaborados en las dos áreas del conocimiento.

En la escuela se habla de la educación ambiental pero no se va a la raíz del conocimiento mismo del planeta Tierra, y esta es una oportunidad para presentar al estudiantado de noveno grado unas temáticas atractivas y a las cuales no son ajenos ya que en las ciencias naturales han podido referenciar aspectos propios del planeta Tierra como la estructura de su interior, su atmósfera, la biosfera, hidrósfera así mismo conceptos de ondas, presión, fuerza y temperatura, como se percibe en los estándares básicos de competencias de ciencias naturales de los cuatro primeros ciclos de formación básica.

En la riqueza de las ciencias naturales se ha querido rescatar del “olvido” escolar a las Geociencias, esta ciencia es interdisciplinar ya que se vale de la física, química, biología y de las matemáticas para estructurarse conceptualmente.

Las Geociencias incluyen diversas disciplinas científicas tales como: astronomía, geología, hidrología, hidrogeología, biología, oceanografía, meteorología, entre otras, sin las cuales no es posible comprender lo que ocurre en el conjunto de la Tierra – espacio. [Zambrano, 2003]

El Instituto norteamericano de Geociencias [2.013] dice: “Las ciencias de la Tierra nos permiten pensar globalmente y actuar a nivel local”. Así mismo “Una sociedad bien informada, consciente de las complejas relaciones que existen entre el ser humano y su planeta, apoya y reconoce la importancia de la enseñanza de las ciencias naturales en todos los niveles escolares, primario, secundario y superior. Todo el mundo se beneficia cuando se enfatiza la enseñanza de las ciencias de la Tierra.” Fundamentos que sustentan la idea didáctica propuesta para enseñar a interpretar gráficas desde temáticas significativas para los estudiantes.

Como lo expresa Emilio Pedrinaci [1.998]: “Estas ideas se centran en ofrecer una perspectiva dinámica que muestre los principales procesos que ocurren, las causas que los motivan, los efectos que producen y el modo en que pueden investigarse. Se pretende que el estudiante tenga unas nociones básicas acerca de cómo funciona la Tierra y del papel que está desempeñando la actividad humana” p.11. Además complementa: “Si las ciencias de la naturaleza son un conjunto de conocimientos que nos ayudan a analizar e interpretar el mundo que nos rodea; si las teorías, leyes y principios han sido creados, inventados, por los científicos para entender mejor los fenómenos naturales y poder predecirlos; si uno de los criterios de valoración de toda teoría científica es su capacidad para explicar dichos fenómenos;...” entonces se debe aprovechar todo ese acervo cultural en la escuela para enriquecer la escena didáctica del docente.

La gráfica cartesiana como un constructo matemático que vive y está presente en el mundo real, se evidencia en muchas situaciones de las Geociencias. Se destacan la relación de presión atmosférica con la altitud; los cambios de temperatura que tiene la atmósfera con la altitud y

finalmente identificar el interior de la Tierra a través de la sismología con el estudio de las ondas sísmicas.

Mostrar al estudiante que la gráfica no es un ente estático sino que representa variación o cambio de hechos formalizados por variables que se pueden expresar en forma de magnitud. Como lo señala Camargo [2.005]: “Las representaciones gráficas favorecen el estudio de la cuantificación de los cambios de las magnitudes variables” p. 144

El grupo de investigadores J. D. Godino, C. Batanero y V. Font [2.003] expresan de manera pertinente lo siguiente:

Cuando los estudiantes pueden conectar las ideas matemáticas entre sí, con las aplicaciones a otras áreas, y en contextos de su propio interés, la comprensión matemática es más profunda y duradera. Podemos postular que sin conexión no hay comprensión, o ésta comprensión es débil y deficiente. Mediante una instrucción que enfatiza las interrelaciones entre las ideas matemáticas, los estudiantes no sólo aprenden matemáticas, sino que también aprecian la utilidad de las matemáticas. p. 37

Se debe tener en cuenta que a través de las gráficas seleccionadas se están modelando situaciones físicas del planeta Tierra y además que el modelo presentado no es perfecto, como lo resalta Godino et al. [2.003]: “Al comparar la modelización matemática de un cierto hecho de la realidad, siempre es aproximada, porque el modelo nunca es exacto a la realidad.” p.26

Adicionalmente se debe desarrollar la propuesta didáctica bajo una transposición didáctica, por la misma complejidad de las Geociencias. Mesa [2.000] menciona que una transposición se refiere a la adaptación del saber disciplinar para ser transformado en conocimiento para ser enseñado. Lacreu [1.997] señala que deben existir unas condiciones adecuadas para la transposición didáctica como son:

