
LA FUNCION CARACTERISTICA DE PUNTO DE HAMILTON Y LA FUNCION DE TIEMPOS DE DIFRACCION DE LA SISMICA GEOMETRICA EN LA MIGRACION CON AMPLITUDES VERDADERAS

LUIS ALFREDO MONTES VIDES

Profesor Asociado, Departamento de Geociencias-Universidad Nacional de Colombia

Montes L. (2000): La función característica de punto de Hamilton y la función de tiempos de difracción de la sísmica geométrica en la migración con amplitudes verdaderas. Geofis. Colomb. 4:67-71. ISSN 0121-2974. Santa Fe de Bogotá, D.C. - Colombia.

RESUMEN

Usando la teoría del rayo paraxial en la aproximación de segundo de los tiempos de tránsito, podemos estimar la función de tiempos de tránsito asociada a un frente de onda proveniente de un reflector, y en consecuencia calcular la función de tiempos de difracción de un frente de onda generado por un punto difractor situado en el reflector. El conocimiento numérico de estas funciones hace posible un proceso de migración en tiempo de secciones apiladas que generan imágenes de secciones sísmicas con amplitudes verdaderas. La restitución de la amplitud de la onda se realiza mediante un operador que es función de los parámetros de la función tiempo de tránsito. A las secciones migradas se les aplica un filtro de diferenciación para obtener las fases iniciales del campo de onda. Se usan modelos de capas separadas por interfaces suaves.

ABSTRACT

Using the paraxial ray theory in the second order approximation of the traveltimes, we can estimate the travelttime function of a wavefront coming from a reflector, and in consequence calculate the diffraction travelttime function associated with a diffractor point located on the reflector. The numerical knowledge of those two functions makes possible a process to migrate stacked sections in time, process which generate images of seismic sections with true amplitudes. The restitution of the wave amplitude is made using an operator which depends of the parameters of the travelttime function. A differentiation filter is applied to the migrated sections in order to obtain the original wave phase. Layered models with smooth interfaces are used.

1. INTRODUCCION

En el proceso de secciones sísmicas, la estimación de las velocidades para las diferentes etapas es una labor dispendiosa; sin embargo, es de vital importancia para llevar a cabo la migración tanto en tiempo como en profundidad. Usando la aproximación de segundo orden en los tiempos de tránsito, desarrollada por **Bortfeld** (1989) y usando las ideas planteadas por **Bortfeld & Kiehn** (1992) se presenta una metodología para migrar secciones sísmicas apiladas (*post-stack*) en el dominio

del tiempo, en la cual no se requiere conocer el campo de velocidades, y en su lugar se precisa calcular la función característica de punto de Hamilton para la sísmica. Esta función puede ser estimada registrando al menos nueve (9) tiempos de tránsito en la cercanía de un rayo normal (**Montes**, 2000). A la sección migrada se le aplica un operador que permite remover del campo de onda los efectos por dispersión geométrica, la cual representa el factor más importante en la modificación de la amplitud y fase.

2. FUNCIONES DE TIEMPOS DE TRANSITO

El sistema sísmico se define como un apilado de capas homogéneas e isotrópicas separadas por interfaces suaves. Se llama superficie anterior a la interface limitrofe superior del modelo donde se sitúan fuentes y geofonos, coincidiendo con la superficie terrestre que se considera plana. La interface más profunda donde tiene lugar la reflexión se llama superficie posterior, y establece un límite inferior del modelo. Se identifica un rayo que al atravesar el sistema sísmico incide normalmente sobre la superficie reflectora (rayo normal), el cual se denomina rayo central (axial). Este rayo central establece el sistema de referencia de los otros rayos en su vecindad (rayos paraxiales).

El sistema de coordenadas cartesiano xyz tiene origen en el punto P_0 , el plano xy de este sistema es tangente a la superficie anterior en el punto de origen P_0 . La intersección del rayo central con la superficie posterior define en el reflector el nuevo sistema de coordenadas cartesiano $x'y'z'$, con el plano $x'y'$ tangente a la superficie reflectora en el punto P'_0 .

Un rayo paraxial en la proximidad del rayo central, parte del punto P indicado por el vector posición \vec{X} en la superficie anterior, y viaja hasta el punto P' indicado por el vector posición \vec{X}' sobre el reflector.

