

# Nudos Virtuales

por

José Gregorio Rodríguez Nieto

Trabajo presentado como requisito parcial  
para optar al Título de

Doctor en Matemáticas

Directora: Margarita Toro Villegas

Universidad Nacional de Colombia  
Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

2011

Este trabajo ha sido apoyado parcialmente por COLCIENCIAS, código 1118-521-28160,  
contrato 110205020  
y por la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional.

# Resumen

En este trabajo estudiamos los nudos virtuales vía el concepto de nudos combinatorios. Hacemos un estudio detallado de la equivalencia de estos conceptos y algunas construcciones de nuevos nudos a partir de nudos virtuales conocidos. Nos concentramos en el problema de identificar cuándo un nudo virtual es clásico. Para ello definimos un nuevo invariante, que denominamos  $\Lambda$ , que no sólo detecta en muchos casos si un nudo virtual es clásico o no, sino que también resulta muy fuerte para clasificar nudos virtuales no clásicos. Hacemos también un breve estudio de algunos de los invariantes de nudos virtuales más conocidos, entre ellos el grupo de un nudo, el polinomio  $Z$  de Sawollek y el polinomio de Jones. Todos ellos los estudiamos a la luz de nudos combinatorios. Por último, definimos el concepto de forma normal de un nudo combinatorio como herramienta para una clasificación de nudos virtuales. Mostramos los primeros pasos de esta clasificación, donde comparamos el poder de los distintos invariantes que estudiamos en este trabajo, mostrando las ventajas del invariante  $\Lambda$ .

**Palabra Clave:** Nudos Virtuales, Nudos Combinatorios, Invariante  $\Lambda$ , tripletas.

## Abstract:

In this paper we study the virtual knots via the concept of combinatorial knot. We do a detailed study of the equivalence of these concepts and some constructions of new knots from virtual knots known. We focus on the problem of identifying when a virtual knot is classical. We first define a new invariant, we call  $\Lambda$ , which not only detects in many cases whether a virtual knot is classical or not, but it is very hard to classify non-classical virtual knots. We also do a brief survey of some of the virtual knot invariants known, including the group of a knot, the polynomial  $Z$  of Sawollek and the Jones polynomial. We study them in light of combinatorial knot. Finally, we define normal form of a combinatorial knot as a tool for classification of virtual knots. We show the first steps in this classification, where we compare the power of the various invariants studied in this work, showing the advantages of the invariant  $\Lambda$ .

**Keywords:** Virtual Knot, Combinatorial Knot,  $\Lambda$  invariant, Triplets.

# Contenido

<b>Introducción</b>	<b>viii</b>
<b>1 Conceptos básicos</b>	<b>1</b>
1.1 Nudos clásicos . . . . .	1
1.2 Nudos combinatorios . . . . .	3
1.2.1 Definición de nudo combinatorio . . . . .	3
1.2.2 Sobre realizaciones de nudos combinatorios . . . . .	8
1.2.2.1 Curvas normales . . . . .	8
1.2.2.2 Realización de Carter . . . . .	11
1.3 Nudos virtuales . . . . .	15
1.4 Equivalencia entre los nudos virtuales y los nudos combinatorios . . . . .	18
1.5 Una aproximación topológica a la teoría de los nudos virtuales . . . . .	23
1.5.1 Superficie ambiente de un nudo virtual . . . . .	24
1.5.2 Equivalencia estable . . . . .	26
<b>2 Aritmética de nudos combinatorios</b>	<b>30</b>
2.1 Imágenes espejo e inverso . . . . .	30
2.2 Suma conexas de códigos nudales . . . . .	32
2.3 Suavizaciones . . . . .	34
2.4 Virtualizaciones . . . . .	37
2.5 Número de puentes de un nudo virtual . . . . .	38
<b>3 El invariante <math>\Lambda</math> de un nudo combinatorio</b>	<b>40</b>
3.1 Motivación . . . . .	40
3.1.1 El problema de la palabra signada de Gauss y códigos nudales geométricos	41
3.1.2 El vector $\alpha$ y la matriz $\beta$ de un código nudal . . . . .	44
3.2 Tripletas . . . . .	49
3.3 Definición de $\Lambda$ . . . . .	55
3.4 ¿Cuándo una tripleta $(S, A, B)$ es la tripleta de un código nudal? . . . . .	62

3.5	Existencia de nudos virtuales chirales y no invertibles . . . . .	64
3.6	La tripleta $\Lambda$ de virtualizaciones de un nudo clásico . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Otros invariantes de nudos virtuales</b>	<b>74</b>
4.1	El grupo de un nudo virtual . . . . .	74
4.1.1	El grupo de un nudo combinatorio . . . . .	75
4.1.1.1	Definición del grupo de un nudo combinatorio . . . . .	75
4.1.1.2	Propiedades del grupo de un nudo combinatorio . . . . .	76
4.1.1.3	Presentación por encima del grupo de un nudo combinatorio . . . . .	77
4.1.2	Sistemas periferales . . . . .	80
4.1.3	Presentaciones de Wirtinger . . . . .	82
4.2	Polinomios invariantes de nudos virtuales . . . . .	86
4.2.1	Polinomios invariantes asociados a $\Lambda$ . . . . .	86
4.2.1.1	Los $\Lambda$ -polinomios . . . . .	87
4.2.1.2	El polinomio $P$ de Henrich . . . . .	88
4.2.2	El Polinomio $Z$ de Sawollek . . . . .	90
4.2.3	El polinomio de Jones de un nudo virtual . . . . .	93
4.2.3.1	El polinomio bracket . . . . .	94
4.2.3.2	El polinomio de Jones. . . . .	97
4.2.3.3	Virtualización . . . . .	97
<b>5</b>	<b>Clasificación de nudos virtuales</b>	<b>99</b>
5.1	Forma normal de un nudo combinatorio . . . . .	100
5.2	Orden en el conjunto de códigos combinatorios normales . . . . .	103
5.3	Generación de lista de nudos . . . . .	103
5.4	Tablas de clasificación para $n \leq 3$ . . . . .	105
5.4.1	$n = 2$ . . . . .	105
5.4.2	$n = 3$ . . . . .	106
	<b>Bibliografía</b>	<b>109</b>

# Agradecimientos

Quisiera agradecer de manera muy especial a la doctora Margarita María Toro Villegas por sus aportes valiosos que dieron forma a este trabajo.

A los doctores Débora Tejada, Mike Hilden y Víctor Núñez jurados de esta tesis, agradezco su colaboración y por las sugerencias para mejorarlo.

Finalmente quiero expresar mi gratitud a la familia Nieto López, en especial a mis tíos Julia López y Jaime Nieto (Q.E.P.D) por su apoyo, tanto financiero como emocional, para estudiar matemáticas.

Dedico este trabajo a:

mi madre Nira Nieto (Q.E.P.D)

a

mi tío Jaime Nieto (Q.E.P.D)

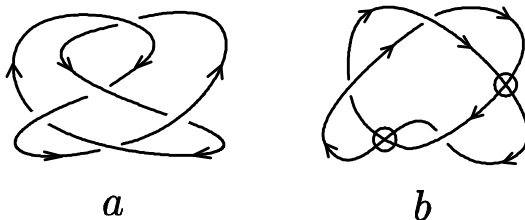
y a

mi hijo Santiago Rodríguez

# Introducción

La teoría matemática de nudos se originó con los trabajos de Gauss sobre el estudio de curvas normales en el plano  $\mathbb{R}^2$ . En ese momento un nudo era concebido como un objeto unidimensional cerrado y compacto en el espacio tridimensional, pero rápidamente esta idea se extendió al considerar otras 3-variedades. Así que en la práctica usamos la palabra nudo para referirnos al caso cuando la variedad es  $S^3$  o  $\mathbb{R}^3$ , ya que este ha sido el objeto central de la Teoría de Nudos. En este trabajo estudiaremos nudos en una 3-variedad de la forma  $\Sigma_g \times [0, 1]$ , donde  $\Sigma_g$  es una superficie orientable y compacta de género  $g$ . En 1996 Kauffman, [25] y [26], acuñó el término de "*nudo virtual*", para referirse a esta familia de nudos. Nosotros usaremos el término nudo clásico para referirnos a nudos en  $S^3$  y nudos generalizados para referirnos a otros casos. Los nudos generalizados ya habían sido considerados en muchos contextos, por ejemplo Cotta-Ramusino y Rinaldi [7] encontraron invariantes para enlaces en  $\Sigma_g \times [0, 1]$ , que producen polinomios análogos al polinomio de Jones y el polinomio HOMFLY. Jaeger, Kauffman y Saleur [21] encontraron una extensión del polinomio de Alexander-Conway en  $\mathbb{R}^3$  para nudos generalizados en  $\Sigma_g \times [0, 1]$ . Los nudos también se han extendido al estudio de embebimientos de curvas en  $n$ -variedades. Muchos autores se han dedicado al estudio de este tipo de generalizaciones, por ejemplo, en 1990, Drobotukhina introdujo el estudio de enlaces en el plano proyectivo real y los denominó enlaces proyectivos. Probó, entre otras cosas, que es posible definir el polinomio de Jones sobre la categoría de los nudos proyectivos.

Pero el trabajo de Kauffman, [25], atrajo mucha atención al tema y se generó un gran entusiasmo por la posibilidad de extender, de manera natural, muchos conceptos conocidos en el caso clásico. Kauffman introdujo el concepto de diagrama de un nudo virtual, generalizando el concepto de diagrama de un nudo clásico, al permitir un nuevo tipo de cruces, estos cruces son decorados con un círculo, que denominó cruce virtual. En la siguiente figura mostramos un ejemplo de un diagrama de un nudo clásico y uno de un nudo virtual.