- a) Que los contenidos desarrollados tengan una organización lógica comprensible.
- b) Que sean relacionables con los conocimientos previos del que aprende.
- c) Que el alumno tenga una actitud positiva hacia el aprendizaje significativo. (p.46)

Finalmente se busca que el estudiante use la competencia básica de la *interpretación* en el trabajo de gráficas cartesianas. La palabra “Interpretación” viene del verbo interpretar y según el diccionario de la Real Academia de la lengua española se define como: “Explicar o declarar el sentido de algo, y principalmente el de un texto.” [RAE, 2.014]

Según Bravo et al. [2.002], la interpretación se puede entender “como un proceso de formación de conceptos”p.66. Por otro lado Ruiz [2.002] señala que interpretación es la “capacidad del

sujeto para dar explicaciones acerca de la realidad” p. 91 y para Rojas et al. [2.001]: “Implica establecer relaciones y confrontar los diferentes significados que configuran un hecho, una lectura, etc., donde el sujeto pone posición frente a lo planteado”. p 24

Entonces se propone enseñar a interpretar las gráficas cartesianas contextualizadas de manera guiada mediante el uso de una herramienta tecnológica, bajo unos parámetros que parten de unos conceptos formalizados previamente.

3.4. TIC

La educación ha evolucionado y se ha revolucionado hasta el punto que ya se puede ejecutar el proceso de enseñanza - aprendizaje desde la comodidad del hogar sin que la persona se traslade a un espacio llamado aula de clase.

La tecnología del siglo XX permitió desarrollar el computador y los lenguajes de programación para luego pasar al desarrollo del internet. El internet abre nuevas posibilidades pedagógicas que no se deben desaprovechar ya que las personas involucradas en la tecnología de la computación están realizando aportes de manera continua y vertiginosa. [Rubio, 2.014]

Las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) son el conjunto de tecnologías que permiten el acceso, producción, tratamiento y comunicación de información presentada en diferentes códigos (texto, imagen, sonido,...). [Belloch, 2.014] y como tal la tecnología es un recurso que puede usar el profesor en su trabajo didáctico.

Con el desarrollo de las TIC, Moreno [1.999], citado en SED Bogotá: “Orientaciones curriculares para el campo del pensamiento matemático” [2008], señala:

La importancia de las herramientas computacionales para la educación matemática está asociada a su capacidad para ofrecernos medios alternativos de expresión matemática, y a su capacidad para ofrecer formas innovadoras de manipulación de los objetos matemáticos. Cuando se usa la tecnología en la escuela, hay que reconocer que no es la tecnología en si misma el objeto central de nuestro interés, sino el pensamiento matemático que puede desarrollar los estudiantes bajo la mediación de dicha tecnología. p. 54

El plan nacional decenal de educación 2.006 - 2.016 promulgado por el Ministerio de Educación Nacional define la ruta y el horizonte para el desarrollo educativo del país en el próximo decenio, como referente obligatorio de planeación para los gobiernos presentes e instituciones educativas y como instrumento de movilización social y política, tiene entre sus objetivos fundamentales el uso y apropiación de las TIC. Con esto se garantiza el acceso, uso y

apropiación crítica de las TIC, como herramientas para el aprendizaje, la creatividad, el avance científico, tecnológico y cultural, que permita el desarrollo humano y la participación activa.

Además el Ministerio de Educación Nacional señala: “El uso de las TIC se considera como un instrumento en los procesos formativos. Los nuevos lineamientos indican que el uso de las nuevas tecnologías debe ser considerado como mediador pedagógico, es decir, que a través de las TIC, los maestros sean capaces de transformar los currículos y los aprendizajes, pues los niños y los jóvenes aprenden de manera diferente.” [MEN., 2.014]

El uso de la tecnología en educación se estimula usando un computador y el software apropiado, con lo cual se amplía el repertorio de situaciones didácticas. El docente tiene a su disposición muchas herramientas de uso libre que se encuentran en la *Web* y llevan a romper el esquema de educación tradicional. Así mismo Godino et al. [2.003] señalan que: “La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y estimula el aprendizaje de los estudiantes”. p. 8

Todo esto que se ha mencionado se puede agrupar en un modelo pedagógico que se podría llamar “**La tecnología educativa**”, este se entiende como el: “Uso de TICs, enseñanza programada, uso de recursos técnicos (máquinas didácticas, televisión, computadora...), autoaprendizaje, maestro administrador de los programas” [Hernández, 2.014]

Se debe tener en cuenta estas competencias transversales según el Plan Nacional de TIC [Min. TIC, 2.014]:

1. Competencias básicas de motricidad fina relacionadas con interfaces como el ratón, el teclado y la pantalla.
2. Apropiación de lenguajes audiovisuales.
3. Capacidad de representación de ideas y presentación de propuestas.
4. Apropiación de conocimientos involucrándose con redes sociales.
5. Proposición de nuevos **OVA**

3.4.1. OVA

Siendo la *tecnología educativa* la que nos atañe entonces el Ministerio de Educación Nacional [2.006] define a un OVA como:

Un objeto virtual de aprendizaje (OVA) se define como todo material estructurado de una forma significativa, asociado a un propósito educativo y que corresponda a un recurso de carácter digital que pueda ser distribuido y consultado a través de la Internet.

