Revista Colombiana de Estadística
Nº 9 - 1984

PALINDROMIA*, SEUDO-PALINDROMIA Y CADENAS DE MARKOV**

Ramón E. Fandiño A.
Profesor Asistente
Universidad Nacional

Francisco Cepeda C.
Profesor Asociado
Universidad Nacional

Resumen. En este artículo se ve cómo la teoría de reflexión de matrices y palindromía aporta nuevas luces sobre la forma como converge la sucesión de matrices que interviene en una cadena de Markov aperiódica e irreducible.

---

* Las palabras oso, reconocer, etc. y los números 11, 101, etc. son palindrómicos (capicúos). Porque leídos de derecha (izquierda) a izquierda (derecha) son las mismas palabras o números.

** Resumen de tesis para optar al grado de Magister Scientiae en la especialidad de Estadística en la Universidad Nacional. Autor:Ramón Fandiño, Director de Tesis: F.J.Cepeda.
Expuesto también en el Encuentro Regional de Medellín, Mayo 2-5 de 1984.

Introducción.

La transposición de matrices es un tema obligado en cualquier curso de álgebra lineal y alrededor de él motivaremos una serie de inquietudes que permitan orientar la comprensión del presente artículo. De otra parte, con ella están relacionados temas tales como: matrices simétricas, traza, polinomio característico, descomposición ortogonal, etc. sobre los cuales giran muchísimas pruebas y criterios útiles en estadística.

Sin embargo, pese a ser un tema bastante trabajado, en nuesta opinión, parece haberse tocado muy unilateralmente al reducirlo al solo caso de la transposición. En el artículo se muestra un ejemplo de cadenas de Markov, en el cual aparecen matrices simétricas distintas a la tradicional (palíndromas).

Aplicaciones de los giros de matrices.

Para apreciar la importancia concedida por los investigadores al movimiento de matrices conocido como transposición y sus temas afines, enunciaremos una modesta gama de sus aplicaciones:

a) Matrices simétricas ($A^T = A$, donde A es una matriz cuadrada). Son matrices simétricas de la varianza y covarianza, la matriz de correlación, la matriz asociada a una forma cuadrática, etc.

Consideremos las variables aleatorias X, Y, Z y sus momentos con respecto al origen de longitud $k+\ell+m$, donde k, ℓ, y m son naturales, que notaremos simplemente como:

$$M_{k,\ell,m} = M(X^k Y^\ell Z^m) = E(X^k Y^\ell Z^m)$$

En particular los momentos de segundo orden, expresados en su correspondiente matriz como:

$$\begin{bmatrix} M_{2,0,0}, & M_{1,1,0} & M_{1,0,1} \\ M_{1,1,0} & M_{0,2,0} & M_{0,1,1} \\ M_{1,0,1} & M_{0,1,1} & M_{0,0,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \gamma_{xy}\sigma_x\sigma_y & \gamma_{xz}\sigma_x\sigma_z \\ \gamma_{xy}\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 & \gamma_{yz}\sigma_y\sigma_z \\ \gamma_{xz}\sigma_x\sigma_y & \gamma_{yz}\sigma_y\sigma_z & \sigma_z^2 \end{bmatrix}$$

O sea, la matriz de correlación R:

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & 1 & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & 1 \end{pmatrix}$$

b) En cuanto a la traza ($tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, $A = (a_{ij})_{m\times n}$), se conoce un sin número de pruebas en análisis multivariante que utilizan dicho concepto, como son: los criterios de Wilks, de Roy, de Hotelling-Lawley, etc.

c) Los polinomios característicos tienen frecuentes aplicaciones en el manejo de ciertos criterios útiles en la reducción de formas cuadráticas a su forma canónica. Recordemos que una forma cuadrática puede expresarse como:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = X^T A X$$

donde X, $X^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, y A es su correspondiente matriz asociada.

Dichas aplicaciones parecen utilizar el concepto de trasposición de matrices y algunos temas afines o relacionados con ella, por eso nos parece que pudiese ampliarse si sugerimos otros movimientos distintos a éste, por lo cual en el presente trabajo lo consideraremos como pionero de los otros movimientos en cuanto a notaciones, propiedades y usos.

Grupo diedro u óctico.