El rayo paraxial sobre la superficie anterior en \vec{X} se describe por el vector de lentitud \vec{P} (*slowness vector*) y en \vec{X}' sobre la superficie posterior por el vector de lentitud \vec{P}' .

Cualquier rayo paraxial queda definido en la superficie anterior por la pareja de vectores (\vec{X}, \vec{P}) , y sobre la superficie posterior por la pareja (\vec{X}', \vec{P}') .

Para la simplificación de los cálculos, se usan las proyecciones de los vectores posición y lentitud sobre los planos xy en la superficie anterior y $x'y'$ en la posterior. Por claridad los vectores 2D se denotarán en minúscula y los vectores 3D en mayúscula. En la superficie limitadora superior el vector \vec{x} corresponde a la proyección de \vec{X} sobre el plano xy . Para obtener \vec{p} se proyecta primero \vec{P} sobre el plano tangente a la superficie anterior en el punto P , y el vector resultante se proyecta luego sobre el plano xy . En la superficie posterior se obtienen \vec{x}' y \vec{p}' al proyectar del mismo modo \vec{X}' y \vec{P}' sobre el plano $x'y'$.

El rayo transmitido se refleja sobre la interface posterior en la posición final \vec{x}' con vector lentitud \vec{p}' y de acuerdo a la aproximación de segundo orden de los tiempos de tránsito (**Bortfeld**, 1989), estos vectores están relacionados con los vectores posición inicial \vec{x} , lentitud

inicial del rayo paraxial \vec{p} y lentitud inicial del rayo central \vec{p}_0 , en la superficie anterior a través de la ecuación:

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \underline{A} \vec{x}_0 + \underline{B} (\vec{p} - \vec{p}_0) \\ \vec{p}' &= \underline{C} \vec{x}_0 + \underline{D} (\vec{p} - \vec{p}_0) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)}, \quad \underline{B} = \frac{\partial(x', y')}{\partial(p, q)}, \\ \text{con:} \\ \underline{C} &= \frac{\partial(p', q')}{\partial(x, y)} \quad \text{y} \quad \underline{D} = \frac{\partial(p', q')}{\partial(p, q)}, \end{aligned}$$

matrices jacobianas estimadas en el origen del sistema de coordenadas sobre la superficie anterior.

La aproximación es válida únicamente dentro del rango de distancias para corrección de tiempo en la aproximación hiperbólica (*Normal Move Out*) usado en el apilamiento (*stacking*) de secciones sísmicas.

Las ecuaciones (1) describen cualquier rayo que viaje desde la superficie anterior hasta la posterior, en la vecindad del rayo central. El tiempo de tránsito para un rayo transmitido desde \vec{x} en la superficie anterior hasta \vec{x}' en el reflector viene dado por:

$$t(\vec{x}, \vec{x}') = t_0 - \vec{p}_0 \cdot \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{x}' \cdot \underline{DB}^{-1} \vec{x}' + \frac{1}{2} \vec{x} \cdot \underline{B}^{-1} \underline{A} \vec{x} - \vec{x} \cdot \underline{B}^{-1} \vec{x}' \quad (2)$$

El tiempo de tránsito para un evento de reflexión será la suma del tiempo de viaje del rayo transmitido desde \vec{x} hasta \vec{x}' y del tiempo del rayo reflejado desde \vec{x}' hasta el punto \vec{x}'' , siendo esta suma:

$$t(\vec{x}, \vec{x}'') = T_0 - 2\vec{p}_0 \cdot \vec{x}_0 + \frac{1}{2} (\vec{x}'' + \vec{x}) \cdot \underline{D}^{-1} \underline{C} \frac{1}{2} (\vec{x}'' + \vec{x}) + \frac{1}{2} (\vec{x}'' - \vec{x}) \cdot \underline{B}^{-1} \underline{A} \frac{1}{2} (\vec{x}'' - \vec{x}), \quad (3)$$

donde $T_0 = 2t_0$ es el tiempo de tránsito de reflexión del rayo central (**Bortfeld**, 1989). La expresión (3) corresponde a la función característica de punto de Hamilton en Óptica, llamada así porque suministra el tiempo de tránsito desde un punto en la superficie anterior hasta otro cualquiera sobre la interface reflectora.