El objeto de aprendizaje debe contar además con una ficha de registro o metadato consistente en un listado de atributos que además de describir el uso posible del objeto, permiten la catalogación y el intercambio del mismo.

En la página web de *Colombia Aprende* [2014] se tiene la siguiente definición de OVA:

Un objeto de aprendizaje (OA) es un conjunto de recursos digitales, auto contenible y reutilizable, con un propósito educativo y constituido por al menos tres componentes internos: Contenidos, actividades de aprendizaje y elementos de contextualización. El objeto de aprendizaje debe tener una estructura de información externa (metadatos) que facilite su almacenamiento, identificación y recuperación.

Estas dos definiciones pueden referirse que un OVA es similar a un OA.

3.4.2. **Elementos estructurales de un Objeto de Aprendizaje (OA)**

En el sitio web de Colombia aprende [2.014] se establece que el valor pedagógico de un OA está presente en la disponibilidad de los siguientes componentes:

- **Objetivos:** Expresan de manera explícita lo que el estudiante va a aprender.
- **Contenidos:** Se refiere a los tipos de conocimiento y sus múltiples formas de representarlos, pueden ser: definiciones, explicaciones, artículos, videos, entrevistas, lecturas, opiniones, incluyendo enlaces a otros objetos, fuentes, referencias, etc.
- **Actividades de aprendizaje:** Que guían al estudiante para alcanzar los objetivos propuestos.
- **Elementos de contextualización:** Que permiten reutilizar el objeto en otros escenarios, como por ejemplo los textos de introducción, el tipo de licenciamiento y los créditos del objeto.
- **La evaluación** es una herramienta que permite verificar el aprendizaje logrado. Están en concordancia con los objetivos propuestos y por el tipo de contenido presentado.

La estructura de información externa del objeto se refiere al *Metadato* que describe los aspectos técnicos y educativos del objeto.

Finalmente Roldan & Ángel citados en Colombia Aprende [2.014] indican que los OVA se deben diseñar a partir de criterios como:

- **Atemporalidad:** Para que no pierda vigencia en el tiempo y en los contextos utilizados.
- **Didáctica:** El objeto tácitamente responde a qué, para qué, con qué y quién aprende.
- **Usabilidad:** Que facilite el uso intuitivo del usuario interesado.
- **Interacción:** Que motive al usuario a promulgar inquietudes y retornar respuestas o experiencias sustantivas de aprendizaje.
- **Accesibilidad:** Garantizada para el usuario interesado según los intereses que le asisten.

Los objetos de aprendizaje pensados desde una perspectiva constructivista potenciados por las tecnologías de información y comunicación abren una alternativa para la enseñanza de las nuevas generaciones de colombianos.

3.4.3. Diseño

Se deben tener en cuenta estas recomendaciones para diseñar un OVA [P. U. Javeriana, 2.009]:

- ✓ Se debe escribir en formato de segunda persona, dirigiéndose directamente al estudiante.
- ✓ Debe ser claro para el estudiante, usando un lenguaje apropiado para el público objetivo haciendo uso del glosario cuando algún término tenga un significado propio del área del conocimiento que está trabajando [Corral et al. 1.987]
- ✓ Establecer una evaluación con sentido de reflexión, no sancionatorio o de juzgamiento, porque los sistemas virtuales llevan a la democratización de los saberes. Se le da la oportunidad de buscar nuevos conocimientos en áreas que posiblemente sean desconocidas.
- ✓ Es un método alternativo y colaborativo a la clase, en la clase se podrá llevar a la discusión crítica de situaciones de otras ramas del conocimiento, a indagar otras situaciones, a buscar nuevos gráficos para ser interpretados, rompiendo el esquema de la educación tradicional.

3.4.4. ExeLearning

El OVA se elaboró usando el software “**eXeLearning v. 1.04.1**”, es una herramienta de autor de código abierto para ayudar a los docentes en la creación y publicación de contenidos web.

