



Algoritmo de optimización basado en
enjambres de partículas con comportamiento
de vorticidad
Vortex Particle Swarm Optimization
VPSO

Helbert Eduardo Espitia Cuchango

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería, Unidad de Posgrados
Bogotá, Colombia
2014

Algoritmo de optimización basado en
enjambres de partículas con comportamiento
de vorticidad
Vortex Particle Swarm Optimization
VPSO

Helbert Eduardo Espitia Cuchango

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Doctor en Ingeniería de Sistemas y Computación

Director:
Ing. Ph.D. Jorge Iván Sofrony Esmeral.

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería, Unidad de Posgrados
Bogotá, Colombia
2014

Dedicatoria

A Dios por permitirme vivir y ser la luz en todo momento de mi existencia.

A mis padres porque ellos han sido las bases sólidas sobre las cuales se ha edificado mi vida.

A toda mi familia.

A las personas especiales que han partido y llegado.

Agradecimientos

Ingeniero Jorge Iván Sofrony Esmeral Ph.D. quien fue una guía incondicional y que con sus sabias decisiones y orientaciones fue clave para el desarrollo del proyecto. Profesores de la facultad que ayudaron al desarrollo del proyecto.

Resumen

En este documento se propone un algoritmo de optimización basado en el movimiento de partículas con características de vorticidad. Uno de los principales problemas que se presenta en optimización es la convergencia temprana a mínimos locales. El algoritmo propuesto emplea un modelo de partículas activas con desplazamientos circulares lo cual permite escapar de mínimos locales. También se realiza un análisis del modelo seleccionado, comprobando mediante simulaciones que los resultados obtenidos son consistentes con el comportamiento del sistema. El algoritmo propuesto se probó en casos estándar obteniendo un desempeño satisfactorio.

Palabras clave: Optimización, enjambre de partículas, vorticidad.

Abstract

This document proposes an optimization algorithm based on the motion of particles with vortex behavior. A main disadvantage in optimization is the early convergence to local minima. The proposed algorithm uses an active particle model with circular behaviors, which allows escaping from local minima. An approximate analysis of the selected model was performed and it was observed, via simulations, that the results obtained were consistent with the behavior of the system. The proposed algorithm is tested on benchmark problems obtaining satisfactory performance.

Keywords: Optimization, particles, swarm, vortex.

Contenido

Resumen	ix
Introducción	1
1. Descripción del proyecto	3
1.1. Justificación	3
1.2. Identificación del problema	3
1.3. Alcance	4
1.4. Objetivo general y objetivos específicos	4
1.4.1. Objetivo general	4
1.4.2. Objetivos específicos	4
1.5. Antecedentes	5
1.5.1. Optimización	5
1.5.2. Optimización bio-inspirada	7
1.5.3. Algoritmos de enjambres con estrategias para evasión de mínimos locales	8
1.5.4. Comportamientos de enjambres	9
1.5.5. Modelos de partículas con comportamiento de vorticidad	10
2. Marco teórico	11
2.1. Introducción	11
2.2. Definiciones preliminares	11
2.2.1. Vector y matriz	11
2.2.2. Esfera y bola	11
2.2.3. Conjuntos	12
2.2.4. Región convexa	12
2.2.5. Funciones	13
2.2.6. Convexidad	14
2.2.7. Formas cuadráticas	14
2.2.8. Matrices definidas positivas	14
2.2.9. Gradiente, Hessiano y Jacobiano	15
2.3. Optimización	15
2.3.1. Definición del problema de optimización	15
2.3.2. Condiciones de optimalidad	16
2.3.3. Optimización sin restricciones	17
2.3.4. Método de gradiente descendente	17
2.4. Algoritmos de optimización basados en enjambres	18
2.4.1. Algoritmo de optimización basado en enjambres de partículas	19

2.4.2.	Modelo <i>Gbest</i>	20
2.4.3.	Modelo <i>Lbest</i>	21
2.4.4.	Algoritmo PSO con factor de inercia	21
2.4.5.	Algoritmo PSO con factor de restricción	22
2.4.6.	Algoritmo PSO con inercia modulada	22
3.	Revisión sobre modelos basados en enjambres con características de vorticidad	23
3.1.	Introducción	23
3.2.	Número de Reynolds	23
3.2.1.	Número de Reynolds y comportamientos biológicos	24
3.3.	Modelos de enjambres	24
3.4.	Modelos de enjambres con características de vorticidad	25
3.4.1.	Modelo de Vicsek	26
3.4.2.	Modelo de Langevin	26
3.4.3.	Modelos de partículas activas Brownianas	27
3.4.4.	Modelo de Levine	31
3.4.5.	Modelo de partículas auto-propulsadas	32
3.4.6.	Modelo de partícula autopropulsada con fuerza estocástica	32
3.4.7.	Modelo de partícula autopropulsada con sub-grupos de partículas	33
3.4.8.	Modelo con potenciales de interacción de Morse	34
3.4.9.	Modelo con fuerzas asociadas al entorno	35
3.4.10.	Modelo con choques inelásticos	35
3.4.11.	Modelo basado en ecuaciones generalizadas de Navier Stokes	36
4.	Selección del modelo de enjambre con características de vorticidad	37
4.1.	Introducción	37
4.2.	Componentes de un modelo de partículas con comportamiento de vorticidad	37
4.2.1.	Fuerza de auto-propulsión	38
4.2.2.	Fuerza de interacción	38
4.2.3.	Fuerza asociada al espacio de locomoción	40
4.2.4.	Fuerza estocástica	40
4.3.	Componentes de modelo seleccionado	40
4.4.	Modelo	42
4.4.1.	Descripción cualitativa de parámetros	42
5.	Análisis dinámico del modelo de enjambre con características de vorticidad	43
5.1.	Introducción	43
5.2.	Bifurcación y movimiento activo	43
5.3.	Puntos de equilibrio	44
5.3.1.	Puntos de equilibrio para la velocidad media del enjambre	45
5.4.	Conservación de energía y momento angular	45
5.4.1.	Análisis de energía	46
5.4.2.	Análisis de momento angular	48
5.5.	Análisis para el parámetro de propulsión	50

5.6.	Estimación del radio del enjambre	51
5.7.	Análisis de estabilidad para la implementación en tiempo discreto	52
6.	Simulaciones del modelo seleccionado	54
6.1.	Introducción	54
6.2.	Modelo de simulación	54
6.3.	Fuerza de autopropulsión	54
6.4.	Simulación del modelo sin potencial externo	55
6.4.1.	Simulación con movimiento de rotación	55
6.4.2.	Simulación con movimiento de traslación	56
6.5.	Simulación del modelo con potencial externo	57
6.5.1.	Combinación de movimientos de traslación y rotación	57
6.5.2.	Velocidad y distribución del enjambre	59
6.5.3.	Simulación para un potencial no simétrico	60
6.6.	Simulación para casos disipativos	61
6.6.1.	Simulación para caso disipativo no lineal	61
6.6.2.	Simulación para caso disipativo lineal	62
6.7.	Simulación del modelo considerando la condición de estabilidad en tiempo discreto	63
6.7.1.	Simulación sin potencial externo	63
6.7.2.	Simulación con potencial externo	64
6.8.	Simulación del modelo para cuatro dimensiones	64
7.	Algoritmo de optimización basado en un enjambre con comportamiento de vorticidad	67
7.1.	Introducción	67
7.2.	Alternativas consideradas para el desarrollo del algoritmo	67
7.3.	Consideraciones para el diseño del algoritmo	68
7.3.1.	Estrategia de búsqueda	69
7.4.	Implementación del modelo	71
7.5.	Componentes del algoritmo	71
7.5.1.	Valor mínimo individual y grupal	72
7.5.2.	Identificación de las fases del algoritmo	73
7.5.3.	Factor de interacción	74
7.5.4.	Factor de autopropulsión en la fase de convergencia	74
7.5.5.	Factor de autopropulsión en la fase de dispersión	74
7.5.6.	Velocidad máxima y mínima	76
7.5.7.	Función potencial asociada al mejor punto encontrado	77
7.5.8.	Función objetivo	78
7.5.9.	Criterio de parada	80
7.6.	Algoritmo propuesto	80
7.7.	Consideraciones para la selección de parámetros	81
7.7.1.	Espacio de búsqueda	81
7.7.2.	Velocidad máxima y mínima	81
7.7.3.	Radio de convergencia	82
7.7.4.	Parámetros del potencial asociado al mejor punto encontrado	83

7.7.5. Parámetros asociados a la función objetivo	84
7.7.6. Factor de interacción	84
7.7.7. Factor de propulsión	85
7.7.8. Factor de incremento de energía	86
7.8. Proceso para la estimación de parámetros	88
8. Resultados experimentales	92
8.1. Introducción	92
8.2. Procedimiento para el análisis estadístico de resultados	92
8.3. Funciones de prueba	92
8.3.1. Funciones de prueba en dos dimensiones	93
8.3.2. Funciones de prueba para varias dimensiones	95
8.3.3. Algoritmos PSO de referencia	96
8.4. Configuración de experimentos	97
8.5. Resultados experimentales para $2D$	98
8.5.1. Resultados cualitativos	99
8.5.2. Resultados cuantitativos	113
8.6. Resultados experimentales para 10 dimensiones	120
8.6.1. Resultados cualitativos para 10D	122
8.6.2. Resultados cuantitativos para 10D	133
9. Conclusiones, trabajos futuros y aportes originales	141
9.1. Conclusiones	141
9.2. Trabajos futuros	141
9.3. Aportes originales	142
A. Metodología para el análisis estadístico de resultados	143
A.1. Metodología	143
A.1.1. Pruebas estadísticas de hipótesis	144
B. Resultados experimentales	146
C. Cálculos adicionales para el análisis del modelo seleccionado	155
C.1. Análisis del potencial de interacción	155
C.2. Derivada temporal de la energía asociada al potencial de interacción	156
C.3. Gradiente de la función objetivo	157
D. Nomenclatura utilizada	158
Bibliografía	161

Introducción

La optimización es un proceso presente en muchos aspectos de la vida donde se busque maximizar utilidades o minimizar costos. La solución de este tipo de problemas se puede tener desde diferentes puntos de vista, presentándose un fuerte vínculo desde la matemática puesto que proporciona herramientas formales que permiten encontrar soluciones a estos problemas.

En la antigüedad una aproximación al problema de optimización fue realizada por Apolonio de Perge (262-190). El estudio de Apolonio se encontraba enfocado al cálculo de segmentos de longitud máxima y mínima trazados respecto a conos de revolución [1].

Un avance importante en el campo de la optimización lo realizan Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716) con el desarrollo del cálculo diferencial en el siglo XVII. Con esta teoría se emplean las derivadas para resolver problemas de máximos y mínimos ampliando las aplicaciones a diversas áreas [2], [3]. Adicionalmente Leonhard Euler (1707-1783) desarrolla el cálculo de variaciones, lo cual permite determinar mínimos de funcionales, es decir, funciones cuyos argumentos también son funciones, permitiendo de esta forma abordar problemas más complejos [1], [2].

Otro aporte significativo en el campo de la optimización lo realiza Joseph Louis Lagrange (1736-1813) proponiendo un criterio para la solución de los problemas de optimización. Si el sistema de ecuaciones proporcionado por el criterio de Lagrange tiene un número finito de soluciones, entonces es posible encontrar una solución óptima [1]. Por su parte Jean Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830) mostró aproximaciones intuitivas a métodos de optimización actualmente considerados en la programación lineal [1].

Sobre la programación lineal esta aparece en Inglaterra en 1943 como la necesidad de optimizar recursos militares a fines de la Segunda Guerra Mundial. Al respecto, el criterio de Lagrange sirvió como punto de partida sin embargo este no es aplicable cuando el sistema de ecuaciones de Lagrange tiene un conjunto infinito de soluciones, como en el caso de la programación lineal donde su solución se determina mediante el método simplex propuesto por George Bernard Dantzig (1914-2005) en 1947 [1], [2].

Finalmente desde 1945, con el desarrollo de las computadoras, se amplía la aplicación de los procesos de optimización en diferentes campos [1]. Desde este enfoque se tienen métodos denominados clásicos la mayoría basados en el cálculo de derivadas y también métodos heurísticos los cuales en buena parte son inspirados en la naturaleza como lo es el comportamiento colectivo de individuos también denominado enjambre. Uno de los problemas significativos en los algoritmos de optimización consiste en la convergencia a mínimos locales. La propuesta presentada en este documento busca encarar esta problemática realizando procesos de dispersión luego de presentarse la convergencia a un punto mínimo. Una forma de lograr la dispersión consiste en los movimientos circulares que puede presentar un enjambre de partículas, por lo cual, bajo este enfoque se propone un algoritmo de optimización basado en un modelo de enjambre con comportamiento de vorticidad que permita escapar de mínimos locales y de esta forma ampliar la capacidad de encontrar un mínimo global.

La organización del documento consiste en la descripción del proyecto en el Capítulo 1 donde se tiene la justificación, objetivos y antecedentes. En el Capítulo 2 se presenta el marco teórico revisando en primer lugar los conceptos matemáticos de optimización y posteriormente el método de optimización basado en enjambres de partículas. En el Capítulo 3 se realiza una revisión sobre los diferentes modelos de partículas con características de vorticidad. Posteriormente en el Capítulo 4 se efectúa la selección del modelo donde se busca tener una expresión compacta con pocos parámetros. Luego en el Capítulo 5 se desarrolla un análisis aproximado del modelo para observar las características del mismo. Posteriormente en el Capítulo 6 se realiza un conjunto de simulaciones que permiten apreciar de forma cualitativa el comportamiento del modelo propuesto. Posteriormente se describe el algoritmo de optimización en el Capítulo 7 donde también se realiza una propuesta para la selección de parámetros. Luego de tener definido el algoritmo en el Capítulo 8 este se prueba en diferentes casos clásicos teniendo resultados cualitativos correspondientes a figuras que muestran el comportamiento del algoritmo y resultados cuantitativos donde se observa el desempeño del algoritmo propuesto mediante un análisis estadístico. Finalmente se presentan las conclusiones de los resultados y trabajos futuros.

Contribución

La principal contribución de este trabajo consiste en la propuesta de una estrategia de optimización que permite escapar de mínimos locales ampliando de esta forma las capacidades de búsqueda para encontrar mejores valores de la función objetivo.

El algoritmo propuesto utiliza de forma alternada procesos de convergencia (explotación) y dispersión (exploración). Para esto se emplea un modelo de enjambre que permite tener movimientos lineales y circulares de las partículas. Con este enfoque los movimientos lineales se utilizan para la convergencia mientras que para la dispersión se emplean movimientos circulares.

La propuesta del algoritmo se realiza considerando el análisis y simulaciones del modelo seleccionado el cual fue tomado de la literatura donde se utiliza para la descripción del movimiento de algunos seres vivos.

De los análisis realizados al modelo se establece la velocidad de las partículas como también el radio de giro y la configuración de parámetros para lograr un comportamiento similar al método del gradiente en la fase de convergencia y una dispersión en forma circular para la etapa de exploración. Adicionalmente, del análisis realizado al modelo se propone una estrategia para la selección de parámetros de tal forma que se puedan controlar las características dinámicas del enjambre tanto en el proceso de convergencia como de dispersión.

1. Descripción del proyecto

1.1. Justificación

Los procesos industriales que en general involucran actividades de diseño, distribución, asignación, secuenciación y producción suelen requerir herramientas de optimización para lograr una mayor precisión, exactitud y eficiencia [4], [5]. Esto muestra la importancia de tener adecuados métodos de optimización que atiendan las aplicaciones antes citadas.

Por otra parte, tal como se ha mencionado anteriormente, la naturaleza es fuente de inspiración para el desarrollo de algoritmos que permiten solucionar problemas en diferentes áreas. En general, los algoritmos desarrollados bajo esta perspectiva se han enfocado en problemas de optimización, siendo de los más representativos los algoritmos genéticos, la optimización basada en colonia de hormigas, enjambres de partículas y la quimiotaxis bacteriana [6], [7], [8]. Por otro lado, en el área de la biología son de interés los modelos que describen comportamientos de seres vivos como aves, peces, hormigas y bacterias, entre otros. Cuando se trata de comportamientos colectivos, es importante modelar las interacciones presentes entre individuos con el fin de reproducir las conductas que describe una congregación de individuos [9]. Algunos estudios consideran el efecto del liderazgo de un individuo [10], formas de organización [11] y mecanismos de predicción [12]. En particular son de atención los denominados, comportamientos emergentes, distinguiéndose el movimiento de enjambres de individuos con la formación de vortices y/o remolinos [13], [14]. Es importante resaltar que este tipo de comportamiento en sistemas biológicos proporciona la capacidad de evadir obstáculos y depredadores [15].

Dicha capacidad corresponde a comportamientos que presentan los enjambres de individuos como aves y peces, y que pueden ser empleados en procesos de búsqueda [16]. Un ejemplo de lo anterior puede verse en [17], donde se describe un modelo general para enjambres con la capacidad de evadir obstáculos. Otro ejemplo se aprecia en [18] donde se realiza una revisión de diferentes estrategias de búsqueda en la naturaleza tales como cooperación natural, comportamiento grupal y formas de comunicación las cuales pueden ser empleadas en algoritmos de optimización.

Lo anterior evidencia que es posible proponer algoritmos para la solución de problemas en ingeniería con modelos de enjambres ya desarrollados y explotar estas ventajas en procesos de búsqueda. En particular se busca desarrollar un algoritmo basado en enjambres de partículas que permita tener una mejor exploración del espacio de búsqueda de tal forma que se evite la convergencia temprana a mínimos locales.

1.2. Identificación del problema

Una de las grandes limitaciones del proceso de optimización cuando se tienen ecuaciones no lineales, es la dificultad de garantizar la *optimalidad global*, ya que esto sólo es posible cuando se tienen funciones objetivo convexas definidas sobre regiones factibles también convexas [19].

Una limitación que presentan los algoritmos de optimización consiste en la convergencia temprana a mínimos locales resultando en soluciones sub-óptimas [20], [21], [22], [23], [24]. La convergencia temprana tiene el efecto de reducir el espacio explorado disminuyendo la posibilidad de encontrar un mejor valor de la función objetivo [25].

Aunque los algoritmos de enjambres de partículas han tenido buena aceptación y prometen ser una buena herramienta en optimización [26], estos, por el momento, tienden a presentar convergencia temprana en mínimos locales [27], [28], [29], como también un bajo desempeño cuando se realiza una mala selección de sus parámetros [30], [31].

1.3. Alcance

Con el desarrollo de este proyecto se busca proponer un algoritmo de enjambre de partículas donde se incorpora una dinámica o comportamiento novedoso del enjambre. De esta forma se busca contribuir en los problemas de optimización, proporcionando un nuevo enfoque para escapar de mínimos locales de tal forma que se tenga una mejor exploración del espacio de búsqueda evitando el estancamiento.

El alcance de este trabajo considera la optimización mono-objetivo de funciones de varias variables sin restricciones. El problema de optimización que se aborda, según [25] consiste en que dada una función:

$$f(\vec{x}), f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \tag{1-1}$$

se busca $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(\vec{w}) \leq f(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

1.4. Objetivo general y objetivos específicos

1.4.1. Objetivo general

Desarrollar un algoritmo de optimización basado en enjambres de partículas con comportamiento de vorticidad que permita evadir mínimos locales.

1.4.2. Objetivos específicos

- Identificar y seleccionar el modelo de enjambre más adecuado para la aplicación propuesta.
- Desarrollar el algoritmo de optimización basado en enjambres de partículas con comportamiento de vorticidad.
- Definir casos de aplicación estándar (Benchmark) con sus respectivas métricas de desempeño.
- Evaluar el algoritmo propuesto en los casos de aplicación estándar y comparar su desempeño con otros algoritmos de optimización PSO.

1.5. Antecedentes

En la presente sección se desarrolla el contexto general de la propuesta abordando los aspectos más relevantes. En primer lugar, se revisa una posible clasificación de los algoritmos de optimización. Luego se observan algunos algoritmos bio-inspirados de optimización, como también estrategias para evadir mínimos locales. Posteriormente se revisan algunos comportamientos de enjambres y su aplicación en el desarrollo de algoritmos de optimización. El comportamiento de interés en esta propuesta consiste en el movimiento circular de individuos; por lo cual, en la parte final se revisa el concepto de vorticidad como también modelos de enjambres de partículas que presentan este comportamiento y aplicaciones de este concepto.

1.5.1. Optimización

Según el dominio de aplicación del algoritmo de optimización se puede tener la siguiente clasificación:

- Variable independiente: Continua, discreta, una o varias.
- Función objetivo: Continua, discreta, una o varias.
- Con o sin restricciones.

La función objetivo la cual puede ser lineal o no lineal se encuentra sujeta a restricciones de desigualdad, igualdad, tanto para variables continuas, como para variables discretas.

En el caso de tener una función objetivo lineal y restricciones lineales se presenta el caso de programación lineal (*Linear Programming* LP). Por lo general en este tipo de problemas se emplea el método SIMPLEX para su solución. En el caso de tener variables discretas aparece la programación lineal mixta (*Mixed Linear Programming* MILP) [32].

Cuando se trabajan variables continuas y además la función objetivo o algunas de las restricciones no son lineales se tiene el problema de programación no lineal (*Nonlinear Programming* NLP). En el caso de tener una función objetivo y restricciones diferenciables, los óptimos locales vienen definidos por las condiciones de optimalidad de Kuhn-Tucker. Cuando el problema de programación no lineal considera variables discretas se tiene la programación no lineal con variables enteras mixtas (*Mixed Integer Nonlinear Programming* MINLP) [32].

Un caso especial ocurre cuando no es posible establecer una estructura específica del problema que se está tratando, en cuyo caso su solución se aborda desde el concepto de modelo de caja negra.

En aplicaciones de optimización que emplean recursos computacionales se busca la solución óptima con un costo computacional razonable. Bajo esta orientación se puede tener una primera clasificación de los métodos de optimización como locales y globales. En primer lugar, los métodos locales permiten encontrar la mejor solución en las inmediaciones de un punto inicial, haciéndolos dependientes de este punto. La mayoría de los métodos locales utilizan la información del gradiente imponiendo sobre el espacio de búsqueda condiciones de continuidad y diferenciabilidad. Por otro lado, los algoritmos de optimización global suelen ser independientes de la naturaleza del espacio de soluciones y presentan la capacidad de atravesar el espacio de búsqueda permitiendo encontrar una solución cercana al óptimo global. Dado que los métodos globales suelen explorar de forma exhaustiva el espacio de soluciones, estos algoritmos presentan demora en su convergencia [33].

Considerando la anterior clasificación general y su aplicación a nivel computacional los algoritmos de optimización se pueden clasificar como tradicionales (exactos) y heurísticos modernos [33]. Esta clasificación se puede apreciar en la figura 1-1. Los métodos tradicionales trabajan sobre soluciones parciales del problema aislando partes del espacio de búsqueda sin examinarlas buscando el punto óptimo de forma local. Como una alternativa a los métodos tradicionales se tienen los métodos heurísticos, los cuales en su mayoría se pueden considerar como globales ya que emplean mecanismos específicos para evitar óptimos locales; sin embargo, no garantizan la convergencia al punto óptimo obteniendo así múltiples sub-óptimos [33].

Técnicas de optimización

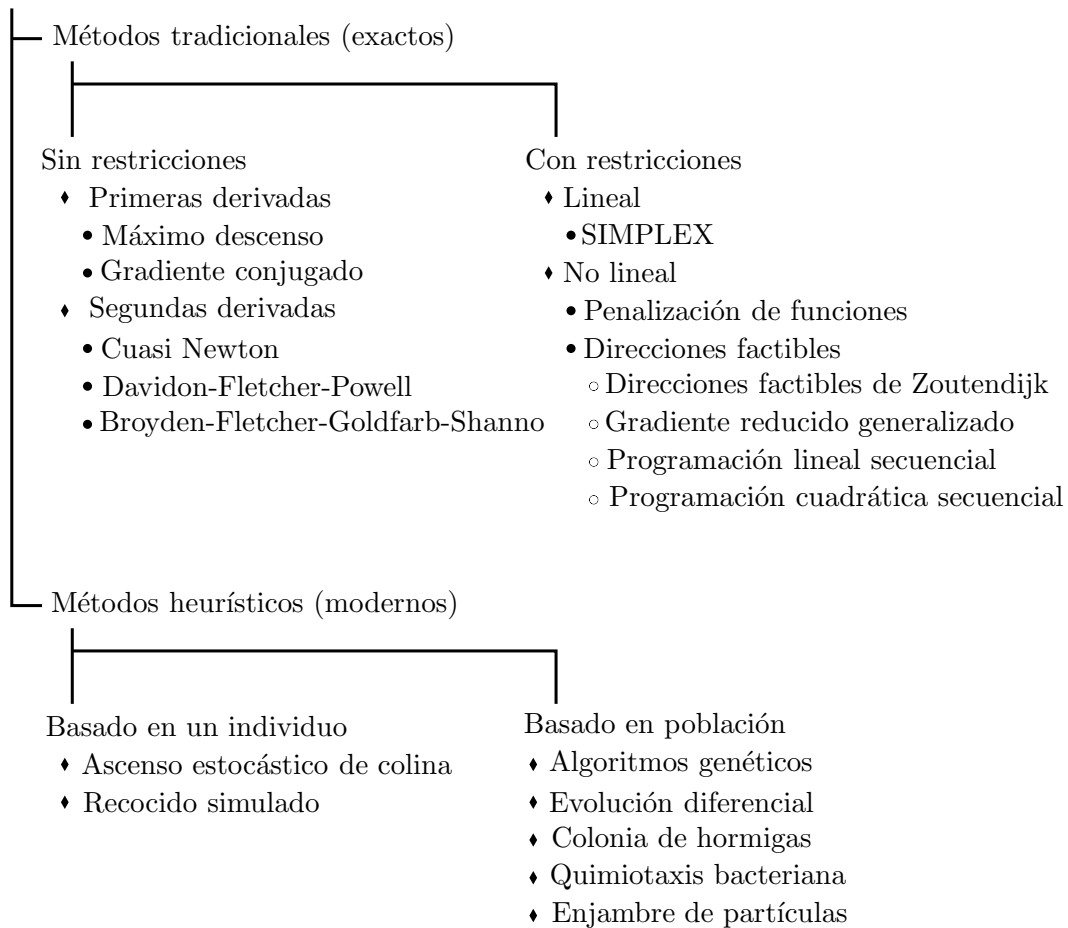


Figura 1-1.: Clasificación de técnicas de optimización.

De los algoritmos tradicionales basados en el cálculo de gradientes que no consideran restricciones se tiene, en primer lugar, el método del máximo descenso. Dicho método se encuentra basado en la dirección dada por el cálculo del gradiente. Una mejora con la cual se elimina efecto de zigzag se logra con el método del gradiente conjugado el cual fue originalmente empleado para la solución de sistemas de ecuaciones lineales. De las técnicas que requieren conocer las derivadas de primer y segundo orden (gradiente y hessiano) existen, en primer lugar, el método de Newton. Una variación de este consiste en calcular el hessiano mediante derivadas de primer orden empleando información de iteraciones anteriores (método cuasi Newton). En segundo lugar, con el método de Davidon-

Fletcher-Powell (DFP) la inversa del hessiano se calcula con aproximaciones sucesivas a diferencia del método de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) donde se actualiza de forma iterativa la matriz hessiana en lugar de su inversa [32].

Entre los algoritmos que consideran restricciones y emplean el cálculo de gradientes se encuentran los siguientes: el método de penalización de funciones (*Penalty Function Method*), el método de las direcciones factibles de Zoutendijk, el método del gradiente reducido generalizado (*Generalized Reduced Gradient* GRG), el método de programación lineal secuencial (*Sequential linear programming* SLP) y el método de programación cuadrática secuencial (*Successive Quadratic Programming* SQP) el cual consiste en aplicar el método de Newton y las condiciones de optimalidad de Karush-Khun-Tucker (KKT) [32].

Entre los métodos heurísticos están aquellos basados en uno o varios individuos. Para empezar, entre los algoritmos basados en un individuo existe el de subida estocástica de la colina (*Stochastic Hill-Climbing* SHC) y también el de recocido simulado (*Simulated annealing* SA). Así mismo, entre los métodos basados en varios individuos (poblaciones) encontramos los siguientes: algoritmos genéticos (*Genetic Algorithms* GAs), evolución diferencial (*Differential Evolution* DE), colonia de hormigas (*Ant Colony Optimization* ACO), quimiotaxis bacteriana (*Bacteria Chemotaxis Optimization* BCO) y enjambre de partículas (*Particle Swarm Optimization* PSO). El algoritmo de subida estocástica de la colina se encuentra fundamentado en la selección estocástica de soluciones vecinas, las cuales son aceptadas si se tiene una mejora en la función objetivo [34]. El recocido simulado es un método que pretende emular la formación cristalina de un material al calentarlo y enfriarlo con lo cual se busca pasar de un estado de mayor energía a un estado de menor energía [34]. Los algoritmos genéticos y la evolución diferencial, buscan emular el proceso que realiza la naturaleza al mejorar una especie a lo largo del tiempo [34]. Por otro lado, algoritmos basados en colonias de hormigas, quimiotaxis bacteriana y enjambres de partículas están inspirados en los comportamientos en conjunto que tienen seres vivos para la búsqueda de alimento [35], [36], [37].

1.5.2. Optimización bio-inspirada

A continuación se revisan algunos principios de la optimización bio-inspirada como también la fuente de inspiración de algunos algoritmos ampliamente difundidos. En particular se aborda el concepto de enjambre de partículas aplicado a optimización. En la parte final se revisan algunos algoritmos basados en otros comportamientos y fenómenos de la naturaleza.

En primer lugar se tiene que la naturaleza es una buena fuente de inspiración para el planteamiento de soluciones en ingeniería, especialmente en problemas de optimización. Un ejemplo de optimización presente en la naturaleza ocurre cuando animales o seres vivos con mejores técnicas para la búsqueda de alimento tienen mayor posibilidad de sobrevivir [36].

