Derivadas formales con respecto a gramáticas generativas

Juan Gabriel Triana Laverde

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de matemáticas
Bogotá, Colombia
2018

Derivadas formales con respecto a gramáticas generativas

Juan Gabriel Triana Laverde

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:
Doctor en Ciencias - Matemáticas

Director:
(Ph.D.) Rodrigo De Castro Korgi

Línea de Investigación:
Teoría de la computación y análisis combinatorio

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de matemáticas
Bogotá, Colombia
2018

Agradecimientos

Deseo agradecer a la Universidad Nacional de Colombia, por todos los años de formación y el apoyo brindado durante dicho tiempo. Al Departamento de Matemáticas, en particular al profesor Rodrigo De Castro Korgi por la orientación brindada, sin la cual esta tesis no habría sido posible.

Agradezco al grupo Rnómica teórica y computacional por abrirme las puertas de la investigación, en especial a la líder del grupo la profesora Clara Bermúdez por haber creído en mí.

Por último, agradezco y dedico este título a mi familia, en particular a mi esposa, Liliana Romero, fuente de conocimiento e inspiración con quién comparto mi vida. A mi mamá, Clara Laverde, por haberme orientado hacia el camino del conocimiento.

Resumen

Los conceptos de función formal y derivada formal a partir de gramáticas independientes del contexto, presentados por William Chen en 1993, son los fundamentos de un cálculo gramatical, en el cual tienen sentido ciertas operaciones básicas. Desde su concepción, este cálculo ha sido empleado por diversos autores, principalmente Shi-Mei Ma y Dominique Dumont, para la representación de series de potencias, permitiendo generar familias de números especiales y obtener identidades para ciertas familias de polinomios. Recientemente, se ha estudiado la conexión entre gramáticas independientes del contexto y análisis combinatorio, dando como resultado un amplio campo de investigación en el cual se enmarca este trabajo. En particular, se estudia la construcción de gramáticas que generen familias de polinomios y números, con propiedades especiales, con el objetivo de estudiar las propiedades de dichos objetos combinatorios mediante técnicas gramáticales. Adicionalmente se propone una generalización de este cálculo gramatical al considerar gramáticas matriciales en lugar de gramáticas independientes del contexto.
Palabras clave: Gramática independiente del contexto, gramática matricial, derivada formal, polinomios de Bessel, números: multifactorial, de Stirling, de Euler .

Abstract

The concepts of formal functions and formal derivative based on context-free grammars, introduced by William Chen in 1993, are the foundations for a grammatical calculus in which certain basic operations make sense. This calculus has been used by several authors, including Shi-Mei Ma and Dominique Dumont, for the representation of formal power series. Thus, allowing the generation of families of special numbers and proving identities for some families of polynomials. Recently, the connection between context-free grammars and combinatorial analysis has been giving rise to a broad research field on which the present document is framed. In particular, we approach the problem of constructing grammars that generate families of polynomials or numbers, having special given properties, so that we can obtain properties for those combinatorial objects by grammatical techniques. In addition, a generalization of this grammatical calculus is proposed herein by considering matrix grammars instead of context-free grammars.
Keywords: Context-free grammars, matrix grammars, formal derivative operator, factorials, Bessel polynomials, multifactorial, Stirling, Eulerian numbers

Contenido

Introducción

Los conceptos de función formal, definida sobre un alfabeto, y derivada formal, basada en reglas de sustitución, fueron presentados por William Chen en 1993 con el fin de estudiar estructuras combinatorias asociadas a series de potencias [22]. Las reglas de sustitución, o reglas de reescritura, que denominaremos producciones, son agrupadas en gramáticas; dado que las producciones consideradas son de la forma $a \to v$, con a letra de un alfabeto y v función formal, se reduce el estudio a gramáticas independientes del contexto [63]. Por lo tanto, se define el operador derivada formal D con respecto a la gramática G de tal forma que $D(a) = v$; si hay lugar a confusión se nota D_G [30]. Recientemente el operador derivada formal, definido con respecto a gramáticas independientes del contexto, ha sido empleado para estudiar problemas combinatorios [18, 59, 61, 64], así como para generar familias de números [23, 31, 30, 40, 60, 63], e incluso familias de polinomios [24, 58, 63]. En el presente trabajo se continúa en esta dirección; para tal fin en el capítulo 1 se estudia en detalle el operador derivada formal y sus propiedades.

En el capítulo 2 se emplea el operador derivada formal, definido respecto a gramáticas independientes del contexto, para generar familias especiales de números y demostrar algunas propiedades de dichos números. En la sección 2.1 se introduce la gramática $G = \{a \to a\}$, con la cual se presenta la estructura que se seguirá en cada sección, demostrando primero los resultados del operador definido respecto a la gramática considerada y posteriormente, se emplean los resultados obtenidos para demostrar propiedades de los números estudiados, que en este caso serán los coeficientes binomiales, también denominados números ombinatorios. En la sección 2.2 son presentadas gramáticas que generan números factorial y doble factorial, en la sección 2.3 se proponen gramáticas más generales que generan números multifactorial, además son presentadas algunas propiedades de estos números y se demuestran algunos resultados conocidos mediante gramáticas; en la sección 2.4 se estudian las gramáticas propuestas en [60], [63] para los números de Stirling de primera clase, y la gramática propuesta en [22] para los números de Stirling de segunda clase.

En la sección 2.5, del capítulo 2, se tienen en cuenta las gramáticas empleadas en [30] y [60] para generar los números de Euler de primera y segunda clase, respectivamente; no obstante, estas gramáticas son empleadas para proponer una gramática que las generaliza, con la cual se obtiene una familia de números que generaliza a los números de Euler de primera y segunda clase. Como resultado principal se calcula la suma de estos números de Euler generalizados, obteniendo así como casos particulares la suma de los números de Euler de primera y segunda clase. En la sección 2.6 se emplea una gramática presentada en [40] para generar los números de Whitney; en la sección 2.7 se estudia una gramática general presentada en [60], no obstante se considera el caso particular en el cual se obtienen los números de Lah; en la sección 3.3 es presentada una gramática con la cual se genera una sucesión de números propuesta por Srinivasa Ramanujan, esta gramática difiere de la gramática de Ramanujan, presentada en [31], no obstante permite generar las mismas sucesiones numéricas.

En el capítulo 3 se emplea el operador derivada formal, definido con respecto a gramáticas independientes del contexto, para generar familias especiales de polinomios, entre los que destacan los polinomios de Bessel [58], y polinomios de Euler [63]; mediante el operador son demostradas algunas propiedades de estos polinomios. En el capítulo 4, se propone una generalización del método gramatical establecido por William Chen en [22], extendiendo las producciones a gramáticas matriciales [1], de esta forma se obtiene el operador derivada formal definido con respecto a gramáticas matriciales; se estudian algunas propiedades y se evidencia el potencial de esta generalización al presentar gramáticas matriciales que permiten generar números factoriales, y una gramática matricial con la cual se generan los números de Fibonacci y de Lucas.

Por último, en el apéndice A se da una breve introducción a las gramáticas matriciales, mientras que en el apéndice B son estudiadas las fórmulas de recurrencia que satisfacen las familias de números estudiadas; adicionalmente se explica como programar las fórmulas recurrentes, para familias de números y de polinomios, usando el software Matlab.

En general, las demostraciones presentadas en este documento se realizan aplicando sucesivamente el operador derivada formal, siendo necesario el principio de inducción matemática; de esta forma se evita el uso de argumentos combinatorios, que es la estrategia empleada por quienes han trabajado en este campo de investigación. Por lo anterior, los resultados ya conocidos en el área tienen demostraciones diferentes a las presentadas en este trabajo.

1. Operador diferencial sobre gramáticas independientes del contexto

En [22], son presentadas la siguientes definiciones.

Definición 1. *Sea Σ un alfabeto, conformado por símbolos independientes y conmutativos. Se define una **función formal** de la siguiente manera:*

1. *Cada $x \in \Sigma$ es una función formal.*
2. *Si u y v son funciones formales, entonces $u + v$ y uv son funciones formales.*
3. *Si $f(x)$ es una función analítica, y u es una función formal, entonces $f(u)$ es una función formal.*
4. *Cada función formal es construida a partir de un número finito de pasos.*

Definición 2. *Sea D el operador **derivada formal**, tal que:*

1. *Para dos funciones formales u, v:*

$$D(u + v) = D(u) + D(v) \quad y \quad D(uv) = D(u)v + uD(v).$$

2. *Para toda función analítica $f(x)$, y toda función formal u*

$$D(f(u)) = \frac{\partial f(u)}{\partial u} D(u).$$

3. *Sea $a \in \Sigma$, si existe una producción $a \to u$, donde u es una función formal, entonces $D(a) = u$. En otro caso tendremos que $D(a) = 0$, en cuyo caso diremos que a es constante.*

El operador derivada formal está bien definido [22] y se emplea a partir de reglas de producción, por tal razón la derivada formal actúa con respecto a una gramática [30]. Dado que en la definición 2 se consideran producciones de la forma $a \to u$, se restringe el uso del operador a gramáticas independientes del contexto. Por ejemplo, si se considera la gramática $G = \{a \to a^2 \ ; b \to ab\}$, por la definición 2, se tiene que $D(a) = a^2$ y $D(b) = ab$.

Ejemplo 1. *Sea $G = \{a \to a^2 \; ; b \to ab\}$, calcular $D(a+b)$ y $D(ab)$.*

Como $D(a) = a^2$ y $D(b) = ab$, entonces $D(a+b) = D(a) + D(b) = a^2 + ab$. Por otra parte, teniendo en cuenta la definición 2, se obtiene que $D(ab) = D(a)b + aD(b) = [a^2]b + a[ab]$ operando los términos se concluye que $D(ab) = 2a^2b$.

Dada la gramática $G = \{a \to a^2 \; ; b \to ab\}$, se tiene que $D(b) = ab$ y que $D(ab) = 2a^2b$; por lo tanto, $D(D(b)) = 2a^2b$. De la anterior observación, se puede apreciar que el operador D puede aplicarse de manera sucesiva.

Definición 3. *Sea u función formal, se define $D^{n+1}(u) = D(D^n(u))$ con $D^0(u) = u$.*

Teniendo en cuenta la anterior definición, se tiene que $D(b) = ab$, $D^2(b) = 2a^2b$. No obstante, para calcular $D^3(b)$ es necesario establecer como actúa el operador D con respecto a expresiones de la forma $D(\alpha u)$ y $D(u^k)$, con u función formal, α y k constantes.

1.1. Propiedades del operador derivada formal

En la definición 2 se aprecia que el operador D satisface propiedades análogas a la derivada de una suma, la derivada de un producto y la regla de la cadena. La siguiente proposición muestra el resultado de aplicar el operador D a funciones formales multiplicadas por constantes.

Proposición 1.1.1. *Sean v una función formal y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $D(\alpha v) = \alpha D(v)$.*

Demostración. Sea $f(x) = \alpha x$. Dado que $f(x)$ es una función analítica y v es una función formal, por la definición 2, se obtiene

$$\begin{aligned} D(f(v)) &= \frac{\partial f(v)}{\partial v} D(v) \\ &= \alpha D(v). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $D(\alpha v) = \alpha D(v)$. □

Dado que $D(u+v) = D(u) + D(v)$, para cada par de funciones formales u, v, por la definición 2, y además para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que $D(\alpha v) = \alpha D(v)$, por la proposición 1.1.1, se concluye que el operador D es lineal. La siguiente proposición muestra el resultado de aplicar el operador D a potencias de funciones formales.

Proposición 1.1.2. *Sea v función formal, entonces $D(v^n) = nv^{n-1}D(v)$.*

Demostración. Sea $f(x) = x^n$. Dado que $f(x)$ es una función analítica y v es una función formal, por la definición 2, se tiene que

$$\begin{aligned} D(f(v)) &= \frac{\partial f(v)}{\partial v} D(v) \\ &= nv^{n-1} D(v). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $D(v^n) = nv^{n-1}D(v)$. □

Ejemplo 2. *Sea $G = \{a \to a^2 \ ; b \to ab\}$, calcular $D^3(b)$.*

Se observa que $D(b) = ab$ y $D^2(b) = D(ab) = 2a^2b$, por el ejemplo 1, entonces

$$
\begin{aligned}
D^3(b) &= D(D^2(b)) \\
&\quad D(2a^2b) && \textit{por la proposición 1.1.1} \\
&\quad 2D(a^2b) && \textit{por la definición 2} \\
&\quad 2[D(a^2)b + a^2D(b)] && \textit{por la proposición 1.1.2 } D(a^2) = 2aD(a), \textit{ luego} \\
&\quad 2[2aD(a)b + a^2D(b)] \\
&\quad 2[2a[a^2]b + a^2[ab]] \\
&\quad 6a^3b.
\end{aligned}
$$

La siguiente proposición es un resultado análogo a la derivada de un cociente.

Proposición 1.1.3 (Regla del cociente)**.** *Sean u, v funciones formales, entonces $D(uv^{-1}) = [D(u)v - uD(v)]v^{-2}$.*

Demostración. Dadas u, v funciones formales, aplicando la regla del producto se calcula $D(uv^{-1})$ de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
D(uv^{-1}) &= D(u)v^{-1} + uD(v^{-1}) \qquad \text{como } D(v^{-1}) = -v^{-2}D(v) \text{ por la proposición 1.1.2} \\
&= D(u)v^{-1} - uv^{-2}D(v) \\
&= [D(u)v - uD(v)]v^{-2}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $D(uv^{-1}) = [D(u)v - uD(v)]v^{-2}$. □

La siguiente proposición permite caracterizar la derivada del producto de n funciones.

Proposición 1.1.4 (Regla generalizada del producto)**.** *Sean $u_1, u_2, \ldots, u_n$ funciones formales, entonces*

$$D(u_1u_2 \ldots u_n) = D(u_1)u_2 \ldots u_n + D(u_2)u_1u_3 \ldots u_n + \cdots + D(u_n)u_1u_2 \ldots u_{n-1}.$$

Demostración. La proposición se demuestra por inducción. Si $n = 1$, el resultado se cumple trivialmente ya que $D(u_1) = D(u_1)$. Si $n = 2$ se obtiene $D(u_1u_2) = D(u_1)u_2 + u_1D(u_2)$, coincidiendo con la regla del producto dada en la definición 2.

Suponiendo que $D(u_1u_2 \ldots u_n) = D(u_1)u_2 \cdots u_n + \cdots + D(u_n)u_1 \cdots u_{n-1}$; sea u_{n+1} una función formal, luego

$$
\begin{aligned}
D(u_1 \cdots u_{n+1}) &= D(u_1 \cdots u_n)u_{n+1} + u_1 \cdots u_nD(u_{n+1}) \\
&= [D(u_1)u_2 \cdots u_n + \cdots + D(u_n)u_1 \cdots u_{n-1}]u_{n+1} + [u_1 \cdots u_nD(u_{n+1})] \\
&= [D(u_1)u_2 \cdots u_{n+1}] + \cdots + [D(u_n)u_1 \cdots u_{n-1}u_{n+1}] + [D(u_{n+1})u_1 \cdots u_n].
\end{aligned}
$$

Se prueba así que $D(u_1 \cdots u_n) = D(u_1)u_2 \cdots u_n + D(u_2)u_1u_3 \cdots u_n + \cdots + D(u_n)u_1 \cdots u_{n-1}$. □

La regla del producto de Leibniz [82], que generaliza la regla de la derivada de un producto, también es válida para derivadas formales; pese a que este resultado fue introducido en [22], no es presentada una demostración ya que, como se muestra a continuación, se prueba de forma similar a la regla del producto de Leibniz para funciones reales.

Proposición 1.1.5 (Regla del producto de Leibniz)**.** *Sean u, v funciones formales entonces* $D^n(uv) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k(u)D^{n-k}(v)$.

Demostración. Dadas u, v funciones formales, se observa que

$$D(uv) = uD(v) + vD(u) = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} D^k(u)D^{1-k}(v),$$

resultado que coincide con lo presentado en la definición 2 y que verifica la proposición para $n = 1$. Suponiendo que $D^n(uv) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k(u)D^{n-k}(v)$, se calcula $D^{n+1}(uv)$ de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} D^{n+1}(uv) &= D\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k(u)D^{n-k}(v)\right) && \text{Por linealidad del operador } D, \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D\left(D^k(u)D^{n-k}(v)\right) && \text{Por las definiciones 2 y 3} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{k+1}(u)D^{n-k}(v) + D^k(u)D^{n-k+1}(v). \end{aligned}$$

Expandiendo la suma, se obtiene que $D^{n+1}(uv)$ es dado por

$$\begin{aligned} &\binom{n}{0} uD^{n+1}(v) + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n}{k} D^{k+1}(u)D^{n-k}(v)\right] + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} D^k(u)D^{n-k+1}(v)\right] + \binom{n}{n} D^{n+1}(u)v \\ &= \binom{n}{0} uD^{n+1}(v) + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n}{k} D^{k+1}(u)D^{n-k}(v) + \binom{n}{k+1} D^{k+1}(u)D^{n-k}(v)\right] + \binom{n}{n} D^{n+1}(u)v. \end{aligned}$$

Dado que $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$, $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ y $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ [21], se tiene que

$$\begin{aligned} D^{n+1}(uv) &= \binom{n+1}{0} uD^{n+1}(v) + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n+1}{k+1} D^{k+1}(u)D^{n-k}(v)\right] + \binom{n+1}{n+1} D^{n+1}(u)v \\ &= \binom{n+1}{0} uD^{n+1}(v) + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n+1}{k} D^{k}(u)D^{n-(k-1)}(v)\right] + \binom{n+1}{n+1} D^{n+1}(u)v \\ &= \binom{n+1}{0} uD^{n+1}(v) + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n+1}{k} D^{k}(u)D^{n+1-k}(v)\right] + \binom{n+1}{n+1} D^{n+1}(u)v \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left[\binom{n+1}{k} D^{k}(u)D^{[n+1]-k}(v)\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $D^n(uv) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k(u)D^{n-k}(v)$. $\square$

Proposición 1.1.6. *$D(a) = b^{-1}aD(b)$ si y sólo si $D(ab) = 2aD(b)$.*

Demostración. Suponiendo que $D(a) = b^{-1}aD(b)$, se obtiene que

$$\begin{aligned} D(ab) &= D(a)b + aD(b) \\ &= [b^{-1}aD(b)]b + aD(b) \\ &= aD(b) + aD(b). \end{aligned}$$

Luego, $D(ab) = 2aD(b)$. Suponiendo que $D(ab) = 2aD(b)$ se observa que

$$\begin{aligned} D(ab) &= D(a)b + aD(b) \\ 2aD(b) &= D(a)b + aD(b) \\ aD(b) &= D(a)b. \end{aligned}$$

De donde se concluye que $D(a) = b^{-1}aD(b)$. $\square$

Considerando el operador diferencial D, surgen bastantes interrogantes sobre las propiedades que cumple al ser aplicado sobre gramáticas independientes del contexto; por ejemplo resulta claro que si $D(a) = D(b)$ entonces $D^n(a) = D^n(b)$. Sin embargo, el hecho de que $D(a) \neq D(b)$ no implica que para cada $n \geq 1$ se cumpla que $D^n(a) \neq D^n(b)$, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. *Sea $G = \{a \to ab\ ;\ b \to ac\ ;\ c \to b^2 + ac - bc\}$.*

Claramente $D(a) \neq D(b)$, no obstante

$$\begin{aligned} D^2(a) &= D(D(a)) & D^2(b) &= D(D(b)) & &\textit{Como } D(a) = ab, D(b) = ac \\ &= D(ab) & &= D(ac) & &\textit{Por la definición } 2 \\ &= D(a)b + aD(b) & &= D(a)c + aD(c) \\ &= [ab]b + a[ac] & &= [ab]c + a[b^2 + ac - bc] \\ &= ab^2 + a^2c & &= ab^2 + a^2c \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el ejemplo anterior, existen gramáticas tales que $D(a) \neq D(b)$ en las cuales para algún k se cumple que $D^k(a) = D^k(b)$; con base en estas gramáticas se presenta la siguiente proposición.

Proposición 1.1.7. *Si existe k talque $D^k(a) = D^k(b)$, entonces $D^n(a) = D^n(b)$ para todo $n \geq k$*

Demostración. El resultado se cumple trivialmente si $n = k$. Si $n > k$ entonces existe m talque $n = m + k$, luego

$$\begin{aligned} D^n(a) &= D^m(D^k(a)) & &\text{Como } D^k(a) = D^k(b) \\ &= D^m(D^k(b)) \\ &= D^{m+k}(b) & &\text{como } n = m + k \\ &= D^n(b). \end{aligned}$$

Esto prueba que $D^n(a) = D^n(b)$ para todo $n \geq k$. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que si $D(a) = D(b)$, no necesariamente $D(a^k) = D(b^k)$.

Ejemplo 4. *Sea* $G = \{a \to ab; b \to ab\}$*. Calcular* $D(a^2)$ *y* $D(b^2)$

Claramente $D(a) = D(b) = ab$*, entonces*

$$\begin{aligned} D(a^2) &= 2aD(a) \\ &= 2a[ab] \\ &= 2a^2b \end{aligned} \qquad \begin{aligned} D(b^2) &= 2bD(b) \\ &= 2b[ab] \\ &= 2ab^2 \end{aligned}$$

No obstante, vale la pena verificar si el recíproco es cierto; es decir si existe $k > 1$ tal que $D(a^k) = D(b^k)$, entonces $D(a) = D(b)$. El siguiente ejemplo muestra que no necesariamente esto ocurre.

Ejemplo 5. *Sea* $G = \{a \to ab; b \to a^2\}$*.*

Claramente $D(a) = ab \neq a^2 = D(b)$*, entonces*

$$\begin{aligned} D(a^2) &= 2aD(a) \\ &= 2a[ab] \\ &= 2a^2b \end{aligned} \qquad \begin{aligned} D(b^2) &= 2bD(b) \\ &= 2b[a^2] \\ &= 2a^2b \end{aligned}$$

Luego $D(a^2) = D(b^2)$*, pero* $D(a) \neq D(b)$*.*

Por supuesto, puede pensarse que resulta más conveniente relacionar $D(a)$ con $D(b)$ de manera más directa; una idea puede ser considerar $D(a^2) = D(ab)$. No obstante esto no garantiza que $D(a) = D(b)$, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6. *Sea* $G = \{a \to ab; b \to 2ab - b^2\}$

Claramente $D(a) = ab \neq 2ab - b^2 = D(b)$*, sin embargo*

$$\begin{aligned} D(a^2) &= 2aD(a) \\ &= 2a[ab] \\ &= 2a^2b \end{aligned} \qquad \begin{aligned} D(ab) &= D(a)b + aD(b) \\ &= [ab]b + a[2ab - b^2] \\ &= 2a^2b \end{aligned}$$

Luego $D(a^2) = D(ab)$*, pero* $D(a) \neq D(b)$*.*

Dados los resultados anteriores, es posible que sea necesaria una condición más para concluir que $D(a)$ deba ser igual a $D(b)$; considerar $D(a^2) = D(b^2) = D(ab)$ parece razonable, no obstante es bastante restrictivo, razón por la cual es necesario estudiar cuántas gramáticas pueden cumplir con dicha condición.

Proposición 1.1.8. *Sean $a, b \in \Sigma$ tales que $a \neq b$, entonces no existe ninguna gramática tal que $D(a^2) = D(b^2) = D(ab)$, con $D(a), D(b) \neq 0$.*

Demostración. Dadas las hipótesis se observa que

$$\begin{aligned} D(a^2) &= D(ab) & D(b^2) &= D(ab) \\ 2aD(a) &= D(a)b + aD(b) & 2bD(b) &= D(a)b + aD(b) \\ [2a-b]D(a) - aD(b) &= 0 & -bD(a) + [2b-a]D(b) &= 0 \end{aligned}$$

De este modo se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 2a-b & -a \\ -b & -a+2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(a) \\ D(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cabe destacar que el sistema de ecuaciones es homogéneo, por lo tanto tiene solución única o tiene infinitas soluciones, razón por la cual es conveniente calcular el determinante de la matriz asociada al sistema, luego

$$\begin{aligned} \det(A) &= (2a-b)(-a+2b) - (-a)(-b) \\ &= -2a^2 + 4ab + ab - 2b^2 - ab \\ &= -2a^2 + 4ab - 2b^2 \\ &= -2(a-b)^2. \end{aligned}$$

Como $a \neq b$ entonces $\det(A) \neq 0$, por lo tanto la única solución es $D(a) = D(b) = 0$. □

De manera similar se procede con el siguiente resultado.

Proposición 1.1.9. *Existen infinitas gramáticas tales que $D(ab) = D(bc) = D(ac)$.*

Demostración. Suponiendo que $D(ab) = D(bc) = D(ac)$ se obtiene que

$$D(a)b + aD(b) = D(b)c + bD(c) = D(a)c + aD(c)$$

igualando las expresiones por parejas se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} bD(a) + aD(b) &= cD(a) + aD(c) \\ bD(a) + aD(b) &= cD(b) + bD(c) \\ cD(b) + bD(c) &= cD(a) + aD(c) \end{aligned}$$

Despejando el sistema de ecuaciones tenemos que

$$\begin{aligned} [b-c]D(a) + aD(b) - aD(c) &= 0 \\ bD(a) + [a-c]D(b) - bD(c) &= 0 \\ -cD(a) + cD(b) + [b-a]D(c) &= 0 \end{aligned}$$

Cuya representación matricial es dada por

$$\begin{bmatrix} b-c & a & -a \\ b & a-c & -b \\ -c & c & b-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(a) \\ D(b) \\ D(c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pero el determinante de la matriz asociada al sistema es 0, luego el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones o no tiene solución; no obstante, dado que el sistema de ecuaciones es homogéneo, se concluye que hay infinitas soluciones. □

A continuación se presenta un resultado general del operador derivada formal, con respecto a gramáticas independientes del contexto con una propiedad dada.

Teorema 1.1.10. *Existen infinitas gramáticas independientes del contexto G tales que:*

$$D(a_1a_2\cdots a_n) = D(a_1a_2) = D(a_2a_3) = \cdots = D(a_{n-2}a_{n-1}) = D(a_{n-1}a_n)$$

Demostración. Como $D(a_1\cdots a_n) = D(a_1)a_2\cdots a_n + D(a_2)a_1a_3\cdots a_n + \cdots + D(a_n)a_1\cdots a_{n-1}$, por la proposición 1.1.4, entonces al considerar la ecuación $D(a_1a_2\cdots a_n) = D(a_1a_2)$ se obtiene

$$D(a_1)a_2\ldots a_n + D(a_2)a_1a_3\ldots a_n + \cdots + D(a_n)a_1\ldots a_{n-1} = D(a_1)a_2 + a_1D(a_2)$$

Despejando, y tomando factor común

$$[a_2\cdots a_n - a_2]D(a_1) + [a_1a_3\cdots a_n - a_1]D(a_2) + [a_1a_2a_4\cdots a_n]D(a_3) + \cdots [a_1\cdots a_{n-1}]D(a_n) = 0.$$

Del mismo modo, tomando $D(a_1a_2\cdots a_n) = D(a_ia_{i+1})$ se obtiene una ecuación para cada i, como $1 \leq i \leq n-1$ entonces hace falta una ecuación para obtener un sistema de ecuaciones cuadrado. Sea $D(a_{n-1}a_n) = D(a_{n-2}a_{n-1})$ la última ecuación, por lo tanto el sistema de ecuaciones homogéneo correspondiente a este problema es representado por la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} a_2\ldots a_n - a_2 & \cdots & a_1\ldots a_{n-3}a_{n-1}a_n & a_1\ldots a_{n-2}a_n & a_1\ldots a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2\ldots a_n & \cdots & a_1\ldots a_{n-3}a_{n-1}a_n - a_{n-1} & a_1\ldots a_{n-2}a_n - a_{n-2} & a_1\cdots a_{n-1} \\ a_2\ldots a_n & \cdots & a_1\ldots a_{n-3}a_{n-1}a_n & a_1\ldots a_{n-2}a_n - a_n & a_1\ldots a_{n-1} - a_{n-1} \\ 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-2} - a_n & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Aplicando la operación por filas $F_{n-2} - F_{n-1}$ se obtiene la siguiente matriz equivalente

$$\begin{bmatrix} a_2\ldots a_n - a_2 & \cdots & a_1\ldots a_{n-3}a_{n-1}a_n & a_1\ldots a_{n-2}a_n & a_1\ldots a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -a_{n-1} & -a_{n-2} + a_n & a_{n-1} \\ a_2\ldots a_n & \cdots & a_1\ldots a_{n-3}a_{n-1}a_n & a_1\ldots a_{n-2}a_n - a_n & a_1\ldots a_{n-1} - a_{n-1} \\ 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-2} - a_n & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Si se aplica la operación $F_{n-2}+F_n$ se obtiene una fila de ceros, con lo cual esta matriz tendría determinante 0. Dado que las operaciones elementales por fila no alteran el determinante [3], se concluye que el sistema homogéneo tiene matriz asociada con determinante 0, concluyendo así que el sistema tiene infinitas soluciones. $\square$

2. Números especiales generados mediante el operador diferencial

El estudio de las reglas de producción de gramáticas independientes del contexto es actualmente un tema de interés, en especial su conexión con análisis combinatorio [60]. En este capítulo se presentan distintas familias de números, de gran importancia en análisis combinatorio, que pueden ser representadas empleando el operador derivada formal, definido con respecto a gramáticas independientes del contexto. Empleando gramáticas se demuestran algunas propiedades de estos números e incluso, en algunos casos, se proponen algunas generalizaciones.

2.1. Coeficientes binomiales

En esta sección se estudia la gramática $G = \{a \to a\}$, y será empleada para obtener propiedades de los coeficientes binomiales, también denominados números combinatorios.

Proposición 2.1.1. *Sea $G = \{a \to a\}$, entonces $D^n(a^m) = m^n a^m$, para cada $n \geq 0$.*

Demostración. Claramente $D^0(a^m) = a^m$, más aún $D(a^m) = ma^{m-1}D(a) = ma^m$. Suponiendo que $D^n(a^m) = m^n a^m$, se calcula $D^{n+1}(a^m)$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} D^{n+1}(a^m) \quad & D(D^n(a^m)) \\ &= D(m^n a^m) \\ &= m^n[ma^{m-1}D(a)] \\ &= m^{n+1}a^m. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $D^n(a^m) = m^n a^m$ para cada $n \geq 0$. □

Se observa que si $m = 0$, se obtiene $D^n(a^0) = 0$. Las siguientes proposiciones son resultados conocidos de los números combinatorios, usualmente demostrados mediante el teorema del binomio de Newton, para los cuales se presenta una demostración empleando gramáticas.

Proposición 2.1.2 ([14], p. 132)**.** $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Demostración. Considerando $G = \{a \to a\}$, se tiene que $D^n(a) = a$ y $D^n(a^2) = 2^n a^2$, por la Proposición 2.1.1 tomando $m = 1$ y $m = 2$ respectivamente, luego por la regla del producto de Leibniz

$$D^n(a^2) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}(a) D^k(a) \qquad \text{como } D^r(a) = a \text{ y} D^n(a^2) = 2^n a^2,$$

$$2^n a^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [a][a].$$

Luego, $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. □

Proposición 2.1.3 ([14], p. 132)**.** $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$

Demostración. Tomando $G = \{a \to a\}$, se tiene que $D^n(a) = a$ y $D^n(a^{-1}) = (-1)^n a^{-1}$, por la Proposición 2.1.1 tomando $m = 1$ y $m = -1$ respectivamente, entonces por la regla del producto de Leibniz

$$D^n(aa^{-1}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}(a) D^k(a^{-1})$$

$$D^n(a^0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [a][(-1)^k a^{-1}]$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Por lo tanto, $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 0$. □

2.2. Números factoriales

Los números factoriales pueden generarse mediante la aplicación sucesiva del operador derivada formal, con respecto a la gramática $G = \{a \to a^2\ ; b \to b^2\}$, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.2.1. *Sea* $G = \{a \to a^2\ ; b \to b^2\}$, *entonces* $D^n(a) = n!a^{n+1}$, $D^n(b) = n!b^{n+1}$ *para cada* $n \geq 0$.

Demostración. Se observa que $D^0(a) = a$, más aún $D(a) = a^2$, con lo cual el resultado se cumple para $n = 0$ y $n = 1$. Suponiendo que $D^n(a) = n!a^{n+1}$ se calcula $D^{n+1}(a)$.

$$\begin{aligned} D^{n+1}(a) &= D(D^n(a)) \\ D^{n+1}(a) &= D(n!a^{n+1}) \\ D^{n+1}(a) &= (n+1)n!a^n D(a) \\ D^{n+1}(a) &= (n+1)!a^{n+2}. \end{aligned}$$

Se demuestra así que $D^n(a) = n!a^{n+1}$, para cada $n \geq 0$. La demostración de $D^n(b) = n!b^{n+1}$ es completamente análoga. □

Considerando la gramática $G = \{a \to a^2\ ; b \to b^2\}$ es posible construir un polinomio cuyos coeficientes sean números factoriales.

Proposición 2.2.2. *Sea* $G = \{a \to a^2\ ; b \to b^2\}$, *entonces* $D^n(ab) = \sum_{k=0}^{n} n!a^{k+1}b^{n-k+1}$ *para cada* $n \geq 0$.

Demostración. Por la Proposición 2.2.1 se tiene que $D^n(a) = n!a^{n+1}$ y $D^n(b) = n!b^{n+1}$, luego por la regla del producto de Leibniz, Proposición 1.1.5, se tiene que

$$\begin{aligned} D^n(ab) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k(a) D^{n-k}(b) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{n!}{(n-k)!k!} \right] k!a^{k+1}(n-k)!b^{n-k+1}. \end{aligned}$$

Simplificando, se obtiene que $D^n(ab) = \sum_{k=0}^{n} n!a^{k+1}b^{n-k+1}$. □

En la proposición anterior, se obtuvo que $D^n(ab)$ genera una familia de polinomios. A continuación se muestran los primeros de ellos.

$$\begin{aligned} D^0(ab) &= ab \\ D(ab) &= a^2b + ab^2 \\ D^2(ab) &= 2a^3b + 2a^2b^2 + 2ab^3 \\ D^3(ab) &= 6a^4b + 6a^3b^2 + 6a^2b^3 + 6ab^4 \\ D^4(ab) &= 24a^5b + 24a^4b^2 + 24a^3b^3 + 24a^2b^4 + 24ab^5. \end{aligned}$$

Se observa que la suma de coeficientes también permite generar números factoriales, como se muestra en el siguiente corolario.

Corolario 2.2.3. *Sea* $G = \{a \to a^2\ ; b \to b^2\}$, *entonces la suma de los coeficientes del polinomio* $D^n(ab)$ *es* $(n+1)!$.

Demostración. Por la Proposición 2.2.2 se tiene que $D^n(ab) = \sum_{k=0}^{n} n!a^{k+1}b^{n-k+1}$, para sumar los coeficientes se toma $P(a,b) = D^n(ab)$ y se calcula $P(1,1)$, luego:

$$\begin{aligned} P(a,b) &= \sum_{k=0}^{n} n!a^{k+1}b^{n-k+1} \qquad \text{tomando } a=1,\ b=1 \\ P(1,1) &= \sum_{k=0}^{n} n![1]^{k+1}[1]^{n-k+1} \\ P(1,1) &= \sum_{k=0}^{n} n! \\ P(1,1) &= [n+1]n! \end{aligned}$$

Por lo tanto, la suma de los coeficientes de $D^n(ab)$ es $(n+1)!$. □

Con base en la gramática $G = \{a \to a^2\ ; b \to b^2\}$ se construye una gramática en la cual las variables se crucen, de este modo se propone la gramática $G = \{a \to a^2\ ; b \to ab\}$. Claramente $D^n(a) = n!a^{n+1}$, la demostración es igual en ambas gramáticas ya que las variables no se cruzan; no obstante $D^n(b)$ presenta una leve variación.

Proposición 2.2.4. *Sea $G = \{a \to a^2\ ; b \to ab\}$, entonces $D^n(a) = n!a^{n+1}$, $D^n(b) = n!a^n b$ y $D^n(ab) = [n+1]!a^{n+1}b$ para cada $n \geq 0$.*

Demostración. Como $D^0(a) = a$ y $D(a) = a^2$, el resultado se cumple para $n = 0$ y $n = 1$; suponiendo que $D^n(a) = n!a^{n+1}$ se obtiene que $D^{n+1}(a) = D(n!a^{n+1}) = n!(n+1)a^n D(a)$, luego $D(a) = (n+1)!a^{n+2}$.

Dado que $D^0(b) = b$ y $D(b) = ab = 1!a^1b$, se comprueba que la proposición se cumple para $n = 0$ y $n = 1$. Suponiendo que $D^n(b) = n!a^n b$ se calcula $D^{n+1}(b)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} D^{n+1}(b) &= D(n!a^n b) \\ &= n![D(a^n)b + a^n D(b)] \\ &= n![na^{n-1}D(a)b + a^n[ab]] \\ &= n![na^{n+1}b + a^{n+1}b] \\ &= (n+1)!a^{n+1}b. \end{aligned}$$

Luego, $D^n(a) = n!a^{n+1}$ y $D^n(b) = n!a^n b$ para cada $n \geq 0$. Se observa que $D(b) = ab$, entonces $D^n(ab) = D^{n+1}(b) = [n+1]!a^{n+1}b$. □

Corolario 2.2.5. *Sea $G = \{a \to a^2\ ; b \to ab\}$, entonces $D^n(ab) = (n+1)!a^{n+1}b$ para cada $n \geq 0$.*

La siguiente proposición corresponde a un resultado general, en el cual se considera $D^n(a^m)$; si bien se considera la gramática $G = \{a \to a^2\ ; b \to ab\}$ es claro que el resultado también aplica para $G = \{a \to a^2\ ; b \to b^2\}$.

Proposición 2.2.6. *Sea $G = \{a \to a^2\ ; b \to ab\}$ entonces $D^n(a^m) = \dfrac{[m+n-1]!}{[m-1]!}a^{m+n}$.*

Demostración. $D(a^m) = ma^{m-1}D(a) = ma^{m-1}[a^2] = ma^{m+1} = \dfrac{[m+[1]-1]!}{[m-1]!}a^{m+[1]}$. Suponiendo que $D^n(a^m) = \dfrac{[m+n-1]!}{[m-1]!}a^{m+n}$ se calcula $D^{n+1}(a^m)$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} D^{n+1}(a^m) &= D(D^n(a^m)) \\ &= D\left(\frac{[m+n-1]!}{[m-1]!}a^{m+n}\right) \\ &= \frac{[m+n-1]![m+n]}{[m-1]!}a^{m+n-1}D(a) \\ &= \frac{[m+n]!}{[m-1]!}a^{m+n-1}[a^2] \\ &= \frac{[m+n]!}{[m-1]!}a^{m+n+1}. \end{aligned}$$

Luego $D^{n+1}(a^m) = \dfrac{[m+(n+1)-1]!}{[m-1]!}a^{m+[n+1]}$. □

Claramente al considerar $G = \{a \to a^2 \ ; b \to b^2\}$ se tiene que $D^n(b^m) = \frac{[m+n-1]!}{[m-1]!} b^{m+n}$; no obstante si se considera $G = \{a \to a^2 \ ; b \to ab\}$ se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.2.7. *Sea* $G = \{a \to a^2 \ ; b \to ab\}$ *entonces* $D^n(b^m) = \frac{[m+n-1]!}{[m-1]!} a^n b^m$.

Demostración. $D(b^m) = mb^{m-1}D(b) = mb^{m-1}[ab] = mab^m = \frac{[m+[1]-1]!}{[m-1]!} a^{[1]} b^m$.

Suponiendo que $D^n(b^m) = \frac{[m+n-1]!}{[m-1]!} a^n b^m$ se calcula $D^{n+1}(b^m)$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(b^m) &= D(D^n(b^m)) \\
&= D\left(\frac{[m+n-1]!}{[m-1]!} a^n b^m\right) \\
&= \frac{[m+n-1]!}{[m-1]!} D(a^n b^m) \\
&= \frac{[m+n-1]!}{[m-1]!} [na^{n-1} b^m D(a) + ma^n b^{m-1} D(b)] \\
&= \frac{[m+n-1]!}{[m-1]!} [na^{n+1} b^m + ma^{n+1} b^m] \\
&= \frac{[m+n]!}{[m-1]!} [a^{n+1} b^m] \\
&= \frac{[m+[n+1]-1]!}{[m-1]!} a^{n+[1]} b^m.
\end{aligned}$$

Lo cual demuestra que $D^n(b^m) = \frac{[m+n-1]!}{[m-1]!} a^n b^m$. □

Algunos números formados mediante números factoriales también pueden ser generados mediante gramáticas, tal es el caso de los números de Catalan, nombrados en honor a Eugene Charles Catalan pese a que estos números ya habían sido presentados en China por Antu Ming [57]. Algunos de los diversos conteos que realizan estos números, junto con algunas de sus propiedades son estudiados en [83]. El siguiente corolario muestra cómo mediante la gramática $G = \{a \to a^2 \ ; b \to ab\}$ se generan los números de Catalan los cuales, según [77], satisfacen la recurrencia $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Corolario 2.2.8. *Sean* $G = \{a \to a^2 \ ; b \to ab\}$ *y* C_n *el n-ésimo número de Catalan, entonces* $D^n(a^n) = \frac{(n+1)!C_n}{2} a^{2n}$ *y* $D^n(b^n) = \frac{(n+1)!C_n}{2} a^n b^n$.

Demostración. Dado que $D^n(a^m) = \frac{[m+n-1]!}{[m-1]!} a^{n+m}$ y $D^n(b^m) = \frac{[m+n-1]!}{[m-1]!} a^n b^m$, por las Proposiciones 2.2.6 y 2.2.7 respectivamente, al considerar $m = n$ en las expresiones anteriores se obtiene que $D^n(a^n) = \frac{[2n-1]!}{[n-1]!} a^{2n}$ y $D^n(b^n) = \frac{[2n-1]!}{[n-1]!} a^n b^n$. Como en ambos casos se tiene como coeficiente $\frac{[2n-1]!}{[n-1]!}$, se procede a reescribirlo como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}
\frac{[2n-1]!}{[n-1]!} &= \frac{(2n)}{(2n)}\frac{[2n-1]!}{[n-1]!} \\
&= \frac{(2n)!}{2(n!)} \\
&= \frac{n!}{n!}\frac{(2n)!}{2(n!)} \\
&= \frac{n!}{2}\tbinom{2n}{n} \qquad\qquad \text{ya que } C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \\
&= \frac{n!}{2}\left[(n+1)C_n\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{[2n-1]!}{[n-1]!} = \frac{[n+1]!}{2}C_n$. De esta forma, se concluye que $D^n(a^n) = \frac{(n+1)!C_n}{2}a^{2n}$ y $D^n(b^n) = \frac{(n+1)!C_n}{2}a^n b^n$. □

Los primeros números de Catalan C_n, variando n desde 0, son:

$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670$

Algunas aplicaciones de estos números se aprecian en [47].

Proposición 2.2.9. *Sea* $G = \{a \to a^2\,; b \to ab\}$ *entonces* $D^n(a^m b^m) = \frac{[2m+n-1]!}{[2m-1]!}a^{m+n}b^n$.