Las matrices producto $\underline{B}^{-1} \underline{A}$ y $\underline{D}^{-1} \underline{C}$ son simétricas (una demostración de esta propiedad puede verse en **Bortfeld**, 1989); la primera representa la matriz de curvatura de la onda NIP (Normal Incidence Point) y la segunda la matriz de curvatura de la onda Normal (**Hubral**, 1983). Por tal simetría la ecuación (3) tiene solo nueve incógnitas: una en T_0 , dos en \vec{p}_0 , tres en $\underline{B}^{-1} \underline{A}$ y tres $\underline{D}^{-1} \underline{C}$; las cuales pueden estimarse registrando al menos nueve tiempos de tránsito especialmente seleccionados (**Montes**, 1998).

El tiempo de tránsito desde un punto difractor en $\vec{x}' = \vec{0}$ hasta un detector situado en \vec{x} sobre la superficie anterior viene dada por el doble del tiempo calculado por la ecuación (2):

$$t_D(\vec{x}, \vec{0}) = T_0 - 2\vec{p}_0 \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot B^{-1} A \vec{x} \quad (4)$$

y se denomina función tiempo para una difracción *zero-offset*. Esta ecuación es importante para la sumatoria en el proceso de migración. Según los tiempos dados por la curva de tiempos de migración (4) (hipérbola en Fig.1), se seleccionan las amplitudes de la sección que serán sumadas.

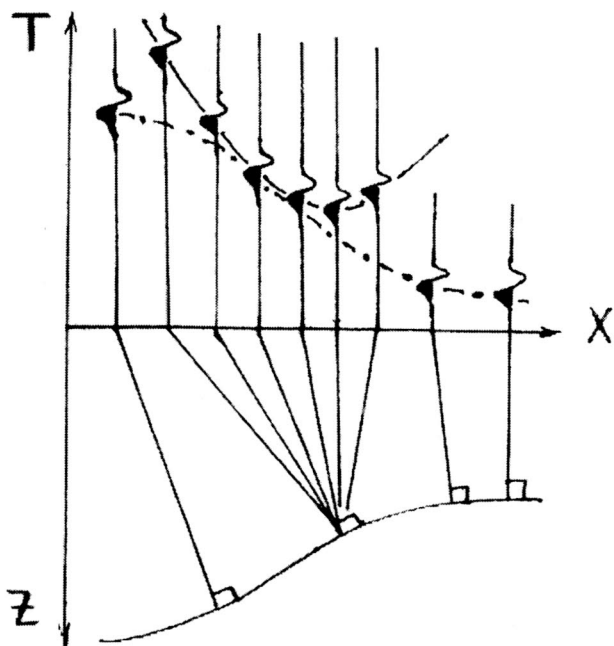


FIGURA 1. LA CURVA DE TIEMPOS ZERO-OFFSET TIENE LA FORMA DEL REFLECTOR Y LA HIPERBOLA REPRESENTA LA FUNCION DE TIEMPOS DE DIFRACCION. EN LA POSICION DONDE EMERGE EL RAYO NORMAL AL REFLECTOR (CENTRAL) LAS CURVAS SON TANGENTES. EL RAYO IMAGEN (NORMAL A SUPERFICIE) EMERGE EN LA POSICION DEL APICE DE LA HIPERBOLA.

De acuerdo al modelo de reflector explosivo (Loewenthal et al., 1976), cada punto del horizonte reflector se comporta como un punto difractor en concordancia con el modelo de transmisión de ondas de Huygens. La envolvente de los eventos difractores constituye el frente de onda definido por la función tiempo zero-offset, en la Fig.1, se representa por la curva de punto y trazo.

El resultado de la suma se coloca finalmente en el ápice de la curva de migración (mínimo de la hipérbola), cuya posición coincide con el rayo imagen que emerge perpendicular a la superficie limitrofe superior. A través de este procedimiento se lleva a cabo la transformación

del tiempo de tránsito del rayo normal (central) a tiempo de tránsito del rayo imagen.

La superficie definida por la función tiempo de difracción (4) es tangente a la superficie definida por la función tiempo *zero-offset* en la posición del rayo central, en la Fig.2, la hipérbola es tangente a la curva *zero-offset*.