Ejemplo de un diagrama de un nudo clásico y un diagrama de un nudo virtual

Entre los diagramas de nudos virtuales, Kauffman definió los movimientos generalizados de Reidemeister, extendiendo los movimientos clásicos de Reidemeister a los cruces virtuales, dando



lugar a una relación de equivalencia sobre el conjunto de los diagramas de nudos virtuales, y por tanto una nueva relación de equivalencia sobre el conjunto de los diagramas de nudos clásicos. Con la definición de nudo virtual surgieron inmediatamente los siguientes interrogantes:

(1) *¿Es realmente la teoría de los nudos virtuales una extensión no trivial de la teoría clásica de nudos?*

La respuesta es Sí. Goussarov, Polyak y Viro [14] probaron que si las proyecciones regulares de dos nudos clásicos son equivalentes bajo los movimientos generalizados de Reidemeister, entonces estos son equivalentes bajo los movimientos de Reidemeister. Además, Kauffman probó, [25], que la categoría de los nudos está estrictamente contenida en la categoría de los nudos virtuales.

(2) *¿Cuándo un diagrama de un nudo virtual es equivalente a un diagrama de un nudo clásico?*

Esta pregunta se conoce como **el problema de distinguir nudos virtuales**. La teoría de invariantes nos da condiciones necesarias para determinar cuándo un nudo virtual no es clásico, por tanto muchos investigadores en el área se han dedicado a la tarea de buscar un invariante que sea capaz de distinguir nudos virtuales de nudos clásicos. Ejemplos de tales invariantes pueden ser consultados en [1], [6], [12], [15], [16] y [30]. En este trabajo encontramos un nuevo invariante de nudos virtuales que es capaz, en muchos casos, de determinar cuándo un nudo virtual no es clásico. Este nuevo invariante, que denominaremos invariante  $\Lambda$ , será el tema del Capítulo 3. Tanto la definición del invariante  $\Lambda$  como el estudio de sus propiedades y aplicaciones constituyen el resultado central de este trabajo.

Al igual que en el caso clásico, los movimientos generalizados de Reidemeister nos dan una condición necesaria y suficiente para determinar cuándo una función es un invariante de nudos virtuales.

(3) *¿Dado un diagrama de un enlace virtual  $K$  existirá una superficie  $\Sigma_g$ , de género  $g$ , tal que  $K$  pueda ser representado por un enlace en  $\Sigma_g \times [0, 1]$ ?*

La respuesta al interrogante anterior es Sí. En efecto, Kupernberg [32] probó que todo enlace virtual está representado por un enlace  $L \subset \Sigma_g \times [0, 1]$ , donde  $\Sigma_g$  es una superficie compacta de género  $g$ .

Antes de que Kauffman introdujera la noción de nudo virtual algunos autores estaban trabajando con cierta clase de nudos que, a la luz de esta "nueva teoría", son equivalentes a la clase de los nudos virtuales. Kamada y Kamada [23] definieron el concepto de *enlace abstracto* y probaron que existe una correspondencia biunívoca entre la clase de los nudos virtuales y la clase de los enlaces abstractos.

Toro, [44], introdujo los nudos combinatorios, con la idea de diseñar algoritmos para calcular, usando el software *Mathematica*, invariantes de nudos clásicos. Los nudos combinatorios, que se definirán en detalle en el Capítulo 1, son clases de equivalencia de sucesiones de la forma  $((i_1, i_2, \dots, i_{2n}), (e_1, \dots, e_m))$ , con  $i_l \in \mathbb{Z}^*$  y  $e_j \in \{1, -1\}$  y permiten describir un diagrama de un nudo a partir de una enumeración de los cruces, de tal forma que se obtiene independencia del diagrama. Esta es la razón de su nombre. Al definir los movimientos de Reidemeister para el caso de los nudos combinatorios, rápidamente se encontró que el movimiento de tipo II cambiaba la naturaleza del nudo combinatorio, es decir, que en la clase había nudos combinatorios que no representaban nudos clásicos, por tanto surgió la necesidad de encontrar condiciones necesarias

y suficientes para determinar cuando un nudo combinatorio correspondía a un nudo en el espacio tridimensional.

Con la definición de nudo virtual, dada por Kauffman [25], probamos que las clases de equivalencia de nudos combinatorios, producidas por los movimientos de Reidemeister y otros tres movimientos, están en correspondencia biunívoca con la categoría de los nudos virtuales, y así, el problema de determinar si un nudo combinatorio representa o no un nudo clásico equivale a determinar si un nudo virtual es clásico o no.

Por otro lado, Carter, Kamada y Saito [6] encontraron una relación entre los nudos virtuales y la equivalencia estable de nudos sobre superficies y con esta relación desarrollaron métodos para distinguir nudos virtuales de nudos clásicos.

En este trabajo tenemos dos objetivos principales, el primero es estudiar nudos virtuales a través del concepto de nudo combinatorio. El segundo objetivo es estudiar algunos invariantes de nudos virtuales, teniendo como objetivo central el problema de la distinción de nudos virtuales y, como objetivo secundario, el problema de la clasificación de nudos virtuales. Nos concentraremos en estudiar el invariante  $\Lambda$ , que es un invariante definido por nosotros y que se basa en la solución del problema de la palabra signada de Gauss dada por Cairns y Elton [5]. Otro de los objetivos de este trabajo es sacar a relucir el trabajo de estos autores, que a pesar de tener gran relación con los nudos virtuales, no se acostumbra citar en la literatura especializada de nudos virtuales. Este invariante es muy eficaz a la hora de distinguir nudos virtuales comparado con otros de los invariantes que se conocen como: el polinomio  $P$  de Henrich, [16], el polinomio  $Z$  de Sawollek, [36] y el polinomio de Jones, [26], y el grupo de un nudo virtual, [30] y [46].

En el Capítulo 1 daremos una serie de definiciones básicas referentes a la teoría clásica de nudos, nudos combinatorios y nudos virtuales. Probaremos que existe una correspondencia biunívoca entre la categoría de los nudos virtuales y la de los nudos combinatorios. Esta demostración la hacemos con todo el detalle posible ya que en la literatura no hay un prueba rigurosa de la equivalencia entre las distintas formas que existen de abordar los nudos virtuales. Utilizaremos el trabajo de Carter [4] para probar que todo nudo combinatorio es realizable sobre una superficie orientable, conexa, compacta y sin frontera. Motivados por este resultado, decidimos estudiar formalmente nudos en  $\Sigma \times [0, 1]$ , donde  $\Sigma$  es una superficie orientable, conexa y compacta. Para ello consideramos la relación de equivalencia estable definida sobre tales diagramas [25], [6]. Enunciaremos, sin probar, el teorema de Carter, Kamada y Saito [6] que relaciona los nudos virtuales y nudos en  $\Sigma \times [0, 1]$ . Aunque definimos enlace virtual y lo utilizamos en algunas secciones, en general el trabajo se concentra en nudos virtuales. En todo el resto del trabajo, a partir del Capítulo 2, utilizaremos los nudos combinatorios y sólo recurriremos a diagramas de nudos virtuales para alguna aclaración.

En el Capítulo 2 estudiaremos conceptos de transformación de nudos virtuales y producción de nuevos nudos virtuales a partir de otros, como: imagen espejo, inverso, suma conexa. Todo el trabajo lo hacemos a nivel de nudos combinatorios. Para imagen espejo presentaremos dos formas diferentes de imagen espejo, que denotaremos espejo  $*$  y espejo  $\#$ , que son equivalentes cuando el nudo es clásico. Sobre la suma conexa haremos una presentación más detallada, puesto que no está bien definida para el caso de nudos virtuales, es decir, no hay independencia del diagrama ni de las posiciones relativas donde se efectúa la suma. A pesar de esto, es una valiosa construcción sobre la que daremos algunas propiedades. En este capítulo abordaremos el tema de las suavizaciones, que es una extensión del análogo en el caso de nudos clásicos y el tema de las virtualizaciones, que es una construcción específica de nudos virtuales. Trataremos

tres tipos de virtualización, dos de ellas estudiadas en [12] y la otra introducida por nosotros. Trataremos brevemente el tema de presentación en puentes y número de puentes a nivel de nudos combinatorios.

En el Capítulo 3 definiremos un nuevo invariante de nudos combinatorios, el cual llamamos invariante  $\Lambda$ , que tiene la propiedad de ser trivial sobre la categoría de los nudos clásicos. El invariante  $\Lambda$  es una clase de equivalencia de tripletas de la forma  $(E, A, B)$ , donde  $E$  es un vector de  $n$  componentes con elementos en el conjunto  $\{1, -1\}$ ,  $A \in \mathbb{Z}^n$  y  $B$  es una matriz antisimétrica de orden  $n$  con elementos enteros. Este invariante es de una categoría diferente a muchos de los invariantes que se definieron inmediatamente se introdujo el concepto de nudo virtual, y que fueron extensiones naturales de invariantes existentes. Nuestro invariante es totalmente nuevo, y aunque una de sus partes está relacionada con las matrices basadas definidas por Turaev [47], nuestra definición tiene más conexión con la solución del problema de la palabra signada de Gauss, dada por Cairns y Elton [5], que con las matrices basadas. Este capítulo es la parte central de la tesis, y es el aporte original a la teoría de los nudos virtuales. Daremos condiciones para determinar cuándo una tripleta es la tripleta de un código nudal. También estudiaremos el comportamiento de  $\Lambda$  con respecto a la imagen espejo  $*$  y  $\#$ , y al inverso. Encontraremos condiciones para determinar cuándo una virtualización de un código nudal geométrico no da lugar a un nudo combinatorio clásico, respondiendo así una pregunta planteada por Kauffman en [27].