Demostración. Para el caso $n = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
D(a^m b^m) &= ma^{m-1}b^m D(a) + ma^m b^{m-1}D(b) \\
&= ma^{m-1}b^m[a^2] + ma^m b^{m-1}[ab] \\
&= ma^{m+1}b^m + ma^{m+1}b^m.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $D(a^m b^m) = 2ma^{m+1}b^m$; comprobando así el resultado para $n = 1$. Suponiendo que $D^n(a^m b^m) = \frac{[2m+n-1]!}{[2m-1]!}a^{m+n}b^m$, se calcula $D^{n+1}(a^m b^m)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(a^m b^m) &= D(D^n(a^m b^m)) \\
&= \frac{[2m+n-1]!}{[2m-1]!}D\left(a^{m+n}b^m\right) \\
&= \frac{[2m+n-1]!}{[2m-1]!}\left[(m+n)a^{m+n-1}b^m D(a) + ma^{m+n}b^{m-1}D(b)\right] \\
&= \frac{[2m+n-1]!}{[2m-1]!}\left[(m+n)a^{m+n-1}b^m[a^2] + ma^{m+n}b^{m-1}[ab]\right] \\
&= \frac{[2m+n-1]!}{[2m-1]!}\left[(m+n)a^{m+n+1}b^m + ma^{m+n+1}b^m\right] \\
&= \frac{[2m+n-1]!}{[2m-1]!}\left[(2m+n)a^{m+n+1}b^m\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $D^{n+1}(a^m b^m) = \frac{[2m+n]!}{[2m-1]!}a^{m+n+1}b^m$. □

2.2.1. Propiedades de los números factoriales

Los resultados que se presentan a continuación se basan en la sección 2.2, por lo cual la gramática sigue siendo $G = \{a \to a^2\ ; b \to ab\}$. La siguiente proposición corresponde a una propiedad de los números factoriales, cuya demostración se lleva a cabo mediante gramáticas.

Teorema 2.2.10. $\dfrac{[2m+n-1]!}{[2m-1]!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{[m+k-1]!}{[m-1]!} \frac{[m+n-k-1]!}{[m-1]!}$, *para* $m \geq 1$.

Demostración. Tomando $G = \{a \to a^2\ ; b \to ab\}$, dado que $D^n(a^m) = \dfrac{[m+n-1]!}{[m-1]!}a^{m+n}$, por la Proposición 2.2.6, se observa que $D^n(a^{2m}) = \dfrac{[2m+n-1]!}{[2m-1]!}a^{2m+n}$; luego, aplicando la regla del producto de Leibniz sobre $D^n(a^{2m})$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
D^n(a^{2m}) &= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} D^k(a^m) D^{n-k}(a^m) \\
\frac{[2m+n-1]!}{[2m-1]!}a^{2m+n} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\frac{[m+k-1]!}{[m-1]!}a^{m+k}\right] \left[\frac{[m+n-k-1]!}{[m-1]!}a^{m+n-k}\right] \\
\frac{[2m+n-1]!}{[2m-1]!}a^{2m+n} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\frac{[m+k-1]!}{[m-1]!}\right] \left[\frac{[m+n-k-1]!}{[m-1]!}\right] a^{2m+n}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\dfrac{[2m+n-1]!}{[2m-1]!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\frac{[m+k-1]!}{[m-1]!}\right] \left[\frac{[m+n-k-1]!}{[m-1]!}\right]$. □

Tomando $m = 1$ en el teorema 2.2.10, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 2.2.11. $(n+1)! = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k!(n-k)!$.

Considerando la gramática $G = \{a \to a^2\ ; b \to ab\}$, el Corolario 2.2.11 puede demostrarse empleando la Proposición 2.2.4 y la regla del producto de Leibniz. El siguiente resultado permite reescribir $[3n]!$.

Corolario 2.2.12. $[3n]! = \dfrac{3[2n]!n!}{2} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k-1}{n-1} \binom{n+k-1}{n-1}$.

Demostración. Considerando la gramática $G = \{a \to a^2\ ; b \to ab\}$, por el Teorema 2.2.10 se tiene que $\dfrac{[2m+n-1]!}{[2m-1]!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\frac{[m+k-1]!}{[m-1]!}\right] \left[\frac{[m+n-k-1]!}{[m-1]!}\right]$, tomando $m = n$

$$
\begin{aligned}
\frac{[3n-1]!}{[2n-1]!} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\frac{[n+k-1]!}{[n-1]!}\right] \left[\frac{[2n-k-1]!}{[n-1]!}\right] \qquad \text{multiplicando por } \frac{2(3n)}{3(2n)} = 1 \\
\frac{2(3n)[3n-1]!}{3(2n)[2n-1]!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{[n-k]!k!} \left[\frac{[n+k-1]!}{[n-1]!}\right] \left[\frac{[2n-k-1]!}{[n-1]!}\right] \\
\frac{2[3n]!}{3[2n]!} &= \sum_{k=0}^{n} n! \left[\frac{[n+k-1]!}{[n-1]!k!}\right] \left[\frac{[2n-k-1]!}{[n-1]![n-k]!}\right].
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $[3n]! = \dfrac{3[2n]!n!}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k-1}{n-1}\binom{2n-k-1}{n-1}$. $\square$

La demostración anterior puede realizarse mediante el operador derivada formal si se considera $G = \{a \to a^2\ ; b \to ab\}$, las Proposiciones 2.2.6, 2.2.7 y 2.2.9, junto con la regla del producto de Leibniz.

2.2.2. Números doble factorial

Se definen los números doble factorial mediante la siguiente recurrencia

$$n!! = n(n-2)!! \ \text{ con } (-1)!! = 1 \text{ y } 0!! = 1.$$

Por ejemplo $6!! = (6)(4)(2) = 48$ y $7! = (7)(5)(3)(1) = 105$. Los números factoriales pueden escribirse en términos de doble factoriales, $n! = n!!(n-1)!!$, y a su vez los doble factoriales en términos de factoriales, $(2n)!! = 2^n n!$; una demostración de estos resultados se presenta en el apéndice B.1.1 como Proposiciones B.1.1 y B.1.2 respectivamente.

Las siguientes proposiciones muestran como generar números doble factorial impares mediante el operador derivada formal, considerando la gramática $G = \{a \to ab^2; b \to b^3\}$.

Proposición 2.2.13. *Sea $G = \{a \to ab^2; b \to b^3\}$, entonces $D^n(a) = (2n-1)!!ab^{2n}$ para todo $n \geq 1$.*

Demostración. Dado que $D(a) = ab^2 = (2[1]-1)!!ab^{2[1]}$, se verifica el resultado para $n = 1$. Suponiendo que $D^n(a) = (2n-1)!!ab^{2n}$ se calcula $D^{n+1}(a)$

$$\begin{aligned} D^{n+1}(a) &= D((2n-1)!!ab^{2n}) \\ &= (2n-1)!![D(a)b^{2n} + aD(b^{2n})] \\ &= (2n-1)!![[ab^2]b^{2n} + 2nab^{2n-1}D(b)] \\ &= (2n-1)!![[ab^2]b^{2n} + 2nab^{2n-1}b^3] \\ &= (2n-1)!![ab^{2n+2} + 2nab^{2n+2}] \\ &= (2n-1)!!(2n+1)[ab^{2n+2}] \\ &= (2n+1)!![ab^{2n+2}]. \end{aligned}$$

Se comprueba así que $D^n(a) = (2n-1)!!ab^{2n}$ para todo $n \geq 1$. $\square$

Proposición 2.2.14. *Sea $G = \{a \to ab^2; b \to b^3\}$, entonces para todo $n \geq 1$*
$D^n(b) = (2n-1)!!b^{2n+1}$ y $D^n(b^2) = (2n)!!b^{2(n+1)}$.

Demostración. Para probar que $D^n(b) = (2n-1)!!b^{2n+1}$ se procede de manera similar a lo realizado en la Proposición 2.2.13.

Dado que $D(b) = b^3 = (2[1]-1)!!b^{2[1]+1}$ y $D(b^2) = 2bD(b) = 2!!b^{2([1]+1)}$ se verifica la fórmula para $n = 1$. Suponiendo que $D^n(b) = (2n-1)!!b^{2n+1}$ y $D^n(b^2) = (2n)!!b^{2(n+1)}$ se calculan $D^{n+1}(b)$ y $D^{n+1}(b^2)$

$$\begin{aligned} D^{n+1}(b) &= D((2n-1)!!b^{2n+1}) \\ &= (2n-1)!!D(b^{2n+1}) \\ &= (2n-1)!!(2n+1)b^{2n}D(b) \\ &= (2n+1)!!b^{2n+3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} D^{n+1}(b^2) &= D((2n)!!b^{2(n+1)}) \\ D^{n+1}(b^2) &= (2n)!!D(b^{2n+2}) \\ D^{n+1}(b^2) &= (2n)!!(2n+2)b^{2n+1}D(b) \\ D^{n+1}(b^2) &= (2[n+1])!!b^{2[n+2]} \end{aligned}$$

Por lo tanto $D^n(b) = (2n-1)!!b^{2n+1}$ y $D^n(b^2) = (2n)!!b^{2[n+1]}$ para todo $n \geq 1$. $\square$

Corolario 2.2.15. *Sea $G = \{a \to ab^2; b \to b^3\}$, entonces $D^n(b^3) = (2n+1)!!b^{2n+3}$ para todo $n \geq 1$.*

Demostración. Por la Proposición 2.2.14 se tiene que $D^n(b) = (2n-1)!!b^{2n+1}$, pero $D(b) = b^3$, luego

$$\begin{aligned} D^{n+1}(b) &= (2[n+1]-1)!!b^{2(n+1)+1} \\ D^n(D(b)) &= (2n+1)!!b^{2n+3} \\ D^n(b^3) &= (2n+1)!!b^{2n+3} \end{aligned}$$

$\square$

A continuación se aplica el operador derivada formal para generar números doble factorial pares.

Proposición 2.2.16. *Sea $G = \{a \to ab^2; b \to b^3\}$, entonces $D^n(ab) = (2n)!!ab^{2n+1}$ para todo $n \geq 1$.*

Demostración. Se calcula inicialmente $D(ab)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} D(ab) &= D(a)b + aD(b) \\ &= [ab^2]b + a[b^3] \\ &= 2ab^3. \end{aligned}$$

Luego $D(ab) = 2ab^3 = (2[1])!!ab^{2[1]+1}$, comprobando el resultado para $n = 1$. Suponiendo que $D^n(ab) = (2n)!!ab^{2n+1}$ se calcula $D^{n+1}(ab)$.

$$\begin{aligned} D^{n+1}(ab) &= D((2n)!!ab^{2n+1}) \\ &= (2n)!![D(a)b^{2n+1} + aD(b^{2n+1})] \\ &= (2n)!![[ab^2]b^{2n+1} + (2n+1)ab^{2n}D(b)] \\ &= (2n)!![ab^{2n+3} + (2n+1)ab^{2n}b^3] \\ &= (2n)!!(2n+2)ab^{2n+3} \\ &= (2n+2)!!ab^{2n+3}. \end{aligned}$$

Probando así que $D^{n+1}(ab) = (2[n+1])!!ab^{2[n+1]+1}$. Por lo tanto $D^n(ab) = (2n)!!ab^{2n+1}$ para todo $n \geq 1$. $\square$

La siguiente proposición es un resultado general sobre la gramática $G = \{a \to ab^2; b \to b^3\}$.

Proposición 2.2.17. *Sea* $G = \{a \to ab^2; b \to b^3\}$, *entonces* $D^n(b^m) = \dfrac{[m+2(n-1)]!!}{[m-2]!!} b^{m+2n}$.

Demostración. Tomando m fijo, se observa que

$$\begin{aligned} D(b^m) &= mb^{m-1}D(b) \\ &= mb^{m-1}[b^3] \\ &= mb^{m+2}. \end{aligned}$$

Con lo cual $D(b^m) = \dfrac{[m+2([1]-1)]!!}{[m-2]!!} b^{m+2[1]}$. Suponiendo que $D^n(b^m) = \dfrac{[m+2(n-1)]!!}{[m-2]!!} b^{m+2n}$, se calcula $D^{n+1}(b^m)$ como sigue

$$\begin{aligned} D^{n+1}(b^m) &= D\left(\frac{[m+2(n-1)]!!}{[m-2]!!} b^{m+2n}\right) \\ &= \frac{[m+2(n-1)]!!}{[m-2]!!} D\left(b^{m+2n}\right) \\ &= \frac{[m+2n-2]!!}{[m-2]!!} [m+2n] b^{m+2n-1} D\left(b\right) \\ &= \frac{[m+2n]!!}{[m-2]!!} b^{m+2n-1}[b^3] \\ &= \frac{[m+2n]!!}{[m-2]!!} b^{m+2n+2} \end{aligned}$$

Luego, $D^{n+1}(b^m) = \dfrac{[m+2n]!!}{[m-2]!!} b^{m+2[n+1]}$. □

2.2.3. Propiedades de los números doble factorial

La siguiente proposición muestra una propiedad que relaciona los números doble factorial con argumento par, en términos de combinatorios y doble factorial con argumento impar.

Teorema 2.2.18 (Teorema 3 de [36])**.** $(2n)!! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [2(n-k)-1]!![2k-1]!!$.

Demostración. Considerando la gramática $G = \{a \to ab^2; b \to b^3\}$, por la Proposición 2.2.13, $D^n(a) = (2n-1)!!ab^{2n}$. Del mismo modo, por la Proposición 2.2.14, $D^n(b) = (2n-1)!!b^{2n+1}$, además por la Proposición 2.2.16 se cumple que $D^n(ab) = (2n)!!ab^{2n+1}$. Por la regla del producto de Leibniz, Proposición 1.1.5, se tiene que

$$\begin{aligned} D^n(ab) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k(a) D^{n-k}(b) \\ (2n)!!ab^{2n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [(2k-1)!!ab^{2k}][[2(n-k)-1]!!ab^{2(n-k)+1}] \\ (2n)!!ab^{2n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [2k-1]!![2(n-k)-1]!!ab^{2n+1} \end{aligned}$$

Probando así que $(2n)!! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [2k-1]!![2(n-k)-1]!!.$ □

Otra demostración del teorema 2.2.18, en la cual se emplean funciones generadoras y convolución, puede apreciarse en [36]. Una demostración alternativa del teorema 2.2.18, mediante la gramática $G = \{a \to ab^2; b \to b^3\}$, se obtiene al considerar que $D^n(b^2) = (2n)!!b^{2n+2}$ y $D^n(b) = (2n-1)!!b^{2n+1}$, por la Proposición 2.2.14, y emplear la regla del producto de Leibniz.

Corolario 2.2.19. $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{[2k-1]!![2(n-k)-1]!!}{(n-k)!k!}$ *para todo* n.

Demostración. Aplicando el Teorema 2.2.18

$$
\begin{aligned}
(2n)!! &= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} [2k-1]!![2(n-k)-1]!! && \text{como } (2n)!! = 2^n n! \\
2^n n! &= \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{n!}{(n-k)!k!}\right] [2k-1]!![2(n-k)-1]!!
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $2^n = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{[2k-1]!![2(n-k)-1]!!}{(n-k)!k!}\right].$ □

Un resultado similar al Teorema 2.2.18, para doble factoriales impares, se demuestra a continuación.

Teorema 2.2.20. $(2n+1)!! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [2(n-k)]!![2k-1]!!$, *para todo* $n \geq 0$.

Demostración. Considerando la gramática $G = \{a \to ab^2; b \to b^3\}$, por la Proposición 2.2.14 se tiene que $D^n(b) = (2n-1)!!b^{2n+1}$ y $D^n(b^2) = (2n)!!b^{2(n+1)}$, además $D^n(b^3) = (2n+1)!!b^{2n+3}$, por el Corolario 2.2.15, luego por la regla del producto de Leibniz se tiene que:

$$
\begin{aligned}
D^n(b^3) &= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} D^k(b) D^{n-k}(b^2) \\
(2n+1)!!b^{2n+3} &= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} [(2k-1)!!b^{2k+1}][[2(n-k)]!!b^{2(n-k+1)}] \\
(2n+1)!!b^{2n+3} &= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} (2k-1)!![2(n-k)]!!b^{2n+3}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $(2n+1)!! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [2k-1]!![2(n-k)]!!.$ □

El siguiente resultado fue presentado en la sección 4.5 de [16], la demostración se hace identificando los diferentes conteos que realiza. La demostración que se presenta a continuación se basa en el Teorema 2.2.20 y en la relación existente entre factoriales y doble factoriales.

Teorema 2.2.21. $(2n-1)!! = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n-2)!!(2k-3)!!}{(2k-2)!!}$, *para todo* $n \geq 1$.

Demostración. Dado que $(2n+1)!! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}[2(n-k)]!![2k-1]!!$, por el Teorema 2.2.20, tomando $n-1$ en lugar de n se tiene que $(2[n-1]+1)!! = (2n-1)!!$ es dado por:

$$
\begin{aligned}
(2n-1)!! &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}[2(n-1-k)]!![2k-1]!! && \text{tomando la suma desde } k=1\\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}[2(n-1-[k-1])]!![2(k-1)-1]!!\\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}[2(n-k)]!![2k-3]!!\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}[2(n-k)]!![2k-3]!! && \text{como } [2(n-k)]!! = 2^{n-k}(n-k)!\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}2^{n-k}(n-k)![2k-3]!!\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{2^n(n-1)!}{2^k(n-k)!(k-1)!}(n-k)![2k-3]!!\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{2[2^{n-1}(n-1)]!}{2(n-k)!(2^{k-1})[k-1]!!}(n-k)![2k-3]!! && \text{como } [2r]!! = 2^r[r]!\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n-2)!!}{(n-k)!(2k-2)!!}(n-k)![2k-3]!!.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $(2n-1)!! = \sum_{k=1}^{n} \frac{[2n-2]!![2k-3]!!}{[2k-2]!!}$. □

El siguiente corolario corresponde al teorema anterior, con algunos términos escritos como números factorial.

Corolario 2.2.22. $(2n-1)!! = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{n-k}[n-1]![2k-3]!!k}{k!}$.

Demostración. Como $(2n-1)!! = \sum_{k=1}^{n} \frac{[2n-2]!![2k-3]!!}{[2k-2]!!}$, por el Teorema 2.2.21, se tiene que

$$
\begin{aligned}
(2n-1)!! &= \sum_{k=1}^{n} \frac{[2[n-1]]!![2k-3]!!}{[2[k-1]]!!}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{n-1}[n-1]![2k-3]!!}{2^{k-1}[k-1]!}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{n-k}[n-1]![2k-3]!!}{[k-1]!}.
\end{aligned}
$$

Luego, $(2n-1)!! = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{n-k}[n-1]![2k-3]!!k}{k!}$. □

El siguiente teorema es una propiedad de números doble factorial para dos valores m, n dados.

Teorema 2.2.23. $\dfrac{[2(m+n-1)]!!}{[2(m-1)]!!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\frac{[m+2(k-1)]!!}{[m-2]!!}\right] \left[\frac{[m+2(n-k-1)]!!}{[m-2]!!}\right].$

Demostración. Considerando la gramática $G = \{a \to ab^2; b \to b^3\}$, por la Proposicion 2.2.17 se sabe que $D^n(b^m) = \dfrac{[m+2(n-1)]!!}{[m-2]!!} b^{m+2n}$, luego

$$\begin{aligned}
D^n(b^{2m}) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k(b^m) D^{n-k}(b^m) \\
\frac{[2m+2(n-1)]!!}{[2m-2]!!} b^{2m+2n} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\frac{[m+2(k-1)]!!}{[m-2]!!} b^{m+2k}\right] \left[\frac{[m+2(n-k-1)]!!}{[m-2]!!} b^{m+2(n-k)}\right] \\
\frac{[2m+2(n-1)]!!}{[2m-2]!!} b^{2m+2n} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\frac{[m+2(k-1)]!!}{[m-2]!!}\right] \left[\frac{[m+2(n-k-1)]!!}{[m-2]!!}\right] b^{2m+2n}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dfrac{[2(m+n-1)]!!}{[2(m-1)]!!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\frac{[m+2(k-1)]!!}{[m-2]!!}\right] \left[\frac{[m+2(n-k-1)]!!}{[m-2]!!}\right].$ □

Como caso particular del teorema anterior, si se toma $m = 1$ se obtiene el Teorema 2.2.18.

2.3. Números multifactorial

Los números multifactorial, también conocidos como $(n,k)-$factoriales [72], permiten generalizar los números factorial y doble factorial presentados en las secciones 2.2 y 2.2.2 respectivamente; basados en [46] se definen los números multifactorial

$$n!_r = n(n-r)!_r \text{ con } (1-r)!_r = \cdots = (-1)!_r = 0!_r = 1.$$

Por ejemplo, $(17)!_5 = (17)(12)(7)(2) = 2856$ y $(30)!_9 = (30)(21)(12)(3) = 22680$. Dada la notación que se emplea, se observa que $n!_2 = n!!$ y que $n!_1 = n!$ [85].

Los números multifactorial pueden escribirse como números factoriales de la siguiente forma $(rn)!_r = r^n n!$, una demostración puede verse en el apéndice como Proposición B.1.3; la propiedad anterior puede generalizarse en términos de números multifactorial obteniendo así $(rn)!_{kr} = r^n n!_k$, una demostración puede apreciarse en el apéndice como Proposición B.1.4.

En esta sección se muestra cómo el operador derivada formal, definido con respecto a las gramáticas $G = \{a \to ab^r; b \to b^{r+1}\}$, $G = \left\{a \to \dfrac{a^{r+1}b^r}{2}; b \to \dfrac{a^r b^{r+1}}{2}\right\}$ y las gramáticas de la forma $G = \{a_1 \to [a_1 \ldots a_r]^m a_1 \ ; \ldots ; \ a_r \to [a_1 \ldots a_r]^m a_r\}$, permite generar números multifactorial.

2.3.1. La gramática $G = \left\{a \to ab^r; b \to b^{r+1}\right\}$

La gramática $G = \{a \to ab; b \to b^2\}$, equivalente a la gramática $G = \{a \to a^2; b \to ab\}$ presentada en la sección 2.2 salvo el intercambio de papeles entre a y b, permite generar números factoriales. Por otra parte, la gramática $G = \{a \to ab^2; b \to b^3\}$ permite generar números doble factorial, como se observa en la sección 2.2.2. Teniendo en cuenta lo anterior se propone la gramática $G = \{a \to ab^r; b \to b^{r+1}\}$, con la cual se generan números multifactorial, para comprobarlo basta con analizar $D^n(b)$. Dado que $D(b) = b^{r+1}$ se tiene que $D^2(b) = (r+1)b^r D(b) = (r+1)b^{2r+1}$; se observa que al aplicar el operador D el exponente de b se reduce en 1 y como consecuencia de la aparición de $D(b)$ se incrementa en $r+1$, con lo cual el incremento total del exponente es r; de este modo, en cada aplicación del operador, el coeficiente que multiplica se ira incrementado en r. Teniendo en cuenta lo anterior, se propone el siguiente resultado.

Teorema 2.3.1. *Sea* $G = \{a \to ab^r; b \to b^{r+1}\}$*, entonces* $D^n(b^m) = \dfrac{[m+(n-1)r]!_r}{[m-r]!_r} b^{m+nr}$.

Demostración. $D(b^m) = mb^{m-1}D(b) = mb^{m-1}[b^{r+1}] = mb^{m+r} = \dfrac{[m]!_r}{[m-r]!_r} b^{m+r}$. Suponiendo que $D^n(b^m) = \dfrac{[m+(n-1)r]!_r}{[m-r]!_r} b^{m+nr}$ se calcula $D^{n+1}(b^m)$ de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
D^{n+1}(b^m) &= D(D^n(b^m)) \\
&= D\left(\frac{[m+(n-1)r]!_r}{[m-r]!_r} b^{m+nr}\right) \\
&= \frac{[m+(n-1)r]!_r}{[m-r]!_r} D(b^{m+nr}) \\
&= \frac{[m+(n-1)r]!_r}{[m-r]!_r} [m+nr] b^{m+nr-1} D(b) \\
&= \frac{[m+(n-1)r]!_r}{[m-r]!_r} [m+nr] b^{m+nr-1} [b^{r+1}] \\
&= \frac{[m+nr]!_r}{[m-r]!_r} b^{m+(n+1)r}.
\end{aligned}
$$

Probando así que $D^n(b^m) = \dfrac{[m+(n-1)r]!_r}{[m-r]!_r} b^{m+nr}$, para cada n. □

Teorema 2.3.2. *Sea* $G = \{a \to ab^r; b \to b^{r+1}\}$*, entonces* $D^n(a^m) = \dfrac{[m+(n-1)r]!_r}{[m-r]!_r} a^m b^{nr}$.

Demostración. $D(a^m) = ma^{m-1}D(a) = ma^m b^r$, comprobando así la propoisición para $n = 1$. Suponiendo que $D^n(a^m) = \dfrac{[m+(n-1)r]!_r}{[m-r]!_r} !_r a^m b^{nr}$, se calcula $D^{n+1}(a^m)$ de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
D^{n+1}(a^m) &= D(D^n(a^m)) \\
&= D\left(\frac{[m+(n-1)r]!_r}{[m-r]!_r}a^m b^{nr}\right) \\
&= \frac{[m+(n-1)r]!_r}{[m-r]!_r} D\left(a^m b^{nr}\right) \\
&= \frac{[m+(n-1)r]!_r}{[m-r]!_r}\left[D(a^m)b^{nr} + a^m D(b^{nr})\right] \\
&= \frac{[m+(n-1)r]!_r}{[m-r]!_r}\left[ma^{m-1}b^{nr}D(a) + nra^m b^{nr-1}D(b)\right] \\
&= \frac{[m+(n-1)r]!_r}{[m-r]!_r}\left[ma^{m-1}b^{nr}[ab^r] + nra^m b^{nr-1}[b^{r+1}]\right] \\
&= \frac{[m+(n-1)r]!_r}{[m-r]!_r}\left[ma^m b^{(n+1)r} + nra^m b^{(n+1)r}\right] \\
&= \frac{[m+(n-1)r]!_r}{[m-r]!_r}[m+nr]a^m b^{(n+1)r} \\
&= \frac{[m+nr]!_r}{[m-r]!_r}a^m b^{(n+1)r}.
\end{aligned}
$$

Lo que demuestra que $D^n(a^m) = \dfrac{[m+(n-1)r]!_r}{[m-r]!_r}a^m b^{nr}$, para cada m, n. □

2.3.2. La gramática $G = \left\{a \to \dfrac{a^{r+1}b^r}{2}; b \to \dfrac{a^r b^{r+1}}{2}\right\}$

Los siguientes resultados permiten relacionar la gramática $G = \left\{a \to \dfrac{a^{r+1}b^r}{2}; b \to \dfrac{a^r b^{r+1}}{2}\right\}$ con números doble factorial, para cada r.

Teorema 2.3.3. *Sea G la gramática $G = \left\{a \to \dfrac{a^{r+1}b^r}{2}; b \to \dfrac{a^r b^{r+1}}{2}\right\}$ entonces para cada $r > 0$ entero:*

1. $D^n(a^r) = \dfrac{r^n}{2^n}[2n-1]!!a^{(n+1)r}b^{nr}$.

2. $D^n(b^r) = \dfrac{r^n}{2^n}[2n-1]!!a^{nr}b^{(n+1)r}$.

Demostración. Se realiza la demostración de 1. por inducción, la demostración del resultado 2. es completamente análoga. Aplicando el operador D con respecto a la gramática se tiene que $D(a^r) = ra^{r-1}D(a) = ra^{r-1}\left[\dfrac{a^{r+1}b^r}{2}\right] = \dfrac{r}{2}a^{2r}b^r$.

Suponiendo que $D^n(a^r) = \dfrac{r^n}{2^n}[2n-1]!!a^{(n+1)r}b^{nr}$ se calcula $D^{n+1}(a^r)$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(a^r) &= D\left(\frac{r^n}{2^n}[2n-1]!!a^{(n+1)r}b^{nr}\right)\\
&= \frac{r^n}{2^n}[2n-1]!!D(a^{(n+1)r}b^{nr})\\
&= \frac{r^n}{2^n}[2n-1]!!\left[D(a^{(n+1)r})b^{nr} + a^{(n+1)r}D(b^{nr})\right]\\
&= \frac{r^n}{2^n}[2n-1]!!\left[(n+1)ra^{(n+1)r-1}b^{nr}D(a) + nra^{(n+1)r}b^{nr-1}D(b)\right]\\
&= \frac{r^n}{2^n}[2n-1]!!\left[(n+1)ra^{(n+1)r-1}b^{nr}\left[\frac{a^{r+1}b^r}{2}\right] + nra^{(n+1)r}b^{nr-1}\left[\frac{a^rb^{r+1}}{2}\right]\right]\\
&= \frac{r^n}{2^{n+1}}[2n-1]!!\left[(n+1)ra^{(n+2)r}b^{(n+1)r} + nra^{(n+2)r}b^{(n+1)r}\right]\\
&= \frac{r^n}{2^{n+1}}[2n-1]!!\left[(2n+1)ra^{(n+2)r}b^{(n+1)r}\right]\\
&= \frac{r^{n+1}}{2^{n+1}}[2n+1]!!a^{(n+2)r}b^{(n+1)r}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $D^n(a^r) = \frac{r^n}{2^n}[2n-1]!!a^{(n+1)r}b^{nr}$. □

El siguiente resultado permite relacionar la gramática $G = \left\{a \to \frac{a^{r+1}b^r}{2}; b \to \frac{a^rb^{r+1}}{2}\right\}$ con números multifactorial.

Teorema 2.3.4. *Sea G la gramática $G = \left\{a \to \frac{a^{r+1}b^r}{2}; b \to \frac{a^rb^{r+1}}{2}\right\}$ entonces para cada $r > 0$ entero $D^n(a^rb^r) = (rn)!_ra^{(n+1)r}b^{(n+1)r}$.*

Demostración. Para verificar el resultado para $n = 1$, se calcula $D(a^rb^r)$

$$\begin{aligned}
D(a^rb^r) &= D(a^r)b^r + a^rD(b^r)\\
&= ra^{r-1}b^rD(a) + ra^rb^{r-1}D(b)\\
&= ra^{r-1}b^r\left[\tfrac{a^{r+1}b^r}{2}\right] + ra^rb^{r-1}\left[\tfrac{a^rb^{r+1}}{2}\right]\\
&= ra^{2r}b^{2r}
\end{aligned}$$

Así, $D(a^rb^r) = r!_ra^{2r}b^{2r}$. Suponiendo que $D^n(a^rb^r) = (rn)!_ra^{(n+1)r}b^{(n+1)r} = r^nn!a^{(n+1)r}b^{(n+1)r}$, se calcula $D^{n+1}(a^rb^r)$

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(a^rb^r) &= D(r^nn!a^{(n+1)r}b^{(n+1)r})\\
&= r^nn![D(a^{(n+1)r})b^{(n+1)r} + a^{(n+1)r}D(b^{(n+1)r})]\\
&= r^nn![(n+1)ra^{(n+1)r-1}b^{(n+1)r}D(a) + (n+1)ra^{(n+1)r}b^{(n+1)r-1}D(b)]\\
&= r^nn!(n+1)r\left[a^{(n+1)r-1}b^{(n+1)r}\left[\tfrac{a^{r+1}b^r}{2}\right] + a^{(n+1)r}b^{(n+1)r-1}\left[\tfrac{a^rb^{r+1}}{2}\right]\right]\\
&= r^{n+1}(n+1)![a^{(n+2)r}b^{(n+2)r}]\\
&= (r(n+1))!_ra^{(n+2)r}b^{(n+2)r}.
\end{aligned}$$

Probando así que $D^n(a^rb^r) = r^nn!a^{(n+1)r}b^{(n+1)r} = (rn)!_ra^{(n+1)r}b^{(n+1)r}$. □

2.3.3. $G = \{a_1 \to [a_1 \dots a_r]^m a_1 \ ; \dots ; \ a_r \to [a_1 \dots a_r]^m a_r\}$

La gramática $G = \{a_1 \to [a_1 \dots a_r]^m a_1 \ ; \ a_2 \to [a_1 \dots a_r]^m a_2 \ ; \dots ; \ a_r \to [a_1 \dots a_r]^m a_r\}$, es una gramática general con m, r valores dados. El siguiente resultado permite relacionar la gramática mencionada con números multifactorial.

Teorema 2.3.5. *Sea la gramática G dada por*

$$G = \{a_1 \to [a_1 \cdots a_r]^m a_1 \ ; \ a_2 \to [a_1 \cdots a_r]^m a_2 \ ; \cdots ; \ a_r \to [a_1 \cdots a_r]^m a_r\}$$

entonces $D^n(a_i) = [(n-1)mr+1]!_{mr}[a_1 a_2 \cdots a_r]^{nm} a_i$ para cada i.

Demostración. Claramente $D(a_i) = a_1^m \cdots a_{i-1}^m a_i^{m+1} a_{i+1}^m \cdots a_r^m = [0mr+1]!_{mr}[a_1 \cdots a_r]^{nm} a_i$.
Suponiendo que $D^n(a_i) = [(n-1)mr+1]!_{mr}[a_1 a_2 \dots a_r]^{nm} a_i$ para cada i, se calcula $D^{n+1}(a_i)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(a_i) &= D\left([(n-1)mr+1]_{mr}[a_1 a_2 \cdots a_r]^{nm} a_i\right) \\
&= [(n-1)mr+1]!_{mr} D([a_1 \cdots a_r]^{nm} a_i) \\
&= [(n-1)mr+1]!_{mr} D([a_1 \cdots a_r]^{nm}) a_i + [a_1 \cdots a_r]^{nm} D(a_i) \\
&= [(n-1)mr+1]!_{mr} nm [a_1 \cdots a_r]^{nm-1}[D(a_1 \cdots a_r)] a_i + [a_1 \cdots a_r]^{nm}[a_1 \cdots a_r]^m a_i \\
&= [(n-1)mr+1]!_{mr} nm [a_1 \cdots a_r]^{nm-1}[D(a_1 \cdots a_r)] + [a_1 \cdots a_r]^{nm}[a_1 a_2 \cdots a_r]^m] a_i.
\end{aligned}$$

Aplicando la Proposición 1.1.4, que generaliza la regla del producto, se tiene que

$$\begin{aligned}
D(a_1 \cdots a_r) &= D(a_1) a_2 \cdots a_r + \cdots + D(a_r) a_1 \cdots a_{r-1} && \text{como } D(a_i) = [a_1 \cdots a_r]^m a_i \\
&= [a_1 \cdots a_r]^m a_1 \cdots a_r + \cdots + [a_1 \cdots a_r]^m a_1 \cdots a_r && \text{operando se obtiene} \\
&= r[a_1 a_2 \cdots a_r]^{m+1}.
\end{aligned}$$

Con lo cual, $D^{n+1}(a_i)$ está dado por:

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(a_i) &= [(n-1)mr+1]!_{mr} nm [a_1 \cdots a_r]^{nm-1}[[D(a_1 \cdots a_r)] + [a_1 \cdots a_r]^{nm}[a_1 \cdots a_r]^m] a_i \\
&= [(n-1)mr+1]!_{mr} nm [a_1 \cdots a_r]^{nm-1}[[r[a_1 \cdots a_r]^{m+1}] + [a_1 \cdots a_r]^{nm}[a_1 \cdots a_r]^m] a_i \\
&= [(n-1)mr+1]!_{mr}[nmr[a_1 \cdots a_r]^{(n+1)m} + [a_1 \cdots a_r]^{(n+1)m}[a_1 \cdots a_r]] a_i \\
&= [(n-1)mr+1]!_{mr}[nmr+1][a_1 \cdots a_r]^{(n+1)m} a_i \\
&= [nmr+1]!_{mr}[a_1 \cdots a_r]^{(n+1)m} a_i.
\end{aligned}$$

De donde se concluye que $D^n(a_i) = [(n-1)mr+1]!_{mr}[a_1 \dots a_r]^{nm} a_i$, para todo n. □

Teorema 2.3.6. *Sea G la gramática dada por*

$$G = \{a_1 \to [a_1 \dots a_r]^m a_1 \ ; \ a_2 \to [a_1 \dots a_r]^m a_2 \ ; \dots ; \ a_r \to [a_1 \dots a_r]^m a_r\}\}$$

entonces $D^n([a_1 \dots a_r]^m a_s a_t) = \dfrac{[nmr+2]!_{mr}}{2}[a_1 \dots a_r]^{(n+1)m} a_s a_t$, con $s, t \leq r$.

Demostración. Aplicando la regla generalizada del producto, Proposición 1.1.4, se calcula $D([a_1 \dots a_r]^m a_s a_t)$ que es dado por $D(a_1^m)[[a_2 \dots a_r]^m a_s a_t] + \cdots + [a_1 \dots a_{r-1}]^m a_s a_t D(a_r^m)$; dada la longitud de la expresión se analiza por términos, en particular

$$\begin{aligned} D(a_1^m)[a_2\dots a_r]^m a_s a_t &= m a_1^{m-1}[a_2\dots a_r]^m D(a_1) a_s a_t \\ &= m a_1^{m-1}[a_2\dots a_r]^m [a_1^{m+1}[a_2\dots a_r]^m] a_s a_t \\ &= m[a_1\dots a_r]^{2m} a_s a_t. \end{aligned}$$

Así, $D(a_l^m)[a_1\dots a_{l-1}a_{l+1}\dots a_r]^m a_s a_t = m[a_1\dots a_r]^{2m}a_s a_t$ para cada $l \neq s,t$. En particular, para s

$$\begin{aligned} D(a_s^{m+1})[a_1\dots a_{s-1}a_{s+1}\dots a_r]^m a_t &= (m+1)a_s^m[a_1\dots a_{s-1}a_{s+1}\dots a_r]^m D(a_s) a_t \\ &= (m+1)[a_1\dots a_r]^{2m} a_s a_t. \end{aligned}$$

Análogamente se tiene para a_t. Por lo tanto, $D([a_1\dots a_r]^m)$ es dado por:

$$\begin{aligned} D([a_1\dots a_r]^m a_s a_t) &= D(a_1)[a_2\dots a_r]^m a_s a_t + \cdots + D(a_r)[a_1\dots a_{r-1}]^m a_s a_t \\ &= [m+\cdots+m+\underbrace{(m+1)}_{\text{debido a } a_s}+\underbrace{(m+1)}_{\text{debido a } a_t}+m+\cdots+m][a_1\dots a_{r-1}]^{2m}a_s a_t \\ &= mr+2. \end{aligned}$$

Suponiendo que $D^n([a_1\dots a_r]^m a_t a_s) = \dfrac{[nmr+2]!_{mr}}{2}[a_1\dots a_r]^{(n+1)m}a_t a_s$, se procede a calcular $D^{n+1}([a_1\dots a_r]^m a_t a_s)$, para ello cabe observar que

$$\begin{aligned} &D(a_s^{(n+1)m+1})[a_1^{(n+1)m}\dots a_{s-1}^{(n+1)m}a_{s+1}^{(n+1)m}\dots a_r^{(n+1)m}]a_t \\ &= ((n+1)m+1)a_s^{(n+1)m}D(a_s)[a_1^{(n+1)m}\dots a_{s-1}^{(n+1)m}a_{s+1}^{(n+1)m}\dots a_r^{(n+1)m}]a_t \\ &= ((n+1)m+1)[a_1^{(n+2)m}\dots a_r^{(n+2)m}]a_s a_t \\ &= ((n+1)m+1)[a_1\dots a_r]^{(n+2)m}a_s a_t. \end{aligned}$$

Procediendo análogamente, para $l \neq s,t$, se verifica que

$$\begin{aligned} D(a_t^{(n+1)m+1})[a_1^{(n+1)m}\dots a_{t-1}^{(n+1)m}a_{t+1}^{(n+1)m}\dots a_r^{(n+1)m}]a_s &= ((n+1)m+1)[a_1\dots a_r]^{(n+2)m}a_s a_t \\ D(a_l^{(n+1)m})[a_1^{(n+1)m}\dots a_{l-1}^{(n+1)m}a_{l+1}^{(n+1)m}\dots a_r^{(n+1)m}]a_s a_t &= (n+1)m[a_1\dots a_r]^{(n+2)m}a_s a_t. \end{aligned}$$

Sumando todos estos términos se obtiene que

$$\begin{aligned} &D([a_1\dots a_r]^{(n+1)m}a_s a_t) \\ &= [(n+1)m+\cdots+\underbrace{[(n+1)m+1]}_{\text{debido a } a_s}+\underbrace{[(n+1)m+1]}_{\text{debido a } a_s}+\cdots(n+1)m][a_1\dots a_r]^{(n+2)m}a_s a_t \\ &= [(n+1)mr+2][a_1\dots a_r]^{(n+2)m}a_s a_t. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} D^{n+1}([a_1\dots a_r]^m a_s a_t) &= D(D^n([a_1\dots a_r]^m a_t a_s)) \\ &= D\left(\frac{[nmr+2]!_{mr}}{2}[a_1\dots a_r]^{(n+1)m}a_t a_s\right) \\ &= \frac{[nmr+2]!_{mr}}{2}D\left([a_1\dots a_r]^{(n+1)m}a_t a_s\right) \\ &= \frac{[nmr+2]!_{mr}}{2}[(n+1)rm+2][a_1\dots a_r]^{(n+2)m}a_t a_s \\ &= \frac{[(n+1)mr+2]!_{mr}}{2}[a_1\dots a_r]^{(n+2)m}a_t a_s. \end{aligned}$$

Demostrando así que $D^n([a_1 \dots a_r]^m a_s a_t) = \frac{[nmr+2]!_{mr}}{2}[a_1 \dots a_r]^{(n+1)m} a_s a_t$. $\square$

2.3.4. Propiedades de los números multifactoriales

El siguiente teorema corresponde a una propiedad de los números multifactoriales.

Teorema 2.3.7. $(rn)!_r = \frac{r^n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2k-1)!!(2[n-k]-1)!!$.

Demostración. Considerando la gramática $G = \left\{a \to \frac{a^{r+1}b^r}{2}; b \to \frac{a^r b^{r+1}}{2}\right\}$, se tiene que $D^n(a^r) = \frac{r^n}{2^n}[2n-1]!!a^{(n+1)r}b^{nr}$ y $D^n(b^r) = \frac{r^n}{2^n}[2n-1]!!a^{nr}b^{(n+1)r}$, por el Teorema 2.3.3, entonces al aplicar la regla del producto de Leibniz a $D^n(a^r b^r)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
D^n(a^r b^r) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^k(a^r)D^{n-k}(b^r)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\frac{r^k}{2^k}[2k-1]!!a^{(k+1)r}b^{kr}\right]\left[\frac{r^{n-k}}{2^{n-k}}[2(n-k)-1]!!a^{(n-k)r}b^{(n-k+1)r}\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{r^n}{2^n}[2k-1]!![2(n-k)-1]!!a^{(n+1)r}b^{(n+1)r}.
\end{aligned}$$

Por el Teorema 2.3.4 se tiene que $D^n(a^r b^r) = (rn)!_r a^{(n+1)r}b^{(n+1)r}$, por lo tanto

$$(rn)!_r a^{(n+1)r}b^{(n+1)r} = \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\frac{r^n}{2^n}[2k-1]!![2(n-k)-1]!!a^{(n+1)r}b^{(n+1)r}\right].$$

Se concluye así que $(rn)!_r = \frac{r^n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2k-1)!!(2[n-k]-1)!!$. $\square$

El Teorema 2.3.7 es equivalente al Teorema 2.2.18, presentado como propiedad de los números doble factorial. Dado que $(rn)!_r = r^n n!$, se tiene que

$$\begin{aligned}
(rn)!_r &= \frac{r^n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2k-1)!!(2[n-k]-1)!!\\
r^n n! &= \frac{r^n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2k-1)!!(2[n-k]-1)!!\\
n! &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2k-1)!!(2[n-k]-1)!!\\
(2^n)n! &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2k-1)!!(2[n-k]-1)!! \qquad \text{como } (2^n)n! = (2n)!!\\
(2n)!! &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2k-1)!!(2[n-k]-1)!!
\end{aligned}$$

Esto demuestra que los Teoremas 2.2.18 y 2.3.7 son equivalentes. El siguiente teorema es una generalización de los Teoremas 2.2.10 y 2.2.23, que corresponden a los casos factorial ($r = 1$) y doble factorial ($r = 2$), respectivamente.