Si se migrase hacia una posición arbitraria \vec{x} , según (4) el tiempo de migración será:

$$t(\vec{x}) = T_0 - p_0 \cdot \vec{x} \quad (5)$$

$$\text{donde } \vec{x} = (B_0 A)^{-1} (\vec{p}_0 - \vec{p}_x) \quad (6)$$

y \vec{p} debe satisfacer $\nabla T_D(\vec{x}, \vec{0}) = -2\vec{p}_x$. La migración en el ápice de la superficie de tiempo de difracción corresponde al rayo imagen definido por Hubral & Krey (1980), el cual satisface la donde \vec{p}_x debe satisfacer condición $\vec{p}_x = \vec{0}$ (el rayo emerge perpendicular a la superficie limitrofe superior). En el ápice el tiempo de migración queda definido según la ecuación (5) por:

$$t(\vec{x}_A) = T_0 - \vec{p}_0 \cdot \vec{x} \quad (7)$$

$$\text{donde } \vec{x}_A = (B_0^{-1} A)^{-1} \vec{p}_0$$

3. MIGRACION EN TIEMPO

Para comprender la migración en tiempo se usará la Fig.2, que muestra la función $T_D(x_m)$ de tiempos de tránsito para una sección *zero-offset* no migrada, así como la función de tiempos de difracción $T_{RO}(x_m)$, sus curvas son tangentes en el punto D que corresponde a la posición donde emerge el rayo normal (central). Las amplitudes de las trazas de la sección *zero-offset* coincidentes con la curva $T_D(x_m)$ se seleccionan y adicionan, y la suma se coloca en el ápice de la curva D'.

El campo de onda de una sección *zero-offset* según Bortfeld & Kiehn (1992) se expresa por:

$$U(\vec{x}_m, t) = \prod d_i u_i \frac{R_c}{L} \text{Sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta T} (t - T_{RO}(\vec{x}_m)) \right) \quad (8)$$

Rc: coeficiente de reflexión, d_i, u_i : coeficientes de transmisión de las ondas descendentes y ascendentes respectivamente.

Muestrear las trazas de la sección *zero-offset* con la función de difracción, implica que $t = T_D(x_m)$ en (8), así $\text{Sinc}(T_D(x_m) - T_{RO}(x_m))$ tomará un valor significativo

cuando el argumento de la función sea cero, v.g. donde ambas funciones coinciden, indicando que la muestra de la traza pertenece a un punto de reflexión, Fig.2.

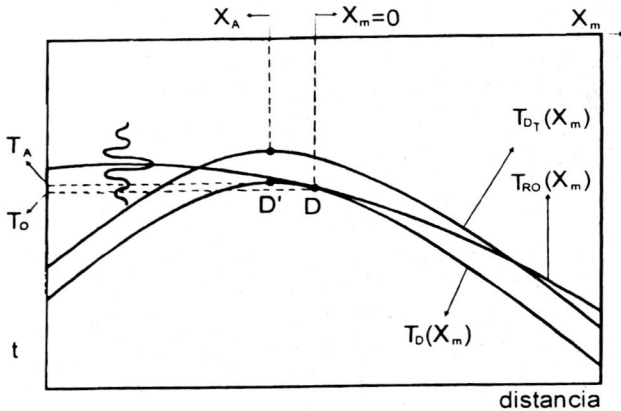


FIGURA 2. MUESTRA LA CURVA DE TIEMPOS DE TRANSITO DE REFLEXION T_{RO} , TANGENTE A LA CURVA DE TIEMPO DE DIFRACCION T_D EN EL PUNTO D DONDE EMERGE EL RAYO CENTRAL. LA TRAZA SERA MIGRADA DE D A D' . SE OBSERVA LA CURVA DE TIEMPO DE DIFRACCION DESFASADA $T_{D\tau}$.

