Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen X No. 2 (2003), pp. 84–91

ESPACIOS TOPOLÓGICOS T(δ)

JESÚS ANTONIO ÁVILA G. (*)
ABEL AUGUSTO RODRÍGUEZ (**)

Resumen. En este artículo se hace un estudio de los espacios topológicos $T(\delta)$, se estudian algunas de sus propiedades como preservación por funciones continuas, por subespacios y por productos entre otras. Además se dan algunas caracterizaciones de ellos, utlizando el orden de especialización y se utilizan estos resultados para caracterizar los anillos cuyo espectro primo es $T(\delta')$.

Abstract. In this paper we study the $T(\delta)$ spaces, we give several characterizations and some properties of them, we study their discrete structure as poset when it is endowed of the specialization order and we apply the results obtained to the prime spectrum of a ring, characterizing the rings whose spectrum is $T(\delta')$.

Palabras clave: Espacio topológico, conjunto parcialmente ordenado, punto de acumulación, espectro primo, espacio $T(\delta)$.

Key Words: Topological space, poset, accumulation point, prime spectrum, $T(\delta)$ space.

Matematics Subject Classifications: 54D10, 54A10.

1. Introducción

La noción de espacio topológico $T(\delta)$ fue introducida por Thron y Aull en [5], allí por la misma definición se observa que éste es un axioma más fuerte que

(*) Jesús Antonio Ávila G., Departamento de Matemáticas y Estadística Universidad del Tolima, Ibagué (Colombia).
e-mail: javila@ut.edu.co
(**) Abel Augusto Rodríguez, Estudiante de Matemáticas con Énfasis en Estadística, Universidad del Tolima, Ibagué (Colombia).
e-mail: abeldat@hotmail.com
Trabajo parcialmente financiado por el Centro de Investigaciones de la Universidad del Tolima.

T_D y que T_1 no implica $T(\delta)$. Además se menciona su interesante estructura discreta cuando se dota de un orden especial, pero no hace algún desarrollo sobre el tema. Además es importante mencionar que en la literatura consultada no se encuentra un estudio detallado de las principales propiedades de estos espacios, por lo cual el objetivo del presente artículo es estudiar los espacios $T(\delta)$ en cuanto a subespacios, productos, preservación por funciones continuas y por homeomorfismos, mostrar su relación con los espacios $T(\gamma)$ y T_D definidos en [5], utilizar el orden de especialización para hacer algunas caracterizaciones de ellos y observar algunas de sus propiedades. Finalmente aplicar estos resultados para caracterizar los anillos cuyo espectro primo es $T(\delta')$.

2. Espacios Topológicos $\mathbf{T}(\delta)$

En este numeral se introducen los espacios topológicos $T(\delta)$ y se hace un estudio de algunas de sus propiedades como preservación por subespacios, por productos, imagen bajo funciones continuas, su relación con los espacios $T(\gamma)$ y T_D, entre otras.

Definición 2.1. Sea X un espacio topológico, se dice que $A \subseteq X$ tiene un punto genérico si A es igual a la adherencia de un punto.

Definición 2.2. Un espacio topológico X se llama [5]:

a) $T(\delta)$ si para todo $x \in X$, $\{x\}'$ tiene un punto genérico.

b) $T(\gamma)$ si para todo $x \in X$, $\{x\}'$ es unión de conjuntos disyuntos, cada uno de los cuales tiene un punto genérico.

c) T_D si para todo $x \in X$, $\{x\}'$ es cerrado.

Obsérvese que todo espacio $T(\delta)$ es $T(\gamma)$ y T_D y en consecuencia también T_0. Sin embargo como se muestra en el siguiente ejemplo, existen espacios $T(\gamma)$ y T_D que no son $T(\delta)$, es decir, $T(\delta) \subsetneqq T(\gamma) \cap T_D$.

Ejemplo 2.3. Considérese $\mathbb{Z}$ con el orden usual en los enteros negativos, el inverso del usual en los enteros positivos, cero como elemento máximo y entre un entero positivo y uno negativo no hay relación. Este conjunto dotado con la topología generada por las colas a derecha, es un espacio $T(\gamma)$ y T_D, pero no es $T(\delta)$ ya que el conjunto de puntos de acumulación del máximo no tiene un punto genérico.