Teorema 2.3.8. $\dfrac{[2m+(n-1)r]!_r}{[2m-r]!_r} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\dfrac{[m+(k-1)r]!_r}{[m-r]!_r} \dfrac{[m+(n-k-1)r]!_r}{[m-r]!_r} \right].$

Demostración. Tomando $G = \{a \to ab^r ; b \to b^{r+1}\}$, por el Teorema 2.3.1, se obtiene que $D^n(b^m) = \dfrac{[m+(n-1)r]!_r}{[m-r]!_r} b^{m+nr}$, luego al aplicar la regla del producto de Leibniz a $D^n(b^{2m})$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
D^n(b^{2m}) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k(b^m) D^{n-k}(b^m) \\
\frac{[2m+(n-1)r]!_r}{[2m-r]!_r} b^{2m+nr} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\frac{[m+(k-1)r]!_r}{[m-r]!_r} b^{m+kr} \right] \left[\frac{[m+(n-k-1)r]!_r}{[m-r]!_r} b^{m+(n-k)r} \right] \\
\frac{[2m+(n-1)r]!_r}{[2m-r]!_r} b^{2m+nr} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\frac{[m+(k-1)r]!_r}{[m-r]!_r} \frac{[m+(n-k-1)r]!_r}{[m-r]!_r} \right] b^{2m+nr}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\dfrac{[2m+(n-1)r]!_r}{[2m-r]!_r} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\dfrac{[m+(k-1)r]!_r}{[m-r]!_r} \dfrac{[m+(n-k-1)r]!_r}{[m-r]!_r} \right].$ $\square$

Teniendo en cuenta el teorema anterior, se propone el siguiente corolario que generaliza la Proposición 2.2.11, la cual se obtiene como el caso particular $r = 1$.

Corolario 2.3.9. $[(n+1)r]!_r = r \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [kr]!_r (n-k)r!_r.$

Demostración. Aplicando el Teorema 2.3.8, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\frac{[2m+(n-1)r]!_r}{[2m-r]!_r} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\frac{[m+(k-1)r]!_r}{[m-r]!_r} \frac{[m+(n-k-1)r]!_r}{[m-r]!_r} \right] \quad \text{tomando } r = m \\
\frac{[2r+(n-1)r]!_r}{[2r-r]!_r} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\frac{[r+(k-1)r]!_r}{[r-r]!_r} \frac{[r+(n-k-1)r]!_r}{[r-r]!_r} \right] \\
\frac{[(n+1)r]!_r}{r} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [kr]!_r (n-k)r!_r.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $[(n+1)r]!_r = r \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [kr]!_r (n-k)r!_r.$ $\square$

El siguiente teorema corresponde a una propiedad de los números mr-factoriales, para cada m y r. La demostración de este resultado se lleva a cabo mediante la gramática independiente del contexto $G = \{a_1 \to [a_1 \dots a_r]^m a_1 \ ; \ a_2 \to [a_1 \dots a_r]^m a_2 \ ; \dots ; \ a_r \to [a_1 \dots a_r]^m a_r\}$, estudiada en la sección 2.3.3.

Teorema 2.3.10. $[(n-1)mr+2]!_{mr} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}[(n-k-1)mr+1]!_{mr}[(k-1)mr+1]!_{mr}$.

Demostración. Sea $G = \{a_1 \to [a_1 \dots a_r]^m a_1 \,;\, a_2 \to [a_1 \dots a_r]^m a_2 \,;\dots;\, a_r \to [a_1 \dots a_r]^m a_r\}$, por el Teorema 2.3.5 se observa que $D^{n-k}(a_s) = [(n-k-1)mr+1]!_{mr}[a_1 a_2 \dots a_r]^{(n-k)m} a_s$ y $D^k(a_t) = [(k-1)mr+1]!_{mr}[a_1 a_2 \dots a_r]^{km} a_t$. Por lo anterior, al emplear la regla del producto de Leibniz se obtiene

$$\begin{aligned} D^n(a_s a_t) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}(a_s) D^k(a_t) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [[(n-k-1)mr+1]!_{mr}[a_1 \dots a_r]^{(n-k)m} a_s][(k-1)mr+1]!_{mr}[a_1 \dots a_r]^{km} a_t \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [(n-k-1)mr+1]!_{mr}[(k-1)mr+1]!_{mr}[a_1 \dots a_r]^{nm} a_s a_t. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} D(a_s a_t) &= D(a_s)a_t + a_s D(a_t) \\ &= [a_1 \dots a_r]^m a_s a_t + [a_1 \dots a_r]^m a_s a_t \\ &= 2[a_1 \dots a_r]^m a_s a_t. \end{aligned}$$

Se observa que $D^n(a_s a_t) = D^{n-1}(2[a_1 \dots a_r]^m a_s a_t) = [(n-1)mr+2]!_{mr}[a_1 \dots a_r]^{nm} a_s a_t$, por el Teorema 2.3.6. Luego, dado que $D^n(a_s a_t)$ es igual a dos expresiones se concluye que estas deben ser iguales, con lo cual

$$[(n-1)mr+2]!_{mr}[a_1 \dots a_r]^{nm} a_s a_t = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [(n-k-1)mr+1]!_{mr}[(k-1)mr+1]!_{mr}[a_1 \dots a_r]^{nm} a_s a_t.$$

Por lo tanto, $[(n-1)mr+2]!_{mr} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [(n-k-1)mr+1]!_{mr}[(k-1)mr+1]!_{mr}$. □

En términos de la propiedad de los números multifactorial, el Teorema 2.3.10 puede escribirse como $[(n-1)r+2]!_r = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [(n-k-1)r+1]!_r[(k-1)r+1]!_r$; no obstante, el mantener m y r en la expresión muestra que hay múltiples gramáticas independientes del contexto con las cuales se puede obtener el mismo resultado.

2.4. Números de Stirling

Los números de Stirling, de primera y segunda clase, presentados por James Stirling en 1730, son los coeficientes de las expansiones de números factoriales en potencias y de las potencias en números factoriales, respectivamente [20, pág 277]. Estos números son de importancia en combinatoria enumerativa debido a los conteos que permiten realizar, como se evidencia en el apéndice B.2.

En esta sección se presenta una conexión entre números de Stirling de primera clase con las gramáticas independientes del contexto $G = \{a \to a^2b\ ; b \to b^2\}$, presentada en [60], y $G = \{a \to ab\ ; b \to bc\ ; c \to c^2\}$, presentada en [63], con las cuales se demuestran algunas propiedades de estos números. Del mismo modo se procede para demostrar la conexión existente entre la gramática $G = \{a \to ab\ ; b \to b\}$ y los números de Stirling de segunda clase. Cabe destacar que la gramática $G = \{a \to ab\ ; b \to b\}$, actualmente conocida como gramática de Stirling [64], permite generar una familia de polinomios conocidos como polinomios exponenciales [11], cuyos coeficientes son dados por los números de Stirling de segunda clase [66]; debido a que estos polinomios fueron estudiados por Jacques Touchard [84] y Eric Temple Bell [6], suelen ser denominados también polinomios de Touchard o polinomios de Bell.

Debido a que las gramáticas $G = \{a \to ab\ ; b \to b\}$ y $G = \{a \to a^2b\ ; b \to b^2\}$ han sido estudiadas por otros autores, algunos resultados del operador derivada formal con respecto a ellas son conocidos; por tal razón, se proponen generalizaciones de estos resultados y con ellos se estudian algunas propiedades de los números de Stirling.

2.4.1. Números de Stirling de primera clase

Los números de Stirling de primera clase, denotados $s(n, k)$, cuentan el número de permutaciones de n elementos diferentes que tienen k ciclos. Por lo anterior, se observa que $s(0, 0) = 1$, $s(n, 0) = 0$ para $n > 0$ y $s(n, k) = 0$ para cada $k > n$ [21, pág 25, 26]. Los números de Stirling de primera clase satisfacen la recurrencia $s(n+1, k) = s(n, k-1) + ns(n, k)$, como consecuencia $s(n+1, 1) = s(n, 1) = 0$, $s(n+1, n+1) = s(n, n) = 1$, estos resultados pueden consultarse en el apéndice B.2.1 como proposición B.2.1 y B.2.2, respectivamente. A continuación se estudian dos gramáticas que están relacionadas con los números de Stirling.

La gramática $G = \{a \to ab\ ; b \to bc\ ; c \to c^2\}$

En [63] son estudiadas varias gramáticas con tres variables y su relación con ciertas familias de números y polinomios, entre ellas la gramática $G = \{a \to ab\ ; b \to bc\ ; c \to c^2\}$ es mencionada como ejemplo. La siguiente proposición fue enunciada en [63], pero no demostrada, y muestra cómo generar números de stirling de primera clase mediante la gramática mencionada.

Proposición 2.4.1. *Sea* $G = \{a \to ab\ ; b \to bc\ ; c \to c^2\}$, *entonces* $D^n(a) = \sum_{k=0}^{n} s(n, k)ab^kc^{n-k}$.

Demostración. Claramente $D(a) = ab$, con lo cual la proposición se cumple para $n = 1$. Suponiendo que $D^n(a) = a \sum_{k=0}^{n} s(n, k)b^kc^{n-k}$, se calcula $D^{n+1}(a)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} D^{n+1}(a) &= D(D^n(a)) \\ &= D\left(\sum_{k=0}^{n} s(n, k)ab^kc^{n-k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} s(n, k)\left[D(a)b^kc^{n-k} + aD(b^k)c^{n-k} + ab^kD(c^{n-k})\right]. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $D(a) = ab$, $D(b^k) = kb^k c$ y $D(c^{n-k}) = (n-k)c^{n+1-k}$, se tiene que

$$\begin{aligned} D^{n+1}(a) &= \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\left[ab^{k+1}c^{n-k} + kab^k c^{n+1-k} + (n-k)ab^k c^{n+1-k}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\left[ab^{k+1}c^{n-k} + nab^k c^{n+1-k}\right]. \end{aligned}$$

Expandiendo la suma se obtiene que

$$D^{n+1}(a) = a\left[ns(n,0)c^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[s(n,k-1) + ns(n,k)\right] b^k c^{n+1-k} + s(n,n)b^{n+1}c^{n-k}\right].$$

Dado que $s(n+1,k) = s(n,k-1) + ns(n,k)$, $s(n+1,n+1) = s(n,n)$ y $s(n+1,0) = s(n,0)$ para $n > 0$, como se observa en el apéndice B.2.1, se tiene que

$$\begin{aligned} D^{n+1}(a) &= a\left[s(n+1,0)c^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} s(n+1,k)b^k c^{n+1-k} + s(n,n)b^{n+1}c^{n-k}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} s(n+1,k)ab^k c^{n+1-k}. \end{aligned}$$

Probando así que, para cada n, $D^n(a) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)ab^k c^{n-k}$. □

La gramática $G = \{a \to a^2\ ; b \to ab\}$, presentada en la sección 2.2, está relacionada con la gramática $G = \{a \to ab\ ; b \to bc\ ; c \to c^2\}$ ya que si en $G = \{a \to a^2\ ; b \to ab\}$ se cambia a por c, se obtienen las producciones $\{b \to bc\ ; c \to c^2\}$; por lo anterior, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 2.4.2. *Sea $G = \{a \to ab\ ; b \to bc\ ; c \to c^2\}$, entonces $D^n(c) = n!c^{n+1}$ y $D^n(b) = n!c^n b$.*

Demostración. Tomando la gramática $G = \{c \to c^2\ ; b \to bc\}$, por la proposición 2.2.4, se tiene que $D^n(c) = n!c^{n+1}$ y $D^n(b) = n!a^n b$. □

La gramática $G = \{a \to a^2 b\ ; b \to b^2\}$

Dada la gramática $G = \{a \to a^2 b\ ; b \to b^2\}$, se tiene que $D^n(a) = a\sum_{k=1}^{n} k!s(n,k)a^k b^n$, proposición enunciada en [60] pero no demostrada. El siguiente resultado permite generalizar dicho resultado y, considerando $m = 1$, se obtiene una demostración para el resultado propuesto en [60].

Teorema 2.4.3. *Sea* $G = \{a \to a^2b\,; b \to b^2\}$, *entonces* $D^n(a^m) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!} s(n,k)a^{m+k}b^n$.

Demostración. Se observa que $D(a^m) = ma^{m-1}D(a) = ma^{m+1}b$, por lo tanto el resultado se cumple para $n = 1$. Suponiendo que $D^n(a^m) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!} s(n,k)a^{m+k}b^n$, se calcula $D^{n+1}(a^m)$ de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
D^{n+1}(a^m) &= D(D^n(a^m)) \\
&= D\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!} s(n,k)a^{m+k}b^n\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!} s(n,k)D(a^{m+k}b^n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!} s(n,k)\left[D(a^{m+k})b^n + a^{m+k}D(b^n)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!} s(n,k)\left[(m+k)a^{m+k-1}b^nD(a) + na^{m+k}b^{n-1}D(b)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!} s(n,k)\left[(m+k)a^{m+k+1}b^{n+1} + na^{m+k}b^{n+1}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{(m+k)!}{(m-1)!} s(n,k)a^{m+k+1} + n\frac{(m+k-1)!}{(m-1)!} s(n,k)a^{m+k}\right] b^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Expandiendo la suma anterior, se obtiene

$$
\left[\frac{[m!]ns(n,1)}{(m-1)!}a^{m+1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!}\left[s(n,k-1) + ns(n,k)\right]a^{m+k} + \frac{(m+n)!}{(m-1)!}s(n,n)a^{m+n+1}\right] b^{n+1}.
$$

Dado que $s(n+1,1) = ns(n,1)$, $s(n+1,n+1) = s(n,n)$ y $s(n+1,k) = s(n,k-1)+ns(n,k)$, , como se observa en el apéndice B.2.1, se obtiene:

$$
\left[\frac{m!s(n+1,1)}{(m-1)!}a^{m+1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!}s(n+1,k)a^{m+k} + \frac{(m+n)!}{(m-1)!}s(n+1,n+1)a^{m+n+1}\right] b^{n+1}.
$$

Reagrupando se concluye que $D^{n+1}(a^m) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!} s(n+1,k)a^{m+k}b^{n+1}$. □

A partir del Teorema 2.4.3 se obtienen los siguiente corolarios.

Corolario 2.4.4 (Teorema 6, resultado c8 de [64])**.** *Sea* $G = \{a \to a^2b\,; b \to b^2\}$, *entonces* $D^n(a) = a\sum_{k=1}^{n} k!s(n,k)a^kb^n$.

Corolario 2.4.5. $D(a^2) = \sum_{k=1}^{n} (k+1)!s(n,k)a^{k+2}b^n$.

Similar a la proposición 2.4.2, correspondiente a la gramática $G = \{a \to ab\,; b \to bc\,; c \to c^2\}$, se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 2.4.6. *Sea* $G = \{a \to a^2b \,; b \to b^2\}$, *entonces* $D^n(b) = n!b^{n+1}$.

Demostración. Se observa que $D(b) = 1!b^2$; suponiendo que $D^n(b) = n!b^{n+1}$ se calcula $D^{n+1}(b)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} D^{n+1}(b) &= D(D^n(b)) \\ &= D(n!b^{n+1}) \\ &= n!(n+1)b^n D(b). \end{aligned}$$

Probando así que $D^n(b) = n!b^{n+1}$. □

2.4.2. Propiedades de los números de Stirling de primera clase

Teniendo en cuenta las gramáticas estudiadas en la sección 2.4.1, se demuestran algunas propiedades de los números de Stirling de primera clase; en particular, mediante la gramática $G = \{a \to ab \,; b \to bc \,; c \to c^2\}$, se demuestran los siguiente resultados.

Teorema 2.4.7. $s(n+1, r) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} s(k, r-1)$.

Demostración. Tomando la gramática $G = \{a \to ab \,; b \to bc \,; c \to c^2\}$, se observa que $D^n(ab) = D^n(D(a)) = D^{n+1}(a)$; además $D^n(a) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)ab^k c^{n-k}$, por la Proposición 2.4.1, y $D^n(b) = n!c^n b$, por el Corolario 2.4.2. Por lo tanto, si se calcula $D^n(ab)$ mediante la regla del producto de Leibniz se tiene que

$$\begin{aligned} D^n(ab) &= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} D^k(a) D^{n-k}(b) \\ D^{n+1}(a) &= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} \left[\sum_{j=0}^{k} s(k,j)ab^j c^{k-j} \right] [(n-k)!c^{n-k}b] \\ \sum_{r=0}^{n+1} s(n+1,r)ab^r c^{n+1-r} &= \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{n!}{k!(n-k)!} \right] \sum_{j=0}^{k} (n-k)! s(k,j) ab^{j+1} c^{n-j} \end{aligned}$$

Tomando $r = j+1$, se obtiene que $j = r-1$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} s(n+1,r)ab^r c^{n+1-r} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} s(k, r-1) ab^{[r-1]+1} c^{n-[r-1]} \\ s(n+1,r)ab^r c^{n+1-r} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} s(k, r-1) ab^r c^{n+1-r} \end{aligned}$$

Concluyendo así que $s(n+1, r) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} s(k, r-1)$. □

Teorema 2.4.8. *Para cada* $m, r \geq 0$

$$\frac{(2m+r-1)!}{(m-1)!}s(n,r) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{[m+j-1]!}{[m-1]!}\frac{[m+r-j-1]!}{[m-1]!}s(k,j)s(n-k,r-j)\right].$$

Demostración. Tomando $G = \{a \to a^2b\ ; b \to b^2\}$, se considera $D^n(a^{2m})$ el cual, por la regla del producto de Leibniz, es dado por $D^n(a^{2m}) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^k(a^m)D^{n-k}(a^m)$. Dado que $D^n(a^{2m}) = \sum_{r=1}^{n}\frac{(2m+r-1)!}{(2m-1)!}s(n,r)a^{2m+r}b^n$, por el Teorema 2.4.3, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{n}\frac{(2m+r-1)!}{(2m-1)!}s(n,r)a^{2m+r}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^k(a^m)D^{n-k}(a^m)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{(m+j-1)!}{(m-1)!}s(k,j)a^{m+j}b^k\right]\left[\sum_{i=1}^{n-k}\frac{(m+i-1)!}{(m-1)!}s(n-k,i)a^{m+i}b^{n-k}\right]\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{(m+j-1)!}{(m-1)!}s(k,j)a^{m+j}\right]\left[\sum_{i=1}^{n-k}\frac{(m+i-1)!}{(m-1)!}s(n-k,i)a^{m+i}\right]\right)b^n.
\end{aligned}$$

Tomando $r = i + j$, se tiene que $\sum_{r=1}^{n}\frac{(2m+r-1)!}{(2m-1)!}s(n,r)a^{2m+r}b^n$ debe ser igual a

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{(m+j-1)!}{(m-1)!}s(k,j)a^{m+j}\right]\left[\frac{(m+r-j-1)!}{(m-1)!}s(n-k,r-j)a^{m+r-j}\right]\right)b^n\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{(m+j-1)!}{(m-1)!}s(k,j)\frac{(m+r-j-1)!}{(m-1)!}s(n-k,r-j)\right]\right)a^{2m+r}b^n.
\end{aligned}$$

Así, $\frac{(2m+r-1)!}{(m-1)!}s(n,r) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{[m+j-1]!}{[m-1]!}\frac{[m+r-j-1]!}{[m-1]!}s(k,j)s(n-k,r-j)\right]$. □

Se observa que al considerar $m = 1$ en el teorema anterior, se obtiene como corolario la ecuación $(r+1)!s(n,r) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{j=1}^{k}j![r-j]!s(k,j)s(n-k,r-j)$.

Teorema 2.4.9. $(k+1)!s(n+1,k+1) = \sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{k}\frac{n!}{(k-j)!j!}\sum_{p=1}^{j}p!s(j,p)(k-p)!s(k-j,k-p)\right]$.

Demostración. Tomando $G = \{a \to a^2b\ ; b \to b^2\}$, por el Corolario 2.4.4 se tiene que $D^n(a) = a\sum_{r=1}^{n}r!s(n,r)a^rb^n$, además $D^n(a^2) = \sum_{r=1}^{n}(r+1)!s(n,r)a^{r+2}b^n$ por el Corolario 2.4.5 y $D^n(b) = n!b^{n+1}$ por la Proposición 2.4.6, luego:

$$
\begin{aligned}
D^{n+1}(a) &= D^n(D(a)) \\
D^{n+1}(a) &= D^n(a^2 b) \\
a\sum_{r=1}^{n+1} r!s(n+1,r)a^r b^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k(a^2)D^{n-k}(b) \\
\sum_{r=1}^{n+1} r!s(n+1,r)a^{r+1} b^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} D^j(a)D^{k-j}(a)\right] D^{n-k}(b) \\
\sum_{r=1}^{n+1} r!s(n+1,r)a^{r+1} b^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \left[\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{(k-j)!j!} D^j(a)D^{k-j}(a)\right] (n-k)!b^{n-k+1} \\
\sum_{r=1}^{n+1} r!s(n+1,r)a^{r+1} b^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{k}\frac{n!}{(k-j)!j!} D^j(a)D^{k-j}(a)\right] b^{n-k+1}.
\end{aligned}
$$

Como $D^j(a) = \sum_{p=1}^{j} p!s(j,p)a^{p+1}b^j$ y $D^{k-j}(a) = \sum_{q=1}^{k-j} q!s(k-j,q)a^{q+1}b^{k-j}$, se observa que $\sum_{r=1}^{n+1} r!s(n+1,r)a^{r+1}b^{n+1}$ equivale a

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{k}\frac{n!}{(k-j)!j!}\left(\sum_{p=1}^{j} p!s(j,p)a^{p+1}b^j\right)\left(\sum_{q=1}^{k-j} q!s(k-j,q)a^{q+1}b^{k-j}\right)\right] b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{k}\frac{n!}{(k-j)!j!}\left(\sum_{p=1}^{j} p!s(j,p)\right)\left(\sum_{q=1}^{k-j} q!s(k-j,q)\right)\right] a^{p+q+2}b^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Dado que ambas expresiones tienen b^{n+1}, se obtiene

$$
\sum_{r=1}^{n+1} r!s(n+1,r)a^{r+1} = \sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{k}\frac{n!}{(k-j)!j!}\left(\sum_{p=1}^{j} p!s(j,p)\right)\left(\sum_{q=1}^{k-j} q!s(k-j,q)\right)\right] a^{p+q+2}.
$$

Si se toma $r = k+1$ se tiene obtiene el término $(k+1)!s(n+1,k+1)a^{k+2}$, que debe corresponder a la respectiva expresión con a^{k+2} en los términos que acompañan a a^{p+q+2}; por lo anterior, se observa que se debe tener $k = p+q$, luego al considerar $q = k-p$ se tiene que

$$
(k+1)!s(n+1,k+1)a^{k+2} = \sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{k}\frac{n!}{(k-j)!j!}\sum_{p=1}^{j}\left(p!s(j,p)(k-p)!s(k-j,k-p)\right)\right] a^{k+2}
$$

Así, $(k+1)!s(n+1,k+1) = \sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{k}\frac{n!}{(k-j)!j!}\sum_{p=1}^{j}\left(p!s(j,p)(k-p)!s(k-j,k-p)\right)\right].$ $\square$

2.4.3. Números de Stirling de segunda clase

Los números de Stirling de segunda clase, denotados $S(n,k)$, cuentan el número de particiones de un conjunto de n elementos en k clases. Por lo anterior, se observa que $S(0,0)=1$, $S(n,0)=0$ para $n>0$ y $S(n,k)=0$ para $k>n$ [21, págs 47,48]. Los números de Stirling de segunda clase satisfacen la recurrencia $S(n+1,k)=S(n,k-1)+kS(n,k)$, como consecuencia $S(n,1)=S(n+1)=1$ y $S(n,n)=S(n+1,n+1)=1$. Estos resultados pueden consultarse en el apéndice B.2.2 como Proposición B.2.3 y B.2.4.

Se propone el siguiente resultado, con el cual se generan los números de Stirling de segunda clase mediante la gramática $G=\{a\to ab\ ; b\to b\}$, propuesta en [22].

Teorema 2.4.10. *Sea* $G=\{a\to ab\ ; b\to b\}$, *entonces* $D^n(a^m)=\sum\limits_{k=1}^{n} m^k S(n,k)a^m b^k$.

Demostración. Se observa que $D(a^m)=ma^{m-1}D(a)=ma^{m-1}[ab]=ma^m b$, con lo cual la proposición se cumple para $n=1$. Suponiendo que $D^n(a^m)=\sum\limits_{k=1}^{n} m^k S(n,k)a^m b^k$, se calcula $D^{n+1}(a)$ como sigue:

$$
\begin{aligned}
D^{n+1}(a) &= D(D^n(a))\\
&= D\left(\sum_{k=1}^{n} m^k S(n,k)a^m b^k\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} m^k S(n,k)D\left(a^m b^k\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} m^k S(n,k)\left[D(a^m)b^k + a^m D(b^k)\right]\\
&= \sum_{k=1}^{n} m^k S(n,k)\left[[ma^m b]b^k + a^m[kb^k]\right]\\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[m^{k+1}S(n,k)a^m b^{k+1} + m^k kS(n,k)a^m b^k]\right]\\
&= mS(n,1)a^m b + \sum_{k=2}^{n}\left[m^k S(n,k-1)a^m b^k + m^k kS(n,k)a^m b^k]\right] + m^{n+1}S(n,n)a^m b^{n+1}\\
&= mS(n,1)a^m b + \sum_{k=2}^{n} m^k\left[S(n,k-1)+kS(n,k)\right]a^m b^k + m^{n+1}S(n,n)a^m b^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Como $S(n+1,k)=S(n,k-1)+kS(n,k)$, $S(n,1)=S(n+1)$ y $S(n,n)=S(n+1,n+1)$, entonces

$$
\begin{aligned}
D^{n+1}(a) &= mS(n+1,1)a^m b + \sum_{k=2}^{n} m^k S(n+1,k)a^m b^k + m^{n+1}S(n+1,n+1)a^m b^{n+1}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} m^k S(n+1,k)a^m b^k.
\end{aligned}
$$

Probando así que $D^n(a^m)=\sum\limits_{k=1}^{n} m^k S(n,k)a^m b^k$. □

Como casos particulares del Teorema 2.4.10, se obtienen los siguientes resultados que serán empleados posteriormente.

Corolario 2.4.11 (Sección 4.2 de [22])**.** *Sea* $G = \{a \to ab\ ; b \to b\}$*, entonces* $D^n(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} S(n,k)ab^k$.

Corolario 2.4.12. *Sea* $G = \{a \to ab\ ; b \to b\}$*, entonces* $D^n(a^2) = \sum\limits_{k=1}^{n} 2^k S(n,k)a^2b^k$.

2.4.4. Propiedades de los números de Stirling de segunda clase

Teniendo en cuenta la gramática $G = \{a \to ab\ ; b \to b\}$, y los resultados obtenidos al aplicar el operador derivada formal respecto a ella, estudiados en la sección 2.4.3, se demuestran algunas propiedades de los números de Stirling de segunda clase.

Teorema 2.4.13. $S(n+1,k) = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} S(j,k-1)$.

Demostración. Dada la gramática $G = \{a \to ab\ ; b \to b\}$ tal que $D^n(a) = a\sum\limits_{k=1}^{n} S(n,k)b^k$, como se muestra en el Corolario 2.4.11. Por la regla del producto de Leibniz, Proposición 1.1.5, se sabe que $D^n(ab) = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D^j(a)D^{n-j}(b)$, luego

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(a) &= D^n(D(a)) \\
D^{n+1}(a) &= D^n(ab) \\
D^{n+1}(a) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D^j(a)D^{n-j}(b), && \text{por el Corolario 2.4.11} \\
a\sum_{k=1}^{n+1} S(n+1,k)b^k &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left[a\sum_{r=1}^{j} S(j,r)b^r \right] b.
\end{aligned}$$

Igualando los términos correspondientes a b^k se tiene que

$$aS(n+1,k)b^k = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left[aS(j,k-1)b^{k-1} \right] b.$$

Por lo tanto, $S(n+1,k) = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} S(j,k-1)$. □

Si en la demostración anterior, al emplear la regla de Leibniz sobre la expresión $D^n(ab)$ se considerara $D^{n-j}(a)$ y $D^j(b)$ se obtendría una propiedad equivalente

$$S(n+1,k) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} S(n-j,k-1).$$

Este resultado es demostrado mediante argumentos combinatorios en [9].

Teorema 2.4.14. $2^r S(n,r) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum\limits_{l=1}^{k} S(k,l)S(n-k,r-l)$.

Demostración. Como $D^n(a^2) = \sum\limits_{k=1}^{n} 2^k S(n,k)a^2b^k$ y $D^n(a) = a\sum\limits_{k=1}^{n} S(n,k)b^k$, por el Corolario 2.4.12 y por el Corolario 2.4.11 respectivamente, entonces empleando la regla del producto de Leibniz se tiene que

$$\begin{aligned} D(a^2) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k(a)D^{n-k}(a) \\ \sum_{r=1}^{n} 2^r S(n,r)a^2b^r &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[a\sum_{l=1}^{k} S(k,l)b^l\right]\left[a\sum_{m=1}^{n-k} S(n-k,m)b^m\right]. \end{aligned}$$

Tomando $r = l+m$ se obtiene

$$2^r S(n,r)a^2b^r = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[a\sum_{l=1}^{k} S(k,l)b^l\right]\left[aS(n-k,r-l)b^{r-l}\right].$$

Por lo tanto, $2^r S(n,r) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\sum\limits_{l=1}^{k} S(k,l)S(n-k,r-l)\right]$. □

Cabe destacar que si se considera el Teorema 2.4.10, con $m = 2r$, y se emplea la regla del producto de Leibniz de la siguiente forma $D(a^{2r}) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k(a)D^{n-k}(a)$, se obtiene el mismo resultado del Teorema 2.4.14.

2.4.5. La gramática $G = \{a \to a^r b\ ;b \to b^r\}$

La siguiente es una familia de números que se busca relacionar con los números de Stirling

Definición 4. *Se definen los números $N_r(n,k)$ de la siguiente forma*

- $N_r(1,1) = 1$.
- $N_r(n,k) = 0$ *para* $k > n$ *y* $k \leq 0$.
- $N_r(n+1,k) = N_r(n,k-1)[(k-1)r-(k-2)] + N_r(n,k)[(n-k)r+2k-n]$.

Proposición 2.4.15. *Para cada n, r.*

$$N_r(n+1,n+1) = N_r(n,n)[nr-n+1] \text{ y } N_r(n+1,1) = N_r(n,1)[(n-1)r-n+2].$$

Demostración. Como $N_r(n+1,k) = N_r(n,k-1)[(k-1)r-(k-2)]+N_r(n,k)[(n-k)r+2k-n]$, por la Definición 4, si se toma $k = 1$ se obtiene

$$\begin{aligned} N_r(n+1,1) &= N_r(n,[1]-1)[([1]-1)r-([1]-2)] + N_r(n,1)[(n-[1])r+2[1]-n] \\ &= N_r(n,0) + N_r(n,1)[(n-1)r-n+2] \\ &= N_r(n,1)[(n-1)r-n+2]. \end{aligned}$$

Probando así que $N_r(n+1,1) = N_r(n,1)[(n-1)r-n+2]$. Del mismo modo, si se toma $k=n+1$ se tiene que $N_r(n+1,n+1)$ es dado por:

$$\begin{aligned}
&= N_r(n,[n+1]-1)[([n+1]-1)r-([n+1]-2)] + N_r(n,[n+1])[(n-[n+1])r+2[n+1]-n]\\
&= N_r(n,n)[nr-(n-1)] + N_r(n,n+1)[-r+2+n+2].
\end{aligned}$$

Como $N_r(n,n+1)=0$, se concluye que $N_r(n+1,n+1) = N_r(n,n)[nr-n+1]$. □

Se define la gramática $G = \{a \to a^r b\,; b \to b^r\}$, con la cual se busca generalizar las gramáticas presentadas en las secciones 2.4.1 y 2.4.3. La siguiente proposición muestra la relación entre la gramática G y los números $N_r(n,k)$.

Teorema 2.4.16. *Sea $G = \{a \to a^r b\,; b \to b^r\}$, entonces para cada $n \geq 1$*
$D^n(a) = \sum_{k=1}^{n} N_r(n,k) a^{kr-(k-1)} b^{(n-k)r+2k-n}$.

Demostración. Dado que $D(a) = a^r b$, se tiene que la proposición se cumple para $n=1$. Suponiendo que $D^n(a) = \sum_{k=1}^{n} N_r(n,k) a^{kr-(k-1)} b^{(n-k)r+2k-n}$, se procede al cálculo de $D^{n+1}(a)$.

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(a) &= D(D^n(a))\\
&= D\left(\sum_{k=1}^{n} N_r(n,k) a^{kr-(k-1)} b^{(n-k)r+2k-n}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} N_r(n,k) D\left(a^{kr-(k-1)} b^{(n-k)r+2k-n}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} N_r(n,k)\left[D(a^{kr-(k-1)}) b^{(n-k)r+2k-n} + a^{kr-(k-1)} D(b^{(n-k)r+2k-n})\right].
\end{aligned}$$

Al aplicar el operador D se obtiene que $D^{n+1}(a)$ es igual a

$$\sum_{k=1}^{n} N_r(n,k)\left[[kr-(k-1)]a^{kr-k} b^{(n-k)r+2k-n} D(a) + [(n-k)r+2k-n] a^{kr-k+1} b^{(n-k)r+2k-n-1} D(b)\right].$$

Calculando $D(a)$ y $D(b)$ se tiene que $D^{n+1}(a)$ equivale a

$$\sum_{k=1}^{n} N_r(n,k)\left[[kr-(k-1)]a^{(k+1)r-k} b^{(n-k)r+2k-n+1} + [(n-k)r+2k-n] a^{kr-k+1} b^{(n-k+1)r+2k-n-1}\right].$$

Luego, si se expanden ambas sumas y se reagrupan, se obtiene que $D^{n+1}(a)$ es dado por:

$$\begin{aligned}
&N_r(n,1)[(n-1)r+2-n]a^r b^{nr-n+1} +\\
&\sum_{k=2}^{n}\left[N_r(n,k-1)[(k-1)r-(k-2)] + N_r(n,k)[(n-k)r+2k-n]\right] a^{kr-(k-1)} b^{(n-k+1)r+2k-n-1}\\
&+N_r(n,n)[nr-n+1]a^{(n+1)r-k} b^{2k-n+1}
\end{aligned}$$

Dado que $N_r(n+1,k) = N_r(n,k-1)[(k-1)r-(k-2)] + N_r(n,k)[(n-k)r+2k-n]$, por la definición 4, además por la proposición 2.4.15 se sabe que $N_r(n+1,n+1) = N_r(n,n)[nr-n+1]$ y $N_r(n+1,1) = N_r(n,1)[(n-1)r-n+2]$, se concluye que $D^{n+1}(a)$ equivale a

$$N_r(n+1,1)a^{(n+1)r-n}b^{n-1}+\sum_{k=2}^{n}N_r(n+1,k)a^{(n+2-k)r-(n-k)-1}b^{(k-1)r+n-2(k-1)+1}+$$
$$N_r(n+1,n+1)a^{2r-1}b^{(k-1)r+n-2(n-1)+1}$$

Luego $D^{n+1}(a)=\sum_{k=1}^{n+1}N_r(n+1,k)a^{(n+2-k)r-(n-k)-1}b^{(k-1)r+n-2(k-1)+1}$. Con lo cual queda probado que $D^n(a)=\sum_{k=1}^{n}N_r(n,k)a^{kr-(k-1)}b^{(n-k)r+2k-n}$, para cada n. □

El siguiente corolario muestra la relación entre los números de Stirling y los números $N_r(n,k)$.

Corolario 2.4.17. *$N_1(n,k)=S(n,k)$ y $N_2(n,k)=k!s(n,k)$.*

Demostración. Considerando la gramática $G=\{a\to a^rb\ ;b\to b^r\}$, tomando $r=1$ se obtiene la gramática $G=\{a\to ab\ ;b\to b\}$, con la cual $D^n(a)=\sum_{k=1}^{n}N_1(n,k)ab^k$, por el Teorema 2.4.16; del mismo modo si $r=2$ se obtiene la gramática $G=\{a\to a^2b\ ;b\to b^2\}$, con la cual $D^n(a)=\sum_{k=1}^{n}N_2(n,k)ab^k$, por el Teorema 2.4.16.

No obstante, si $G=\{a\to ab\ ;b\to b\}$ entonces $D^n(a)=\sum_{k=1}^{n}S(n,k)ab^k$, por el Corolario 2.4.11, mientras que si $G=\{a\to a^2b\ ;b\to b^2\}$ entonces $D^n(a)=\sum_{k=1}^{n}k!s(n,k)a^{k+1}b^n$, por el Corolario 2.4.4. Por lo tanto, se concluye que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}N_1(n,k)ab^k &= \sum_{k=1}^{n}S(n,k)ab^k\\ \sum_{k=1}^{n}N_2(n,k)a^{k+1}b^n &= \sum_{k=1}^{n}k!s(n,k)a^{k+1}b^n.\end{aligned}$$

Obteniendo así que $N_1(n,k)=S(n,k)$ y $N_2(n,k)=k!s(n,k)$. □

Cabe aclarar que los números $N_r(n,k)$ no coinciden con los números r-Stirling propuestos en [13].

2.5. Números de Euler

En [34] Leonard Euler introduce una familia de polinomios, conocidos actualmente como polinomios de Euler, cuyos coeficientes $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ se denominan números de Euler de primera clase. En combinatoria enumerativa, estos números $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ permiten contar el número de permutaciones de $\{1,2,\ldots,n\}$ con k ascensos [9, pág 197], o de manera equivalente con k descensos [75, pág 6]. La siguiente definición permite obtener los números de Euler de primera clase de manera recursiva.

Definición 5. *Se definen los números* $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$, *como la familia de números tales que*

- $\left\langle {n \atop 0} \right\rangle = 1$ *para cada* n.
- $\left\langle {n \atop k} \right\rangle = 0$ *para cada* $k \geq n$.
- $\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle = (n+1-k)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle + (k+1)\left\langle {n \atop k} \right\rangle$.

La validez de esta recurrencia puede verificarse en la Proposición B.3.1, en la sección B.3 del apéndice. De manera similar a la Definición 5, se definen los números de Euler de segunda clase

Definición 6. *Se definen los números* $\left\langle\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\right\rangle$, *que denominaremos números de Euler de segunda clase, de la siguiente forma:*

- $\left\langle\!\left\langle {n \atop 0} \right\rangle\!\right\rangle = 1$ *para cada* n.
- $\left\langle\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\right\rangle = 0$ *para cada* $k \geq n$.
- $\left\langle\!\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle\!\right\rangle = (2n+1-k)\left\langle\!\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle\!\right\rangle + (k+1)\left\langle\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\right\rangle$.

La validez de esta recurrencia puede verificarse en la proposición B.3.3, en la sección B.3 del apéndice. En combinatoria, los números $\left\langle\!\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle\!\right\rangle$ cuentan el número de permutaciones del multiconjunto $\{1,1,2,2,\ldots,n,n\}$ en las cuales los números entre cada aparición de m son mayores que m, tales que tienen exactamente k ascensos; este tipo de permutaciones fueron inicialmente estudiadas en [35].

La gramática $G = \{a \to ab; b \to ab\}$, presentada en [30], retomada en [24] y [60], conocida como gramática de Euler [64], permite generar los números de Euler de primera clase de la siguiente forma $D^n(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle a^{k+1}b^{n-k}$. Por otra parte, los números de Euler de segunda clase son generados mediante la gramática $G = \{a \to a^2b; b \to a^2b\}$ de la siguiente forma $D^n(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\right\rangle a^{2n-k}b^{k+1}$ [23]. Teniendo en cuenta lo anterior, en esta sección es introducida la gramática $G = \{a \to a^rb; b \to a^rb\}$, que permite generalizar las gramáticas para los números de Euler de clase 1 y 2; de esta forma se obtiene la siguiente generalización de los números de Euler.

Definición 7. *Se definen los números* $\left\langle {n \atop k} \right\rangle_r$, *que denominaremos números de Euler de clase* r, *de la siguiente forma:*

- $\left\langle {n \atop 0} \right\rangle_r = 1$ *para cada* n.
- $\left\langle {n \atop k} \right\rangle_r = 0$ *para cada* $k \geq n$.
- $\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle_r = (nr+1-k)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle_r + (k+1)\left\langle {n \atop k} \right\rangle_r$.

Cabe aclarar que estos números no coinciden con los números r-eulerianos definidos en [10]. El siguiente teorema es el resultado principal de esta sección, muestra la relación existente entre la gramática $G = \{a \to a^r b; b \to a^r b\}$ y los números $\left\langle {n \atop k} \right\rangle_r$.

Teorema 2.5.1. *Sea* $G = \{a \to a^r b; b \to a^r b\}$*, entonces* $D^n(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r a^{rn-k} b^{k+1}$.

Demostración. Se observa que $D(a) = a^r b$, verificando así el resultado para $n = 1$. Suponiendo que $D^n(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r a^{rn-k} b^{k+1}$, se obtiene $D^{n+1}(a)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(a) &= D(D(a)) \\
&= D\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r a^{rn-k} b^{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r D(a^{rn-k} b^{k+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r \left[(rn-k) a^{rn-k-1} D(a) b^{k+1} + (k+1) a^{rn-k} b^k D(b)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r \left[(rn-k) a^{r(n+1)-k-1} b^{k+2}\right] + \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r \left[(k+1) a^{r(n+1)-k} b^{k+1}\right]
\end{aligned}$$

donde $\sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r \left[(rn-k) a^{r(n+1)-k-1} b^{k+2}\right]$ se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
&\left\langle {n \atop n-1} \right\rangle_r \left[(rn-[n-1]) a^{r(n+1)-[n-1]-1} b^{[n-1]+2}\right] + \sum_{k=0}^{n-2} \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r \left[(rn-k) a^{r(n+1)-k-1} b^{k+2}\right] \\
&= \left\langle {n \atop n-1} \right\rangle_r \left[(n(r-1)+1) a^{r(n+1)-n} b^{n+1}\right] + \sum_{k=1}^{n-1} \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle_r \left[(rn-k+1) a^{r(n+1)-k} b^{k+1}\right]
\end{aligned}$$

del mismo modo $\sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r \left[(k+1) a^{r(n+1)-k} b^{k+1}\right]$ se reescribe como

$$\left\langle {n \atop 0} \right\rangle_r a^{r(n+1)} b + \sum_{k=1}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r \left[(k+1) a^{r(n+1)-k} b^{k+1}\right].$$

Luego $D^{n+1}(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r \left[(rn-k) a^{r(n+1)-k-1} b^{k+2}\right] + \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r \left[(k+1) a^{r(n+1)-k} b^{k+1}\right]$, corresponde a

$$\begin{aligned}
&\left\langle {n \atop 0} \right\rangle_r a^{r(n+1)} b + \sum_{k=1}^{n-1} \left[(rn-k+1) \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle_r + (k+1) \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r\right] a^{r(n+1)-k} b^{k+1} \\
&+ \left\langle {n \atop n-1} \right\rangle_r (n(r-1)+1) a^{r(n+1)-n} b^{n+1}.
\end{aligned}$$

Por la definición 7 se sabe que para cada n, $\left\langle {n \atop 0} \right\rangle_r = \left\langle {n+1 \atop 0} \right\rangle_r$, $\left\langle {n+1 \atop n} \right\rangle_r = (n(r-1)+1)\left\langle {n \atop n-1} \right\rangle_r$ y que $\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle_r = (rn-k+1)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle_r + (k+1)\left\langle {n \atop k} \right\rangle_r$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} D^{n+1}(a) &= \left\langle {n+1 \atop 0} \right\rangle_r a^{r(n+1)}b + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle_r \right] a^{r(n+1)-k}b^{k+1} + \left\langle {n+1 \atop n} \right\rangle_r a^{r(n+1)-n}b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left[\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle_r \right] a^{r(n+1)-k}b^{k+1}. \end{aligned}$$

Probando así que $D^n(a) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left[\left\langle {n \atop k} \right\rangle_r\right] a^{rn-k}b^{k+1}$, para cada n. □

El siguiente teorema relaciona números multifactorial con la suma de los números Euler de clase r.

Teorema 2.5.2. $\sum\limits_{k=0}^{n} \left[\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle_r\right] = (r(n-1)+1)!_r$.