En configuración *zero-offset* el tiempo de reflexión vendrá dado por:

$$t(\vec{x}, \vec{x}') = T_0 - 2\vec{p}_0 \cdot \vec{x}_m + \vec{x}_m \cdot \underline{D}^{-1} \underline{C} \vec{x}_m \quad (9)$$

Sustituyendo (3) y (9) en el argumento de la función *Sinc* incluyendo un desfase τ se obtiene:

$$U(\vec{x}_m, \tau) = \prod d_i u_i \frac{R_c}{L} \text{Sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta T} (\tau + \vec{x}_m \cdot (\underline{B}^{-1} \underline{A} - \underline{D}^{-1} \underline{C}) \vec{x}_m) \right) \quad (10)$$

El resultado de la expresión matricial en (10) es una matriz simétrica de la forma:

$$\underline{B}^{-1} \underline{A} - \underline{D}^{-1} \underline{C} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Al sustituir (11) y $\vec{x}_m = (x, y)$ en (10):

$$U(\vec{x}_m, \tau) = \prod d_i u_i \frac{R_c}{L} \text{Sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta T} (\tau + x^2 m_{11} + 2xy m_{12} + y^2 m_{22}) \right) \quad (12)$$

Para migrar un evento de \vec{x}_m hasta \vec{x}_A se suma el campo de onda de todas muestras de las trazas contenidas en una ventana definida en plano xy :

$$U(\vec{x}_A, \tau) = \prod d_i u_i \frac{R_c}{L} \sum_{i=-N}^N \sum_{j=-M}^M \text{Sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta T} (\tau + x^2 m_{11} + 2xy m_{12} + y^2 m_{22}) \right) i \Delta x j \Delta y \quad (13)$$

$\Delta x, \Delta y$: intervalos de muestreo en dirección x, y .

Aplicando la transformada de Fourier en (13) para llevar al dominio de la frecuencia y tomando la expresión integral de la misma se tiene:

$$U(\vec{x}_A, f) = \prod d_i u_i \frac{R_c}{L} \Delta T \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i 2\pi f (m_{11} x^2 + 2xy m_{12} + y^2 m_{22})) dx dy \quad (14)$$

Para simplificar (14) se aplica transformación de los ejes hacia los ejes principales (x', y') :

$$U(\vec{x}_A, f) = \prod d_i u_i \frac{R_c}{L} \Delta T \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i 2\pi f (\alpha x'^2 + \beta y'^2)) dx' dy' \quad (15)$$

donde $\alpha\beta = \det |B^{-1}A - D^{-1}C| = m_{11}m_{22} - m_{12}^2$.

Por la notación de Euler (15) es:

$$U(\vec{x}_A, f) = \prod d_i u_i \frac{R_c}{L} 2\Delta T \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} [\cos(2\pi f \alpha x'^2) + i \text{sen}(2\pi f \alpha x'^2)] dx' \right\} \int_0^{\infty} [\cos(2\pi f \beta y'^2) + i \text{sen}(2\pi f \beta y'^2)] dy' \quad (16)$$

Las integrales $\int_0^{\infty} \cos y^2 dy = \int_0^{\infty} \text{sen } y^2 dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ son conocidas como integrales de Fresnel, por lo cual la expresión (16) se transforma en:

$$U(\vec{x}_A, f) = \prod d_i u_i \frac{R_c}{L} \left(\frac{-\Delta T \text{sgn}(f)}{4\sqrt{\alpha\beta}} i |f| \right) \quad (17)$$

La ecuación (17) representa el campo de onda migrado, al cual no se le ha hecho corrección por dispersión geométrica, ni por cambios en la fase.

De acuerdo a los resultados obtenidos por **Bortfel & Kiehn** (1992), la dispersión geométrica viene dado por el factor:

$$L = \frac{2 \cos \beta_0}{v_0 \sqrt{\det(B^{-1}A - D^{-1}C)}} \quad (18)$$

con v_0 velocidad de la capa superior del sistema sísmico, β_0 ángulo entre la normal a la superficie superior y el rayo central.