Consideremos el conjunto de las ocho reflexiones y giros de un cuadrado. Este conjunto dotado de la ley de composición interna "composición entre funciones" constituye un grupo que se conoce como diedro u óctico en la literatura algebraica. Veamos algunas especificidades:

$$\mathcal{D}_4 = \begin{cases} \gamma_{d_1},\ \gamma_{d_2},\ \gamma_x,\ \gamma_y & \text{(cuatro simetrías del cuadrado)} \\ \rho_\theta = i\pi/2, & \text{(cuatro rotaciones alrededor de su centro geométrico).} \\ \quad i = 1,2,3,4 & \end{cases}$$

que para facilidad notaremos como

$$\mathcal{D}_4 = \{\gamma_{d_1} = \theta_1,\ \gamma_{d_2} = \theta_2,\ \gamma_x = \theta_3,\ \gamma_y = \theta_4, \ldots, \rho_{2\pi} = \theta_8\}.$$

Utilizando una notación semejante a la de la transposición observaremos que

$$\begin{aligned} \theta_i :\ & \mathcal{D}_4 \times M \to M \\ & (\theta_i, m) \to m^{\theta_i} = \theta_i(m), \end{aligned}$$

donde M es el conjunto de las matrices cuadradas $n \times n$.

En este artículo profundizaremos en el estudio de solamente dos movimientos distintos al usual (transposición), son ellos: $\theta_3 = \gamma_x = RV$ que llamaremos simplemente "Reflejo vertical" y que en lo sucesivo notaremos como RV.

$\theta_4 = \gamma_y = RH$, es el "Reflejo horizontal" (RH).

Movimientos que satisfacen propiedades bastante similares a las de la trasposición en algunos casos, como:

Involutiva: $(A^{RH})^{RH} = A$, $(A^{RV})^{RV} = A$

Linealidad: $(A+B)^{RH} = A^{RH}+B^{RH}$, $(A+B)^{RV} = A^{RV}+B^{RV}$

$(cA)^{RH} = cA^{RH}$, $(cA)^{RV} = cA^{RV}$

$\forall A,B \in M$, $\forall c \in R$.

En tanto que en otras difieren notoriamente, tales como, $(AB)^{RV} = A^{RV} \cdot B$. Igualmente se pueden obtener resultados análogos con otros productos útiles en estadística como:

a) Producto de Hadamard
b) Producto de Kronecker
c) Producto de Khatri-Rao
d) Inversa común e inversa generalizada, etc.

Sin embargo no ahondaremos en detalles.

Matrices palíndromas.

Consideremos el conjunto de matrices

$$P_{\delta}(\theta_i) = \{m,\ m^{\theta_i} = m\}, \text{ donde } \quad \theta_i \in \mathcal{D}_4, \quad m \in M$$

que no es otro cosa que ocho conjuntos de matrices simétricas desde puntos de vista diferentes, o sea matrices que permanecen inalteradas según se haga cualquiera de los movimientos o giros θ_i, anteriormente considerados, especies de "puntos fijos".

Fueron objetos del presente trabajo los conjuntos:

$$P_{\delta}(\theta_3) = P_{\delta}(RV) = \{m, m^{RV} = m\},$$

$$P_{\delta}(\theta_4) = P_{\delta}(PH) = \{m, m^{RH} = m\},$$

que llamaremos conjunto de las matrices palíndromas verticales al primero, en tanto que el segundo el de las palíndromas horizontales. Hemos escogido el nombre de palíndroma puesto que describe perfectamente ciertas propiedades que queremos caracterizar aquí. Recordemos también que a los números 11, 101 y a otros se les conoce como primos palíndrómicos o capicúos, que leídos de izquierda a derecha o de derecha a izquierda son los mismos.

A p l i c a c i o n e s.

Estas nuevas simetrías amplian también el número de aplicaciones, por eso creemos conveniente ilustrar con un ejemplo en cadenas de Markov de su utilización.

Recordemos algunas definiciones básicas.

Un *Proceso Estocástico* es una familia $\{X_t\}_{t \in T}$ de variables aleatorias.