En el Capítulo 4 estudiaremos algunos invariantes de nudos virtuales: el grupo de un nudo virtual, los  $\Lambda$ -polinomios, el polinomio  $P$  de Henrich, [16], el polinomio  $Z$  de Sawollek, [36] y el polinomio Jones [25]. Presentaremos los resultados de Kim [30], quien da condiciones para determinar cuándo un grupo  $G$  es el grupo de un nudo virtual. En el caso de que  $G$  corresponda al grupo de un nudo virtual, nosotros mostraremos un algoritmo para construir un nudo combinatorio a partir de la presentación del grupo. También estudiamos el sistema periferal de un nudo virtual. Con el grupo de un nudo virtual y sus sistema periferal encontramos condiciones para determinar cuando un nudo virtual no es clásico. Los  $\Lambda$ -polinomios son polinomios definidos por nosotros y son sensibles a los dos tipos de imagen espejo y al inverso. Daremos una definición alternativa del polinomio  $P$  de Henrich usando el invariante  $\Lambda$  de un nudo combinatorio, y demostraremos algunas propiedades de  $P$ . Definiremos, en una forma más algorítmica, el polinomio  $Z$  de Sawollek para nudos virtuales. Mostraremos un ejemplo de un nudo virtual no clásico con polinomio  $Z$  igual a cero. Por último estudiaremos el polinomio de Jones vía nudos combinatorios, para ello definiremos el polinomio bracket para nudos combinatorios. También estudiaremos el comportamiento del polinomio de Jones con respecto a las virtualizaciones.

En el Capítulo 5 hacemos una breve introducción al problema de clasificación de nudos virtuales. Para ello necesitamos definir una *forma normal* de un nudo combinatorio, y establecer un orden entre formas normales, de tal manera que podamos ir construyendo una lista de nudos virtuales, que no tenga repeticiones ni omisiones. Para definir este orden se tiene en cuenta minimizar el número de cruces y el número de puentes. Para la clasificación se utilizan los invariantes estudiados en el trabajo. Presentamos las tablas obtenidas por este método para nudos virtuales de 2 y 3 cruces, y continuar la clasificación y compararla con otras clasificaciones es uno de los trabajos futuros que deseamos desarrollar.

# Capítulo 1

## Conceptos básicos

En este capítulo estudiaremos el concepto de nudo virtual desde dos perspectivas diferentes, una, utilizando el concepto de nudo combinatorio, propuesto por Toro [44], y la otra es a través de diagramas sobre superficies orientables y compactas.

Este capítulo tiene la doble función de introducir tanto los nudos virtuales como los nudos combinatorios y a la vez mostrar que los nudos combinatorios constituyen una buena opción para estudiar nudos virtuales.

En la primera parte daremos una serie de definiciones básicas referente a la teoría clásica de nudos, nudos combinatorios y nudos virtuales. Probaremos que existe una correspondencia biunívoca entre la categoría de los nudos virtuales y la de los nudos combinatorios. Este es uno de los resultados centrales de este capítulo, por lo que su prueba se hace con mucho detalle y se da un ejemplo particular del método de prueba.

Utilizaremos el trabajo de Carter [4] para probar que todo nudo combinatorio es realizable sobre una superficie orientable, conexa, compacta y sin frontera. El método es constructivo y permite encontrar una superficie con las propiedades anteriores y que, además, es de género mínimo entre todas las superficies sobre las cuales éste se puede realizar. Con este trabajo y la solución del problema de la palabra signada de Gauss dada por Cairns y Elton [5], definiremos, en el Capítulo 3, un nuevo invariante de nudos virtuales. Motivados por lo anterior, en la Sección 1.5, estudiaremos, con mas detalle, el concepto de diagrama de un nudo sobre una superficie orientable y compacta y el de equivalencia estable definido sobre tales diagramas [25], [6]. Enunciaremos, sin probar, el teorema de Carter, Kamada y Saito [6] que relaciona los nudos virtuales y los diagramas sobre superficies.

Debido a que los nudos virtuales fueron definidos como una extensión del concepto de diagrama de un nudo clásico, iniciaremos esta sección haciendo un repaso sobre la definición de nudo clásico. Después definiremos nudo combinatorio y luego nudo virtual.

### 1.1 Nudos clásicos

En esta sección recopilaremos, sin demostraciones, los conceptos básicos y algunos teoremas de la teoría clásica de nudos que nos ayudarán a entender ciertas definiciones que daremos más adelante, ver [3], [28] y [41].

**Definición 1.1.1** Sea  $\mathcal{M}$  una 3-variedad y sea  $L \subset \mathcal{M}$ . Diremos que  $(\mathcal{M}, L)$  es un **enlace** en  $\mathcal{M}$  de  $p$  componentes si existe un embebimiento  $l : \coprod_{n=1}^p S_n \rightarrow \mathcal{M}$  cuya imagen es  $L$ , donde  $\coprod$  significa unión disjunta y  $S_n$  es homeomorfo a un círculo, para todo  $n = 1, 2, \dots, p$ . Si  $p = 1$  diremos que  $(\mathcal{M}, L)$  es un **nudo** en  $\mathcal{M}$ . Si  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3$  ó  $S^3$  diremos que  $(\mathcal{M}, L)$  o  $L$  es un **enlace clásico** y si  $p = 1$  diremos que  $(\mathcal{M}, L)$  o  $L$  es un **nudo clásico**. Por otro lado, si  $\mathcal{M} = \Sigma \times [0, 1]$ , donde  $\Sigma$  es una superficie orientable y compacta, diremos que  $(\mathcal{M}, L)$  es un **enlace en una superficie engrosada** y si  $p = 1$  diremos que  $(\mathcal{M}, L)$  es un **nudo en una superficie engrosada**. En este caso, por abuso de lenguaje, hablamos de nudo o enlace en la superficie  $\Sigma$ .

En esta primera instancia nos concentraremos en el caso  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3$ . En la Sección 1.5 estudiaremos el caso  $\mathcal{M} = \Sigma \times [0, 1]$ . Si el lector está interesado en el estudio de nudos en otro tipo de 3-variedades puede consultar el artículo de Drobotukhina [9], que hace un estudio de nudos en  $\mathbb{R}P^3$ . Si consideramos algunas de las dos posibles orientaciones que se le pueden dar a  $S^1$ , entonces  $l$  debe ser una función que preserva orientación, de esta forma cada componente de  $L$  tiene dos posibles orientaciones y, en ese caso, diremos que  $L$  es un *enlace orientado*.

En este trabajo nos concentraremos sólo en nudos, y muchos de los resultados expuestos se extienden, de manera natural, a enlaces. Exceptuando el invariante  $\Lambda$  definido en el Capítulo 3, que sólo se define para nudos.

Sea  $K \subset \mathbb{R}^3$  un nudo clásico. Un *diagrama* para  $K$  es una proyección de  $K$  sobre el plano  $z = 0$  de tal forma que: más de dos puntos no se pueden proyectar sobre uno mismo y dos segmentos no pueden tener la misma proyección. Un ejemplo de un diagrama de un nudo orientado se muestra en la Figura 1-1-a.

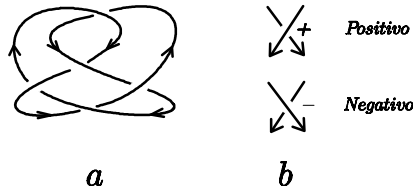


Figura 1-1: Ejemplo de un diagrama de un nudo clásico y clasificación de cruces.

Con base en el diagrama de un nudo definimos el *signo de un cruce* de acuerdo a la Figura 1-1-b.

Dos nudos clásicos orientados  $K_1$  y  $K_2$  son equivalentes si existe un homeomorfismo  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$ , que preserva orientación, tal que  $f(K_1) = K_2$ . Se denota  $K_1 \simeq K_2$ . Puesto que en gran parte del trabajo se hace uso fundamental de los diagramas y no de los nudos mismos, surge la necesidad de dar una definición de equivalencia sobre el conjunto de los diagramas

que corresponda a la equivalencia de nudos clásicos. Para definir la equivalencia de diagramas introduciremos los *movimientos de Reidemeister* que se ilustran en la Figura 1-2.



Figura 1-2: Movimientos de Reidemeister.

Los movimientos de Reidemeister son pensados en una vecindad que sólo contiene esa parte del diagrama, lo que está por fuera de dicha vecindad, queda igual. Dos diagramas son *equivalentes* si se pueden deformar uno en el otro mediante un número finito de los movimientos de Reidemeister y homeomorfismos del plano. El resultado de Reidemeister, [3], que dice que *dos nudos clásicos son equivalentes si y sólo si sus respectivos diagramas son equivalentes*, nos permite estudiar nudos clásicos vía diagramas. Esta es la aproximación que se toma para la definición de nudos combinatorios y nudos virtuales.

## 1.2 Nudos combinatorios

En esta sección estudiaremos el concepto de nudo combinatorio. Los nudos combinatorios, definidos por Toro [45] y [46], fueron introducidos como códigos que nos facilitan la forma de manipular nudos en el computador. Más adelante mostraremos que no sólo son una herramienta computacional sino también una herramienta teórica. El nombre de nudo combinatorio nace del hecho de que siempre es posible asignarle, a cada uno de estos códigos, un nudo en una 3-variedad. Los nudos combinatorios están estrechamente relacionados con las palabras signadas de Gauss y los códigos de Gauss, ver [5], [40] y [25]. Puesto que le damos un tratamiento diferente, optamos por darles un nombre diferente.

### 1.2.1 Definición de nudo combinatorio

Lo que haremos primero es mostrar un método para asignarle a un diagrama de un nudo clásico de una componente, un código que lo describa.