Demostración. Por la definición 7 se tiene que $\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle_r = (nr+1-k)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle_r + (k+1)\left\langle {n \atop k} \right\rangle_r$, luego

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \left[\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle_r \right] &= \sum_{k=0}^{n} (nr+1-k) \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle_r + (k+1) \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r \\ &= \sum_{k=0}^{n} (nr-(k-1)) \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle_r + (k+1) \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r \\ &= \sum_{k=0}^{n} nr \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle_r - (k-1) \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle_r + k \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r + \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r \\ &= \sum_{k=0}^{n} nr \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle_r - (k-1) \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle_r + k \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r + \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r \\ &= nr \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle_r + \sum_{k=0}^{n} \left[k \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r - (k-1) \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle_r \right] + \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r . \end{aligned}$$

Se observa que la suma $\sum\limits_{k=0}^{n} \left[k\left\langle {n \atop k} \right\rangle_r - (k-1)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle_r \right]$ es telescópica. Además, por hipótesis $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r = [r(n-1)+1]!_r$, luego

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left[\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle_r\right] &= nr\sum_{k=0}^{n}\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle_r + \sum_{k=0}^{n}\left[k\left\langle {n \atop k} \right\rangle_r - (k-1)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle_r\right] + \sum_{k=0}^{n}\left\langle {n \atop k} \right\rangle_r \\ &= nr[r(n-1)+1]!_r + \left[n\left\langle {n \atop n} \right\rangle_r - (-1)\left\langle {n \atop -1} \right\rangle_r\right] + [r(n-1)+1]!_r \\ &= [rn+1][r(n-1)+1]!_r \\ &= [rn+1]!_r.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sum\limits_{k=0}^{n}\left[\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle_r\right] = (r(n-1)+1)!_r$. □

Los siguientes corolarios corresponden a los casos $r = 1$ y $r = 2$, respectivamente, del Teorema 2.5.2.

Corolario 2.5.3 (Sección 4.1 de [9])**.** $\sum\limits_{k=0}^{n}\left[\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle\right] = n!$.

Corolario 2.5.4 (Sección 5.2 de [16])**.** $\sum\limits_{k=0}^{n}\left\langle\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle\right\rangle = [2n-1]!_2$.

El Corolario 2.5.4 es estudiado en [16], mostrando los distintos conteos que permite realizar.

2.6. Números de Whitney de segunda clase

La gramática $G = \{a \to ab^m \,; b \to b\}$, propuesta en [40], permite generar una familia de números conocidos como los números de Whitney de segunda clase, una interpretación combinatoria de los números de Whitney se aprecia en [76]. Estos números satisfacen la recurrencia

$$W_m(n,k) = W_m(n-1,k-1) + [km+1]W_m(n-1,k)$$

donde $W_m(0,0) = 1$ y $W_m(n,k) = 0$ para $k > n$ y $k < 0$, una demostración de esta recurrencia puede apreciarse en el apéndice B.4 como Proposición B.4.1. La siguiente proposición, enunciada pero no demostrada en [40], permite relacionar los números de Whitney de segunda clase con gramáticas.

Proposición 2.6.1. *Sea $G = \{a \to ab^m \,; b \to b\}$, entonces $D^n(ab) = \sum\limits_{k=0}^{n} W_m(n,k)ab^{mk+1}$.*

Demostración. Claramente, $D(ab) = D(a)b + aD(b) = ab^{m+1} + ab$, con lo cual se cumple la proposición para $n = 1$. Suponiendo que $D^n(ab) = \sum\limits_{k=0}^{n} W_m(n,k)ab^{mk+1}$ se calcula $D^{n+1}(ab)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(ab) &= D(D^n(ab))\\
&= D\left(\sum_{k=0}^{n} W_m(n,k)ab^{mk+1}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n} W_m(n,k)D\left(ab^{mk+1}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n} W_m(n,k)\left[D(a)b^{mk+1} + aD(b^{mk+1})\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n} W_m(n,k)\left[D(a)b^{mk+1} + [mk+1]ab^{mk}D(b)\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n} W_m(n,k)\left[ab^{m[k+1]+1} + [mk+1]ab^{mk+1}\right].
\end{aligned}$$

Expandiendo se tiene que

$$D^{n+1}(ab) = W_m(n,0)ab + \sum_{k=1}^{n}\left[W_m(n,k-1) + [mk+1]W_m(n,k)\right]ab^{mk+1} + W_m(n,n)ab^{m[n+1]+1}.$$

Dado que $W_m(n+1,0) = W_m(n,0)$, $W_m(n+1,k) = W_m(n,k-1) + [mk+1]W_m(n,k)$ y $W_m(n+1,n+1) = W_m(n,n)$, se obtiene

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(ab) &= W_m(n+1,0)ab + \sum_{k=1}^{n} W_m(n+1,k)ab^{mk+1} + W_m(n+1,n+1)ab^{m[n+1]+1}\\
&= \sum_{k=1}^{n} W_m(n+1,k)ab^{mk+1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $D^n(ab) = \sum_{k=0}^{n} W_m(n,k)ab^{mk+1}$ para cada n. $\square$

En general, los números r-Whitney, presentados en [70], satisfacen la recurrencia

$$W_{m,r}(n,k) = W_{m,r}(n-1,k-1) + [km+r]W_{m,r}(n-1,k),$$

con $W_{m,r}(0,0) = 1$ y $W_{m,r}(n,k) = 0$ para $k > n$ y $k < 0$ [71]; en particular, $W_{m,1} = W_m$. Una interpretación combinatoria de los números r-Whitney se aprecia en [25]. La siguiente proposición es una generalización de la proposición 2.6.1, que permite generar los números r-Whitney mediante gramáticas independientes del contexto; este resultado fue demostrado mediante argumentos combinatorios en [68].

Proposición 2.6.2. *Sea* $G=\{a\to ab^m\ ; b\to b\}$*, entonces* $D^n(ab^r)=\sum\limits_{k=0}^{n}W_{m,r}(n,k)ab^{mk+r}$.

Demostración. Claramente, $D(ab^r)=D(a)b^r+aD(b^r)=ab^{m+r}+rab^r$, con lo cual se cumple la proposición para $n=1$. Suponiendo que $D^n(ab^r)=\sum\limits_{k=0}^{n}W_{m,r}(n,k)ab^{mk+r}$ se obtiene que $D^{n+1}(ab^r)$ es dado por:

$$
\begin{aligned}
&D(D^n(ab^r))\\
&=D\left(\sum_{k=0}^{n}W_{m,r}(n,k)ab^{mk+r}\right)\\
&=\sum_{k=0}^{n}W_{m,r}(n,k)D\left(ab^{mk+r}\right)\\
&=\sum_{k=0}^{n}W_{m,r}(n,k)\left[D(a)b^{mk+r}+aD(b^{mk+r})\right]\\
&=\sum_{k=0}^{n}W_{m,r}(n,k)\left[D(a)b^{mk+r}+[mk+r]ab^{mk+r-1}D(b)\right]\\
&=\sum_{k=0}^{n}W_{m,r}(n,k)\left[ab^{m[k+1]+r}+[mk+r]ab^{mk+r}\right]\\
&=rW_{m,r}(n,0)ab^r+\sum_{k=1}^{n}\left[W_{m,r}(n,k-1)+[mk+r]W_{m,r}(n,k)\right]ab^{mk+r}+W_{m,r}(n,n)ab^{m[n+1]+r}\\
&=W_{m,r}(n+1,0)ab+\sum_{k=1}^{n}W_{m,r}(n+1,k)ab^{mk+r}+W_{m,r}(n+1,n+1)ab^{m[n+1]+r}\\
&=\sum_{k=0}^{n+1}W_{m,r}(n+1,k)ab^{mk+r}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $D^n(ab^r)=\sum\limits_{k=0}^{n}W_{m,r}(n,k)ab^{mk+r}$ para cada n. □

El siguiente resultado es una propiedad de los números de Whitney, obtenida mediante gramáticas.

Teorema 2.6.3. $W_{m,r}(n,t)=\sum\limits_{k=t}^{n}\binom{n}{k}r^{n-k}W_{m,m}(k-1,t-1)$.

Demostración. Tomando la gramática $G=\{a\to ab^m\ ; b\to b\}$, por la Proposición 2.6.2 se tiene que $D^n(ab^r)=\sum\limits_{k=0}^{n}W_{m,r}(n,k)ab^{mk+r}$, además se observa que $D^n(b^r)=r^nb^r$. Por otra parte, empleando la regla del producto de Leibniz

$$\begin{aligned}
D^n(ab^r) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k(a) D^{n-k}(b^r) \\
\sum_{t=0}^{n} W_{m,r}(n,t) ab^{mt+r} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{k-1}(ab^m) D^{n-k}(b^r) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k} W_{m,m}(k-1,j) ab^{mj+m} [r^{n-k} b^r] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k} r^{n-k} W_{m,m}(k-1,j) ab^{mj+m+r}.
\end{aligned}$$

Luego, $\sum\limits_{t=0}^{n} W_{m,r}(n,t) ab^{mt+r} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum\limits_{j=0}^{k} r^{n-k} W_{m,m}(k-1,j) ab^{mj+m+r}$; con el fin de igualar por coeficientes se toma $j = t-1$, de esta forma se tiene que

$$\begin{aligned}
W_{m,r}(n,t) ab^{mt+r} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^{n-k} W_{m,m}(k-1,t-1) ab^{m[t-1]+m+r} \qquad \text{Por lo tanto} \\
W_{m,r}(n,t) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^{n-k} W_{m,m}(k-1,t-1)
\end{aligned}$$

Si $k-1 < t-1$ entonces $W_{m,m} = 0$, luego $W_{m,r}(n,t) = \sum\limits_{k=t}^{n} \binom{n}{k} r^{n-k} W_{m,m}(k-1,t-1)$. □

El siguiente corolario corresponde al caso particular para los números de Whitney de segunda clase W_m.

Corolario 2.6.4. $W_m(n,t) = \sum\limits_{k=t}^{n} \binom{n}{k} W_{m,m}(k-1,t-1)$.

Demostración. Tomando $r = 1$ en el Teorema 2.6.3, se tiene que

$$W_{m,1}(n,t) = \sum_{k=t}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} W_{m,m}(k-1,t-1)$$

Por lo tanto, $W_m(n,t) = \sum\limits_{k=t}^{n} \binom{n}{k} W_{m,m}(k-1,t-1)$. □

2.7. La gramática $G = \{a \to ab^r \;; b \to b^r\}$

En esta sección se estudia la gramática $G = \{a \to ab^r \;; b \to b^r\}$, propuesta en [60], con la cual para poder calcular $D^n(a)$ es necesario establecer la familia de números $A(n,k,r)$ que se define a continuación

Definición 8. *Se definen los números $A(n,k;r)$ tales que*

$$A(n+1,k;r) = A(n,k-1;r) + [(r-1)n+k]A(n,k;r)$$

con $A(1,1;r)=1$, $A(n,k;r)=0$ para $k \leq 0$ y $k > n$

Los números $A(n,k,r)$ están relacionados con el conteo de cierto tipo específico de árboles, como se muestra en [60]. De estos números se observan las siguientes propiedades.

Proposición 2.7.1. *$A(n+1,1;r) = A(n,1;r)[(r-1)n+1]$ y $A(n+1,n+1;r) = A(n,n;r)$.*

Demostración. Dado que $A(n+1,k;r) = A(n,k-1;r) + [(r-1)n+k]A(n,k;r)$, se toma $k=1$ obteniendo así

$$\begin{aligned} A(n+1,1;r) &= A(n,0;r) + [(r-1)n+1]A(n,k;r) \\ &= [(r-1)n+1]A(n,k;r) \end{aligned}$$

Por otra parte, si $k = n+1$

$$\begin{aligned} A(n+1,n+1;r) &= A(n,n;r) + [(r-1)n+n+1]A(n,n+1;r) \\ &= A(n,n;r) \end{aligned}$$

□

La siguiente proposición enunciada en [60], pero no demostrada, muestra la conexión entre la gramática $G = \{a \to ab^r\ ; b \to b^r\}$ y los números $A(n,k,r)$.

Proposición 2.7.2 (Teorema 6, resultado c11 de [60])**.** *Sea $G = \{a \to ab^r\ ; b \to b^r\}$, entonces $D^n(a) = a\sum_{k=1}^{n} A(n,k;r)b^{(r-1)n+k}$.*

Demostración. Claramente $D(a) = ab^r$, con lo cual la proposición se cumple para $n=1$. Suponiendo que $D^n(a) = a\sum_{k=1}^{n} A(n,k;r)b^{(r-1)n+k}$ se calcula $D^{n+1}(a)$ como sigue:

$$\begin{aligned} D^{n+1}(a) &= D(D^n(a)) \\ &= D\left(\sum_{k=1}^{n} A(n,k;r)ab^{(r-1)n+k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} A(n,k;r)D(ab^{(r-1)n+k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} A(n,k;r)\left[D(a)b^{(r-1)n+k} + aD(b^{(r-1)n+k})\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} A(n,k;r)\left[D(a)b^{(r-1)n+k} + [(r-1)n+k]ab^{(r-1)n+k-1}D(b)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} A(n,k;r)\left[[ab^r]b^{(r-1)n+k} + [(r-1)n+k]ab^{(r-1)n+k-1}[b^r]\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} A(n,k;r)\left[ab^{(r-1)n+k+r} + [(r-1)n+k]ab^{(r-1)n+k-1+r}\right] \end{aligned}$$

Se observa que $(r-1)n+k+r-1 = (n+1)(r-1)+k$; de esta forma se obtiene que $D^{n+1}(a)$ es dado por:

$$A(n,1;r)[(r-1)n+1]ab^{(n+1)r-n+1}+$$
$$\sum_{k=2}^{n}[A(n,k-1;r)+[(r-1)n+k]A(n,k;r)]ab^{(r-1)(n+1)+k}+A(n,n;r)ab^{(n+1)r}$$

Como $A(n+1,1;r) = A(n,1;r)[(r-1)n+1]$ y $A(n+1,n+1;r) = A(n,n;r)$, por la Proposición 2.7.1, se concluye que $D^{n+1}(a) = a\sum_{k=1}^{n} A(n+1,k;r)b^{(r-1)(n+1)+k}$.

□

Se observa que si $r = 1$ se obtiene la gramática $G = \{a \to ab; b \to b\}$; esta gramática fue estudiada en la sección 2.4.3 obteniendo como resultado que $D^n(a) = a\sum_{k=1}^{n} S(n,k)b^k$, Corolario 2.4.11. Por lo anterior, se concluye que $A(n,k;1) = S(n,k)$.

2.7.1. Números de Lah

Los números de Lah, que serán denotados $L(n,k)$, son definidos de manera explícita mediante la fórmula $L(n+1,k) = \binom{n}{k-1}\frac{(n+1)!}{k!}$, una explicación combinatoria de esta definición se aprecia en [53]. No obstante, estos números pueden ser definidos como números triangulares que satisfacen la recurrencia

$$L(n+1,k) = (n+k)L(n,k) + L(n,k-1), \text{con } L(1,1) = 1.$$

Una demostración de este recurrencia puede apreciarse en el apéndice B.5 como proposición B.5.1; por defecto, se define $L(n,k) = 0$ para $k \leq 0$ y $k > n$. La siguiente proposición relaciona gramáticas independientes del contexto con los números de Lah; esta fue enunciada, pero no demostrada, en [60].

Proposición 2.7.3. *Sea $G = \{a \to ab^2 \ ; b \to b^2\}$, entonces $D^n(a) = a\sum_{k=1}^{n} L(n,k)b^{n+k}$.*

Demostración. Se observa que $D(a) = ab^2$, con lo cual la proposición se cumple para $n = 1$. Suponiendo que $D^n(a) = a\sum_{k=1}^{n} L(n,k)b^{n+k}$ se calcula $D^{n+1}(a)$ como sigue:

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(a) &= D(D^n(a)) \\
&= D\left(\sum_{k=1}^{n} L(n,k)ab^{n+k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} L(n,k)D\left(ab^{n+k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} L(n,k)\left[D(a)b^{n+k} + aD(b^{n+k})\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} L(n,k)\left[D(a)b^{n+k} + (n+k)ab^{n+k-1}D(b)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} L(n,k)\left[ab^{n+k+2} + (n+k)ab^{n+k+1}\right]
\end{aligned}$$

Al expandir la expresión se obtiene que

$$D^{n+1}(a) = (n+1)L(n,1)ab^{n+2}+\sum_{k=2}^{n}\Big[L(n,k-1)ab^{n+k+1} + (n+k)L(n,k)\Big]\,ab^{n+k+1}+L(n,n)ab^{2n+2}.$$

Cómo $L(n+1,k) = (n+k)L(n,k) + L(n,k-1)$, por la Proposición B.5.1 del apéndice; además $L(n+1,1) = (n+1)L(n,n)$ y $L(n,n) = 1$ para cada n, por la Proposición B.5.2 del apéndice, entonces

$$\begin{aligned} D^{n+1}(a) &= L(n+1,1)ab^{n+2} + \sum_{k=2}^{n} L(n+1,k)ab^{n+k+1} + L(n,n)ab^{2n+2} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} L(n+1,k)ab^{n+1+k}. \end{aligned}$$

Probando así que $D^n(a) = a\sum_{k=1}^{n} L(n,k)b^{n+k}$. □

Teniendo en cuenta que la gramática $G = \{a \to ab^2\ ; b \to b^2\}$ corresponde al caso $r = 2$ en las gramáticas $G = \{a \to ab^r\ ; b \to b^r\}$, presentadas en la sección 2.7, por la Proposición 2.7.3 y la Proposición 2.7.2 se obtiene como resultado que $A(n,k;2) = L(n,k)$. Análogo a la Proposición 2.2.1, se prueba que al considerar la gramática $G = \{a \to ab^2\ ; b \to b^2\}$, se tiene que $D^n(b) = n!b^{n+1}$ y $D^n(b^2) = D^{n+1}(b) = (n+1)!b^{n+2}$; esta observación será empleada en el siguiente resultado, que es una propiedad de los números de Lah.

Teorema 2.7.4. $L(n+1,j+1) = \sum_{k=j}^{n} \frac{n!}{k!}(n-k+1)L(k,j)$.

Demostración. Tomando $G = \{a \to ab^2\ ; b \to b^2\}$, Como $D(a) = ab^2$, se observa que $D^{n+1}(a) = D^n(ab^2) = a\sum_{k=1}^{n+1} L(n+1,k)b^{n+k+1}$ por la proposición 2.7.3, luego por la regla del producto de Leibniz

$$\begin{aligned} D^n(ab^2) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^k(a)D^{n-k}(b^2) \\ a\sum_{r=1}^{n+1} L(n+1,r)b^{n+r+1} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{j=1}^{k} L(k,j)b^{k+j}[(n-k+1)!b^{n-k+2}] \\ a\sum_{r=1}^{n+1} L(n+1,r)b^{n+r+1} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{j=1}^{k} L(k,j)(n-k+1)!b^{n+j+2} \end{aligned}$$

Tomando $r = j+1$, se obtiene que

$$L(n+1,j+1) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}L(k,j)(n-k+1)! = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}(n-k+1)L(k,j)$$

Como $L(k,j) = 0$ para $k < j$, se concluye que $L(n+1,j+1) = \sum_{k=j}^{n}\frac{n!}{k!}(n-k+1)L(k,j)$.

□

3. Familias de polinomios especiales

En este capítulo se muestra la conexión existente entre algunas familias de polinomios y gramáticas independientes del contexto, con lo cual se logran obtener fórmulas recurrentes para dichas familias de polinomios; en el apéndice B.6 se muestra cómo pueden ser generados de manera computacional. En algunos casos se estudian las propiedades de los polinomios generados, mientras que en otros casos se opta por estudiar las propiedades de los coeficientes de dichos polinomios, lo cual permite conservar la misma estrategia de trabajo mostrada en el capítulo 2. En particular, se propone una gramática independiente del contexto que permite establecer una conexión entre gramáticas y polinomios de Bessel, además se estudian algunas gramáticas propuestas por otros autores [40, 58, 64]. Posteriormente, se estudia la gramática $G = \{a \rightarrow ab^2 \ ; b \rightarrow a^2b; c \rightarrow abc\}$ que permite generar polinomios cuyos coeficientes relacionan diversas familias de números, entre ellos: números factoriales, números de Stirling y números de Euler tipo B. En la última sección de este capítulo, se propone una gramática que permite generar unas familias de números propuestas por Srinivasa Ramanujan [8], estas familias de números ya habían sido relacionadas con gramáticas por Dominique Dumont empleando una gramática que denominó gramática de Ramanujan [31]; sin embargo, la gramática que se propone en este capítulo no tiene relación con la propuesta en [31].

3.1. Polinomios de Bessel mediante gramáticas

Los polinomios de Bessel fueron propuestos en [48] como solución a la ecuación diferencial

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + (2x+2)\frac{dy}{dx} = n(n+1)y.$$

Estos polinomios, sus propiedades y generalizaciones han sido ampliamente estudiados [2, 4, 32, 52, 73]. En [58], mediante la gramática $G = \{a \rightarrow ab \ ; b \rightarrow b^2c \ ; c \rightarrow bc^2\}$, se estableció una relación entre gramáticas independientes del contexto y los polinomios de Bessel, teniendo en cuenta la recurrencia $y_n(x) = [2n-1]xy_{n-1}(x) + y_{n-2}(x)$, con $y_0(x) = 1$, $y_1(x) = x+1$ para polinomios de Bessel, presentada en [48]. Desde entonces, han surgido otras gramáticas que permiten generar dichos polinomios [40, 64]; no obstante, en ninguno de estos trabajos se considera la siguiente recurrencia, introducida en [48] junto con otras más, para los polinomios de Bessel

Definición 9. *Se definen los polinomios $y_n(x)$ mediante la recurrencia*

$$y_{n+1}(x) = \left[[(n+1)x+1]y_n(x) + \frac{d(y_n(x))}{dx}[x^2]\right] \quad \textit{con } y_0(x) = 1.$$

En esta sección se introduce la gramática gramática $G = \left\{a \to ab^2\ ; b \to \dfrac{b^3c}{2}\ ; c \to b^2c^2\right\}$, y como resultado principal se establece una conexión entre la gramática y los polinomios de Bessel, empleando la recurrencia dada en la definición 9.

3.1.1. La gramática $G = \left\{a \to ab^2\ ; b \to \dfrac{b^3c}{2}\ ; c \to b^2c^2\right\}$

La siguiente proposición relaciona la gramática $G = \left\{a \to ab^2\ ; b \to \dfrac{b^3c}{2}\ ; c \to b^2c^2\right\}$ con la recurrencia presentada en la definición 9, razón por la cual es uno de los resultados principales de esta sección.

Proposición 3.1.1. *Sea G la gramática $G = \left\{a \to ab^2\ ; b \to \dfrac{b^3c}{2}\ ; c \to b^2c^2\right\}$ entonces, para $n \geq 1$, $D^n(a) = ab^{2n}y_{n-1}(c)$.*

Demostración. Claramente $D(a) = ab^2 = ab^{2[1]}y_0(c)$, por lo tanto la proposición es válida para $n = 1$. Suponiendo que $D^n(a) = ab^{2n}y_{n-1}(c)$, se calcula $D^{n+1}(a)$

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(a) &= D(D^n(a)) \\
&= D(ab^{2n}y_{n-1}(c)) \\
&= D(a)b^{2n}y_{n-1}(c) + aD(b^{2n}y_{n-1}(c)) \\
&= [ab^2]b^{2n}y_{n-1}(c) + a[D(b^{2n})y_{n-1}(c) + b^{2n}D(y_{n-1}(c))] \\
&= ab^{2n+2}y_{n-1}(c) + a\left[2nb^{2n-1}D(b)y_{n-1}(c) + b^{2n}\frac{dy_{n-1}(c)}{dc}D(c)\right] \\
&= ab^{2n+2}y_{n-1}(c) + a\left[2nb^{2n-1}\left[\frac{b^3c}{2}\right]y_{n-1}(c) + b^{2n}\frac{dy_{n-1}(c)}{dc}[b^2c^2]\right] \\
&= ab^{2n+2}y_{n-1}(c) + nab^{2n+2}cy_{n-1}(c) + ab^{2n+2}c^2\frac{dy_{n-1}(c)}{dc} \\
&= ab^{2n+2}\underbrace{\left[(nc+1)y_{n-1}(c) + c^2\frac{dy_{n-1}(c)}{dc}\right]}_{y_n(c)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $D^{n+1}(a) = ab^{2n+2}y_n(c)$. □

El siguiente resultado muestra que la gramática $G = \left\{a \to ab^2\ ; b \to \dfrac{b^3c}{2}\ ; c \to b^2c^2\right\}$ permite generar números doble factorial.

Proposición 3.1.2. *Sea G la gramática $G = \left\{a \to ab^2\ ; b \to \dfrac{b^3c}{2}\ ; c \to b^2c^2\right\}$ entonces, para $n \geq 1$, $D^n(b^2) = [2n-1]!!b^{2(n+1)}c^n$.*

Demostración. Como $D(b^2) = 2bD(b) = 2b\left[\dfrac{b^3c}{2}\right] = b^4c$, se observa que se cumple para $n = 1$. Suponiendo que $D^n(b^2) = [2n-1]!!b^{2(n+1)}c^n$, se calcula $D^{n+1}(b^2)$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(b^2) &= D(D^n(b^2)) \\
&= D([2n-1]!!b^{2(n+1)}c^n) \\
&= [2n-1]!![D(b^{2(n+1)}c^n)] \\
&= [2n-1]!![D(b^{2(n+1)})c^n + b^{2(n+1)}D(c^n)] \\
&= [2n-1]!![2(n+1)b^{2(n+1)-1}D(b)c^n + nb^{2(n+1)}c^{n-1}D(c)] \\
&= [2n-1]!!\left[2(n+1)b^{2(n+1)-1}\left[\frac{b^3c}{2}\right]c^n + nb^{2(n+1)}c^{n-1}[b^2c^2]\right] \\
&= [2n-1]!!\left[(n+1)b^{2n+4}c^{n+1} + nb^{2n+4}c^{n+1}\right] \\
&= [2n-1]!!\left[(2n+1)b^{2(n+2)}c^{n+1}\right]
\end{aligned}$$

Por lo tanto $D^{n+1}(b^2) = [2n+1]!!b^{2(n+2)}c^{n+1}$. □

Caracterización de los coeficientes de los polinomios $y_n(x)$ generados mediante la gramática $G = \left\{a \to ab^2\ ; b \to \dfrac{b^3c}{2}\ ; c \to b^2c^2\right\}$

Para comprender los polinomios $y_n(x)$, descritos en la definición 9, es necesario estudiar sus coeficientes para ello se tendrá en cuenta la siguiente definición.

Definición 10. *Se define $B_{n,k}$ como los números tales que $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}x^k$.*

Por defecto, si $k > n$ o si $k < 0$ se define $B_{n,k} = 0$. A continuación se establecen algunas propiedades de dichos coeficientes.

Proposición 3.1.3. *$B_{n+1,k} = (n+k)B_{n,k-1} + B_{n,k}$, para $k \leq n$.*

Demostración. Para obtener $B_{n+1,k}$ se debe considerar el coeficiente asociado al término x^k en el polinomio $y_{n+1}(x)$. Dado que $y_{n+1}(x) = [(n+1)x+1]y_n(x) + x^2\left[\dfrac{dy_n(x)}{dx}\right]$, entonces el coeficiente asociado al término x^k es dado por

$$\begin{aligned}
B_{n+1,k}x^k &= [(n+1)xB_{n,k-1}x^{k-1} + B_{n,k}x^k] + x^2(k-1)B_{n,k-1}x^{k-2} \\
B_{n+1,k}x^k &= [n+k]B_{n,k-1}x^k + B_{n,k}x^k \\
B_{n+1,k} &= [n+k]B_{n,k-1} + B_{n,k}.
\end{aligned}$$

□

La siguiente proposición muestra algunas propiedades de los coeficientes $B_{n,k}$.

Proposición 3.1.4. *Los números $B_{n,k}$ cumplen con las siguientes propiedades:*

1. *$B_{n,0} = 1$ para todo $n \geq 0$.*
2. *$B_{n+1,1} = n + 1 + B_{n,1}$.*
3. *Para $n \geq 1$, $B_{n,n} = B_{n,n-1}$.*
4. *$B_{n,n} = [2n-1]B_{n-1,n-1}$.*

Demostración. Las propiedades se demostrarán aplicando la proposición 3.1.3.

1. $B_{0,0}$ corresponde al coeficiente asociado a $y_0(x) = 1$, luego $B_{0,0} = 1$. Suponiendo que $B_{n-1,0} = 1$ se calcula $B_{n,0}$, luego por la proposición 3.1.3 se obtiene que

$$\begin{aligned} B_{n,0} &= [n-1+0]B_{n-1,0-1} + B_{n-1,0} \qquad \text{Como } B_{n-1,-1} = 0 \\ B_{n,0} &= B_{n-1,0}. \end{aligned}$$

   Dado que $B_{n-1,0} = 1$, entonces $B_{n,0} = 1$.

2. Por la proposición 3.1.3, considerando $k = 1$, se obtiene que

$$\begin{aligned} B_{n+1,1} &= [n+1]B_{n,1-1} + B_{n,1} \\ &= [n+1]B_{n,0} + B_{n,1} \\ &= [n+1] + B_{n,1}. \end{aligned}$$

   Por lo tanto $B_{n+1,1} = n + 1 + B_{n,1}$.

3. Como $y_1(x) = 1 + x$, entonces $B_{1,0} = B_{1,1}$. Suponiendo que $B_{n-1,n-2} = B_{n-1,n-1}$, se calcula $B_{n,n-1}$ mediante el resultado obtenido en la proposición 3.1.3, así

$$\begin{aligned} B_{n,n-1} &= [n-1+n-1]B_{n-1,n-2} + B_{n-1,n-1} \\ &= [2n-2][B_{n-1,n-1}] + B_{n-1,n-1} \\ &= [2n-1]B_{n-1,n-1}. \end{aligned}$$

   Por el resultado anterior se sabe que $B_{n,n} = [2n-1]B_{n-1,n-1}$, luego $B_{n,n-1} = B_{n,n}$.

4. Por la proposición 3.1.3, tomando $k = n$, se obtiene que

$$\begin{aligned} B_{n,n} &= [n-1+n]B_{n-1,n} + B_{n-1,n} \\ &= [2n-1]B_{n-1,n} \qquad \text{Como } B_{n-1,n} = B_{n-1,n-1} \\ &= [2n-1]B_{n-1,n-1} \end{aligned}$$

   Probando así que $B_{n,n} = [2n-1]B_{n-1,n-1}$.

□

3.1.2. Fórmula recurrente para los polinomios de Bessel

Los polinomios de Bessel, definidos en [48], están caracterizados por una fórmula conocida como la fórmula de Rodrigues [73], según la cual el n-ésimo polinomio de Bessel está dado por $\sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{(n-k)!k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k$. El siguiente teorema es el resultado principal de esta sección, en él se demuestra que los polinomios $y_n(x)$ satisfacen la fórmula de Rodrigues y por ende corresponden a los polinomios de Bessel.

Teorema 3.1.5. *Sea $y_n(x)$ dado por la recurrencia*

$$y_{n+1}(x) = \left[[(n+1)x+1]y_n(x) + \frac{d(y_n(x))}{dx}[x^2]\right] \quad \text{con } y_0(x) = 1.$$

entonces $y_n(x)$ es el n-ésimo polinomio de Bessel, para todo $n \geq 0$.

Demostración. Se probará que $y_n(x)$ satisface la fórmula de Rodrigues; luego, dado que $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}x^k$, por la definición 10, se debe probar que $B_{n,k} = \frac{(n+k)!}{2^k(n-k)!k!}$, para todo $k \leq n$. Procediendo por inducción sobre n.

Si $n = 0$, entonces $B_{0,0} = 1 = \frac{([0]+[0])!}{2^{[0]}([0]-[0])![0]!}$.

De hecho si $n = 1$: $B_{1,0} = 1 = \frac{([1]+[0])!}{2^{[0]}([1]-[0])![0]!}$, $B_{1,1} = 1 = \frac{([1]+[1])!}{2^{[1]}([1]-[1])![1]!}$.

Suponiendo que el resultado es cierto para n, es decir $B_{n,k} = \frac{(n+k)!}{2^k(n-k)!k!}$ para todo $k \leq n$, se calcula $B_{n+1,k}$ de la forma propuesta en la proposición 3.1.3, así

$$\begin{aligned}
B_{n+1,k} &= (n+k)B_{n,k-1} + B_{n,k} \\
&= (n+k)\left[\frac{(n+k-1)!}{2^{k-1}(n-(k-1))!(k-1)!}\right] + \left[\frac{(n+k)!}{2^k(n-k)!k!}\right] \\
&= \left[\frac{(n+k)!}{2^{k-1}(n+1-k))!(k-1)!}\right] + \left[\frac{(n+k)!}{2^k(n-k)!k!}\right] \\
&= \frac{2k}{2k}\left[\frac{(n+k)!}{2^{k-1}(n+1-k)!(k-1)!}\right] + \frac{n+1-k}{n+1-k}\left[\frac{(n+k)!}{2^k(n-k)!k!}\right] \\
&= (2k)\frac{(n+k)!}{2^k(n+1-k)!k!} + (n+1-k)\frac{(n+k)!}{2^k(n+1-k)!k!} \\
&= \frac{[n+1+k](n+k)!}{2^k(n+1-k)!k!} \\
&= \frac{(n+1+k)!}{2^k(n+1-k)!k!}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto si $k \leq n$, se tiene que $B_{n,k} = \frac{(n+k)!}{2^k(n-k)!k!}$, de este modo queda comprobado que $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{(n-k)!k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k$. Por lo tanto $y_n(x)$ es el n-ésimo polinomio de Bessel, para todo $n \geq 0$. □

La recurrencia presentada en el Teorema 3.1.5 corresponde a una de las fórmulas recurrentes para polinomios de Bessel mencionadas en [48].

3.1.3. Otras gramáticas para los polinomios de Bessel

En [58] se estableció la relación existente entre gramáticas independientes del contexto y polinomios de Bessel, mediante la gramática $G = \{a \to ab\ ; b \to b^2c\ ; c \to bc^2\}$. Posteriormente, en [64], se presenta la gramática $G = \{a \to ab + ab^2\ ; b \to b^3\}$ con la cual también se pueden obtener los polinomios de Bessel, requiriendo únicamente dos variables. Los coeficientes de estos polinomios, denominados números de Bessel, son estudiados en [40] mediante gramáticas, y se establece una relación entre ellos y los números de Stirling de segunda clase mediante la gramática $G = \{a \to a^3 \; ; b \to ab\}$. Teniendo en cuenta la recurrencia para los polinomios de Bessel establecida en ell Teorema 3.1.5, se demuestra a continuación que con las gramáticas presentadas en [58], [64] y [40] se obtienen estos polinomios.

La gramática $G = \{a \to ab \; ; b \to b^2c \; ; c \to bc^2\}$

En [58] se demostró que al considerar $G = \{a \to ab \; ; b \to b^2c \; ; c \to bc^2\}$, se tiene que $D^n(ab) = ab^{n+1}[y_n(c)]$, para $n \geq 0$, donde $y_n(x)$ es el n-ésimo polinomio de Bessel. La prueba presentada en [58] emplea la recurrencia $y_n(x) = [2n-1]xy_{n-1}(x) + y_{n-2}(x)$ con $y_0(x) = 1$ y $y_1(x) = x + 1$. La siguiente proposición muestra otra manera de obtener los polinomios de Bessel mediante la misma gramática, este resultado no aparece en [58].

Proposición 3.1.6. *Sea G la gramática $G = \{a \to ab \; ; b \to b^2c \; ; c \to bc^2\}$, entonces, para $n \geq 0$, $D^n(ac) = ab^nc[y_n(c)]$.*

Demostración. Procediendo por inducción: si $n = 0$, $D^0(ac) = ab^0c[y_0(c)] = ac$, si $n = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} D(ac) &= D(a)c + aD(c) \\ &= [ab]c + a[bc^2] \\ &= abc + abc^2 \\ &= abc\underbrace{[1+c]}_{y_1(c)}. \end{aligned}$$

Suponiendo que $D^n(ac) = ab^nc[y_n(c)]$, entonces

$$\begin{aligned} D^{n+1}(ac) &= D(ab^nc[y_n(c)]) \\ &= D(ab^n)c[y_n(c)] + ab^nD(cy_n(c)) \\ &= [D(a)b^n + aD(b^n)]cy_n(c) + ab^n[D(c)y_n(c) + cD(y_n)(c)] \\ &= [[ab]b^n + a[nb^{n-1}D(b)]]\,cy_n(c) + ab^n\left[[bc^2]y_n(c) + c\frac{d(y_n(c))}{dc}D(c)\right] \\ &= [ab^{n+1} + nab^{n+1}c]cy_n(c) + ab^n\left[bc^2y_n(c) + c\frac{d(y_n(c))}{dc}[bc^2]\right] \\ &= ab^{n+1}c\left[y_n(c) + ncy_n(c) + cy_n(c) + \frac{d(y_n(c))}{dc}c^2\right] \\ &= ab^{n+1}c\left[[(n+1)c+1]y_n(c) + \frac{d(y_n(c))}{dc}c^2\right]. \end{aligned}$$

Dado que $y_{n+1}(c) = [(n+1)c+1]y_n(c) + \dfrac{d(y_n(c))}{dc}[c^2]$, se tiene que $D^{n+1}(ac) = ab^{n+1}cy_{n+1}(c)$. Se demuestra así que $D^n(ac) = ab^nc[y_n(c)]$. □

Procediendo de manera análoga se demuestra que $D^n(ab) = ab^{n+1}[y_n(c)]$.

La gramática $G = \{a \to a^3\ ; b \to ab\}$

La siguiente proposición muestra que la gramática $G = \{a \to a^3\ ; b \to ab\}$, presentada en [40], al igual que la gramática presentada en la sección 3.1.1 y la gramática presentada en [58], permite generar los polinomios de Bessel.

Proposición 3.1.7. *Sea G la gramática $G = \{a \to a^3\ ; b \to ab\}$, entonces, para $n \geq 0$, $D^n(ab) = a^{n+1}b[y_n(a)]$*

Demostración. Se observa que $D(ab) = D(a)b + aD(b) = a^3b + a^2b = [a+1]a^2b$. Suponiendo que $D^n(ab) = a^{n+1}b[y_n(a)]$, se calcula

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(ab) &= D(D^n(ab)) \\
&= D\left(a^{n+1}b[y_n(a)]\right) \\
&= D(a^{n+1}b)[y_n(a)] + a^{n+1}bD\left(y_n(a)\right) \\
&= \left[D(a^{n+1})b + a^{n+1}D(b)\right] y_n(a) + a^{n+1}b\frac{dy_n(a)}{da}D(a) \\
&= \left[[n+1]a^nD(a)b + a^{n+1}D(b)\right] y_n(a) + a^{n+1}b\frac{dy_n(a)}{da}D(a) \\
&= \left[[n+1]a^n[a^3]b + a^{n+1}[ab]\right] y_n(a) + a^{n+1}b\frac{dy_n(a)}{da}[a^3] \\
&= \left[[n+1]a^{n+3}b + a^{n+2}b\right] y_n(a) + a^{n+1}b\frac{dy_n(a)}{da}[a^3] \\
&= a^{n+2}b\underbrace{\left[([n+1]a+1)y_n(a) + \frac{dy_n(a)}{da}[a^2]\right]}_{y_{n+1}(a)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $D^{n+1}(ab) = a^{n+2}by_{n+1}(a)$, demostrando así que $D^n(ab) = a^{n+1}by_n(a)$. □

La Proposición 3.1.7 es presentada en [40] de la siguiente forma $D^n(ab) = \sum_{k=0}^{n} B(n,k)a^{n+k+1}b$, donde $B(n,k)$ es el número de Bessel correspondiente.

La gramática $G = \{a \to ab + ab^2\ ; b \to b^3\}$

La siguiente proposición muestra que la gramática $G = \{a \to ab + ab^2\ ; b \to b^3\}$, presentada en [64], permite generar los polinomios de Bessel

Proposición 3.1.8. *Sea $G = \{a \to ab + ab^2\ ; b \to b^3\}$, entonces $D^n(a) = ab^ny_n(b)$.*

Demostración. Se observa que $D(a) = ab + ab^2 = ab(1+b) = aby_1(b)$. Suponiendo que $D^n(a) = ab^ny_n(b)$, se calcula $D^{n+1}(a)$ como sigue:

$$
\begin{aligned}
D^{n+1}(a) &= D(D^n(a)) \\
&= D(ab^n y_n(b)) \\
&= D(ab^n)y_n(b) + ab^n D(y_n(b)) \\
&= [D(a)b^n + aD(b^n)]y_n(b) + ab^n \frac{dy_n(b)}{db} D(b) \\
&= [D(a)b^n + nab^{n-1}D(b)]y_n(b) + ab^n \frac{dy_n(b)}{db} D(b) \\
&= [(ab^{n+1} + ab^{n+2}) + nab^{n+2}]y_n(b) + ab^{n+3} \frac{dy_n(b)}{db} \\
&= [ab^{n+1} + (n+1)ab^{n+2}]y_n(b) + ab^{n+3} \frac{dy_n(b)}{db} \\
&= ab^{n+1} \underbrace{\left[[1 + (n+1)b]y_n(b) + b^2 \frac{dy_n(b)}{db} \right]}_{y_{n+1}(b)}
\end{aligned}
$$

Luego $D^{n+1}(a) = ab^{n+1}y_{n+1}(b)$, demostrando así que $D^n(a) = ab^n y_n(b)$ para cada n. $\square$

3.1.4. Propiedades de los polinomios de Bessel

Empleando el operador derivada formal se demuestra la siguiente propiedad de los polinomios de Bessel.

Proposición 3.1.9 (Corolario 4 de [63])**.** $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}[2n-2k-1]!!y_k(x)x^{n-k}$.

Demostración. Sea $G = \left\{ a \to ab^2 \; ; b \to \dfrac{b^3c}{2} \; ; c \to b^2c^2 \right\}$. Aplicando la regla del producto de Leibiniz

$$
\begin{aligned}
D^n(a) &= D^{n-1}(D(a)) \\
ab^{2n}y_{n-1}(c) &= D^{n-1}(ab^2) \\
ab^{2n}y_{n-1}(c) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} D^k(a)D^{n-k-1}(b^2) \\
ab^{2n}y_{n-1}(c) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} ab^{2k}y_{k-1}(c)[2(n-1-k)-1]!!b^{2([n-1-k+1])}c^{n-k-1} \\
ab^{2n}y_{n-1}(c) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} y_{k-1}(c)[2(n-1-k)-1]!!ab^{2n}c^{n-1-k} \\
y_{n-1}(c) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} y_{k-1}(c)[2(n-1-k)-1]!!c^{n-1-k}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}[2n-2k-1]!!y_{k-1}(x)x^{n-k}$. $\square$

La Proposición 3.1.9 fue enunciada inicialmente en [58], tanto en [58] como en [63] se emplea la gramática $G = \{a \to ab \; ; b \to b^2c \; ; c \to bc^2\}$.

Mediante la fórmula de recurrencia obtenida para los polinomios de Bessel, demostrada en el Teorema 3.1.5, se demuestran algunas propiedades de los polinomios de Bessel.