En segundo lugar, sobre técnicas de optimización que emulan el comportamiento de seres vivos se tienen los algoritmos basados colonias de hormigas tal como se puede apreciar en [35], [38], [39] y [40]. Bajo esta misma orientación el comportamiento de abejas ha permitido el desarrollo de algoritmos tanto de optimización como de búsqueda y exploración [41], [42].

Otra técnica de búsqueda inspirada en la biología, consiste en el comportamiento que presentan seres unicelulares como las bacterias cuando éstas buscan alimento, dando lugar a la técnica denominada optimización basada en quimiotaxis bacteriana. En [36] se presenta un algoritmo general de optimización basado en la búsqueda de comida que realiza la bacteria de *E. coli*. Una aplicación

práctica de este concepto se puede apreciar en [43] y [44], donde se propone un algoritmo de optimización basado en quimiotaxis bacteriana el cual es empleado para la solución de un problema multi-objetivo enfocado al diseño de un eje mecánico.

En tercer lugar, otra fuente de inspiración biológica para el desarrollo de algoritmos de optimización consiste en el estudio de los comportamientos colectivos o de enjambres. Al respecto, estudios han indicado que estos tipos de comportamiento obedecen a simples reglas de interacción entre individuos, las cuales están sujetas a una serie de consideraciones sobre el comportamiento de los mismos.

En relación con el desarrollo de aplicaciones que involucran enjambres de individuos, originalmente su implementación en procesos de optimización fue propuesta por James Kennedy y Russell Eberhart [37]. Una aplicación en problemas de optimización multi-objetivo no lineal con restricciones se puede observar en [45] y [46]. Un trabajo adicional donde proponen cambiar en momento de cada partícula modificando su velocidad es propuesto en [47].

De igual manera existen otros trabajos a considerar, los cuales consisten en el desarrollo de algoritmos de optimización basados en enjambres de partículas que emplean elementos de mecánica cuántica [48], como también la aplicación el oscilador armónico [49].

Acerca de otros algoritmos de computación flexible bio-inspirados se pueden apreciar propuestas basadas en el comportamiento de murciélagos (*Bat Algorithm* BA) [50], [51], luciérnagas (*Firefly Algorithm* FA) [52] y primates [53]. También se tienen otros enfoques bajo principios y leyes físicas como la ley de Coulomb para partículas cargadas (*Charged System Search* CSS) [54], la sintonía en frecuencia de una nota musical (*Harmony Search* HS) [55] y la caída de agua en una cascada (*Intelligent Water Drops* IWD) [56].

1.5.3. Algoritmos de enjambres con estrategias para evasión de mínimos locales

Dentro de los diferentes algoritmos bio-inspirados según [26] los algoritmos de enjambres de partículas han tenido buena aceptación y prometen ser una adecuada herramienta de optimización; sin embargo, estos tienden a presentar convergencia temprana en mínimos locales [28], [29]. Adicionalmente, son susceptibles a una mala selección de sus parámetros tal como se muestra en [30] y [31]. Por lo anterior, se han desarrollado modificaciones y propuestas con las cuales se busca evadir mínimos locales teniendo una mejor exploración del espacio de soluciones. Estas modificaciones resultan ser ajustes del algoritmo PSO sin lograr por el momento una estrategia definitiva.

Acerca de los mecanismos para detectar una convergencia prematura en [29] y [31] se consideran tres criterios. El primero consiste en el radio máximo del enjambre; el segundo, considera la convergencia de un porcentaje de partículas y el tercero, observa el número de iteraciones que no presentan ninguna mejora en la función objetivo.

Una estrategia general para el escape de mínimos locales consiste en realizar un proceso de dispersión (explosión) luego de tener una convergencia a un mínimo local. Un ejemplo de este enfoque se puede apreciar en [57], donde se emplean movimientos aleatorios hasta lograr salir del mínimo local. Este algoritmo es empleado principalmente en la planeación de trayectorias de robots móviles. Otros ejemplos de este concepto se pueden apreciar en [58] con el algoritmo de optimización Supernova, en [59] para el algoritmo de optimización *Glowworm* y en [60] con el algoritmo de optimización basado en forrajeo de bacterias.

En particular para el algoritmo PSO una primera modificación consiste en adicionar un factor

de inercia modulada tal como se propone en [24] y [61]. La finalidad de este enfoque consiste en controlar la exploración del algoritmo sobre el espacio de búsqueda. En [24] y [61] se expone que un factor grande de inercia acelera la convergencia mientras que un valor pequeño mejora la capacidad de búsqueda. La técnica de inercia modulada también es discutida en [26] y [62] donde se adiciona un factor de restricción permitiendo cambiar la convergencia del algoritmo desde un punto de vista dinámico. Una modificación adicional del algoritmo PSO consiste en reiniciarlo cuando se considera que hay un estancamiento del mismo [20].

Otra variación del algoritmo PSO consiste en incorporar de un término de turbulencia sobre lo cual se han desarrollado varias propuestas. En [63] se incluye este operador en el algoritmo PSO tradicional como una variable estocástica de locura. Según [64] con este operador se busca mantener la diversidad de la población. Desde un punto de vista de algoritmos evolutivos el término de turbulencia tiene la misma función de un operador de mutación [65]. Por otro lado, en [66] se propone el algoritmo TPSO (*Turbulence in the Particle Swarm Optimization*) donde se incluye la turbulencia para resolver el problema de la convergencia prematura, con esta propuesta se busca impulsar las partículas perezosas para llevarlas a explorar nuevos espacios de búsqueda. TPSO utiliza un umbral de velocidad mínima para controlar la velocidad de las partículas y también evita la aglomeración de partículas y mantiene la diversidad de la población en el espacio de búsqueda. Un enfoque adicional del factor de turbulencia consiste en realizar una perturbación al enjambre proporcional a la distancia entre una partícula y otra la cual se toma de forma aleatoria, en esta propuesta el factor de turbulencia ayuda a escapar el enjambre de mínimos locales [67], [68].

Aparte del enfoque de inercia modulada en [69] se propone un método denominado olas de enjambres de partículas (*Waves of Swarm Particles WoSP*) con el cual se busca impulsar el enjambre para que pueda escapar de un mínimo local y así continúe el proceso de exploración. Por otro lado, en [70] se propone emplear técnicas de repulsión para cada mínimo local encontrado, esperando así evadir soluciones encontradas previamente. Adicionalmente, en [22] se presenta una variante del algoritmo PSO denominada aprendizaje integral la cual consiste en emplear la información histórica de las partículas para actualizar su velocidad. Este enfoque busca conservar la diversidad del enjambre evitando la convergencia prematura. Sobre las anteriores propuestas en [71] se expone que los trabajos desarrollados en [22], [69] y [70] presentan problemas cuando se tienen espacios de búsqueda con un alto grado de dimensiones.

Un acercamiento desde un enfoque analítico se presenta en [31] donde se efectúa un análisis de convergencia al algoritmo PSO. Con este análisis se busca mejorar la selección de parámetros y de esta forma también su convergencia.

1.5.4. Comportamientos de enjambres

En la naturaleza se pueden apreciar diferentes comportamientos los cuales han sido estudiados y representados de forma analítica. En particular, las congregaciones de individuos son una temática interesante por los comportamientos emergentes que surgen [13]. De los trabajos a resaltar se tiene el presentado en [72] donde se desarrolla un modelo básico para representar un enjambre de individuos. Una extensión del anterior trabajo se realiza en [14] donde se describen algunos patrones representativos de los enjambres. Por otro lado en [13] se realiza una revisión del comportamiento colectivo para la formación de enjambres observando las propiedades de la auto-regulación y principios del comportamiento colectivo como lo son: integridad, variabilidad, realimentación positiva,

realimentación negativa, umbrales de respuesta, dirección, inhibición, redundancia, sincronización y egoísmo.

Sobre los diferentes enfoques considerados para modelos de enjambres, en [10] se analiza el efecto que tiene el liderazgo de un individuo, en [11] se consideran las diferentes formas de organización que presentan las aves y en [12] se observa el efecto que tiene incorporar mecanismos de predicción en un modelo de enjambre.

En particular, el comportamiento emergente que es de atención en esta propuesta, consiste en el movimiento circular de partículas con la formación de un vórtice ya que se considera que esta estrategia de locomoción que emplean ciertos seres vivos para buscar alimento y evadir obstáculos puede ser útil en procesos de optimización.

1.5.5. Modelos de partículas con comportamiento de vorticidad

La vorticidad es un comportamiento que se presenta con frecuencia en los fluidos y se debe al acoplamiento que existe entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas (número de Reynolds [73]). El análisis de este comportamiento se realiza mediante las ecuaciones de Navier Stokes, las cuales suelen ser difíciles de resolver de forma analítica en casos generales [74]. El comportamiento de vorticidad se caracteriza por el movimiento de forma rotacional de partículas alrededor de un punto el cual se denomina vórtice. Además de los fluidos, este tipo de comportamiento se presenta en enjambres de individuos como peces, aves y bacterias, entre otros.

La descripción del comportamiento de muchos seres vivos se caracteriza por exhibir movimiento cooperativo coordinado, tal como poblaciones de bacterias las cuales presentan movimientos basados en quimiotaxis. También se observa este tipo de comportamiento en bandadas de aves, cardúmenes de peces e incluso en microorganismos como el zooplancton *Daphnia* [75], [76], [77]. Existen dos modelos que son los más empleados para representar este comportamiento: el de partículas autopropulsadas [78], [79] y el de partícula activa Browniana [77]. Este último considera una componente estocástica a diferencia del primero. Dichos modelos tienen la característica de poder describir el movimiento de partículas con vorticidad. Por lo general, estos modelos suelen emplear potenciales de Morse para representar la interacción entre individuos; sin embargo, en [80] se puede observar un modelo que emplea un potencial parabólico.

Es importante señalar que sobre aplicaciones que emplean modelos de enjambres con características de vorticidad, uno de los trabajos más representativos es el desarrollado por Mohammed Mabrouk y Colin McInnes [81] donde se propone un método para la planeación de trayectorias de robots móviles que permite evadir mínimos locales. Este algoritmo es denominado *Local Minimal Avoidance* (LMA), o también *Local Minimal Escape* (LME).

Finalmente, sobre desarrollos cercanos a la propuesta realizada en este documento en [82] se presenta un algoritmo de optimización que emplea el concepto de vorticidad al efectuar una analogía con el comportamiento de un fluido en un sumidero (drenaje). Este algoritmo se denomina *Particle Swirl Algorithm* (PSA) y hasta el momento no ha sido muy difundido ni empleado en aplicaciones reales de optimización.

2. Marco teórico

2.1. Introducción

En el presente capítulo se realiza la revisión de aspectos teóricos los cuales se toman como referencia para la propuesta del algoritmo. En la primera sección se presentan definiciones y conceptos empleados en el proceso de optimización. Posteriormente se revisan varios conceptos teóricos sobre optimización, siendo de interés el método basado en el descenso del gradiente ya que el algoritmo propuesto presenta este comportamiento en la fase de convergencia. En última sección se realiza una descripción del algoritmo de optimización basado en enjambres de partículas, prestando atención a las diferentes variaciones las cuales se toman de referencia para realizar la comparación con la propuesta desarrollada.

2.2. Definiciones preliminares

A continuación se revisan las definiciones de vector, matriz, bola, conjunto, región convexa, función cóncava y convexa como también funciones con formas cuadráticas. Estas definiciones se toman como referente para la formulación del problema general de optimización.

2.2.1. Vector y matriz

Se denomina vector \vec{x} a la secuencia ordenada de n números reales de tal forma que $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Por su parte una matriz es un arreglo bidimensional de elementos (números) organizados en filas y columnas. Una matriz \mathbf{A} con n filas y m columnas se le denomina matriz $n \times m$ donde $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$. En el presente documento los elementos de las matrices se consideran números reales de tal forma que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

2.2.2. Esfera y bola

En primer lugar, con $M \in \mathbb{R}^n$ se tiene que la aplicación $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ define una distancia (o métrica) sobre M donde para todo x, y, z en M se deben cumplir las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) \geq 0$ (positividad).
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (simetría).
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad triangular).

Para estas condiciones, se dice que el par (M, d) es un espacio métrico [83], [84].

Adicionalmente se llama distancia euclídea a la aplicación $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ donde:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{y} - \vec{x}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} \quad (2-1)$$

Para \mathbb{R}^2 una circunferencia corresponde a todos los puntos del plano que se encuentran a distancia dada de un punto fijo o centro. Al generalizar la anterior definición a un espacio de n dimensiones se tiene el concepto de hiper-esfera también denominada n -esfera [83], [84]. Una hiper-esfera de forma vectorial se puede definir como la esfera de radio $R \in \mathbb{R}^+$ y centro $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ donde todos los puntos \vec{x} cumplen $|\vec{x} - \vec{w}| = R$.

Una bola corresponde a todos los puntos que distan de otro en un valor menor o igual que una distancia denominada radio [83], [84].

Se denomina bola abierta de centro $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ y radio $R > 0$ a todos los puntos que:

$$B(\vec{w}, R) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : d(\vec{w}, \vec{x}) < R\} \quad (2-2)$$

Se denomina bola cerrada de centro $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ y radio $R > 0$ a todos los puntos que:

$$B(\vec{w}, R) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : d(\vec{w}, \vec{x}) \leq R\} \quad (2-3)$$

2.2.3. Conjuntos

Un conjunto es una colección bien definida de elementos los cuales poseen una propiedad en común. Por otra parte, en teoría de conjuntos, una clase es una colección de conjuntos. El concepto de clase se encuentra asociado a la agrupación de todos los conjuntos que comparten una cierta propiedad. A los objetos que componen el conjunto se les denomina elementos o miembros. El símbolo \in se emplea para mostrar que un elemento pertenece a un conjunto, es decir $a \in A$ indica que a pertenece a A o también como A contiene a a . En el caso que se quiera expresar que el elemento no pertenece al conjunto se emplea el símbolo \notin .

Una clase puede ser una colección incluso de otros elementos que no necesariamente son conjuntos [85]. En relación al concepto de conjunto se tiene:

- Un conjunto se denomina cerrado cuando contiene todos sus puntos límite. Por su parte un conjunto es abierto cuando su complemento es un espacio cerrado.
- Un conjunto es llamado limitado si está contenido dentro de una hiper-esfera de radio finito. De esta misma forma un conjunto se denomina compacto si es cerrado y limitado.
- Un conjunto es conectado si todo par de puntos dentro del conjunto se puede unir con un número finito de segmentos rectos y estos segmentos están dentro del conjunto. Considerando lo anterior un conjunto es convexo si todo par de puntos dentro del conjunto se puede unir con una línea recta que está dentro del conjunto.
- El vecindario de un punto \vec{x}_0 es el conjunto dentro de una hiper-esfera abierta de radio ϵ y centro \vec{x}_0 , $\{\vec{x} : |\vec{x} - \vec{x}_0| < \epsilon\}$, con $\epsilon > 0$.

2.2.4. Región convexa

Una región de puntos se define como un conjunto convexo en un espacio n -dimensional si, para todos los pares de puntos \vec{x}_1 y \vec{x}_2 en el conjunto el segmento rectilíneo que los une está dentro del conjunto. Lo anterior implica que todo punto \vec{x} , donde

$$\vec{x} = \theta \vec{x}_1 + (1 - \theta) \vec{x}_2, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (2-4)$$

está también en el conjunto [4], [19], [32].

Un ejemplo de conjunto convexo se puede apreciar en la figura **2-1-a**, mientras que en la figura **2-1-b** se puede observar un conjunto no convexo.

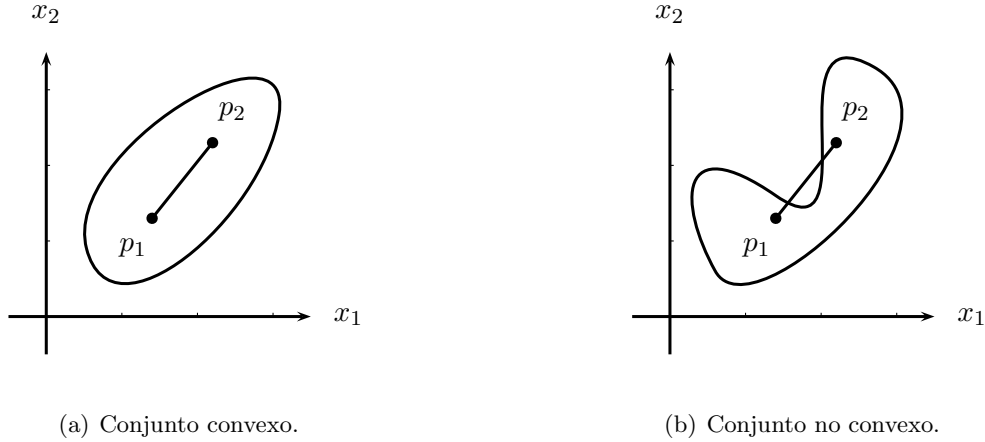


Figura 2-1.: Conjunto convexo y no convexo.

2.2.5. Funciones

Una función f se define como una relación que proyecta cada elemento de su entrada \vec{x} en un elemento de salida $f(\vec{x})$. El conjunto de todos los elementos de su entrada se llama dominio $D(f)$. El conjunto de todos los elementos de su salida se llama rango $R(f)$.

Una función que se aplica desde un espacio vectorial a un espacio escalar, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, se denomina función escalar.

Una función que tiene como salida un espacio vectorial se denomina función vectorial. En este caso $\vec{f}(\vec{x}) = [f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})]^T$ es una función vectorial.

Una función f es continua en un punto $\vec{x}_0 \in D(f)$ si, para cualquier serie $\{\vec{x}_n\}$ en $D(f)$ que converge a \vec{x}_0 , entonces $f(\vec{x}_n)$ converge a $f(\vec{x}_0)$. Una función que es continua en todos los puntos de un conjunto A , se dice que es continua en A .

Considerando un conjunto abierto $A \in \mathbb{R}^n$ y una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, si cada función

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2-5)$$

es continua en A , se dice que f es C^1 continua o, simplemente, $f \in C^1$. Adicionalmente, si cada función

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2-6)$$

es continua en A , entonces $f \in C^2$. Finalmente se dice que una función es suave si $f \in C^\infty$ [85].

2.2.6. Convexidad

Una función $\phi(\vec{x})$ es llamada convexa sobre el dominio de \mathbb{R} si para 2 vectores arbitrarios \vec{x}_1 y $\vec{x}_2 \in \mathbb{R}$,

$$\phi(\theta\vec{x}_1 + (1 - \theta)\vec{x}_2) \leq \theta\phi(\vec{x}_1) + (1 - \theta)\phi(\vec{x}_2) \quad (2-7)$$

donde θ es un escalar en el rango $0 \leq \theta \leq 1$.

La función $\phi(\vec{x})$ es estrictamente convexa si para la ecuación 2-7 se puede cambiar \leq por $<$.

Una función convexa no puede tener ningún valor mayor que los valores de la función obtenidos mediante interpolación lineal entre $\phi(\vec{x}_1)$ y $\phi(\vec{x}_2)$.

Si la desigualdad de la ecuación 2-7 es \geq , la función es cóncava. Una función $\phi(\vec{x})$ es cóncava (o estrictamente cóncava) si $-\phi(\vec{x})$ es convexa (o estrictamente convexa). En el caso de las funciones lineales estas son convexas y cóncavas [4], [19], [32].

Un ejemplo de función convexa se puede apreciar en la figura 2-2-a, mientras que en la figura 2-2-b se puede observar una función cóncava.

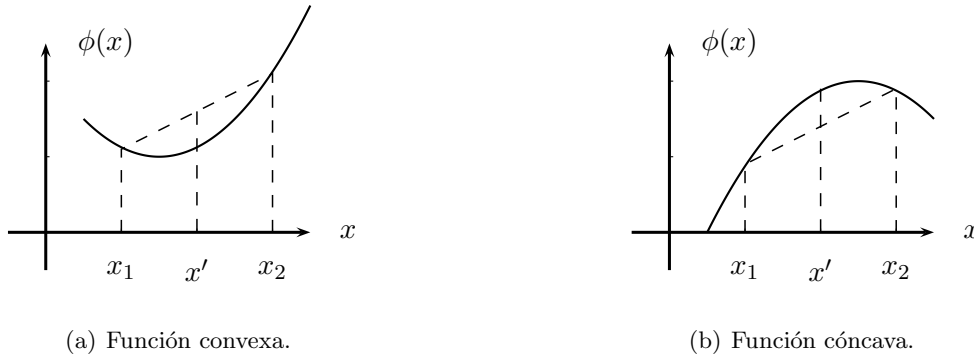


Figura 2-2.: Función convexa y cóncava.

2.2.7. Formas cuadráticas

Con $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y $f \in \mathbb{R}$, una función $f(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma cuadrática si se puede representar como:

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^T \mathbf{A} \vec{x} \quad (2-8)$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica, es decir:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2} \right) \quad (2-9)$$

2.2.8. Matrices definidas positivas

Una forma cuadrática es definida positiva si $\vec{x}^T \mathbf{A} \vec{x} > 0$ para todo $\vec{x} \neq \vec{0}$ y $\vec{x}^T \mathbf{A} \vec{x} = 0$ si y solo si $\vec{x} = \vec{0}$, en este caso, \mathbf{A} es definida positiva. Se dice que \mathbf{A} es definida negativa si $-\mathbf{A}$ es definida positiva. También se dice que \mathbf{A} es semidefinida positiva si $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Se puede verificar que \mathbf{A} y su forma cuadrática $\vec{x}^T \mathbf{A} \vec{x}$ son definidas positivas (o negativas) evaluando los valores propios de \mathbf{A} , $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Si $\lambda_i > 0$ (o $\lambda_i < 0$) para $i = 1, \dots, n$ entonces \mathbf{A} y su forma

cuadrática $\vec{x}^T \mathbf{A} \vec{x}$ son definidas positivas (o negativas). Si $\lambda_i > 0$ (o $\lambda_i < 0$) para $i = 1, \dots, n$, entonces \mathbf{A} y su forma cuadrática $\vec{x}^T \mathbf{A} \vec{x}$ son semidefinidas positivas (o negativas) [85].

2.2.9. Gradiente, Hessiano y Jacobiano

Para una función $f \in C^1$, el vector gradiente evaluado en \vec{x} corresponde a:

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \left[\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n} \right] \quad (2-10)$$

Considerando una función $f \in C^2$ la matriz Hessiana (Hessiano) evaluada en \vec{x} es:

$$\mathbf{H}(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

La matriz Jacobiana (Jacobiano) de un vector \vec{f} de n funciones corresponde a:

$$\vec{\nabla} \vec{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

2.3. Optimización

En esta sección se describen algunos conceptos teóricos sobre optimización. Adicionalmente se revisa el método de optimización basado en el cálculo del gradiente.

2.3.1. Definición del problema de optimización

La estructura del problema general de optimización mono-objetivo se puede expresar de la forma:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & f(\vec{x}, \vec{y}) \\ \text{s.a:} \quad & \vec{g}(\vec{x}, \vec{y}) \leq 0 \\ & \vec{h}(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \\ & \vec{x} \in \mathbb{R}^n \\ & \vec{y} \in \{0, 1\}^m \end{aligned} \quad (2-13)$$

donde $f(\vec{x}, \vec{y})$ es la función objetivo la cual se encuentra sujeta a restricciones de desigualdad \vec{g} , igualdad \vec{h} , tanto para variables continuas \vec{x} , como para variables discretas \vec{y} .

Para efectos prácticos todas las funciones objetivo se minimizan o maximizan lo cual se puede lograr mediante la siguiente identidad:

$$\text{mín } f(\vec{x}) = \text{máx}(-f(\vec{x})) \quad (2-14)$$

El conjunto de restricciones, determina la región factible Ω y cualquier vector $\vec{x}^* \in \Omega$ define una *solución factible*. El vector de funciones $\vec{f}(\vec{x})$ es una función que mapea el conjunto Ω al conjunto Λ y que contiene todos los valores posibles de la función objetivo.

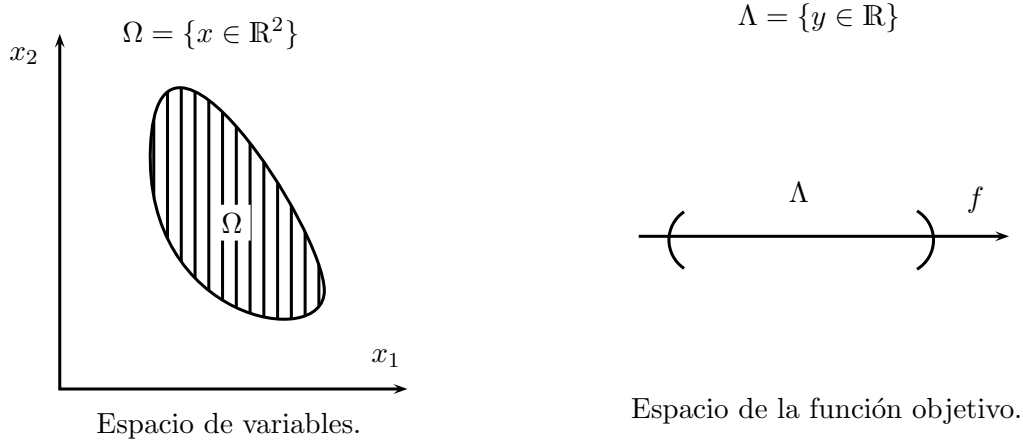


Figura 2-3.: Dominio de las variables y las funciones objetivo.

2.3.2. Condiciones de optimalidad

Condición necesaria

Si $f \in C^1$ la condición de optimalidad necesaria para que \vec{x}^* sea mínimo de f es

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}^*) = \vec{0} \quad (2-15)$$

Lo anterior significa que:

$$\frac{\partial f(\vec{x}^*)}{\partial x_i} = 0$$

para $i = 1, \dots, n$. Los puntos que satisfacen esta condición se denominan puntos estacionarios.

La condición necesaria, puede demostrarse usando expansión por serie de Taylor alrededor de \vec{x}^* tal que:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^*) + \vec{\nabla} f(\vec{x}^*)^T (\vec{x} - \vec{x}^*) + R_1(\vec{x})$$

Evaluando en $\vec{x} \pm \vec{\delta}$ y despreciando el residuo R_1 , se observa que la condición $f(\vec{x}^*) - f(\vec{x}^* \pm \vec{\delta})$ se cumple solo si $\vec{\nabla} f(\vec{x}^*) = \vec{0}$ [85].

Condición suficiente

Si $f \in C^2$, entonces la condición suficiente de optimalidad para que \vec{x}^* sea un mínimo local estricto de f está dada por la ecuación 2-15 y adicionalmente que $\nabla^2 f(\vec{x}^*)$ sea definida positiva.

Esta condición puede demostrarse usando aproximación cuadrática por serie de Taylor alrededor \vec{x}^* .

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^*) + \vec{\nabla} f(\vec{x}^*)^T (\vec{x} - \vec{x}^*) + \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}^*)^T \nabla^2 f(\vec{x}^*) (\vec{x} - \vec{x}^*) + R_2(\vec{x})$$

Evaluando en $\vec{x}^* \pm \vec{\delta}$ y despreciando el residuo R_2 se tiene que

$$f(\vec{x}^* \pm \vec{\delta}) - f(\vec{x}^*) = \pm 0 + \frac{1}{2} \vec{\delta}^T \nabla^2 f(\vec{x}^*) \vec{\delta}$$

Si $\vec{\delta} = \delta \vec{y}$ para cualquier $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, se puede observar que

$$\vec{y}^T \nabla^2 f(\vec{x}^*) \vec{y} > 0$$

es decir, $\nabla^2 f(\vec{x}^*)$ debe ser positiva definida [85].

2.3.3. Optimización sin restricciones

En un algoritmo de optimización sin restricciones para determinar el punto siguiente en una iteración se tienen dos estrategias: búsqueda de línea y región de confianza. En la estrategia de búsqueda de línea se escoge una dirección sobre la cual se busca un punto que proporcione un menor valor de la función objetivo, en cada iteración se busca una nueva dirección y un nuevo punto. En la estrategia de región de confianza se construye una función modelo que se aproxime a la función objetivo; dado que el modelo para ciertos puntos difiere de la función objetivo, se establece una región donde esta aproximación sea buena, la cual se denomina región de confianza. Ejemplos de métodos basados en región de confianza se tienen los que emplean formas cuadráticas [19].

Un ejemplo de un algoritmo con estrategia de búsqueda de línea es el método de Newton donde el vector gradiente como la matriz Hessiana se determinan mediante aproximaciones numéricas de primeras y segundas derivadas respectivamente [19]. Sin embargo, existe otra orientación donde se realizan aproximaciones sucesivas de la inversa del Hessiano, ya que el cálculo de esta inversa puede ser costoso desde el punto de vista computacional. Este conjunto de métodos se llaman cuasi-Newton y a él pertenecen el método DFP (Davidon Fletcher Powell) y el método BFGS (Broyden Fletcher Goldfarb Shannon) [19].

Métodos basados en gradiente

La mayoría de los métodos numéricos basados en el gradiente requieren un valor inicial \vec{x}_0 , una dirección de búsqueda \vec{d}_0 y un tamaño de paso η_0 , de tal forma que el punto siguiente puede calcularse como $\vec{x}_1 = \vec{x}_0 + \eta_0 \vec{d}_0$. Iterativamente se tiene:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \eta_n \vec{d}_n \tag{2-16}$$

De las técnicas más empleadas basadas en el cálculo de primeras derivadas se tiene el método del gradiente descendente, por otra parte, una técnica que emplea tanto primeras como segundas derivadas corresponde al método de Newton-Rapson.