**Construcción de códigos:** Sea  $K$  un diagrama de un nudo clásico y etiquetemos los cruces de  $K$  con los números  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}^+$ , donde  $n$  es el número de cruces de  $K$ . Tomemos un punto sobre  $K$ , que no sea un cruce. Recorramos el diagrama a partir de dicho punto en el sentido de la orientación, y formemos una lista con los números de los cruces que nos vayamos encontrando en el recorrido, con la convención de que si pasamos por debajo del cruce  $a_i$ ,

ponemos  $-a_i$  y si pasamos por encima del cruce  $a_i$ , ponemos  $a_i$ . Denotaremos la lista construida anteriormente por  $C(K)$ . Construyamos la lista  $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ , donde  $m = \max_{i=1,2,\dots,3} \{a_i\}$  y para todo  $j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $e_j = 1$  si  $j = a_i$  y el cruce  $a_i$  es positivo,  $e_j = -1$  si  $j = a_i$  y el cruce  $a_i$  es negativo, y  $e_j = 1$  ó  $e_j = -1$ , en los otros casos. Esta lista la denotaremos por  $S(K)$ . A la pareja ordenada  $(C(K), S(K))$  la llamaremos *código nudal* de  $K$ . Note que con esta convención pueden existir enteros, entre 1 y  $m$ , que no correspondan a cruces del diagrama.

Si el diagrama tiene  $p$  componentes, entonces aplicamos el procedimiento anterior a cada una de las componentes del diagrama, obteniéndose así una pareja ordenada de la forma  $(\{C_1(K), \dots, C_m(K)\}, S(K))$ , donde  $C_i(K)$  es la correspondiente lista que se construye al recorrer la componente  $i$ -ésima de  $K$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ . A la pareja  $(\{C_1(K), \dots, C_p(K)\}, S(K))$  la llamaremos *código enlace* de  $K$ .

**Ejemplo 1.2.1** Consideremos los diagramas mostrados en la Figura 1-3.

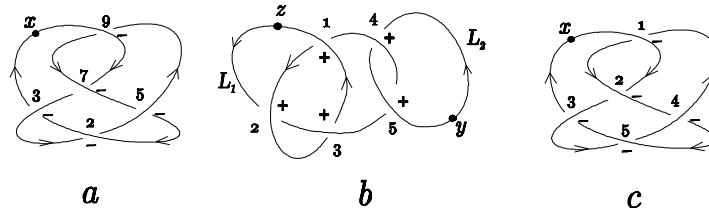


Figura 1-3: Nudo y enlace clásico enumerados.

Si recorremos el diagrama del nudo clásico  $a$  a partir del punto  $x$  obtenemos el siguiente código nudal:  $((9, -7, 3, -2, 5, -9, 7, -5, 2, -3), (1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1))$ . Por otro lado, si hacemos lo mismo con el enlace clásico  $b$ , a partir del punto  $z$  en la componente  $L_1$  y a partir del punto  $y$  en la componente  $L_2$ , obtenemos el código enlace  $(\{(-2, 3, -5, 4, -1, 2, -3, 1), (-4, 5)\}, (1, 1, 1, 1, 1))$ . Para el nudo clásico  $c$  tenemos el código nudal  $((-1, 2, -4, 5, -3, 1, -2, 3, -5, 4), (-1, -1, -1, -1, -1))$ .

La construcción anterior motiva la siguiente definición.

**Definición 1.2.1** Un *código nudal* o *código* de  $n$  cruces lo definimos como la pareja ordenada,

$$((i_1, i_2, \dots, i_{2n}), (e_1, \dots, e_m)),$$

tal que, como conjuntos,  $\{i_1, i_2, \dots, i_{2n}\} = \{a_1, \dots, a_n\} \cup \{-a_1, \dots, -a_n\}$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ , y  $e_j \in \{1, -1\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , donde  $m \geq \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . A las sucesiones  $(i_1, i_2, \dots, i_{2n})$  y  $(e_1, \dots, e_m)$  las llamaremos *listas de cruces* y *de signos*, respectivamente.

Definimos el *código nudal trivial* como  $(( ), ( ))$ .

Un código nudal está en forma **estándar** si  $\{a_1, \dots, a_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$  y  $m = n$ .

Un **código enlace** o **código de  $p$  componentes** es una pareja ordenada de la forma

$$\left( \left\{ \overbrace{(i_1, \dots, i_t), \dots, (j_1, \dots, j_s)}^{p\text{-sucesiones}} \right\}, (e_1, \dots, e_m) \right),$$

tal que, como conjuntos  $\{i_1, \dots, i_t\} \cup \dots \cup \{j_1, \dots, j_s\} = \{a_1, \dots, a_n\} \cup \{-a_1, \dots, -a_n\}$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ , y  $e_j \in \{1, -1\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , donde  $m \geq \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .

Definimos el **código enlace trivial** de  $p$  componentes como

$$\left( \left\{ \overbrace{(), \dots, ()}^{p\text{-sucesiones}} \right\}, () \right)$$

Con la idea de no dar una notación recargada, pues el tratamiento con los códigos de enlaces requieren de ciertos tecnicismos, las definiciones y teoremas que trataremos en el resto de este trabajo se harán en el ámbito de los códigos nudales. Todos los resultados se extienden de manera natural a códigos enlaces, exceptuando lo hecho en el Capítulo 3.

Dado el código  $K = ((i_1, \dots, i_{r-1}, h, i_{r+1}, \dots, i_{t-1}, j, i_{t+1}, \dots, i_{2n}), (e_1, \dots, e_m))$ , si  $C$  denota la subsucesión  $i_1, \dots, i_{r-1}$ ,  $D$  la subsucesión  $i_{r+1}, \dots, i_{t-1}$  y  $G$  la subsucesión  $i_{t+1}, \dots, i_{2n}$ , entonces  $K$  lo escribimos también como  $K = ((C, h, D, j, G), (e_1, \dots, e_m))$ .

Los códigos de Gauss se construyen de una manera similar que los códigos nudales. Hay varios autores que utilizan códigos de Gauss, pero nuestra referencia central es el trabajo de Kauffman [25]. Él realiza una enumeración estándar, de 1 hasta  $n$ , donde  $n$  es el número de cruces clásicos, para diagrama y utiliza los símbolos  $Ui \pm$  y  $Oi \pm$  para indicar que el diagrama se recorre por debajo o por encima, respectivamente, cuando se atraviesa el cruce  $i$ , y  $\pm$  representa el signo de dicho cruce. Por ejemplo si recorremos el diagrama del nudo dado en la Figura 1-3 c a partir del punto  $x$  obtenemos el código de Gauss  $O1 - U2 - O3 - U5 - O4 - U1 - O2 - U4 - O7 - U3 -$ . Como podemos ver tenemos ventaja al trabajar con códigos nudales, pues la enumeración no necesariamente tiene que ser estándar, y además admitimos signos de cruces que no existen.

Denotemos el conjunto de los códigos nudales por  $NC$ .

La definición de código nudal nos da la posibilidad de hacer un tratamiento que no dependa de diagramas, como se verá en el Capítulo 5, donde trataremos brevemente el problema de clasificación de nudos virtuales. Sin embargo, para tener un mejor entendimiento geométrico de cómo nacieron las relaciones de equivalencia que definimos sobre el conjunto de los códigos nudales, debemos tener como referencia a los diagramas de nudos clásicos.

Ahora bien, a un diagrama de un nudo clásico le hemos asignado un código que guarda cierta información de éste, entonces surge el siguiente interrogante *¿Cuándo dos códigos representan*



el mismo diagrama? Buscando darle solución al interrogante anterior definimos las siguientes transformaciones sobre el conjunto de los códigos nudales.

**Transformaciones de Tipo A o rotaciones:**

$$((i_1, i_2, \dots, i_{2n}), (e_1, \dots, e_m)) \approx ((i_t, i_{t+1}, \dots, i_{2n}, i_1, \dots, i_{t-1}), (e_1, \dots, e_m)),$$

para todo  $t = 2, \dots, 2n$ .

Lo que nos dice esta transformación es que los códigos nudales no dependan del punto inicial. Cabe aclarar que la lista de signos no se altera.

**Transformaciones de Tipo B o reenumeraciones:**

$$((i_1, i_2, \dots, i_{2n}), (e_1, \dots, e_m)) \approx ((j_1, j_2, \dots, j_{2n}), (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l))$$

si existe una función biyectiva  $\varphi : \{i_1, \dots, i_{2n}\} \rightarrow \{j_1, \dots, j_{2n}\}$ , tal que, para todo  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $\varphi(-i_k) = -\varphi(i_k)$  y  $\varepsilon_{|\varphi(i_k)|} = e_{|i_k|}$ .

Lo que nos dice esta transformación es que los códigos nudales no dependen de la enumeración de los cruces escogida.

**Transformaciones de Tipo C o simplificaciones de la lista de signos:**

$$((i_1, i_2, \dots, i_{2n}), (e_1, \dots, e_m, e_{m+1})) \approx ((i_1, i_2, \dots, i_{2n}), (e_1, \dots, e_m)),$$

si  $m \geq \max_{j=1, \dots, 2n} \{|i_j|\}$  y  $e_{m+1} \in \{1, -1\}$ .

Si permitimos las transformaciones anteriores sobre el conjunto de los códigos nudales, entonces hemos resuelto el problema de la dependencia del punto inicial y de la selección de los números de la enumeración de los cruces. Ahora pensaremos en la independencia del diagrama, es decir, si dos diagramas son equivalentes entonces sus respectivos códigos deben ser equivalentes y viceversa.

Sin pérdida de generalidad podemos enumerar los cruces con los enteros  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

**Movimientos de Reidemeister de Tipo I:** Este movimiento consiste en eliminar el cruce  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  siempre y cuando  $j$  y  $-j$  o  $-j$  y  $j$  ocurran consecutivamente. Así

$$\begin{aligned} ((F, j, -j, D), (e_1, \dots, e_m)) &\approx ((F, D), (e_1, \dots, e_m)), \text{ ó,} \\ ((F, -j, j, D), (e_1, \dots, e_m)) &\approx ((F, D), (e_1, \dots, e_m)), \end{aligned}$$

Donde  $A$  y  $B$  son subsucesiones de la lista de cruces.