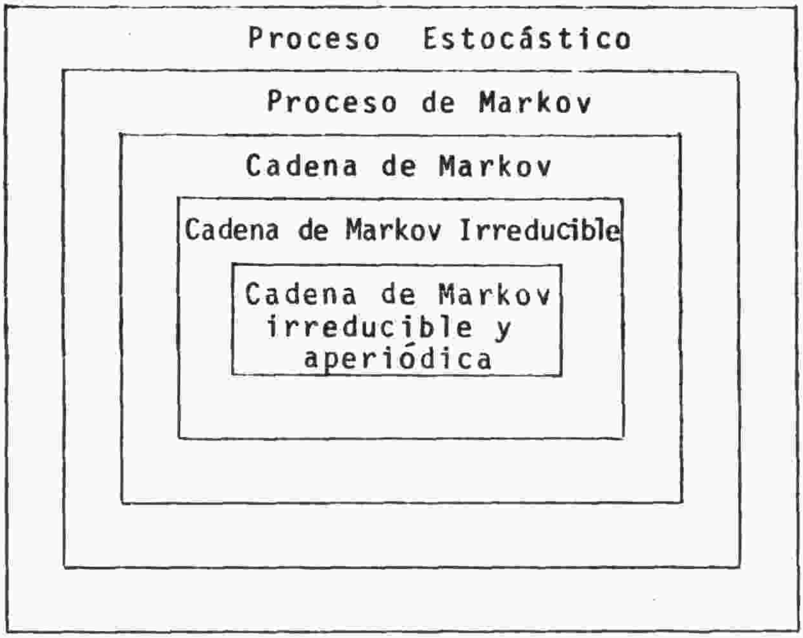
El conjunto T es el conjunto de índices o conjunto de tiempo. El conjunto S es el conjunto de todos los posibles valores que pueden tomar las variables aleatorias X_t; se llama el espacio de estados del proceso.

Un *Proceso de Markov* es un *Proceso Estocástico* en el cual si, dado $t \in T$ y la variable aleatoria X_t se tiene que los valores de la variable aleatoria X_s con $s > t$ no dependen de los valores de la variable aleatoria X_u con $u < t$.

Una *Cadena de Markov* es un *Proceso de Markov* en el cual S y T son discretas.

Una *Cadena de Markov irreducible* es una *Cadena de Markov* en la cual todos los estados se comunican.

Una *Cadena de Markov irreducible y aperiódica* es una *Cadena de Markov Irreducible* en la cual se pasa de un estado a otro en cualquier número de etapas.



<u>Teorema 1.</u> *Toda cadena de Markov irreducible y aperiódica tiene sus estados recurrentes positivos.*

Un *Estado Aperiódico y Recurrente Positivo* se llama *Estado Ergódico*.

<u>Teorema 2</u>. *Sea P la matriz de transición en una etapa de una cadena de Markov irreducible y aperiódica; entonces existe un N entero positivo tal que para todo $n \geq N$ se tiene que $P^n = P^{(n)}$ no tiene elementos nulos.*

<u>Teorema 3</u>. *Sea P una matriz de Markov aperiódi-*

ca e irreducible con m estados. (Estos m estados son de hecho recurrentes positivos). Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \Pi = \begin{bmatrix} \pi^T \\ \pi^T \\ \vdots \\ \pi^T \end{bmatrix}_{m\times m} ; \text{ donde } \pi = [\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{m-1}]$$

$$y \quad \sum_{i=0}^{m-1} \pi_i = 1 \quad y \quad 0 \leqslant \pi_i \leqslant 1 \quad y \ \Pi \text{ es unica;}$$

$$y \quad \Pi P = P\Pi = \Pi \quad y \quad \Pi\ P^n \Pi = \Pi;$$

$$y \quad \Pi = [\pi_0\, \Pi,\ \pi_1\, \Pi, \ldots, \pi_{m-1}\Pi].$$

La matriz Π se llama matriz estacionaria o matriz límite y el vector π se llama distribución estacionaria de la cadena de Markov con matriz de probabilidad de transición P.

Nota. Obsérvese que Π es palíndroma vertical y por consiguiente $\Pi = E\Pi$.

Teorema 4. *Si P es estocástica, entonces P^n también lo es.*

Palindromía y Matrices Estacionarias.

Teorema 5. *1) Si P es una matriz de Markov aperiódica e irreducible con m estados y Π es su* *correspondiente matriz límite, entonces* Π *es palíndroma vertical. En efecto, por el Teorema 3,* Π *es de la forma:*

$$\Pi = [\pi_0 \mathbb{1}, \pi_1 \mathbb{1}, \ldots, \pi_{m-1}\mathbb{1}].$$

2) Si P es una matriz de Markov aperiódica e irreducible con m estados y es además palíndroma vertical y Π *es su correspondiente matriz límite, entonces* Π *es palíndroma vertical. Por (1) es inmediato.*