Además es un software de uso libre bajo licencia GNU, y trabaja en diferentes plataformas como son: Linux, Apple y Microsoft Windows.

El software fue desarrollado inicialmente con el apoyo del gobierno de Nueva Zelanda – Comisión de educación Terciaria, por parte de las universidades de Auckland, la Universidad Tecnológica de Auckland y Politécnico Tairawhiti. Permite publicar contenidos web sin la necesidad de ser competentes en el lenguaje HTML o XML. Recursos creados en **eXeLearning** puede exportarse en paquete de contenido IMS, SCORM 1.2 o IMS Common Cartridge formatos o como simples páginas web independientes.eXe

El software EXELEARNING posee las siguientes herramientas de trabajo (iDevices):

Tabla 3-8. IDevices de ExeLearning.

1. Actividad	10. Objetivos
2. Actividad de espacios en blanco	11. Pre conocimiento
3. Actividad de lectura	12. Preguntas verdadero – falso
4. Applet de java	13. Preguntas de elección múltiple
5. Artículo wiki	14. Preguntas de selección múltiple
6. Caso de estudio	15. RSS
7. Examen Scorm	16. Reflexión
8. Galería de imágenes	17. Sitio externo de la web
9. Imagen ampliada	18. Texto libre

Fuente: Ávila M.

Todas estas herramientas están a disposición del diseñador pero de acuerdo a la temática propuesta se pueden usar las más pertinentes para lograr los objetivos establecidos.

- iDevices de presentación de información de forma textual.
 - Texto libre
 - Objetivos
 - Conocimiento previo
- iDevices de presentación de información no textual (imágenes y páginas web).
 - Galería de imágenes
 - Lupa

- Sitio Web externo
- Artículo de la Wikipedia
- RSS (no dinámico)
- Applet de Java
- iDevices de actividades no interactivas: proponen actividades que no se pueden contestar directamente.
 - Actividad de lectura
 - Caso práctico
 - Reflexión
- iDevices de actividades interactivas: permiten al alumno interactuar directamente con el objeto.
 - Rellenar huecos
 - Pregunta de elección múltiple
 - Pregunta de selección múltiple
 - Pregunta verdadero-falso
 - Cuestionario SCORM
 - Actividad desplegable

3.4.4.1. Desarrollo de la propuesta didáctica

La temática de interpretación de gráficos a partir de situaciones contextualizadas se estableció bajo los siguientes capítulos:

1. Una presentación con el título: *“En búsqueda de la verdad”*, imágenes alusivas a la temática y los objetivos del curso con una pequeña reflexión.
2. Interpretación de gráficas cartesianas: se señalan todos los conceptos fundamentales que debe tener el estudiante para poder desarrollar la unidad.

- 2.1. Parámetros de interpretación: Se señalan las características más fundamentales de las gráficas como los parámetros base de interpretación de gráficas contextualizadas.
- 2.2. Se da una retroalimentación con un cuestionario de falso y verdadero, una página web alusiva a las gráficas y un video relacionado con la temática expuesta.
3. Planeta Tierra: se da una lectura de introducción y una información extra para que el estudiante se apropie del tema que va a trabajar.
 - 3.1. El aire pesa: se explica con una lectura de ambientación. Luego se realiza una explicación cuidadosa de cómo se interpreta la gráfica correspondiente.
 - 3.1.1. Se da una retroalimentación con un cuestionario de falso y verdadero, una página web alusiva a la presión atmosférica y un video relacionado con la temática expuesta.
 - 3.2. La capa gaseosa que nos rodea: se explica con una lectura de ambientación. Luego se realiza una explicación cuidadosa de cómo se interpreta la gráfica correspondiente. Al final se presenta una reflexión significativa.
 - 3.2.1. Se da una retroalimentación con un cuestionario de falso y verdadero, una página web alusiva a la atmósfera y un video relacionado con la temática expuesta.
 - 3.3. El interior misterioso de nuestro planeta: se explica con una lectura de ambientación. Luego se realiza una explicación cuidadosa de cómo se interpreta la gráfica correspondiente. Al final se presenta una reflexión significativa.
 - 3.3.1. Se da una retroalimentación con un cuestionario de falso y verdadero, una página web alusiva al planeta Tierra y un video relacionado con la temática expuesta.
4. Aprendizajes significativos: se dan unas conclusiones de todo el trabajo hecho durante la unidad desarrolla en el OVA. Y se cierra con una bibliografía, fuente de la información presentada.

La posibilidad de tener el tiempo para leer y mentalizar unos conocimientos sin un esquema de tiempo obligado permite la asimilación más adecuada de los conceptos expuestos en el OVA.