Teorema 3.1.10 (Teorema 1 de [38]). *Todas las raíces de los polinomios de Bessel son simples.*

Demostración. El enunciado de este teorema puede reescribirse de la siguiente forma: si r es una raíz del polinomio de Bessel $y_n(x)$, entonces r no es raíz de $y_n'(x)$. Razonando por contradicción, sea r una raíz de $y_n(x)$, talque r no es raíz simple, luego $y_n(r) = 0$ y $y_n'(r) = 0$, así al aplicar la fórmula para los polinomios de Bessel obtenida en el Teorema 3.1.5 se obtiene

$$\begin{aligned} y_{n+1}(r) &= [(n+1)r+1]y_n(r) + y_n'(r)[r^2] \qquad \text{como } y_n(r) = 0 \text{ y } y_n'(r) = 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $y_{n+1}(r) = 0$. Considerando la fórmula descrita en [48] se tiene que

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= [2(n+1)-1]xy_n(x) + y_{n-1}(x) && \text{evaluando en } x = r \\ y_{n+1}(r) &= [2n+1]ry_n(r) + y_{n-1}(r) && \text{como } y_{n+1}(r) = 0 \text{ y } y_n(r) = 0 \\ 0 &= 0 + y_{n-1}(r) \end{aligned}$$

Por lo tanto $y_{n-1}(r) = 0$. Teniendo en cuenta que $y_n(x) = [nx+1]y_{n-1}(x) + y_{n-1}'(x)[x^2]$, por el Teorema 3.1.5, al evaluar en r se obtiene

$$\begin{aligned} y_n(r) &= [nr+1]y_{n-1}(r) + y_{n-1}'(r)[r^2] && \text{como } y_{n-1}(r) = 0 \text{ y } y_n(r) = 0 \\ 0 &= 0 + y_{n-1}'(r)[r^2]. \end{aligned}$$

Como $B_{n,0} = 1$, por la Proposición 3.1.4, se tiene que $y_n(0) = 1$ para cada n, con lo cual $r \neq 0$, por lo tanto $y_{n-1}'(r) = 0$. Entonces, $y_{n-1}(x)$ tiene una raíz que no es simple. Como esto ocurre para todo n, en particular ocurre para $y_0(x)$, con lo cual $y_0(r) = 0$, llegando a una contradicción ya que $y_0(x) = 1$. Probando así que las raíces de los polinomios de Bessel son simples. $\square$

Como consecuencia del Teorema 3.1.10 se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.1.11. *Los polinomios de Bessel $y_{n+1}(x)$ y $y_n(x)$ no tienen raíces comunes.*

Demostración. Sea r talque es raíz de $y_n(x)$ y de $y_{n+1}(x)$, es decir se tiene que $y_n(r) = 0$ y $y_{n+1}(r) = 0$. Considerando la fórmula para polinomios de Bessel, descrita en el Teorema 3.1.5, se tiene que

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= [(n+1)x+1]y_n(x) + y_n'(x)[x^2] && \text{evaluando en } x = r \\ y_{n+1}(r) &= [(n+1)r+1]y_n(r) + y_n'(r)[r^2] \\ 0 &= 0 + y_n'(r)[r^2]. \end{aligned}$$

Como $r \neq 0$, ya que para todo n se tiene que $y_n(0) = 1$, entonces $y_n'(r) = 0$, con lo cual se tiene que r no es una raíz simple de $y_n(x)$, lo cual contradice el Teorema 3.1.10. Por lo tanto, no existe una raíz común de $y_n(x)$ y $y_{n+1}(x)$. $\square$

3.2. La gramática $G = \{a \to ab^2\ ; b \to a^2b; c \to abc\}$

En esta sección es presentada la gramática $G = \{a \to ab^2\ ; b \to a^2b; c \to abc\}$, con la cual es posible generar familias de polinomios tales que la suma de los coeficientes da como resultado números doble factorial; esto lleva a pensar que estos polinomios, y sus coeficientes, pueden ser de interés en el área de la combinatoria. Por tal razón se definen las siguientes familias de números que se relacionan con familias de polinomios obtenidos al aplicar el operador derivada formal, con respecto a la gramática mencionada. En [63] fue presentada una gramática equivalente a la propuesta en esta sección, sin embargo no fueron estudiados en profundidad los resultados de aplicar el operador derivada formal.

Definición 11. *Se definen los números $A(n,k), N(n,k), B(n,k), C(n,k)$ como sigue:*

1. *Para $k \geq 1$: $A(n+1,k) = [n-k+2]A(n,k-1) + kA(n,k)$, con $A(1,1) = 1$.*
   Si $k > n$ o si $k \leq 0$ entonces $A(n,k) = 0$. Si $n \leq 0$ entonces $A(n,k) = 0$.
2. *Para $k \geq 1$: $N(n+1,k) = [2(n-k)+3]N(n,k-1) + 2kN(n,k)$, con $N(1,1) = 1$.*
   Si $k > n$ o si $k \leq 0$ entonces $N(n,k) = 0$. Si $n \leq 0$ entonces $N(n,k) = 0$.
3. *Para $k \geq 0$: $B(n+1,k) = [2(n-k)+3]B(n,k-1) + [2k+1]B(n,k)$ con $B(0,0) = 1$.*
   Si $k > n$ o si $k < 0$ entonces $B(n,k) = 0$. Si $n < 0$ entonces $B(n,k) = 0$.
4. *Para $k \geq 1$: $C(n+1,k) = kC(n,k) + C(n,k-1) + [2n-k+2]C(n,k-2)$ con $C(1,1) = 1$.*
   Si $k \geq 2n$ o si $k \leq 0$ entonces $C(n,k) = 0$. Si $n \leq 0$ entonces $C(n,k) = 0$.

Los números $N(n,k)$ cuentan el número de particiones de $[2n]$ en n bloques de tamaño 2 en las cuales k parejas tienen como valor más pequeño a un número impar, estos números son estudiados en [17], [62]. Por ejemplo $N(3,1) = 4$, ya que se tienen las siguientes particiones

$$\{\{13\},\{45\},\{26\}\}\ ,\ \{\{14\},\{23\},\{56\}\}\ ,\ \{\{15\},\{23\},\{46\}\}\ ,\ \{\{16\},\{23\},\{45\}\}$$

Por otra parte, los números $B(n,k)$ son conocidos como números de Euler tipo B, y corresponden a los coeficientes de la familia de polinomios conocida como polinomios de Euler tipo B [43], en ocasiones llamado de tipo B_n debido al tipo de conteo que realizan [55]. A continuación se aprecian algunas propiedades de los coeficientes definidos.

Proposición 3.2.1. *Los números $N(n,k), B(n,k), C(n,k)$ son tales que, para cada n:*

1. $A(n,1) = 1$.
2. $A(n,n) = 1$.
3. $N(n,1) = 2^{n-1}$.
4. $N(n,n) = 1$.
5. $B(n,0) = 1$.
6. $B(n,n) = 1$.
7. $C(n,1) = 1$.
8. $C(n+1,2n) = C(n,2n-1) + 2C(n,2n-2)$.
9. $C(n+1,2n+1) = 1$.

Demostración. Las propiedades anteriores se demuestran mediante las fórmulas recurrentes para $A(n,k)$, $B(n,k)$, $C(n,k)$, $N(n,k)$, dadas en la definición 11, tomando el respectivo valor k para cada caso.

1. Tomando $k = 1$: $A(n+1,1) = [n+1]A(n,0)+A(n,1) = A(n,1)$. Dado que $A(1,1) = 1$, se tiene que $A(n,1) = 1$ para cada n.

2. Tomando $k = n+1$: $A(n+1,n+1) = A(n,k-1) + (n+1)A(n,n+1)$. Como $A(n,n+1) = 0$ se concluye que $A(n+1,n+1) = A(n,k-1)$, dado que $A(1,1) = 1$ entonces se conluye que $A(n,n) = 1$.

3. Tomando $k = 1$: $N(n+1,1) = [2(n+1)+1]N(n,0) + 2N(n,1) = 2N(n,1)$. Como $N(1,1) = 1$ se concluye que $N(n,1) = 2^{n-1}$.

4. Tomando $k = n+1$: $N(n+1,n+1) = [2(0)+1]N(n,n)+2(n+1)N(n,n+1) = N(n,n)$. Como $N(1,1) = 1$ se concluye que $N(n,n) = 1$ para cada n.

5. Tomando $k = 0$: $B(n+1,0) = B(n,-1)[2n+3]+B(n,0)[2[0]+1] = B(n,0)$ para cada n. Como $B(0,0) = 1$, entonces $B(n,n) = 1$ para cada n.

6. Tomando $k = n+1$:

$$\begin{aligned} B(n+1,n+1) &= B(n,[n+1]-1)[2(n-[n+1])+3] + B(n,[n+1])[2[n+1]+1] \\ &= B(n,n) + B(n,n+1)[2n+3] = B(n,n). \end{aligned}$$

   Como $B(0,0) = 1$, entonces $B(n,n) = 1$ para cada n.

7. Tomando $k = 1$: se obtiene

$$\begin{aligned} C(n+1,1) &= [1]C(n,1) + C(n,[1]-1) + [2n-[1]+2]C(n,[1]-2) \\ &= C(n,1) + C(n,0) + [2n+1]C(n,-1) = C(n,1). \end{aligned}$$

   dado que $C(1,1) = 1$, se tiene que $C(n,1) = 1$ para todo n.

   Por el resultado anterior $C(n,1) = 1$, por lo tanto $C(n+1,2) = 2C(n,2)+1$.

8. Tomando $k = 2n$:

$$\begin{aligned} C(n+1,2n) &= [2n]C(n,2n) + C(n,[2n]-1) + [2n-[2n]+2]C(n,2n-2) \\ &= C(n,2n-1) + 2C(n,2n-2). \end{aligned}$$

9. Tomando $k = 2n+1$:

$$\begin{aligned} C(n+1,2n+1) &= [2n+1]C(n,2n+1) + C(n,2n) + [2n-[2n+1]+2]C(n,[2n+1]-2) \\ &= C(n,2n-1). \end{aligned}$$

   Dado que $C(1,1) = 1$ se tiene que $C(n+1,2n+1) = 1$ para todo n.

□

El siguiente lema será de utilidad en esta sección.

Lema 1. *Si* $G = \{a \to ab^2\ ; b \to a^2b; c \to abc\}$, *entonces para cada* $n, k, r, \geq 0$ *enteros* $D(a^nb^kc^r) = [na^nb^{k+2} + ra^{n+1}b^{k+1} + ka^{n+2}b^k]c^r$.

Demostración.

$$\begin{aligned} D(a^nb^kc^r) &= D(a^nb^k)c^r + a^nb^kD(c^r) \\ &= [D(a^n)b^k + a^nD(b^k)]c^r + a^nb^kD(c^r) \\ &= [na^{n-1}D(a)b^k + ka^nb^{k-1}D(b)]c^r + ra^nb^kc^{r-1}D(c) \\ &= [na^{n-1}[ab^2]b^k + ka^nb^{k-1}[a^2b]]c^r + ra^nb^kc^{r-1}[abc] \end{aligned}$$

entonces, $D(a^nb^kc^r) = [na^nb^{k+2} + ra^{n+1}b^{k+1} + ka^{n+2}b^k]c^r$.

□

3.2.1. Los números $N(n, k)$, $A(n, k)$ y algunas de sus propiedades

La siguiente proposición muestra cómo obtener los números $N(n, k)$, presentados en la definición 11, mediante la gramática $G = \{a \to ab^2\ ; b \to a^2b; c \to abc\}$.

Proposición 3.2.2. *Sea* $G = \{a \to ab^2\ ; b \to a^2b; c \to abc\}$, *entonces:* $D^n(a) = \sum_{k=1}^{n} N(n, k)a^{2(n-k)+1}b^{2k}$ *y* $D^n(b) = \sum_{k=1}^{n} N(n, k)a^{2k}b^{2(n-k)+1}$.

Demostración. Como $D(a) = ab^2 = A(1, 1)^{2[1-1]+1}b^{2[1]}$, la proposición se cumple para $n = 1$. Suponiendo que $D^n(a) = \sum_{k=1}^{n} N(n, k)a^{2(n-k)+1}b^{2k}$, se calcula

$$\begin{aligned} D^{n+1}(a) &= D\left(\sum_{k=1}^{n} N(n, k)a^{2(n-k)+1}b^{2k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} N(n, k)D(a^{2(n-k)+1}b^{2k}) && \text{por Lema 1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} N(n, k)\left[[2(n-k) + 1]a^{2(n-k)+1}b^{2k+2} + 2ka^{2(n-k)+3}b^{2k}\right]. \end{aligned}$$

Esta suma se puede reescribir como

$$2N(n, 1)a^{2n+1}b^2 + \sum_{k=2}^{n} [[2n - k + 3]N(n, k - 1) + 2kN(n, k)]\, a^{2(n-k)+3}b^{2k} + N(n, n)ab^{2n+2}.$$

Por la Definición 11 se tiene que $N(n+1, k) = [2(n-k)+3]A(n, k-1)+2kN(n, k)$, además por la Proposición 3.2.1 se tiene que $N(n + 1, 1) = 2N(n, 1)$ y $N(n + 1, n + 1) = N(n, n)$; por lo tanto se concluye que $D^{n+1}(a) = \sum_{k=1}^{n+1} N(n + 1, k)a^{2(n+1-k)+1}b^{2k}$.

En la gramática $G = \{a \to ab^2\ ; b \to a^2b; c \to abc\}$ se observa que $D(a)$ y $D(b)$ representan la misma función salvo el intercambio entre a y b, por lo cual de manera análoga se demuestra que $D^n(b) = \sum_{k=1}^{n} N(n, k)a^{2k}b^{2(n-k)+1}$. □

A continuación se listan algunos de los polinomios que se obtienen al calcular $D^n(a)$

$$
\begin{array}{ccccccc}
ab^2 & & & & & & \\
2a^3b^2+ & ab^4 & & & & & \\
4a^5b^2+ & 10a^3b^4+ & ab^6 & & & & \\
8a^7b^2+ & 60a^5b^4+ & 36a^3b^6+ & ab^8 & & & \\
16a^9b^2+ & 296a^7b^4+ & 516a^5b^6+ & 116a^3b^8+ & ab^{10} & & \\
32a^{11}b^2+ & 1328a^9b^4+ & 5168a^7b^6+ & 3508a^5b^8+ & 358a^3b^{10}+ & ab^{12} & \\
64a^{13}b^2+ & 5664a^{11}b^4+ & 42960a^9b^6+ & 64240a^7b^8+ & 21120a^5b^{10}+ & 1086a^3b^{12}+ & ab^{14}
\end{array}
$$

Se observa que al sumar los coeficientes de cada polinomio el resultado es un número doble factorial, como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 3.2.3. $\sum_{k=1}^{n} N(n,k) = (2n-1)!!$.

Demostración. Teniendo en cuenta la gramática $G = \{a \to ab^2 \ ; b \to a^2b; c \to abc\}$, se tiene que $D^n(a) = \sum_{k=1}^{n} N(n,k)a^{2(n-k)+1}b^{2k}$, por la Proposición 3.2.2. Dado que $D(a) = ab^2$, se aprecia que $N(1,1) = 1 = (2[1]-1)!!$, cumpliendo así el resultado para $n = 1$. Suponiendo que $\sum_{k=1}^{n} N(n,k) = (2n-1)!!$, se calcula $P(a,b) = D^{n+1}(a)$ mediante la Proposición 3.2.2

$$
\begin{aligned}
D^{n+1}(a) &= D\left(\sum_{k=1}^{n} N(n,k)a^{2(n-k)+1}b^{2k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} N(n,k)\left[[2(n-k)+1]a^{2(n-k)+1}b^{2k+2} + 2ka^{2(n-k)+3}b^{2k}\right].
\end{aligned}
$$

Tomando $a = b = 1$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} N(n+1,k) &= \sum_{k=1}^{n} N(n,k)\left[[2(n-k)+1]+2k\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} N(n,k)[2n+1] \qquad \text{como } \sum_{k=1}^{n} N(n,k) = (2n-1)!! \\
&= (2n-1)!![2n+1].
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\sum_{k=1}^{n+1} N(n+1,k) = (2n+1)!!$. □

La siguiente proposición muestra cómo obtener los números $A(n,k)$, presentados en la Definición 11, mediante la gramática $G = \{a \to ab^2 \ ; b \to a^2b; c \to abc\}$.

Proposición 3.2.4. *Sea* $G = \{a \to ab^2 \ ; b \to a^2b; c \to abc\}$, *entonces* $D^n(a^2) = 2^n \sum_{k=1}^{n} A(n,k)a^{2k}b^{2(n-k+1)}$.

Demostración. Dada la gramática $G = \{a \to ab^2 \; ; b \to a^2 b; c \to abc\}$, se observa que $D(a^2) = 2aD(a) = 2a^2b^2$, con lo cual se verifica la expresión para $n = 1$. Suponiendo que $D^n(a^2) = 2^n \sum_{k=1}^{n} A(n,k) a^{2(n-k)+1} b^{2k}$, se calcula $D^{n+1}(a^2)$ así:

$$
\begin{aligned}
D^{n+1}(a^2) &= D(D^n(a^2)) \\
&= D\left(2^n \sum_{k=1}^{n} A(n,k) a^{2k} b^{2(n-k+1)}\right) \\
&= 2^n \sum_{k=1}^{n} A(n,k) D\left(a^{2k} b^{2(n-k+1)}\right) \\
&= 2^n \sum_{k=1}^{n} A(n,k)\left(2ka^{2k-1} b^{2(n-k+1)} D(a) + 2(n-k+1) a^{2k} b^{2(n-k)+1} D(b)\right) \\
&= 2^{n+1} \sum_{k=1}^{n} A(n,k)\left(ka^{2k} b^{2(n-k+2)} + [n-k+1] a^{2(k+1)} b^{2(n-k+1)}\right).
\end{aligned}
$$

Esta suma se puede reescribir como

$$
2^{n+1}\left[A(n,1)a^2 b^{2(n+1)} \sum_{k=2}^{n} \left[kA(n,k) + [(n-k+2)] A(n,k-1)\right] a^{2k} b^{2(n-k+2)} + 2^{n+1} A(n,n)\right].
$$

Por la Definición 11 se tiene que $A(n+1,k) = [n-k+2]A(n,k-1) + kA(n,k)$, además por la Proposición 3.2.1 se tiene que $A(n+1,1) = A(n,1)$ y $A(n+1,n+1) = A(n,n)$; por lo tanto

$$
\begin{aligned}
D^{n+1}(a^2) &= 2^{n+1}\left[A(n+1,1)a^2 b^{2(n+1)} \sum_{k=2}^{n} A(n+1,k) a^{2k} b^{2(n-k+2)} + 2^{n+1} A(n,n)\right] \\
&= 2^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} A(n+1,k) a^{2k} b^{2(n-k+2)}.
\end{aligned}
$$

De donde se concluye que $D^n(a^2) = 2^n \sum_{k=1}^{n} A(n,k) a^{2k} b^{2(n-k+1)}$, para cada $n \geq 1$.

$\square$

El siguiente resultado es una fórmula de recurrencia de los números $N(n,k)$ que involucra los números $A(n,k)$.

Teorema 3.2.5. $N(n+1,r) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \sum_{i=1}^{n} A(n-k,i) N(k,r-i).$

Demostración. Tomando la gramática $G = \{a \to ab^2\ ; b \to a^2b; c \to abc\}$ se tiene que $D^n(a^2) = 2^n \sum_{k=1}^{n} A(n,k)a^{2k}b^{2(n-k+1)}$ y $D^n(b) = \sum_{k=1}^{n} N(n,k)a^{2k}b^{2(n-k)+1}$, por las Proposiciones 3.2.4 y 3.2.2 respectivamente, entonces por la regla del producto de Leibniz se obtiene

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(b) &= D^n(a^2b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}(a^2)D^k(b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[2^{n-k} \sum_{i=1}^{n} A(n-k,i)a^{2i}b^{2(n-k-i+1)}\right] \left[\sum_{j=1}^{k} N(k,j)a^{2j}b^{2(k-j)+1}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[2^{n-k} \sum_{i=1}^{n} A(n-k,i)a^{2i}b^{2(n-i+1)}\right] \left[\sum_{j=1}^{k} N(k,j)a^{2j}b^{-2j+1}\right].
\end{aligned}$$

Dado que $D^{n+1}(b) = \sum_{r=1}^{n+1} N(n+1,r)a^{2r}b^{2(n+1-r)+1}$, por la Proposición 3.2.2, se tiene que

$$\sum_{r=1}^{n+1} N(n+1,r)a^{2r}b^{2(n+1-r)+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[2^{n-k} \sum_{i=1}^{n} A(n-k,i)a^{2i}b^{2(n-i+1)}\right] \left[\sum_{j=1}^{k} N(k,j)a^{2j}b^{-2j+1}\right].$$

Considerando $r = i + j$, es decir $j = r - i$ se obtienen términos semejantes

$$N(n+1,r)a^{2r}b^{2(n+1-r)+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[2^{n-k} \sum_{i=1}^{n} A(n-k,i)N(k,r-i)a^{2r}b^{2(n+1-r)+1}\right].$$

Por lo tanto, $N(n+1,r) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \sum_{i=1}^{n} A(n-k,i)N(k,r-i)$. □

El siguiente resultado permite escribir los números $A(n,k)$ en términos de los números $N(n,k)$.

Teorema 3.2.6. $2^n A(n,r) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\sum_{l=1}^{k} N(k,l)N(n-k,n-l-r+1)\right]$.

Demostración. Tomando la gramática $G = \{a \to ab^2\ ; b \to a^2b; c \to abc\}$, se tiene que $D^n(a) = \sum_{k=1}^{n} N(n,k)a^{2(n-k)+1}b^{2k}$, por la Proposición 3.2.2, luego por la regla del producto de Leibniz se tiene que

$$\begin{aligned}
D^n(a^2) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k(a)D^{n-k}(a) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\sum_{l=1}^{k} N(k,l)a^{2(k-l)+1}b^{2l}\right] \left[\sum_{m=1}^{n-k} N(n-k,m)a^{2(n-k-m)+1}b^{2m}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\sum_{l=1}^{k} N(k,l)a^{-2l+1}b^{2l}\right] \left[\sum_{m=1}^{n-k} N(n-k,m)a^{2(n-m)+1}b^{2m}\right].
\end{aligned}$$

Por otra parte, $D^n(a^2) = 2^n \sum_{r=1}^{n} A(n,r)a^{2r}b^{2(n-r+1)}$, por la Proposición 3.2.4, luego se tiene que

$$2^n \sum_{r=1}^{n} A(n,r)a^{2r}b^{2(n-r+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\sum_{l=1}^{k} N(k,l)a^{-2l+1}b^{2l}\right] \left[\sum_{m=1}^{n-k} N(n-k,m)a^{2(n-m)+1}b^{2m}\right].$$

Para igualar por términos semejantes, se considera $r = n - l - m + 1$ con lo cual se tiene que $m = n - r - l + 1$, obteniendo así:

$$2^n A(n,r) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\sum_{l=1}^{k} N(k,l)N(n-k, n-l-r+1)\right] \qquad \square$$

En [62] se presenta la fórmula explícita $N(n,k) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}2^{n-2i}\binom{2i}{i}\binom{n-i}{k-i}i!S(n,i)$, esta expresión relaciona los números $N(n,k)$ con números Stirling de segunda clase y factoriales, reescribiendo esta fórmula se relacionan los números $N(n,k)$ con doblefactoriales.

Proposición 3.2.7. *$N(n,k) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}2^{n-i}[i-1]!!\binom{n-i}{k-i}S(n,i)$.*

Demostración. Dado que $N(n,k) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}2^{n-2i}\binom{2i}{i}\binom{n-i}{k-i}i!S(n,i)$, entonces

$$\begin{aligned} N(n,k) &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}2^{n-2i}\frac{[2i]!}{i!i!}\binom{n-i}{k-i}i!S(n,i) \\ &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}2^{n-2i}\frac{2^i i![i-1]!!}{i!}\binom{n-i}{k-i}S(n,i). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $N(n,k) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}2^{n-i}[i-1]!!\binom{n-i}{k-i}S(n,i)$. $\square$

Proposición 3.2.8. *Dados n, r, $A(n,r)$ se puede calcular como:*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{l=1}^{k}\left[\sum_{i=1}^{l}\frac{(-1)^i}{2^i}[i-1]!!\binom{k-i}{l-i}S(k,i)\right]\left[\sum_{j=1}^{n-r+1}\frac{(-1)^{n-l-r+1-j}}{2^j}[j-1]!!\binom{n-k-j}{n-l-r+1-j}S(n-k,j)\right].$$

Demostración. Se sabe que $2^n A(n,r) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\sum_{l=1}^{k} N(k,l)N(n-k,n-l-r+1)\right]$, por la Proposición 3.2.6, pero por la Proposición 3.2.7 se tiene que:

$$\begin{aligned} N(k,l) &= \left[\sum_{i=1}^{l}\frac{(-1)^{l-i}}{2^{-(k-i)}}[i-1]!!\binom{k-i}{l-i}S(k,i)\right] \\ N(n-k,n-l-r+1) &= \sum_{j=1}^{n-l-r+1}\frac{(-1)^{n-l-r+1-j}}{2^{-(n-k-j)}}[j-1]!!\binom{n-k-j}{n-l-r+1-j}S(n-k,j). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $N(k,l)N(n-k,n-l-r+1)$ da como resultado:

$$\left[\sum_{i=1}^{l} \frac{(-1)^{l-i}}{2^{-(k-i)}}[i-1]!!\binom{k-i}{l-i}S(k,i)\right]\left[\sum_{j=1}^{n-l-r+1} \frac{(-1)^{n-l-r+1-j}}{2^{-(n-k-j)}}[j-1]!!\binom{n-k-j}{n-l-r+1-j}S(n-k,j)\right]$$
$$\left[\sum_{i=1}^{l} \frac{(-1)^{-i}}{2^{i}}[i-1]!!\binom{k-i}{l-i}S(k,i)\right]\left[\sum_{j=1}^{n-r+1} \frac{(-1)^{n-l-r+1-j}}{2^{-n+j}}[j-1]!!\binom{n-k-j}{n-l-r+1-j}S(n-k,j)\right].$$

Se observa que $2^n A(n,r)$ equivale a:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{l=1}^{k}\sum_{i=1}^{l}\frac{(-1)^i}{2^i}[i-1]!!\binom{k-i}{l-i}S(k,i)\sum_{j=1}^{n-r+1}\frac{(-1)^{n-l-r+1-j}}{2^{-n+j}}[j-1]!!\binom{n-k-j}{n-l-r+1-j}S(n-k,j).$$

Dividiendo a ambos lados por 2^n se obtiene que $A(n,r)$ equivale a

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{l=1}^{k}\sum_{i=1}^{l}\frac{(-1)^i}{2^i}[i-1]!!\binom{k-i}{l-i}S(k,i)\sum_{j=1}^{n-r+1}\frac{(-1)^{n-l-r+1-j}}{2^{j}}[j-1]!!\binom{n-k-j}{n-l-r+1-j}S(n-k,j). \ \square$$

3.2.2. El Polinomio $P_{nc}(a,b)$

Procediendo de manera análoga a la Proposición 3.2.2, se observa que $D^n(c)$ define una familia de polinomios recurrentes.

Proposición 3.2.9. *Sea $G = \{a \to ab^2\ ; b \to a^2b; c \to abc\}$, entonces para cada $n \geq 1$ $D^n(c) = c\sum_{k=1}^{2n-1} C(n,k)a^k b^{2n-k}$.*

Demostración. Como $D(c) = abc$, el resultado se cumple para $n = 1$. Suponiendo que $D^n(c) = \sum_{k=1}^{2n-1} C(n,k)a^k b^{2n-k}c$, se calcula $D^{n+1}(c)$

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(c) &= D\left(\sum_{k=1}^{2n-1} C(n,k)a^k b^{2n-k}c\right)\\
&= \sum_{k=1}^{2n-1} C(n,k)D(a^k b^{2n-k}c) && \text{Por el Lema 1}\\
&= c\sum_{k=1}^{2n-1} C(n,k)[ka^k b^{2n-k+2} + a^{k+1}b^{2n-k+1} + [2n-k]a^{k+2}b^{2n-k}]
\end{aligned}$$

La suma anterior se divide en tres partes

$$\begin{aligned}
&C(n,1)ab^{2n+1} + [2C(n,2)+C(n,1)]a^2b^{2n} +\\
&\sum_{k=3}^{2n-1}[kC(n,k)+C(n,k-1)+(2n-(k-2))C(n,k-2)]a^k b^{2[n+1]-k} +\\
&[C(n,2n-1)+2C(n,2n-2)]\,a^{2n}b^2 + C(n,2n-1)a^{2n+1}b
\end{aligned}$$

Como $C(n+1,k) = kC(n,k) + C(n,k-1) + [2n-k+2]C(n,k-2)$, por la Definición 11, además por la Proposición 3.2.1 se tiene que $C(n,1) = 1$ y $C(n+1,2n+1) = 1$, para todo n, obteniendo así que las expresiones anteriores son equivalentes a:

$$\begin{aligned}&C(n+1,1)ab^{2[n+1]-1}+C(n+1,2)a^2b^{2[n+1]-2}+\\&\sum_{k=3}^{2n-1}C(n+1,k)a^kb^{2[n+1]-k}+\\&C(n+1,2n)a^{2n}b^2+C(n+1,2n+1)a^{2n+1}b\end{aligned}$$

Por lo tanto $D^{n+1}(c)=c\sum_{k=1}^{2n+1}C(n+1,k)a^kb^{2[n+1]-k}$. □

La siguiente Proposición muestra que los números $C(n,k)$ están relacionados con números doble factorial.

Proposición 3.2.10. $\sum_{k=1}^{2n-1}C(n,k)=[2n-1]!!$.

Demostración. Tomando $G=\{a\to ab^2\ ;b\to a^2b;c\to abc\}$, por la Proposición 3.2.9, se tiene que $D^n(c)=c\sum_{k=1}^{2n-1}C(n,k)a^kb^{2n-k}$, por lo tanto basta calcular el valor de la suma con $a=1$ y $b=1$. Dado que $D(c)=abc$, se tiene que $C(1,1)=1$ por lo cual la proposición se cumple para $n=1$. Suponiendo que $\sum_{k=1}^{2n-1}C(n,k)=[2n-1]!!$, se calcula $D^{n+1}(c)$

$$\begin{aligned}D^{n+1}(c)&=D\left(\sum_{k=1}^{2n-1}C(n,k)a^kb^{2n-k}c\right)\\\sum_{k=1}^{2n+1}C(n+1,k)a^kb^{2[n+1]-k}c&=\sum_{k=1}^{2n-1}C(n,k)D(a^kb^{2n-k}c)\\\sum_{k=1}^{2n+1}C(n+1,k)a^kb^{2[n+1]-k}c&=\sum_{k=1}^{2n-1}C(n,k)[ka^kb^{2n-k+2}+a^{k+1}b^{2n-k+1}+[2n-k]a^{k+2}b^k]c.\end{aligned}$$

tomando $a=b=c=1$ se obtiene

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n+1}C(n+1,k)&=\sum_{k=1}^{2n-1}C(n,k)[k+1+[2n-k]]\\&=\sum_{k=1}^{2n-1}C(n,k)[2n+1]\qquad\text{como }\sum_{k=1}^{2n-1}C(n,k)=[2n-1]!!,\\&=(2n-1)!![2n+1].\end{aligned}$$

De donde se concluye que $\sum_{k=1}^{2n+1}C(n+1,k)=[2n+1]!.$ □

Sea $P_{nc}(a,b)$ tal que $D^n(c)=cP_{nc}(a,b)$, es decir se define $P_{nc}(a,b)=\sum_{k=1}^{2n-1}C(n,k)a^kb^{2n-k}$. Las funciones P_{nc} para los primeros valores de n son:

$$\begin{aligned}P_{1c}(a,b)&=ab\\P_{2c}(a,b)&=ab^3+a^2b^2+a^3b\\P_{3c}(a,b)&=ab^5+3a^4b^2+7a^3b^3+3a^4b^2+a^5b\\P_{4c}(a,b)&=ab^7+7a^2b^6+29a^3b^5+31a^4b^4+29a^5b^3+7a^6b^2+a^7b\\P_{5c}(a,b)&=ab^9+15a^2b^8+101a^3b^7+195a^4b^6+321a^5b^5+195a^6b^4+101a^7b^3+15a^8b^2+a^9b\end{aligned}$$

Los coeficientes crecen rápidamente, para dar una idea de ello, el polinomio $P_{6c}(a,b)$ es:

$ab^{11}+31a^2b^{10}+327a^3b^9+1001a^4b^8+2507a^5b^7+2661a^6b^6+2507a^7b^5+1001a^8b^4+327a^9b^3+31a^{10}b^2+a^{11}b.$

La Proposición 3.2.10 muestra que la suma de los coeficientes de P_{nc} da como resultado números doble factorial, no obstante si en los polinomios $P_{nc}(a,b)$ se intercalan los signos, es decir si se toma $-P_{nc}(-a,b) = \sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}C(n,k)a^kb^{2n-k}$ se obtiene:

$$\begin{array}{ll}
-P_{1c}(-a,b) & = ab \\
-P_{2c}(-a,b) & = ab^3 - a^2b^2 + a^3b \\
-P_{3c}(-a,b) & = ab^5 - 3a^4b^2 + 7a^3b^3 - 3a^4b^2 + a^5b \\
-P_{4c}(-a,b) & = ab^7 - 7a^2b^6 + 29a^3b^5 - 31a^4b^4 + 29a^5b^3 - 7a^6b^2 + a^7b \\
-P_{5c}(-a,b) & = ab^9 - 15a^2b^8 + 101a^3b^7 - 195a^4b^6 + 321a^5b^5 - 195a^6b^4 + 101a^7b^3 - 15a^8b^2 + a^9b.
\end{array}$$

en donde se aprecia que $-P_{nc}(1,1) = (2n-1)!!$.

3.2.3. Números de Euler tipo B

Los coeficientes de los polinomios de Euler tipo B, denominados números de Euler de tipo B, son generados por la gramática $G = \{a \to ab^2 \ ; \ b \to a^2b\}$, resultado propuesto en [60]; estos coeficientes corresponden a los números $B(n,k)$ presentados en la Definición 11. Al considerar la gramática $G = \{a \to ab^2 \ ; b \to a^2b; c \to abc\}$, se extiende la gramática $\{a \to ab^2 \ ; \ b \to a^2b\}$, al incluir la variable c y una producción para ella, permitiendo así relacionar los números de Euler tipo B con otras familias de números.

Proposición 3.2.11. *Sea $G = \{a \to ab^2 \ ; b \to a^2b; c \to abc\}$, entonces para todo $n > 0$ $D^n(ab) = \sum_{k=0}^{n} B(n,k)a^{2(n-k)+1}b^{2k+1}$.*

Demostración. Dado que $D(a) = ab^2$ y $D(b) = a^2b$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
D(ab) &= D(a)b + aD(b) \\
&= [ab^2]b + a[a^2b] \\
&= ab^3 + a^3b \\
&= \sum_{k=0}^{1} B(1,k)a^{2(n-k)+1}b^{2k+1}.
\end{aligned}$$

Suponiendo que $D^n(ab) = \sum_{k=0}^{n} B(n,k)a^{2(n-k)+1}b^{2k+1}$, entonces

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(ab) &= D\left(\sum_{k=0}^{n} B(n,k)a^{2(n-k)+1}b^{2k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} B(n,k)D\left(a^{2(n-k)+1}b^{2k+1}\right) && \text{por Lema 1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} B(n,k)[[2(n-k)+1]a^{2(n-k)+1}b^{2k+3} + [2k+1]a^{2(n-k)+3}b^{2k+1}].
\end{aligned}$$

Esta suma se puede expresar como

$$B(n,0)a^{2n+3}b+\sum_{k=1}^{n-1}\left[[2(n-k)+3]B(n,k-1)+[2k+1]B(n,k)\right]a^{2(n-k)+3}b^{2k+1}+B(n,n)ab^{2n+3}.$$

Por la Definición 11 se tiene $B(n+1,k)=[2(n-k)+3]B(n,k-1)+[2k+1]B(n,k)$, por la Proposición 3.2.1 se tiene que $B(n,0)=B(n+1,0)$ y $B(n+1,n+1)=B(n,n)$, concluyendo así que $D^{n+1}(ab)=\sum\limits_{k=0}^{n+1}B(n+1,k)a^{2(n+1-k)+1}b^{2k+1}$. □

Los primeros polinomios $D^{n+1}(ab)$ son dados por:

$$\begin{array}{ccccccc}
ab & & & & & & \\
ab^3+ & a^3b & & & & & \\
ab^5+ & 6a^3b^3+ & a^5b & & & & \\
ab^7+ & 23a^3b^5+ & 23a^5b^3+ & a^7b & & & \\
ab^9+ & 76a^3b^7+ & 230a^5b^5+ & 76a^7b^3+ & a^9b & & \\
ab^{11}+ & 237a^3b^9+ & 1682a^5b^7+ & 1682a^7b^5+ & 237a^9b^3+ & a^{11}b & \\
ab^{13}+ & 722a^3b^{11}+ & 10543a^5b^9+ & 23548a^7b^7+ & 10543a^9b^5+ & 722a^{11}b^3+ & a^{13}b.
\end{array}$$

Se observa que al sumar los coeficientes de cada polinomio el resultado es un número doble factorial, como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 3.2.12. $\sum\limits_{k=1}^{n}B(n,k)=(2n)!!$

Demostración. Tomando la gramática $G=\{a\to ab^2\ ; b\to a^2b; c\to abc\}$, se observa que $D(ab)=D(a)b+aD(b)=[ab^2]b+a[a^2b]=ab^3+a^3b$, cuya suma de coeficientes es 2!!. Suponiendo que $\sum\limits_{k=1}^{n}B(n,k)=(2n)!!$, se compara el resultado de $D^{n+1}(ab)$ obtenido por la Proposición 3.2.11, $D^{n+1}(ab)=\sum\limits_{k=0}^{n+1}B(n+1,k)a^{2n-2k+3}b^{2k+1}$, con el obtenido mediante el Lema 1.

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(ab) &= D\left(\sum_{k=0}^{n}B(n,k)a^{2(n-k)+1}b^{2k+1}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}B(n,k)D\left(a^{2(n-k)+1}b^{2k+1}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}B(n,k)[[2(n-k)+1]a^{2(n-k)+1}b^{2k+3}+[2k+1]a^{2(n-k)+3}b^{2k+1}].
\end{aligned}$$

Luego, las dos expresiones obtenidas para $D^{n+1}(ab)$ deben ser igualres. Tomando $a=b=1$

se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} B(n+1,k) &= \sum_{k=0}^{n} B(n,k)[[2(n-k)+1]+[2k+1]] \\ &= \sum_{k=0}^{n} B(n,k)[2n+2] \qquad\qquad \text{como } \sum_{k=1}^{n} B(n,k) = [2n]!! \\ &= [2n]!![2n+2].\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum_{k=0}^{n+1} B(n+1,k) = (2n+2)!!$. □

3.2.4. Propiedades de los números de Euler tipo B

La siguiente proposición muestra que los números de Euler tipo B se pueden escribir en términos de los números $N(n,k)$.

Proposición 3.2.13. $B(n,r) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{l=1}^{k} [N(k,l)N(n-k, n-r+l-k)]$.

Demostración. Tomando $G = \{a \to ab^2 \ ; b \to a^2b; c \to abc\}$, por la Proposición 3.2.2, se tiene que $D^n(a) = \sum_{k=1}^{n} N(n,k)a^{2(n-k)+1}b^{2k}$ y $D^n(b) = \sum_{k=1}^{n} N(n,k)a^{2k}b^{2(n-k)+1}$, además $D^n(ab) = \sum_{k=0}^{n} B(n,k)a^{2(n-k)+1}b^{2k+1}$, por la Proposición 3.2.11, luego al emplear la regla del producto de Leibniz se obtiene

$$\begin{aligned}D^n(ab) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k(a)D^{n-k}(b) \\ \sum_{r=0}^{n} B(n,r)a^{2(n-r)+1}b^{2r+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\sum_{l=1}^{k} N(k,l)a^{2(k-l)+1}b^{2l} \sum_{m=1}^{n-k} N(n-k,m)a^{2m}b^{2(n-k-m)+1}\right]\end{aligned}$$

Tomando en particular $2(n-r) = 2(k-l+m)$ se tiene que $m = n-r+l-k$ luego:

$$B(n,r)a^{2(n-r)+1}b^{2r+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{l=1}^{k} [N(k,l)N(n-k,n-r+l-k)]\, a^{2[n-r]+1}b^{2r+1}$$

Por lo tanto, $B(n,r) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{l=1}^{k} [N(k,l)N(n-k,n-r+l-k)]$. □

Similar a la proposición anterior, se demuestra que los números $N(n,k)$ pueden escribirse en términos de sí mismos y los números de Euler tipo B.

Proposición 3.2.14. $N(n,r)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\sum_{l=1}^{k}N(k,l)B(n-k,n-l-r)\right].$

Demostración. Tomando $G=\{a\to ab^2\ ;b\to a^2b;c\to abc\}$, por la Proposición 3.2.2, se tiene que $D^n(a)=\sum_{k=1}^{n}N(n,k)a^{2(n-k)+1}b^{2k}$ y $D^n(b)=\sum_{k=1}^{n}N(n,k)a^{2k}b^{2(n-k)+1}$, además $D^n(ab)=\sum_{k=0}^{n}B(n,k)a^{2(n-k)+1}b^{2k+1}$, por la Proposición 3.2.11, por lo tanto al aplicar la regla del producto de Leibniz se obtiene

$$\begin{aligned}
D^n(a^2b) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^k(a)D^{n-k}(ab)\\
D^{n+1}(b) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\sum_{l=1}^{k}N(k,l)a^{2(k-l)+1}b^{2l}\sum_{m=1}^{n-k}B(n-k,m)a^{2(n-k-m)+1}b^{2m+1}\right]\\
\sum_{r=1}^{n}N(n,r)a^{2r}b^{2(n-r)+1} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\sum_{l=1}^{k}N(k,l)a^{-2l+1}b^{2l}\sum_{m=1}^{n-k}B(n-k,m)a^{2(n-m)+1}b^{2m+1}\right].
\end{aligned}$$

Tomando $r=n-l-m+1$ se tiene que $m=n-l-r+1$, con lo cual

$$N(n,r)a^{2r}b^{2(n-r)+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\sum_{l=1}^{k}N(k,l)B(n-k,n-l-r)a^{2r+1}b^{2[n-r]+1}\right]$$

Por lo tanto $N(n,r)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\sum_{l=1}^{k}N(k,l)B(n-k,n-l-r)\right].$ $\square$

El siguiente resultado relaciona los números $C(n,k)$ con los números de Euler tipo B.

Proposición 3.2.15. $C(n+1,r)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\sum_{l=0}^{k}B(k,l)C(n-k,r-2k+2l-1)\right].$

Demostración. Tomando $G=\{a\to ab^2\ ;b\to a^2b;c\to abc\}$, dado que por la Proposición 3.2.11 se tiene que $D^n(ab)=\sum_{k=0}^{n}B(n,k)a^{2(n-k)+1}b^{2k+1}$, y $D^n(c)=c\sum_{k=1}^{2n-1}C(n,k)a^kb^{2n-k}$, por la Proposición 3.2.9, al emplear la regla del producto de Leibniz se obtiene

$$\begin{aligned}
D^n(abc) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^k(ab)D^{n-k}(c)\\
D^{n+1}(c) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\sum_{l=0}^{k}B(k,l)a^{2(k-l)+1}b^{2l+1}\right]\left[\sum_{m=1}^{2[n-k]-1}C(n-k,m)a^mb^{2[n-k]-m}c\right].
\end{aligned}$$

Por otra parte $D^{n+1}(c)=\sum_{r=1}^{2n+1}C(n+1,r)a^rb^{2(n+1)-r}c$, por lo tanto las dos expresiones para $D^{n+1}(c)$ deben ser iguales. Tomando $m=r-2k+2l-1$, se puede igualar términos semejantes, obteniedo así

$$C(n+1,r)a^r b^{2(n+1)-r}c = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\sum_{l=0}^{k} B(k,l)C(n-k, r-2k+2l-1) \right] a^r b^{2(n+1)-r} c$$

Por lo tanto, $C(n+1,r) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\sum_{l=0}^{k} B(k,l)C(n-k, r-2k+2l-1) \right]$. □

Propiedades similares a las presentadas en esta sección se encuentran en [65], junto con una interpretación combinatoria de los polinomios que tienen a estos números como coeficientes.

3.3. La gramática $G = \{a \to a^2b\ ;\ b \to ab^2c\ ;\ c \to abc^2\}$

En esta sección mediante la gramática $G = \{a \to a^2b\ ;\ b \to ab^2c\ ;\ c \to abc^2\}$ son generadas unas familias de polinomios, tales que la suma de sus coeficientes generan potencias de la forma n^n, $(n+1)^n$. Debido a que se emplea el operador D, definido respecto a la gramática G mencionada, se obtiene una recurrencia que permite generar dichos polinomios; adicionalmente se obtiene una recurrencia para generar las sucesiones correspondientes a los coeficientes de dichos polinomios. De este modo es posible establecer algunas propiedades que relacionan a estos coeficientes entre sí.