2.3.4. Método de gradiente descendente

En este algoritmo se calcula el gradiente de la función objetivo para una posición actual en el espacio de búsqueda. En primer lugar se tiene que el gradiente de la función objetivo f es:

$$\vec{G} = \vec{\nabla} f(\vec{x}) \tag{2-17}$$

Geoméricamente, los puntos del vector \vec{G} apuntan en la dirección donde la pendiente de la función objetivo es la más empinada. Si el tamaño de paso es lo suficientemente pequeño en la dirección de $-\vec{G}$ el valor de la función objetivo en este nuevo punto será menor. El punto siguiente se calcula mediante la ecuación:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - \eta \vec{G} \quad (2-18)$$

Donde $\eta \in \mathbb{R}^+$ corresponde a la tasa de descenso. Es posible emplear una secuencia η_n de valores que disminuye con el aumento de n , ya que esto garantiza la convergencia. Cuanto mayor sea la tasa de aprendizaje, más lejos el algoritmo se moverá en un solo paso, con el riesgo de pasar por encima de un mínimo.

Otra variación del algoritmo de descenso de gradiente es conocida como *bold driver* [31]. En esta técnica se modifica la tasa de aprendizaje mientras se minimiza la función objetivo. Una implementación de este algoritmo emplea la siguiente regla para actualizar η .

$$\eta_{n+1} = \begin{cases} 1,1\eta_n, & \text{si } \Delta f \leq 0; \\ 0,5\eta_n, & \text{si } \Delta f > 0. \end{cases} \quad (2-19)$$

Donde $\Delta f = f(\vec{x}_n) - f(\vec{x}_{n-1})$ representa el cambio en el valor de la función objetivo entre los pasos $n-1$ y n . Si $\Delta f > 0$ se hace $\vec{x}_n = \vec{x}_{n-1}$ y se reduce a la mitad la tasa de aprendizaje lo cual asegura que el algoritmo no se mueva cuesta arriba [31]. Adicionalmente se aumenta continuamente la tasa de aprendizaje siempre que se disminuye la función objetivo.

Por lo general en los métodos que emplean gradientes como criterio de parada se toma un valor de tolerancia $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$$|\Delta f| \leq \epsilon \quad (2-20)$$

2.4. Algoritmos de optimización basados en enjambres

La coordinación y cooperación en grupos de individuos para la búsqueda de alimento y evasión de depredadores resultan ser buenas técnicas de búsqueda ya que estas han sido perfeccionadas por la naturaleza con el paso del tiempo [6]. El concepto de optimización basada en enjambres de partículas fue propuesto por James Kennedy y Russell Eberhart en [37]. En esta propuesta se desarrolló un algoritmo de búsqueda basado en el comportamiento social de bandadas de aves. Bajo esta orientación el objetivo principal de estudiar el comportamiento colectivo de los animales es encontrar un simple y eficiente algoritmo de optimización.

Sobre otras propuestas basadas en enjambres se tienen algoritmos inspirados en colonias de hormigas (*Ant Colony Optimization* ACO) [86], murciélagos (*Bat Algorithm* BA) [51], luciérnagas (*Firefly Algorithm* FA) [52], abejas (*Bee Colony Optimization* BCO) [87] y bacterias (*Bacterial Foraging Optimization* BFO) [36].

Una variación del algoritmo PSO consiste en incorporar un término de turbulencia presentándose al respecto varias propuestas. En [63] se incluye este operador en el algoritmo PSO tradicional como una variable estocástica de locura. Según [64] con este operador se busca mantener la diversidad de la población. Desde un punto de vista de algoritmos evolutivos el término de turbulencia tiene la misma función de un operador de mutación [65]. En [66] se propone el algoritmo TPSO (*Turbulence*

in the Particle Swarm Optimization) donde se incluye la turbulencia para resolver el problema de la convergencia prematura, con esta propuesta se busca impulsar las partículas perezosas para llevarlas a explorar nuevos espacios de búsqueda. TPSO utiliza un umbral de velocidad mínima para controlar la velocidad de las partículas y también evita la aglomeración de partículas manteniendo la diversidad de la población en el espacio de búsqueda. Un enfoque adicional del factor de turbulencia consiste en realizar una perturbación al enjambre proporcional a la distancia entre una partícula en consideración y otra la cual se toma de forma aleatoria, según [67] y [68] este factor de turbulencia le ayuda al enjambre a escapar de mínimos locales.

2.4.1. Algoritmo de optimización basado en enjambres de partículas

El esquema general de un algoritmo de optimización basado en enjambres de partículas PSO (*Particle Swarm Optimization*) se puede apreciar en la figura 2-4.

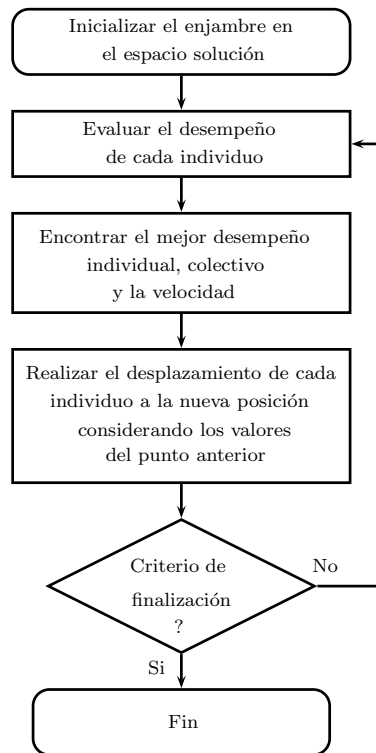


Figura 2-4.: Esquema general de un algoritmo PSO.

Un algoritmo básico PSO está regido por las ecuaciones de velocidad y posición [48]. Considerando un enjambre de partículas de N individuos la velocidad de cada individuo se puede establecer con la ecuación 2-21.

$$\vec{v}_i[n+1] = \vec{v}_i[n] + \beta_{pi}(\vec{x}_{p_i} - \vec{x}_i[n]) + \beta_{gi}(\vec{x}_g - \vec{x}_i[n]) \quad (2-21)$$

por su parte, la posición se puede calcular como:

$$\vec{x}_i[n+1] = \vec{x}_i[n] + \vec{v}_i[n+1] \quad (2-22)$$

Donde, $i = 1, 2, \dots, N$ es el índice de cada individuo, $n = 1, 2, 3, \dots, T_{\text{máx}}$ corresponde al índice de tiempo discreto, \vec{v}_i la velocidad del i -ésimo individuo, \vec{x}_i posición del i -ésimo individuo, p_i mejor evaluación encontrada por el i -ésimo individuo, g mejor evaluación encontrada por el enjambre, \vec{x}_{p_i} mejor posición encontrada por el i -ésimo individuo (cognitivo), \vec{x}_g , mejor posición encontrada por el enjambre (social) y β_{p_i}, β_{g_i} números aleatorios en el intervalo $[0, 1]$ asociado al i -ésimo individuo. La descripción detallada de los pasos de un algoritmo PSO se pueden apreciar en el algoritmo 1.

Algoritmo 1: Algoritmo de optimización basado en enjambre de partículas PSO.

```

1 Inicializar el enjambre en el espacio solución, (por lo general de forma aleatoria). La
  velocidad inicial se considera cero;
2 begin
3   while Hasta tener convergencia o bajo algún criterio de finalización. do
4     Mover cada partícula a la nueva posición:  $\vec{x}_i[n + 1] = \vec{x}_i[n] + \vec{v}_i[n + 1]$ ;
5     Evaluar el desempeño de cada individuo (fitness):  $P_i = f(\vec{x}_i[n])$ ;
6     Encontrar  $p_i$ ;
7     if  $f(\vec{x}_i[n]) > p_i$  then
8        $p_i = f(\vec{x}_i[n])$ ;
9        $\vec{x}_{p_i} = \vec{x}_i[n]$ ;
10    end
11    Encontrar  $g$ ;
12    if  $f(\vec{x}_i[n]) > g$  then
13       $g = f(\vec{x}_i[n])$ ;
14       $\vec{x}_g = \vec{x}_i[n]$ ;
15    end
16    Calcular  $\vec{v}_i[n]$  empleando la ecuación 2-21.
17  end
18 end

```

2.4.2. Modelo Gbest

En este modelo se mantiene una única “mejor solución” de todas las partículas del enjambre denominada mejor global (*Gbest*). Esta partícula actúa como un atractor por lo cual todas las partículas tienden a reunirse en esta posición. Si no se actualiza con regularidad este punto, el enjambre puede converger prematuramente. En la ecuación 2-21 el valor de \vec{x}_g se determina de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \vec{x}_g \in \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N\} | f(\vec{x}_g) &= \min\{f(\vec{x}_1), f(\vec{x}_2), \dots, f(\vec{x}_N)\} \\
 &= \min_{i=1,2,\dots,N} f(\vec{x}_i)
 \end{aligned}
 \tag{2-23}$$

En este caso \vec{x}_g se llama la “mejor posición global” (*Global Best Position*). Con este enfoque se tiene una buena convergencia sacrificando la búsqueda [31]. En la figura 2-5-a se puede apreciar un ejemplo del modelo *Gbest*, donde se observa la interacción que tiene una partícula con el resto del enjambre.

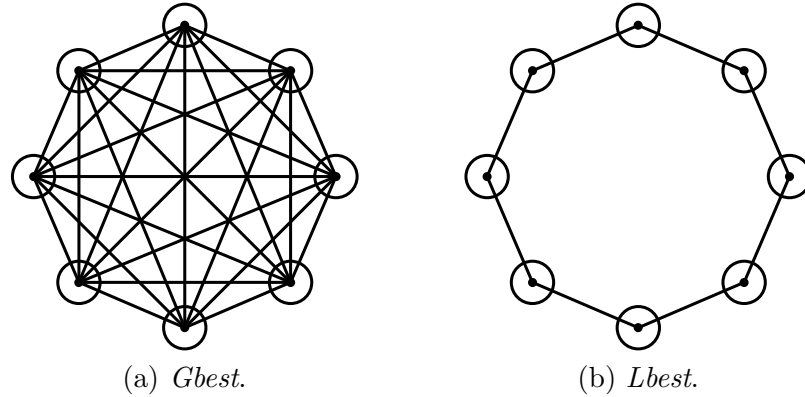


Figura 2-5.: Ejemplos de vecindades *Gbest* y *Lbest*.

2.4.3. Modelo *Lbest*

Con este modelo se busca evitar la convergencia prematura al mantener múltiples atractores. Para su implementación se toma un subconjunto de partículas relacionadas con una partícula i del cual se establece la mejor posición local $\vec{x}_{g,i}$. En la figura 2-5-b se puede apreciar este tipo de interacción. Considerando un conjunto A_i de M elementos este se puede definir de la forma:

$$A_i = \{\vec{x}_i, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_{i-1+M}, \vec{x}_{i+M}\} \quad (2-24)$$

donde se tiene un ordenamiento cíclico de las partículas con $\vec{x}_{i+N} = \vec{x}_i$, entonces, el valor del mejor individuo para el conjunto A_i se puede calcular como:

$$\begin{aligned} \vec{x}_{g,i} \in A_i | f(\vec{x}_{g,i}) &= \min\{f(\vec{x}_i), f(\vec{x}_{i+1}), \dots, f(\vec{x}_{i-1+M}), f(\vec{x}_{i+M})\} \\ &= \min\{f(\vec{x}_j)\}, \forall \vec{x}_j \in A_i \end{aligned} \quad (2-25)$$

Las partículas seleccionadas para el subconjunto A_i no tienen relación entre sí en el dominio del espacio de búsqueda, la selección se basa solamente en el índice de la partícula. El modelo *Gbest* es un caso especial del modelo *Lbest* con $M = N$. En el modelo *Lbest* sólo un número específico de partículas (vecindad) puede afectar la velocidad de una partícula dada de tal forma que el enjambre converge más lento pero se puede localizar el óptimo global con una mayor probabilidad [31].

2.4.4. Algoritmo PSO con factor de inercia

Un algoritmo PSO más elaborado incorpora un factor de inercia para el cálculo de la velocidad teniendo la ecuación:

$$\vec{v}_i[n+1] = w\vec{v}_i[n] + \alpha_p[\beta_{pi}(\vec{x}_{p_i} - \vec{x}_i[n])] + \alpha_g[\beta_{gi}(\vec{x}_g - \vec{x}_i[n])] \quad (2-26)$$

En este caso w es un valor de inercia, α_p constante de aceleración de la parte social y α_g aceleración de la parte cognitiva. En [88] se realiza un análisis de este modelo obteniendo la recomendación mostrada en la tabla 2-1 para los parámetros del algoritmo:

Configuración	w	α_p	α_g
1	0.600	1.7	1.7
2	0.729	1.494	1.494

Tabla 2-1.: Recomendación para los parámetros del algoritmo PSO según [88].

2.4.5. Algoritmo PSO con factor de restricción

Un método que busca tener un equilibrio entre búsquedas globales y locales incluye un factor de restricción χ . Este fue estudiado simultáneamente con el método de inercia en [26]. La ecuación de velocidad incluyendo este término toma la forma.

$$\vec{v}_i[n+1] = \chi (\vec{v}_i[n] + \alpha_p [\beta_{pi} (\vec{x}_{p_i} - \vec{x}_i[n])] + \alpha_g [\beta_{gi} (\vec{x}_g - \vec{x}_i[n])]) \quad (2-27)$$

Donde:

$$\chi = \frac{2}{\left| 2 - \varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4\varphi} \right|} \quad (2-28)$$

y $\varphi = \alpha_p + \alpha_g$.

En [62] se encontró que al tener $\varphi < 4$, el enjambre se mueve en forma de “espiral” lentamente hacia y alrededor de la mejor solución que se encuentra en el espacio de búsqueda sin ninguna garantía de convergencia, mientras que al tener $\varphi > 4$ se tiene una convergencia rápida y garantizada. Aunque es posible ponderar la ecuación de velocidad para favorecer la mejor posición individual o la mejor posición global mediante el ajuste de los valores de α_p y α_g , por simplicidad en algunas implementaciones se utilizan valores iguales para ambos parámetros. Tomando $\varphi = 4,1$ (constante) para asegurar la convergencia y con $\alpha_p = \alpha_g = 2,05$ se tiene $\chi \approx 0,72984$.

Con este método se tiene un efecto similar a la técnica de inercia modulada, lo que resulta en el comportamiento de enjambre que eventualmente se limita a un área pequeña del espacio de búsqueda factible que contiene la mejor solución conocida [26].

2.4.6. Algoritmo PSO con inercia modulada

En este caso w es una función de inercia que varía en función que pasan las iteraciones teniendo una expresión de la forma:

$$\vec{v}_i[n+1] = w[n] \vec{v}_i[n] + \alpha_p [\beta_{pi} (\vec{x}_{p_i} - \vec{x}_i[n])] + \alpha_g [\beta_{gi} (\vec{x}_g - \vec{x}_i[n])] \quad (2-29)$$

Aunque se pueden tener diferentes enfoques para el factor de inercia [89], una de las estrategias más empleadas consiste en un decrecimiento lineal de la forma:

$$w[n] = w_{\text{máx}} - \frac{w_{\text{máx}} - w_{\text{mín}}}{T_{\text{máx}}} n \quad (2-30)$$

Donde $w_{\text{máx}}$ y $w_{\text{mín}}$ son los valores máximos y mínimos de inercia y $T_{\text{máx}}$ el número total de iteraciones.

3. Revisión sobre modelos basados en enjambres con características de vorticidad

3.1. Introducción

Modelos que permitan describir el comportamiento de seres vivos como aves, peces, hormigas y bacterias entre otros organismos, han sido de gran interés en áreas como la biología. En particular, cuando se trata de comportamientos colectivos es de importancia modelar las interacciones presentes entre individuos con el fin de reproducir las conductas de una congregación. La capacidad de rodear obstáculos y evadir depredadores son comportamientos que presentan los enjambres de individuos y que pueden ser empleados en procesos de búsqueda.

Sobre los aspectos importantes de los modelos de enjambres se tiene la posibilidad de describir movimientos de tipo uniforme, caótico y turbulento, características que están ligadas desde una perspectiva de fluidos al número de Reynolds, el cual varía según el enjambre en consideración. Por ejemplo, se tienen valores diferentes del número de Reynolds para enjambres de bacterias y peces los cuales poseen características físicas diferentes.

Uno de los modelos que permite describir movimientos circulares es el realizado para el zooplancton *Daphnia* ya que su forma de locomoción le ayuda a buscar alimento y evadir depredadores. Sobre los diferentes enfoques de modelado se tiene el de partícula autopropulsada, partículas con depósitos internos de energía, interacciones hidrodinámicas y modelos que incluyen maniobras de evasión.

3.2. Número de Reynolds

El número de Reynolds (R_e) es un parámetro adimensional asociado a las ecuaciones de movimiento de un fluido (ecuaciones de Navier Stokes [74], [90]). Este número indica la relación entre los términos de fuerzas inerciales F_I (fuerzas requeridas para acelerar masas) y fuerzas viscosas F_V (fuerzas debidas a esfuerzos cortantes en el fluido) [73], [91]. En términos generales el número de Reynolds se puede establecer como:

$$R_e = \frac{F_I}{F_V} \quad (3-1)$$

Para estimar el número de Reynolds se tiene que la fuerza de inercia en forma general se puede establecer como:

$$F_I = ma = \rho L^3 \frac{L}{T^2} = \rho v^2 L^2 \quad (3-2)$$

Por su parte, la fuerza viscosa se puede calcular de la forma:

$$F_V = \mu \frac{dv}{dy} A = \mu \frac{v}{L} A = \mu v L \quad (3-3)$$

Por lo tanto, se tiene que el número de Reynolds es:

$$R_e = \frac{\rho v L}{\mu} \quad (3-4)$$

Donde, ρ es la gravedad específica del fluido (densidad del fluido), v velocidad del fluido (velocidad de la partícula en el fluido), L es la escala lineal del movimiento (longitud de la partícula) y μ corresponde al coeficiente de viscosidad.

3.2.1. Número de Reynolds y comportamientos biológicos

Según la ley de Stokes cuando elementos pequeños se mueven lentamente a través de fluidos las fuerzas viscosas son dominantes en comparación con las fuerzas de inercia [73]. Un ejemplo que permite observar el anterior concepto consiste en comparar el número de Reynolds para bacterias y peces lo cual se puede apreciar en la tabla **3-1**. En este caso se tienen diferentes valores del número de Reynolds evidenciando las diferencias hidrodinámicas que presentan estos dos tipos de seres vivos. El factor que influye más sobre el comportamiento de los peces es la inercia mientras que para las bacterias corresponde a la viscosidad [73].

Parámetro	Peces	Bacterias
v	10^2 cm/s	10^{-3} cm/s
L	10 cm	10^{-4} cm
ρ	1 g/cm^3	1 g/cm^3
μ	10^{-2} g/(cm s)	10^{-2} g/(cm s)
R_e	10^5	10^{-5}

Tabla 3-1.: Número de Reynolds para bacterias y peces. Adaptado de [73].

Si las fuerzas viscosas son mayores que las inerciales se tiene un flujo laminar debido a la interacción de esfuerzos tangenciales. Por otro lado, si las fuerzas viscosas y tangenciales son comparables se presenta un estado de transición con pequeñas ondulaciones variables en el tiempo. Finalmente si las fuerzas inerciales son mayores que las viscosas se presenta un flujo turbulento caracterizado por un movimiento desordenado y no estacionario.

3.3. Modelos de enjambres

Un modelo de enjambre consiste en la descripción del movimiento de un conjunto de individuos. En primer lugar se considera un total de N individuos donde se tienen expresiones para el i -ésimo individuo. La posición de la partícula se puede relacionar con su velocidad como:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \quad (3-5)$$

Para aplicaciones y simulaciones a nivel computacional la anterior expresión en tiempo discreto se puede aproximar como:

$$\vec{r}_i[n+1] = \vec{r}_i[n] + \vec{v}_i[n]\Delta t \quad (3-6)$$

Donde $\vec{r}_i[n+1]$ es el punto siguiente de la posición del individuo i la cual se determina con el punto actual $\vec{r}_i[n]$, con la velocidad \vec{v}_i del individuo y Δt el cual corresponde al incremento de tiempo. De forma general la relación para variación de la velocidad respecto al tiempo es:

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = f\{\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N\} \quad (3-7)$$

De la misma forma, para tiempo discreto la velocidad de un individuo se puede calcular como:

$$\vec{v}_i[n+1] = \vec{v}_i[n] + f\{\vec{r}_1[n], \dots, \vec{r}_N[n], \vec{v}_1[n], \dots, \vec{v}_N[n]\} \Delta t \quad (3-8)$$

Siendo esta última ecuación donde se presentan las variaciones de los diferentes modelos que buscan describir el comportamiento de los enjambres [50].

Por otra parte, para realizar la descripción del movimiento de una partícula se tienen los métodos de Euler y Lagrange [92]. El método de Euler consiste en establecer un punto fijo en el espacio y observar todas la partículas que pasan por este punto, por otro lado, el método de Lagrange consiste en seguir la partícula para determinar su posición y velocidad. Como es de apreciar, los métodos basados en partículas tienen el enfoque de Lagrange.

3.4. Modelos de enjambres con características de vorticidad

A continuación se presentan diferentes enfoques y modelos que permiten representar el movimiento de un enjambre con la formación de un vórtice. En [93] se comenta que patrones globales de los enjambres aparecen de interacciones internas de los individuos. En el caso que un solo individuo presente un comportamiento circular esto indica que no es un comportamiento colectivo dado por la alineación y vecindad de animales como peces y aves [93].

Algunos de los modelos presentados a continuación son empleados para describir el comportamiento del zooplancton *Daphnia*. En [76] se expone que el interés sobre el estudio de este zooplancton radica en modelar la búsqueda óptima de comida y el desplazamiento de enjambres realizando movimientos circulares con la formación de vórtices. El comportamiento de vorticidad puede ser visto como un fenómeno de auto-organización dado por la realimentación de la ficción del agua y la indirecta alineación con el zooplancton [93]. Según [75] los diferentes enfoques para el modelo del zooplancton *Daphnia* son:

- Interacción de partículas autopropulsadas (*Self-Propelled Interacting Particles SPIP*) propuesto por Vicsek (1995) [72].
- SPIP con corto rango de atracción y largo de repulsión, propuesto por Levine (2001) [78].
- Interacción de partículas Brownianas activas con depósitos de energía interna (*Interacting Active Brownian Particles with Internal Energy Depot*). Para este modelo se tienen las siguientes variaciones:
 - Partícula Browniana activa (*Single Active Brownian Particle*) [94], [95].
 - Acople global mediante el momento angular promedio del enjambre (*Global Coupling Via Mean Angular Momentum of Swarm*) [96].
 - Interacción de partícula a partícula (*Particle-Particle Interaction*) [97].

- Interacciones hidrodinámicas (*Hydrodynamic Interaction*) [75].
- Maniobras de evasión (*Avoidance Maneuvers*) [15].

Los anteriores modelos también han sido empleados para representar el comportamiento de cardúmenes de peces y bandadas de aves. Otros modelos de partículas que presentan el comportamiento de vorticidad se fundamentan en las ecuaciones de Navier Stokes y choques inelásticos de partículas.

3.4.1. Modelo de Vicsek

El concepto de partículas autopropulsadas (*Self-Propelled Particles*) se introdujo en [72] con el fin de estudiar el movimiento colectivo de grandes grupos de organismos. De forma general se aprecia que el movimiento de organismos está dado por la interacción entre vecinos [14]. Los modelos de partículas autopropulsadas consisten en partículas que interactúan a nivel local con una forma de propulsión intrínseca a la partícula la cual le permite desplazarse de forma autónoma [14]. El comportamiento de autopropulsión aparece en procesos físico-químicos donde se involucran partículas pequeñas con fuerzas superficiales sensibles a concentraciones químicas y temperaturas [98].

El modelo de partículas autopropulsadas presentado en [72] considera un desplazamiento en dos dimensiones de N partículas localmente alineadas con velocidad constante y ruido, siendo los parámetros del modelo la densidad del enjambre de partículas y la amplitud del ruido. El esquema general de este modelo es:

$$\vec{r}_i[n+1] = \vec{r}_i[n] + \vec{v}_i[n]\Delta t \quad (3-9)$$

$$\theta_i[n+1] = \langle \theta[n] \rangle_r + \Delta\theta \quad (3-10)$$

Donde $\langle \theta[n] \rangle_r$ es la dirección promedio de las velocidades de las partículas. La velocidad $\vec{v}_i[n+1]$ se calcula con la dirección dada por $\theta_i[n+1]$ y la magnitud de la velocidad v , la cual corresponde al avance de la partícula entre iteraciones. Finalmente $\Delta\theta$ es un número aleatorio con probabilidad uniforme en el intervalo $[-\eta/2, \eta/2]$.

3.4.2. Modelo de Langevin

Un acercamiento al comportamiento de los enjambres donde se propone considerar elementos de mecánica estadística (movimiento Browniano) para la descripción de los comportamientos colectivos se puede observar en [77].

El aspecto central expuesto en [77] radica en el hecho que soluciones para las distribuciones estacionarias de grupos o enjambres de individuos con atracción de tipo lineal, están dados por su proximidad. El modelo propuesto, considera que existe movimiento coherente colectivo que se encuentra fluctuando alrededor de un centro de rotación el cual no es fijo.

En [99] se examinan las características dinámicas caóticas que presenta la inteligencia de enjambres, adicionalmente se propone que existe un balance caótico entre el individuo y la sociedad.

Una expresión escalar y general de la ecuación de Langevin es:

$$m \frac{dv}{dt} = F(x) - \beta v + \xi(t) \quad (3-11)$$

Donde v es la velocidad de la partícula, x es la posición de la partícula, $F(x)$ corresponde a la fuerza de interacción, βv es un factor disipativo y $\xi(t)$ es el ruido térmico.

3.4.3. Modelos de partículas activas Brownianas

El modelo de partícula activa Browniana (*Active Brownian Particle* ABP) está basado en la ecuación de Langevin de la cual se han realizado diferentes variaciones.

En estos modelos se considera una componente estocástica $\vec{\xi}_i(t)$ la cual tiene magnitud D . Esta fuerza permite describir la influencia de los eventos aleatorios sobre el movimiento de la partícula. Esta componente estocástica de ruido cumple las siguientes propiedades de correlación:

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0 \quad (3-12)$$

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(\tau) \rangle = 2D \delta_{ij} \delta(t - \tau) \quad (3-13)$$

Modelo de una partícula activa Browniana

Este enfoque considera un depósito de energía interna lo cual permite una descripción del movimiento activo de entidades biológicas basado en consumo y conversión de energía [94], [100]. Tal como se observa en [100] el depósito de energía considera las condiciones para tener un movimiento biológico activo. El modelo considera una partícula de masa m con posición \vec{r} y velocidad \vec{v} donde se tiene una fuerza de autopropulsión conectada con un depósito de energía $e(t)$ y una fuerza de fricción dependiente de la velocidad $\gamma(\vec{v})$. También se considera una componente de ruido $\vec{\xi}(t)$ y una fuerza externa parabólica dada por un potencial $U(\vec{r})$.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \quad (3-14)$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = de(t)\vec{v} - \gamma(\vec{v})\vec{v} - \vec{\nabla}U(\vec{r}) + \vec{\xi}(t) \quad (3-15)$$

La expresión para el depósito interno de energía $e(t)$ consiste de una compensación dependiente del espacio $q(\vec{r})$, una disipación interna $ce(t)$ con factor de escala c y un término de conversión de energía interna en energía cinética $de(t)|\vec{v}(t)|^2$ con coeficiente d . La ecuación diferencial que rige la energía interna $e(t)$ es:

$$\frac{de(t)}{dt} = q(\vec{r}) - ce(t) - de(t)|\vec{v}(t)|^2 \quad (3-16)$$

Considerando un flujo constante de energía hacia el depósito interno de energía se puede tomar $q(\vec{r}) = q_0$, adicionalmente se tiene que la función asociada al comportamiento de fricción es:

$$\gamma(\vec{v}) = \gamma_0 - \frac{dq_0}{c + d|\vec{v}(t)|^2} \quad (3-17)$$

De los resultados reportados en [94] se aprecia que un solo individuo presenta un comportamiento de ciclo límite el cual consiste en un movimiento circular alrededor de un potencial atractivo.

Modelo para un enjambre de partículas Brownianas

En [15] se busca explicar la formación de vórtices para grupos de individuos biológicos, para lo cual se propone un modelo compuesto por ecuaciones para la posición, la velocidad y la energía interna almacenada. El depósito de energía considera las condiciones para tener un movimiento biológico activo. La ecuación de velocidad resulta de la superposición de los términos determinísticos y

estocásticos. La parte determinística considera la interacción de los individuos con comportamiento local de evasión y fuerzas externas correspondientes a la atracción de un potencial. De los resultados se observa que el modelo permite reproducir comportamientos similares a la forma de locomoción de *Daphnia*. Adicionalmente se analiza que el comportamiento de vorticidad le permite a *Daphnia* evadir colisiones con otros animales. Según [15] en términos generales las ecuaciones de movimiento son:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \quad (3-18)$$

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\gamma(\vec{v}_i)\vec{v}_i - \vec{\nabla}U(\vec{r}_i) + \vec{\xi}_i(t) \quad (3-19)$$

$$\gamma(\vec{v}_i) = \gamma_0 - \frac{dq_0}{c + d|\vec{v}_i|^2} \quad (3-20)$$

Donde \vec{r}_i , \vec{v}_i son la posición y la velocidad de la i -ésima partícula, $\gamma(\vec{v}_i)$ es una función no lineal de fricción la cual considera un deposito interno de energía, a es un parámetro del potencial parabólico externo $U(\vec{r}) = (a/2)|\vec{r}|^2$ el cual se encuentra centrado en el origen y que produce una fuerza de atracción sobre cada partícula correspondiente a $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}U = -a\vec{r}_i$. Finalmente se tiene la fuerza estocástica $\vec{\xi}_i(t)$ donde cada una de sus componentes escalares tiene magnitud D , esta fuerza permite describir la influencia de los eventos aleatorios sobre el movimiento de una partícula.