En la siguiente proposición se dan las condiciones para que un espacio T_0 sea $T(\delta)$.

Proposición 2.4. Si X es un espacio T_0, entonces $\{x\}'$ tiene un punto genérico, si y sólo si, existe $p \in \{x\}'$ tal que $\{x,p\}' = \overline{\{p\}}$.

Demostración. $\Rightarrow$) Como $\{x\}'$ tiene un punto genérico, existe p tal que $\{x\}' = \overline{\{p\}}$, luego $\{x,p\}' = \{x\}' \cup \{p\}' = \overline{\{p\}}$.

$\Leftarrow$) Veamos que $\{x\}' = \overline{\{p\}}$. Si $a \in \{x\}'$ entonces $a \in \{x,p\}' = \overline{\{p\}}$. Ahora si $b \in \overline{\{p\}}$, entonces $b \in \{x\}'$. $\square$

Corolario 2.5. Sea X un espacio T_0. X es $T(\delta)$, si y sólo si, para todo $x \in X$ existe $p \in \{x\}'$ tal que $\{x,p\}' = \overline{\{p\}}$.

Ya que los espacios T_D están caracterizados como aquellos donde todo punto es la intersección de un abierto con un cerrado, se tiene la siguiente caracterización de los espacios $T(\delta)$, cuando el espacio es T_0.

Proposición 2.6. Sea X un espacio T_0. X es $T(\delta)$, si y sólo si, para todo $x \in X$ existe $p \in \{x\}'$, tal que $\{x\} = \overline{\{x\}} \cap \overline{\{p\}}^c$.

Demostración. $\Rightarrow$) Como $\{x\}' = \overline{\{p\}}$, para algún p, entonces $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{p\}}^c = (\{x\} \cup \{x\}') \cap \overline{\{p\}}^c = \{x\}$.

$\Leftarrow$) $\{x\}' = \overline{\{x\}} \setminus \{x\} = \overline{\{x\}} \setminus (\overline{\{x\}} \cap \overline{\{p\}}^c) = \overline{\{x\}} \cap \overline{\{p\}} = \overline{\{p\}}$. $\square$

Proposición 2.7. Si (X,τ) es $T(\delta)$, entonces X es infinito.

Demostración. Supóngase que X es $T(\delta)$ y X es finito. Sea $X = \{x_1, ..., x_n\}$, entonces para todo i se tiene $\{x_i\}' = \overline{\{p_i\}}$, para algún $p_i \in X$. En particular

$$\begin{aligned}
\{x_1\}' &= \overline{\{x_{j_1}\}}, \text{ para algún } j_1, 2 \leq j_1 \leq n \\
&= \{x_{j_1}\} \cup \{x_{j_1}\}', j_1 \neq 1 \\
&= \{x_{j_1}\} \cup \overline{\{x_{j_2}\}}, j_2 \neq j_1, 1 \\
&= \{x_{j_1}\} \cup \{x_{j_2}\} \cup \{x_{j_2}\}' \\
&= \{x_{j_1}\} \cup \{x_{j_2}\} \cup \overline{\{x_{j_3}\}}, j_3 \neq j_2, j_1, 1
\end{aligned}$$

Como el conjunto de índices es finito, existe un j_k, $2 \leq j_k \leq n$, tal que $\{x_{j_k}\}' = \emptyset$, luego $\{x_{j_k}\}'$ no tiene un punto genérico, lo cual es falso. $\square$

No todo subespacio infinito de un espacio $T(\delta)$ es $T(\delta)$, como se muestra en el siguiente ejemplo. Esta es una propiedad heredada por los subespacios cerrados.

Ejemplo 2.8. En $\mathbb{Z}$ con la topología generada por las colas a derecha, el subespacio $A = [1, \infty)$ no es $T(\delta)$ pues $\{1\}' = \emptyset$.

Proposición 2.9. Todo subespacio cerrado A de un espacio $T(\delta)$ es $T(\delta)$.