3) Si P es una matriz de Markov aperiódica e irreducible con m estados y es ademas palíndroma horizontal y Π *es su correspondiente matriz límite, entonces* Π *es palíndroma doble. Por (1)* Π *es palíndroma vertical; veamos que además* Π *es palíndroma horizontal.*

Tenemos $\Pi P = \Pi$, *luego* $(\Pi P)E = (\Pi)E$, *o sea* $\Pi(PE) = \Pi E$. *Como P es palíndroma horizontal,* $\Pi P = \Pi E$. *Pero* $\Pi P = \Pi$, *luego* $\Pi E = \Pi$, *luego* Π *es palíndroma horizontal. Como* Π *es palíndroma vertical y horizontal, es palíndroma doble.*

4) Si P es una matriz de Markov aperiódica e irreducible con m estados y es además palíndroma doble, y Π *es su correspondiente matriz límite, entonces* Π *es palíndroma doble.*

Este resultado es inmediato en virtud de (3).

5) Si P es una matriz de Markov aperiódica e irreducible con m estados y es además doblemente estocástica, y Π es su correspondiente matriz límite, entonces Π es tetrasimétrica y de la forma: $\Pi = \frac{1}{m}\mathbb{1}\mathbb{1}^T$. En efecto: Como P es doblemente estocástica, entonces P^T es estocástica y ademas aperiódica irreducible, luego el $\lim_{n\to\infty} (P^T)^n = \Pi_1$, donde Π_1 es palíndroma vertical de la forma $\Pi_1 = |\alpha_o\mathbb{1},\alpha_1\mathbb{1},\ldots,\alpha_{m-1}\mathbb{1}|$. Pero $\lim_{\to\infty} P^n = \Pi$ y $(P^T)^n = (P^n)^T$ y Π y Π_1 son únicas, luego $\Pi_1 = \Pi^T$. Pero como por (1) Π es palíndroma vertical, entonces Π^T o sea Π_1 es palíndroma horizontal. Ademas, Π_1 es una matriz estacionaria, de donde Π_1 es palíndroma doble. Luego tenemos:

$\Pi = [\pi_o\mathbb{1},\pi_1\mathbb{1},\ldots,\pi_{m-1}\mathbb{1}]$, *y* $\Pi_1 = [\alpha_o\mathbb{1},\alpha_1\mathbb{1},\ldots,\alpha_{m-1}\mathbb{1}]$

y $\Pi_1 = \Pi^T$.

Luego:
$$[\alpha_o\mathbb{1},\alpha_1\mathbb{1},\ldots,\alpha_{m-1}\mathbb{1}] = \begin{bmatrix} \pi_o\mathbb{1}^T \\ \pi_1\mathbb{1}^T \\ \vdots \\ \pi_{m-1}\mathbb{1}^T \end{bmatrix}.$$

De donde: $\alpha_o = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{m-1} = \pi_o = \pi_1 = \ldots = \pi_{m-1}$.

O sea: $\Pi_1 = \Pi = \alpha\,\mathbb{1}\,\mathbb{1}^T$.

Pero como Π_1 es estocastica (doblemente estocastica), entonces: $\alpha = \frac{1}{m}$, donde m es el orden de P. Luego:
$$\Pi = \frac{1}{m}\,\mathbb{1}\,\mathbb{1}^T.$$

6) Si P es una matriz de Markov aperiódica e irreducible con m estados y es además doblemente estocástica y es palíndroma, o palíndroma horizontal, o palíndroma doble, o tetrasimétrica y Π es su correspondiente matriz límite, entonces Π es tetrasimétrica y de la forma $\Pi = \frac{1}{m}\mathbb{1}\,\mathbb{1}^T$. Este resultado es inmediato en virtud de (5).

De este teorema podemos concluir:

(1) Toda matriz estacionaria (límite) o es palíndroma vertical o es palíndroma doble, o es tetrasimétrica; ó

(2) Si P es una matriz de Markov aperiódica e irreducible con m estados, entonces la sucesión de matrices $\{P^n\}_{n=1,2,...}$ converge a una matriz palíndroma vertical o palíndroma doble, o tetrasimétrica, ó

(3) A toda cadena de Markov aperiódica e irreducible con m estados le corresponde una única matriz estacionaria palíndroma vertical, o palíndroma doble, o tetrasimétrica.