Interacción de partículas activas Brownianas con acople global

Un enfoque para modelar la interacción de partículas consiste en adicionar un acople global de los agentes al centro de masa del enjambre tal como se puede apreciar en [15], [95] y [96]. Un modelo que considera esta orientación se puede observar en [75] el cual está compuesto por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \quad (3-21)$$

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\gamma_0 \vec{v}_i + de_i(t)\vec{v}_i - k \left(\vec{r}_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \vec{r}_j \right) + \vec{\xi}_i(t) \quad (3-22)$$

$$\frac{de_i(t)}{dt} = q_0 - ce_i(t) - d|\vec{v}_i|^2 e(t) \quad (3-23)$$

Donde d es un parámetro asociado a la disipación de energía, k es una constante que pondera la interacción de los individuos, γ_0 es una constante asociada a la fricción y $\vec{\xi}(t)$ la componente de ruido blanco.

Modelo con acople global parabólico

Un modelo adicional de partícula activa Browniana consiste en tomar una aproximación de segundo orden por series de Taylor para el movimiento activo y también incorporar una fuerza de interacción entre partículas dada por un potencial de atracción de tipo parabólico el cual permite un acople global al centro de masa del enjambre [101]. De la misma forma que en los anteriores modelos se

incluye una fuerza de tipo estocástica. El modelo propuesto en [75] y [101] es:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \quad (3-24)$$

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = (\alpha - \beta|\vec{v}_i|^2)\vec{v}_i - \frac{a}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \vec{\xi}_i(t) \quad (3-25)$$

Donde $(\alpha - \beta|\vec{v}_i|^2)\vec{v}_i$, corresponde a la fuerza de autopropulsión la cual permite el movimiento activo [98], el parámetro a caracteriza la intensidad de la fuerza de interacción y $\vec{\xi}_i(t)$ es una fuerza aleatoria donde cada una de sus componentes se considera como ruido blanco con intensidad (magnitud) D el cual es independiente para todas las partículas.

Interacciones hidrodinámicas

En este caso se adicionan interacciones hidrodinámicas al modelo partícula activa Browniana mediante contribuciones de Oseen, aunque también se podría realizar considerando las ecuaciones de Navier Stokes [75]. Las ecuaciones dinámicas para una partícula son:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \quad (3-26)$$

$$m \frac{d\vec{v}_i}{dt} = K_F \vec{v}_F - \gamma(\vec{v}_i)\vec{v}_i - \vec{\nabla}U(\vec{r}_i) + \vec{\xi}_i(t) \quad (3-27)$$

Donde γ es una función disipativa no lineal, U es un potencial de influencias externas y $\vec{\xi}_i$ es una componente estocástica de ruido blanco. El término $K_F \vec{v}_F$ es generado por el movimiento todas las partículas el cual tiende a presentar un alineamiento de la velocidad \vec{v}_i con \vec{v}_F .

$$\vec{v}_F(\vec{r}_{ij}) = \sum_{j \neq i}^N \left(\frac{R}{|\vec{r}_{ij}|} \vec{v}_j + \frac{R(\vec{r}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij})}{|\vec{r}_{ij}|^3} \vec{r}_{ij} \right) \quad \text{para } r_{ij} \gg R \quad (3-28)$$

En el anterior modelo R es una constante que representa el radio hidrodinámico efectivo y \vec{r}_{ij} es el vector desde la i -ésima hasta la j -ésima partícula. La anterior ecuación muestra que el flujo de Oseen presenta componentes en la dirección de \vec{v}_j y \vec{r}_{ij} , lo cual genera simetría en el comportamiento de las partículas [75].

Modelo con maniobras de evasión

Este modelo está formado por la adición de un potencial de interacción repulsivo de tipo exponencial al modelo de partícula activa Browniana [15] y [102]. En términos generales el modelo es:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \quad (3-29)$$

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = de(t)\vec{v}_i - \gamma(\vec{v}_i)\vec{v}_i - \vec{\nabla}U(\vec{r}_i) + \sum_{j \neq i}^N \vec{f}_{ij} + \vec{\xi}(t) \quad (3-30)$$

De la misma forma que en el modelo de partícula activa Browniana \vec{r}_i y \vec{v}_i son la posición y velocidad de la i -ésima partícula, γ es una función no lineal de disipación de energía, $e(t)$ representa el deposito interno de energía con una constante asociada d , por su parte U es un potencial externo y $\vec{\xi}(t)$

es una componente estocástica de ruido blanco. Finalmente \vec{f}_{ij} es la fuerza de interacción entre individuos que permite tener maniobras de evasión la cual tiene la siguiente expresión:

$$\vec{f}_{ij} = \frac{p}{\sigma R_i} e^{-\frac{R_i}{\sigma}} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (3-31)$$

Donde R_i es una función de distancia entre individuos y p , σ cuantifican la fuerza y el rango del potencial.

Modelo de enjambre con acople global para velocidad

Según [77] y [103] en términos generales un modelo dinámico de partículas está compuesto por interacciones conservativas dadas por un potencial $U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ y por el postulado de partículas Brownianas con el cual se tiene ecuación de Langevin:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \quad (3-32)$$

$$m \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i - \nabla \vec{U}(\vec{r}_i, \dots, \vec{r}_N) + \vec{\xi}(t) \quad (3-33)$$

Donde $\vec{\xi}(t)$ es una fuerza estocástica de magnitud D . Las fuerzas no disipativas se pueden representar por relaciones internas y externas en parejas, de la forma:

$$U = \sum_{i=1}^N W \left(\vec{r}_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Phi(\vec{r}_{ij}) \right) \quad (3-34)$$

Donde W es un potencial externo y Φ es el potencial de interacción. Por lo general se emplean aproximaciones parabólicas de estas fuerzas. La distancia desde la partícula i hasta la partícula j es $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, según [77] la fuerza de interacción corresponde a:

$$\vec{\nabla} U = \sum_{j=1}^N \vec{\nabla} U(\vec{r}_{ij}) \frac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|}$$

Por otro lado, las fuerzas disipativas se pueden representar como:

$$\vec{F}_i = -m\gamma(\vec{v}_i)\vec{v}_i - m\sigma(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N) \quad (3-35)$$

Para el caso, γ representa la fricción que depende de la velocidad la cual puede tener una parte negativa. En el caso de equilibrio térmico se tiene $\gamma(\vec{v}) = \gamma_0$ el cual es un valor constante. En el caso general cuando la fricción depende de la velocidad, se asume que la fricción es una función monótona creciente que converge a γ_0 cuando se tienen altas velocidades. Para un modelo donde se considera un deposito interno de energía la función $\gamma(\vec{v})$ toma la forma:

$$\gamma(\vec{v}) = \left(\gamma_0 - \frac{dq}{c + d|\vec{v}|^2} \right) \quad (3-36)$$

Donde c, d, q son constantes positivas que caracterizan el flujo de energía desde el deposito de energía hasta la partícula. Una aproximación se puede lograr tomando los dos primeros términos de la serie de Taylor obteniendo:

$$\gamma(\vec{v}) = (-\alpha + \beta|\vec{v}|^2) \quad (3-37)$$

Con esta aproximación la velocidad estacionaria es:

$$|\vec{v}_0|^2 = \frac{\alpha}{\beta} \quad (3-38)$$

La otra componente de la fuerza disipativa considera la interacción de las velocidades. Este término tiende a sincronizar las velocidades de los individuos. Un modelo para esta fuerza es:

$$\sigma_i(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N) = \frac{\sigma^2}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{v}_i - \vec{v}_j) = \sigma^2(\vec{v}_i - \vec{V}(t)) \quad (3-39)$$

Este modelo de fuerza tiende a hacer paralela las velocidades individuales de las partículas con la velocidad del enjambre $\vec{V}(t)$, donde:

$$\vec{V}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \vec{v}_j \quad (3-40)$$

Con este modelo las interacciones de velocidades generan un acople global.

3.4.4. Modelo de Levine

El modelo de Levine se puede apreciar en [78] donde se considera una fuerza de interacción dada por un potencial $U(\vec{r}_i)$ el cual presenta un rango corto de repulsión y un rango largo de atracción. El modelo considera N partículas con masa m_i , posición \vec{r}_i , velocidad \vec{v}_i , una fuerza de interacción dada por $\vec{\nabla}U_{int}(\vec{r}_i)$, un coeficiente de fricción γ y una fuerza de autopropulsión \vec{f}_i la cual está acompañada por un factor de escala α . En términos generales las ecuaciones de movimiento para una partícula son:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \quad (3-41)$$

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \alpha \vec{f}_i - \gamma \vec{v}_i - \vec{\nabla}U_{int}(\vec{r}_i) \quad (3-42)$$

La dirección de \vec{f}_i puede ser paralela a \vec{v}_i o a un promedio sobre la vecindad \vec{v}_j permitiendo alinear la fuerza de autopropulsión con la velocidad del enjambre según la influencia de los vecinos. Sin alineamiento se tiene $\vec{f}_i = \vec{v}_i$ y con un alineamiento de rango l_c la fuerza de autopropulsión es:

$$\vec{f}_i = \sum_{i \neq j}^N \vec{v}_j e^{-\frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}{l_c}} \quad (3-43)$$

La fuerza de atracción entre partículas tiene un rango largo l_a , mientras la fuerza repulsiva entre partículas presenta un rango corto l_r . El potencial de interacción entre partículas U_{int} tiene la siguiente expresión:

$$U_{int} = \sum_{j \neq i}^N C_a e^{-\frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}{l_a}} - \sum_{j \neq i}^N C_r e^{-\frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}{l_r}} \quad (3-44)$$

3.4.5. Modelo de partículas auto-propulsadas

En [104], [105] se observan los conceptos fundamentales para la formación de vórtices por parte de un enjambre de partículas. En este modelo se asume que la dirección de la partícula es idéntica a su velocidad. Considerando un enjambre de N partículas auto-propulsadas con posición \vec{r}_i y velocidad \vec{v}_i , las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}_i}{dt} &= \vec{v}_i \\ \frac{d\vec{v}_i}{dt} &= \vec{a}_i + \vec{f}_i - \gamma\vec{v}_i\end{aligned}\tag{3-45}$$

Siendo \vec{a}_i la fuerza autónoma de auto-propulsión producida por el i -ésimo individuo dependiente de influencias externas y de la localización de la partícula en el enjambre, \vec{f}_i es la fuerza de interacción de una partícula con sus vecinos, $\gamma\vec{v}_i$ es la fuerza de fricción con su respectivo coeficiente ($\gamma > 0$) la cual permite tener un límite de velocidad. La fuerza de interacción se puede modelar como:

$$\vec{f}_i = g(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}\tag{3-46}$$

Donde \vec{r}_j es la posición del vecino próximo y g es una función de distancia.

3.4.6. Modelo de partícula autopropulsada con fuerza estocástica

Según [106] en un modelo de partículas los movimientos obedecen a la dinámica de Newton. El fenómeno de autopropulsión ocurre por algún mecanismo interno que convierte la energía química en energía mecánica lo cual permite que la partícula llegue a un movimiento estable con una velocidad constante.

Considerando un sistema que consta de N partículas idénticas de masa m . Para una partícula con posición \vec{r}_i , velocidad \vec{v}_i , la ecuación de movimiento tiene la siguiente forma:

$$m \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\gamma\vec{v}_i + \vec{F}_{a,i} + \vec{F}_{b,i} + \vec{\zeta}_i\tag{3-47}$$

En este modelo se pueden apreciar cuatro tipos de fuerzas que actúan sobre la partícula. La primera corresponde a la fuerza de fricción $\gamma\vec{v}_i$ que surge de la naturaleza o de la fricción hidrodinámica del medio. La fuerza de alineación $\vec{F}_{a,i}$ la cual considera la fuerza de autopropulsión y la tendencia de la partícula para alinear su velocidad con sus partículas vecinas. La fuerza de cobertura $\vec{F}_{b,i}$ la cual incluye la interacción con las partículas cercanas. Un término de ruido $\vec{\zeta}_i$ que enfatiza el hecho de que la alineación no es perfecta y otros efectos de las condiciones ambientales.

En el contexto de la biología, tanto la alineación y la fuerza de interacción no son fuerzas reales físicas. Se derivan de las respuestas sociales de un individuo a otros miembros de la misma especie. Con la fuerza de interacción en primer lugar las partículas se atraen unas a otras, sin embargo con esta fuerza también se evitan colisiones entre si. Considerando lo anterior una expresión para la fuerza de interacción es:

$$\vec{F}_{b,i} = b \sum_{j \neq i}^N \hat{R}_{ji} \left[\left(\frac{r_b}{R_{ij}} \right)^\alpha - \left(\frac{r_b}{R_{ij}} \right)^\beta \right] e^{-\frac{R_{ij}}{r_b}}\tag{3-48}$$

En esta ecuación $\vec{R}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, donde \hat{R} es su vector unitario, b es la magnitud de la fuerza y r_b es una longitud de cobertura. Los exponentes $\alpha > \beta$ permiten tener un largo alcance atractivo y corto alcance de repulsión.

Por su parte, para la fuerza de alineamiento se puede tener:

$$\vec{F}_{a,i} = a \left(\hat{v}_i + \sum_{j \neq i}^N \hat{v}_j e^{-\frac{R_{ij}}{r_a}} \right) \quad (3-49)$$

Esta fuerza tiene un rango de cobertura r_a donde \hat{v}_i es el vector unitario asociado a la velocidad de la respectiva partícula. Para una partícula que viaja sola, $\vec{F}_{a,i}$ resulta ser constante debido a la amortiguación, por lo cual, tiende a una velocidad constante de a/γ . Por otra parte, cuando una partícula se encuentra rodeada por vecinos, esta se alinea a lo largo de una dirección determinada por la media ponderada sobre las velocidades de esos vecinos. Los anteriores casos son sólo dos posibilidades entre muchos que tiene el efecto de alineación [106].

Finalmente se considera una componente de ruido $\vec{\zeta}_i$ que no tiene ninguna correlación espacial o temporal. Para esta componente se toma de una distribución uniforme a lo largo de $[-w, w]$.

3.4.7. Modelo de partícula autopropulsada con sub-grupos de partículas

En [107] se estudia un modelo para la descripción del movimiento de partículas auto-propulsadas el cual es desarrollado con un enfoque lagrangiano. En este modelo se establecen diferentes funciones potenciales para poder obtener las ecuaciones de movimiento. El modelo presentado en [108] consiste de N partículas las cuales se encuentran sujetas a la ecuación de movimiento:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\gamma \vec{v}_i + \vec{a}_i + \vec{F}_i + \vec{\zeta}_i \quad (3-50)$$

Donde m_i , v_i son la masa y la velocidad de la i -ésima partícula, el término $-\gamma \vec{v}_i$ corresponde a la fuerza de fricción donde γ es el coeficiente de fricción, el segundo término $\vec{a}_i = a_i \hat{V}_i$ corresponde a la fuerza auto-propulsada la cual incluye la tendencia del alineamiento de las partículas cercanas, a_i representa la fuerza de propulsión y \hat{V}_i es un vector unitario paralelo a \vec{V}_i siendo:

$$\vec{V}_i = \sum_{j=1}^N \vec{v}_j e^{-\frac{R_{ij}}{r_a}} \quad (3-51)$$

Para el caso $R_{ij} = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|$ es la distancia entre la i -ésima y j -ésima partícula, r_a es un parámetro de alineamiento. El término \vec{F}_i incluye las fuerzas de interacción entre las partículas y fuerzas externas debidas a potenciales del entorno tales como comida y refugio. En [108] se consideran dos tipos de fuerzas, una individual y otra de interacción las cuales se denominan fuerza de cuerpo (*body force*) $\vec{F}_{b,i}$ y fuerza de cobertura (*shelter force*) $\vec{F}_{s,i}$, para la fuerza de cuerpo se pueden usar dos tipos de expresiones, uno es el potencial de Morse y el otro un potencial de Lennard-Jones (en [108] se emplea el segundo tipo). Para la fuerza de cobertura se pueden tomar diferentes enfoques, en [108] se propone que los miembros del enjambre son atraídos al rango de cobertura cuando llegan a esta por casualidad. La expresión para la fuerza total es:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{b,i} + \vec{F}_{s,i} \quad (3-52)$$

La expresión para la fuerza de cuerpo es:

$$\vec{F}_{b,i} = b \sum_{j \neq i}^N \hat{R}_{ij} \left(1 - \frac{R_{ij}}{r_b} \right) e^{-\frac{R_{ij}}{r_a}} \quad (3-53)$$

Por su parte, la fuerza de cobertura corresponde a:

$$\vec{F}_{s,i} = \begin{cases} \sum_{\alpha} s_{i\alpha} \hat{R}_{ic\alpha} e^{-\frac{(R_{ic\alpha} - R_s)}{r_s}}, & \text{si; } R_{ic\alpha} \leq R_s; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3-54)$$

Donde b y r_b representa la fuerza y el rango de interacción de las partículas, \hat{R}_{ij} es un vector unitario con dirección desde la i -ésima hacia la j -ésima partícula. En [108] se asume que las fuerzas de interacción son equivalentes e independientes en subgrupos α , por su parte $s_{i\alpha}$ es la α -ésima fuerza de cobertura, R_s y r_s son el radio y la magnitud de la fuerza de abrigo respectivamente, $\hat{R}_{ic\alpha}$ es un vector unitario desde la partícula i hasta otra partícula perteneciente al grupo α . Finalmente el término $\vec{\zeta}_i$ es una fuerza estocástica la cual se considera como una distribución uniforme en un intervalo $[-w, w]$.

3.4.8. Modelo con potenciales de interacción de Morse

En [109] se propone que un modelo de enjambre consta de un potencial de interacción y una función de orientación teniendo las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \quad (3-55)$$

$$m \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\vec{\nabla} U_a(\vec{r}_i) - \vec{\nabla} U_r(\vec{r}_i) - \vec{\Lambda}_i \quad (3-56)$$

Donde:

$$U(\vec{r}_i) = \sum_{j=1}^N U(\vec{r}_{ij}) \quad (3-57)$$

La interacción de los individuos del enjambre está dada por un potencial atractivo de rango largo:

$$U_a(\vec{r}_{ij}) = -C_a e^{-\frac{|\vec{r}_{ij}|}{l_a}} \quad (3-58)$$

La colisión de las partículas se evita mediante un potencial repulsivo de rango corto:

$$U_r(\vec{r}_{ij}) = -C_r e^{-\frac{|\vec{r}_{ij}|}{l_r}} \quad (3-59)$$

La fuerza de los anteriores potenciales está definida por C_a y C_r mientras que el rango de estos está dado por l_a y l_r , tal que $l_a > l_r$. La función de orientación considerada es:

$$\vec{\Lambda}_i = \sum_{j=1}^N C_o (\vec{v}_{ij} \cdot \hat{r}_{ij}) e^{-\frac{|\vec{r}_{ij}|}{l_o}} \hat{r}_{ij} \quad (3-60)$$

Siendo \hat{r} un vector unitario, C_o la fuerza de orientación y l_o el rango de orientación. Con la anterior ecuación el movimiento hacia o lejos de los vecinos es débilmente frenado proporcionalmente a la componente relativa de velocidad a lo largo del vector formado entre partículas vecinas. El centro de inercia del enjambre forma un centro relativo el cual se desplaza a velocidad uniforme ya que se presenta una simetría en el movimiento de las partículas [109].

3.4.9. Modelo con fuerzas asociadas al entorno

Un modelo general de enjambre donde se representa la búsqueda colectiva de un objetivo se puede apreciar en [17]. En este modelo para un determinado ambiente se tienen fuerzas asociadas a los obstáculos y a un objetivo. Las ecuaciones de este modelo tienen la siguiente forma:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \quad (3-61)$$

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \quad (3-62)$$

Donde \vec{F}_i representa la fuerza de interacción entre los individuos, el objetivo y los obstáculos, esta función se puede representar como:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{m,i} + \vec{F}_{t,i} + \vec{F}_{o,i} \quad (3-63)$$

Para la fuerza de interacción entre individuos se tiene:

$$\vec{F}_{m,i} = \sum_{j \neq i}^N \left[\left(\alpha_{m1} |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{\beta_{m1}} + \alpha_{m2} |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{-\beta_{m2}} \right) \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right] \quad (3-64)$$

Donde $(\alpha_{m1}, \beta_{m1})$ y $(\alpha_{m2}, \beta_{m2})$ son los parámetros para las fuerzas de atracción y repulsión respectivamente. Considerando a \vec{T} como la posición del objetivo, la fuerza de interacción entre un individuo y este objetivo es:

$$\vec{F}_{t,i} = \left(\alpha_t |\vec{r}_i - \vec{T}|^{\beta_t} \right) \frac{\vec{T} - \vec{r}_i}{|\vec{r}_i - \vec{T}|} \quad (3-65)$$

La fuerza de interacción entre los obstáculos y una partícula se puede representar como:

$$\vec{F}_{o,i} = - \sum_{j=1}^q \left[\left(\alpha_o |\vec{r}_i - \vec{O}_j|^{-\beta_o} \right) \frac{\vec{O}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_i - \vec{O}_j|} \right] \quad (3-66)$$

Donde, \vec{O}_j corresponde al j -ésimo obstáculo y q al número total de obstáculos. Para los diferentes casos α , β son constantes no negativas.

3.4.10. Modelo con choques inelásticos

En [110] se propone un modelo para la descripción de vórtices y migración de individuos como peces y aves considerando la existencia de choques inelásticos entre estos. El modelo considera partículas

de masa $m = 1$ con velocidades normales v_n y tangenciales v_t a la dirección de la colisión de tal forma que se tienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\frac{dv_n}{dt} = -K_{nd} (r_{ab})^\alpha v_{nab} - K_{nr} (r_{ab})^\beta \quad (3-67)$$

$$\frac{dv_t}{dt} = -\text{mín} \left(\left| \mu \frac{dv_n}{dt} \right|, v_t K_{td} \right) \quad (3-68)$$

La fuerza normal de repulsión es modelada como un resorte que existe de un agente hacia otro con una constante K_{nr} y dependiente de β para el traslapamiento del choque entre dos agentes representado por r_{ab} . También se tiene una fuerza de fricción proporcional a la velocidad normal relativa v_{nab} donde α cuantifica el efecto del traslapamiento y se tiene un factor de escala K_{nd} . En la dirección tangente se aplica una fuerza de fricción acotada por la fuerza normal multiplicada por un factor μ .

Adicionalmente cada agente posee una fuerza de autopropulsión con la cual se compensa la energía perdida en el transcurso de la colisión, de esta forma se previene que el sistema se estanque. La ecuación que relaciona la fuerza de autopropulsión es:

$$\frac{d\vec{v}_{sp}}{dt} = \begin{cases} 0 & |\vec{v}| \geq 1; \\ c\hat{v} & |\vec{v}| < 1. \end{cases} \quad (3-69)$$

La fuerza de auto-propulsión con magnitud c se aplica en la dirección de la velocidad actual de la partícula dada por el vector unitario \hat{v} .

3.4.11. Modelo basado en ecuaciones generalizadas de Navier Stokes

En [111] se busca describir el comportamiento bioquímico o biológico de entidades como polímeros células o aves, además se realiza una revisión para lograr reproducir el comportamiento de sistemas no lineales correspondientes a la ecuación hiperbólica de transporte acompañada de las ecuaciones parabólicas y elípticas llamadas ecuaciones generalizadas de Navier Stokes.

El enfoque presentado en [111] consiste en la ecuación Hamiltoniana visco-elástica para redes de múltiples partículas con reglas específicas de interacción, este enfoque considera una componente estocástica para describir el comportamiento de enjambres como aves y peces. La ecuación Hamiltoniana es:

$$d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt \quad (3-70)$$

$$d\vec{r}_i = \left(\vec{a}_i + \sum_{i \neq j}^N \vec{a}_{ij} \right) dt + \beta_i d\vec{\xi} \quad (3-71)$$

Donde \vec{r}_i , \vec{v}_i y \vec{a}_i es la posición, velocidad y aceleración de la i -ésima partícula en incrementos de tiempo dt , el término \vec{a}_{ij} se puede considerar como la aceleración de interacción de las partículas. En [111] las interacciones de los vecinos cercanos se realizan considerando regiones de Voronoi y triangulación de Delaunay. La variable β_i es una componente estocástica asociada a incrementos mutuamente independientes estocásticos $d\vec{\xi}$.

4. Selección del modelo de enjambre con características de vorticidad

4.1. Introducción

El modelo empleado se establece considerando trabajos donde se describen las diferentes alternativas que se tienen para un modelo de partículas con comportamiento de vorticidad. Como criterio de selección se busca tener un modelo compacto (con el menor número de términos) que permita describir comportamientos de enjambre como desplazamientos uniformes y movimientos circulares. En este capítulo se presentan las componentes del modelo seleccionado y se realiza una descripción cualitativa de los parámetros involucrados en este.

4.2. Componentes de un modelo de partículas con comportamiento de vorticidad

Considerando la revisión realizada en el capítulo anterior el esquema general de un modelo de partículas que permite describir tanto movimientos lineales como circulares tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_i}{dt} &= \vec{v}_i \\ m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} &= \vec{F}_{aut,i} + \vec{F}_{int,i} + \vec{F}_{esp,i} + \vec{F}_{est,i} \end{aligned} \quad (4-1)$$

Donde la primera ecuación relaciona la derivada de la posición \vec{r}_i de la i -ésima partícula. La segunda ecuación corresponde al balance de fuerzas sobre la partícula, siendo m_i la masa. Esta ecuación presenta las siguientes componentes:

- $m_i(d\vec{v}_i/dt)$: Término de inercia.
- $\vec{F}_{aut,i}$: Fuerza correspondiente al movimiento activo asociado a la autopropulsión.
- $\vec{F}_{int,i}$: Término que involucra las fuerzas de interacción entre individuos.
- $\vec{F}_{esp,i}$: Componente de fuerzas externas dadas por el espacio donde se desplazan las partículas. Desde el punto de vista de optimización se encuentra asociada a la función objetivo.
- $\vec{F}_{est,i}$: Fuerza estocástica o producida por ruido.

A continuación se presentan las diferentes alternativas que se tienen para estas fuerzas.

4.2.1. Fuerza de auto-propulsión

En la mayoría de modelos revisados la fuerza auto-propulsión está compuesta por una parte disipativa correspondiente a la fricción y una componente de propulsión la cual le suministra energía al sistema también denominada fuerza de movimiento activo, por lo general esta componente se encuentra dada por el alineamiento de la velocidad de las partículas.

Un primer modelo que considera la fuerza de propulsión es del desarrollado por Levine [78] donde esta corresponde a:

$$\vec{F}_{aut} = \alpha \frac{\vec{v}_i}{|\vec{v}_i|} - \beta \vec{v}_i \quad (4-2)$$

Una propuesta adicional a considerar es la realizada en [79] donde se emplea una fuerza de la forma:

$$\vec{F}_{aut} = (\alpha - \beta|\vec{v}_i|^2)\vec{v}_i \quad (4-3)$$

Adicionalmente considerando lo presentado en [77] y [103] la fuerza asociada a términos disipativos y de movimiento activo se puede representar como:

$$\vec{F}_{aut} = -m_i\gamma\vec{v}_i - m_i\sigma^2(\vec{v}_i - \vec{V}) \quad (4-4)$$

El primer término considera un deposito interno de energía donde una aproximación de este es $\gamma = (-\alpha + \beta v^2)$. El segundo término tiende a hacer paralelas las velocidades \vec{v}_i de las partículas con la velocidad media del enjambre \vec{V} la cual se puede calcular como:

$$\vec{V} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \vec{v}_j \quad (4-5)$$

Una alternativa adicional al modelo de Levine considera una componente disipativa de frenado $-\gamma\vec{v}_i$ con γ constante y una fuerza de movimiento activo $\vec{F}_{act} = \alpha\vec{f}_i$ de tal forma que $\vec{F}_{aut} = -\gamma\vec{v}_i + \alpha\vec{f}_i$. En un caso sin alineamiento $\vec{f}_i = \vec{v}_i$ y con alineamiento de rango l_c se tiene:

$$\vec{f}_i = \sum_{i \neq j}^N \vec{v}_j e^{-\frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}{l_c}} \quad (4-6)$$

Finalmente para el modelo propuesto en [106] la fuerza de auto-propulsión está compuesta por una parte disipativa $-\gamma\vec{v}_i$ y una componente de interacción:

$$\vec{F}_{a,i} = a \left(\hat{v}_i + \sum_{j \neq i}^N \hat{v}_j e^{-\frac{R_{ij}}{r_a}} \right) \quad (4-7)$$

4.2.2. Fuerza de interacción

Según el modelo de Levine [78] y lo presentado en [77] y [109] una forma para representar la fuerza de interacción consiste en emplear potenciales exponenciales (Morse). La fuerza asociada a este potencial se puede calcular como:

$$\vec{F}_{int,i} = -\vec{\nabla} U_{int}(\vec{r}_i)$$

Donde el potencial de interacción de una partícula se puede calcular como la suma producida por las interacciones con las otras partículas:

$$U_{int}(\vec{r}_i) = \sum_{j \neq i}^N U_{int}(\vec{r}_{ij})$$

La interacción de los individuos del enjambre está dada por un potencial atractivo de rango largo:

$$U_a(\vec{r}_{ij}) = -C_a e^{-\frac{|\vec{r}_{ij}|}{l_a}} \quad (4-8)$$

Adicionalmente, la colisión de las partículas se evita mediante un potencial repulsivo de rango corto:

$$U_r(\vec{r}_{ij}) = -C_r e^{-\frac{|\vec{r}_{ij}|}{l_r}} \quad (4-9)$$

La distancia desde la partícula i hasta la partícula j se calcula como $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$. Considerando las anteriores expresiones el potencial de interacción total es $U_{int}(\vec{r}_i) = U_a(\vec{r}_i) + U_b(\vec{r}_i)$. La magnitud de la fuerza de estos potenciales está dada por C_a y C_r mientras que el rango por l_a y l_r con $l_a > l_r$. Otra alternativa para describir la interacción entre individuos se presenta en [15], [75], [95], [96] y [101], en este caso, la fuerza de interacción se encuentra basada en un potencial atractivo parabólico de la forma:

$$U_{int}(\vec{r}_i) = \frac{c}{2} (\vec{r}_i - \vec{R})^2$$

donde \vec{R} es el centro de masa del enjambre el cual se puede calcular como:

$$\vec{R} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \vec{r}_j$$

Este potencial genera fuerzas directamente sobre el centro de masa las cuales pueden ser utilizadas para controlar la dispersión del enjambre produciendo un acople global de las partículas al centro de rotación. La fuerza producida por la interacción de las partículas es:

$$\vec{F}_{int,i} = \frac{a}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

con $a = c(1 - 1/N)$.