Demostración. Si $a \in A$, entonces $\{a\}'_A = \{a\}'_X \cap A$ y como X es $T(\delta)$, existe p tal que $\{a\}'_X = \overline{\{p\}}_X$, entonces $\{a\}'_A = \overline{\{p\}}_X \cap A$. Como A es cerrado, $p \in A$ y se tiene que $\{a\}'_A = \overline{\{p\}}_A$. $\square$

El recíproco de la proposición anterior no es cierto, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.10. $\mathbb{Z}$ con la topología generada por las colas a derecha es un espacio $T(\delta)$. Ahora, el subespacio $2\mathbb{Z}$ también es $T(\delta)$, pero no es cerrado.

En los siguientes ejemplos se muestra que ser $T(\delta)$ no es estable por productos y tampoco es una propiedad que se preserva por funciones continuas. Sin embargo sí es un invariante topológico.

Ejemplo 2.11. $\mathbb{Z}$ con la topología generada por las colas a derecha es un espacio $T(\delta)$, pero $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con la topología producto no lo es.

Ejemplo 2.12. Si f es una función constante de $\mathbb{Z}$ con la topología generada por las colas a derecha, en $\mathbb{Z}$ con la topología de cofinitos, se tiene que f es continua pero $f(\mathbb{Z})$ no es $T(\delta)$, ya que es un conjunto finito.

Proposición 2.13. La propiedad $T(\delta)$ es un invariante topológico.

Demostración. Sea X un espacio $T(\delta)$ y $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Si $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, entonces $\{f(x)\}' = f(\{x\}') = \{y\}'$. Como existe $p \in X$ tal que $\{x\}' = \overline{\{p\}}$, entonces $f(\overline{\{p\}}) = \overline{f(p)} = \{y\}'$. Por tanto Y es $T(\delta)$. $\square$

En el siguiente ejemplo se muestra que la propiedad $T(\delta)$ no se preserva por expansión de la topología, propiedad satisfecha por la mayoría de axiomas entre T_0 y T_1 [5].

Ejemplo 2.14. En $\mathbb{Z}$, sea τ la topología generada por las colas a derecha. Ahora considérese la base $\beta = \{\{n, n+1, ...\} \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{p,\ p+2,\ p+4, ...\} \mid p \in 2\mathbb{Z}\} \cup \{\{r,\ r+2,\ r+4, ..., r+2k,\ r+2k+1,\ r+2k+2, ...\} \mid r \in 2\mathbb{Z}\}$, entonces en la topología generada por esta base $\langle\beta\rangle$, se tiene para p par, $\{p\}' = \{..., p-3,\ p-2,\ p-1\}$ y este conjunto no tiene un punto genérico, ya que $\overline{p-1} = \{..., p-7, p-5, p-3, p-1\}$. Se tiene entonces que $(\mathbb{Z}, \tau)$ es $T(\delta)$, $\tau \subseteq \langle\beta\rangle$ pero $(\mathbb{Z}, \langle\beta\rangle)$ no es $T(\delta)$.

3. Espacios $\mathbf{T}(\delta)$ y Conjuntos Ordenados

En este numeral se introduce el orden de especialización sobre cualquier espacio T_0 y con esto se observan algunas particularidades de la estructura ordenada de los espacios $T(\delta)$, además se caracterizan estos espacios utilizando dicho orden.

Proposición 3.1. Sea X un espacio T_0. La relación $\leq$ definida como $x \leq y$, si y sólo si, $x \in \overline{\{y\}}$ es de orden.

Nótese que en todo espacio topológico la relación $\leq$ definida anteriormente, cumple la propiedad reflexiva y transitiva, la antisimétrica se tiene si y sólo si el espacio es T_0.

El orden anterior se conoce como orden de especialización, el cual ha sido estudiado en muchos contextos [1], [11], [12]. Nosotros lo utilizaremos para caracterizar los espacios $T(\delta)$, observar algunas de sus propiedades y relacionarlo con el orden de contenencia del espectro primo de un anillo conmutativo unitario.