<u>Teorema 6</u>. *Si Π es una matriz límite correspondiente a una cadena de Markov aperiódica e irreducible con m estados, entonces Π es idempotente. En efecto:*

$$\Pi^2 = \begin{bmatrix} \pi^T \\ \pi^T \\ \vdots \\ \pi^T \end{bmatrix} \cdot [\pi_o \mathbb{1}, \pi_1 \mathbb{1}, \ldots, \pi_{m-1} \mathbb{1}] = \begin{bmatrix} \pi_o \pi_1 \ldots \pi_{m-1} \\ \pi_o \pi_1 \ldots \pi_{m-1} \\ \pi_o \pi_1 \ldots \pi_{m-1} \end{bmatrix}$$

luego $\Pi^2 = \Pi$.

<u>Teorema 7</u>. *Si* Π *es una matriz correspondiente a una cadena de Markov aperiódica e irreducible con m estados, entonces el reflejo horizontal de* Π*, o sea* Π^{RH} *es inversa generalizada de* Π.

En efecto: Como Π *es idempotente, entonces*

$$\Pi = \Pi^2 \quad y \quad \Pi = \Pi^3 = \Pi\ \Pi\ \Pi.$$

Luego: $\Pi = \Pi\ \Pi\ EE\ \Pi$.

Pero $\Pi E = \Pi^{RH}$ *y* $E\Pi = \Pi$*, ya que* Π *es palíndroma vertical. Luego*

$$\Pi = \Pi\Pi^{RH}\ \Pi.$$

De donde Π^{RH} *es una inversa generalizada de* Π.

<u>Seudo Palindromía</u>.

Para ilustrar los conceptos de esta sección utilizaremos las matrices de probabilidades de transición y sus correspondientes sucesiones de potencias de un proceso Markoviano relacionado con el sistema de descuentos y sobreprimas para el seguro de responsabilidad civil en automóviles (Granados, 1983).

La matriz A (Anexo 1) representa las probabilidades de transición entre los diferentes estados de descuentos del proceso markoviano correspondiente al sistema de descuentos vigente, y la matriz B (Anexo 2) representa las probabilidades de transición entre los diferentes estados de descuentos del proceso markoviano correspondiente a un sistema de descuentos propuesto (Granados, 1983).

Dada una cadena de Markov aperiódica e irreducible, es decir, dada su matriz de probabilidad de transición en una etapa y la correspondiente sucesión de potencias de la matriz mencionada se observa que a medida que n crece, la sucesión tiende a estabilizarse y tiende a un límite (la matriz estacionaria Π). Pero recordemos que esta matriz es palíndroma vertical y por consiguiente las sucesivas potencias de la matriz original se van tornando en forma progresiva en palíndromas verticales, es decir, a partir de cierta potencia (20 y 40) (Anexos 3, 4) las matrices de la sucesión son casi palíndromas. Este hecho nos motiva a definir un tipo especial de matrices a saber; las matrices seudopalíndromas. Como se verá más adelante, toda sucesión de matrices aperiódicas e irreducibles converge a su matriz estacionaria o límite a través de una "nube" de matrices seudopalóndromas.

En la definición vamos a utilizar la norma de operadores como sigue

$$\|A\| = \inf \{k / \|Ax\| \leqslant k\|x\| \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n\}$$

y hacemos las siguientes consideraciones:

Como $\lim\limits_{n\to\infty} P^n = \Pi$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (P^n - \Pi) = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \|P^n - \Pi\| = 0$.

Luego necesariamente existe N entero positivo tal que para todo $n \geqslant N+1$ se tiene que $\|PP^{RH}P - \Pi\| > \|P^n - \Pi\|$ y por consiguiente N es el mayor entero para el cual se cumple que $\|PP^{RH}P - \Pi\| \leqslant \|P^N - \Pi\|$.

Definición. Sea P la matriz de probabilidad de transición en una etapa de una cadena de Markov aperiódica e irreducible y sea Π su matriz estacionaria.

Se dice que P es seudopalíndroma ergódica de grado N si N es el mayor entero para el cual se tiene que:

$$\|PP^{RH} P - \Pi\| \leqslant \|P^N - \Pi\|.$$

Consecuencias de la definición.

1) Si P es seudopalíndroma ergódica de grado N,

es claro entonces que $\|PP^{RH}P-\Pi\| > \|P^{N+1}-\Pi\|$ y por consiguiente, $PP^{RH}P \approx P^N$ y $PP^{RH}P$ está más cerca de Π que P^{N-1} de Π.

2) Toda matriz estacionaria es seudopalíndroma ergódica de grado 1, pues $\|\Pi\Pi^{RH}\Pi-\Pi\| \leqslant \|\Pi^1-\Pi\|$.