Por otra parte, considerando el modelo de interacciones hidrodinámicas [75], la fuerza de interacción es:

$$\vec{F}_{int,i} = K_F \sum_{j \neq i}^N \left[\frac{R}{|\vec{r}_{ij}|} \vec{v}_j + \frac{R(\vec{r}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij})}{|\vec{r}_{ij}|^3} \vec{r}_{ij} \right] \quad \text{para } r_{ij} \gg R \quad (4-10)$$

Otra alternativa para la interacción entre individuos se observa en el modelo que incluye maniobras de evasión [15], [102], donde se tiene:

$$\vec{F}_{int,i} = - \sum_{j \neq i}^N \frac{p}{\sigma R_i} e^{-\frac{R_i}{\sigma}} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (4-11)$$

Una alternativa final se puede observar en [106] donde se propone la siguiente fuerza de interacción:

$$\vec{F}_{int,i} = b \sum_{j \neq i}^N \hat{R}_{ji} \left[\left(\frac{r_b}{R_{ji}} \right)^\alpha - \left(\frac{r_b}{R_{ji}} \right)^\beta \right] e^{-\frac{R_{ji}}{r_b}} \quad (4-12)$$

4.2.3. Fuerza asociada al espacio de locomoción

En varios modelos se consideran potenciales parabólicos y elípticos para representar el espacio donde se desplazan las partículas [15] y [97]. Desde una perspectiva de optimización este potencial puede estar dado por la función a optimizar. La fuerza asociada a este potencial se puede calcular como:

$$\vec{F}_{esp,i} = \vec{\nabla} U_{esp}(\vec{r}_i) \quad (4-13)$$

4.2.4. Fuerza estocástica

Según los modelos revisados para la fuerza estocástica $\vec{F}_{est,i}$ se tienen las siguientes opciones:

- Nula.
- Distribución normal.
- Distribución uniforme.

Una primera alternativa para la componente estocástica consiste en considerarla como nula ya que varios modelos revisados no la presentan y logran describir los comportamientos deseados como desplazamientos lineales y circulares.

En varios modelos el término $\vec{\zeta}_i$ corresponde a una fuerza estocástica la cual se considera como una distribución uniforme en un intervalo $[-w, w]$ la cual genera un vector de números aleatorios para cada partícula.

En el caso de emplear una distribución normal, la fuerza estocástica $\vec{F}_{est,i} = \vec{\xi}_i(t)$ corresponde a una componente de ruido blanco de magnitud D y δ -correlacionada en el tiempo. Esta fuerza presenta componentes escalares las cuales cumplen con:

$$\begin{aligned} \langle \xi_i(t) \rangle &= 0 \\ \langle \xi_i(t) \xi_j(\tau) \rangle &= 2D \delta(t - \tau) \delta_{ij} \end{aligned}$$

Este tipo de fuerza estocástica es empleada en los modelos de partícula Browniana tal como se aprecia en [75], [78], [94] y [95].

4.3. Componentes de modelo seleccionado

El modelo seleccionado como referencia se encuentra basado en el comportamiento del zooplancton *Daphnia*. Con este enfoque se busca aprovechar la forma de locomoción con la presencia de vorticidad ya que esta puede ser una buena estrategia para evadir mínimos locales tal como se aprecia en [81] y [112].

Como criterio de selección se considera en primer lugar que el modelo permita describir movimientos circulares y lineales. En segundo lugar se busca tener un modelo con el menor número de componentes. Por lo anterior en esta propuesta la fuerza estocástica se considera nula ya que se observan modelos que permiten tener el comportamiento deseado sin incluirla lo cual permite simplificar el análisis del modelo. A continuación se presentan las componentes seleccionadas para el modelo.

Componente de autopropulsión

La componente de autopropulsión (movimiento activo) está dada por la ecuación:

$$\vec{F}_{aut,i} = (\alpha - \beta|v_i|^2)\vec{v}_i \quad (4-14)$$

La anterior expresión también se encuentra en la ecuación de Rayleigh la cual presenta un comportamiento de ciclo limite. Con esta fuerza de autopropulsión la magnitud de velocidad para cada partícula en estado estable tiende a ser $|\vec{v}_i| = \sqrt{\alpha/\beta}$, [78], [79].

Componente de interacción

La fuerza de interacción se encuentra basada en un potencial atractivo parabólico el cual permite un acople global al centro de masa del enjambre.

$$U_{int}(\vec{r}_i) = \frac{c}{2}(\vec{r}_i - \vec{R})^2 \quad (4-15)$$

donde \vec{R} es el centro de masa del enjambre, el cual se puede calcular como:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i$$

El potencial de interacción genera fuerzas directamente sobre el centro de masa las cuales pueden ser utilizadas para controlar la dispersión del enjambre. La fuerza producida por la interacción de las partículas es:

$$\vec{F}_{int,i} = a(\vec{r}_i - \vec{R}) \quad (4-16)$$

Componente asociada al espacio de locomoción

Este término corresponde a la fuerza que produce el ambiente sobre la partícula, desde el punto de vista de optimización puede estar influenciada por la función objetivo. La fuerza asociada a este potencial se puede establecer como:

$$\vec{F}_{esp,i} = -\vec{\nabla}U_{esp}(r_i) \quad (4-17)$$

4.4. Modelo

Considerando lo presentado anteriormente el modelo seleccionado se encuentra descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \quad (4-18)$$

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = (\alpha - \beta|v_i|^2)\vec{v}_i - \frac{a}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \vec{\nabla} U_{esp}(\vec{r}_i) \quad (4-19)$$

4.4.1. Descripción cualitativa de parámetros

Sobre los diferentes parámetros involucrados en el modelo seleccionado se tiene la siguiente descripción cualitativa:

- m_i : Masa de la partícula. Este parámetro corresponde a la inercia de tal forma que genera una oposición a los cambios de velocidad. La masa de las partículas en la mayoría de modelos se toma igual ya que se considera un enjambre con individuos de las mismas características.
- β : Factor de frenado de las partículas. Al aumentar las partículas tienden a ir más lento.
- α : Factor de propulsión. Al incrementarse también aumenta la energía cinética de las partículas elevando de esta forma su velocidad.
- a : Factor de interacción. Al aumentar este parámetro el enjambre de partículas tiende a unirse más y al disminuir se incrementa la dispersión.

Según lo reportado en la literatura una alta dispersión se presenta al incrementar la energía de propulsión como también al disminuir la constante de interacción.

5. Análisis dinámico del modelo de enjambre con características de vorticidad

5.1. Introducción

En este capítulo se realizan varios análisis al modelo seleccionado con el fin de observar sus características más relevantes las cuales pueden ser empleadas en un algoritmo de optimización. Inicialmente se estudian los puntos de equilibrio del modelo de tal forma que se puedan establecer posibles situaciones en estado estable. Posteriormente se desarrolla un análisis de energía y de conservación del momento angular con el fin de observar el comportamiento del modelo seleccionado. Con este análisis se aprecia que el modelo puede describir tanto movimientos lineales como circulares con la presencia de un vórtice.

5.2. Bifurcación y movimiento activo

En un caso escalar el movimiento activo se encuentra basado en la ecuación 5-1 la cual presenta una bifurcación supercrítica con velocidad v igual a cero debajo del punto de bifurcación siendo el movimiento activo asintóticamente estable con $v = \pm\sqrt{\alpha/\beta}$ [98].

$$\frac{dv}{dt} = \alpha v - \beta v^3 = (\alpha - \beta v^2)v \quad (5-1)$$

Considerando que una bifurcación consiste en el cambio de la dinámica y estabilidad del sistema en función de los parámetros del mismo, para la ecuación 5-1 en estado estable donde $dv/dt = f = (\alpha - \beta v^2)v = 0$ se tienen las soluciones $v_{e,0} = 0$, $v_{e,1} = \sqrt{\alpha/\beta}$ y $v_{e,2} = -\sqrt{\alpha/\beta}$. Para determinar el tipo de comportamiento que presentan los puntos de equilibrio se emplea el Jacobiano obteniendo:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{v_e, \alpha_e, \beta_e} = \alpha_e - 3\beta_e v_e^2$$

Del anterior cálculo se aprecia que el valor propio del sistema es $\lambda = \alpha_e - 3\beta_e v_e^2$. A medida de ejemplo considerando $\beta > 0$ cuando $\alpha < 0$ solo se tiene una solución real igual a $v_e = 0$ la cual es estable, por otro lado, si $\alpha > 0$ se tienen tres soluciones reales una para $v_e = 0$ la cual es inestable, las otras dos para $v_e = \sqrt{\alpha/\beta}$ y $v_e = -\sqrt{\alpha/\beta}$ las cuales son estables. En la figura **5-1** se puede apreciar el diagrama de bifurcación para estas soluciones.

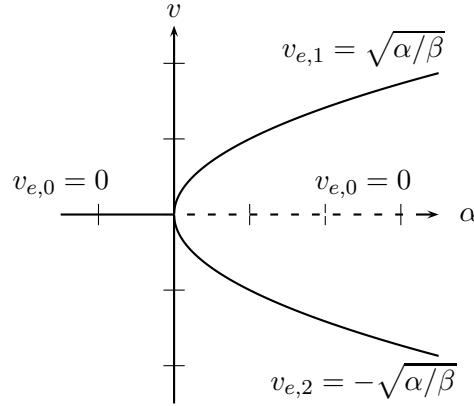


Figura 5-1.: Diagrama de bifurcación. Línea continua para las soluciones estables y línea discontinua para la solución inestable.

La ecuación 5-1 según [101] corresponde a una aproximación por expansión en series de Taylor para la descripción de un modelo de partículas con un depósito interno de energía. Por otro lado en [98] se presenta que el comportamiento de autopropulsión aparece en procesos físico-químicos donde se involucran partículas pequeñas con fuerzas superficiales sensibles a concentraciones químicas y temperaturas presentándose la interacción de fuerzas capilares y fuerzas viscosas. La capilaridad ocurre cuando las fuerzas intermoleculares adhesivas entre un líquido y un sólido son mayores que las fuerzas intermoleculares cohesivas del líquido teniendo como efecto la absorción del líquido lo cual puede estar en contra de la fuerza de gravedad [98]. Por otro lado, la viscosidad consiste en la propiedad que presenta un fluido para oponerse a deformaciones tangenciales [98].

5.3. Puntos de equilibrio

Como un primer análisis a realizar del modelo se observan los puntos de equilibrio que presenta el enjambre de partículas. Los puntos de equilibrio se pueden establecer como:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = 0 \quad (5-2)$$

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = 0 \quad (5-3)$$

Por lo tanto, se tienen puntos de equilibrio para $\vec{v}_i = \vec{0}$ y

$$0 = (-\alpha + \beta v_i^2) \vec{v}_i - \frac{a}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) - \vec{\nabla} U_{esp}(\vec{r}_i) \quad (5-4)$$

Considerando $|\vec{v}_i| = 0$, la ecuación 5-4 se reduce a la siguiente condición de equilibrio:

$$\vec{r}_i = \vec{R} - \frac{1}{a} \vec{\nabla} U_{esp}(\vec{r}_i) \quad (5-5)$$

En la ecuación 5-5, si $\vec{\nabla} U_{esp}(\vec{r}_i) = 0$ entonces $\vec{r}_i = \vec{R}$ por cual el enjambre tiende a agruparse a su punto medio. En otros casos cuando $\vec{\nabla} U_{esp}(\vec{r}_i) \neq 0$, se logra un equilibrio en función de la posición de las partículas y sus valores para el potencial U_{esp} .

5.3.1. Puntos de equilibrio para la velocidad media del enjambre

Con la velocidad media de las partículas se busca determinar la condición de equilibrio para el desplazamiento del enjambre. Tomando la posición y velocidad media del enjambre:

$$\vec{R} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i,$$

$$\vec{V} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i$$

adicionalmente considerando que todas las partículas tienen la misma masa $m_i = m$, entonces, la ecuación de movimiento de la velocidad media del enjambre es:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\alpha - \beta v_i^2) \vec{v}_i - \frac{a}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{\nabla} U_{esp}(\vec{r}_i) \quad (5-6)$$

el punto de equilibrio para la velocidad media del enjambre se puede establecer cuando $d\vec{V}/dt = 0$, es decir:

$$0 = \sum_{i=1}^N (\alpha - \beta v_i^2) \vec{v}_i - a \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right) - \sum_{i=1}^N \vec{\nabla} U_{esp}(\vec{r}_i)$$

$$0 = \sum_{i=1}^N (\alpha - \beta v_i^2) \vec{v}_i - \sum_{i=1}^N \vec{\nabla} U_{esp}(\vec{r}_i)$$

Considerando el caso donde $\sum_{i=1}^N \vec{\nabla} U_{esp}(\vec{r}_i) \approx 0$, lo cual puede ocurrir si:

- Existe un equilibrio entre las fuerzas producidas por U_{esp} . Lo cual es posible para potenciales con simetría cónica.
- La fuerza producida por la función objetivo es muy baja $\vec{\nabla} U_{esp}(\vec{r}_i) \approx 0$. Las partículas se encuentran cerca de un punto mínimo de U_{esp} .

Al presentarse alguna de las anteriores situaciones, entonces, se tiene:

$$\sum_{i=1}^N (\alpha - \beta v_i^2) \vec{v}_i \approx 0$$

la anterior expresión se cumple con $\vec{v}_i = 0$ o con $v_i = \sqrt{\alpha/\beta}$, de tal forma que no existe variación de la velocidad media de las partículas.

5.4. Conservación de energía y momento angular

El análisis para el modelo seleccionado se efectúa considerando el procedimiento mostrado en [109], donde se busca determinar los valores para los cuales se tiene conservación de energía y momento angular. Con el presente análisis se busca describir el comportamiento de vorticidad cuando el enjambre se encuentra en un punto donde la energía del enjambre es constante.

Antes de realizar los análisis de energía y momento angular se tiene que las ecuaciones dinámicas del modelo seleccionado son:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \quad (5-7)$$

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = (\alpha - \beta v_i^2) \vec{v}_i - \frac{a}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) - \vec{\nabla} U_{esp}(\vec{r}_i). \quad (5-8)$$

Es importante señalar que el factor producido por las interacciones entre partículas está dado por un potencial parabólico de la forma [96]:

$$U_{int}(\vec{r}_i) = \frac{c}{2} (\vec{r}_i - \vec{R})^2$$

Este potencial armónico genera fuerzas directamente sobre el centro de masa presentando un acople global de las partículas al centro de rotación de estas. La fuerza producida por la interacción de las partículas es:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{int,i} &= -\vec{\nabla} U_{int}(\vec{r}_i) \\ \vec{F}_{int,i} &= -c \left(1 - \frac{1}{N}\right) (\vec{r}_i - \vec{R}) \end{aligned}$$

con $a = c(1 - 1/N)$ se tiene:

$$\vec{F}_{int,i} = -\frac{a}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

En la anterior ecuación el parámetro a puede ser empleado para controlar la dispersión del enjambre.

5.4.1. Análisis de energía

Con este análisis se muestra la conservación de la energía del enjambre con la posibilidad de mantener una velocidad constante. El primer paso en este desarrollo consiste en determinar la correspondiente energía cinética y potencial de cada partícula. La energía cinética de una partícula es:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (5-9)$$

Por otro lado, la energía potencial se puede calcular como:

$$U_i = U_{int}(\vec{r}_i) + U_{esp}(\vec{r}_i) \quad (5-10)$$

El siguiente paso en este desarrollo consiste en tomar la derivada de $T_i + U_i$ en función del tiempo, obteniendo:

$$\frac{d}{dt} (T_i + U_i) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 + U_{int}(\vec{r}_i) + U_{esp}(\vec{r}_i) \right) \quad (5-11)$$

Para un potencial de interacción de la forma:

$$U_{int}(\vec{r}_i) = \frac{c}{2} (\vec{r}_i - \vec{R})^2$$

al tomar la derivada con respecto al tiempo se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U_{int}(\vec{r}_i) &= c(\vec{r}_i - \vec{R}) \cdot \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} - \frac{d\vec{R}}{dt} \right) \\ &= (\vec{v}_i - \vec{V}) \cdot \frac{c}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \end{aligned}$$

Para un mayor detalle sobre la derivada temporal de U_{int} y la suma de esta derivada para todas las partículas se puede consultar el anexo C.

Considerando que la posición de una partícula se puede representar como $\vec{r}_i = r_{1,i}\hat{u}_1 + r_{2,i}\hat{u}_2 + \dots + r_{d,i}\hat{u}_d + \dots + r_{D,i}\hat{u}_D$ donde (\hat{u}_d) es un vector unitario en la dirección d , donde D es el número total de dimensiones y empleando la regla de la cadena para la derivada de una función de la forma $f(x_i(t))$ donde $df/dt = (df/dx_i)(dx_i/dt)$, entonces, la derivada temporal del potencial externo U_{esp} se puede calcular como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U_{esp}(\vec{r}_i) &= \frac{\partial U_{esp}}{\partial r_{1,i}} \frac{dr_{1,i}}{dt} + \frac{\partial U_{esp}}{\partial r_{2,i}} \frac{dr_{2,i}}{dt} + \dots + \frac{\partial U_{esp}}{\partial r_{d,i}} \frac{dr_{d,i}}{dt} + \dots + \frac{\partial U_{esp}}{\partial r_{D,i}} \frac{dr_{D,i}}{dt} \\ &= \left[\frac{\partial U_{esp}}{\partial r_{1,i}} \hat{u}_1 + \frac{\partial U_{esp}}{\partial r_{2,i}} \hat{u}_2 + \dots + \frac{\partial U_{esp}}{\partial r_{d,i}} \hat{u}_d + \dots + \frac{\partial U_{esp}}{\partial r_{D,i}} \hat{u}_D \right] \cdot \\ &\quad \left[\frac{dr_{1,i}}{dt} \hat{u}_1 + \frac{dr_{2,i}}{dt} \hat{u}_2 + \dots + \frac{dr_{d,i}}{dt} \hat{u}_d + \dots + \frac{dr_{D,i}}{dt} \hat{u}_D \right] \\ &= \vec{\nabla}U_{esp}(\vec{r}_i) \cdot \vec{v}_i \\ &= \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}U_{esp}(\vec{r}_i) \end{aligned}$$

Con los anteriores resultados se tiene la derivada en función del tiempo para $T_i + U_i$,

$$\frac{d}{dt}(T_i + U_i) = m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} + (\vec{v}_i - \vec{V}) \cdot \frac{c}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}U_{esp}(\vec{r}_i) \quad (5-12)$$

Realizando el producto interno entre \vec{v}_i y la ecuación de movimiento 5-8 se tiene:

$$m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{v}_i \cdot (\alpha - \beta v_i^2) \vec{v}_i - \vec{v}_i \cdot \frac{a}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) - \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}U_{esp}(\vec{r}_i) \quad (5-13)$$

Reemplazando la ecuación 5-13 en 5-12 y realizando la suma para todas las partículas del enjambre se tiene que la derivada de la energía total del enjambre es:

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt}(T_i + U_i) \quad (5-14)$$

$$= \sum_{i=1}^N (\alpha - \beta v_i^2) v_i^2 \quad (5-15)$$

En la anterior ecuación se aprecia que el enjambre de partículas mantienen un estado constante de energía si:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^N (\alpha - \beta v_i^2) v_i^2 = 0 \quad (5-16)$$

Para la ecuación 5-16 al tomar $v_i = 0$ o $v_i = \sqrt{\alpha/\beta}$ se tiene que $dE/dt = 0$ implicando que la energía del enjambre tiende a conservarse para estos valores.

5.4.2. Análisis de momento angular

Con este análisis se pretende evidenciar el comportamiento de vorticidad que presenta el modelo, para lo cual, en primer lugar se revisa el concepto de conservación del momento angular y posteriormente se aplica este concepto al modelo seleccionado.

El momento angular permite observar las simetrías rotacionales en los sistemas físicos. En algunos casos esta simetría permanece constante dando lugar a la ley de conservación de momento angular. Para una partícula que se mueve con respecto a un punto O tal como se aprecia en la figura 5-2, el momento angular de la partícula respecto a este punto se define como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (5-17)$$

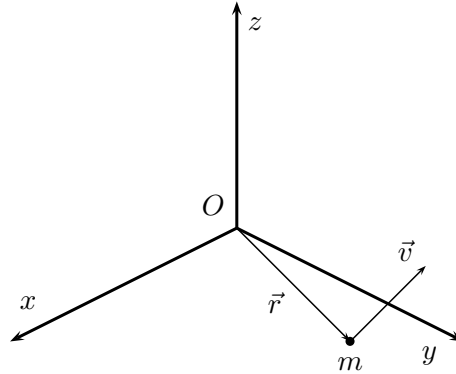


Figura 5-2.: Partícula realizando un movimiento circular alrededor de O .

El análisis de conservación del momento consiste en determinar cuándo \vec{L} es constante, por lo cual se toma $d\vec{L}/dt = 0$. Para lo anterior en una primera instancia se tiene:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad (5-18)$$

Dado que $d\vec{r}/dt \times \vec{v} = 0$ entonces:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (5-19)$$

Como es de apreciar, para tener conservación del momento angular se debe cumplir con $\vec{r} \times \vec{F} = 0$, lo cual se presenta cuando la magnitud de la fuerza es cero o cuando la fuerza que se ejerce sobre la partícula pasa por el radio de giro de esta.

Para establecer las condiciones de conservación del momento angular del modelo, se calcula el producto vectorial de \vec{r}_i con todos los términos de la ecuación de movimiento obteniendo:

$$m_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{r}_i \times (\alpha - \beta v_i^2) \vec{v}_i - \vec{r}_i \times \vec{\nabla} U_{int}(\vec{r}_i) - \vec{r}_i \times \vec{\nabla} U_{esp}(\vec{r}_i) \quad (5-20)$$

Tomando la suma para todas las partículas del enjambre se tiene:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times (\alpha - \beta v_i^2) \vec{v}_i - \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{\nabla} U_{int}(\vec{r}_i) - \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{\nabla} U_{esp}(\vec{r}_i) \quad (5-21)$$

El gradiente del potencial $U_{int}(\vec{r}_i)$ está dado por la interacción de pares de partículas a lo largo de \vec{r}_{ij} , debido a la simetría de las interacciones internas este término tiende a ser nulo. Los torques internos por interacciones de dos partículas se anulan lo cual se puede comprobar aplicando la identidad $\vec{r}_i \times \vec{r}_j = -\vec{r}_j \times \vec{r}_i$, es decir:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{\nabla} U_{int}(\vec{r}_i) &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \frac{a}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \\
 &= \frac{a}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{r}_i - \vec{r}_i \times \vec{r}_j) \\
 &= \frac{a}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (-\vec{r}_i \times \vec{r}_j) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Con el fin de observar mejor el anterior resultado se pueden desarrollar las sumas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{r}_j) &= [(\vec{r}_1 \times \vec{r}_1) + (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) + (\vec{r}_1 \times \vec{r}_3) + \cdots + (\vec{r}_1 \times \vec{r}_N) \\
 &\quad + (\vec{r}_2 \times \vec{r}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{r}_2) + (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3) + \cdots + (\vec{r}_2 \times \vec{r}_N) \\
 &\quad + (\vec{r}_3 \times \vec{r}_1) + (\vec{r}_3 \times \vec{r}_2) + (\vec{r}_3 \times \vec{r}_3) + \cdots + (\vec{r}_3 \times \vec{r}_N) \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + (\vec{r}_N \times \vec{r}_1) + (\vec{r}_N \times \vec{r}_2) + (\vec{r}_N \times \vec{r}_3) + \cdots + (\vec{r}_N \times \vec{r}_N)] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Adicionalmente, considerando que el momento angular de una partícula se puede determinar como:

$$L_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \quad (5-22)$$

entonces, la condición para establecer la conservación del momento angular está dada por la siguiente ecuación.

$$\sum_{i=1}^N \frac{dL_i}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt} = 0 \quad (5-23)$$

Reemplazando la ecuación 5-21 en 5-23 se tiene:

$$\sum_{i=1}^N \frac{dL_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times (\alpha - \beta v_i^2) \vec{v}_i - \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{\nabla} U_{esp}(\vec{r}_i) \quad (5-24)$$

Del análisis de energía se observa que el enjambre de partículas en estado estable tiende a presentar una velocidad de magnitud $v = 0$ o $v = \sqrt{\alpha/\beta}$, por lo cual, el término asociado a la propulsión se

elimina. Por otro lado, si se considera un potencial $U_{esp}(\vec{r}_i)$ que genera fuerzas radiales paralelas a \vec{r}_i es decir presenta simetría cónica entonces:

$$\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{\nabla} U_{esp}(\vec{r}_i) = 0$$

Bajo las anteriores consideraciones se tiene que:

$$\sum_{i=1}^N \frac{dL_i}{dt} = 0 \quad (5-25)$$

lo cual indica que el momento angular se conserva, por lo tanto, en estado estable y con un potencial U_{esp} que presenta simetría cónica el enjambre de partículas se mueve de forma circular generando un vórtice.

5.5. Análisis para el parámetro de propulsión

De los anteriores análisis se observa la posibilidad de emplear α para cambiar el comportamiento del enjambre. Como una primera aproximación, este parámetro se considera como una función del tiempo limitado por un valor mínimo y máximo de tal manera que $0 \leq \alpha(t) \leq \alpha_{max}$, por lo tanto en el siguiente análisis se consideran los casos extremos: $\alpha(t) = 0$ y $\alpha(t) = \alpha_{max}$. A partir de la ecuación 5-16, es posible establecer que un estado de mínima energía ($dE_T/dt = 0$) se alcanza cuando $|\vec{v}_i| = 0$ o $|\vec{v}_i|^2 = \alpha(t)/\beta$.

Para el caso donde $\alpha(t) = 0$, ecuación 5-16 se reduce a:

$$\dot{E} = - \sum_{i=1}^N (\beta |\vec{v}_i|^2) |\vec{v}_i|^2 \quad (5-26)$$

Dado que la energía del sistema tiene derivada en el tiempo definida negativa para $v_i \neq 0$, el sistema tiende a un estado de energía mínima con $\vec{v}_i = 0$. Es de apreciar que la tasa con la cual se libera energía depende de $|\vec{v}_i|^4$, por lo cual, entre menor sea la velocidad el enjambre más se demora en llegar a su punto de mínima energía.

Para el caso donde el parámetro $\alpha(t) = \alpha_{max}$ el cual es un valor grande pero acotado, se tiene:

$$\dot{E} = \sum_{i=1}^N (\alpha_{máx} - \beta |\vec{v}_i|^2) |\vec{v}_i|^2 \quad (5-27)$$

Se puede apreciar en este caso particular que para velocidades no nulas el sistema está limitado en última instancia con la velocidad $|\vec{v}_i| = \sqrt{\alpha_{max}/\beta}$.

Como es de apreciar el incremento de α_{max} aumentará la velocidad terminal de las partículas presentándose comportamiento de vorticidad y la mayor dispersión del enjambre.

Adicionalmente, de lo observado en el caso $\alpha = 0$, para tener una disipación mayor de energía para valores cercanos a cero se puede considerar un caso adicional donde α sea constante y $\beta = 0$ de tal forma que la ecuación para el balance de fuerzas toma la forma:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\alpha \vec{v}_i - \frac{a}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) - \vec{\nabla} U_{esp}(\vec{r}_i) \quad (5-28)$$

En este caso el balance de energía corresponde a:

$$\dot{E} = - \sum_{i=1}^N \alpha |\vec{v}_i|^2 \quad (5-29)$$

Donde se observa una disipación que depende de $|\vec{v}_i|^2$.

5.6. Estimación del radio del enjambre

Considerando un movimiento circular uniforme para una partícula i como el mostrado en la figura 5-3, se tiene una fuerza tangencial F_T y normal F_N tal que:

$$\begin{aligned} F_N &= m_i a_N = m_i \frac{v^2}{R} \\ F_T &= m_i a_T = \dot{w} R \end{aligned}$$

donde a_N y a_T son las aceleraciones normal y tangencial, v la velocidad lineal, w la velocidad angular, \dot{w} la aceleración angular y R el radio.

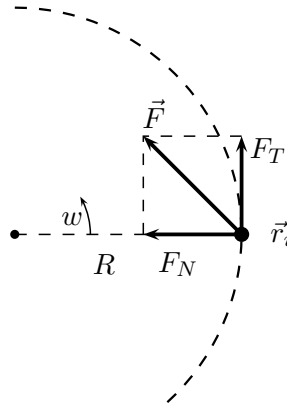


Figura 5-3.: Fuerza normal y tangencial.

Para un movimiento circular $\dot{w} = 0$ y considerando los resultados del análisis de energía, la velocidad se puede tomar como $v = \sqrt{\alpha/\beta}$.