Observemos que no modificamos la lista de signos, aunque nuestro código tenga menos cruces. Recordemos que en nuestra definición de código nudal permitimos tener signos para cruces no existentes, esto lo hicimos con el fin de que no haya la necesidad de reenumerar cada vez que

se eliminen cruces usando estos movimientos.

**Movimientos de Reidemeister de Tipo II:** Este movimiento consiste en eliminar dos cruces, digamos  $h$  y  $j$ , siempre que se dé la siguiente situación:

$$\begin{aligned} ((F, h, j, D, -h, -j, G), (e_1, \dots, e_m)) &\approx ((F, D, G), (e_1, \dots, e_m)), \text{ o,} \\ ((F, h, j, D, -j, -h, G), (e_1, \dots, e_m)) &\approx ((F, D, G), (e_1, \dots, e_m)). \end{aligned}$$

si y sólo si  $j$  y  $h$  son números del mismo signo y  $e_{|j|} = -e_{|h|}$ .

Al igual que para los movimientos de Reidemeister de Tipo I, aquí no modificamos la lista de signos.

**Movimientos de Reidemeister de Tipo III:** En este movimiento están involucrados tres cruces,  $i$ ,  $j$  y  $w$  y se requieren condiciones que dan lugar a 16 casos en los cuales se puede efectuar el movimiento. En todos los casos el movimiento de tipo III es de la forma

$$((F, -i, -j, D, p, q, G, t, s), (e_1, \dots, e_m)) \approx ((F, -j, -i, D, q, p, G, s, t), (e_1, \dots, e_m))$$

si y sólo si se cumple una de las siguientes condiciones sobre los enteros  $p, q, t, s$  y los signos de los cruces  $i, j, w$  que se presentan en la tabla

	R3-1	R3-2	R3-3	R3-4	R3-5	R3-6	R3-7	R3-8
$p$	$\mp w$	$\mp w$	$\pm w$	$\pm w$	$j$	$i$	$i$	$j$
$q$	$j$	$j$	$i$	$i$	$\mp w$	$\mp w$	$\pm w$	$\pm w$
$t$	$\pm w$	$i$	$\mp w$	$j$	$\pm w$	$j$	$\mp w$	$i$
$s$	$i$	$\pm w$	$j$	$\mp w$	$i$	$\pm w$	$j$	$\mp w$
$e_i$	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1
$e_j$	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1
$e_w$	$\mp 1$	$\pm 1$	$\mp 1$	$\pm 1$	$\pm 1$	$\mp 1$	$\pm 1$	$\mp 1$

Tabla 1.1

**Definición 1.2.2** Dos códigos nudales  $K_1$  y  $K_2$  son equivalentes, denotado  $K_1 \approx K_2$ , si  $K_1$  puede ser transformado en  $K_2$  por medio de un número finito de transformaciones de Tipo A, B y C y de movimientos de Reidemeister.

La relación  $\approx$  define una relación de equivalencia sobre el conjunto de los códigos nudales.

**Definición 1.2.3** A las clases de equivalencia de códigos nudales las llamaremos **nudos combinatorios**.

Si omitimos la transformación de tipo A, entonces a las clases de equivalencia las llamaremos **nudos combinatorios largos**, esto da lugar a los **long virtual knots**, [38] y [14]. En

este trabajo no trataremos este tema. En muchas ocasiones utilizaremos la notación  $[K]$  (o por comodidad  $K$ ), para referirnos a la clase de equivalencia del código nudal  $K$ . Un nudo combinatorio  $[K]$  se dice *trivial* si  $K$  es equivalente a  $(( ), ( ))$ .

**Definición 1.2.4** Diremos que un código nudal es **geométrico** si es el código nudal de un diagrama de un nudo clásico. Diremos que un nudo combinatorio es **clásico** si tiene un representante que es geométrico.

Es posible que un nudo combinatorio clásico tenga algún representante que no es geométrico.

## 1.2.2 Sobre realizaciones de nudos combinatorios

Usando teoría de invariantes probaremos que existen nudos combinatorios que no son clásicos. Por tanto surge el interrogante *¿qué tipo de diagramas podemos asignarles a códigos nudales que no son geométricos?* En otras palabras *¿cómo podemos realizar un código nudal?* En esta sección motivaremos, mediante un ejemplo concreto, el significado de realización de un código nudal. Después utilizaremos el algoritmo de Carter [4] para probar que todo código nudal es el código de un "diagrama" sobre una superficie. Otro tipo de realización se estudiará en la Sección 1.3.

### 1.2.2.1 Curvas normales

Hablar sobre realizaciones de código nudales obliga a hablar de curvas normales sobre superficies, por tanto, antes de abordar el problema de la realización de un código nudal haremos una breve introducción a la clasificación de las curvas normales. Consideremos la siguiente definición.

**Definición 1.2.5** Una **curva cerrada** de  $m$  componentes en una superficie  $\Sigma$  es una pareja ordenada  $(\Sigma, \gamma)$ , donde  $\gamma : \coprod_{j=1}^m S_j \rightarrow \Sigma$  es una función continua de la unión disjunta  $\coprod_{j=1}^m S_j$  en una superficie orientable y compacta  $\Sigma$ , donde  $S_j$  es homeomorfo a un círculo, para todo  $j = 1, \dots, m$ . Una curva cerrada  $(\Sigma, \gamma)$  se dice **normal** si  $\gamma$  tiene sólo un número finito de intersecciones consigo misma, las cuales son transversales en los puntos de intersección. A los puntos de intersección los llamaremos cruces de  $\gamma$ . Una curva normal  $(\Sigma, \gamma)$  se dice **curva normal plana** si  $\Sigma = S^2$ .

**Definición 1.2.6** Dos curvas normales  $(\Sigma, \gamma)$  y  $(\tilde{\Sigma}, \tilde{\gamma})$  se dicen **geotópicas** si existe un homeomorfismo  $\varphi : \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$  tal que  $\varphi(\gamma) = \tilde{\gamma}$ . Se dice que  $(\Sigma, \gamma)$  y  $(\tilde{\Sigma}, \tilde{\gamma})$  son **geotópicamente estables** si podemos remover o agregar un número finito de 1-asas de  $\Sigma \setminus \{\gamma\}$  o de  $\tilde{\Sigma} \setminus \{\tilde{\gamma}\}$ , respectivamente, y obtener curvas normales  $(\Gamma, \gamma)$  y  $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\gamma})$  tales que  $(\Gamma, \gamma)$  y  $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\gamma})$  son geotópicas.

Para estudiar el problema de la equivalencia de curvas normales Carter [4] utilizó el concepto de palabra signada de Gauss, que es una variante de las palabras estudiadas, anteriormente, por Gauss, [13]. Con la clasificación de curvas normales, Cairns y Elton [5] encuentran condiciones necesarias y suficientes para determinar cuándo una curva normal de una componente es plana. Nosotros utilizaremos los resultados de Carter para encontrar una realización de un código nudal, y las condiciones de Cairns y Elton para determinar si tal realización corresponde a un nudo clásico o no.

Sea  $S = \{a_1, \dots, a_n\} \cup \{a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}\}$  un alfabeto. Una frase en el alfabeto  $S$  es un conjunto de la forma  $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ , donde cada elemento de  $\omega$  es una palabra en el alfabeto  $S$ . Una frase es una *frase signada de Gauss* si la suma de las longitudes de todas sus palabras es  $2n$  y no tiene letras repetidas, es decir, se usan todas las letras del alfabeto. Si la frase tiene una sola componente, diremos que es una *palabra signada de Gauss*.

**Definición 1.2.7** *Dos frases signadas de Gauss, sobre alfabetos de la misma cardinalidad, son isomorfas si una de ellas se puede transformar en la otra por medio de un número finito de las siguientes operaciones:*

*P1: Cambiar el nombre de las letras  $a_1, \dots, a_n$ ,*

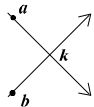
*P2: Permutar el orden de las palabras de la frase.*

*P3: Permutar cíclicamente cualquier palabra de la frase,*

*P4: Reversar cualquier palabra de la frase, y*

*P5: Cambiar el signo de los superíndices de todas las letras que conforman las palabras de la frase.*

Hemos definido frase signada de Gauss, lo que haremos ahora es mostrar un método para asignarle una frase signada de Gauss a una curva normal  $(\Sigma, \gamma)$ . Como el lector podrá notar, este proceso de asignación es semejante al de los códigos nudales. En efecto, sea  $(\Sigma, \gamma)$  una curva normal de  $m$  componentes, y sean  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  sus respectivas componentes. Nombremos los cruces de  $\gamma$  con las letras  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , donde  $k$  es el número de cruces de  $\gamma$ . Ahora proporcionemos una orientación a cada  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Escojamos una componente de  $\gamma$ , digamos  $\gamma_i$ , y recorramosla iniciando en un punto cualquiera sobre ella, que no sea cruce. Ahora bien, dado

un cruce  diremos que el cruce se recorre en forma positiva si es recorrido a partir del punto  $b$  y se recorre en forma negativa si es recorrido a partir del punto  $a$ . Construyamos una palabra de la siguiente manera: cuando pasamos por el cruce  $k$  escribimos  $a_k$  si el cruce es recorrido de forma positiva, o  $a_k^{-1}$  si el cruce es recorrido de forma negativa. Terminamos el proceso cuando hayamos regresado al punto inicial. La sucesión que construimos se llama *la palabra signada de  $\gamma_i$*  y la denotaremos por  $\omega_i$ . Si realizamos la construcción anterior para cada

$i = 1, 2, \dots, m$ , entonces  $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$  es una frase signada de Gauss asociada a  $\gamma$ . Si  $\gamma$  tiene una sola componente lo que construimos es una palabra signada de Gauss asociada a  $\gamma$ .