El estudio de los polinomios mencionados y su aplicación en el conteo de ciertos tipos de árboles y grafos de mapeos de $[n]$ a $[n]$ se encuentra en [31], para lo cual presentan la gramática $G = \{a \to a^3b;\ b \to ab^2\}$; dado que uno de estos polinomios tiene por coeficientes a una sucesión de números presentados por Srinivasa Ramanujan [8], esta gramática ha sido denominada gramática de Ramanujan [31].

3.3.1. Los números $a_{n,k}$

La siguiente proposición muestra el resultado de calcular $D^n(a)$ cuando el operador D se define con respecto a la gramática $G = \{a \to a^2b\ ;\ b \to ab^2c\ ;\ c \to abc^2\}$.

Proposición 3.3.1. *Si $G = \{a \to a^2b\ ;\ b \to ab^2c\ ;\ c \to abc^2\}$, entonces para cada $n \geq 0$ $D^n(a) = a^{n+1}b^n y_{n-1}(c)$, donde los polinomios $y_n(c)$ son tales que:*

$$y_n(c) = [(n+1) + nc]y_{n-1}(c) + c^2 \frac{dy_{n-1}(c)}{dc} \quad \text{con } y_0(c) = 1.$$

Demostración. Claramente $D^0(a)$ y $D(a) = a^2b = a^{[1]+1}b^{[1]}y_0(c)$, lo que verifica el resultado para $n = 0$ y $n = 1$. Suponiendo que $D^n(a) = a^{n+1}b^n y_{n-1}(c)$, se calcula $D^{n+1}(a)$ así

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(a) &= D(a^{n+1}b^n y_{n-1}(c)) \\
&= D(a^{n+1}b^n)y_{n-1}(c) + a^{n+1}b^n D(y_{n-1}(c)) \\
&= [(n+1)a^n b^n D(a) + na^{n+1}b^{n-1}D(b)]y_{n-1}(c) + a^{n+1}b^n D(c)\frac{dy_{n-1}(c)}{dc} \\
&= [(n+1)a^n b^n[a^2b] + na^{n+1}b^{n-1}[ab^2c]]y_{n-1}(c) + a^{n+1}b^n[abc^2]\frac{dy_{n-1}(c)}{dc} \\
&= [(n+1)a^{n+2}b^{n+1} + na^{n+2}b^{n+1}c]y_{n-1}(c) + a^{n+2}b^{n+1}c^2\frac{dy_{n-1}(c)}{dc} \\
&= a^{n+2}b^{n+1}\left[[(n+1)+nc]y_{n-1}(c) + c^2\frac{dy_{n-1}(c)}{dc}\right].
\end{aligned}$$

Como $y_n(c) = [(n+1)+nc]y_{n-1}(c)+c^2\dfrac{dy_{n-1}(c)}{dc}$, entonces $D^{n+1}(a) = a^{n+2}b^{n+1}y_n(c)$. Probando así el resultado propuesto. □

En el apéndice B.6 se presenta una lista de los primeros polinomios $y_n(x)$, junto con un código que permite generarlos. La siguiente definición caracteriza los coeficientes de los polinomios obtenidos en la proposición anterior.

Definición 12. *Se definen los números a_{nk} como los coeficientes de los polinomios $y_n(x)$ tales que*

$$y_n(x) = [(n+1)+nx]y_{n-1}(x) + x^2\frac{dy_{n-1}(x)}{dx} \quad \text{con } y_0(x) = 1.$$

Las siguientes proposiciones corresponden a observaciones que se pueden realizar sobre los números $a_{n,k}$.

Proposición 3.3.2. $a_{n,0} = (n+1)!$ *para todo* $n \geq 0$.

Demostración. Como $y_0(x) = 1$, se cumple que $a_{0,0} = 1!$. Suponiendo que $a_{n-1,0} = n!$, y dado que

$$y_n(x) = [(n+1)+nx]y_{n-1}(x) + x^2\frac{dy_{n-1}(x)}{dx}$$

Se tiene que $x^2\dfrac{dy_{n-1}(x)}{dx}$ no tiene término constante, y que $[(n+1)+nx]y_{n-1}(x)$ tiene como término constante $(n+1)a_{n-1,0}$, luego

$$\begin{aligned}
a_{n,0} &= (n+1)a_{n-1,0} \qquad \text{Como } a_{n-1,0} = n! \\
&= (n+1)[n!] \\
&= (n+1)!.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $a_{n,0} = (n+1)!$ para todo $n \geq 0$. □

Otra demostración de la proposición anterior se obtiene al observar que $y_n(0) = a_{n,0}$, ya que

$$\begin{aligned}
y_n(0) &= [(n+1)+n[0]]y_{n-1}(0) + [0]^2\frac{dy_{n-1}}{dx}(0) \\
&= (n+1)a_{n-1,0}.
\end{aligned}$$

De este modo se obtiene que $y_{n,0} = (n+1)!$. El resultado descrito en la Proposición 3.3.2 permite caracterizar los términos de la forma $a_{n,0}$; de manera similar es posible caracterizar $a_{n,n}$ al considerarlo como el coeficiente que acompaña a x^n en $y_n(x)$.

Proposición 3.3.3. $a_{n,n} = (2n-1)a_{n-1,n-1}$ *para todo* $n \geq 1$.

Demostración. Dado que $y_n(x) = [(n+1)+nx]y_{n-1}(x) + x^2\dfrac{dy_{n-1}(x)}{dx}$, el término correspondiente a x^n es:

$$\begin{aligned} a_{n,n}x^n &= na_{n-1,n-1}x^n + (n-1)a_{n-1,n-1}x^n && \text{tomando factor común } x^n \\ a_{n,n} &= na_{n-1,n-1} + (n-1)a_{n-1,n-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $a_{n,n} = (2n-1)a_{n-1,n-1}$ para todo $n \geq 1$. □

El siguiente teorema muestra como construir de manera recurrente los números $a_{n,k}$.

Teorema 3.3.4. $a_{n,k} = (n+1)a_{n-1,k} + (n+k-1)a_{n-1,k-1}$ *con* $a_{0,0} = 1$.

Demostración. Sea $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}x^k$. Como $y_n(x) = [(n+1)+nx]y_{n-1}(x) + x^2\dfrac{dy_{n-1}(x)}{dx}$, por la Definición 12, entonces el coeficiente correspondiente a x^k es dado por:

$$\begin{aligned} a_{n,k}x^k &= (n+1)a_{n-1,k}x^k + na_{n-1,k-1}x^k + (k-1)a_{n-1,k-1}x^k && \text{tomando factor común } x^k \\ a_{n,k} &= (n+1)a_{n-1,k} + na_{n-1,k-1} + (k-1)a_{n-1,k-1} && \text{luego} \\ a_{n,k} &= (n+1)a_{n-1,k} + (n+k-1)a_{n-1,k-1} \end{aligned}$$

En la ecuación $a_{n,k} = (n+1)a_{n-1,k} + (n+k-1)a_{n-1,k-1}$, se observa que si $k = 0$ se requiere el término $a_{n-1,-1}$, el cual puede definirse por defecto como 0, así $a_{n,0} = (n+1)a_{n-1,0}$, verificando el resultado obtenido en la Proposición 3.3.2. Si $k = n$ se requiere el término $a_{n-1,n}$, el cual puede definirse por defecto como 0, por lo cual $a_{n,n} = (2n-1)a_{n-1,n-1}$. Comprobando así que $a_{n,k} = (n+1)a_{n-1,k} + (n+k-1)a_{n-1,k-1}$, para todo $k \leq n$. □

La siguiente lista muestra los primeros números $a_{n,k}$.

n / k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	2	1						
2	6	7	3					
3	24	46	40	15				
4	120	326	430	315	105			
5	720	2556	4536	4900	3150	945		
6	5040	22212	49644	70588	66150	38115	10395	
7	40320	212976	574848	1011500	1235080	1032570	540540	135135

En la tabla anterior se aprecia que $\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = (n+2)^n$ para todo n. En [44] se estudia una familia de números que satisfacen una recurrencia similar a la de $a_{n,k}$, tales que la suma da como resultado $(n+1)^n$.

3.3.2. Los números de Ramanujan, $b_{n,k}$

La siguiente proposición muestra el resultado obtenido calcular $D^n(b)$ cuando el operador D se define con respecto a la gramática $G = \{a \to a^2b \ ; \ b \to ab^2c \ ; \ c \to abc^2\}$.

Proposición 3.3.5. *Sea $G = \{a \to a^2b \ ; \ b \to ab^2c \ ; \ c \to abc^2\}$, entonces para $n \geq 0$ $D^{n+1}(b) = a^{n+1}b^{n+2}cy_n(c)$, donde los polinomios $y_n(c)$ cumplen la recurrencia*

$$y_n(c) = [(n+2)c + n]y_{n-1}(c) + c^2 \frac{dy_{n-1}(c)}{dc} \text{ , con } y_0(c) = 1.$$

Demostración. Dado que $D(b) = ab^2c = a^1b^{[1]+1}c^1[y_0(c)]$, la proposición se cumple para $n = 0$. Suponiendo que $D^n(b) = a^nb^{n-1}cy_{n-1}(c)$ se calcula $D^{n+1}(b)$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(b) &= D(a^nb^{n+1}cy_{n-1}(c)) \\
&= D(a^nb^{n+1})cy_{n-1}(c)) + a^nb^{n+1}D(cy_{n-1}(c)) \\
&= [na^{n-1}b^{n+1}D(a) + (n+1)a^nb^nD(b)]cy_{n-1}(c) + a^nb^{n+1}[D(c)y_{n-1}(c) + cD(c)\frac{dy_{n-1}(c)}{dc}] \\
&= [na^{n+1}b^{n+2} + (n+1)a^{n+1}b^{n+2}c]cy_{n-1}(c) + a^nb^{n+1}\left[abc^2y_{n-1}(c) + abc^3\frac{dy_{n-1}(c)}{dc}\right] \\
&= a^{n+1}b^{n+2}c\left[[n + (n+1)c]y_{n-1}(c) + cy_{n-1}(c) + c^2\frac{dy_{n-1}(c)}{dc}\right] \\
&= a^{n+1}b^{n+2}c\left[[n + (n+2)c]y_{n-1}(c) + c^2\frac{dy_{n-1}(c)}{dc}\right].
\end{aligned}$$

Como $y_n(c) = [n+(n+2)c]y_{n-1}(c) + c^2\frac{dy_{n-1}(c)}{dc}$, se concluye que $D^{n+1}(b) = a^{n+1}b^{n+2}cy_n(c)$. □

La siguiente definición caracteriza los coeficientes de los polinomios obtenidos en la proposición anterior, los cuales denominaremos $b_{n,k}$.

Definición 13. *Se definen los números b_{nk} como los coeficientes de los polinomios $y_n(x)$ tales que*

$$y_n(x) = [(n+2)x + n]y_{n-1}(x) + x^2 \frac{dy_{n-1}(x)}{dx} \text{ , con } y_0(x) = 1.$$

Sobre los coeficientes de los polinomios $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}x^k$ se pueden realizar algunas observaciones, lo cual nos conduce a la siguientes proposiciones.

Proposición 3.3.6. *El término $b_{n,0} = n!$ para todo $n \geq 0$.*

Demostración. Dado que $y_0(x) = 1$, se tiene que $b_{0,0} = 1$. Suponiendo que $b_{n-1,0} = (n-1)!$, entonces dado que $y_n(x) = [(n+2)x + n]y_{n-1}(x) + x^2\frac{dy_{n-1}(x)}{dx}$, se obtiene que el término constante de $y_n(x)$ es dado por:

$$\begin{aligned}
b_{n,0} &= nb_{n-1,0} \qquad \text{como } b_{n-1,0} = (n-1)! \\
& n[(n-1)!] \\
&= n!.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $b_{n,0} = n!$. □

Otra forma de probar la proposición anterior se tiene al considerar $y_n(0)$, como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}
y_n(x) &= [(n+2)x+n]y_{n-1}(x) + c^2\frac{dy_{n-1}(x)}{dx} && \text{Evaluando en 0}\\
y_n(0) &= [(n+2)0+n]y_{n-1}(0) + (0)^2\frac{dy_{n-1}}{dx}(0) && \\
b_{n,0} &= nb_{n-1,0} && \text{como } b_{n-1,0} = (n-1)!\\
b_{n,0} &= n(n-1)!. &&
\end{aligned}$$

Probando que $b_{n,0} = n!$. También se observa un patrón en el coeficiente de x^n de cada y_n.

Proposición 3.3.7. *$b_{n,n} = (2n+1)b_{n-1,n-1}$ para $n \geq 1$.*

Demostración. Dado que $y_n(x) = [(n+2)x+n]y_{n-1}(x)+x^2\frac{dy_{n-1}(x)}{dx}$; se tiene que el término correspondiente a x^n es dado por:

$$\begin{aligned}
b_{n,n}x^n &= (n+2)b_{n-1,n-1}x^n + (n-1)b_{n-1,n-1}x^n && \text{Cancelando } x^n\\
b_{n,n} &= (n+2)b_{n-1,n-1} + (n-1)b_{n-1,n-1}x^n. &&
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $b_{n,n} = (2n+1)b_{n-1,n-1}$. □

El siguiente teorema corresponde a una fórmula recurrente para la construcción de los números $b_{n,k}$.

Teorema 3.3.8. *$b_{n,k} = (n+k+1)b_{n-1,k-1} + nb_{n-1,k}$, para todo $k \leq n$, con $b_{0,0} = 1$.*

Demostración. Sea $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}$, entonces $y_n(x) = [(n+2)x+n]y_{n-1}(x) + x^2\frac{dy_{n-1}(x)}{dx}$, por la Definición 13, con lo cual se tiene que el término correspondiente a x^k es dado por:

$$\begin{aligned}
b_{n,k}x^k &= (n+2)b_{n-1,k-1}x^k + nb_{n-1,k}x^k + (k-1)b_{n-1,k-1}x^k && \text{Cancelando } x^k\\
b_{n,k} &= (n+2)b_{n-1,k-1} + nb_{n-1,k} + (k-1)b_{n-1,k-1} && \text{luego}\\
b_{n,k} &= (n+k+1)b_{n-1,k-1} + nb_{n-1,k}. &&
\end{aligned}$$

Si $k = 0$, se requiere el término $b_{n-1,-1}$ el cual se define como 0, luego $b_{n,0} = (n-1)b_{n-1,k-1}$, coincidiendo con lo probado en la Proposición 3.3.6; si $k = n$ se requiere el término $b_{n-1,n}$ el cual se define como 0, luego $b_{n,k} = (2n-1)b_{n-1,n-1}$, coincidiendo con lo probado en la Proposición 3.3.7. Por lo tanto $b_{n,k} = (n+k+1)b_{n-1,k-1} + nb_{n-1,k}$ para todo $k \leq n$. □

Los números $b(n,k)$, que satisfacen la recurrencia $b_{n,k} = (n+k+1)b_{n-1,k-1} + nb_{n-1,k}$ con $b_{0,0} = 1$, se denominan números de Ramanujan [31]; estos números pueden generarse en orden inverso empleando la recurrencia $R_{n+1,k} = (n-1)R_{n,k-1} + (2n-k-1)R_{n,k}$, presentada en [42]. Mediante la recurrencia presentada en el Teorema 3.3.8, se obtiene que los primeros números de Ramanujan $b_{n,k}$ son:

n / k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	3						
2	2	10	15					
3	6	40	105	105				
4	24	196	700	1260	945			
5	120	1148	5068	12600	17325	10395		
6	720	7848	40740	126280	242550	270270	135135	
7	5040	61416	363660	1332100	3213210	5045040	4729725	2027025

Se observa que $\sum_{k=0}^{n} b_{n,k} = (n+1)^{n+1}$ para todo n; en [31] se obtiene que la suma es n^n debido a un corrimiento en los índices de la recurrencia. Continuando con la aplicación del operador derivada formal, con respecto a la gramática $G = \{a \to a^2b \ ; \ b \to ab^2c \ ; \ c \to abc^2\}$, se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 3.3.9. *Sea $G = \{a \to a^2b \ ; \ b \to ab^2c \ ; \ c \to abc^2\}$, entonces para $n \geq 0$ $D^{n+1}(c) = a^{n+1}b^{n+1}c^2y_n(c)$ donde*

$$y_n(c) = n(1+c)y_{n-1}(c) + \frac{d(c^2y_{n-1}(c))}{dc} \quad y_0(c) = 1.$$

Demostración. Claramente $D(c) = abc^2$, con lo cual se cumple el resultado para $n = 1$. Suponiendo que $D^n(c) = a^nb^nc^2y_{n-1}(c)$, se calcula $D^{n+1}(c)$

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(c) &= D(abc^2y_{n-1}(c)) \\
&= D(a^nb^n)c^2y_{n-1}(c) + a^nb^nD(c^2y_{n-1}(c)) \\
&= [na^{n-1}b^nD(a) + na^nb^{n-1}D(b)]c^2y_{n-1}(c) + a^nb^n\left[\frac{d(c^2y_{n-1}(c))}{dc}D(c)\right] \\
&= [na^{n-1}b^n[a^2b] + na^nb^{n-1}[ab^2c]]c^2y_{n-1}(c) + a^nb^n\left[\frac{d(c^2y_{n-1}(c))}{dc}\right][abc^2] \\
&= [na^{n+1}b^{n+1} + na^{n+1}b^{n+1}c]c^2y_{n-1}(c) + a^{n+1}b^{n+1}c^2\left[\frac{d(c^2y_{n-1}(c))}{dc}\right] \\
&= a^{n+1}b^{n+1}c^2\left[n[1+c]y_{n-1}(c) + \frac{d(c^2y_{n-1}(c))}{dc}\right].
\end{aligned}$$

Como $y_n(c) = n[1+c]y_{n-1}(c) + \frac{d(c^2y_{n-1}(c))}{dc}$, se concluye que $D^{n+1}(c) = a^{n+1}b^{n+1}c^2y_n(c)$. □

Los primeros polinomios $y_n(x)$, obtenidos en la proposición anterior, están dados por:

$$\begin{array}{lllllll}
y_0(x) = 1 & & & & & & \\
y_1(x) = 1 & +3x & & & & & \\
y_2(x) = 2 & +10x & +15x^2 & & & & \\
y_3(x) = 6 & +40x & +105x^2 & +105x^3 & & & \\
y_4(x) = 24 & +196x & +700x^2 & +1260x^3 & +945x^4 & & \\
y_5(x) = 120 & +1148x & +5068x^2 & +12600x^3 & +17325x^4 & +10395x^5 & \\
y_6(x) = 720 & +7848x & +40740x^2 & +126280x^3 & +242550x^4 & +270270x^5 & +135135x^6.
\end{array}$$

Se confirma que los coeficientes de estos polinomios son números de Ramanujan, e incluso mantienen el mismo orden; esto se debe a que los polinomios obtenidos en la Proposición 3.3.9 cumplen la recursión

$$y_n(c) = n(1+c)y_{n-1}(c) + \frac{d(c^2 y_{n-1}(c))}{dc} \quad \text{con } y_0(c) = 1.$$

luego, $y_n(c)$ puede reordenarse de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
y_n(c) &= n[1+c]y_{n-1}(c) + \frac{d(c^2 y_{n-1}(c))}{dc} \\
&= [n+nc]y_{n-1}(c) + \left[2cy_{n-1}(c) + c^2\frac{d(y_{n-1}(c))}{dc}\right] \\
&= [n+(n+2)c]y_{n-1}(c) + c^2\frac{d(y_{n-1}(c))}{dc}.
\end{aligned}$$

Así se comprueba que los polinomios obtenidos en la Proposición 3.3.5 son los mismos polinomios obtenidos en la Proposición 3.3.9. La siguiente proposición describe la relación entre $D^{n+1}(b)$ y $D^{n+1}(c)$.

Proposición 3.3.10. *Sea $G = \{a \to a^2b\ ;\ b \to ab^2c\ ;\ c \to abc^2\}$, entonces para $n \geq 0$ $D^{n+1}(b) = \dfrac{D(b)}{D(c)}D^{n+1}(c)$.*

Demostración. Dado que $D^{n+1}(b) = a^{n+1}b^{n+2}cy_n(c)$ y $D^{n+1}(c) = a^{n+1}b^{n+1}c^2y_n(c)$, por las proposiciones 3.3.5 y 3.3.9, respectivamente, se tiene que

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(b) &= \frac{b}{c}D^{n+1}(c) \qquad\qquad \text{Como } \frac{b}{c} = \frac{b[abc]}{c[abc]} \\
&= \frac{ab^2c}{abc^2}D^{n+1}(c).
\end{aligned}$$

Como $D(b) = ab^2c$ y $D(c) = abc^2$, se concluye que $D^{n+1}(b) = \dfrac{D(b)}{D(c)}D^{n+1}(c)$. $\square$

3.3.3. Los números $c_{n,k}$

La siguiente proposición muestra el resultado de calcular $D^n(ac)$ cuando el operador D se define con respecto a la gramática $G = \{a \to a^2b \ ; \ b \to ab^2c \ ; \ c \to abc^2\}$.

Proposición 3.3.11. *Sea* $G = \{a \to a^2b \ ; \ b \to ab^2c \ ; \ c \to abc^2\}$, *entonces para* $n \geq 0$ $D^{n+1}(ac) = a^{n+2}b^{n+1}cy_{n+1}(c)$ *donde los polinomios* $y_{n+1}(c)$ *cumplen la recurrencia:*

$$y_{n+1}(c) = [(1+c)(n+1)]y_n(c) + c^2\frac{dy_n(c)}{dc} \text{ , con } y_1(c) = 1 + c.$$

Demostración. Se observa que

$$\begin{aligned} D(ac) &= D(a)c + aD(c) \\ &= [a^2b]c + a[abc^2] \\ &= a^2bc + a^2bc^2 \\ &= a^2bc[1+c]. \end{aligned}$$

Luego $D(ac) = a^2bcy_0(c)$. Suponiendo que $D^n(ac) = a^{n+1}b^ncy_n(c)$, se calcula $D^{n+1}(ac)$ así

$$\begin{aligned} D^{n+1}(ac) &= D(a^{n+1}b^ncy_n(c)) \\ &= D(a^{n+1}b^n)cy_n(c) + a^{n+1}b^nD(cy_n(c)) \\ &= [D(a^{n+1})b^n + a^{n+1}D(b^n)]cy_n(c) + a^{n+1}b^n\,[D(c)y_n(c) + cD(y_n(c))] \\ &= [(n+1)a^nD(a)b^n + na^{n+1}b^{n-1}D(b)]cy_n(c) + a^{n+1}b^n\left[D(c)y_n(c) + cD(c)\frac{dy_n(c)}{dc}\right] \\ &= [(n+1)a^{n+2}b^{n+1} + na^{n+2}b^{n+1}c^2y_n(c) + a^{n+2}b^{n+1}c^2\left[y_n(c) + c\frac{dy_n(c)}{dc}\right] \\ &= a^{n+2}b^{n+1}c\left[(n+1) + (n+1)cy_n(c) + c\frac{dy_n(c)}{dc}\right] \\ &= a^{n+2}b^{n+1}c\left[(n+1)(1+c)y_n(c) + c\frac{dy_n(c)}{dc}\right]. \end{aligned}$$

Como $y_{n+1}(c) = (n+1)(1+c)y_n(c) + c\dfrac{dy_n(c)}{dc}$, entonces $D^{n+1}(ac) = a^{n+2}b^{n+1}cy_{n+1}(c)$. □

Algunos polinomios $y_n(x)$ generados mediante la recurrencia dada en la proposición anterior son:

$$\begin{array}{lllllll} y_1(x) = 1 & +x & & & & & \\ y_2(x) = 2 & +4x & +3x^2 & & & & \\ y_3(x) = 6 & +18x & +25x^2 & +15x^3 & & & \\ y_4(x) = 24 & +96x & +190x^2 & +210x^3 & +105x^4 & & \\ y_5(x) = 120 & +600x & +1526x^2 & +2380x^3 & +2205x^4 & +945x^5 & \\ y_6(x) = 720 & +4320x & +13356x^2 & +26488x^3 & +34650x^4 & +27720x^5 & +10395x^6. \end{array}$$

La siguiente definición permite caracterizar los coeficientes de los polinomios presentados, los cuales denominaremos $c_{n,k}$.

Definición 14. *Se definen los números c_{nk} como los coeficientes de los polinomios $y_n(x)$ tales que*

$$y_{n+1}(x) = [(1+x)(n+1)]y_n(x) + x^2\frac{dy_n(x)}{dx}\ \text{, con } y_1(c) = 1 + x.$$

Considerando $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}x^k$, se observa que $\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} = (n+1)^n$ para todo n, en [81] se estudia el conteo realizado por una familia de números que coinciden con los números $c_{n,k}$, salvo un corrimiento en los índices, y se estudia una generalización de la propiedad observada. Las siguientes proposiciones muestran algunas propiedades de los números $c_{n,k}$.

Proposición 3.3.12. *$c_{n,0} = n!$ para todo $n \geq 1$.*

Demostración. Como $y_1(x) = 1 + x$, se cumple que $c_{0,0} = 1!$. Suponiendo que $c_{n,0} = n!$, y dado que

$$y_{n+1}(x) = [(1+x)(n+1)]y_n(x) + x^2\frac{dy_n(x)}{dx}$$

como $x^2\frac{dy_n(x)}{dx}$ no tiene término constante, y además $[(1+x)(n+1)]y_n(x)$ tiene como término constante $(n+1)c_{n,0}$, se obtiene que

$$\begin{aligned} c_{n+1,0} &= (n+1)c_{n-1,0} && \text{Como } c_{n,0} = n! \\ &= (n+1)[n!] \\ &= (n+1)!. \end{aligned}$$

Por lo tanto $c_{n,0} = n!$ para todo $n \geq 1$. □

Otra demostración de la proposición anterior se obtiene al verificar que $y_n(0) = c_{n,0}$. De manera similar a la Proposición 3.3.12, es posible caracterizar $c_{n,n}$ al considerarlo como el coeficiente que acompaña a x^n en $y_n(x)$.

Proposición 3.3.13. *$c_{n+1,n+1} = (2n+1)c_{n,n}$ para todo $n \geq 1$.*

Demostración. Dado que $y_{n+1}(x) = [(n+1)(1+x)]y_n(x) + x^2\frac{dy_n(x)}{dx}$, se observa que el término correspondiente a x^n es:

$$\begin{aligned} c_{n+1,n+1}x^n &= (n+1)c_{n,n}x^{n+1} + (n)c_{n,n}x^{n+1} && \text{tomando factor común } x^{n+1} \\ c_{n+1,n+1} &= [(n+1) + (n)]c_{n,n} \\ &= (2n+1)c_{n,n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $c_{n+1,n+1} = (2n+1)c_{n,n}$ para todo $n \geq 1$. □

El siguiente teorema caracteriza los polinomios obtenidos en la proposición 3.3.11.

Teorema 3.3.14. *Sea $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}x^k$, tal que satisface la siguiente fórmula recursiva*

$$y_{n+1}(x) = [(1+x)(n+1)]y_n(x) + x^2\frac{dy_n(x)}{dx}\ \text{, con } y_1(x) = 1 + x$$

entonces, $c_{n+1,k} = (n+1)c_{n,k} + (n+k)c_{n,k-1}$ para todo $k \leq n+1$.

Demostración. Dado que $y_{n+1}(x) = [(1+x)(n+1)]y_n(x) + x^2\dfrac{dy_n(x)}{dx}$; se tiene que el término correspondiente a x^k es dado por:

$$\begin{aligned}
c_{n+1,k}x^k &= (n+1)c_{n,k}x^k + (n+1)c_{n,k-1}x^k + (k-1)c_{n,k-1}x^k & \text{Cancelando } x^k\\
c_{n+1,k} &= (n+1)c_{n,k} + (n+1)c_{n,k-1} + (k-1)c_{n,k-1} & \text{luego}\\
c_{n+1,k} &= (n+1)c_{n,k} + (n+k)c_{n,k-1}.
\end{aligned}$$

Si $k = 0$, se requiere el término $c_{n-1,-1}$ el cual se define como 0, así $c_{n+1,0} = (n+1)c_{n,0}$. Por lo tanto, $c_{n+1,k} = (n+1)c_{n,k} + (n+k)c_{n,k-1}$ para todo $k \leq n+1$. □

En el apéndice B.6 se explica cómo se emplea la fórmula de recurrencia obtenida en el teorema anterior para generar los números $c_{n,k}$. El siguiente resultado muestra que los polinomios generados en la proposición 3.3.11 se pueden obtener al considerar $D^n(ab)$, en lugar de $D^n(ac)$.

Proposición 3.3.15. *Sea* $G = \{a \to a^2b \ ; \ b \to ab^2c \ ; \ c \to abc^2\}$, *entonces para* $n \geq 0$ $D^{n+1}(ab) = a^{n+2}b^{n+2}\left[(n+1)(1+c)y_n(c) + c^2\dfrac{dy_n}{dc}\right]$, *donde*

$$y_{n+1}(c) = [(1+c)(n+1)]y_n(c) + c^2\frac{dy_n(c)}{dc} \text{ , con } y_1(c) = 1 + c.$$

Demostración. Se observa que

$$\begin{aligned}
D(ab) &= D(a)b + aD(b)\\
&= [a^2b]b + a[ab^2c]\\
&= a^2b^2 + a^2b^2c\\
&= a^2b^2[1+c].
\end{aligned}$$

Luego $D(ab) = a^2b^2y_0(c)$. Suponiendo que $D^n(ab) = a^{n+1}b^{n+1}y_n(c)$, se calcula $D^{n+1}(ab)$ así

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(ab) &= D(a^{n+1}b^{n+1}y_n(c))\\
&= D(a^{n+1}b^{n+1})y_n(c) + a^{n+1}b^{n+1}D(y_n(c))\\
&= [D(a^{n+1})b^{n+1} + a^{n+1}D(b^{n+1})]y_n(c) + a^{n+1}b^{n+1}\left[\frac{dy_n(c)}{dc}D(c)\right]\\
&= [(n+1)a^n[a^2b]b^{n+1} + (n+1)a^{n+1}b^n[ab^2c]]y_n(c) + a^{n+1}b^{n+1}\left[\frac{dy_n(c)}{dc}[abc^2]\right]\\
&= a^{n+2}b^{n+2}\left[[(n+1) + (n+1)c]y_n(c) + \frac{dy_n(c)}{dc}[c^2]\right]\\
&= a^{n+2}b^{n+2}\left[(n+1)(1+c)y_n(c) + \frac{dy_n(c)}{dc}[c^2]\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto $D^{n+1}(ab) = a^{n+2}b^{n+2}\left[(n+1)(1+c)y_n(c) + c^2\dfrac{dy_n(c)}{dc}\right]$. □

3.3.4. Propiedades de los números $a_{n,k}$, $b_{n,k}$ y $c_{n,k}$

En resumen, en la sección 3.3 se han presentado los números $a_{n,k}, b_{n,k}, c_{n,k}$ que satisfacen las recurrencias

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= (n+1)a_{n-1,k} + (n+k-1)a_{n-1,k-1}\ ,\ \text{con}\ \ a_{0,0} = 1. \\ b_{n,k} &= (n+k+1)b_{n-1,k-1} + nb_{n-1,k}\ ,\ \text{con}\ \ b_{0,0} = 1. \\ c_{n+1,k} &= (n+1)c_{n,k} + (n+k)c_{n,k-1}\ ,\ \text{con}\ \ c_{1,0} = c_{1,1} = 1. \end{aligned}$$

Para todo $k \leq 0$, en cada uno de estos números se toma por defecto el valor 0. En los teoremas 3.3.4, 3.3.8 y 3.3.14, respectivamente, se observa una recurrencia para las familias de polinomios que tienen a estos números como coeficientes.

Los siguientes teoremas permiten relacionar a los números $a_{n,k}, b_{n,k}$ y $c_{n,k}$ entre sí; sus demostraciones se realizan empleando la gramática $G = \{a \to a^2b\ ;\ b \to ab^2c\ ;\ c \to abc^2\}$.

Teorema 3.3.16. $a_{n,r} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\sum\limits_{i=0}^{n-k} a_{n-k,i}c_{k,r-i} \right].$

Demostración. Tomando la gramática $G = \{a \to a^2b\ ;\ b \to ab^2c\ ;\ c \to abc^2\}$, se tiene que $D^n(a) = a^{n+1}b^n \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{n,k}c^k$ y $D^n(ab) = a^{n+1}b^{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} c_{n,k}c^k$, por las Proposiciones 3.3.5 y 3.3.15 respectivamente. Dado que $D^{n+1}(a) = D^n(D(a)) = D^n(a^2b)$, por la regla de Leibniz se tiene que

$$\begin{aligned} D^n(a^2b) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}(a)D^k(ab) \\ D^{n+1}(a) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[a^{n-k+1}b^{n-k} \sum_{i=0}^{n-k} a_{n-k,i}c^i \right] \left[a^{k+1}b^{k+1} \sum_{j=0}^{k} c_{k,j}c^j \right] \\ a^{n+2}b^{n+1} \sum_{r=0}^{n} a_{n+1,r}c^r &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[a^{n+2}b^{n+1} \sum_{i=0}^{n-k} a_{n-k,i}c^i \right] \left[\sum_{j=0}^{k} c_{k,j}c^j \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sum\limits_{r=0}^{n} a_{n+1,r}c^r = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\sum\limits_{i=0}^{n-k} a_{n-k,i}c^i \right] \left[\sum\limits_{j=0}^{k} c_{k,j}c^j \right].$

Con el fin de igualar términos semejantes se considera $r = i + j$, luego

$$\begin{aligned} a_{n+1,r}c^r &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\sum_{i=0}^{n-k} a_{n-k,i}c^i \right] \left[c_{k,r-i}c^{r-i} \right] \\ a_{n+1,r}c^r &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} a_{n-k,i}c_{k,r-i}c^r. \end{aligned}$$

Concluyendo así que $a_{n+1,r} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum\limits_{i=0}^{n-k} a_{n-k,i}c_{k,r-i}.$ □

El Teorema 3.3.16 permite relacionar los números a_{nk} y c_{nk}, el siguiente resultado permite relacionar los números a_{nk}, b_{nk} y c_{nk}, y muestra una forma alternativa de construir los números $c_{n,k}$ en términos de a_{nk} y b_{nk}. La demostración se lleva a cabo considerando la gramática $G = \{a \to a^2b\ ;\ b \to ab^2c\ ;\ c \to abc^2\}$ y la regla del producto de Leibniz a $D^n(ab)$; no obstante, se puede obtener el mismo resultado si se aplica la regla del producto de Leibniz a $D^n(ac)$.

Teorema 3.3.17. $c_{n,r} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\sum_{i=0}^{n-k} a_{n-k,i} b_{k,r-i-1}\right].$

Demostración. Tomando la gramática $G = \{a \to a^2b\ ;\ b \to ab^2c\ ;\ c \to abc^2\}$ se tiene que $D^n(a) = a^{n+1}b^n \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k}c^k$ y $D^n(b) = a^nb^{n+1}c \sum_{k=0}^{n-1} b_{n,k}c^k$, por las proposiciones 3.3.5 y 3.3.1 respectivamente, además $D^n(ab) = a^{n+1}b^{n+1} \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}c^k$ por la proposición 3.3.15, luego por la regla de Leibniz se obtiene

$$\begin{aligned}
D^n(ab) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}(a) D^k(b) \\
a^{n+1}b^{n+1} \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}c^k &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[a^{n-k+1}b^{n-k} \sum_{i=0}^{n-k} a_{n-k,i}c^i\right] \left[a^kb^{k+1}c \sum_{j=0}^{k-1} b_{k,j}c^j\right] \\
a^{n+1}b^{n+1} \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}c^k &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\sum_{i=0}^{n-k} a_{n-k,i}c^i\right] \left[\sum_{j=0}^{k-1} b_{k,j}c^{j+1}\right] a^{n+1}b^{n+1}.
\end{aligned}$$

Concluyendo así que $\sum_{k=0}^{n} c_{n,k}c^k = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\sum_{i=0}^{n-k} a_{n-k,i}c^i\right] \left[\sum_{j=0}^{k-1} b_{k,j}c^{j+1}\right]$. En particular, si se toma $r = i + j + 1$, se obtiene

$$c_{n,r}c^r = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\sum_{i=0}^{n-k} a_{n-k,i} b_{k,r-i-1}\right] c^r.$$

De este modo $c_{n,r} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\sum_{i=0}^{n-k} a_{n-k,i} b_{k,r-i-1}\right]$. □

4. Operador diferencial sobre gramáticas matriciales

El operador diferencial, definido sobre gramáticas independientes del contexto, puede extenderse a gramáticas matriciales en las cuales los bloques de producciones están dados por funciones formales mediante reglas independientes de contexto.

Definición 15. *Sea* $G = \{g_1, g_2, \ \ldots \ , g_n\}$*, donde cada* g_i *se denomina bloque, tales que* $g_i = \{a_1 \to w_{i1} \ ; \ a_2 \to w_{i2}; \ \ldots \ ; a_m \to w_{im}\}$*, con cada* w_{ij} *función formal. Entonces*

$$D_i(a_j) := w_{ij}.$$

Ejemplo 7. *La gramática*

$$G = \{\underbrace{[a \to ab; b \to ab^2]}_{bloque\ 1}, \underbrace{[a \to a^2b; b \to a^3b^2]}_{bloque\ 2}$$

corresponde a una gramática matricial, en la cual cada bloque tiene producciones independientes del contexto, en ella

- $D_1(a) = ab$
- $D_1(b) = ab^2$
- $D_2(a) = a^2b$
- $D_2(b) = a^3b^2$

Definición 16. *Sean* g *y* h *gramáticas tales que* $D_g(D_h(a)) = a$*, entonces*

- g *es inversa a izquierda de* h*, para* a*.*
- h *es inversa a derecha de* g*, para* a*.*

A continuación se escribe la definición anterior en el contexto de una gramática matricial.

Definición 17. *Sea* $G = \{g_1, g_2, \ \ldots \ , g_n\}$ *una gramática matricial. Si* $D_i(D_j(a)) = a$ *se dice que:*

- g_i *es inversa a izquierda de* g_j*, para* a*.*
- g_j *es inversa a derecha de* g_i*, para* a*.*

Cabe destacar que si g_i es inversa a izquierda de g_j, para a, no necesariamente g_j es inversa a izquierda de g_i.

Ejemplo 8. *Sea* $G = \{[a \to a; b \to 1 - b]\ ,\ [a \to ab; b \to b]\}$.

g_1 *es inversa de* g_2*, para* a*, ya que*

$$\begin{aligned} D_1(D_2(a)) &= D_1(ab) \\ &= D_1(a)b + aD_1(b) \\ &= [a]b + a[1 - b] \\ &= a. \end{aligned}$$

Luego g_1 *es inversa a izquierda de* g_2*, para* a*. Sin embargo*

$$\begin{aligned} D_2(D_1(a)) &= D_2(a) \\ &= ab. \end{aligned}$$

por lo tanto, g_2 *no es inversa a izquierda de* g_1*, para* a*.*

Además, la inversa a izquierda de una función no es única.

Ejemplo 9. *Sean* $h = \{a \to a^2; b \to 1 - ab\}$ *y* $g = \{a \to ab; b \to b\}$.

h *es inversa a izquierda de* g*, para* a*, ya que*

$$\begin{aligned} D_h(D_g(a)) &= D_h(ab) \\ &= D_h(a)b + aD_h(b) \\ &= [a^2]b + a[1 - ab] \\ &= a \end{aligned}$$

Pero $l = \{a \to a; b \to 1 - b\}$ *también es inversa a izquierda de* g*, para* a*.*

Definición 18. *Considerando los bloques de producciones*
$g_i = \{a_1 \to w_{i1}\ ;\ a_2 \to w_{i2};\ \ldots\ ; a_m \to w_{im}\}\ \ ,\ g_j = \{a_1 \to w_{j1}\ ;\ a_2 \to w_{j2};\ \ldots\ ; a_m \to w_{jm}\}$
se definen:

- $g_i + g_j = \{a_1 \to w_{i1} + w_{j1}\ ;\ a_2 \to w_{i2} + w_{j2};\ \ldots\ ; a_m \to w_{im} + w_{jm}\}$.
- $g_i \cdot g_j = \{a_1 \to w_{i1} + w_{j1}\ ;\ a_2 \to w_{i2} + w_{j2};\ \ldots\ ; a_m \to w_{im} + w_{jm}\}$.
- $\lambda g_i = \{a_1 \to \lambda w_{i1}\ ;\ a_2 \to \lambda w_{i2};\ \ldots\ ; a_m \to \lambda w_{im}\}$.

Ejemplo 10. *Sean* $g_1 = \{a \to ab; b \to b\}$ *y* $g_2 = \{a \to ab; b \to a - b\}$ *entonces:*

$$\begin{aligned} g_1 + g_2 &= \{a \to 2ab; b \to a\}. \\ g_1 \cdot g_2 &= \{a \to 2ab; b \to a\}. \\ 5g_1 &= \{a \to 5ab; b \to 5b\}. \end{aligned}$$

Más aún, $5g_1 + 3g_2 = \{a \to 8ab; b \to 3a + 2b\}$.

La siguiente proposición muestra el comportamiento de las inversas a izquierda respecto a la operación $+$.

Proposición 4.0.1. *Si g_i, g_j son inversas a izquierda de g_k, para a, entonces $g = \dfrac{g_i + g_j}{2}$ es inversa a izquierda de g_k.*

Demostración. Se sabe que $D_i(D_k(a)) = D_j(D_k(a)) = a$, ya que g_i, g_j son inversas a izquierda de g_k, para a, luego

$$\begin{aligned} D_i(D_k(a)) + D_j(D_k(a)) &= 2a \\ \frac{D_i(D_k(a)) + D_j(D_k(a))}{2} &= a. \end{aligned}$$

Sea $g = \dfrac{g_i + g_j}{2}$, luego sobre g se tiene que $D(x) = \dfrac{D_i(x) + D_j(x)}{2}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} D(D_k(a)) &= \frac{D_i(D_k(a)) + D_j(D_k(a))}{2} \\ &= a. \end{aligned}$$

Como $D(D_k(a)) = a$, entonces g es inversa a izquierda de g_k para a. □

Ejemplo 11. *Sea $g = \{a \to ab\ ;\ b \to b\}$.*

Se observa que $g_1 = \{a \to a\ ;\ b \to 1 - b\}$, $g_2 = \{a \to a^2\ ;\ b \to 1 - ab\}$ son inversas a izquierda de g; se define g_3 de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} g_3 &= \frac{g_1 + g_2}{2} \\ &= \left\{ a \to \frac{[a] + [a^2]}{2}\ ;\ b \to \frac{[1 - b] + [1 - ab]}{2} \right\}. \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} D_3(D(a)) &= D_3(ab) \\ &= D_3(a)b + aD_3(b) \\ &= \left[\frac{a + a^2}{2}\right] b + \left[\frac{-b - ab + 2}{2}\right] a \\ &= \frac{ab + a^2 b}{2} + \frac{-ba - a^2 b + 2a}{2} \\ &= \frac{2a}{2} \\ &= a. \end{aligned}$$

Por lo tanto, g_3 es inversa a izquierda de g.

Siguiendo la proposición 4.0.1, se puede considerar un resultado análogo con producto en lugar de suma; se observa que si g_i, g_j son inversas a izquierda de g_k, para a, entonces $\dfrac{D_i(D_k(a)) \cdot D_j(D_k(a))}{a} = a$, lo cual es inmediato debido a que $D_i(D_k(a)) = D_j(D_k(a)) = a$. Sin embargo, pese a que la afirmación anterior es cierta, no se puede concluir que la gramática g obtenida al tomar el cociente entre los productos de las producciones de g_i y g_j con a, generen una inversa a izquierda para a.

Ejemplo 12. *Sea* $g = \{a \to ab\ ;\ b \to b\}$.