Teniendo en cuenta la fuerza de interacción (sin potencial externo) y las partículas realizando un movimiento circular con radio R , entonces, la fuerza tangencial corresponde a $F_T = aR$. Bajo estas consideraciones se tiene:

$$\frac{m_i v^2}{R} = aR \quad (5-30)$$

con $v = \sqrt{\alpha/\beta}$, entonces:

$$R = \sqrt{\frac{m_i \alpha}{a \beta}} \quad (5-31)$$

En un caso más general donde se presenta un potencial externo U_{esp} se tiene que la fuerza producida por este potencial está dada por $\vec{F} = \vec{\nabla}U_{esp}$, considerando que este potencial presenta una fuerza normal F_N , entonces:

$$\frac{m_i v^2}{R} = aR + F_N \quad (5-32)$$

$$m_i \frac{\alpha}{\beta} = aR^2 + F_N R \quad (5-33)$$

$$aR^2 + F_N R - m_i \frac{\alpha}{\beta} = 0 \quad (5-34)$$

por lo cual se tiene:

$$R = \frac{-F_N \pm \sqrt{F_N^2 + 4am_i\alpha/\beta}}{2a} \quad (5-35)$$

Para determinar el signo de la raíz se considera el caso cuando $\alpha = 0$ en el cual el radio debe tender a ser cero por lo tanto se concluye que el signo del radical es positivo.

En el caso de tener $F_N = 0$ la expresión coincide con el análisis inicial:

$$R = \sqrt{\frac{m_i\alpha}{a\beta}}$$

A manera de ejemplo se puede considerar U_{esp} con simetría cónica de la forma $U_{esp} = (x^2 + y^2)/2$, entonces, $F_N = R$, por lo cual:

$$\frac{m_i v^2}{R} = aR + R$$

es decir:

$$m_i \frac{\alpha}{\beta} = (a + 1)R^2$$

despejando el radio de giro se tiene:

$$R = \sqrt{\frac{m_i\alpha}{(a + 1)\beta}} \quad (5-36)$$

Un caso donde se aumenta el radio de giro ocurre cuando F_N apunta hacia fuera del vórtice.

5.7. Análisis de estabilidad para la implementación en tiempo discreto

Considerando que la implementación del modelo se realiza en tiempo discreto es posible tener condiciones sobre los parámetros del modelo que generen inestabilidad debido a la discretización de las ecuaciones diferenciales.

Como una primera aproximación en este análisis únicamente se considera la componente de fuerza asociada al movimiento activo o de autopropulsión, también se considera el caso escalar del modelo de tal forma que se tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = (\alpha - \beta v_i^2)v_i \quad (5-37)$$

Linealizado esta ecuación sobre un punto de equilibrio v_e se tiene:

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = (\alpha - 3\beta v_e^2)v_i \quad (5-38)$$

Considerando el punto de equilibrio como $v_e^2 = \alpha/\beta$ se obtiene:

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = -2\alpha v_i \quad (5-39)$$

Empleando una aproximación de Euler para la primera derivada se obtiene la siguiente ecuación en diferencias.

$$m_i \frac{v_i[n+1] - v_i[n]}{\Delta t} = -2\alpha v_i[n] \quad (5-40)$$

de tal forma que:

$$v_i[n+1] = \left(1 - \alpha \frac{\Delta t}{m_i}\right) v_i[n] \quad (5-41)$$

Para la anterior ecuación en diferencias la condición de estabilidad es:

$$\left|1 - \alpha \frac{\Delta t}{m_i}\right| \leq 1 \quad (5-42)$$

por lo cual:

$$-1 \leq 1 - \alpha \frac{\Delta t}{m_i} \leq 1$$

entonces:

$$0 \leq \alpha \leq \frac{m_i}{\Delta t} \quad (5-43)$$

La anterior relación corresponde a la condición de estabilidad (análisis aproximado) cuando se realiza la implementación del modelo en tiempo discreto.

6. Simulaciones del modelo seleccionado

6.1. Introducción

En este capítulo se realizan diferentes simulaciones del modelo seleccionado con el fin de observar sus características y de esta forma establecer los elementos necesarios para el desarrollo del algoritmo de optimización. Las simulaciones se efectúan considerando los resultados obtenidos del análisis realizado al modelo, siendo de interés la velocidad y el radio de giro de las partículas.

Sobre las diferentes características que se observan en este conjunto de simulaciones se tiene, el efecto del potencial externo como también la posibilidad de tener movimientos de traslación y rotación al modificar los parámetros de la fuerza de autopropulsión. Adicionalmente se observan casos especiales del modelo como lo es la condición de estabilidad para su implementación en tiempo discreto.

En la parte final del capítulo se presenta una simulación para cuatro dimensiones donde se aprecia que el enjambre de partículas logra describir movimientos cíclicos similares a los obtenidos en dos dimensiones. Los resultados de estas simulaciones se presentan tomando pares de coordenadas de tal forma que se puede tener una representación en varios planos para las trayectorias de las partículas

6.2. Modelo de simulación

La simulación se realiza empleando una aproximación de Euler de tal forma que se discretizan las ecuaciones diferenciales tomando un intervalo de tiempo Δt , obteniendo:

$$\vec{r}_i[n+1] = \vec{r}_i[n] + \vec{v}_i[n]\Delta t \quad (6-1)$$

$$\vec{v}_i[n+1] = \vec{v}_i[n] + \left[(\alpha - \beta v_i^2[n]) \vec{v}_i[n] - \frac{a}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i[n] - \vec{r}_j[n]) - \vec{\nabla} U_{esp}(\vec{r}_i) \right] \frac{\Delta t}{m_i} \quad (6-2)$$

6.3. Fuerza de autopropulsión

La fuerza de autopropulsión $F_{aut} = (\alpha - \beta v_i^2)v_i$ (caso escalar) se puede considerar de tipo disipativa al presentarla de la forma $F_{dis} = -F_{aut}$. En la figura **6-1** es posible observar su comportamiento para diferentes valores de α , en esta figura los valores negativos representan la propulsión suministrada a la partícula mientras que los valores positivos corresponden a una acción de frenado. Adicionalmente en la figura **6-1** se observa que al incrementar el valor de α la fuerza de propulsión aumenta.

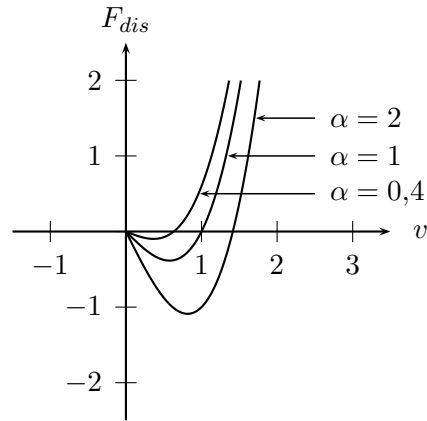


Figura 6-1.: Fuerza de fricción no lineal en función de v , para $\beta = 1$ y α de 2, 1 y 0,4.

El comportamiento de F_{dis} para diferentes valores de β se presenta en la figura 6-2, en este caso se aprecia que al aumentar β la fuerza de propulsión disminuye mientras que el efecto de la fuerza de frenado se incrementa.

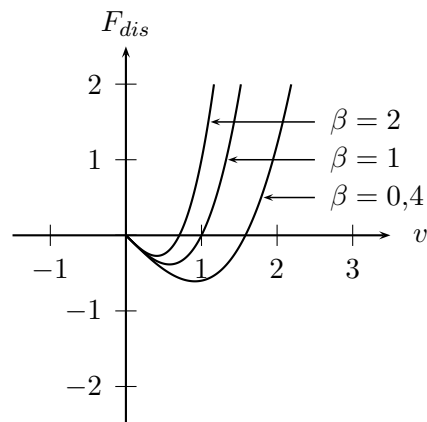


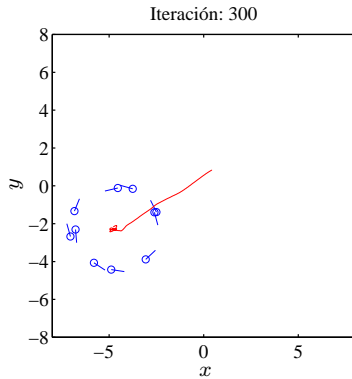
Figura 6-2.: Fuerza de fricción no lineal en función de v , para $\alpha = 1$ y β de 2, 1 y 0,4.

6.4. Simulación del modelo sin potencial externo

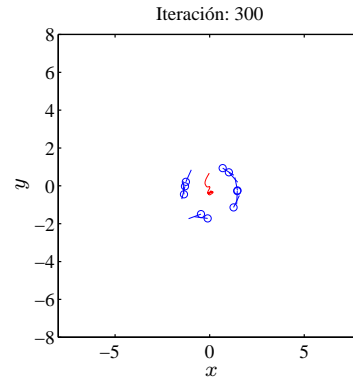
En este grupo de simulaciones se considera que no existe el potencial asociado al espacio o ambiente donde se encuentran las partículas. Principalmente se observa el efecto que tienen los parámetros N , a , α y β en la distribución final del enjambre. La simulación se realiza empleando un paso fijo de $\Delta t = 0,1$.

6.4.1. Simulación con movimiento de rotación

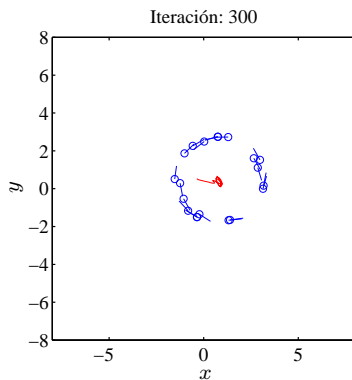
Para condiciones iniciales aleatorias de la posición y la velocidad se tienen los resultados presentados en la figura 6-3. En este caso se aprecia que el enjambre describe una trayectoria circular observándose diferentes radios de giro según los parámetros considerados, adicionalmente se parecía que el sentido de giro no es el mismo para todas las partículas.



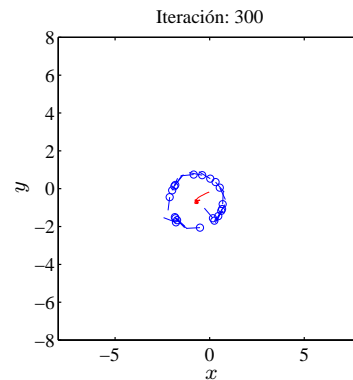
(a) Simulación con $N = 10$ individuos y $\beta = 0,2$.



(b) Simulación con $N = 10$ individuos y $\beta = 0,5$.



(c) Simulación con $N = 20$ individuos y $\beta = 0,2$.



(d) Simulación con $N = 20$ individuos y $\beta = 0,5$.

Figura 6-3.: Simulación sin la presencia de potencial externo, para $\alpha = 1$ y $a = 1$.

En la figura **6-3** se puede observar que el centro de rotación de las partículas depende de las condiciones iniciales esto debido a la falta de un potencial externo que influya en el desplazamiento de estas. También es de apreciar en las simulaciones de la figura **6-3** que el sentido de giro de las partículas no presenta la misma dirección para todas ya que no se considera ninguna fuerza de alineamiento en el modelo seleccionado. Finalmente es de resaltar que al tener un valor mayor de β el radio de giro tiende a disminuir lo cual se considera con mayor detalle en simulaciones posteriores.

6.4.2. Simulación con movimiento de traslación

Esta simulación es un caso particular que se puede tener del modelo donde se presenta un movimiento de traslación. En esta simulación el movimiento de traslación se observa cuando las condiciones iniciales son las mismas para todas las partículas. Para la posición se toma el origen y la velocidad se considera $[v_{xi,0}, v_{yi,0}] = [0,001, 0,001]$. En la figura **6-4** se puede apreciar el movimiento de traslación que describen las partículas cuando las condiciones iniciales son iguales para la posición y la velocidad.

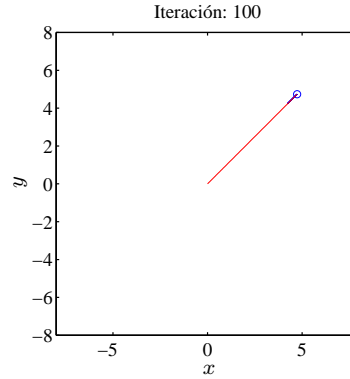


Figura 6-4.: Simulación con $N = 10$ individuos, $\beta = 0,2$, $\alpha = 1$ y $a = 1$.

Como es de apreciar en la figura 6-4 la posición de las partículas coincide describiendo un movimiento lineal en dirección de la velocidad inicial. En este caso el enjambre se comporta como una sola partícula presentándose un colapso del enjambre, lo cual se encuentra dado por las condiciones iniciales de las partículas.

Evitar una situación donde ocurra el colapso del enjambre resulta de gran importancia en la propuesta del algoritmo ya que al tener un enjambre agrupado en un solo punto se disminuye la capacidad de exploración del espacio de búsqueda.

6.5. Simulación del modelo con potencial externo

En este conjunto de simulaciones se observa el efecto que tiene el potencial asociado al espacio o ambiente donde se desplazan las partículas. Este potencial puede ser empleado para guiar el enjambre de partículas. Para garantizar la convergencia del enjambre a un mismo punto el potencial debe ser monomodal es decir que solo presenta un punto mínimo.

El potencial considerado en dos dimensiones presenta simetría cónica de la forma $U_{esp} = k_x x^2 + k_y y^2$, para el caso donde $k_x = k_y$ se tiene un potencial “parabólico” (paraboloide de revolución), por otro lado con $k_x \neq k_y$ se presenta un potencial “elíptico” (paraboloide elíptico).

6.5.1. Combinación de movimientos de traslación y rotación

En esta simulación se puede apreciar que el enjambre presenta dos comportamientos, un movimiento de traslación y otro de rotación alrededor de un punto (vórtice). Para ilustrar este hecho, se tiene un espacio de dos dimensiones tal que $\vec{r} = [x, y]^T$ y un enjambre sometido a un potencial parabólico de la forma $U_{esp}(\vec{r}) = 0,5|\vec{r}|^2$, el cual se encuentra centrado en el origen. Las partículas tienen condiciones iniciales $[x_{i,0}, y_{i,0}] \neq 0$ para la posición y $[v_{xi,0}, v_{yi,0}] = [0, 0]$ para la velocidad, donde las posiciones iniciales son elegidas al azar. Los parámetros del modelo en esta simulación son $N = 20$, $\alpha = 4$, $\beta = 1$ y $a = 1$.

En la figura 6-5, es posible observar como las partículas tratan primero para alcanzar el origen (punto mínimo de U_{esp}) y luego, una vez que el enjambre está lo suficientemente cerca de este punto, presentan un comportamiento de tipo ciclo límite donde la magnitud de la velocidad de las partículas tiende a ser $|\vec{v}_i| = \sqrt{\alpha/\beta}$, lo cual se puede apreciar en la figura 6-6.

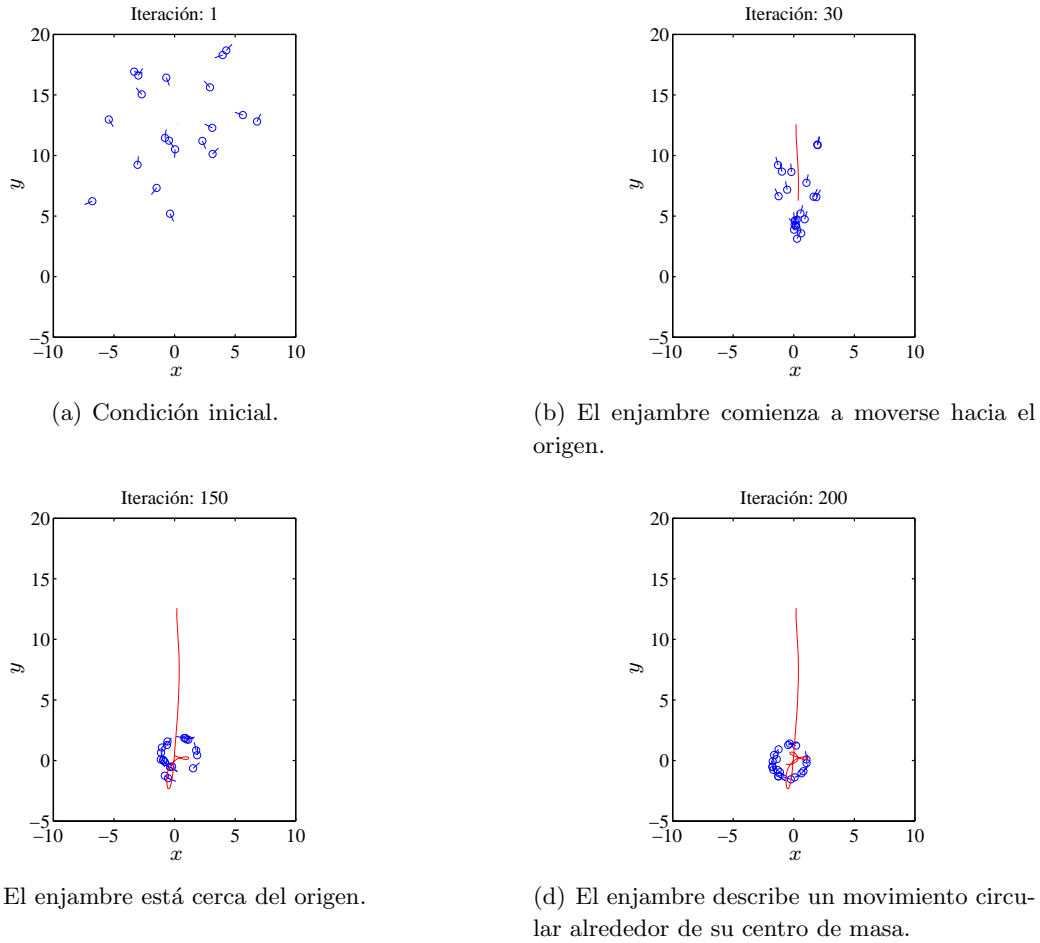


Figura 6-5.: Comportamiento del enjambre en la presencia de un potencial externo.

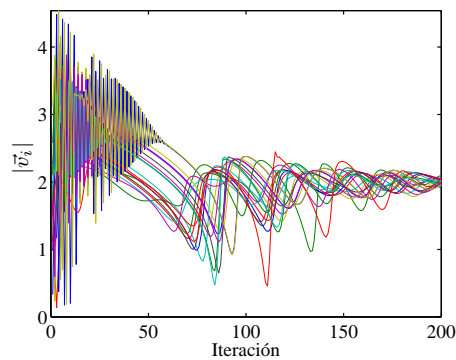


Figura 6-6.: Evolución de la velocidad para cada partícula del enjambre. Las magnitudes de las velocidades convergen a un valor constante de $2 = \sqrt{\alpha/\beta}$.

En esta simulación se puede apreciar los intercambios del sistema acoplado (enjambre) de energía entre el movimiento de traslación y de rotación. Para el caso considerado el comportamiento está dado por una función parabólica (convexa), por lo cual, para otro tipo de potenciales el enjambre

puede exhibir un comportamiento más complejo.

6.5.2. Velocidad y distribución del enjambre

Con el fin de observar la distribución de las partículas como también la velocidad de estas cuando se tiene un potencial externo se realiza un conjunto de simulaciones considerando un potencial parabólico $U_{esp} = 0,5(x^2 + y^2)$ y los parámetros $m_i = 1$, $a = 1$, $N = 20$, $\beta = 1$ y α para 2 y 4.

En la figura 6-7 se presentan los resultados para 200 iteraciones con $\alpha = 2$ y condiciones iniciales aleatorias para la posición. En esta figura se puede apreciar el comportamiento de vorticidad y la magnitud de la velocidad de las partículas la cual tiende a ser $|\vec{v}_i| = \sqrt{\alpha/\beta}$.

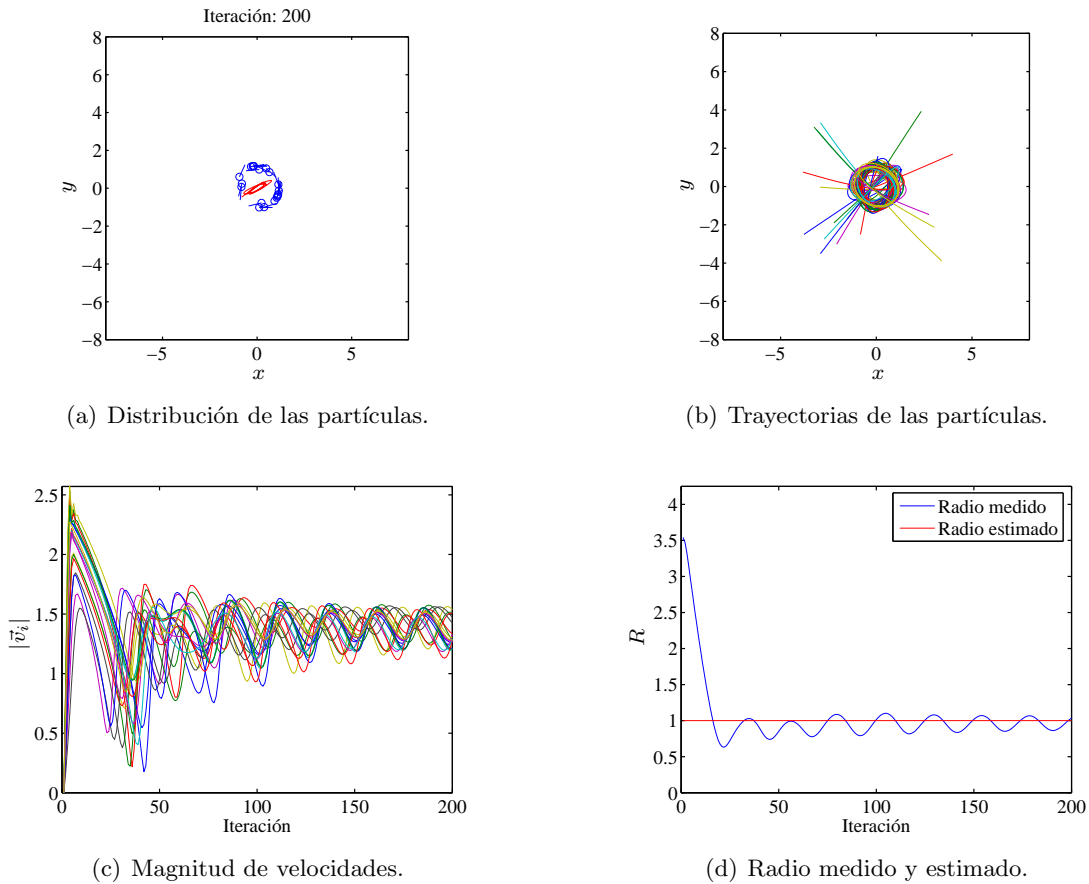


Figura 6-7.: Resultados de la simulación con $\alpha = 2$.

Considerando la ecuación 5-36 se puede establecer el radio de giro de tal forma que:

- Para $\alpha = 2$, se tiene un radio estimado de 1,0.
- Para $\alpha = 4$, se tiene un radio estimado de 1,4142.

En la figura 6-7 se pueden observar los resultados de la simulación en el caso de tener $\alpha = 4$. En estas figuras se aprecia que el enjambre logra tener una distribución circular donde su radio de giro se encuentra cerca del valor estimado.

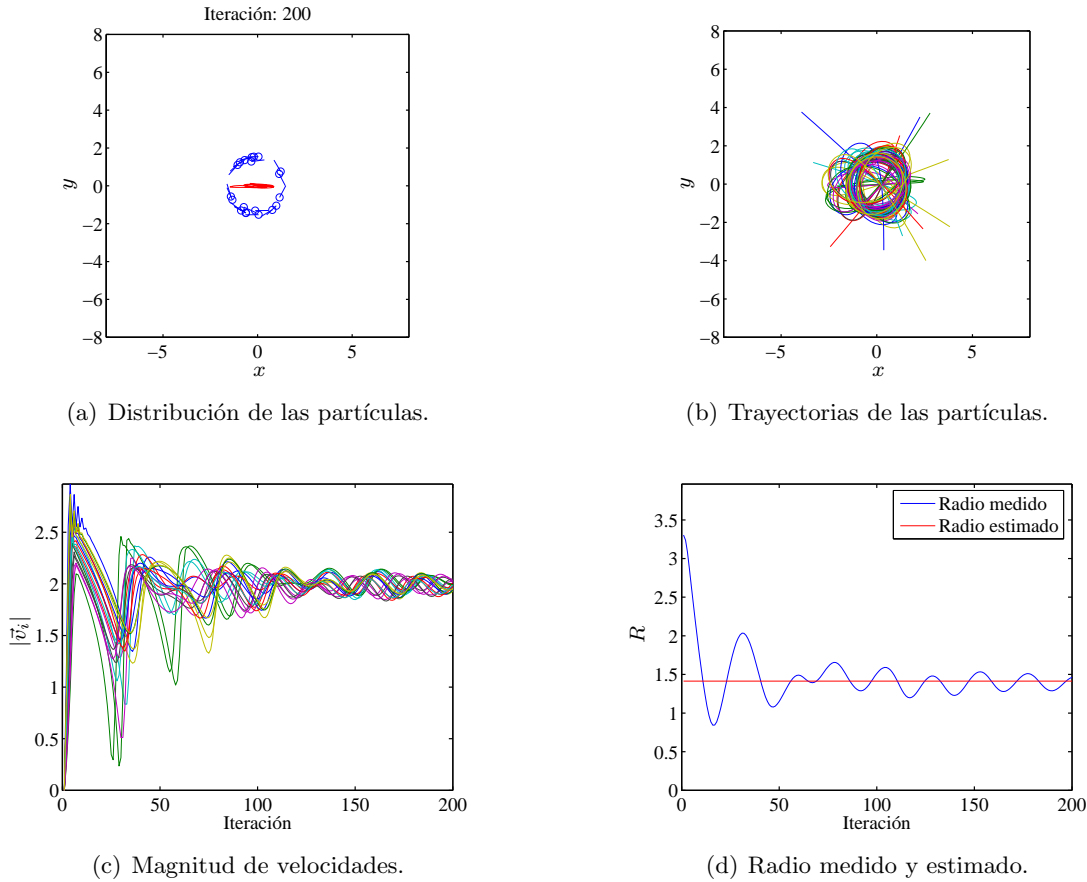


Figura 6-8.: Resultados de la simulación con $\alpha = 4$.

6.5.3. Simulación para un potencial no simétrico

En este caso se considera un potencial de la forma $U_{esp} = (k_x x^2 + k_y y^2)$ y los parámetros del modelo con $m_i = 1$, $a = 2$, $N = 20$, $\beta = 1$ y $\alpha = 4$. Las posiciones iniciales de las partículas se consideran aleatorias para las posiciones y cero para las velocidades.

Para $k_x = 4$ y $k_y = 0,5$ se tienen los resultados mostrados en la figura 6-9. En la figura (a) se muestra la posición media de las partículas y la distribución de estas en la última iteración. En la figura (b) se tiene la posición de todas las partículas y en la figura (c) se muestra la magnitud de la velocidad de las partículas.

Por otra parte, tomando $k_x = 2$ y $k_y = 1$ se tienen los resultados de la figura 6-10. En la figura (a) se muestra la posición media de las partículas y la distribución de estas en la última iteración. En la figura (b) se tiene la posición de todas las partículas y en la figura (c) se muestra la magnitud de la velocidad de las partículas.

En las anteriores simulaciones se aprecia que no se presentan movimientos circulares perfectos sin embargo el seguir teniendo un potencial monomodal las partículas describen movimientos oscilatorios alrededor del punto donde el potencial tiene su menor valor.

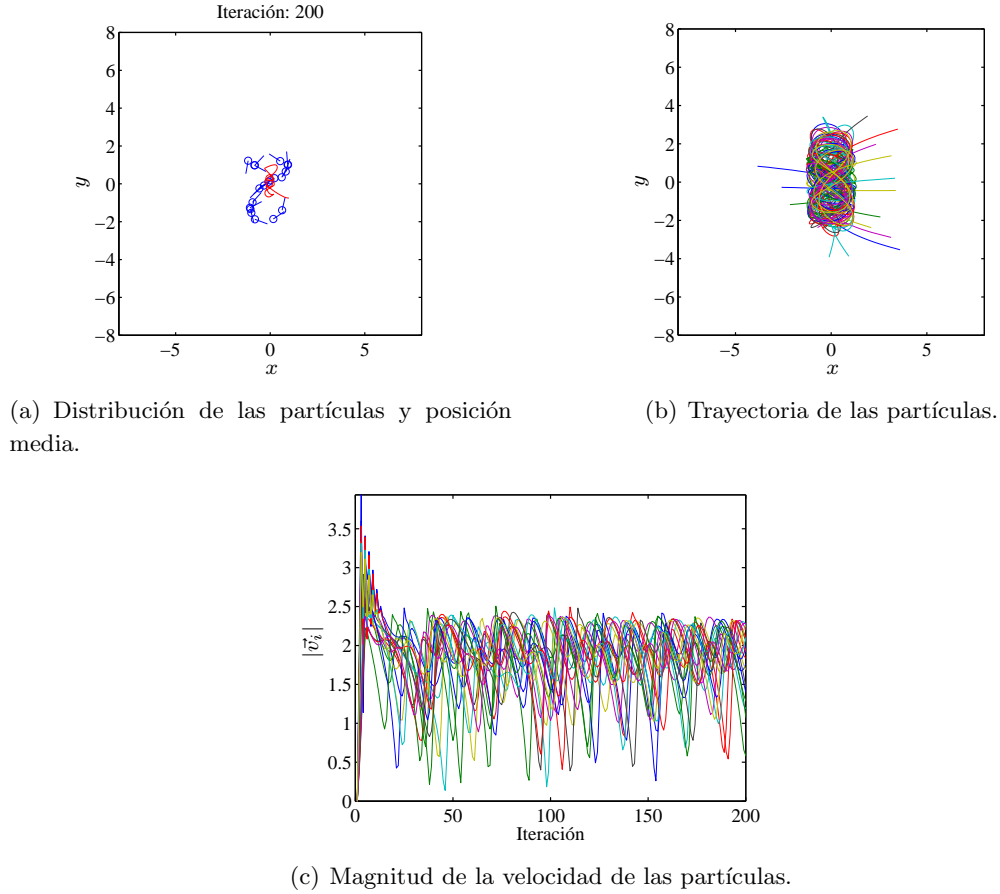


Figura 6-9.: Distribución de las partículas y magnitud de velocidades, para $k_x = 4$ y $k_y = 0,5$.