El OVA diseñado y presentado es una versión, versión que esta para ser mejorada y así es la misión del docente, aprender de su práctica pedagógica para mejorar y poder tener más y mejores recursos didácticos.

En el anexo se puede apreciar la portada del OVA propuesto a la comunidad educativa.

3.4.5. Ejecutar el OVA.

Se deben tener en cuenta los siguientes pasos para ejecutar el OVA:

- 1) La carpeta del archivo OVA se debe descomprimir.
- 2) Se debe estar conectado a internet.
- 3) En la carpeta descomprimida se debe buscar y accionar el link: INDEX.HTML
- 4) Se abre el OVA en internet.
- 5) Se realiza el recorrido con el panel lateral o con las flechas de avance o retroceso.
- 6) Se disfruta el OVA de acuerdo al ritmo del educando.
- 7) Se debe realizar el mismo procedimiento cada vez que se cierra la página web del OVA.

El OVA propuesto se puede instalar en cualquier computador y es de fácil uso y transporte.

El OVA diseñado se encuentra en la carpeta anexa al documento.

Para mayor información sobre eXeLearning se puede obtener de la página web: <http://exelearning.net/> o <http://exelearning.org/>

En la realidad del software educativo se pueden encontrar otras herramientas tecnológicas para diseñar un OVA, pero exelearning fue escogido por la sencillez de uso.

CONCLUSIONES

1. La actualización es fundamental en la actividad profesional de un docente ya que esta le permite mejorar su práctica pedagógica para el bien de toda la comunidad educativa.
2. Los estudiantes deben aprender a trabajar desde la interdisciplinariedad ya que esta forma de educación les permite tener una mejor formación y pueden desarrollar mejor sus competencias académicas.
3. Las Geociencias es un mundo de posibilidades para el aula de clase. Se deben seleccionar adecuadamente los temas a ser trabajados en el aula de clase para que los estudiantes los puedan entender adecuadamente.
4. Conocer los fundamentos histórico-epistemológicos de una ciencia permite tener un conocimiento global de dicha ciencia.
5. Preparar una clase desde la interdisciplinariedad requiere de una planeación juiciosa de la temática a ser trabaja en el aula para poder asimilar ese conocimiento nuevo y así se pueda lograr una transposición didáctica adecuada.
6. Elaborar contenido digital requiere de un guion de trabajo, ya que este le permite tener la planeación de todo lo que va a tener el recurso digital.
7. Aprender a interpretar gráficos cartesianos en el mundo globalizado es fundamental ya que permite abrir espacios de dialogo cultural.
8. El OVA debe ser práctico y sencillo, no debe generar aversión o una actitud negativa al tema que se está desarrollando.
9. La evaluación que se realiza en un OVA debe tener sentido de reflexión y de permitir que el estudiante se auto evalúe cómo fue su proceso de aprendizaje.
10. El software eXeLearning es una herramienta de trabajo interesante de usar y como tal se debe promover su uso por los diferentes actores de la comunidad educativa.

RECOMENDACIONES

- ✓ Se debe promover una cultura pedagógica de la interdisciplinariedad. Este movimiento permitirá que la educación mejore en los niveles de calidad que se esperan debe tener.
- ✓ El uso de las TIC en la educación debe ser colaborativo desde el hogar, donde el padre de familia guía el manejo responsable del internet.
- ✓ Realizar campañas de capacitación a los docentes para aprender a usar adecuadamente el software eXeLearning y así se pueda llevar al aula de clase para complementar la práctica pedagógica.
- ✓ Se debe promover a que se trabajen temáticas de las Geociencias ya que con ella estamos formando personas con mayor conciencia ambiental.
- ✓ Se deben reformar los estándares básicos de competencias para que se pueda tener una mayor flexibilidad curricular.
- ✓ Se debe desarrollar una variedad temática de OVA para que se puedan tener alternativas pedagógicas en el aula de clase.
- ✓ Se debe cambiar la práctica docente desde la reflexión para así se puedan mejorar los niveles de calidad de los educandos.