La proposición y los corolarios siguientes permiten establecer algunas propiedades importantes de los espacios $T(\delta)$ como conjuntos ordenados.

Proposición 3.2. Sea X un espacio T_0, $\{x\}'$ tiene un punto genérico, si y sólo si, $(\{x\}', \leq)$ tiene máximo.

Demostración. $\Rightarrow$) Si $\{x\}'$ tiene un punto genérico, existe p tal que $\{x\}' = \overline{\{p\}}$, lo cual implica que si $t \in \{x\}'$ entonces $t \leq p$.

$\Leftarrow$) Si p es el máximo de $(\{x\}', \leq)$, la igualdad $\{x\}' = \overline{\{p\}}$ se obtiene directamente. $\square$

Corolario 3.3. Sea X un espacio T_0. X es $T(\delta)$, si y sólo si, para todo $x \in X$, el conjunto $(\{x\}', \leq)$ tiene máximo.

Una caracterización similar a la anterior puede hacerse en términos de elementos predecesores ó sucesores [3].

Nótese que los espacios $T(\delta)$ con el orden definido no tienen elementos minimales, ya que no pueden existir puntos cerrados. Pero sí pueden tener elementos maximales como por ejemplo el conjunto $\{..., -3, -2, -1, 0\}$ con la topología generada por las colas a derecha.

4. Una Aplicación al Espectro Primo de un Anillo

En este numeral consideramos un anillo conmutativo unitario R y su conjunto de ideales primos propios $Spec(R)$, dotado con la topología de Zariski [4]. De esta forma se pueden encontrar anillos que caracterizan ciertas propiedades topológicas supuestas en su espectro [4], [6], [8]. El objetivo de esta sección es caracterizar los anillos a los cuales se les puede asociar un subespacio del espectro que es un espacio $T(\delta)$ y presentar algunos ejemplos de ellos.

Primero debemos notar que para $\{P\} \subseteq Spec(R)$, se tiene $\overline{\{P\}} = \{Q \in Spec(R) \mid P \subseteq Q\}$, lo cual indica que el orden de contenencia es el orden inverso del orden de especialización. Ahora como el espectro primo de un anillo tiene elementos maximales (los ideales maximales), entonces para todo anillo R, $Spec(R)$ no es un espacio $T(\delta)$. Sin embargo podría considerarse el subespacio $Spec(R)\backslash Max(R)$, donde $Max(R)$ denota el espectro maximal del anillo. Entonces los anillos R, tales que, $Spec(R)\backslash Max(R)$ es un espacio $T(\delta)$ están caracterizados directamente por el orden de contenencia y por el Corolario 3.3, teniéndose la siguiente proposición.

Proposición 4.1. Sea R un anillo, $Spec(R)\backslash Max(R)$ es un espacio $T(\delta)$, si y sólo si, para todo $P \in Spec(R)\backslash Max(R)$ el conjunto $\{P\}'$ tiene mínimo.

El resultado anterior conduce necesariamente a que todo primo debe tener profundidad infinita, pues de lo contrario se tendrían puntos cerrados, esto además implica que el anillo debe ser de dimensión infinita. Es decir los anillos que caracterizan esta propiedad son aquellos tales que, para todo primo P existe un único primo Q tal que $P \subsetneqq Q$ y no existen ideales primos entre ellos. Lo anterior da origen a la siguiente definición.

Definición 4.2. Un anillo conmutativo unitario R se llamará $\delta-anillo$ si para todo primo P no maximal, la intersección de los primos no maximales que lo contienen estrictamente es un primo distinto de P.

Un ejemplo particular de $\delta - anillo$ se tiene tomando el conjunto $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, donde $\mathbb{N}$ se considera con el orden usual e ∞ representa un elemento que no pertenece a $\mathbb{N}$ y que es mayor que todo natural. Ahora por el Corolario 3.6 de [10], existe un anillo de valuación V, tal que, $Spec(V) \cong X$. De igual forma por el Teorema 3.1 de [10] existen dominios de Bézout y de Prüfer que son $\delta - anillos$.

Y se tiene entonces la siguiente caracterización algebraica de los anillos cuyo espectro es $T(\delta)$.