3) Toda matriz P de probabilidad de transición en una etapa correspondiente a una cadena de Markov aperiódica e irreducible es seudopalíndroma ergódica de grado N para algún N entero positivo. Esto resulta de las consideraciones anteriores a la definición de seudopalindromía y de la misma definición de seudopalindromía.

4) De la consecuencia (1) se desprende inmediatamente que la sucesión $\{P^mP^{RH}P^m\}$ es mucho más rápida que la sucesión $\{P^n\}$ y desde luego converge a la misma matriz estacionaria Π. En efecto:

$$\Pi = \Pi^2 = \Pi\Pi = \Pi\Pi = \Pi E\Pi = (\lim_{m\to\infty} P^{m+1})E(\lim_{m\to\infty} P^m)$$

$$= (\lim_{m\to\infty} P^m PE)\ (\lim_{m\to\infty} P^m) = \lim_{m\to\infty} (P^m(PE)P^m)$$

$$= \lim_{m\to\infty} P^mP^{RH}P^m = \Pi.$$

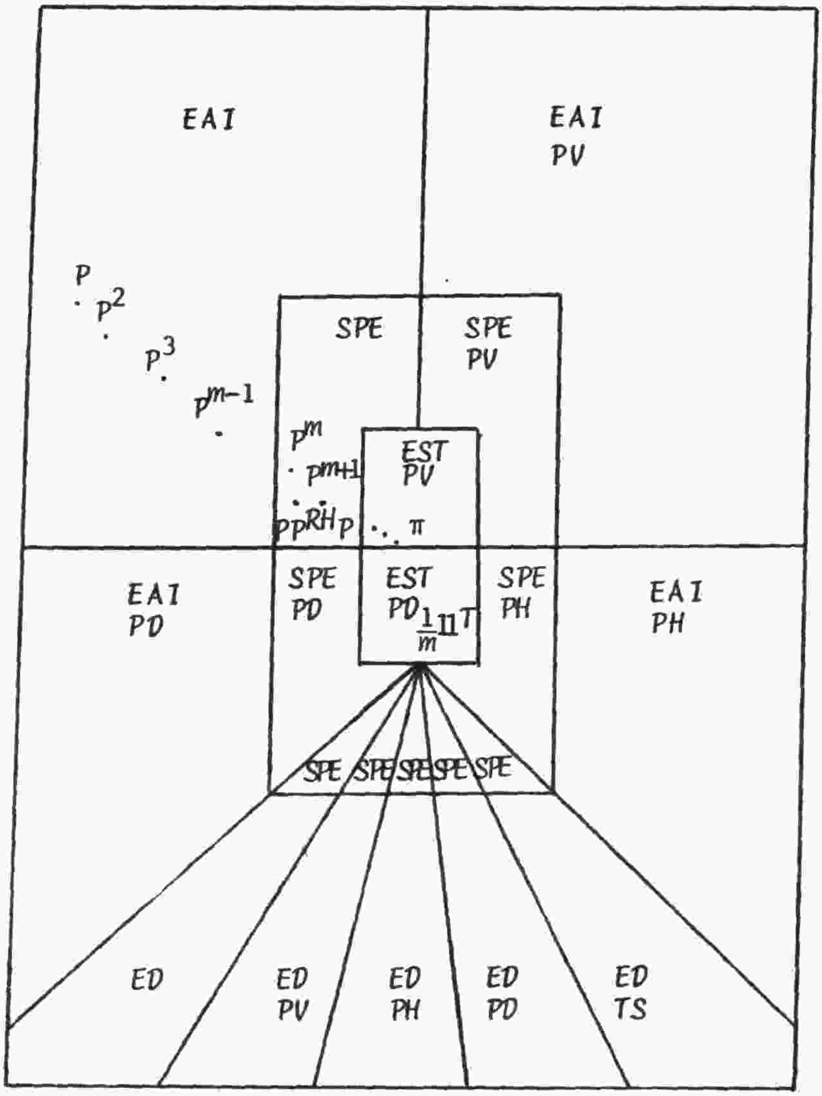
Con base en las anteriores consecuencias de la definición de seudopalindromía nos permitimos recomendar lo siguiente: Cada vez que se quiera calcular la matriz estacionaria Π correspondiente a una cadena de Markov aperiódica e irreducible en lugar de calcular la sucesión $\{P^n\}$ se calculará en su lugar la sucesión $\{P^m P^{RH} P^m\}$. Como ésta es más rápida se ganará tiempo de computador lo que redunda en un beneficio económico.