Observemos que la asignación de una frase signada de Gauss a una curva normal es muy similar a la de código enlace de un nudo clásico. Solo que las curvas normales viven en superficies, que no necesariamente son  $S^2$ , y los diagramas de nudos clásicos en el plano.

Es muy natural obtener una palabra signada de Gauss a partir de un código nudal.

**Lema 1.2.1** *Sea  $K = ((i_1, \dots, i_{2n}), (e_1, \dots, e_m))$  un código nudal. Supongamos que  $\{i_1, \dots, i_{2n}\} = \{a_1, \dots, a_n\} \cup \{-a_1, \dots, -a_n\}$ , donde  $a_j \in \mathbb{N}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , entonces*

$$\omega_K = |i_1|^{\varepsilon_{i_1}} |i_2|^{\varepsilon_{i_2}} \dots |i_{2n}|^{\varepsilon_{i_{2n}}},$$

donde  $\varepsilon_{i_j} = -e_{i_j}$  si  $i_j > 0$  o  $\varepsilon_{i_j} = e_{-i_j}$  si  $i_j < 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2n$ , es una palabra signada de Gauss en el alfabeto  $\{a_1, \dots, a_n\} \cup \{a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}\}$ .

El recíproco es un tanto diferente ya que, dada una palabra signada de Gauss  $\omega$ , existen varios códigos nudales  $K$  tales que  $\omega_K = \omega$ . Por ejemplo, para la palabra signada de Gauss  $\omega = 1^{-1}23^{-1}4^{-1}2^{-1}423$  los códigos nudales  $K_1 = ((1, -2, 3, 4, 2, -4, -2, -3), (1, 1, 1, 1))$  y  $K_2 = ((-1, 2, -3, -4, -2, 4, 2, 3), (-1, -1, -1, -1))$  son tales que  $\omega_{K_1} = \omega_{K_2} = \omega$ . Veamos como construir un código nudal a partir de una palabra signada de Gauss, en efecto, sea  $\omega = a_{i_1}^{j_1} a_{i_2}^{j_2} \dots a_{i_{2n}}^{j_{2n}}$  una palabra signada de Gauss en el alfabeto  $\{a_1, \dots, a_n\} \cup \{a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}\}$  tal que  $a_j \in \mathbb{N}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , y sea  $K_\omega$  el código nudal  $((j_1 a_{i_1}, \dots, j_{2n} a_{i_{2n}}), (-1, \dots, -1))$ . Puesto que  $\varepsilon_{j_t a_{i_t}} = j_t$ , para todo  $t = 1, 2, \dots, n$ , entonces  $\omega_{K_\omega} = \omega$ . De lo anterior podemos afirmar que a toda palabra signada de Gauss le corresponde un código nudal. Este código nudal no es único. Sea  $K = ((i_1, \dots, i_{2n}), (e_1, \dots, e_m))$  un código nudal tal que  $\omega_K = \omega$ . Fijemos un cruce  $a_j$  cualquiera de  $K$  y sea  $K_{a_j}$  el código nudal  $((k_1, \dots, k_{2n}), (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m))$  obtenido de  $K$  al intercambiar el signo de las dos ocurrencias de  $a_j$  y  $-a_j$  en su lista de cruces,  $\tilde{e}_k = e_k$ ,  $k \neq a_j$  y  $\tilde{e}_{a_j} = -e_{a_j}$ . No es difícil ver que  $\omega_{K_{a_j}} = \omega$ . Por tanto, si  $\omega$  es una palabra signada de Gauss de longitud  $2n$ , entonces hay  $2^n$  códigos nudales  $K$  tales que  $\omega_K = \omega$ .

Así, si  $K$  es un código nudal y  $\omega_K$  su respectiva palabra signada de Gauss, entonces al encontrar una realización para  $\omega_K$  obtendremos una realización para  $K$ . A la realización de  $\omega_K$  la llamaremos la *sombra* de la realización de  $K$ . Hay una estrecha relación entre la sombra de nudos virtuales y los flat virtual knot [25].

En [4], Carter asigna a una frase signada de Gauss  $\omega$  una superficie, compacta, orientable y sin frontera  $M_\omega$ , que llamaremos superficie de Carter, la cual tiene inmersa una curva normal  $\gamma_\omega$  cuya frase signada de Gauss es  $\omega$ . Además, esta superficie tiene la particularidad de ser la de género mínimo entre todas las superficies orientables y compactas, que tienen una curva normal inmersa con frase signada de Gauss  $\omega$ . Con esta construcción, ver [4], Carter hace una clasificación de curvas normales que se resume en el siguiente teorema.

**Teorema 1.2.2** *Existe una correspondencia biunívoca entre las clases de isomorfismo de frases signadas de Gauss y las clases de geotopía estable de curvas normales sobre superficies.*

Si la superficie de Carter de una frase signada de Gauss  $\omega$  es  $S^2$ , entonces diremos que  $\omega$  es una frase signada de Gauss plana. A partir de este hecho, Cairns y Elton [5], dieron condiciones necesarias y suficientes para determinar cuándo una palabra signada de Gauss es plana. En el Capítulo 3 retomaremos este trabajo para definir un invariante de nudos virtuales que resulta ser muy poderoso.

### 1.2.2.2 Realización de Carter

Dado un diagrama de un nudo clásico  $D$  siempre existe un código nudal asociado a  $D$ . Ahora consideremos el recíproco, es decir, dado un código nudal  $K$  ¿existirá un diagrama de un nudo clásico cuyo código nudal sea  $K$ ? Mas general, ¿Existirá  $K'$ , código nudal geométrico, tal que  $K \approx K'$ ? En general la respuesta es NO, por ejemplo, el código  $K = ((1, 2, -1, 3, -4, -3, 4, -2), (1, -1, 1, -1))$  no es un código nudal geométrico. En la Figura 1-4 se muestra un intento por construir un diagrama para  $K$ .

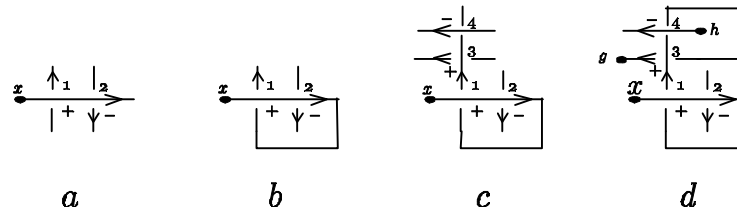


Figura 1-4: Construcción de diagrama.

Observemos que es imposible conectar los extremos  $g$  y  $h$  sin crear un nuevo cruce. Es claro que el proceso anterior no es una prueba rigurosa de que  $K$  no es un código nudal geométrico, mas adelante, en el Capítulo 3, daremos al lector herramientas para probar que  $K$  no es equivalente a un código geométrico.

Ahora pensemos en qué tipo de diagrama podemos asociarle a  $K$ . Una forma es considerar la posibilidad de "dibujar" sobre el doble toro  $T\#T$ , es decir, pensar en un concepto de diagrama, similar al hecho en  $\mathbb{R}^2$ , pero esta vez sobre el doble toro. Un ejemplo de este tipo de diagramas se muestra en la Figura 1-5.

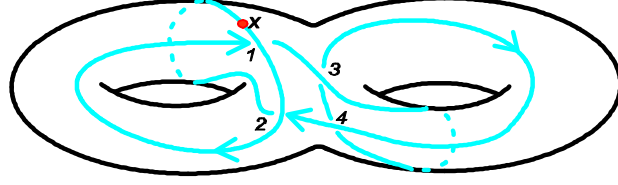


Figura 1-5: Diagrama de un nudo en el toro.

Notemos que si recorremos la curva a partir del punto  $x$  obtenemos el código  $K$ . En este caso diremos que  $K$  es realizable sobre la superficie  $T\#T$ . Mas adelante probaremos que para todo código nudal existe una superficie sobre la cual éste pueda ser realizado.

A grosso modo, la idea de la prueba del siguiente teorema es: si  $K$  es un código nudal y  $\omega_K$  su respectiva palabra signada de Gauss, entonces a partir de la curva normal  $(M_{\omega_K}, \gamma_{\omega_K})$  podemos encontrar una realización de  $K$  sobre  $M_{\omega_K}$ .

Para no tener que convertir los códigos nudales en palabras signadas de Gauss, construiremos la superficie de Carter a partir del código nudal dado, y de este modo obtendremos un algoritmo que construye una superficie de género mínimo sobre la cual podamos realizar dicho código nudal.

**Teorema 1.2.3** *Sea  $K$  un código nudal, entonces existe  $g \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  tal que  $K$  es realizable sobre la superficie  $M_K = T\#T\#\dots\#T$  ( $g$ -veces). Además,  $M_K$  tiene la propiedad de ser la superficie de género mínimo entre todas las superficies orientables, compactas y conexas sobre las cuales  $K$  es realizable.*

**Prueba.** La prueba se basa en el algoritmo de Carter, ver [4]. No perdemos generalidad si los códigos están en forma estándar.

**Existencia:** Sea  $K = ((i_1, i_2, \dots, i_{2n}), (e_1, \dots, e_n))$  un código tal que  $\{i_1, i_2, \dots, i_{2n}\} = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$ . Consideremos el 2-complejo simplicial  $M_K$ , cuyos vértices están nombrados con los números  $1, 2, \dots, n$ . Los lados  $l_1, \dots, l_{2n}$ , están etiquetados por las parejas ordenadas  $[i_1, i_2], [i_2, i_3], [i_3, i_4], \dots, [i_{2n-1}, i_{2n}], [i_{2n}, i_1]$ . Diremos que los lados así definidos están orientados positivamente, y si se recorre el lado  $[i_t, i_{t+1}]$  de  $i_{t+1}$  hasta  $i_t$  se dice que el lado se está recorriendo en la dirección negativa y se denotará por  $-[i_t, i_{t+1}]$ . Cabe aclarar que podemos tener aristas etiquetadas con alguna de las cuatro formas  $[i_t, -j], [i_t, j], [j, i_s]$  y  $[-j, i_s]$ , con  $j > 0$ .