ANEXO

PORTADA DEL OVA

The screenshot shows a web browser window with the following elements:

- Browser Tabs:** "eXe: EN BUSQUEDA DE LA VERDAD" and "APRENDIZAJES CONCERT".
- Address Bar:** "file:///C:/Users/PC/Desktop/ova/OVA%20INTERPRETAR%20GRAFICOS/index.html"
- Navigation Bar:** Includes "Aplicaciones", "Galería de Web Slice", "Sitios sugeridos", "Importado de Intern...", "- Repositorio Institu...", "El Bachillerato Intern...", "Descargar software, ...", "Descargas de aplica...", and "EduTEKA - Nueva ver...".
- Left Sidebar:**
 - EN BUSQUEDA DE LA VERDAD
 - INTERPRETACION DE GRAFICAS CARTESIANAS
 - EL PLANETA TIERRA
 - ATENCIÓN A LOS SIGNIFICATIVOS
- Main Content Area:**
 - Section: EN BUSQUEDA DE LA VERDAD**
 - Galería de imágenes:** A row of six small images related to the topic.
 - Objetivos:**
 - INTERPRETACION DE GRAFICOS CARTESIANOS CONTEXTUALIZADOS**
 - Estudiantes de 9º (CICLO IV)**
 - Descripción:** "Siguiendo la formación de matemáticas de 2º sobre relaciones y sus formas de representación, en especial las gráficas, damos un nuevo paso y es el de integrar elementos ya vistos en clase para entrar en la lectura e interpretación de gráficos presentes o desarrollados en contextos de las matemáticas o diferentes a ellas, permitiéndonos conocer otras áreas del conocimiento que se integran a las matemáticas."
 - Objetivo general:** "Interpretar gráficas a partir de elementos básicos constitutivos y de información adicional relacionada a la gráfica."
 - Objetivos específicos:**
 1. Revisar (recordar) los conceptos previos vistos en clase de matemáticas sobre relación y gráficas cartesianas.
 2. Introducir la Geociencias como ciencia que estudia el planeta tierra
 3. Lectura e interpretación de gráficos: presión atmosférica en la atmósfera estándar, la temperatura de la atmósfera estándar y la determinación de las capas internas de la tierra por sismología.
 - Reflexión:**
 - Icon: "¿QUE APRENDEREMOS?"
 - Botón: "Pulse aquí"

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADSUAR, Joaquín C. [2.002] Meteorología. España: Thomson-Paraninfo.
- ALBENTOSA Sánchez, Luis M. [1.990] Climatología y medio ambiente. España: Ed. Universidad de Barcelona
- ALONSO R., Marcelo & ACOSTA M., Virgilio [1.984] Introducción a la física Vol. 2. Colombia: Cultural.
- AYLLÓN, Teresa. [2.003] Elementos de meteorología y climatología. México: Trillas 2a ed.
- BELLOCH O., Consuelo [2.014] Las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC.) España: Universidad de Valencia, Unidad de Tecnología Educativa. Recuperada de: <http://www.uv.es/~bellochc/pdf/pwtic1.pdf>
- BRAVO, Agustín A.; PERAFÁN Gerardo A. & BADILLO, Edelmira [2.002] Actualización en didáctica de las ciencias naturales y las matemáticas. Bogotá: Cooperativa Ed. Magisterio
- BROWN, Richard. [2.012] **50** Teorías Matemáticas Creadoras e Imaginativas. Barcelona: Blume ed.
- BOYER, Carl B. [1.987] Historia de la matemática. España: Ed. Alianza
- CALVO Sorando, José P. [2.011] Elementos de Geología por Charles Lyell. España: Ed. Critica
- CAMARGO U., Leonor & GUZMÁN C., Ana A. [2.005] Elementos para una didáctica del pensamiento variacional. Bogotá: Cooperativa editorial Magisterio.
- CASTRO P., Robinson & CASTRO P., Rubby [2.011] Didáctica de las matemáticas: de preescolar a secundaria. Bogotá: ECOE
- CORREA, Juan Carlos & GONZALES, Nelfi [2.012] Gráficos Estadísticos con **R** Medellín: Universidad Nacional de Colombia.
- COLOMBIA APRENDE [2.014] Nuevas formas de enseñar y aprender. Recuperada de: <http://www.colombiaaprende.edu.co/html/directivos/1598/article-88892.html>
- COLOMBIA APRENDE [2.014] Objetos virtuales de aprendizaje e informativos. Recuperado de: <http://www.colombiaaprende.edu.co/html/directivos/1598/article-172374.html>
- COURANT, Richard & ROBBINS, Herbert [1.979] ¿Que es la matemática? España: Aguilar

CUADRAT, José M. & PITA, María F. [1.997] Climatología. España: Ed. Cátedra.

D'AMORE, Bruno [2.006] Didáctica de las matemáticas Bogotá: Cooperativa Ed. Magisterio.

DIMATÉ C., Mónica S. & RODRÍGUEZ S., Benjamín P. [2.000] Matemáticas 8º Colombia: Prentice Hall.

DUNHAM, William [2.006] El universo de las matemáticas. Colección Ciencias Hoy. España: Pirámide

ESPÍNDOLA, Juan M. [2.000] El tercer planeta. México: Fondo de cultura económica.