6.6. Simulación para casos disipativos

En este conjunto de simulaciones se presenta el comportamiento del enjambre para el cual se busca tener únicamente el efecto de frenado o disipativo en la fuerza de autopropulsión. Para lo anterior se tienen dos opciones. La primera consiste en anular α directamente del modelo, la otra opción consiste en eliminar β y asignarle a α un valor negativo.

Se considera que este tipo de comportamiento exhibido por el enjambre puede ser empleado para lograr la convergencia a un valor mínimo.

En los casos presentados a continuación se considera un potencial externo parabólico de la forma $U_{esp}(\vec{r}) = |\vec{r}|^2$.

6.6.1. Simulación para caso disipativo no lineal

En este caso se realiza una simulación cuando $\alpha = 0$ de tal forma que el modelo presenta una fuerza disipativa no lineal de la forma $\vec{F}_{dis} = \beta|v_i|^2\vec{v}_i$. En este caso se considera $N = 20$, $a = 1$, $\beta = 1$ obteniendo los resultados de la figura **6-11** donde se aprecia una convergencia lenta de las partículas al punto de equilibrio dado por el mínimo del potencial externo. Lo anterior ocurre ya que para grandes velocidades se tiene una disipación grande de energía y para velocidades pequeñas se tiene una disipación pequeña.

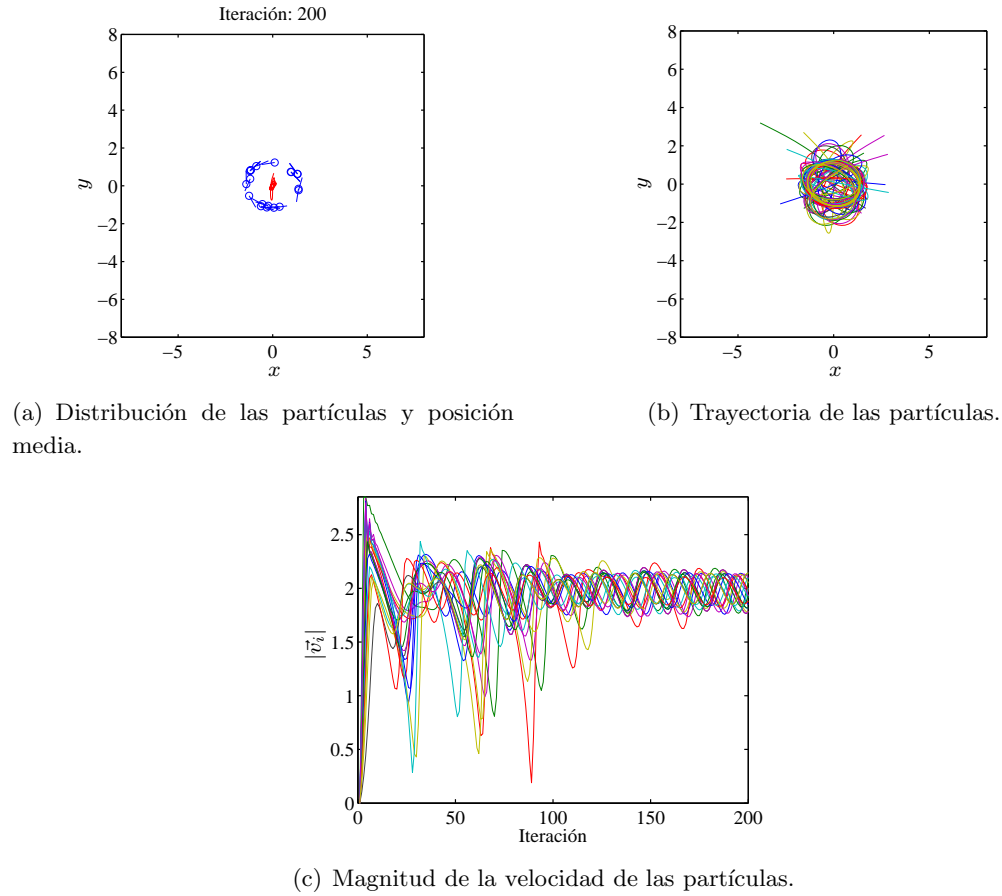


Figura 6-10.: Distribución de las partículas y magnitud de velocidades, para $k_x = 2$ y $k_y = 1$.

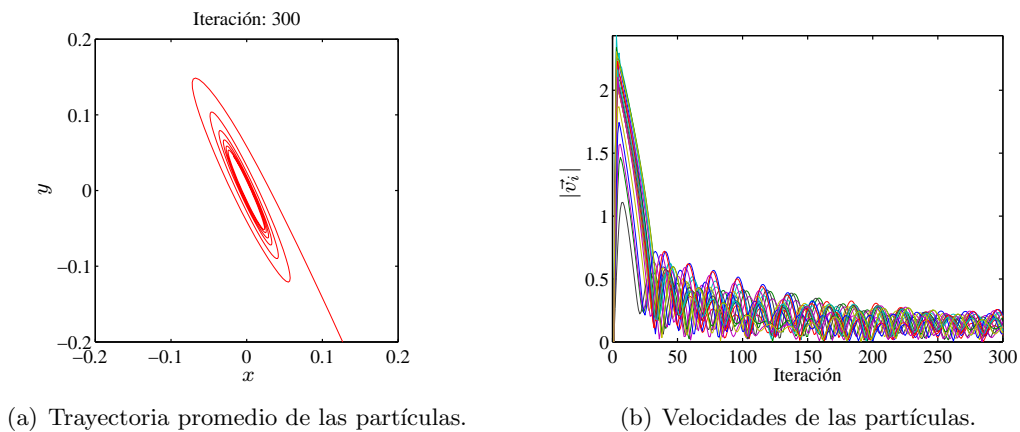


Figura 6-11.: Trayectoria promedio de las partículas y magnitud de velocidades.

6.6.2. Simulación para caso disipativo lineal

Otra situación de interés ocurre al eliminar la componente no lineal de la fuerza disipativa de tal forma que se tiene una componente disipativa lineal $\vec{F}_{dis} = \alpha \vec{v}_i$. Para lo anterior se hace $\beta = 0$ con

$\alpha = -10$. Para los otros parámetros se tiene $N = 20$ y $a = 1$ obteniendo el resultado mostrado en la figura 6-12.

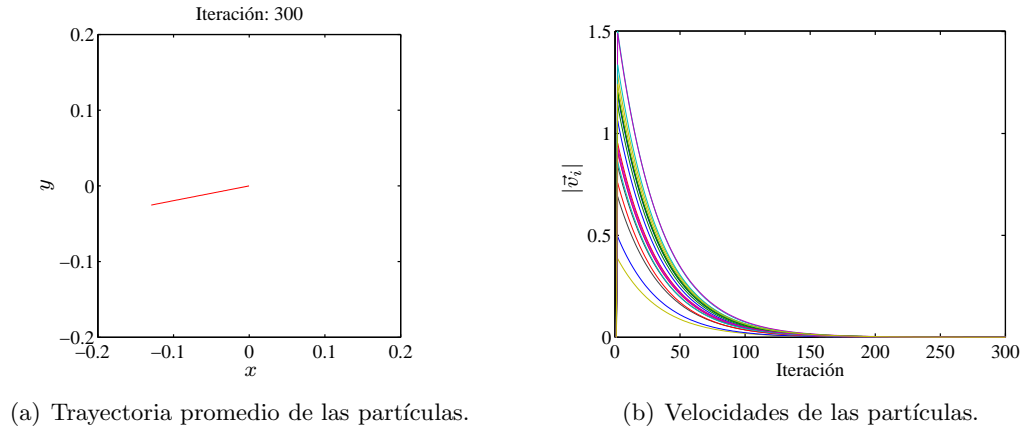


Figura 6-12.: Trayectoria promedio de las partículas y magnitud de velocidades.

Como es de apreciar en la figura 6-12, en este caso se logra una convergencia al valor mínimo del potencial U_{esp} sin presentar oscilaciones y con una velocidad de las partículas tendiendo a cero en la medida que se aproximan al punto mínimo.

El comportamiento que se aprecia en esta simulación es similar al dado por el método del gradiente permitiendo tener una adecuada convergencia del enjambre al punto mínimo de U_{esp} .

6.7. Simulación del modelo considerando la condición de estabilidad en tiempo discreto

Como se puede notar en las simulaciones de las figuras 6-3, 6-7 y 6-8 se cumple con la condición de estabilidad dada por la relación 5-43, por lo tanto, en esta sección se observan algunos resultados cuando no se cumple esta condición o cuando se encuentra muy cerca de su cumplimiento.

El cumplimiento de la condición de estabilidad para la implementación del modelo en tiempo discreto se debe considerar para la selección de parámetros del algoritmo de optimización.

6.7.1. Simulación sin potencial externo

Para estas simulaciones se considera que no existe la influencia de un potencial externo. Los parámetros empleados son $N = 20$ individuos, $m_i = 2$, $\beta = 0,2$, $\alpha = 1$ y $a = 1$. Un primer caso a observar consiste en tomar $\Delta t = 1,4$ de tal forma que se cumple con 5-43, sin embargo este valor se encuentra cerca al no cumplimiento de la desigualdad. Otro caso se tiene al tomar $\Delta t = 2,4$ de tal forma que no se cumple con la restricción de estabilidad. Los resultados de las simulaciones se observan en la figura 6-13 para el caso mostrado en (a) se aprecia un comportamiento con valores de velocidad que oscilan de forma brusca alrededor de $\sqrt{\alpha/\beta} = 2,2361$. Por otra parte, en (b) se observa un comportamiento completamente inestable para la velocidad de las partículas.

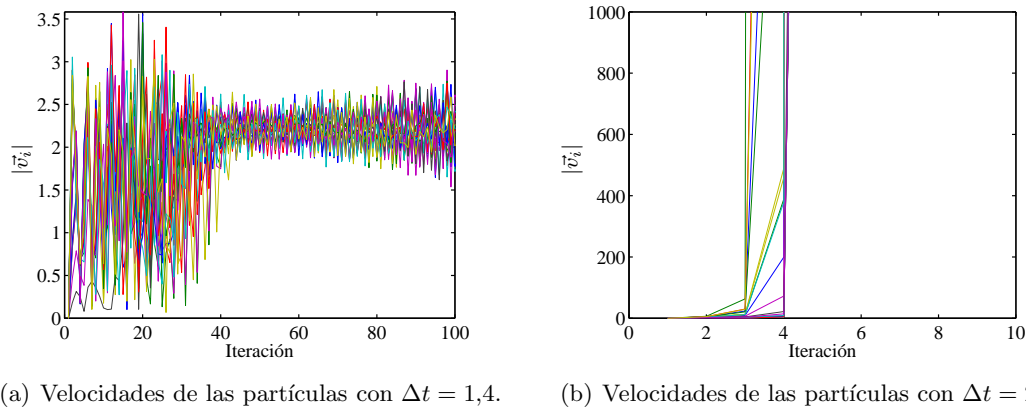


Figura 6-13.: Magnitud de velocidades de las partículas.

6.7.2. Simulación con potencial externo

En este caso se considera un potencial parabólico de la forma $U_{esp} = 0,5(x^2 + y^2)$ con parámetros $N = 20$, $m_i = 1$, $a = 1$, $\beta = 0,2$ y $\alpha = 1$. Una primera simulación considera $\Delta t = 0,5$ como un caso donde se cumple con la restricción 5-43. En un segundo caso se tiene $\Delta t = 1,5$ donde se tiene un comportamiento inestable dado por el no cumplimiento de la restricción de estabilidad. En la figura 6-14 se pueden apreciar los resultados de esta simulación, en (a) se observa un cambio brusco de los valores para las magnitudes de las velocidades de las partículas, por su parte en (b) se observa un comportamiento inestable para la velocidad de las partículas.

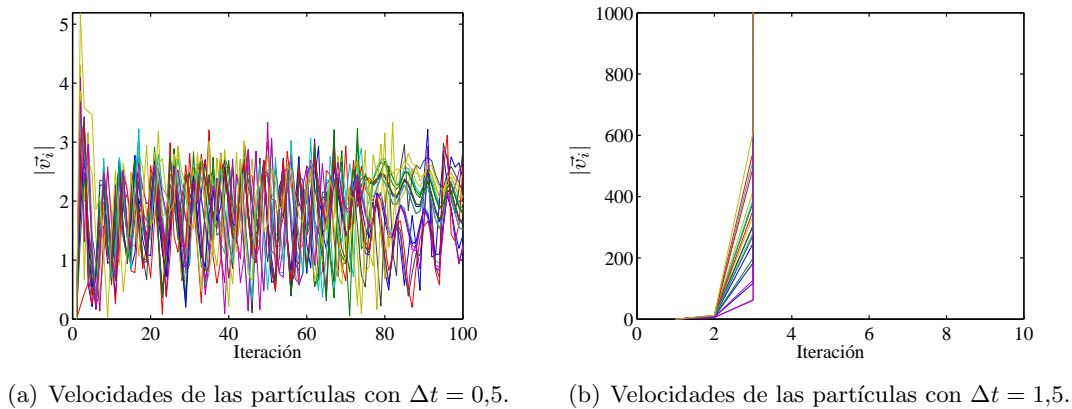


Figura 6-14.: Magnitud de velocidades de las partículas.

6.8. Simulación del modelo para cuatro dimensiones

Con el fin de observar el comportamiento del modelo en varias dimensiones se realiza una simulación para cuatro dimensiones teniendo el resultado mostrado en las figuras 6-15, 6-16 y 6-17. En la figura 6-15 se muestra la posición media de las partículas y la distribución de estas en la última iteración. En la figura 6-16 se tiene la posición de todas las partículas y en la figura 6-17 se muestra

la magnitud de la velocidad de las partículas.

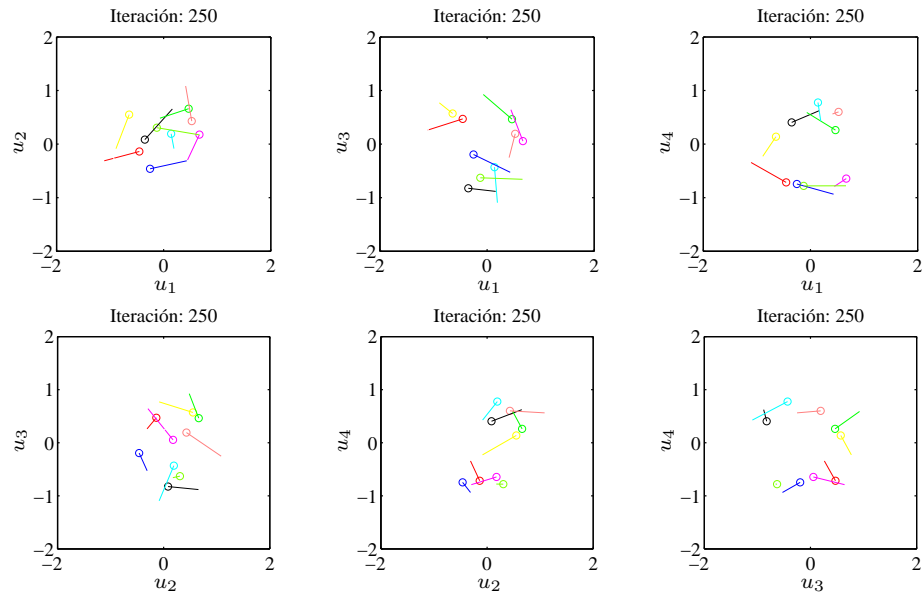


Figura 6-15.: Distribución de las partículas en la última iteración realizando la representación en parejas de coordenadas.

En las figuras 6-15 y 6-16 se observa que el modelo permite describir comportamientos circulares en las cuatro dimensiones. Por su parte en la figura 6-17 se aprecia que la magnitud de la velocidad de las partículas tiene a ser $\sqrt{\alpha/\beta}$.

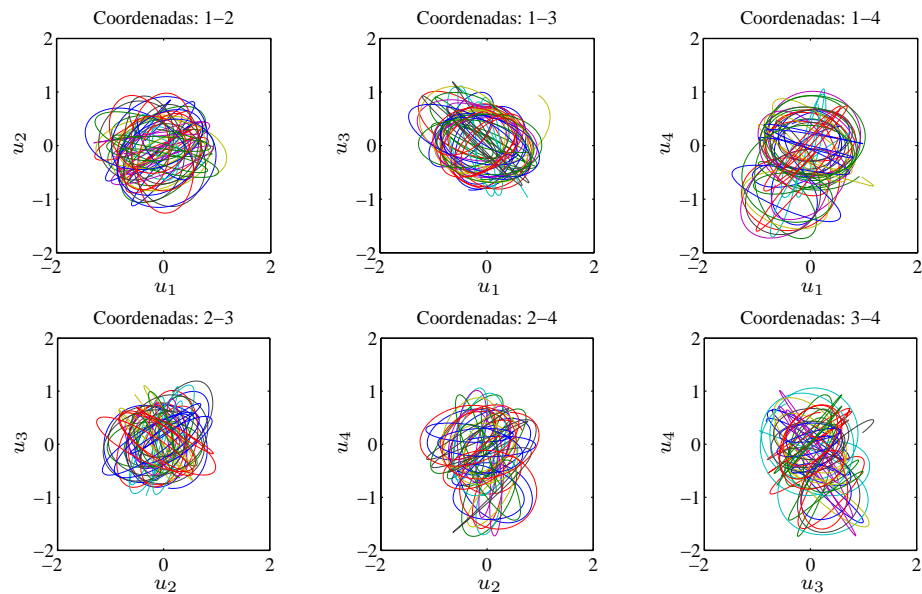


Figura 6-16.: Posiciones de las partículas realizando la representación en parejas de coordenadas.

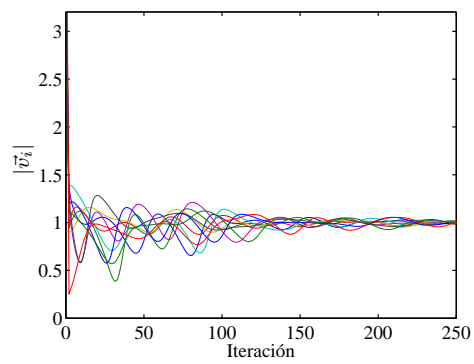


Figura 6-17.: Magnitud de la velocidad de las partículas.

7. Algoritmo de optimización basado en un enjambre con comportamiento de vorticidad

7.1. Introducción

En este capítulo se describe el algoritmo de optimización propuesto el cual se basa en el modelo seleccionado. La implementación del modelo se realiza discretizando las ecuaciones de movimiento. Con el algoritmo propuesto se busca escapar de mínimos locales empleando las características del modelo seleccionado. La estrategia desarrollada consiste en incrementar la energía de autopropulsión cuando el enjambre converge en un mínimo local.

7.2. Alternativas consideradas para el desarrollo del algoritmo

Un primer aspecto considerado al proponer el algoritmo consiste en los movimientos circulares que realiza el enjambre, lo cual se pudo apreciar con los análisis y simulaciones. De esta forma también se observa que manipulando los parámetros del modelo se puede modificar el radio de giro de las partículas lo cual se puede emplear para escapar de mínimos locales. Como es de apreciar en las simulaciones al tener un potencial externo con simetría cónica el enjambre de partículas tiende a presentar un movimiento circular donde el punto medio de las partículas coincide con el valor mínimo del potencial externo.

Para lograr la convergencia del enjambre a un punto mínimo en una primera instancia se considera eliminar la componente de propulsión teniendo una componente disipativa no lineal, sin embargo, para lograr un comportamiento similar al descenso del gradiente se toma una componente disipativa lineal.

Una primera alternativa del algoritmo para escapar de un mínimo local consiste en incrementar la energía hasta desplazar el punto medio de las partículas a una posición diferente del mínimo local encontrado. Esta alternativa presenta la dificultad de requerir el desplazamiento de todo el enjambre para converger a otro valor mínimo, es decir, que una partícula puede encontrar un mejor valor sin embargo el enjambre no converge a este hasta que todas las partículas escapen del mínimo local. Lo anterior ocurre por el acople global que presentan las partículas con su punto medio. En este primer acercamiento el gradiente de la función objetivo proporciona una fuerza que desplaza las partículas en la dirección donde se puede encontrar un mejor valor.

Una mejora de la anterior propuesta se logra al incorporar la información individual de las partículas, en este caso se observa si alguna partícula encuentra un mejor valor. Al encontrarse una mejor posición se realiza la convergencia del enjambre a este nuevo punto mínimo. Para lograr lo anterior se adiciona un potencial de atracción con el fin de direccionar todo el enjambre al mejor valor encontrado.

La información dada por la función objetivo actúa como una componente de búsqueda local la cual influye de forma individual para cada partícula. El potencial asociado a la mejor posición encontrada actúa como una componente de búsqueda global atrayendo a todas las partículas a este punto.

Un aspecto de atención en el algoritmo consiste en la forma de incrementar la energía ya que un incremento rápido no permite que el enjambre explore de forma adecuada el espacio de búsqueda llegando a la máxima dispersión de forma temprana. También es de observar que el movimiento circular se obtiene con valores constantes para la fuerza de autopropulsión, por lo cual, en una primera instancia se propone un incremento de forma escalonada. Otra alternativa propuesta para el incremento consiste en observar si existe cambio en la máxima dispersión obtenida de las partículas en cada iteración.

Otro aspecto de importancia en la propuesta del algoritmo consiste en el criterio de parada. A diferencia de la mayoría de algoritmos de optimización donde se detiene el algoritmo considerando la convergencia, en este caso el criterio de parada se encuentra basado en la dispersión de las partículas para lo cual se puede emplear como medida la varianza generalizada calculada mediante la matriz de varianza y covarianzas, sin embargo por facilidad de cálculo como criterio de parada se considera el número de partículas que se encuentran en el espacio de búsqueda.

Finalmente es de apreciar que al suspender la información dada por la función objetivo se tienen las mismas etapas de convergencia y dispersión, lo cual permite aplicar el algoritmo para funciones no continuas.

7.3. Consideraciones para el diseño del algoritmo

Tomando como referencia el análisis del modelo como también las simulaciones del mismo, se pueden establecer una serie de lineamientos para el diseño del algoritmo. Como un primer aspecto a considerar se busca que el algoritmo presente dos procesos generales, uno de convergencia y otro de dispersión los cuales se obtienen modificando los parámetros del modelo.

Para lograr la fase de convergencia se pueden configurar los parámetros α y β de tal forma que se tenga un comportamiento adecuado del enjambre (convergencia a un punto mínimo). Adicionalmente, del análisis de puntos de equilibrio, en la fase de convergencia se observa la necesidad de una fuerza de atracción que permita el desplazamiento del enjambre a un punto deseado.

Sobre la fase de dispersión, el primer aspecto a considerar consiste en la capacidad del modelo para generar el desplazamiento de las partículas con movimientos circulares. También del análisis de energía se aprecia que la velocidad de las partículas se puede controlar mediante el parámetro α y de esta forma también el radio de giro de las mismas. Con el fin de tener una buena exploración del espacio de búsqueda en la fase de dispersión se debe considerar una estrategia para generar movimientos circulares de las partículas, lo cual se puede lograr al tener un valor constante de α .

Otro aspecto a considerar consiste en el efecto que tiene la función objetivo en las etapas de convergencia y dispersión, por lo cual, se deben acotar los valores máximos y mínimos dados por el gradiente de esta función para poder controlar la convergencia y dispersión de las partículas. En la fase de convergencia se debe acotar la fuerza dada por el gradiente de tal forma que se pueda evitar el escape no deseado de partículas. En este caso se puede considerar el valor máximo y mínimo de velocidad para normalizar la fuerza dada por la función objetivo. Por su parte, en la fase de

dispersión la función objetivo se debe escalar para establecer un límite del efecto que esta puede tener sobre el enjambre de partículas considerando el radio de giro esperado.

Como es de apreciar, en esta propuesta se busca emplear la dispersión de las partículas para mejorar la exploración del espacio de búsqueda, por lo cual, el criterio de parada del algoritmo puede estar dado por una métrica relacionada con la dispersión de las partículas.

Suposiciones

Para la propuesta del algoritmo se tienen las siguientes suposiciones sobre el comportamiento dinámico del enjambre:

- S₁:** El enjambre en estado estable se mueve con una velocidad de magnitud $|\vec{v}| = \sqrt{\alpha/\beta}$.
- S₂:** Es posible mantener un grado de simetría para U_{esp} de tal forma que se tenga un movimiento circular aproximado.
- S₃:** Se considera que el enjambre presenta un comportamiento caótico, es decir, para pequeñas variaciones de condiciones iniciales las trayectorias de las partículas son diferentes.
- S₄:** No se espera tener el colapso del enjambre al tomar condiciones iniciales aleatorias.

7.3.1. Estrategia de búsqueda

La estrategia de búsqueda se encuentra fundamentada en la combinación de movimientos lineales y circulares que presenta el modelo seleccionado. En primer lugar los movimientos lineales se emplean para la convergencia a mínimos locales, mientras que los movimientos circulares se utilizan para escapar de los mínimos locales al incrementar el radio de giro de las partículas. La componente cognitiva o individual se considera dada por la información que suministra el gradiente de la función objetivo, por otra parte, el desplazamiento social es generado por la mejor posición encontrada de todo el enjambre. La estrategia de búsqueda propuesta contempla las siguientes etapas:

1. **Convergencia:** Esta fase se tiene cuando se encuentra un mejor valor de la función objetivo, de tal forma que se realiza el desplazamiento del enjambre a este punto. Para encontrar un mejor valor de la función objetivo se evalúa tanto la posición media de las partículas como la individual.

En esta etapa el algoritmo tiene un comportamiento similar al método de máximo descenso dado por el gradiente. Con el fin de garantizar la convergencia se construye un potencial atractivo hacia el mejor punto encontrado. Para guiar el movimiento de las partículas se emplea la información dada por el gradiente de la función objetivo. La magnitud del gradiente se modifica de tal forma que se pueda tener la convergencia de las partículas al mejor valor encontrado.

2. **Dispersión:** Después que el enjambre converge a un mínimo local se realiza el proceso de dispersión mediante movimientos circulares de las partículas. La dispersión se logra incrementando la energía de propulsión.

Mediante el potencial de atracción asociado a la mejor posición encontrada se busca mantener centrado el radio de giro de las partículas sobre este punto. Para guiar el movimiento de las

partículas a otro mejor valor se incorpora en la dinámica de la partícula la influencia de la función objetivo.

En esta etapa del algoritmo se espera encontrar un mejor valor, en caso contrario se continúa el proceso de dispersión hasta que las partículas se desplazan fuera del espacio de búsqueda momento en el cual se detiene el algoritmo.

En las fases de convergencia y dispersión se realiza la búsqueda de un mejor valor de la función objetivo. Esta búsqueda se efectúa para cada partícula como también observando el punto medio de estas. En el caso de encontrar un mejor valor se procede a realizar el proceso de convergencia en caso contrario se efectúa dispersión.

En las etapas consideradas si se elimina la información de la función objetivo se mantienen las fases de convergencia y dispersión lo cual permite tener un algoritmo que no requiere el cálculo de gradientes.

En la figura 7-1 se presenta el esquema del algoritmo propuesto donde se aprecia como aspecto central las fases de convergencia y dispersión. También es de resaltar que la finalización del algoritmo se establece considerando la máxima dispersión del enjambre sobre el espacio de búsqueda.

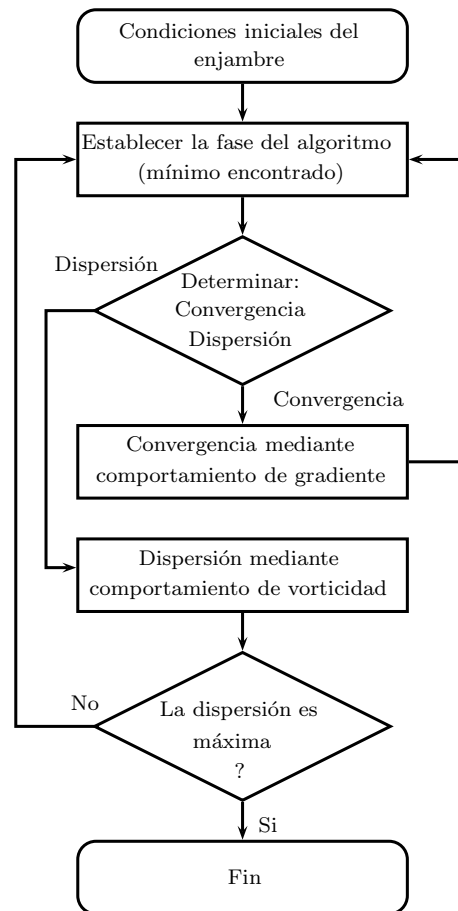


Figura 7-1.: Diagrama de flujo para la estrategia de búsqueda propuesta.

7.4. Implementación del modelo

Para incorporar en el algoritmo el modelo dinámico del enjambre, se discretizan las ecuaciones diferenciales tomando un intervalo de tiempo Δt , de tal forma que se tiene:

$$\vec{r}_i[n+1] = \vec{r}_i[n] + \vec{v}_i[n]\Delta t \quad (7-1)$$

$$\vec{v}_i[n+1] = \vec{v}_i[n] + \left[\left(\alpha - \beta v_i^2[n] \right) \vec{v}_i[n] - \frac{a}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i[n] - \vec{r}_j[n]) - \vec{F}_{esp,i} \right] \frac{\Delta t}{m_i} \quad (7-2)$$

Con el fin de realizar el cálculo de la fuerza dada por la interacción entre individuos se puede emplear la siguiente equivalencia:

$$\frac{a}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i[n] - \vec{r}_j[n]) = a \left(\vec{r}_i[n] - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \vec{r}_j[n] \right) = a \left(\vec{r}_i[n] - \vec{R} \right) \quad (7-3)$$

7.5. Componentes del algoritmo

En esta sección se revisan los aspectos relevantes de las componentes del algoritmo donde se describe la forma de identificar las fases, el potencial de atracción al mejor punto encontrado, el efecto de la función objetivo y el factor de autopropulsión para las fases de dispersión y convergencia.