Primero daremos un algoritmo para construir una cara de  $M_K$ .

**Algoritmo:**

El algoritmo que presentamos a continuación nos dará un método para construir la frontera de una cara de  $M_K$ . Está cara quedará unívocamente determinada por la forma en como recorramos la arista con la cual iniciamos el algoritmo.

**Paso 1:** Seleccionamos una arista, digamos  $l_t$ .

**Paso 2:** Este paso dependerá de cómo recorramos la arista  $l_t$ .

Si recorremos  $l_t$  en la dirección positiva, entonces, al terminar de recorrer dicha arista sumamos o restamos  $l_s$  de acuerdo a la siguiente regla:

$R1$  : si  $l_t = [i_t, -e_j j]$  entonces restamos  $l_s$ , donde  $l_s = [i_s, e_j j]$ , o,

$R2$  : si  $l_t = [i_t, e_j j]$  entonces sumamos  $l_s$ , donde  $l_s = [-e_j j, i_s]$ .

Si recorremos  $l_t$  en la dirección negativa, entonces, al terminar de recorrer dicha arista sumamos o restamos  $l_s$  de acuerdo a la siguiente regla:

$R3$  : si  $l_t = [-e_j j, i_t]$  entonces sumamos  $l_s$ , donde  $l_s = [e_j j, i_s]$ , o,

$R4$  : si  $l_t = [e_j j, i_t]$  entonces restamos  $l_s$ , donde  $l_s = [i_s, -e_j j]$ .

**Paso 3:** Aplicamos, sucesivamente, el Paso 2 hasta volver a recorrer la arista  $l_t$  en la misma dirección en que iniciamos el Paso 2. Como estamos trabajando con un número finito de aristas, eventualmente volvemos a recorrer la arista  $l_t$  en la misma dirección.

Por el hecho de que tenemos un número finito de aristas, el algoritmo anterior termina y la curva que se construye es, en efecto, cerrada. Denotemos por  $\partial f_1$  a la curva construida. Es posible que  $\partial f_1$  recorra una misma arista en ambas direcciones o varias veces un mismo vértice, por tanto  $\partial f_1$  se dibujará sin realizar tales identificaciones. Su interior, que denotaremos por  $f_1$ , será un polígono cuya orientación es la inducida por el orden en que se han ido sumando o restando sus respectivos lados, según el algoritmo anterior.

Para construir otra cara de  $M_K$  tomamos una arista que no haya sido recorrida, en ambas direcciones, por  $\partial f_1$ . Supongamos que la arista es  $l_g$ . Luego aplicamos los Pasos 1, 2 y 3 tomando en el Paso 1 a  $l_g$ . Cabe aclarar que, en este caso, el Paso 2 lo aplicamos recorriendo a  $l_g$  en la dirección que no fue recorrida por  $\partial f_1$ . Ahora bien, si  $\partial f_1$  no recorre, de ninguna forma, a  $l_g$ , entonces escogemos cualquier orientación de  $l_g$  para aplicar el Paso 2. Esta nueva cara la denotaremos por  $f_2$ . El conjunto de las caras de  $M_K$  será  $\{f_1, \dots, f_m\}$  siempre y cuando todas las aristas  $l_1, \dots, l_{2n}$  hayan sido recorridas en sus respectivas dos direcciones por  $\partial f_1, \dots, \partial f_m$ .

Dos caras  $f_i, f_j$  se identificarán a lo largo de la arista  $l_t$ , conservando la orientación de ésta, si y sólo si  $l_t \in \partial f_i$  y  $-l_t \in \partial f_j$  ó  $-l_t \in \partial f_i$  y  $l_t \in \partial f_j$ . Es posible que  $\pm l_t \in f_i$ . Por la construcción anterior, las caras del complejo simplicial  $M_K$  se identifican únicamente en los lados definidos, por tanto,  $M_K$  es, en realidad, una superficie. Además, puesto que  $M_K$  es un complejo que usa un número finito de polígonos y tiene una sola componente, entonces  $M_K$  es una superficie compacta y conexa.

Debido a que cada lado lo recorremos dos veces, en sentido contrario, obtenemos una superficie que no tiene frontera.

Sean  $f_1, \dots, f_m$  todas las caras de  $M_K$ . Debido a que cada lado lo recorremos en los dos sentidos, entonces  $\partial(f_1 + \dots + f_m) = 0$ , con lo que  $M_K$  es orientable.

Sea  $\gamma_K = [i_1, i_2] + [i_2, i_3] + [i_3, i_4] + \dots + [i_{2n-1}, i_{2n}] + [i_{2n}, i_1]$ . Es claro que  $\gamma_K$  es una curva normal cerrada sobre  $M_K$ .



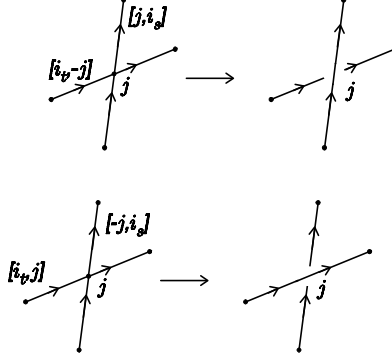


Figura 1-6: Transformación de vértices en cruces.

Las transformaciones mostradas en la Figura 1-6 se pueden aplicar a cada cruce de  $\gamma_K$  obteniendo así un nudo en  $M_K \times [0, 1]$ , que denotaremos por  $D_K$ . Además, si tomamos un punto  $x$  sobre la arista  $[i_1, i_2]$  y recorremos  $D_K$  a partir del punto  $x$  obtenemos el código  $K$ . Lo que significa que  $D_K$  es una realización de  $K$  sobre  $M_K$ .

**Minimalidad:** Sea  $K$  un código en forma estándar, entonces  $\omega_K = |i_1|^{\varepsilon_{i_1}} |i_2|^{\varepsilon_{i_2}} \dots |i_{2n}|^{\varepsilon_{i_{2n}}}$ , donde  $\varepsilon_{i_j} = -e_{i_j}$  si  $i_j > 0$  y  $\varepsilon_{i_j} = e_{-i_j}$  si  $i_j < 0$ , es una palabra signada de Gauss en el alfabeto  $\{1, \dots, n\} \cup \{-1, -2, \dots, -n\}$ . La construcción de  $M_K$  sigue el mismo algoritmo para construir la superficie  $M_{\omega_K}$ , por tanto,  $M_K = M_{\omega_K}$  y, además  $\gamma_K = \gamma_{\omega_K}$ . En [4] Carter prueba la minimalidad de  $M_{\omega_K}$  con respecto a  $\gamma_{\omega_K}$ , usando ese hecho tenemos que  $M_K$  es la superficie de género mínimo sobre la cual se puede realizar  $K$ . ■

Sea  $K$  un código nudal, a la superficie  $M_K$  la llamaremos la *superficie de Carter* de  $K$ , a  $D_K$  la *realización de Carter* de  $K$  sobre  $M_K$  y a la pareja  $(M_K, D_K)$  la *representación de Carter* para  $K$ .

El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento para construir la superficie de Carter de un código nudal  $K$ . En este mismo ejemplo se muestra la dificultad de dibujar la realización de Carter de dicho código.

**Ejemplo 1.2.2** Tomemos el nudo combinatorio  $K = ((-1, -2, 3, 1, -4, -3, 5, 4, 2, -5), (-1, -1, -1, -1))$ . Los vértices de  $M_K$  están nombrados por 1, 2, 3, 4, 5; los lados por  $[-1, -2]$ ,  $[-2, 3]$ ,  $[3, 1]$ ,  $[1, -4]$ ,  $[-4, -3]$ ,  $[-3, 5]$ ,  $[5, 4]$ ,  $[4, 2]$ ,  $[2, -5]$ ,  $[-5, -1]$  y las caras por  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$ , donde

$$\begin{aligned} \partial f_1 &= [-2, 3] - [-4, -3] - [5, 4] + [-5, -1] + [1, -4] + [4, 2] - [-1, -2] - [3, 1] + [-3, 5] - [2, -5], \\ \partial f_2 &= [-1, -2] + [2, -5] + [5, 4] - [1, -4] \text{ y} \\ \partial f_3 &= [3, 1] - [-5, -1] - [-3, 5] - [-2, 3] - [4, 2] + [-4, -3]. \end{aligned}$$

En este caso,  $\mathcal{X}(M_K) = 5 - 10 + 3 = -2$ , con lo que el género de  $M_K$  es 2. Lo que significa que podemos realizar a  $K$  en  $T \# T \times [0, 1]$ . Debido a que es difícil hacer una identificación adecuada

de las caras  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$  para encontrar la respectiva realización de  $K$ , entonces hacemos un dibujo de una posible realización de  $K$  sobre  $T\#T \times [0, 1]$ , ver Figura 1-7.

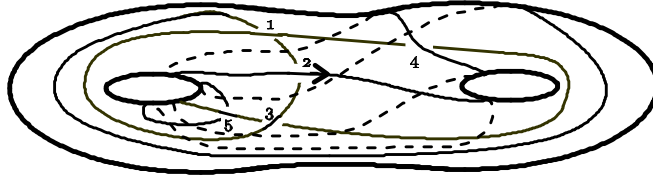


Figura 1-7: Diagrama para  $((-1, -2, 3, 1, -4, -3, 5, 4, 2, -5), (-1, -1, -1, -1, -1))$  sobre el doble toro.