ExeLearning [2013] Software GNU Fuente: <http://exelearning.net/>; <http://exelearning.org/>

FONT, V. [2007] Epistemología y Didáctica de las Matemáticas. En: Ugarte, F. (ed.). Reportes de investigación. n. 21, serie C, II Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas (pp. 1-48). Lima, Perú: PUCP.

FULLER, Gordon & TARWATER, Dalton [1.999] Geometría Analítica México: Addison-Wesley

GARCÍA Merayo, Félix [2.001] Matemática Discreta. España: Paraninfo-Thomson.

GARCÍA G., José J. [2.005] La Comprensión de las Representaciones Gráficas Cartesianas Presentes en los Libros de Texto de Ciencias Experimentales, sus Características y el Uso que se Hace de Ellas en el Aula. España: Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Facultad de Ciencias de la Educación. ISBN: 84-338-3543-2

GARCÍA P., José M. & SÁNCHEZ – Cabezudo T., Marta [2.009] Representaciones Gráficas, Cap. 5. Recuperada de: <http://ocw.upm.es/fisica-aplicada/tecnicas-experimentales/contenidos/LibroClase/TECap0501.pdf>

GODINO, J. D.; Batanero, C. & FONT, V. [2.003] Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas para Maestros. España: Proyecto Edumat-Maestros

GONZÁLEZ Gutiérrez, Francisco José [2.004] Apuntes De Matemática Discreta Cap. 6. Relaciones España: Universidad De Cádiz, Recuperado de: <http://www2.uca.es/matematicas/Docencia/ESI/1711003/Apuntes/Leccion6.pdf>

GRANVILLE, William Anthony [2.012] Calculo Diferencial e Integral. México: Limusa

HERNÁNDEZ, Carlos A. [2.014] Disertaciones de pedagogía e investigación en enseñanza de las ciencias. Universidad Nacional de Colombia: Seminario de la MECEN.

Instituto Norteamericano de Geociencias [2.013]. ¿Por qué ciencias de la Tierra? Recuperada de: http://www.americangeosciences.org/sites/default/files/WES_SpanishforWeb.pdf USA: <http://www.agiweb.org/associates/list.html>

JOYA V., Anneris del Rocío; GRANDE P., Xiomara y colaboradores. [2.010] Serie Hipertexto matemáticas 6º. Bogotá: Santillana

KLINE, Morris [1.992] El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. España: Ed. Alianza Universidad. Vol. I, II, III.

LACREU, Héctor L. [1.997] Transposición Didáctica de las Geociencias. Argentina: Enseñanza de las Ciencias de la Tierra, (5.1), 37 – 48; I.S.S.N.: 1132-9157

LEDESMA Jimeno, Manuel. [2.011] Principios de meteorología y climatología. España: Paraninfo

LOZANO A., J.; FORERO J., J.; VELA G., P. A.; CORBALÁN, F. y colaboradores. [2.004] Serie de matemáticas SIGMA. España: Vicens Vives

LUQUE Arias, Carlos Julio; MORA Mendieta, Lyda Constanza & TORRES Díaz, Johana Andrea [2.005] Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional. 1 ed.

MARTÍNEZ, Isidoro [2.014] Magnitudes, Unidades y Medida España: Recuperado de: http://webserver.dmt.upm.es/~isidoro/ot1/Units_es.pdf

MENDOZA M., José G. [2013] Apuntes Calculo Diferencial. México: Instituto Tecnológico de Roque. Recuperada de: http://itroquebasicas.com.mx/apuntes/parcial1_calculo_diferencial.pdf

MESA B., Orlando [2.000] Las tendencias en educación matemática y su implementación en los currículos y prácticas docentes. Bogotá: IDEP

Ministerio de Educación Nacional MEN [2.006] Primer Concurso Nacional de Objetos de Aprendizaje: Definición de Objeto de Aprendizaje

Ministerio de Educación Nacional MEN [1.994] LEY 115: Ley general de educación. Colombia: Imprenta nacional.

Ministerio de Educación Nacional MEN [1.998] Serie lineamientos curriculares, Matemáticas. Colombia: Imprenta Nacional.

Ministerio de Educación Nacional MEN [2.006] Estándares básicos de Competencias. Colombia: Imprenta Nacional.

Ministerio de Educación Nacional MEN [2.014] Lineamientos para los programas de formación inicial de maestros, el camino hacia la excelencia educativa. Recuperada de: <http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/w3-article-340968.html>

Ministerio de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones Min. TIC [2.014] Plan Nacional de TIC. Recuperada de: <http://www.eduteka.org/pdfdir/ColombiaPlanNacionalTIC.pdf>

MONROE, James S. WICANDER, Reed. [1.999] Fundamentos de Geología. México: Thomson Learning.