Proposición 4.3. Sea R un anillo, $Spec(R)\backslash Max(R)$ es un espacio $T(\delta)$, si y sólo si, R es $\delta - anillo$.

Demostración. Para todo $P \in Spec(R)\backslash Max(R)$ el conjunto $\{P\}'$ tiene mínimo, si y sólo si, existe $Q \in \{P\}'$, tal que, $Q = \bigcap_{T\in\{P\}'} T$, si y sólo si, R es $\delta - anillo$.

En los espacios $T(\delta)$ no pueden existir puntos cerrados, esto permite considerar un axioma menos fuerte llamado $T(\delta')$ ($T(\delta)$ según [3]), el cual se define a continuación.

Definición 4.4. Un espacio topológico X se llama $T(\delta')$ si para todo $x \in X$, $\{x\}'$ tiene un punto genérico ó es vacío.

Este "pequeño" cambio en la definición implica alteraciones notables en sus propiedades, pues por ejemplo existen muchos espacios topológicos finitos de esta clase, lo cual no sucedía anteriormente. Igualmente se observan cambios en los anillos que caracterizan esta propiedad, pues ya no es necesario considerar un subespacio sino el espectro primo completo, como se observa a continuación.

Definición 4.5. Un anillo conmutativo unitario R se llamará $\delta' - anillo$ si para todo primo P no maximal, la intersección de los primos que lo contienen estrictamente es un primo distinto de P.

Es claro que los anillos donde primos y maximales coinciden, en particular Booleanos y Artinianos, los anillos locales de dimensión uno y los dominios de valuación de dimensión finita son $\delta' - anillos$. Además por el Teorema 2.10 de [10] pueden construirse $\delta' - anillos$ de cualquier dimensión finita.

$\mathbb{Z}$ y todo anillo de Jacobson de dimensión mayor ó igual que 1 no son $\delta' - anillos$.

Finalmente se tiene la caracterización de los anillos cuyo espectro es $T(\delta')$.

Proposición 4.6. Sea R un anillo, $Spec(R)$ es un espacio $T(\delta')$, si y sólo si, R es $\delta' - anillo$.

Obsérvese cómo utilizando el espectro y alguna noción topológica, se pueden encontrar anillos con propiedades especiales. A partir de esto, el camino a seguir consiste en estudiar las propiedades algebraicas de los anillos encontrados. En nuestro caso se podrían estudiar cocientes, fracciones, polinomios, extensiones de los $\delta - anillos$ y $\delta' - anillos$.

Bibliografía

[1] L. Acosta, *On Compactness of Concordant Topologies.* Preprint, 2001.

[2] J. Adámek, H. Herrlich and G. Strecker, *Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats.* John Wiley & Sons, New York, 1990.

[3] S.J. Andima and W.J. Thron, *Order-Induced Topological Properties.* Pacific J. Math., **25** (1978), 297-318.

[4] M.F. Atiyah and I.G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1969.

[5] C.E. Aull and W.J. Thron, *Separations Axioms Between T_0 and T_1.* Indag. Math., **24** (1962), 26-37.

[6] J.A. Ávila, *Algunas Propiedades Topológicas del Espectro Primo de un Anillo Conmutativo Unitario.* Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2002.

[7] N. Bourbaki, *Algebre Commutative.* Hermann, París, 1961.

[8] J.S. Fernández, *The Prime Spectrum of a Ring: A Survey.* Tesis Florida Atlantic University, Boca Ratón, 1991.

[9] J.L. Kelley, *General Topology.* Springer-Verlag, New York, 1955.

[10] W. J. Lewis, *The Spectrum of a Ring as a Partially Ordered Set.* J. Algebra, **25** (1973), 419-434.

[11] F. Lorrain, *Notes on Topological Spaces with Minimum Neighborhoods.* Amer. Math. Monthly, **76** (1969), 616-627.

[12] E. Lozano, *Sobre Algunas Topologías Concordantes.* Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2000.

[13] J.R. Munkres, *Topology a First Course.* Prentice-Hall, New Jersey, 1975.

[14] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra.* Van Nostrand, New York, 1958.