Otro tipo de diagrama que podemos asociarle a un nudo combinatorio es permitir un nuevo tipo de cruce y trabajar con el diagrama haciendo de cuenta que tal cruce no está realmente allí. Por ejemplo, de la Figura 1-4-d obtenemos el "diagrama" mostrado en la Figura 1-8. Este truco da lugar al concepto de nudo virtual.

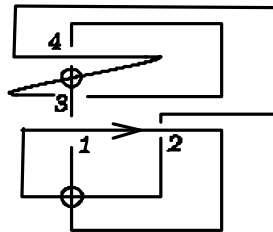


Figura 1-8: Diagrama de un nudo virtual.

### 1.3 Nudos virtuales

En la sección anterior asociamos a un código nudal un diagrama, ver Figura 1-8 que tenía algunos cruces decorados con un círculo. A estos cruces los llamaremos *cruces virtuales*. En esta sección estudiaremos brevemente el concepto de nudo virtual, introducido por Kauffman [25], y probaremos que existe una correspondencia biunívoca entre la categoría de los nudos combinatorios y la de los nudos virtuales, ver [25] y [14].

**Definición 1.3.1** *Un diagrama de un enlace virtual orientado de  $m$  componentes es un diagrama de  $m$  componentes contenido en el plano y tiene cruces clasificados como positivos, negativos y virtuales. Si el enlace tiene una sola componente diremos que es un **diagrama de un nudo virtual orientado**. Al diagrama que no tiene cruces lo llamaremos **diagrama trivial**.*

Los movimientos *generalizados de Reidemeister* son todos los los movimientos de Reidemeister ilustrados en la Figura 1-2 y sus versiones virtuales, que se muestran en la Figura 1-9.

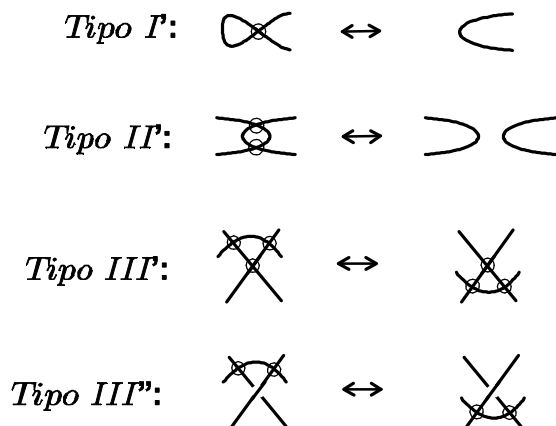


Figura 1-9: Movimientos de Reidemeister virtuales.

El conjunto de los diagramas de nudos virtuales lo denotaremos por  $\mathcal{VD}$ . Dos diagramas  $K$  y  $K' \in \mathcal{VD}$  se dicen *virtualmente equivalentes*, denotado  $K \sim K'$ , si  $K$  puede ser transformado en  $K'$  por medio de un número finito de movimientos generalizados de Reidemeister.

**Definición 1.3.2** Un *nudo virtual* es una clase de equivalencia de diagramas de nudos virtuales. Un nudo virtual se dice *clásico* si uno de sus representantes es un diagrama de un nudo clásico.

Note que los diagramas de nudos clásicos son también diagramas de nudos virtuales, por tanto la relación descrita anteriormente define una nueva relación de equivalencia sobre el conjunto de los diagramas de nudos clásicos. El siguiente teorema garantiza que la teoría de los nudos virtuales es, en efecto, una extensión no trivial de la teoría clásica de nudos. Para la prueba ver [14] y [25].

**Teorema 1.3.1** (1) Sean  $D_1$  y  $D_2$  diagramas de nudos clásicos. Si  $D_1$  puede ser transformado en  $D_2$  mediante un número finito de movimientos generalizados de Reidemeister, entonces ellos también pueden ser transformados, uno en el otro, mediante un número finito de movimientos de Reidemeister.

(2) Existen ejemplos de nudos virtuales que no son equivalentes a nudos clásicos.

Otra prueba interesante, de la parte (1), se puede consultar en [35]. Mas adelante daremos muchos ejemplos que muestran la parte (2).

Una definición alternativa para la relación de equivalencia definida sobre el conjunto de todos los diagramas de nudos virtuales es cambiar el conjunto de los movimientos de Reidemeister

virtuales por un movimiento mucho más general, este movimiento es llamado "movimiento atajo o detour".

**Definición 1.3.3** (Movimiento atajo) Consideremos un diagrama de un nudo virtual  $K$ . Seleccionemos dos puntos,  $a$  y  $b$ , sobre  $K$ . Si el segmento,  $A_{(a,b)}$ , que une los puntos  $a$  y  $b$  pasa sólo a través de un número consecutivo de cruces virtuales o no pasa por ningún cruce, entonces removemos  $A_{(a,b)}$  del diagrama e insertamos un nuevo segmento,  $\tilde{A}_{(a,b)}$ , con los mismos extremos, tal que si  $\tilde{A}_{(a,b)}$  crea cruces, estos deben ser todos virtuales. Ilustraremos este movimiento en la Figura 1-10.

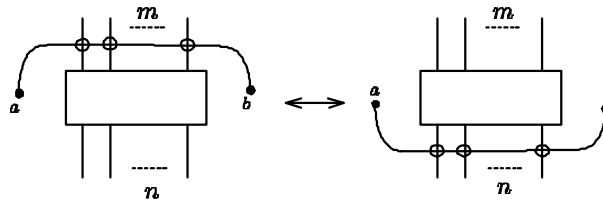


Figura 1-10: Movimiento atajo ó detour

Para más detalles sobre el movimiento atajo se puede consultar [25], [11] y [1].

**Teorema 1.3.2** [11, Proposition 1.2.1] El movimiento atajo es equivalente a una sucesión de movimientos de Reidemeister virtuales.

Cuando se trabaja a nivel de diagramas y se hace la extensión de los movimientos de Reidemeister a los movimientos de Reidemeister generalizados, es posible que se tenga la pregunta de si habrá otros movimientos que se puedan permitir, por ejemplo, el mostrado en la Figura 1-11.

Si agregamos dicho movimiento a los movimientos generalizados de Reidemeister, entonces la categoría se vuelve trivial, en el sentido de que todo diagrama de un nudo virtual sería virtualmente equivalente al diagrama trivial, para la prueba ver [34].

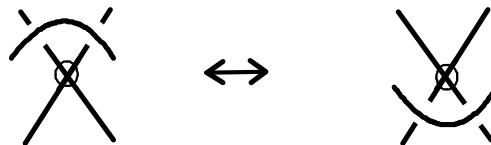


Figura 1-11: Movimiento prohibido.

## 1.4 Equivalencia entre los nudos virtuales y los nudos combinatorios

De la misma forma cómo construimos el código nudal de un diagrama de un nudo clásico, podemos hacerlo para el diagrama de un nudo virtual.

Sea  $D$  un diagrama de un nudo virtual. Si etiquetamos los cruces clásicos de  $D$  con enteros positivos, tomamos un punto  $x$  sobre  $D$  que no sea ni cruce clásico ni virtual y recorremos  $D$  a partir de  $x$ , construiremos un código nudal. Este código nudal lo denotaremos por  $K = (C(D), S(D))$ . Para los diagramas de los nudos virtuales, mostrados en la Figura 1-12, sus códigos nudales son, respectivamente,  $((-1, 5, -3, 1, -5, 3), (-1, 1, 1, 1, 1))$  y  $(\{(1), (-1)\}, (-1))$ . Observemos que hacemos de cuenta que los cruces virtuales no están "realmente" allí. Esta técnica, de omitir los cruces virtuales, ha servido para extender invariantes de nudos clásicos a invariantes de nudos virtuales.

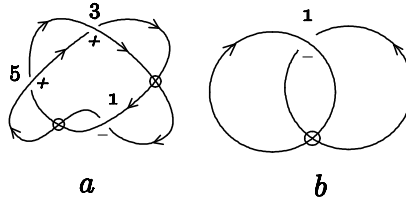


Figura 1-12: Diagramas de un nudo y un enlace virtual con cruces clásicos enumerados.

El siguiente ejemplo motivará la prueba de que a todo código nudal le podemos asignar un único diagrama de un nudo virtual, salvo movimientos atajo.

**Ejemplo 1.4.1** Sea  $K$  el código nudal  $((1, -2, 3, 4, 2, -1, -4, -3), (1, 1, -1, -1))$ . Construyamos un cuadrado con vértices etiquetados con los números 1, 2, 3, 4, en el sentido de las manecillas del reloj, que denotaremos por  $A_K$ , ver Figura 1-13-a. Ahora consideremos el grafo dirigido  $G_K$  cuyos vértices son  $V(G_K) = \{1, 2, 3, 4\}$  y conjunto de aristas  $E(G_K) = \{(1, -2), (-2, 3), (3, 4), (4, 2), (2, -1), (-1, -4), (-4, -3), (-3, 1)\}$ . La arista con etiqueta  $(a, b)$  denota una arista dirigida de  $|a|$  hasta  $|b|$ . Sólo consideraremos aquellas realizaciones de  $G_K$  en las que sus vértices conserven la forma de un cuadrado y estén organizados en el sentido de las manecillas del reloj. Un ejemplo de una realización de  $G_K$ , con dichas características, se muestra en la Figura 1-13-b.

En la Figura 1-14 (a-e) mostramos, esquemáticamente, un proceso de organización de las aristas de  $G_K$  para obtener una realización de éste con las características de la Figura 1-13 c. Observemos que la realización dada en la Figura 1-14-e presenta intersecciones, estas intersecciones las tomaremos como cruces virtuales, ver Figura 1-14-f.