Reemplazando (18) en (17) y usando el hecho que $\alpha\beta = \det|B^{-1}A - D^{-1}C| = m_{11}m_{12} - m_{12}^2$ resulta en:

$$U(\bar{x}_A, f) = \prod d_i u_i R_c \left(\frac{v_0 \Delta T}{8 \cos \beta_0} \frac{-\text{sgn}(f)}{|f|} \right) \quad (19)$$

En la expresión (19), el término entre paréntesis representa un operador que representa el factor de dispersión geométrica. El inverso del operador, el cual permitirá recuperar la amplitud de la señal por efecto exclusivo de la mencionada dispersión, es según (19):

$$FDG^{-1} = \frac{8 \cos \beta_0}{v_0 \Delta T} (-i |f| \text{sgn}(f)) \quad (20)$$

En la ecuación (20), la expresión entre paréntesis corresponde al inverso del operador:

$$\phi = \frac{-\text{sgn}(f)}{|f|} \quad (21)$$

que introduce un desfase en el campo de onda y por tanto modifica el espectro de fase. Su aparición es consecuencia de la integración en el proceso de migración, $f(t) = \int F(w)e^{-iwt} dw$ por lo que para remover su efecto se requiere aplicar su operador inverso, es decir, el operador de diferenciación $-i|f|$, dado a través

$$\text{de: } \frac{df(t)}{dt} = \int -i w F(w) e^{-iwt} dw. \quad -i = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2}$$

entonces $-i|f| \text{sgn}(f)$ corrige la fase del campo de onda migrado en $\frac{\pi}{2}$. Como la parte real del espectro de fase

es nula: $A(f) = \sqrt{R^2(f) + I^2(f)} = \sqrt{I^2(f)} = |I(f)|$ y su espectro de fase es entonces:

$$\theta(f) = \text{Arctan} \left(\frac{I(f)}{R(f)} \right) = -\frac{\pi}{2} \text{sgn}(f) \quad (22)$$

donde I/R son las partes imaginaria y real del campo de onda.

El operador de restitución del campo de onda migrado consta del filtro de diferenciación multiplicado por un factor de peso, que según la ecuación (20) es $8 \cos \beta_0 / (v_0 \Delta T)$, el efecto debido a la dispersión geométrica se remueve de la sección sísmica multiplicando el operador en el dominio de la frecuencia antes o después de la migración.

CONCLUSIONES

Usando la teoría del rayo paraxial sobre modelos con capas homogéneas e isotrópicas separadas por interfaces suaves, las secciones sísmicas apiladas pueden ser migradas en el tiempo utilizando un novedoso enfoque que no necesita saber el valor del campo de velocidad. Como es sabido del proceso de secciones sísmicas, la estimación del campo de velocidad conlleva una gran incertidumbre sobre los valores obtenidos, por lo cual las imágenes de secciones migradas tienen un nivel de confiabilidad acorde con los niveles de incertidumbre valores estimados de la velocidad.

La estimación de la función de tiempos de tránsito asociadas a eventos de reflexión permite estimar la función de difracción y aplicar un proceso de migración al que adicionalmente se le incluye la restauración del campo de onda por el efecto de dispersión geométrica, el cual es el factor que más influye en la modificación de la amplitud y fase de las señal registrada.

La migración a través de este proceso sería de utilidad para verificar y refinar las imágenes de secciones previamente apiladas y migradas en tiempo, obtenidas a partir de un campo de velocidad de migración estimado con incertidumbre.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Bortfeld, R.**, (1989): Geometrical ray theory: Rays and traveltimes in seismic systems: *Geophysics*. **54**:342-349.
- Bortfeld, R., & M. Kiehn** (1992): Reflection amplitudes and migration amplitudes (zero-offset situation): *Geophysical Prospecting*. **40**:873-884.
- Hubral, P. & Krey, Th.**, (1980): Interval velocities from seismic reflection time measurements. SEG.Tulsa. Ok.
- Hubral, P.**, (1983): Computing true amplitude reflections in a laterally inhomogeneous earth. *Geophysics*. **48**:1051-1062.
- Loewenthal, D., L. Lu, R. Robertson, & J. Sherwood, W., C.** 1976: The wave equation applied to migration: *Geophysical Prospecting*. **24**:380-399.
- Montes, L. A.** (1998): Determinação das velocidades intervalares usando a teoria paraxial do raio: Aproximação de segunda ordem dos tempos de trânsito. Ph.D. thesis. UFPá, Brazil.
- Montes, L. A.** (2000): Un análisis de sensibilidad en la estimación de la función característica de punto de Hamilton. *Geofis. Colomb.* **4**:31-36. Santa Fe de Bogotá.