Se observa que $g_1 = \{a \to a\ ;\ b \to 1 - b\}$, $g_2 = \{a \to a^2\ ;\ b \to 1 - ab\}$ *son inversas a izquierda de* g. *Se define* $g_3 = \dfrac{g_1 \cdot g_2}{a}$ *de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} g_3 &= \left\{a \to \frac{a[a^2]}{a}\ ;\ b \to \frac{[1-b][1-ab]}{a}\right\} \\ &= \left\{a \to a^2\ ;\ b \to \frac{1 - ab - b + ab^2}{a}\right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} D_3(D(a)) &= D_3(ab) \\ &= D_3(a)b + aD_3(b) \\ &= [a^2]b + a\left[\frac{1 - ab - b + ab^2}{a}\right] \\ &= a^2b + 1 - ab - b + ab^2 \\ &= a^2b + ab^2 - ab - b + 1. \end{aligned}$$

Luego g_3 *no es inversa a izquierda de* g.

4.1. Números factorial mediante gramáticas matriciales

En esta sección se procede de manera similar a lo presentado en los capítulos 2 y 3, con el fin de mostrar que las gramáticas matriciales pueden ser empleadas para generar objetos combinatorios, en este caso números factorial y doble factorial.

Definición 19. *Dadas* $G_{i_1}, \ldots G_{i_n}$ *gramáticas. Se define*

1. $D_{i_1 \ldots i_n}(x) = D_{i_1}(D_{i_2}(\ldots(D_{i_n}(x))\ldots))$.

2. $D^m_{i_1 \ldots i_n}(x) = D_{i_1}(D_{i_2}(\ldots(D_{i_n}(D^{m-1}_{i_1 \ldots D_{in}}(x)))\ldots))$.

El siguiente resultado muestra una conexión entre gramáticas matriciales y números factorial.

Teorema 4.1.1. *Sea* $G = \{[a \to a; b \to b], [a \to ab; b \to b^2]$, *entonces* $D^n_{21}(a) = n!^2 ab^n$.

Demostración. Como $D_2(D_1(a)) = D_2(a) = ab$, el resultado es cierto para $n = 1$. Suponiendo que $D_{21}^n(a) = n!^2ab^n$, se calcula $D_{21}^{n+1}(a)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
D_{21}^{n+1}(a) &= D_{21}(D_{21}^n(a)) \\
&= D_2(D_1(n!^2ab^n)) \\
&= n!^2 D_2(D_1(a)b^n + aD_1(b^n))) \\
&= n!^2 D_2(ab^n + nab^{n-1}D_1(b))) \\
&= n!^2 D_2(ab^n + nab^n) \\
&= n!^2[n+1]D_2(ab^n) \\
&= n!^2[n+1][D_2(a)b^n + aD_2(b^n)] \\
&= n!^2[n+1][[ab]b^n + nab^{n-1}[b^2]] \\
&= n!^2[n+1][ab^{n+1} + nab^{n+1}] \\
&= n!^2[n+1]^2ab^{n+1}.
\end{aligned}$$

Así $D_{21}^n(a) = n!^2ab^n$. □

Procediendo de manera similar, con la gramática $G = \{[a \to a; b \to b], [a \to ab; b \to b^2]$, se demuestra que $D_{21}(b) = n!^2b^{n+1}$.

Teorema 4.1.2. *Sea* $G = \{[a \to a; b \to b], [a \to ab; b \to b^2]$, *entonces* $D_{12}^n(b) = [n{+}1]!n!b^{n+1}$.

Demostración. Como $D_{12}(b) = D_1(D_2(b)) = D_1(b^2) = 2bD_1(b) = 2b^2$, el resultado es cierto para $n = 1$. Suponiendo que $D_{12}^n(b) = [n{+}1]!n!b^{n+1}$ se calcula $D_{12}^{n+1}(b)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
D_{12}^{n+1}(b) &= D_{12}([n+1]!n!b^{n+1}) \\
&= D_1(D_2([n+1]!n!b^{n+1})) \\
&= D_1([n+1]!n!(n+1)b^n D_2(b)) \\
&= D_1([n+1]![n+1]!b^{n+2}) \\
&= [n+1]![n+1]!(n+2)b^{n+1}D_1(b) \\
&= [n+2]![n+1]!b^{n+2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $D_{12}^n(b) = [n+1]!n!b^{n+1}$. □

Del mismo modo se demuestra que $D_{12}^n(a) = [n+1]!n!ab^n$. El siguiente resultado permite, mediante la gramática $G = \{\{a \to a^2b\ ;\ b \to ab^2\}\ ;\ \{a \to a\ ;\ b \to b\}\}$, relacionar números doble factorial y gramáticas matriciales.

Teorema 4.1.3. *Sea* G *la gramática matricial* $G = \{\{a \to a^2b\ ;\ b \to ab^2\}\ ;\ \{a \to a\ ;\ b \to b\}\}$, *entonces* $D_{21}^n(a) = (2n+1)!!(2n-1)!!a^{n+1}b^n$.

Demostración. La gramática G se compone de dos gramáticas independientes del contexto $g_1 = \{a \to a^2b\ ;\ b \to ab^2\}, g_2 = \{a \to a\ ;\ b \to b\}$. Por lo tanto $D_1(a) = a^2b$, mientras que $D_2(D_1(a))$ es dada por

$$\begin{aligned}
D_2(D_1(a)) &= D_2(a^2b) \\
&= D_2(a^2)b + a^2D_2(b) \\
&= 2aD_2(a)b + a^2D_2(b) \\
&= 2a[a]b + a^2[b] \\
&= 3a^2b.
\end{aligned}$$

Luego, $D_{21}(a) = (D_2D_1)(a) = 3!!1!!a^2b^3$. Suponiendo que $D_{21}^n(a) = (2n+1)!!(2n-1)!!a^{n+1}b^n$, para $n \geq 1$, se calcula $D_{21}^{n+1}(a)$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
D_{21}^{n+1}(a) &= D_2(D_1([D_{21}]^n(a)) \\
&= D_2(D_1((2n+1)!!(2n-1)!!a^{n+1}b^n)).
\end{aligned}$$

Se observa que

$$\begin{aligned}
D_1((2n+1)!!(2n-1)!!a^{n+1}b^n) &= (2n+1)!!(2n-1)!![D_1(a^{n+1})b^n + aD_1(b^n)] \\
&= (2n+1)!!(2n-1)!![(n+1)a^nD_1(a)b^n + na^{n+1}b^{n-1}D_1(b)] \\
&= (2n+1)!!(2n-1)!![(n+1)a^n[a^2b]b^n + na^{n+1}b^{n-1}[ab^2]] \\
&= (2n+1)!!(2n-1)!![(n+1)a^{n+2}b^{n+1} + na^{n+2}b^{n+1}] \\
&= (2n+1)!!(2n-1)!![(2n+1)a^{n+2}b^{n+1} + na^{n+2}b^{n+1}] \\
&= (2n+1)!!(2n-1)!![(2n+1)a^{n+2}b^{n+1}] \\
&= (2n+1)!!(2n+1)!!a^{n+2}b^{n+1}.
\end{aligned}$$

De este modo, $D_2(D_1(a))$ es dada por:

$$\begin{aligned}
D_2(D_1(a)) &= D_2((2n+1)!!(2n+1)!!a^{n+2}b^{n+1} + na^{n+2}b^{n+1}) \\
&= (2n+1)!!(2n+1)!!D(a^{n+2}b^{n+1}) \\
&= (2n+1)!!(2n+1)!![D(a^{n+2})b^{n+1} + a^{n+2}D(b^{n+1})] \\
&= (2n+1)!!(2n+1)!![(n+2)a^{n+1}b^{n+1}D(a) + (n+1)a^{n+2}b^nD(b)] \\
&= (2n+1)!!(2n+1)!![(n+2)a^{n+1}b^{n+1}[a] + (n+1)a^{n+2}b^n[b]] \\
&= (2n+1)!!(2n+1)!![(n+2)a^{n+2}b^{n+1} + (n+1)a^{n+2}b^{n+1}] \\
&= (2n+1)!!(2n+1)!![(2n+3)a^{n+2}b^{n+1}] \\
&= (2n+3)!!(2n+1)!!a^{n+2}b^{n+1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $D_{21}^{n+1}(a) = (2[n+1]+1)!!(2[n+1]-1)!!a^{[n+1]+1}b^{[n+1]}$. □

Con el fin de mostrar el potencial que tiene el aplicar el operador derivada formal, definido con respecto a gramáticas matriciales, es necesario generar una gramática matricial que permita obtener familias de números conocidas, pero que aún no hayan sido obtenidas mediante gramáticas independientes del contexto. Para tal fin se consideran la sucesión de Fibonacci y la sucesión de Lucas.

4.2. $G = \{[a \to a+b\ ;\ b \to b]\ ;\ [a \to a\ ;\ b \to a-b]\}$

En esta sección se considera la gramática $G = [\{a \to a+b\ ;\ b \to b\}\ ;\ \{a \to a\ ;\ b \to a-b\}]$ con la cual, como se muestra a continuación, se obtienen los números de Fibonacci y de

Lucas; estas familias de números han sido objeto de estudio debido a las diversas maneras en las cuales pueden ser generados, recientemente ha tomado interés la generación de dichos números mediante matrices [29], determinantes de sucesiones de matrices [15], permanentes de matrices [67], coeficientes binomiales [39], entre otros.

4.2.1. Números de Fibonacci

Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci debido a la expresión en latín filius Bonacci que significa hijo de Bonacci, dio a conocer la sucesión que actualmente lleva su nombre mediante un problema de cría de conejos, el cual fue propuesto en su libro liber abaci [51]. Esta sucesión se define de manera recurrente de la siguiente forma:

Definición 20. *Se definen los números de Fibonacci, como los números tales que:*

- $f_0 = 0, \ f_1 = 1.$
- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$

Las siguientes proposiciones muestran una conexión entre los números de Fibonacci y la gramática matricial $G = \{[a \to a+b \ ; \ b \to b] \ ; \ [a \to a \ ; \ b \to a-b]\}$.

Proposición 4.2.1. *Sea* $G = \{[a \to a+b \ ; \ b \to b] \ ; \ [a \to a \ ; \ b \to a-b]\}$, *entonces para todo* $n \geq 1$ $D_{12}^n(b) = f_n a + f_{n-1} b$.

Demostración. Claramente $D_2(b) = a - b$, así $D_1(D_2(b))$ es dada por

$$\begin{aligned} D_1(D_2(b))) &= D_1(a-b) \\ &= D_1(a) - D_1(b) \\ &= [a+b] - [b]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $D_1(D_2(b)) = a = f_1 a + f_0 b$, comprobando así la proposición para $n = 1$. Suponiendo que $D_{12}^n(b) = f_n a + f_{n-1} b$, se calcula $D_{12}^{n+1}(b)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} D_{12}^{n+1}(b) &= D_1(D_2(f_n a + f_{n-1} b)) \\ &= D_1(f_n D_2(a) + f_{n-1} D_2(b)) \\ &= D_1(f_n[a] + f_{n-1}[a-b]) \\ &= D_1((f_n + f_{n-1})[a] - f_{n-1}[b]) \\ &= (f_n + f_{n-1}) D_1(a) - f_{n-1} D_1(b) \\ &= (f_n + f_{n-1})[a+b] - f_{n-1}[b] \\ &= (f_n + f_{n-1})[a] + f_n[b] \\ &= f_{n+1}[a] + f_n[b]. \end{aligned}$$

Con lo cual, $D_{12}^n(b) = f_n a + f_{n-1} b$ para todo $n \geq 1$. $\square$

Proposición 4.2.2. *Sea* $G = \{[a \to a+b\ ;\ b \to b]\ ;\ [a \to a\ ;\ b \to a-b]\}$, *entonces para todo* $n \geq 0$ $D_{21}^{n}(a) = f_{n+2}a - f_n b$.

Demostración. Como $D_{21}^{0}(a) = a = f_2 a - f_0 b$, la proposición es válida para $n = 0$. Suponiendo que $D_{21}^{n}(a) = f_{n+2}a - f_n b$, se calcula $D_{21}^{n+1}(a)$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
D_{21}^{n+1}(a) &= D_2(D_1(f_{n+2}a - f_n b)) \\
&= D_2(f_{n+2}D_1(a) - f_n D_1(b)) \\
&= D_2(f_{n+2}[a+b] - f_n[b]) \\
&= D_2(f_{n+2}a + [f_{n+2} - f_n]b) \\
&= D_2(f_{n+2}a + f_{n+1}b) \\
&= f_{n+2}D_2(a) + f_{n+1}D_2(b) \\
&= f_{n+2}[a] + f_{n+1}[a-b] \\
&= [f_{n+2} + f_{n+1}]a - f_{n+1}b \\
&= f_{n+3}a - f_{n+1}b.
\end{aligned}$$

Concluyendo así que $D_{21}^{n}(a) = f_{n+2}a - f_n b$, para todo $n \geq 0$. □

Corolario 4.2.3. *Sea* $G = \{[a \to a+b\ ;\ b \to b]\ ;\ [a \to a\ ;\ b \to a-b]\}$, *entonces para todo* $n \geq 1$ $D_{21}^{n+2}(b) = f_{n+2}a - f_n b$.

Demostración. Como $D_{21}(b) = D_2(D_1(b)) = D_2(b) = a - b$, entonces

$$\begin{aligned}
D_{21}^{2}(b) &= D_2(D_1(a-b)) \\
&= D_2(D_1(a) - D_1(b)) \\
&= D_2([a+b] - b) \\
&= D_2(a) \\
&= a.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $D_{21}^{2}(b) = a$, luego $D_{21}^{n+2}(b) = D_{21}^{n}(D_{21}^{2}(b)) = D_{21}^{n}(a)$. Como $D_{21}^{n}(a) = f_{n+2}a - f_n b$, por la proposición 4.2.2, entonces $D_{21}^{n+2}(b) = f_{n+2}a - f_n b$. □

Proposición 4.2.4. *Sea* $G = \{[a \to a+b\ ;\ b \to b]\ ;\ [a \to a\ ;\ b \to a-b]\}$, *entonces para todo* $n \geq 0$ $D_{12}^{n}(a+b) = f_{n+2}a + f_{n+1}b$.

Demostración. Como $D_{12}^{0}(a+b) = a+b = f_2 a + f_1 b$, la proposición es válida para $n = 0$. Suponiendo que $D_{12}^{n}(a+b) = f_{n+2}a + f_{n+1}b$, se calcula $D_{12}^{n+1}(a+b)$ de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
D_{12}^{n+1}(a+b) &= D_1(D_2(D^n(a+b)))\\
&= D_1(D_2(f_{n+2}a + f_{n+1}b))\\
&= D_1(f_{n+2}D_2(a) + f_{n+1}D_2(b))\\
&= D_1(f_{n+2}[a] + f_{n+1}[a-b])\\
&= D_1([f_{n+2} + f_{n+1}][a] - f_{n+1}[b])\\
&= D_1(f_{n+3}[a] - f_{n+1}[b])\\
&= f_{n+3}D_1(a) - f_{n+1}D_1(b)\\
&= f_{n+3}[a+b] - f_{n+1}[b]\\
&= L_{n+3}[a] + [f_{n+3} - f_{n+1}][b]\\
&= f_{n+3}a + f_{n+2}b.
\end{aligned}
$$

Concluyendo así que $D_{12}^n(a+b) = f_{n+2}a + f_{n+1}b$, para todo $n \geq 0$. □

Corolario 4.2.5. *Sea $G = \{[a \to a+b\ ;\ b \to b]\ ;\ [a \to a\ ;\ b \to a-b]\}$, entonces para todo $n \geq 0$ $D_{12}^n(a) = f_{n+1}a + f_n b$.*

Demostración. Como $D_{12}^0(a) = f_1 a + f_0 b$, la proposición es válida para $n = 0$. Si $n \geq 1$, entonces

$$
\begin{aligned}
D_{12}(a) &= D_1(D_2(a))\\
&= D_1(a)\\
&= a+b.
\end{aligned}
$$

Luego, $D_{12}^n(a) = D_{12}^{n-1}(a+b)$. Dado que $D_{12}^{n-1}(a+b) = f_{n+1}a + f_n b$, por la proposición 4.2.4, se tiene que $D_{12}^n(a) = f_{n+1}a + f_n b$. □

Dado que la gramática matricial $G = \{[a \to a+b\ ;\ b \to b]\ ;\ [a \to a\ ;\ b \to a-b]\}$ genera a los números de Fibonacci, y teniendo en cuenta que los números de Fibonacci y de Lucas satisfacen la misma recurrencia, con una modificación en los valores iniciales, es de esperar que la gramática mencionada permita generar los números de Lucas.

4.2.2. Números de Lucas

Similar a los números de Fibonacci se definen los números de Lucas, cuyo nombre se da en honor a Edouard Lucas [45].

Definición 21. *Se definen los números de Lucas, como los números tales que:*

- $L_0 = 2,\ L_1 = 1.$
- $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}.$

Las siguientes proposiciones muestran la relación existente entre los números de Lucas y gramáticas matriciales.

Proposición 4.2.6. *Sea* $G = \{[a \to a+b \ ; \ b \to b] \ ; \ [a \to a \ ; \ b \to a-b]\}$*, entonces para todo* $n \geq 0$ $D_{12}^{n}(a+2b) = L_{n+1}a + L_n b$.

Demostración. Como $D_{12}^{0}(a+2b) = a+2b = L_1 a + L_0 b$, la proposición es válida para $n = 0$. Suponiendo que $D_{12}^{n}(a+2b) = L_{n+1}a + L_n b$, entonces se calcula $D_{12}^{n+1}(a+2b)$ de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
D_{12}^{n+1}(a+2b) &= D_1(D_2(D^n(a+2b))) \\
&= D_1(D_2(L_{n+1}a + L_n b)) \\
&= D_1(L_{n+1}D_2(a) + L_n D_2(b)) \\
&= D_1(L_{n+1}[a] + L_n[a-b]) \\
&= D_1([L_{n+1} + L_n][a] - L_n[b]) \\
&= D_1(L_{n+2}[a] - L_n[b]) \\
&= L_{n+2}D_1(a) - L_n D_1(b) \\
&= L_{n+2}[a+b] - L_n[b] \\
&= L_{n+2}[a] + [L_{n+2} - L_n][b] \\
&= L_{n+2}a + L_{n+1}b.
\end{aligned}
$$

Concluyendo así que $D_{12}^{n}(a+2b) = L_{n+1}a + L_n b$, para todo $n \geq 0$. □

Proposición 4.2.7. *Sea* $G = \{[a \to a+b \ ; \ b \to b] \ ; \ [a \to a \ ; \ b \to a-b]\}$*, entonces para todo* $n \geq 1$ $D_{21}^{n}(a+b) = L_{n+1}a - L_{n-1}b$.

Demostración. Claramente , $g_1 = \{a \to a+b \ ; \ b \to b\}$ y $g_2 = \{a \to a \ ; \ b \to a-b\}$, entonces

$$
\begin{aligned}
D_1(a+b) &= D_1(a) + D_1(b) \\
&= [a+b] + [b].
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $D_1(a+b) = a+2b$. A continuación se calcula $D_{21}(a+b) = D_2(D_1(a+b))$ de la siguiente forma.

$$
\begin{aligned}
D_2(D_1(a+b))) &= D_2(a+2b) \\
&= D_2(a) + 2D_2(b) \\
&= [a] + 2[a-b] \\
&= 3a - 2b.
\end{aligned}
$$

Como $D_1(D_2(a+b))) = 3a-2b = L_2 a - L_0 b$, la proposición es válida para $n = 1$. Suponiendo que $D_{21}^n(a+b) = L_{n+1}a - L_{n-1}b$, se procede a calcular $D_{21}^{n+1}(a+b)$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
D_{21}^{n+1}(a+b) &= D_2(D_1(D^n(a+b))) \\
&= D_2(D_1(L_{n+1}a - L_{n-1}b)) \\
&= D_2(L_{n+1}D_1(a) - L_{n-1}D_1(b)) \\
&= D_2(L_{n+1}[a+b] - L_{n-1}[b]) \\
&= D_2(L_{n+1}[a] + [L_{n+1} - L_{n-1}][b]) \\
&= D_2(L_{n+1}a + L_n b) \\
&= L_{n+1}D_2(a) + L_n D_2(b) \\
&= L_{n+1}[a] + L_n[a-b] \\
&= [L_{n+1} + L_n]a - L_n b \\
&= L_{n+2}a - L_n b.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $D_{21}^n(a+b) = L_{n+1}a - L_{n-1}b$. □

4.2.3. Relación entre números de Lucas y de Fibonacci

Las siguientes proposiciones corresponden a algunos resultados conocidos de los números de Fibonacci y de Lucas, no obstante se proponen las siguientes demostraciones alternativas usando gramáticas matriciales.

Proposición 4.2.8. $L_{n+1} = f_{n+2} + f_n$.

Demostración. Como D es un operador lineal, $D_{21}^{n+2}(a+b) = D_{21}^{n+2}(a) + D_{21}^{n+2}(b)$. Además, dado que $D_{21}^{n+2}(a) = f_{n+4}a - f_{n+2}b$, por la proposición 4.2.2, $D_{21}^{n+2}(b) = f_{n+2}a - f_n b$, por el corolario 4.2.3, y $D_{21}^{n+2}(a+b) = L_{n+3}a - L_{n+1}b$, por la proposición 4.2.7, se tiene que

$$\begin{aligned}
D_{21}^{n+2}(a+b) &= D_{21}^{n+2}(a) + D_{21}^{n+2}(b) \\
[L_{n+3}a - L_{n+1}b] &= [f_{n+4}a - f_{n+2}b] + [f_{n+2}a - f_n b] \\
L_{n+3}a - L_{n+1}b &= [f_{n+4} + f_{n+2}]a - [f_{n+2} + f_n]b.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $L_{n+1} = f_{n+2} + f_n$. □

Una demostración análoga de la proposición anterior se obtiene al considerar las proposiciones 4.2.1, 4.2.4 y 4.2.6.

Proposición 4.2.9. $L_{n+1} = f_{n+1} + 2f_n$.

Demostración. Como D es un operador lineal, $D_{12}^n(a+2b) = D_{12}^n(a) + 2D_{12}^n(b)$. Además, dado que $D_{12}^n(a) = f_{n+1}a + f_n b$, por el corolario 4.2.5, $D_{12}^n(b) = f_n a + f_{n-1}b$, por la proposición 4.2.1, y $D_{12}^n(a+2b) = L_{n+1}a + L_n b$, por la proposición 4.2.6.

$$\begin{aligned}
D_{12}^n(a+2b) &= D_{12}^n(a) + 2D_{12}^n(b) \\
[L_{n+1}a + L_n b] &= [f_{n+1}a + f_n b] + 2[f_n a + f_{n-1}b] \\
L_{n+1}a + L_n b &= [f_{n+1} + 2f_n]a + [f_n + 2f_{n-1}]b.
\end{aligned}$$

Concluyendo así que $L_{n+1} = f_{n+1} + 2f_n$. □

A. Gramáticas

Definición 22. *Una gramática G, según [19], es una cuádrupla (V, Σ, S, P), formada por:*

1. *Un alfabeto V, cuyos elementos se denominan variables o símbolos no terminales.*
2. *Un alfabeto Σ cuyos elementos se denominan símbolos terminales, tal que $V \cap \Sigma = \varnothing$.*
3. *Una variable $S \in V$, denominada símbolo inicial de la gramática.*
4. *Un conjunto finito $P \subseteq (V \cup \Sigma)^* \times (V \cup \Sigma)$, cuyos elementos se denominan producciones.*

Las producciones de las gramáticas pueden ser de distintos tipos, lo cual permite clasificarlas en:

Gramáticas tipo 0 *No tienen restricciones, razón por la cual se suelen denominar* gramáticas no restringidas

Gramáticas tipo 1 *Las producciones son de la forma $u_1 A u_2 \to v_1 w v_2$, donde A es una variable y $w \neq \lambda$. Estas gramáticas suelen denominarse* sensibles al contexto.

Gramáticas tipo 2 *Las producciones son de la forma $A \to w$, con A variable. Estas gramáticas suelen denominarse **independientes del contexto**.*

Gramáticas tipo 3 *Las producciones son de la forma $A \to a$ o $A \to aB$, con A y B variables, y a un símbolo terminal. Estas gramáticas suelen denominarse **regulares**.*

Un lenguaje se dice de tipo i si es generado por una gramática del tipo i [19].

A.1. Gramáticas independientes del contexto

Sea G gramática tipo 2, o independiente del contexto, entonces sus producciones son de la forma $A \to w$, con A variable. El nombre dado a estas gramáticas se debe a que del lado izquierdo de la producción siempre hay una única variable (símbolo no terminal), las variables pueden sustituirse cada vez que la variable aparezca en una expresión independiente del resto de la expresión, conocido como contexto.

Ejemplo 13. *El lenguaje* $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ *es independiente del contexto.*

Sea G *la gramática con producciones*

$$\begin{aligned} S &\to ASB \mid AB \\ A &\to a \\ B &\to b \end{aligned}$$

Se observa que $L(G) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

Dado el ejemplo anterior, es normal pensar que el lenguaje $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ debe generarse de manera similar; sin embargo, el lenguaje $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ no es generado por ninguna gramática independiente del contexto, como consecuencia del lema de bombeo para gramáticas independientes del contexto, sin embargo su complemento $\overline{L}$ sí puede generarse con este tipo de gramáticas [79].

A.2. Gramáticas matriciales

Las gramáticas matriciales, presentadas en [1], permiten generalizar las gramáticas presentadas en la jerarquía de Chomsky, al considerar bloques de producciones en lugar de producciones simples. Formalmente se definen de la siguiente forma:

Definición 23 (Gramática matricial [49]). *Una gramática matricial* G *es una cuadrupla* $G = (V_N, V_T, M, S)$*, tal que:*

- V_N *es un conjunto de variables no terminales*
- V_T *es un conjunto de variables terminales*
- $S \in V_N$ *es la variable inicial*
- M *es un conjunto de bloques de producciones de la forma* $[A_1 \to x_1, \ldots A_n \to x_n]$ *que actúan sobre* $V_N \cup V_T$

Los bloques de producciones que componen a M *suelen denominarse matrices.*

Dado que las gramáticas matriciales fueron introducidas en [1] como una generalización de las gramáticas independientes del contexto, estudiando el lenguaje $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$, es usual que estas sean definidas de tal forma que coinciden con las gramáticas matriciales tipo 2, o gramáticas matriciales independientes del contexto [74, pág 30]. No obstante, el tipo de producciones empleadas caracterizan a la gramática, como lo muestra la siguiente definición

Definición 24. *Sea* $G = (V_N, V_T, M, S)$ *una gramática matricial, donde* M *se compone de bloques de la forma* $m = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$*. Se dice que la gramática matricial* G *es de tipo* i *si las producciones* r_k*, para cada* k*, son producciones que generan gramáticas del tipo* i*, según la jerarquía de Chomsky.*

Esta definición puede ser reescrita considerando el tipo de producción que se aplica en los bloques de producciones que componen a M, como se observa en [56]. Cabe destacar que en una derivación todas las reglas que componen un bloque de producciones deben ser realizadas, en el orden en que son descritas.

Ejemplo 14. *Dada la gramática matricial*

$$\begin{aligned} V_N &= \{S, A, B, C\} \\ V_F &= \{a, b, c\} \\ M &= \{[S \to ABC], [A \to aA, B \to bB, C \to c], [A \to a, B \to b, C \to c]\} \end{aligned}$$

Se verifica que $S \Rightarrow^* aabbcc$, ya que:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow ABC && \textit{Producción inicial} \\ &\Rightarrow aAbBcC && \textit{Producciones de la segunda matriz} \\ &\Rightarrow aabbcc && \textit{Producciones de la tercera matriz} \end{aligned}$$

Se observa que la gramática matricial dada no genera la cadena aabbc ya que implicaría que en el segundo paso de la produccíon anterior se combinaran, en el mismo paso, las producciones de la matriz 2 y la matriz 3.

Si se aplicara sucesivamente k veces las producciones de la segunda matriz se obtendría $S \Rightarrow^* a^k A b^k B c^k C$; si se aplica la tercera matriz las variables se convierten en terminales, obteniendo así que $S \Rightarrow^* a^{k+1} b^{k+1} c^{k+1}$, donde $k \geq 0$ ya que pudiera no aplicarse la segunda matriz. Por lo anterior, se concluye que $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.

La gramática anterior no es la única que genera dicho lenguaje, por ejemplo la siguiente gramática matricial

$$\begin{aligned} V_N &= \{S, A, B, C\} \\ V_F &= \{a, b, c\} \\ M &= \{[S \to abc], [A \to aAbBcC], [A \to aA, B \to bB, C \to cC], [A \to a, B \to b, C \to c]\} \end{aligned}$$

también genera el lenguaje $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$, como se muestra en [1]. En [54, pág 351] se propone una gramática matricial para el lenguaje $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$, en la cual es necesaria el uso de λ

$$\begin{aligned} V_N &= \{S, A, B\} \\ V_F &= \{a, b, c\} \\ M &= \{[S \to AB], [A \to aA, Y \to bBc], [A \to \lambda, B \to \lambda]\} \end{aligned}$$

B. Objetos combinatorios

En esta parte del apéndice se da una breve presentación de algunas de las familias de números generados mediante gramáticas, y se estudia en detalle la recurrencia que permite generarlas. Adicionalmente, se muestra cómo escribir un código en Matlab con el cual se puedan generar las familias de números y polinomios que se estudian en este trabajo.

B.1. Números factoriales

Para n entero positivo se define el factorial de n de manera recursiva como:

$$\begin{aligned} (n+1)! &= (n+1)n! \\ (0)! &= 1 \end{aligned}$$

Se observa que $n!$, cuya notación fue introducida por Christian Kramp en 1808 como señal de asombro por el rápido crecimiento de estos números [41, pág 13], corresponde al producto desde 1 hasta n. Los números factoriales han sido de gran importancia en diversas áreas de la matemática, destacando principalmente por su utilidad para el conteo [14].

Los números factoriales pueden ser generalizados para n no entero, esta generalización es conocida como la función gamma, en la cual $n! = \Gamma(n+1)$.

B.1.1. Números doble factorial

Los números doble factorial, definidos en la sección 2.2.2, surgen en diversos problemas en combinatoria [16], [28], [36]; no obstante fueron empleados inicialmente para simplificar expresiones conocidas [69], como por ejemplo el producto de Wallis

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2n}{2n-1}\right)\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{([2n]!!)^2}{[2n-1]!![2n+1]!!} = \frac{\pi}{2}$$

La notación de doble factorial también permite reescribir de manera cómoda las integrales de Wallis. De esta forma, si n es par:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx &= \left[\frac{(1)(3)(5)\cdots(n)}{(2)(4)(6)\cdots(n)}\right]\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Si n es impar:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx &= \left[\frac{(1)(3)(5)\cdots(n)}{(2)(4)(6)\cdots(n)}\right] \\ &= \frac{(n-1)!!}{n!!}\end{aligned}$$

No obstante, una mayor contribución de esta notación se aprecia en las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \cos^m(x)dx &= \left[\frac{(n-1)!!(m-1)!!}{(m+n)!!}\right]\frac{\pi}{2} && \text{si } n \text{ es impar} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \cos^m(x)dx &= \left[\frac{(n-1)!!(m-1)!!}{(m+n)!!}\right] && \text{si } m, n \text{ son pares}\end{aligned}$$

En general, se aprecia cómo los números doble factorial permiten expresar fórmulas de una manera simplificada, y más fácil de recordar [69]. Los números doble factorial están estrechamente ligados a los números factorial; la siguiente proposición muestra cómo expresar números factorial en términos de doble factorial.

Proposición B.1.1. $n! = n!!(n-1)!!$.

Demostración. Dado que $n! = (n)(n-1)\cdots 1$, se desea separar dicho producto en dos términos de tal forma que uno involucre el producto de números pares y el otro el de números impares. Suponiendo n par

$$\begin{aligned}n! &= [(n)(n-2)\cdots(2)][(n-1)(n-3)\cdots(1)] \\ &= [n]!![n-1]!!\end{aligned}$$

Suponiendo que n es impar

$$\begin{aligned}n! &= [(n)(n-2)\cdots(1)][(n-1)(n-3)\cdots(2)] \\ &= [n]!![n-1]!!\end{aligned}$$

Por lo tanto $n! = n!!(n-1)!!$. □

La siguiente proposición muestra cómo expresar números doble factorial en términos de factorial.

Proposición B.1.2. $(2n)!! = 2^n n!$.

Demostración.

$$\begin{aligned}(2n)!! &= (2n)(2n-2)\cdots(2) \\ &= [2(n)][2(n-1)]\cdots(2[1]) \\ &= 2^n(n)(n-1)\cdots(1).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(2n)!! = 2^n n!$. □

B.1.2. Números multifactorial

Los números factorial permiten realizar el producto de los números hasta n, avanzando en pasos de 1; los números doble factorial permiten realizar el producto de los números hasta n, avanzando en pasos de 2. Siguiendo [72], se define el número multifactorial $n!_r$ como el producto hasta n avanzando en pasos de r, de la siguiente forma:

$$n!_r = \begin{cases} n & \text{si} \quad 0 < n \leq r \\ n(n-r)!_r & \text{si} \quad n > k \\ 1 & \text{si} \quad n = 1-r, \ldots, -1, 0 \end{cases}$$

En la sección 2.3, por simplicidad, los números multifactorial fueron presentados mediante la recurrencia

$$n!_r = n(n-r)!_r \ \text{ con } (1-r)!_r = \cdots = (-1)!_r = 0!_r = 1.$$

El siguiente resultado muestra la relación existente entre números multifactorial y números factorial.

Proposición B.1.3. $(rn)!_r = r^n n!$.

Demostración. Por definición $(rn)!_r$ es el producto de los primeros n números no nulos de la forma kr, luego

$$\begin{aligned} (rn)!_r &= (rn)(r[n-1]) \cdots (r[2])(r[1]) \\ &= r^n(n[n-1] \cdots [2][1]). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(rn)!_r = r^n n!$ □

El siguiente resultado es una generalización de la Proposición B.1.3.

Proposición B.1.4. $(rn)!_{kr} = r^n n!_k$.

Demostración. Por definición $(rn)!_{kr}$ es el producto de los primeros n números no nulos de la forma kr, luego

$$\begin{aligned} (rn)!_{kr} &= (rn)(r[n-k])(r[n-2k]) \cdots (r[1]!_{kr}) && \text{tomando factor común } r \\ &= r^n(n)([n-k])([n-2k]) \cdots ([1]!_k) && \text{como } n!_k = n[n-k][n-2k] \cdots [1]_k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(rn)!_{kr} = r^n n!_k$ □

Si $r = 2$ y $k = 1$ se obtiene la ecuación $(2n)!! = 2^n n!$, presentada como Proposición B.1.2.

La Proposición B.1.1 puede generalizarse como $n! = n!_r(n-1)!_r \cdots (n-(r-1))!_r$.

B.2. Números de Stirling

Los números de Stirling de primera clase $s(n,k)$ y de segunda clase $S(n,k)$, presentados por James Stirling en 1730, son los coeficientes de las expansiones de números factoriales en potencias y de las potencias en números factoriales, respectivamente [20, pág 277]. Es decir, dado $(x)_n = x(x-1)\cdot(x-n+1)$, con $(x)_0 = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} (x)_n &= \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k. \\ x^n &= \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k. \end{aligned}$$

A continuación se estudia la interpretación dada en combinatoria enumerativa a los números de Stirling de primera y segunda clase.

B.2.1. Stirling de primera clase

Los números de Stirling de primera clase, denotados $s(n,k)$, son de gran importancia en el área de la combinatoria enumerativa, ya que representan el número de permutaciones de n elementos diferentes que tienen k ciclos.

Proposición B.2.1. $s(n+1,k) = s(n,k-1) + ns(n,k)$.

Demostración. Sea $A = \{a_1,\ a_2,\dots,a_n\}$. Se considera el conjunto $A\cup\{a_{n+1}\}$, y se contará el número de permutaciones de $n+1$ elementos diferentes con k ciclos, los cuales se pueden construir a partir de los ciclos formados con permutaciones de A; esto nos lleva a dos casos:

1. a_{n+1} se considera por separado como un ciclo.

2. a_{n+1} se mezcla con los demás términos para formar ciclos.

Para el caso 1, dado que (a_{n+1}) por sí solo forma un ciclo, se tiene que el número de arreglos con k ciclos es $s(n,k-1)$. Para el caso 2, se tiene que el número de permutaciones de n elementos diferentes que tienen exactamente k ciclos es $s(n,k)$, entonces a_{n+1} puede ubicarse en n posibles espacios en cada uno de ellos, luego hay $ns(n,k)$ opciones.

Por lo tanto, se concluye que $s(n+1,k) = s(n,k-1) + ns(n,k)$. □

Ejemplo 15. *Calcular* $s(4,3)$.

Tomando $A = \{a,b,c,d\}$, *se observa que las siguientes permutaciones de* 4 *elementos son todas la que se pueden descomponer en* 3 *ciclos*

$$(a)(b)(cd)\ ,\ (a)(c)(bd)\ ,\ (a)(d)(bc)\ ,\ (b)(c)(ad)\ ,\ (b)(d)(ac)\ ,\ (c)(d)(ab)$$

Por lo tanto $s(4,3) = 6$.

Trivialmente se acepta que $s(0,0) = 1$ y $s(0,n) = 0$ para $n > 0$, además que $s(n,k) = 0$ para cada $k > n$. Se observa además que $s(n,n) = 1$, ya que la única opción sería $(a_1)(a_2)\dots(a_n)$. La siguiente tabla muestra los primeros valores $s(n,k)$, obtenidos mediante la recurrencia presentada en la proposición B.2.1.

n / k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	2	3	1					
4	0	6	11	6	1				
5	0	24	50	35	10	1			
6	0	120	274	225	85	15	1		
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1	
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1

Tabla B.1: Lista de números de Stirling de primera clase

Proposición B.2.2. *Para cada n: $s(n+1,1) = ns(n,1)$ y $s(n,n) = 1$.*

Demostración. Por la proposición B.2.1 se tiene que $s(n+1,k) = s(n,k-1) + ns(n,k)$. Dado que $s(1,1) = 1$, se supone que $s(n,1) = (n-1)!$; luego

$$\begin{aligned} s(n+1,1) &= s(n,0) + ns(n-1,1) \qquad \text{como } s(n,0) = 0 \text{ y } s(n-1,1) \\ s(n+1,1) &= n(n-1)! \\ s(n+1,1) &= n! \end{aligned}$$

Por lo tanto, $s(n+1,1) = n!$. Dado que $s(1,1) = 1$ se supone que $s(n,n) = 1$, luego

$$\begin{aligned} s(n+1,n+1) &= s(n,n) + ns(n-1,n+1) \qquad \text{como } s(n-1,n+1) = 0 \text{ y } s(n,n) = 1 \\ s(n+1,n+1) &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $s(n,n) = 1$ para cada n. □

B.2.2. Stirling de segunda clase

Los números de Stirling de segunda clase, denotados $S(n,k)$, son de gran importancia en el área de la combinatoria enumerativa, ya que el número $S(n,k)$ corresponde al número de particiones de un conjunto de n elementos en k clases. La relación existente entre los números de Stirling de segunda clase y otras familias de números se estudia en detalle en [12].

Ejemplo 16. *Calcular $S(3,2)$.*

Tomando $A = \{a,b,c,d\}$, se tiene que las particiones en dos clases disyuntas son:

$$(\{a,b\},\{c\}) \ , \ (\{a,c\},\{b\}) \ , \ (\{a\},\{b,c\})$$

Por lo tanto $S(3,2) = 3$.

Trivialmente se acepta que $S(0,0) = 1$ y $S(0,n) = 0$ para $n > 0$, además que $S(n,k) = 0$ para cada $k > n$. Se observa que: $S(3,3) = 1$, ya que la única opción posible será $(\{a\},\ \{b\},\ \{c\})$, además $S(3,1) = 1$ ya que la única opción posible será $(\{a,b,c\})$; por lo anterior se tiene que, en general, $S(n,1) = 1$ y $S(n,n) = 1$. La siguiente proposición muestra una fórmula recurrente para los números de Stirling de segunda clase.

Proposición B.2.3. $S(n+1,k) = S(n,k-1) + kS(n,k)$.

Demostración. Sea $A = \{a_1,\ a_2,\ldots,a_n\}$. Se considera el conjunto $A \cup \{a_{n+1}\}$ y se contarán las particiones de dicho conjunto, las cuales se pueden construir a partir de las particiones de A; esto nos lleva a dos casos:

1. a_{n+1} se ubica en una nueva parte, sin mezclarse con los demás elementos.

2. a_{n+1} se ubica en una parte existente, mezclándose con los demás. elementos

Teniendo en cuenta lo anterior, se procede al cálculo de $S(n+1,k)$. Para el caso 1, se supone que existen $k-1$ particiones diferentes, en las que ya están dispuestos los elementos $\{a_1,\ a_2,\ldots,a_n\}$, estas son exactamente $S(n,k-1)$ opciones; dado que a_{n+1} se ubica aislado se tiene que hay $S(n,k-1)$ opciones para hacerlo. Para el caso 2, se supone que los elementos $\{a_1,\ a_2,\ldots,a_n\}$ están dispuestos en k partes, estos son $S(n,k)$ opciones, por lo tanto hay k formas para ubicar a_{n+1}; concluyendo así que para el caso 2 hay $kS(n,k)$ opciones.

Por lo tanto, se concluye que $S(n+1,k) = S(n,k-1) + kS(n,k)$. □

El siguiente resultado muestra los valores $S(n,k)$, para $k = 1$ y $k = n$.

Proposición B.2.4. *Para cada $n > 0$: $S(n,1) = 1$ y $S(n,n) = 1$.*

Demostración. Por la proposición B.2.3 se tiene que $S(n+1,k) = S(n,k-1) + kS(n,k)$. Dado que $S(0,0) = 1$, se tiene que $S(1,1) = S(1,0) + 1S(1,1)$ así $S(1,1) = 1$. Suponiendo que $S(n,1) = 1$, para $n > 0$, entonces

$$\begin{aligned} S(n+1,1) &= S(n,0) + 1S(n,1) \qquad \text{Como } S(n,0) = 0 \text{ y } S(n,1) = 1 \\ S(n+1,1) &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $S(n,1) = 1$ para cada n. Dado que $S(0,0) = 1$, se supone que $S(n,n) = 1$, luego:

$$\begin{aligned} S(n+1,n+1) &= S(n,n) + [n+1]S(n,n+1) \qquad \text{como } S(n,n+1) = 0 \text{ y } S(n,n) = 1 \\ S(n+1,n+1) &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $S(n,n) = 1$ para cada n. □

Siguiendo la recurrencia para números de Stirling de segunda clase, demostrada en la proposición B.2.3, se construye la siguiente tabla con los primeros valores $S(n,k)$.

n / k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	1	3	1					
4	0	1	7	6	1				
5	0	1	15	25	10	1			
6	0	1	31	90	65	15	1		
7	0	1	63	301	350	140	21	1	
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Tabla B.2: Lista de números de Stirling de segunda clase

B.3. Números de Euler

Los números de Euler de primera clase pueden ser definidos de diversas formas, una de ellas es como lo coeficientes obtenidos al expresar la n-ésima potencia mediante suma de coeficientes binomiales [20, pág 514], es decir mediante la expresión

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{x+n-k}{n}$$

Los números de Euler de segunda clase están estrechamente relacionados con los números de Stirling [37]; no obstante pueden apreciarse en el estudio de los momentos centrales de la distribución geométrica [80], como también en el conteo de ciertos tipo de permutaciones del multiconjunto $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n, n\}$.

B.3.1. Números de Euler de primera clase

En combinatoria, el número de Euler $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ permite realizar el conteo del número de permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ con k ascensos [9, pág 197].

Ejemplo 17. *Calcular* $\left\langle {4 \atop 2} \right\rangle$.

Dado que las permutaciones de 4 *elementos, con* 2 *ascensos, son:*

$$(1,2,3,4),\ (1,3,2,4),\ (1,3,4,2),\ (1,4,2,3),\ (2,1,3,4),\ (2,3,1,4),$$

$$(2,3,4,1),\ (2,4,1,3),\ (3,1,2,4),\ (3,4,1,2),\ (4,1,2,3)$$

se concluye que $\left\langle {4 \atop 2} \right\rangle = 11$. *Se observa que la reversa de cada una de ellas es una permutación de* 4 *elementos con* 2 *descensos.*

La siguiente proposición corresponde a la recurrencia $\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle = (n+1-k)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle + (k+1)\left\langle {n \atop k} \right\rangle$, presentada en la definición 5.