MORALES, Miriam; RODRÍGUEZ C., Víctor H.; GÓMEZ B., Wilson y colaboradores., [2.010] Hipertexto matemáticas 11. Bogotá: Santillana.

MORÍN, Édgar [2005] “Sobre la interdisciplinariedad” Recuperada de: www.pensamientocomplejo.com.ar

MORENO [1.999] Citado en SED BOGOTÁ: “Orientaciones Curriculares para el Campo del Pensamiento Matemático” (2.008, p54)

MUÑOZ Quevedo, José María [2.012] Introducción a la teoría de conjuntos. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, NCTM. [1.992] Gráficas, Relaciones y Funciones. Trad. Velasco Coba, Federico. México: Trillas

NAVA, Alejandro. [2.000] Terremotos. México: Fondo de cultura económica.

PEDRINACI, Emilio [1.998] La ciencia fuera del aula. Didáctica de las ciencias experimentales n. 18, Barcelona: Alambique.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA [2009] Objetos de aprendizaje, prácticas y perspectivas educativas cap. II, Una metodología para el diseño de objetos de aprendizaje. Cali, Colombia

QUEREDA Sala, José [2.005] Curso de climatología general. España: Ed. Universitat Jaume, D.L.

RAMÍREZ Rincón, Marisol; SALAZAR Suárez, Francia L.; JOYA Vega, Anneris; y CELY Rojas, Valeria [2010]. Hipertexto matemáticas 8º. Colombia: Santillana.

REAL ACADEMIA ESPAÑOLA, RAE [2.013] “Relación” Recuperado de: <http://lema.rae.es/drae/?val=relacion>

REAL ACADEMIA ESPAÑOLA, RAE [2.013] “Interpretar” Recuperada de: <http://lema.rae.es/drae/srv/search?key=interpretar>

ROJAS S., Héctor A.; MALDONADO G., Luis F.; LÓPEZ V., Omar y colaboradores [2001] Un ambiente para la formación de competencias en el área de la tecnología y la matemática Bogotá: IDEP.

RUBIO M., Ángel L. [2.014] Historia e Internet: Aproximación al futuro de la labor investigadora. España: Universidad Complutense de Madrid, Dpto. Historia de la comunicación. Recuperada de: <http://pendientedemigracion.ucm.es/info/hcs/angel/articulos/historiaeinternet.pdf>

RUIZ Ayala, Nubia C. [2.002] Desarrollo de potencialidades y competencias. Colombia: ProLibros.

SÁNCHEZ H., Juan C. & FERNÁNDEZ B., José A. [2.003] La enseñanza de la matemática: Fundamentos teóricos y bases psicopedagógicas. Madrid: Ed. CCS.

SEC. EDUCACIÓN BOGOTÁ SED BOG. [2.011] Orientaciones pedagógicas y marco de la política educativa para la ciencia, la tecnología, la informática y los medios de comunicación en la educación del Distrito Capital. Bogotá: UNAD.

SEC. EDUCACIÓN BOGOTÁ [2.011] Referentes conceptuales y metodológicos de la Reorganización Curricular por Ciclos. Colombia: Imprenta nacional.

SHELL CENTRE FOR MATHEMATICAL EDUCATION JOINT MATRICULATION BOARD. [1.990] El lenguaje de funciones y gráficas. Traduce ALAYO, Félix. España: Ministerio de educación y ciencia: Universidad del país Vasco.

SOLER Fajardo, Francisco & NÚÑEZ, Reinaldo [2.009] Fundamentos de matemática. Bogotá, Colombia: ECOE. 3era ed.

TARBUCK, Edward J. LUTGENS, Frederick K. [2.010] Ciencias de la Tierra, una introducción a la geología física. España: Prentice Hall

TORRES, Jurjo [1.998]. Globalización e interdisciplinariedad: el currículo integrado. Madrid: Morata.

VASCO, Carlos E.; ESCOBEDO Hernán I.; NEGRET P., Juan C.; LEÓN, Teresa; BERMÚDEZ, Ángela [2.001] El saber tiene sentido, una propuesta de integración curricular. Bogotá: CINEP

VEERARAJAN, T. [2.008] Matemáticas Discretas. México: Mc Graw Hill.

ZAMBRANO Solarte, Hugo I. [2.003] Introducción al estudio de las ciencias de la Tierra. Colombia: ed. U. Sur Colombiana.

ZILL, Dennis G. & DEWAR, Jacqueline H. [2.012] Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica. México: Mc Graw Hill.