En efecto, en los ejemplos, la sucesión $\{A^n\}$ se estabiliza en 26 pasos mientras que la sucesión $\{A^m A^{RH} A^m\}$ se estabiliza en 21 pasos.

Asi mismo, la sucesión $\{B^n\}$ se estabiliza en 70 pasos mientras que la sucesión $\{B^m B^{RH} B^m\}$ se estabiliza en 66 pasos (Fandiño, 1984).

5) Podemos decir finalmente que si P es una matriz de Markov aperiódica e irreducible y $\lim_{n\to\infty} P^n = \Pi$; la convergencia de la sucesión $\{P^n\}_{n\in N}$ hacia Π se hace a través de una "nube" de matrices seudopalíndromas hasta llegar (en el límite) a la matriz Π. Teniendo en cuenta que cuando la sucesión $\{P^n\}_{n\in N}$ penetra en la "nube" (a partir de N) la convergencia hacia Π es rapidísima. Lo cual a su vez implica que las matrices con las cuales se trabaja en la práctica son precisamente matrices *seudopalíndromas ergódicas* (ver Figura 1).

ESTOCASTICAS APERIODICAS IRREDUCIBLES



EAI: Estocástica aperiódica irreducible

PV: Palíndroma vertical

PH: Palíndroma horizontal

PD: Palíndroma doble

SPE: Seudo palíndroma ergódica

EST: Estacionaria

ED: Estocástica doble

TS: Tetrasimétrica.

Conclusiones.

1) El grupo diedro ha permitido ampliar la opinión que se tiene del concepto de trasposición de matrices mediante ocho movimientos análogos y por ende la ampliación de conceptos afines o relacionados con el de la trasposición y el de sus aplicaciones.

2) El teorema de descomposición ortogonal que en nuestro caso corresponde a la descomposición palíndroma de vectores, sugiere nuevas alternativas en la explicación e interpretación de los modelos lineales por cuanto permite apreciar ciertos efectos especiales en las variables explicativas de dichos modelos, no especificada en este resumen.

3) En cuanto a la convergencia ergódica, la palindromía caracteriza cómo se efectúa realmente este fenómeno además provee la construcción de sucesiones que convergen rápidamente a la matriz estacionaria.

4) La palindromía tiene grandes posibilidades de aplicación en el estudio de formas cuadráticas, estudio de arreglos factoriales, cristalografía, etc. lo cual prevee la posibilidad de realizar investigaciones futuras.

*

BIBLIOGRAFIA

Fandiño A. Ramón E. *Reflexión de Matrices y Palindromía*. Rev. Col. de Estadística Nº 5, Universidad Nal. de Col., Bogotá, 1982.

Fandiño A. Ramón E. y Cepeda C. Francisco. *La Transposición y otras simetrías de matrices cuadradas*. Rev. Col. de Estadística Nº 7, Universidad Nal. de Col., Bogotá, 1983.

Fandiño A. Ramón E. y Cepeda C. Francisco. *Simetrías y giros de matrices cuadradas*. Matemática, enseñanza universitaria Nº30, Edit. Yu Takeuchi, Bogotá, 1984.

Fandiño A. Ramón. *Reflexión de Matrices y Palindromía con resultados estadísticos*. Tesis de Magister. Universidad Nal. de Col., Bogotá, 1984.

Granados D. Manuel A. *Procesos Markovianos del* *sistema de descuentos y sobreprimas para el seguro de responsabilidad civil en automóviles*. Trabajo de grado. Carrera de Estadística, Universidad Nal. de Col., Bogotá, 1983.

* *

ANEXO 1

Matriz del sistema actual

A	col.1	col.2	col.3	col.4	col.5
ROW1	0.909774	0	0	0	0.0902256
ROW2	0.95057	0	0	0	0.0494297
ROW3	0	0.774262	0	0	0.225738
ROW4	0	0	0.76512	0	0.23488
ROW5	0	0	0	0.837079	0.162921

ANEXO 2

Matriz del sistema propuesto

B	*col. 1*	*col. 2*	*col. 3*	*col. 4*	*col. 5*
ROW1	0.83323	0.139754	0.0226393	0.00366743	0.000594101
ROW2	0.83323	0	0.139754	0.0226393	0.00366743
ROW3	0	0.83323	0	0.139754	0.0226393
ROW4	0	0	0.83323	0	0.139754
ROW5	0	0	0	0.83323	0
ROW6	0	0	0	0	0.83323
ROW7	0	0	0	0	0
ROW8	0	0	0	0	0
ROW9	0	0	0	0	0