Proposición B.3.1. $\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle = (n+1-k)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle + (k+1)\left\langle {n \atop k} \right\rangle$.

Demostración. Por definición $\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle$ cuenta el número de permutaciones de $\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle$ con k ascensos; por lo tanto, se debe probar que el lado derecho corresponde a dicho conteo. Sea $(a_1 a_2 \ldots a_n)$ permutación de n elementos con exactamente k ascensos, se agrega a dicha permutación un elemento adicional a_{n+1} mayor que los elementos considerados, por lo tanto tenemos dos casos:

1. a_{n+1} se ubica en una posición en la cual no aporta ningún ascenso.
2. a_{n+1} se ubica en una posición en la cual aporta un ascenso.

En el caso 1, se sabe que hay $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ permutaciones de n elementos con k ascensos, por lo tanto si a_{n+1} se ubica en medio de un ascenso entonces no aportará un ascenso, ya que si $a_k < a_j$ se tiene que $(a_k a_j)$ y $a_k a_{n+1} a_j$ tienen un ascenso, lo cual nos da k opciones para ubicar el nuevo elemento; no obstante, dado que si a_{n+1} se ubica al final se obtiene un ascenso, entonces en total hay $(k+1)\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ opciones.

En el caso 2, se sabe que hay $\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle$ permutaciones de n elementos con $k-1$ ascensos, por lo tanto si a_{n+1} se ubica en medio de un descenso se tienen $n-k$ opciones; no obstante, dado que si a_{n+1} se ubica al inicio no aporta ascensos, entonces se concluye que en total hay $(n-k+1)$ opciones.

Considerando los dos casos, se concluye que $\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle = (n+1-k)\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle + (k+1)\left\langle {n \atop k} \right\rangle$. $\square$

Siguiendo la recurrencia para números de Euler de primera clase, demostrada en la proposición anterior, se pueden generar los números de Euler. El siguiente resultado muestra los valores $\left\langle {n \atop 0} \right\rangle$ y $\left\langle {n \atop n-1} \right\rangle$.

Proposición B.3.2. *$\left\langle {n \atop 0} \right\rangle = 1$, para cada $n \geq 0$, y $\left\langle {n \atop n-1} \right\rangle = 1$, para cada $n \geq 1$.*

Demostración. Dado que $\left\langle {0 \atop 0} \right\rangle = 1$, se cumple la proposición para $n = 0$. Suponiendo que $\left\langle {n \atop 0} \right\rangle = 1$, se calcula $\left\langle {n+1 \atop 0} \right\rangle = 1$ mediante la recurrencia demostrada en la proposición B.3.1.

$$\begin{aligned} \left\langle {n+1 \atop 0} \right\rangle &= (n+1-0)\left\langle {n \atop -1} \right\rangle + (k+1)\left\langle {n \atop 0} \right\rangle \qquad \text{como } \left\langle {n \atop -1} \right\rangle = 0 \text{ y } \left\langle {n \atop 0} \right\rangle = 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Se demuestra así que $\left\langle {n \atop 0} \right\rangle = 1$, para cada $n \geq 0$.

Procediendo de manera similar se procede a demostrar que $\left\langle {n \atop n-1} \right\rangle = 1$; dado que $\left\langle {1 \atop 0} \right\rangle = 1$ se tiene el resultado para $n \geq 1$, suponiendo que $\left\langle {n \atop n-1} \right\rangle = 1$ se calcula $\left\langle {n+1 \atop n} \right\rangle$ de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \left\langle {n+1 \atop n} \right\rangle &= (n+1-n)\left\langle {n \atop n-1} \right\rangle + (n+1)\left\langle {n \atop n} \right\rangle \qquad \text{como } \left\langle {n \atop n-1} \right\rangle = 1 \text{ y } \left\langle {n \atop n} \right\rangle = 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Demostrando así que $\left\langle {n \atop n-1} \right\rangle = 1$, para cada $n \geq 1$. $\square$

La siguiente tabla, construida mediante la recurrencia demostrada en la proposición B.3.1, muestra los primeros números $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$.

n / k	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1							
2	1	1						
3	1	4	1					
4	1	11	11	1				
5	1	26	66	26	1			
6	1	57	302	302	57	1		
7	1	120	1191	2416	1191	120	1	
8	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1

Tabla B.3: Lista de números de Euler de primera clase

En la tabla anterior se observa que $\sum\limits_{k=0}^{n} \left[\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle\right] = n!$, resultado presentado en este trabajo como corolario 2.5.3. Los números de Euler de primera clase están relacionados con los números de Stirling mediante la siguiente expresión

$$\sum_{k=1}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle x^k = x \sum_{k=1}^{n} k! S(n,k)(x-1)^{n-k}.$$

este resultado se conoce como el teorema de Frobenius [26, pág 244].

B.3.2. Números de Euler de segunda clase

En combinatoria, los números $\left\langle\!\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle\!\right\rangle$ cuentan el número de permutaciones del multiconjunto $\{1,1,2,2,\ldots,n,n\}$, tales que los números entre cada aparición de m son mayores que m, y además tiene exactamente k ascensos, propiedad observada en [35].

Ejemplo 18. *Calcular* $\left\langle\!\left\langle {3 \atop 2} \right\rangle\!\right\rangle$.

Estas permutaciones son

$$(112233), (122133), (112332), (123321), (133122), (122331)$$

Con lo cual $\left\langle\!\left\langle {3 \atop 2} \right\rangle\!\right\rangle = 6$. *Se observa por ejemplo que* (312132) *no se cuenta ya que entre las dos apariciones de* 2 *se encuentra* 1*, que es menor que* 2*; también se aprecia que, por ejemplo,* (113322) *no se tienen en cuenta ya que incumple con la condición de tener* 2 *ascensos.*

La siguiente proposición muestra una recurrencia que satisfacen los números de Euler de segunda clase, presentada en la definición 6.

Proposición B.3.3. $\left\langle\!\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle\!\right\rangle = (2n+1-k)\left\langle\!\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle\!\right\rangle + (k+1)\left\langle\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\right\rangle$.

Demostración. Por definición $\left\langle\!\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle\!\right\rangle$ cuenta el número de permutaciones del multiconjunto $\{1,1,2,2,\ldots,n,n\}$, en las cuales los números entre cada aparición de m son mayores que m, para cada m, tales que tienen k ascensos; por lo tanto, se debe probar que el lado derecho corresponde a dicho conteo. Dada una permutación del multiconjunto $\{1,1,2,2,\ldots,n,n\}$ con la condición enunciada, se agrega a dicha permutación un elemento adicional a_{n+1} mayor que los elementos considerados, por lo tanto tenemos dos casos:

1. a_{n+1} no aporta ascensos.

2. a_{n+1} aporta ascensos.

Se debe tener presente que los dos números a_{n+1} deben aparecer consecutivos, ya que de no hacerlo los números entre ellos no serían mayores.

En el caso 1, se sabe que hay k ascensos, por lo tanto si $(a_{n+1}a_{n+1})$ se ubica en medio de un ascenso entonces no aportará un ascenso, ya que si $a_k < a_j$ se tiene que $(a_k a_j)$ y $(a_k a_{n+1} a_{n+1} a_j)$ tienen un ascenso, lo cual nos da k opciones para ubicar la pareja $(a_{n+1}a_{n+1})$; no obstante, dado que si $(a_{n+1}a_{n+1})$ se ubica al inicio no aporta ningún ascenso, entonces en total hay $(k+1)\left\langle\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\right\rangle$ opciones.

En el caso 2, se sabe que hay $\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle$ permutaciones de n elementos con $k-1$ ascensos; la pareja $(a_{n+1}a_{n+1})$ puede ubicarse inicialmente en cualquiera de las $2n+1$ ubicaciones posibles. No obstante, no puede ubicarse en medio de ninguno de los k ascensos, ya que no aportaría un nuevo ascenso. Entonces en total hay $(2n+1-k)\left\langle\!\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle\!\right\rangle$ opciones.

Considerando los dos casos, se concluye que $\left\langle\!\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle\!\right\rangle = (2n+1-k)\left\langle\!\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle\!\right\rangle + (k+1)\left\langle\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\right\rangle$. □

La siguiente proposición muestra algunos valores $\left\langle\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\right\rangle$ que se pueden conocer de manera inmediata.

Proposición B.3.4. $\left\langle\!\left\langle {n+1 \atop n} \right\rangle\!\right\rangle = [n+1]!$ *y* $\left\langle\!\left\langle {n \atop 0} \right\rangle\!\right\rangle = 1$ *para cada* $n \geq 0$.

Demostración. Claramente (11) es una permutación de $\{1,1\}$ con 0 ascensos, que cumple por defecto con la condición de que los números entre cada aparición de 1 son mayores que 1, por lo tanto $\left\langle\!\left\langle {1 \atop 0} \right\rangle\!\right\rangle = 1$.

Supondiendo que $\left\langle\!\left\langle {n \atop n-1} \right\rangle\!\right\rangle = n!$ se calcula $\left\langle\!\left\langle {n+1 \atop n} \right\rangle\!\right\rangle$ mediante la recurrencia demostrada en la proposición B.3.3 obteniendo así

$$\begin{aligned}
\left\langle\!\left\langle {n+1 \atop n} \right\rangle\!\right\rangle &= (2n+1-n)\left\langle\!\left\langle {n \atop n-1} \right\rangle\!\right\rangle + (n+1)\left\langle\!\left\langle {n \atop n} \right\rangle\!\right\rangle \\
&= (n+1)\left\langle\!\left\langle {n \atop n-1} \right\rangle\!\right\rangle + (n+1)\left\langle\!\left\langle {n \atop n} \right\rangle\!\right\rangle \qquad \text{como } \left\langle\!\left\langle {n \atop n-1} \right\rangle\!\right\rangle = n! \text{ y } \left\langle\!\left\langle {n \atop n} \right\rangle\!\right\rangle = 0 \\
&= (n+1)[n!]
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left\langle\!\left\langle {n+1 \atop n} \right\rangle\!\right\rangle = [n+1]!$.

Supondiendo que $\left\langle\!\left\langle {n \atop 0} \right\rangle\!\right\rangle = 1$ se calcula $\left\langle\!\left\langle {n+1 \atop n} \right\rangle\!\right\rangle$ mediante la recurrencia demostrada en la proposición B.3.3, con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned}\left\langle\!\left\langle {n+1 \atop 0} \right\rangle\!\right\rangle &= (2n+1-0)\left\langle\!\left\langle {n \atop 0-1} \right\rangle\!\right\rangle + (0+1)\left\langle\!\left\langle {n \atop 0} \right\rangle\!\right\rangle \qquad \text{como } \left\langle\!\left\langle {n \atop 0-1} \right\rangle\!\right\rangle = 0 \text{ y } \left\langle\!\left\langle {n \atop 0} \right\rangle\!\right\rangle = 1\\ &= 1\end{aligned}$$

De esta forma queda demostrado que $\left\langle\!\left\langle {n+1 \atop n} \right\rangle\!\right\rangle = [n+1]!$ y $\left\langle\!\left\langle {n \atop 0} \right\rangle\!\right\rangle = 1$ para cada $n \geq 0$. □

Teniendo en cuenta la recurrencia presentada en la proposición B.3.3, y la proposición anterior, se construye la siguiente tabla que muestra los primeros valores $\left\langle\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\right\rangle$.

n / k	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1							
2	1	2						
3	1	8	6					
4	1	22	58	24				
5	1	52	328	444	120			
6	1	114	1452	4400	3708	720		
7	1	240	5610	32120	58140	33984	5040	
8	1	494	19950	195800	644020	785304	341136	40320

Tabla B.4: Lista de números de Euler de segunda clase

En la tabla anterior se observa que $\sum_{k=0}^{n} \left\langle\!\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle\!\right\rangle = [2n-1]!_2$, resultado presentado en este trabajo como corolario 2.5.4. Los números de Stirling de primera y segunda clase pueden expresarse en términos de números de Euler de segunda clase.

$$\begin{aligned}S(x, x-n) &= \sum_{k=0}^{n} \left\langle\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\right\rangle \binom{x+n-k-1}{2n}\\ s(x, x-n) &= \sum_{k=0}^{n} \left\langle\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\right\rangle \binom{x+k}{2n}\end{aligned}$$

En [37], puede apreciarse más expresiones que relacionan números de Euler y números de Stirling.

B.4. Números de Whitney de segunda clase

Los números de Whitney de segunda clase, nombrados en honor a Hassler Whitney, son de utilidad en la teoría de conjuntos ordenados [77]. Según [7], estos números satisfacen la fórmula explícita $W_m(n,k) = \dfrac{1}{m^k k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} [m(k-j)+1]^n$, de donde se aprecia que $W_m(n,0) = 1$. La siguiente proposición muestra una fórmula de recurrencia para los números de Whitney de segunda clase.

Proposición B.4.1. $W_m(n,k) = W_m(n-1,k-1) + [km+1]W_m(n-1,k)$.

Demostración. Antes de iniciar la demostración, se deben tener en cuenta las expresiones

$$\begin{aligned} W_m(n-1,k-1) &= \frac{1}{m^{k-1}[k-1]!}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\tbinom{k-1}{j}[m(k-1-j)+1]^{n-1} \\ W_m(n-1,k) &= \frac{1}{m^k k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\tbinom{k}{j}[m(k-j)+1]^{n-1}. \end{aligned}$$

Luego, dado que $W_m(n,k) = \frac{1}{m^k k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}[m(k-j)+1]^n$ se tiene que $W_m(n,k)$ es dado por

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m^k k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\tbinom{k}{j}[m(k-j)+1]^{n-1}[m(k-j)+1] \\ &= \frac{1}{m^k k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\tbinom{k}{j}[m(k-j)+1]^{n-1}[mk+1-mj] \\ &= \underbrace{\frac{1}{m^k k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}[m(k-j)+1]^{n-1}}_{W_m(n-1,k)}[mk+1] - \frac{1}{m^k k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\tbinom{k}{j}[m(k-j)+1]^{n-1}[mj]. \end{aligned}$$

Se observa que el lado izquierdo de la expresión es $W_m(n-1,k)[mk+1]$, por lo tanto basta verificar que $W_m(n-1,k-1) = -\frac{1}{m^k k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}[m(k-j)+1]^{n-1}[mj]$ para completar la demostración; se observa que si $j=0$ el término se reduce a 0. Reescribiendo esta expresión se tiene que

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{m^k k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\tbinom{k}{j}[m(k-j)+1]^{n-1}[mj] \\ &= \frac{1}{m^k k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\left[\frac{k!}{(k-j)!j!}\right][m(k-j)+1]^{n-1}[mj] \\ &= \frac{1}{m^{k-1}k(k-1)!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\left[\frac{k(k-1)!}{(k-j)!(j-1)!}\right][m(k-j)+1]^{n-1} \\ &= \frac{1}{m^{k-1}(k-1)!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\left[\frac{(k-1)!}{(k-j)!(j-1)!}\right][m(k-j)+1]^{n-1} \\ &= \frac{1}{m^{k-1}(k-1)!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\tbinom{k-1}{j-1}[m(k-j)+1]^{n-1} \\ &= \frac{1}{m^{k-1}(k-1)!}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{j}\tbinom{k-1}{j}[m(k-j-1)+1]^{n-1} \\ &= W_m(n-1,k-1) \end{aligned}$$

Concluyendo así que $W_m(n,k) = W_m(n-1,k-1) + [km+1]W_m(n-1,k)$. $\square$

A continuación se presentan los primeros valores de los números de Whitney $W_1(n,k)$.

n / k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	3	1					
3	1	7	6	1				
4	1	15	25	10	1			
5	1	31	90	65	15	1		
6	1	63	301	350	140	21	1	
7	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Tabla B.5: Lista de números de Whitney $W_1(n,k)$

Teniendo en cuenta la tabla B.2, se observa que $W_1(n,k) = S(n+1,k+1)$. Considerando $(x)_n = x(x-1)\cdot(x-n+1)$, siguiendo [25] se definen los números r-Whitney como los números tales que:

$$(mx+r) = \sum_{k=0}^{n} W_{m,r}(n,k)m^k(x)_k$$

En general, los números r-Whitney satisfacen la recurrencia

$$W_{m,r}(n,k) = W_{m,r}(n-1,k-1) + [km+r]W_{m,r}(n-1,k),$$

con $W_{m,r}(0,0) = 1$ y $W_{m,r}(n,k) = 0$ para $k > n$ y $k < 0$ [71]. Del mismo modo que en la tabla B.5, teniendo en cuenta la recurrencia anterior, se procede al cálculo de $W_{m,r}(n,k)$ obteniendo así la siguiente tabla

n / k	0	1	2	3	4
0	1				
1	r	1			
2	r^2	$2r+m$	1		
3	r^3	$3r^2+3rm+m^2$	$3r+3m$	1	
4	r^4	$4r^3+6mr^2+4m^2r+m^3$	$6r^2+12mr+7m^2$	$4r+6m$	1

Tabla B.6: Lista de números de Whitney $W_{m,r}(n,k)$

Con el fin de ilustrar el crecimiento de los términos $W_{m,r}(n,k)$, la siguiente fila de la tabla anterior estaría formada por las expresiones

$$r^5\,, 5r^4+10mr^3+10m^2r^2+5m^3r+m^4\,, 10r^3+30mr^2+35m^2r+15m^3\,, 10r^2+30mr+25m^2\,, 5r+10m\,, 1$$

Se observa que los valores en la tabla B.5, equivalen a tomar $r = m = 1$ en la tabla B.6.

B.5. Números de Lah

Los números de Lah, propuestos por Ivo Lah en 1954 [50] denotados $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$ [33] o $L(n,k)$ [77], son útiles en combinatoria para realizar el conteo del número de formas en las cuales un conjunto de n elementos $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, puede ser particionado en k conjuntos linealmente ordenados no vacíos. En teoría de grafos, estos números se interpretan como el número de maneras de particionar un grafo completo con n vértices en una unión disjunta de k bosques decrecientes [33]. Estos números satisfacen la fórmula explícita $L(n,k) = \binom{n}{k}\binom{n-1}{k-1}(n-k)!$ [27], que puede ser reescrita como $L(n,k) = \binom{n-1}{k-1}\dfrac{n!}{k!}$, de donde se aprecia que $L(1,1) = 1$ y por defecto se define $L(n,k) = 0$ para $k < 0$ y $k > n$. La siguiente proposición muestra una fórmula de recurrencia para los números de Lah.

Proposición B.5.1. $L(n+1,k) = (n+k)L(n,k) + L(n,k-1)$.

Demostración. Se observa que $L(n+1,k) = \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix}\dfrac{(n+1)!}{k!}$, por lo tanto basta con demostrar que $(n+k)L(n,k) + L(n,k-1) = \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix}\dfrac{(n+1)!}{k!}$.

$$\begin{aligned}
(n+k)L(n,k) + L(n,k-1) &= (n+k)\tbinom{n-1}{k-1}\frac{n!}{k!} + \tbinom{n-1}{k-2}\frac{n!}{(k-1)!} \\
&= (n+k)\frac{[n-1]!}{[k-1]![n-k]!}\frac{n!}{k!} + \frac{[n-1]!}{[k-2]![n-k+1]!}\frac{n!}{(k-1)!} \\
&= (n+k)\frac{[n-1]!(n-k+1)}{[k-1]![n-k+1]!}\frac{n!}{k!} + \frac{[n-1]![k-1]k}{k![n-k+1]!}\frac{n!}{(k-1)!} \\
&= \frac{[n-1]!n!}{[k-1]![n-k+1]!k!}\left[(n+k)(n-k+1) + [k-1]k\right] \\
&= \frac{[n-1]!n!}{[k-1]![n-k+1]!k!}\left[n^2 - kn + n + kn - k^2 + k + k^2 - k\right] \\
&= \frac{[n-1]!}{[k-1]![n-k+1]!}\frac{n!}{k!}\left[n^2 + n\right] \\
&= \frac{[n-1]!}{[k-1]![n-k+1]!}\frac{n!}{k!}\left[n(n+1)\right] \\
&= \frac{n!}{[k-1]![n-k+1]!}\frac{[n+1]!}{k!}
\end{aligned}$$

Lo cual prueba que $(n+k)L(n,k) + L(n,k-1) = \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix}\dfrac{n!}{k!} = L(n+1,k)$. $\square$

La siguiente proposición muestra los valores de $L(n,k)$ en los extremos, es decir si $k = 1$ y $k = n$.

Proposición B.5.2. *$L(n,1) = n!$ y $L(n,n) = 1$ para cada n.*

Demostración. Dado que $L(1,1) = 1$, la proposición se cumple para $n = 1$. Suponiendo que $L(n,n) = 1$ se procede al cálculo de $L(n+1, n+1)$ siguiendo la proposición B.5.1

$$\begin{aligned} L(n+1,n+1) &= (n+[n+1])L(n,n+1) + L(n,[n+1]-1) \\ &= L(n,n) \end{aligned}$$

Por otra parte, dado que $L(1,1) = 1!$, se supone que $L(n,1) = n!$ y se calcula $L(n+1,1)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} L(n+1,1) &= (n+1)L(n,1) + L(n,0) \\ &= (n+1)n! \end{aligned}$$

Por lo tanto, $L(n+1,1) = (n+1)!$. Concluyendo así que $L(n,1) = n!$ y $L(n,n) = 1$ para cada n. □

Siguiendo la recurrencia presentada en la proposición B.5.1, y los resultados de la proposición anterior, se construye la siguiente tabla con los primeros valores $L(n,k)$.

n / k	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	2	1						
3	6	6	1					
4	24	36	12	1				
5	120	240	120	20	1			
6	720	1800	1200	300	30	1		
7	5040	15120	12600	4200	630	42	1	
8	40320	141120	141120	58800	11760	1176	56	1

Tabla B.7: Lista de números de Lah

Cabe destacar que los números de Lah son conocidos por algunos autores como los números de Stirling de tercera clase. [78, pág 464].

B.6. Generar números y polinomios computacionalmente

En esta sección se muestra, empleando el software Matlab, cómo crear programas que permitan construir familias de polinomios y números definidos recurrentemente. Dada la cantidad de objetos combinatorios presentados en este trabajo se consideran únicamente algunos casos particulares; en general todos pueden obtenerse de manera similar.

Dada la gramática $G = \{a \to a^2b; b \to ab^2c; c \to abc^2\}$, estudiada en la sección 3.3, por la proposición 3.3.1 se sabe que $D^n(a) = a^{n+1}b^ny_{n-1}(c)$, donde los polinomios $y_n(x)$ son tales que:

$$y_n(x) = [(n+1) + nx]y_{n-1}(x) + c^2\frac{dy_{n-1}(x)}{dx} \quad \text{con } y_0(x) = 1.$$

Dado que se conoce el primer polinomio y_0 y se tiene una recurrencia para los demás polinomios, se realiza el código con el cual se puede obtener el polinomio y_n deseado. Teniendo en cuenta que la recurrencia incluye una derivada, es necesario crear las funciones de manera simbólica, ya que el manejo simbólico facilita los procesos de derivación y simplificación de los resultados. Algunos comandos específicos de Matlab deben ser tenidos en cuenta:

- %. Permite agregar comentarios en el programa, de este modo todo lo que se encuentre a la derecha del símbolo % no será tenido en cuenta al ejecutar el programa.
- %d. muestra el valor entero almacenado en una variable.
- *syms*. Presenta un letrero y permite al usuario digitar un valor.
- *syms*. Permite crear variables simbólicas.
- *diff*. Deriva funciones creadas mediante variables simbólicas.
- *subs*. Evalua una función simbólica en un valor dado.
- *expand*. Expande las expresiones simbólicas, empleando la ley distributiva.

Para una introducción más profunda al software Matlab, y sus instrucciones, se sugiere remitirse a [5]. El código con el cual se genera la recurrencia presentada es el siguiente:

```
n=input('Digite el orden del polinomio hasta el cual desea conocer ');
syms x;
y0=1+0*x;                          % Crea el primer polinomio
for i=1:n
    y=[i*x+i+1]*y0 +(x^2)*diff(y0);%Recurrencia para la familia de polinomios
    fprintf('\nPolinomio y%d',i)
    y0=expand(y)
end
```

Si se desea sumar los coeficientes de cada polinomio, con el fin de buscar algún patrón, la forma más simple de hacerlo es evaluando cada polinomio en $x = 1$, por esta razón se sugiere agregar las siguientes líneas antes de la instrucción *end*.

```
val=subs(y,1)
fprintf('la suma de los coeficientes es %d\n',val)
```

Empleando el código presentado se obtiene la información que se presenta a continuación

n	y_n	suma de coeficientes
0	1	1
1	$x+2$	3
2	$3x^2+7x+6$	16
3	$15x^3+40x^2+46x+24$	125
4	$105x^4+315x^3+430x^2+326x+120$	1296
5	$945x^5+3150x^4+4900x^3+4536x^2+2556x+720$	16807

En la tabla anterior, se observa que la suma de los coeficientes de $y_n(x)$ da como resultado $[n+2]^n$. Suponiendo que se desea construir el polinomio cuyos coeficientes son los números de Ramanujan, presentado en la subsección 3.3.2, se debe tener presente la recurrencia que lo genera y un polinomio inicial; en particular, por el teorema 3.3.8, se sabe que dicho polinomio satisface la siguiente fórmula recursiva

$$y_n(x) = [(n+2)x+n]y_{n-1}(x) + x^2\frac{dy_{n-1}(x)}{dx} \quad \text{con } y_0(x) = 1.$$

Por lo tanto, se emplea el código presentado anteriormente y se modifica la recurrencia que genera la familia de polinomios, dado que en ambos casos $y_0 = 1$ el valor inicial se mantiene igual

```
n=input('Digite el orden del polinomio hasta el cual desea conocer ');
syms x;
y0=1+0*x;                          % Crea el primer polinomio
for i=1:n
    y=[(i+2)*x+i]*y0 +(x^2)*diff(y0);
    y=[i*x+i+1]*y0 +(x^2)*diff(y0);  % Recurrencia para los polinomios
    fprintf('\nPolinomio y%d',i)
    y0=expand(y)
end
```

De esta forma, se obtienen los siguientes resultados.

n	y_n	suma de coeficientes
0	1	1
1	$3x+1$	4
2	$15x^2+10x+2$	27
3	$105x^3+105x^2+40x+6$	256
4	$945x^4+1260x^3+700x^2+196x+24$	3125
5	$10395x^5+17325x^4+12600x^3+5068x^2+1148x+120$	46656

Se observa que la suma de los coeficientes es $[n+1]^{n+1}$.

Del mismo modo que se construyen familias de polinomios es posible construir familias de números, basta conocer la recurrencia que satisfacen y los valores iniciales de dichos números.

A manera de ejemplo se consideran los números de Lah, estudiados en la sección 2.7 del apéndice, que satisfacen la recurrencia $L(n+1,k) = (n+k)L(n,k) + L(n,k-1)$, resultado presentado como proposición B.5.1; además se sabe que $L(n,1) = n!$, por la proposición B.5.2. Con el objetivo de hacer el programa eficiente no se incluirán estructuras de control `if`, lo que significa que no se debe llegar a los casos por defecto $L(n,k)$ con $k > n$ o $k < n$. El siguiente código muestra como construir una función, en Matlab, que permita calcular los números de Lah.

```
m=input('Digite cuantas filas de los numeros de Lah desea calcular ');
L=zeros(m,m);
for n=1:m
    L(n,1)=factorial(n);
    for k=2:n
        L(n,k)=(n-1+k)*L(n-1,k)+L(n-1,k-1);
    end
end
```

El comando *factorial*, incluido en Matlab, permite calcular $n!$, razón por la cual $L(n,1) = n!$ es escrito en el código de la siguiente manera

```
L(n,1)=factorial(n)
```

Con lo cual ya se tienen los valores iniciales. La recurrencia que satisfacen los números de Lah, dada en la proposición B.5.1, $L(n+1,k) = (n+k)L(n,k) + L(n,k-1)$ se reescribe para calcular $L(n,k)$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} L(n+1,k) &= (n+k)L(n,k) + L(n,k-1) && \text{Sustituyendo } n \text{ por } n-1 \\ L(n,k) &= (n-1+k)L(n-1,k) + L(n-1,k-1) \end{aligned}$$

razón por la cual la línea de código para la recurrencia es

```
L(n,k)=(n-1+k)*L(n-1,k)+L(n-1,k-1)
```

el resultado obtenido se puede apreciar en la tabla B.7. De manera análoga son construidas las demás familias de números presentadas en este trabajo.

En caso de que la lista de números a construir inicie con $k = 0$, se procede de manera similar; por ejemplo los números $c_{n,k}$ presentados en la sección 3.3 satisfacen la recurrencia $c_{n+1,k} = (n+1)c_{n,k} + (n+k)c_{n,k-1}$ y además $c_{n,0} = n!$, por las proposiciones 3.3.14 y 3.3.12 respectivamente. No obstante, dado que en Matlab los vectores y matrices se deben iniciar desde la posición 1, se debe tener cuidado a la hora de implementar la recurrencia, de esta forma $c_{n+1,k} = (n+1)c_{n,k} + (n+k)c_{n,k-1}$ se reescribe sustituyendo n por $n-1$, dado que k está desplazado una posición se debe tener presente que si se habla del valor k se debe sustituir por $k-1$, no obstante si se habla de la posición k esta se debe mantener igual. Teniendo en cuenta lo anterior, el código que permite construir los números $c_{n,k}$ es el siguiente:

```
m=input('Digite cuantas filas de los numeros c desea calcular ');
C=zeros(m,m+1);
C(1,1)=1;
C(1,2)=1;
for n=2:m
    C(n,1)=factorial(n);
    for k=2:n+1
        C(n,k)=n*C(n-1,k)+(n-1+k-1)*C(n-1,k-1);
   end
end
```

Por supuesto $n-1+k-1$ puede escribirse como $n+k-2$ sin afectar el resultado, no obstante no se apreciaría adecuadamente la aclaración realizada. La siguiente lista corresponde a los primeros números $c_{n,k}$.

n / k	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1						
2	2	4	3					
3	6	18	25	15				
4	24	96	190	210	105			
5	120	600	1526	2380	2205	945		
6	720	4320	13356	26488	34650	27720	10395	
7	5040	35280	128052	305620	507430	575190	405405	135135

Si se quieren sumar los valores en cada fila, entonces se debe agregar al final del programa la instrucción

```
sum(C(r,:))
```

donde r corresponde a la fila cuyos valores se desean sumar, de esta forma se observa que $\sum\limits_{k=0}^{n} c_{n,k} = (n+1)^n$, para cada $n \geq 1$.

Bibliografía

[1] Abraham, S.: Some questions of phrase structure grammars. En: *Computational linguistic* 4 (1965), p. 61–70.

[2] Al-Salam, Waleed ; leonard Carlitz: Bernoulli numbers and Bessel polynomials. En: *Archiv der Mathematik* 9 (1958), Nr. 6, p. 412–415.

[3] Anton, Howard: *Elementary lineal algebra*. John Wiley & Sons, 2010.

[4] Atia, Mohamed ; Chneguir, Said: The exceptional Bessel polynomials. En: *Integral transforms and special functions* 25 (2014), Nr. 6, p. 470–480.

[5] Attaway, Stormy: *Matlab: A practical introduction to programming and problem solving*. Vol. 3. United States : Elsevier, 2013.

[6] Bell, Eric T.: Exponential polynomials. En: *Annals of mathematics* 35 (1934), Nr. 2, p. 258–277.

[7] Benoumhani, Moussa: On Whitney numbers of Dowling lattices. En: *Discrete Mathematics* 159 (1996), p. 13–33.

[8] Berndt, Bruce: *Ramanujan's notebooks Part I*. Singapur : Springer Verlag, 1985.

[9] Bona, Miklos: *Introduction to enumerative combinatorics*. United States : Mc Graw Hill, 2007.

[10] Bona, Miklos: *Combinatorics of permutations*. United States : CRC Press, 2012.

[11] Boyadzhiev, Khristo: Exponential polynomials, Stirling numbers, and evaluation of some gamma integrals. En: *Abstract and applied analysis* (2009), p. 18.

[12] Boyadzhiev, Khristo: Close encounters with the Stirling numbers of the second kind. En: *Mathematics Magazine* 85 (2012), p. 252–266.

[13] Broder, Andrei: The r-Stirling numbers. En: *Discrete Mathematics* 49 (1984), p. 241–259.

[14] Brualdi, Richard: *Introductory Combinatorics*. China : Chapman and Hall/ CRC, 2009.

[15] Cahill, Nathan ; Narayan, Darren: Fibonacci and Lucas numbers as tridiagonal matrix determinants. En: *Fibonacci Quarterly* 42 (2004), Nr. 3, p. 216–221.

[16] Callan, David: A combinatorial survey of identities for the double factorial. En: *arXiv:0906.1317v1* (2009), p. 1–29.

[17] Callan, David: Klazar trees and perfect matching. En: *European Journal of combinatorics* 31 (2010), Nr. 5, p. 1265–1282.

[18] Callan, David ; Ma, Shi ; Mansour, Toufik: Some combinatorial arrays related to the Lotka-Volterra system. En: *Electronic Journal of Combinatorics* 22 (2015), Nr. 2, p. P.22.

[19] Castro, Rodrigo D.: *Teoría de la computación: lenguajes, autómatas, gramáticas*. Bogotá : Universidad Nacional de Colombia, 2004.

[20] Charalambides, Charalambos: *Enumerative combinatorics*. United States : Chapman and Hall/ CRC, 2002.

[21] Chen, Chuan ; Kho, Khee: *Principles and techniques in combinatorics*. Singapur : World Scientific, 1992.

[22] Chen, William: Context-free grammars, differential operators and formal power series. En: *Theoretical Computer Science* 117 (1993), p. 113–129.

[23] Chen, William ; Fu, Amy: Context-free grammars for permutations and increasing trees. En: *Advances in Applied Mathematics* 82 (2017), p. 58–82.

[24] Chen, William ; Hao, Robert ; Yang, Harold: Context-free grammars and multivariate stable polynomials over Stirling permutations. En: *arXiv:1208.1420* (2012), p. 1–22.

[25] Cheon, Gi-Sang ; Jung, Ji-Hwan: r-Whitney numbers of Dowling lattices. En: *Discrete Mathematics* 312 (2012), p. 2337–2348.

[26] Comtet, Louis: *Advanced Combinatorics*. Dordrecht : D. Reidel Publishing Company, 1974.

[27] Daboul, Siad ; Mangaldan, Jan ; Spivey, Michael ; Taylor, Peter: The Lah numbers and the nth derivative of $e^{\frac{1}{x}}$. En: *Electronic journal of combinatorics* 86 (2013), Nr. 1, p. 39–47.

[28] Dale, M ; Moon, J: The permuted analogues of three Catalan sets. En: *Journal of statistical planning and inference* 34 (1993), Nr. 1, p. 75–87.

[29] Demirturk, Bahar: Fibonacci and Lucas sums by matrix methods. En: *International mathematical forum* 5 (2010), Nr. 3, p. 99–107.

[30] Dumont, Dominique: Grammaires de William Chen et dérivations dans les arbres et arborescences. En: *Séminaire Lotharingien de Combinatoire* 37 (1996), p. B37a, 21 p.–B37a, 21 p.

[31] Dumont, Dominique ; Ramamonjisoa, Armand: Grammaire de Ramanujan et arbres de Cayley. En: *The Electronic Journal of Combinatorics* 3 (1996), Nr. 2, p. R17.

[32] Egecioglu, Omer: Bessel polynomials and the partial sums of the exponential series. En: *Theoretical Computer Science* 24 (2010), Nr. 4, p. 1753–1762.

[33] Eu, Sen-Peng ; Fu, Tung-Shan ; Liang, Yu-Chang ; Wong, Tsai-Lien: On xD-Generalizations of Stirling Numbers and Lah numbers via Graphs and Rooks. En: *Electronic journal of combinatorics* 24 (2017), Nr. 2, p. P2.9.

[34] Euler, Leonard (Ed.): *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum [Foundations of differential calculus, with applications to finite analysis and series].* Academia imperialis scientiarum Petropolitana, 1755.

[35] Gessel, Ira ; Stanley, Richard: Stirling polynomials. En: *Journal of combinatorial theory* 24 (1978), p. 24–33.

[36] Gould, Henry ; Quaintance, Jocelyn: Double fun with double factorials. En: *Mathematics Magazine* 85 (2012), Nr. 3, p. 177–192.

[37] Graham, Ronald ; Donald Knuth, D ; Patashnik, Oren: *Concrete Mathematics: a foundation for computer science.* United States : Adisson Wesley, 1994.

[38] Grosswald, Emil: *Bessel polynomials.* Springer-Verlag, 1978.

[39] Gulec, Hasan ; Taskara, Necati ; Uslu, Kemal: A new approach to generalized Fibonacci and Lucas numbers with binomial coefficients. En: *Applied mathematics and computation* 220 (2013), p. 482–486.

[40] Hao, Robert ; Wang, Larry ; Yang, Harold: Context-free grammars for triangular arrays. En: *Acta mathematica sinica* 31 (2015), Nr. 3, p. 445–455.

[41] Higgins, Peter: *Number history: From counting to cryptography.* London : Springer-Verlag, 2008.

[42] Howard, F T.: Explicit formulas for numbers of Ramanujan. En: *Fibonacci Quarterly* 24 (1986), Nr. 2, p. 168–175.

[43] Hyatt, Matthew: Recurrences for Eulerian polynomials of type B and type D. En: *Annals of combinatorics* 20 (2016), Nr. 4, p. 869–881.

[44] Jin, Yinglie: The enumeration of labelled spanning trees of $K_{m,n}$. En: *Australasian journal of combinatorics* 28 (2003), p. 73–79.

[45] Koshy, Thomas: *Fibonacci and Lucas numbers with applications.* John Wiley & sons, 2001.

[46] Koshy, Thomas: *Elementary number theory and applications, 2 ed.* United States : Academic Press publications, 2007.

[47] Koshy, Thomas: *Catalan numbers with applications*. Oxford University Press, 2009.

[48] Krall, HL ; Frink, Orrin: A new class of orthogonal polynomials: The Bessel polynomials. En: *Transactions of the American Mathematical Society* 65 (1949), Nr. 1, p. 100–115.

[49] Krithivasan, Kamala ; Rama, R: *Introduction to Formal Languages, Automata Theory and Computation*. India : Pearson, 2009.

[50] Lah, Ivo: A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics. En: *Boletin do Instituto dos Actuarios Portugueses* 9 (1954), p. 7–15.

[51] Lehmann, Ingmar: *The fabulous Fibonacci numbers*. Prometheus books, 2007.

[52] Leveque, Olivier ; Vignat, Christophe: About some identities for Bessel polynomials. En: *arXiv:1210.2081* (2009), p. 1–8.

[53] Lindsay, Jim ; Mansour, Toufik ; Shattuck, Mark: A new combinatorial interpretation of a q-analogue of the Lah numbers. En: *Journal of combinatorics* 2 (2011), Nr. 2, p. 245–264.

[54] Linz, Peter: *An introduction to formal languages, 6a Ed.* United States : Jones & Bartlett Learning, 2017.

[55] Liu, Lily ; Zhu, Bao-Xuan: Strong q-log-convexity of Eulerian polynomials of coxeter groups. En: *Annals of combinatorics* 338 (2015), p. 2332–2340.

[56] Lukás, Roman ; Meduna, Alexander: Multigenerative grammar systems and matrix grammars. En: *Kybernetika* 46 (2010), p. 68–82.

[57] Luo, Jianjin: Antu Ming, the first inventor of Catalan numbers in the world. En: *Neimengu Daxue Xuebao* 19 (1988), p. 239–245.

[58] Ma, Shi: Bessel Polynomials, double factorials and context free grammars. En: *arXiv:1208.5409v3* (2012), p. 1–8.

[59] Ma, Shi: Derivate polynomials and enumeration of permutations by number of interior and left peaks. En: *Discrete Math* 312 (2012), p. 405–412.

[60] Ma, Shi: Some combinatorial sequences associated with context-free grammars. En: *arXiv:1208.3104v2* (2012), p. 1–7.

[61] Ma, Shi: Enumeration of permutations by number of alternating runs. En: *Discrete Mathematics* 313 (2013), p. 1816–1822.

[62] Ma, Shi: A family of two-variable derivative polynomials for tangent and secant. En: *European Journal of combinatorics* 20 (2013), Nr. 1, p. P11.

[63] Ma, Shi: Some combinatorial arrays generated by context-free grammars. En: *European Journal of combinatorics* 34 (2013), Nr. 7, p. 1081–1091.

[64] Ma, Shi ; Mansour, Toufik ; Schork, Matthias: Normal ordering problem and the extensions of the Stirling grammar. En: *Russian Journal of mathematical physics* 21 (2014), Nr. 2, p. 242–255.

[65] Ma, Shi-Mei ; Yeh, Yeong-Nan: Eulerian polynomials, Stirling permutations of the second kind and perfect matchings. En: *The electronic journal of combinatorics* 24 (2017), Nr. 4, p. P.27.

[66] Mansour, Toufik ; Schork, Matthias: The generalized Touchard polynomials revisited. En: *Applied mathematics and computation* 219 (2013), p. 9978–9991.

[67] Matousova, Ivana ; Trojovski, Pavel: On a sequence of tridiagonal matrices whose permanents are related to Fibonacci and Lucas numbers. En: *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 105 (2015), Nr. 4, p. 715–721.

[68] Méndez, Miguel ; Ramírez, José: A new approach to the r-Whitney numbers by using combinatorial differential calculus. En: *arXiv:1702.06519v1* (2017), p. 1–22.

[69] Meserve, Bruce: Classroom notes: Double factorials. En: *American Mathematical Monthly* 55 (1948), p. 425–426.

[70] Mezo, Istvan: A new formula for the Bernoulli polynomials. En: *Results in Mathematics* 58 (2010), Nr. 3, p. 329–335.

[71] Mezo, Istvan ; Ramirez, Jose: Some Identities of the r-Whitney numbers. En: *Aequationes Mathematicae* 90 (2016), p. 393–406.

[72] Mubeen, Shahen ; Rehman, Abdur: (n-k) factorials. En: *Journal of Inequalities and Special Functions* 5(3) (2014), p. 14–20.

[73] Mumtaz, A. ; Khursheed, A.: A study of Bessel polynomials suggested by the polynomials $L_n^{\alpha,\beta}$ if Prabhakar and Rekha. En: *Soochow Journal of Mathematics* 26 (2000), p. 19–27.

[74] Paun, Gheorghe: *Membrane computing an introduction*. Berlin : Springer-Verlag, 2002.

[75] Petersen, Kyle: *Eulerian numbers*. United States : Birkhauser, 2015.

[76] Rahmani, Mourad: Some results on Whitney numbers of Dowling lattices. En: *Arab Journal of Mathematical Sciences* 20 (2014), Nr. 1, p. 11–27.

[77] Rosen, Kenneth: *Handbook of discrete and combinatorial mathematics*. CRC Press, 2000.

[78] Sandor, Jozef ; Crstici, Borislav: *Handbook of number theory*. Vol. 2. Kluwer Academic Publishers, 2004.

[79] Shallit, Jeffrey: *A second course in formal languages and automata theory*. United States : Cambridge University Press, 2009.

[80] Shenton, L ; Bowman, K: The geometric distribution's central moments and Eulerian numbers of the second kind. En: *Far East Journal of Theoretical Statistics* 7 (2002), Nr. 1, p. 1–17.

[81] Shor, Peter: A new proof of Cayley's formula for counting labeled trees. En: *Journal of combinatorial theory, series A* 71 (1995), p. 154–158.

[82] Spivak, Michael: *Cálculo 3a edición*. Barcelona : Reverté, 2012.

[83] Stanley, Richard: *Enumerative combinatorics*. Vol. 2. Cambridge University Press, 1999.

[84] Touchard, Jacques: Sur les cycles des substitutions. En: *Acta Mathematica* 70 (1939), Nr. 1, p. 243–297.

[85] Weisstein, Eric: *CRC concise encyclopedia of mathematics*. United States : Chapman & Hall/CRC, 2002.