B	*col. 6*	*col. 7*	*col. 8*	*col. 9*
ROW1	0.000096241	0.00001559	0.000002526	4.8900E-07
ROW2	0.000594101	0.000096241	0.00001559	0.000003015
ROW3	0.00366743	0.000594101	0.000096241	0.000018605
ROW4	0.0226393	0.00366743	0.000594101	0.000114846
ROW5	0.139754	0.0226393	0.00366743	0.000708947
ROW6	0	0.139754	0.0226393	0.00437638
ROW7	0.83323	0	0.139754	0.0270157
ROW8	0	0.83323	0	0.16677
ROW9	0	0	0.83323	0.16677

ANEXO 3

Exponenciación de la matriz dada en el sistema de descuentos en seguros de automóviles

A24	col.1	col.2	col.3	col.4	col.5
ROW1	0.637291	0.0604899	0.078126	0.10211	0.121983
ROW2	0.637291	0.0604899	0.078126	0.10211	0.121983
ROW3	0.637291	0.06049	0.078126	0.10211	0.121983
ROW4	0.637291	0.06049	0.078126	0.10211	0.121983
ROW5	0.637291	0.0604901	0.0781261	0.10211	0.121983

A25	col.1	col.2	col.3	col.4	col.5
ROW1	0.637291	0.06049	0.078126	0.10211	0.121983
ROW2	0.637291	0.0604899	0.078126	0.10211	0.121983
ROW3	0.637291	0.06049	0.078126	0.10211	0.121983
ROW4	0.637291	0.06049	0.078126	0.10211	0.121983
ROW5	0.637291	0.06049	0.078126	0.10211	0.121983

A26	col.1	col.2	col.3	col.4	col.5
ROW1	0.637291	0.06049	0.078126	0.10211	0.121983
ROW2	0.637291	0.06049	0.078126	0.10211	0.121983
ROW3	0.637291	0.06049	0.078126	0.10211	0.121983
ROW4	0.637291	0.06049	0.078126	0.10211	0.121983
ROW5	0.637291	0.06049	0.078126	0.10211	0.121983

A27	col.1	col.2	col.3	col.4	col.5
ROW1	0.637291	0.06049	0.078126	0.10211	0.121983
ROW2	0.637291	0.06049	0.078126	0.10211	0.121983
ROW3	0.637291	0.06049	0.078126	0.10211	0.121983
ROW4	0.637291	0.06049	0.078126	0.10211	0.121983
ROW5	0.637291	0.06049	0.078126	0.10211	0.121983

A28	col.1	col.2	col.3	col.4	col.5
ROW1	0.637291	0.06049	0.078126	0.10211	0.121983
ROW2	0.637291	0.06049	0.078126	0.10211	0.121983
ROW3	0.637291	0.06049	0.078126	0.10211	0.121983
ROW4	0.637291	0.06049	0.078126	0.10211	0.121983
ROW5	0.637291	0.06049	0.078126	0.10211	0.121983

*

ANEXO 4

Exponenciación de la matriz estocástica propuesta en el sistema de descuentos en seguros de automóviles

B68	*col.1*	*col.2*	*col.3*	*col.4*
ROW1	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW2	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW3	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW4	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW5	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW6	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW7	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW8	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW9	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811

B69	*col.1*	*col.2*	*col.3*	*col.4*
ROW1	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW2	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW3	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW4	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW5	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW6	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW7	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW8	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW9	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811

B70	*col.1*	*col.2*	*col.3*	*col.4*
ROW1	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW2	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW3	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW4	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW5	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW6	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW7	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW8	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW9	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811

B80	*col.1*	*col.2*	*col.3*	*col.4*
ROW1	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW2	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW3	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW4	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW5	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW6	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW7	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW8	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811
ROW9	0.761214	0.152356	0.0551747	0.0199811

col.5	col.6	col.7	col.8	col.9
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948985	0.000343669	0.000124458

col.5	col.6	col.7	col.8	col.9
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948985	0.000343669	0.000124458

col.5	col.6	col.7	col.8	col.9
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000949984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124459
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458

col.5	col.6	col.7	col.8	col.9
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124459
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124459
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458
0.00723601	0.00262047	0.000948984	0.000343669	0.000124458