De los aspectos a considerar en un primer lugar se tiene que la función potencial dada por el entorno de las partículas se encuentra compuesta por el potencial de atracción al mejor punto encontrado U_{mej} y por la función objetivo U_{obj} , lo cual se puede expresar de la siguiente forma:

$$U_{esp}(\vec{r}_i) = U_{mej}(\vec{r}_i) + U_{obj}(\vec{r}_i) \quad (7-4)$$

En la figura **7-2** se puede apreciar la representación de los potenciales U_{mej} y U_{obj} . Para el caso ilustrativo el potencial U_{obj} está dado por una función objetivo con varios máximos y mínimos. Por su parte U_{mej} se encuentra dado por un potencial de tipo cónico el cual permite direccionar el enjambre sobre el espacio de búsqueda. En la figura **7-2** se observa el desplazamiento que realiza U_{mej} para encontrar un valor mínimo de U_{obj} .

La fuerza producida por este potencial es:

$$\vec{F}_{esp,i} = -\vec{\nabla}U_{mej}(\vec{r}_i) - \vec{\nabla}U_{obj}(\vec{r}_i) \quad (7-5)$$

$$\vec{F}_{esp,i} = \vec{F}_{mej,i} + \vec{F}_{obj,i} \quad (7-6)$$

Caso estocástico

Considerando que la implementación del algoritmo PSO presenta una ponderación aleatoria de las componentes social y cognitiva mediante los parámetros β_{pi}, β_{gi} los cuales son números aleatorios en el intervalo $[0, 1]$, entonces, se pueden incluir estas componentes en el algoritmo VPSO con el fin de tener una mayor variabilidad en el proceso de búsqueda de las partículas. Considerando lo anterior la fuerza $\vec{F}_{esp,i}$ al incluir estas componentes tiene la forma:

$$\vec{F}_{esp,i} = \beta_{pi}\vec{F}_{mej,i} + \beta_{gi}\vec{F}_{obj,i} \quad (7-7)$$

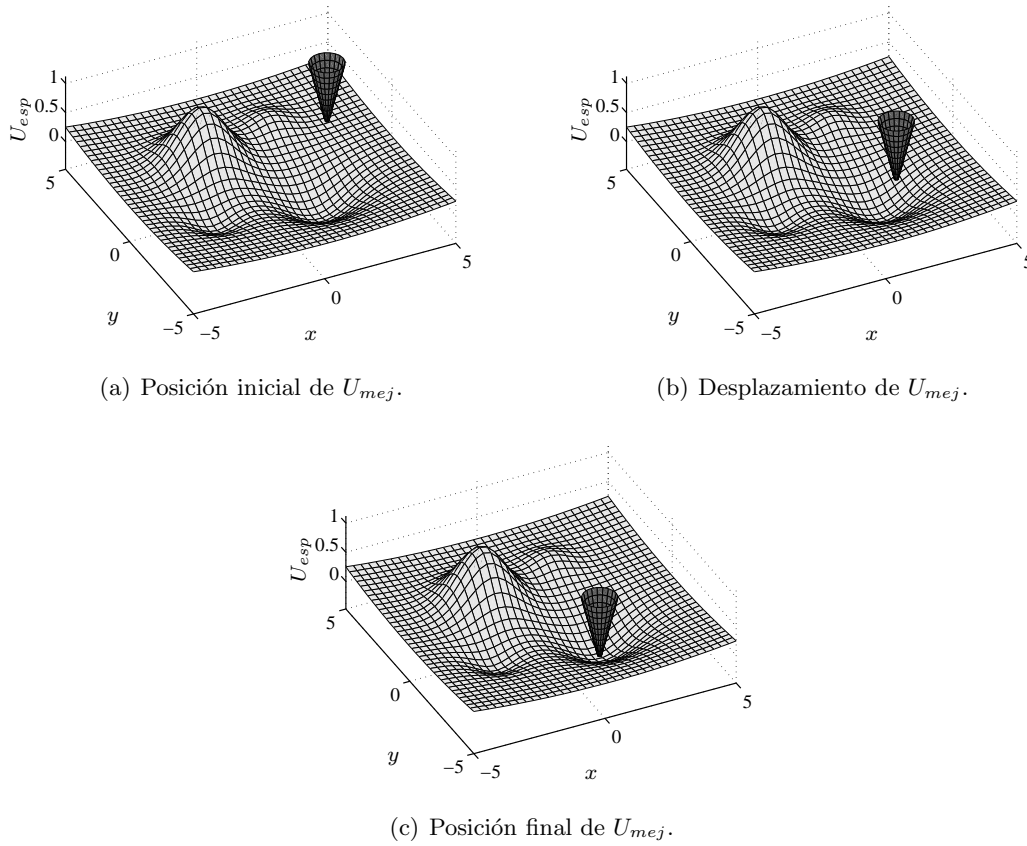


Figura 7-2.: Representación gráfica de los potenciales U_{mej} y U_{obj} .

7.5.1. Valor mínimo individual y grupal

Uno de los aspectos de importancia en el algoritmo consiste en determinar la mejor posición individual y grupal del enjambre. En esta propuesta la mejor posición grupal se determina observando el punto medio del enjambre

El valor mínimo para el punto medio del enjambre se determina conociendo el promedio de las posiciones del enjambre \vec{R} mediante las ecuaciones 7-8 y 7-9.

$$\vec{R} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \vec{r}_j \quad (7-8)$$

$$\vec{r}_{pro} = \begin{cases} \vec{R}, & \text{si; } U_{obj}(\vec{R}) \leq U_{obj}(\vec{r}_{pro}); \\ \vec{r}_{pro}, & \text{si; } U_{obj}(\vec{R}) > U_{obj}(\vec{r}_{pro}). \end{cases} \quad (7-9)$$

La mejor posición de la partícula está dada por la evaluación en cada iteración para cada partícula de la siguiente condición:

$$\vec{r}_{mej} = \begin{cases} \vec{r}_i, & \text{si; } U_{obj}(\vec{r}_i) \leq U_{obj}(\vec{r}_{mej}); \\ \vec{r}_{mej}, & \text{si; } U_{obj}(\vec{r}_i) > U_{obj}(\vec{r}_{mej}). \end{cases} \quad (7-10)$$

En el caso que el valor medio de las partículas presente un mejor valor este se actualiza de la siguiente forma:

$$\vec{r}_{mej} = \begin{cases} \vec{r}_{pro}, & \text{si; } U_{obj}(\vec{r}_{pro}) \leq U_{obj}(\vec{r}_{mej}); \\ \vec{r}_{mej}, & \text{si; } U_{obj}(\vec{r}_{pro}) > U_{obj}(\vec{r}_{mej}). \end{cases} \quad (7-11)$$

7.5.2. Identificación de las fases del algoritmo

Como el potencial de atracción asociado al mejor punto encontrado cambia en la medida que se encuentra un mejor valor, entonces, los estados del algoritmo se determinan observando la convergencia del enjambre a este punto. Con el fin de establecer cuándo el enjambre converge se observa si la partícula más alejada del mejor punto encontrado se localiza dentro de un determinado radio de convergencia R_{con} . La representación gráfica en dos dimensiones de este radio de convergencia se puede apreciar en la figura 7-3.

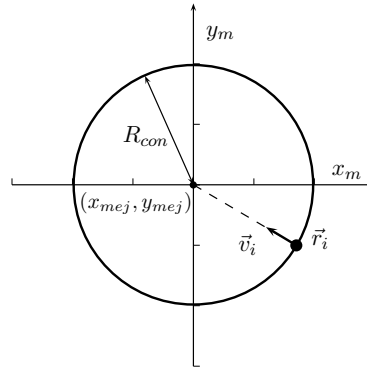


Figura 7-3.: Representación gráfica del radio de convergencia en dos dimensiones.

Para determinar la posición del punto más alejado se tiene la ecuación 7-12 la cual es evaluada en cada iteración para cada partícula.

$$\vec{r}_{ale} = \begin{cases} \vec{r}_i, & \text{si; } |\vec{r}_i - \vec{r}_{mej}| \geq |\vec{r}_{ale} - \vec{r}_{mej}|; \\ \vec{r}_{ale}, & \text{si; } |\vec{r}_i - \vec{r}_{mej}| < |\vec{r}_{ale} - \vec{r}_{mej}|. \end{cases} \quad (7-12)$$

Considerando la mejor posición encontrada y la posición de la partícula más alejada se puede establecer cuándo el enjambre converge al mejor punto encontrado mediante la siguiente condición:

$$\begin{cases} \text{No Convergencia,} & \text{si; } |\vec{r}_{mej} - \vec{r}_{ale}| > R_{con}; \\ \text{Convergencia,} & \text{si; } |\vec{r}_{mej} - \vec{r}_{ale}| \leq R_{con}. \end{cases} \quad (7-13)$$

Finalmente, para determinar los estados del algoritmo se tiene:

$$\begin{cases} \text{Convergencia,} & \text{cuando el enjambre encuentra un mejor valor de } U_{obj}; \\ \text{Dispersión,} & \text{después que el enjambre converge al mejor valor de } U_{obj}. \end{cases} \quad (7-14)$$

7.5.3. Factor de interacción

El factor de interacción aunque se puede considerar el mismo para las fases de convergencia y dispersión, este se toma por separado ya que se deben cumplir con restricciones dadas por la velocidad máxima y mínima de las partículas, de tal forma que se tiene:

$$a = \begin{cases} a_c, & \text{si; Convergencia;} \\ a_d, & \text{si; Dispersión.} \end{cases} \quad (7-15)$$

7.5.4. Factor de autopropulsión en la fase de convergencia

Como fue de apreciar en el análisis y simulación del modelo, con β constante y $\alpha = 0$ se tiene una convergencia lenta de las partículas. Para lograr un adecuado comportamiento se propone hacer $\beta = 0$ y $\alpha = -m_i/\Delta t$ de tal forma que se tiene un comportamiento similar al descenso de gradiente. Realizando la anterior modificación se tiene:

$$\vec{r}_i[n+1] = \vec{r}_i[n] + \vec{v}_i[n]\Delta t \quad (7-16)$$

$$\vec{v}_i[n+1] = \vec{v}_i[n] + \left[-\frac{m_i}{\Delta t}\vec{v}_i[n] - \frac{a}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i[n] - \vec{r}_j[n]) - \vec{\nabla}U_{esp}(\vec{r}_i[n]) \right] \frac{\Delta t}{m_i} \quad (7-17)$$

Por lo cual, las ecuaciones del modelo en la fase de convergencia son:

$$\vec{r}_i[n+1] = \vec{r}_i[n] + \vec{v}_i[n]\Delta t \quad (7-18)$$

$$\vec{v}_i[n+1] = \left[-\frac{a}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i[n] - \vec{r}_j[n]) - \vec{\nabla}U_{esp}(\vec{r}_i[n]) \right] \frac{\Delta t}{m_i} \quad (7-19)$$

Las anteriores ecuaciones son similares a las presentes en el método de descenso del gradiente con un término adicional correspondiente a un acople global al punto medio de las partículas.

7.5.5. Factor de autopropulsión en la fase de dispersión

Como un primer aspecto a considerar se tiene la condición 7-20 para la selección del parámetro β , donde β_0 es un valor constante dado para la etapa de dispersión.

$$\beta = \begin{cases} 0, & \text{si; Convergencia;} \\ \beta_0, & \text{si; Dispersión.} \end{cases} \quad (7-20)$$

La adición de energía se realiza mediante el factor de propulsión el cual se considera como:

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{m_i}{\Delta t}, & \text{si; Convergencia;} \\ \frac{d\alpha}{dt} = g, & \text{si; Dispersión.} \end{cases} \quad (7-21)$$

Es importante señalar que la energía adicionada se encuentra limitada de la forma: $0 \geq \alpha \geq \alpha_{\text{máx}}$. El cálculo de α en tiempo discreto se realiza como:

$$\begin{cases} \alpha[n+1] = -\frac{m_i}{\Delta t}, & \text{si; Convergencia;} \\ \alpha[n+1] = \alpha[n] + g\Delta t, & \text{si; Dispersión.} \end{cases} \quad (7-22)$$

Incremento constante de energía

Una alternativa para la función g considera un tiempo T_α para el incremento de energía y un tiempo T_V para esperar mientras las partículas se dispersan de forma circular sobre el espacio de búsqueda. El número total de iteraciones que toma este ciclo es $K_\alpha + K_V$, donde, $K_\alpha = T_\alpha/\Delta t$ y $K_V = T_V/\Delta t$. Para lo anterior se emplea la variable K_C con la cual se realiza el conteo de las iteraciones. La expresión para g en este caso es:

$$g = \begin{cases} \tau_c, & \text{si; } 0 \leq K_C < K_\alpha; \\ 0, & \text{si; } K_\alpha \leq K_C < K_\alpha + K_V. \end{cases} \quad (7-23)$$

Con la anterior función se espera que la energía de propulsión aumente hasta que las partículas logren evadir el mínimo local. El aumento de la energía está dado por el parámetro τ_c el cual corresponde a la tasa de incremento para la energía de autopropulsión. En la figura 7-4 se aprecia un ejemplo del incremento de energía que se puede tener para el enjambre de partículas.

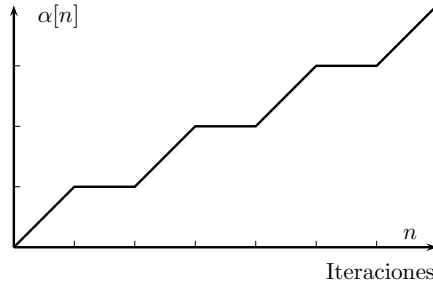


Figura 7-4.: Caso ilustrativo para el incremento de energía.

Incremento adaptativo de energía

Otra estrategia para la función g es de tipo adaptativo donde se busca detener el incremento de energía cuando se observa un cambio en el espacio o hiper-volumen ocupado por las partículas. Para lo anterior se establece un hiper-cubo descrito por los vertices opuestos inferior y superior los cuales acotan las posiciones de las partículas. El hiper-cubo se inicializa en la etapa de dispersión de tal forma que al presentarse un cambio en las dimensiones de este se mantiene constante la energía y en caso contrario se realiza el respectivo incremento.

Los vertices del hiper-cubo se encuentran dados por el punto superior:

$$\vec{P}_{sup} = [p_{sup,1}\hat{u}_1, p_{sup,2}\hat{u}_2, \dots, p_{sup,d}\hat{u}_d, \dots, p_{sup,D}\hat{u}_D]^T$$

y por el punto inferior:

$$\vec{P}_{inf} = [p_{inf,1}\hat{u}_1, p_{inf,2}\hat{u}_2, \dots, p_{inf,d}\hat{u}_d, \dots, p_{inf,D}\hat{u}_D]^T$$

donde \hat{u}_d es el respectivo vector unitario en la dirección d . Con el fin de establecer el valor superior e inferior en cada dimensión se tiene que la posición de una partícula se puede representar de la forma:

$$\vec{r}_i = [r_{i,1}\hat{u}_1, r_{i,2}\hat{u}_2, \dots, r_{i,d}\hat{u}_d, \dots, r_{i,D}\hat{u}_D]^T$$

En la figura 7-5 se puede apreciar la representación gráfica de \vec{P}_{sup} y \vec{P}_{inf} en dos dimensiones.

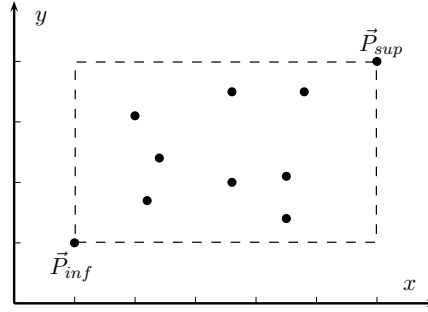


Figura 7-5.: Representación gráfica de \vec{P}_{sup} y \vec{P}_{inf} en dos dimensiones.

Empleando las variables auxiliares $\tilde{p}_{sup,d}$ y $\tilde{p}_{inf,d}$, los valores superiores e inferiores en cada dimensión se pueden establecer de la siguiente forma:

$$\tilde{p}_{sup,d} = \max_{i=1,2,\dots,N} r_{i,d}$$

$$\tilde{p}_{inf,d} = \min_{i=1,2,\dots,N} r_{i,d}$$

considerando que se debe tener un registro de estos valores los cuales se actualizan al observar un incremento en el hiper-cubo, entonces, con $d = 1, 2, \dots, D$, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$p_{sup,d}[n+1] = \max(\tilde{p}_{sup,d}, p_{sup,d}[n])$$

$$p_{inf,d}[n+1] = \min(\tilde{p}_{inf,d}, p_{sup,d}[n])$$

Con los anteriores valores se propone g de la siguiente forma:

$$g = \begin{cases} 0, & \text{si } \vec{P}_{inf}[n+1] \neq \vec{P}_{inf}[n] \text{ o } \vec{P}_{sup}[n+1] \neq \vec{P}_{sup}[n]; \\ \tau_c, & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (7-24)$$

7.5.6. Velocidad máxima y mínima

Para evitar una situación donde las partículas escapan del espacio de búsqueda por presentar una velocidad elevada se propone tener una velocidad máxima v_{\max} para estas. Por otro lado, al acercarse las partículas a un valor mínimo el gradiente es aproximadamente cero haciendo que la velocidad de las partículas disminuya por lo cual se considera un valor mínimo de velocidad v_{\min} . Con el fin de establecer el efecto que tienen los valores máximos y mínimos de la velocidad en el desplazamiento de una partícula se tiene:

$$\frac{|\vec{r}_i[n+1] - \vec{r}_i[n]|}{\Delta t} = |\vec{v}_i| \quad (7-25)$$

El avance máximo Δr_{\max} y mínimo Δr_{\min} asociados a una partícula se pueden relacionar con la respectiva velocidad máxima y mínima de la siguiente forma:

$$\Delta r_{\max} = v_{\max} \Delta t$$

$$\Delta r_{\text{mín}} = v_{\text{mín}} \Delta t$$

Por otro lado, se tiene que la magnitud de la velocidad producida por la fuerza \vec{F}_i es:

$$|\vec{F}_i| = m_i \frac{|\vec{v}_i[n+1] - \vec{v}_i[n]|}{\Delta t} \quad (7-26)$$

Considerando el caso particular en la fase de convergencia donde $|\vec{v}_i[n+1] - \vec{v}_i[n]| = |\vec{v}_i[n+1]|$, entonces, la fuerza máxima $F_{\text{máx}}$ y mínima $F_{\text{mín}}$ asociada a la velocidad máxima y mínima es:

$$F_{\text{máx}} = v_{\text{máx}} \frac{m_i}{\Delta t} \quad (7-27)$$

$$F_{\text{mín}} = v_{\text{mín}} \frac{m_i}{\Delta t} \quad (7-28)$$

Otro aspecto a considerar en la fase de convergencia consiste en que la fuerza total que actúa sobre una partícula está dada por la fuerza de interacción, la fuerza asociada al mejor punto y la fuerza producida por la función objetivo. En esta propuesta se considera que la magnitud de cada fuerza se encuentra limitada por la velocidad máxima y mínima que se puede generar. Empleando la desigualdad triangular para vectores (ecuación 7-29) se puede establecer una cota para el valor máximo y mínimo total que pueden generar estas fuerzas.

$$|\vec{F}_{\text{int},i} + \vec{F}_{\text{mej},i} + \vec{F}_{\text{obj},i}| \leq |\vec{F}_{\text{int},i}| + |\vec{F}_{\text{mej},i}| + |\vec{F}_{\text{obj},i}| \quad (7-29)$$

Considerando lo anterior se puede determinar un valor máximo y mínimo total para la velocidad de las partículas en la fase de convergencia de tal forma que se tiene:

$$v_{\text{máx}T} = 3v_{\text{máx}} \quad (7-30)$$

$$v_{\text{mín}T} = 3v_{\text{mín}} \quad (7-31)$$

7.5.7. Función potencial asociada al mejor punto encontrado

Para la función potencial asociada a la mejor posición encontrada se considera su descripción por separado para las fases de convergencia y dispersión. En el caso de convergencia se emplea un potencial de tipo parabólico limitado por la velocidad máxima y mínima que este puede producir. Por otro lado, en la fase de dispersión se tiene un potencial de tipo cónico para centrar el enjambre en el punto mínimo encontrado y realizar el proceso de dispersión sobre este punto. La magnitud de la fuerza producida por este potencial se considera constante y comparable con las fuerzas de interacción y de la función objetivo.

Función potencial en la fase de convergencia

El potencial asociado al mejor punto individual se considera de tipo parabólico y acotado por el valor máximo y mínimo de la velocidad ($v_{\text{máx}}$, $v_{\text{mín}}$) que esta fuerza puede producir en una iteración. La consideración para emplear un valor mínimo de velocidad consiste en mantener el enjambre de partículas en movimiento incluso cuando están en la cercanía de un mínimo local.

Empleando las expresiones 7-25 y 7-26 se puede establecer $U_{mej}(\vec{r}_i)$ de la siguiente forma:

$$U_{mej}(\vec{r}_i) = \begin{cases} F_{\min}|\vec{r}_{mej} - \vec{r}_i|, & \text{si; } k_{mc}|\vec{r}_{mej} - \vec{r}_i| \leq F_{\min}; \\ k_{mc}\frac{1}{2}|\vec{r}_{mej} - \vec{r}_i|^2, & \text{si; } F_{\min} < k_{mc}|\vec{r}_{mej} - \vec{r}_i| \leq F_{\max}; \\ F_{\max}|\vec{r}_{mej} - \vec{r}_i|, & \text{si; } F_{\max} < k_{mc}|\vec{r}_{mej} - \vec{r}_i|. \end{cases} \quad (7-32)$$

La fuerza asociada al potencial U_{mej} es:

$$\vec{F}_{mej,i}(\vec{r}_i) = \begin{cases} -F_{\min}\frac{(\vec{r}_{mej} - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_{mej} - \vec{r}_i|}, & \text{si; } k_{mc}|\vec{r}_{mej} - \vec{r}_i| \leq F_{\min}; \\ -k_{mc}(\vec{r}_{mej} - \vec{r}_i), & \text{si; } F_{\min} < k_{mc}|\vec{r}_{mej} - \vec{r}_i| \leq F_{\max}; \\ -F_{\max}\frac{(\vec{r}_{mej} - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_{mej} - \vec{r}_i|}, & \text{si; } F_{\max} < k_{mc}|\vec{r}_{mej} - \vec{r}_i|. \end{cases} \quad (7-33)$$

En las anteriores expresiones se tiene un caso especial para $|\vec{r}_{mej} - \vec{r}_i| = 0$, lo cual ocurre cuando \vec{r}_i coincide con el mejor punto encontrado, en este caso la fuerza $\vec{F}_{mej}(\vec{r}_i)$ se hace cero, teniendo la siguiente condición:

$$\vec{F}_{mej,i}(\vec{r}_i) = \begin{cases} \vec{0}, & \text{si; } |\vec{r}_{mej} - \vec{r}_i| = 0; \\ \vec{F}_{mej,i}(\vec{r}_i), & \text{si; } |\vec{r}_{mej} - \vec{r}_i| \neq 0. \end{cases} \quad (7-34)$$

Es de notar que no siempre en todas las iteraciones existe una partícula localizada en la mejor posición, lo cual depende de encontrar un mejor valor en la respectiva iteración.

Función potencial en la fase de dispersión

En la fase de dispersión el potencial asociado al mejor punto encontrado se encarga de mantener centrado el vórtice de las partículas sobre este punto. Para poder estimar de forma adecuada el radio de giro de las partículas este potencial se considera de tipo cónico de tal forma que la fuerza producida sea constante. Considerando lo anterior se propone un potencial de la forma:

$$U_{mej}(\vec{r}_i) = k_{md}|\vec{r}_{mej} - \vec{r}_i| \quad (7-35)$$

Donde k_{md} es un factor de escala de tal forma que la fuerza asociada a este potencial es:

$$\vec{F}_{mej,i}(\vec{r}_i) = -k_{md}\frac{(\vec{r}_{mej} - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_{mej} - \vec{r}_i|} \quad (7-36)$$

7.5.8. Función objetivo

La fuerza producida por la función objetivo se ajusta por separado para los procesos de convergencia y dispersión. En el proceso de convergencia esta se ajusta de tal manera que no supere la magnitud de la fuerza producida por el potencial asociado al mejor punto encontrado con lo cual se busca garantizar la convergencia del enjambre al mejor punto encontrado. En la fase de dispersión se escala la fuerza producida por la función objetivo de tal forma que sea posible establecer un limite que permita estimar el radio de giro de las partículas.

Función objetivo en la fase de convergencia

En la fase de convergencia la fuerza producida por la función objetivo se modifica de tal manera que la magnitud de esta no supere la magnitud de la fuerza asociada al mejor punto encontrado. Con esta condición se puede garantizar la convergencia del enjambre al mejor punto encontrado y al mismo tiempo se incorpora información de la función objetivo con lo cual se busca guiar el desplazamiento de las partículas aumentando la posibilidad de encontrar un mejor valor durante el proceso de convergencia.

Cuando una partícula se localiza en la mejor posición encontrada el valor de la fuerza asociada a U_{mej} es cero, por lo cual, se propone aplicar a esta partícula una fuerza asociada a la función objetivo para guiar la partícula a un mejor valor.

Para tener un adecuado desplazamiento de una partícula se considera que la magnitud de la velocidad producida por la función objetivo debe estar acotada por la velocidad máxima $v_{m\acute{a}x}$ y mínima $v_{m\acute{i}n}$ que se puede tener en una iteración. Con estos limites se evitan velocidades altas que pueden producir el escape de las partículas fuera del espacio de búsqueda, por otro lado, una velocidad muy pequeña demora el tiempo de convergencia. Considerando lo anterior y empleando las ecuaciones 7-25 y 7-26 la expresión para la fuerza producida por la función objetivo es:

$$\vec{F}_{obj,i}(\vec{r}_i) = \begin{cases} -F_{m\acute{i}n} \frac{\vec{\nabla}U_{obj}(\vec{r}_i)}{|\vec{\nabla}U_{obj}(\vec{r}_i)|}, & \text{si; } k_{oc}|\vec{\nabla}U_{obj}(\vec{r}_i)| \leq F_{m\acute{i}n}; \\ -k_{oc} \vec{\nabla}U_{obj}(\vec{r}_i), & \text{si; } F_{m\acute{i}n} < k_{oc}|\vec{\nabla}U_{obj}(\vec{r}_i)| \leq F_{m\acute{a}x}; \\ -F_{m\acute{a}x} \frac{\vec{\nabla}U_{obj}(\vec{r}_i)}{|\vec{\nabla}U_{obj}(\vec{r}_i)|}, & \text{si; } F_{m\acute{a}x} < k_{oc}|\vec{\nabla}U_{obj}(\vec{r}_i)|. \end{cases} \quad (7-37)$$

Donde $k_{oc} \in \mathbb{R}^+$ es un factor de ponderación de la función objetivo. Con el fin de garantizar la convergencia del enjambre al mejor punto encontrado se modifica la magnitud de $\vec{F}_{obj,i}$ cuando esta es mayor que la magnitud de la fuerza producida por el potencial de atracción hacia el mejor punto encontrado. Cuando lo anterior ocurre la magnitud de la fuerza asociada a la función objetivo se escala considerando un valor $\eta \in [0, 1]$. Lo anterior garantiza que $|\vec{F}_{obj,i}| < |\vec{F}_{mej,i}|$. La expresión que considera este ajuste es:

$$\vec{F}_{obj,i}(\vec{r}_i) = \begin{cases} \vec{F}_{obj,i}(\vec{r}_i), & \text{si; } |\vec{F}_{obj,i}| < |\vec{F}_{mej,i}|; \\ \eta |\vec{F}_{mej,i}(\vec{r}_i)| \frac{\vec{F}_{obj,i}}{|\vec{F}_{obj,i}|}, & \text{si; } |\vec{F}_{obj,i}| \geq |\vec{F}_{mej,i}|. \end{cases} \quad (7-38)$$

Como se mencionó anteriormente una situación especial para $\vec{F}_{obj,i}$ se tiene con $|\vec{r}_{mej} - \vec{r}_i| = 0$, lo cual ocurre cuando una partícula se localiza el mejor punto encontrado, por lo tanto, a esta partícula se le aplica la fuerza $\vec{F}_{obj,i}$ de la ecuación 7-37 sin la modificación de la ecuación 7-38.

Ponderación de la función objetivo en la fase de dispersión

En la fase de dispersión se considera ajustar la función objetivo para tener control sobre la dispersión de las partículas. En este caso se normaliza la fuerza de la función objetivo y se escala un valor k_{od} . Con este enfoque se tiene una cota máxima de la fuerza dada por la función objetivo y así también un radio máximo de giro. Considerando lo anterior, la fuerza producida por la función objetivo se

puede calcular como:

$$\vec{F}_{obj,i} = -k_{od} \frac{\vec{\nabla} U_{obj}(\vec{r}_i)}{|\vec{\nabla} U_{obj}(\vec{r}_i)|} \quad (7-39)$$

7.5.9. Criterio de parada

Como se menciona anteriormente el algoritmo emplea la dispersión para escapar de mínimos locales y explorar de manera eficiente el espacio de búsqueda, por lo tanto, se toma como criterio de parada el nivel de dispersión logrado por el enjambre. En esta propuesta se considera el número de partículas en el espacio de búsqueda para detener el algoritmo.

El criterio de parada propuesto establece que si el número de partículas en el espacio de búsqueda es menor que un cierto valor $N_e \in \mathbb{Z}^+$ (entero positivo), entonces el algoritmo se detiene.

Para determinar el número de partículas N_e con las cuales se detiene el algoritmo se puede manejar un factor de escala $\rho \in [0, 1]$ de tal forma que:

$$N_e = \rho N \quad (7-40)$$

El anterior criterio de parada se considera independiente de la estrategia empleada para el incremento de energía, sin embargo, cuando se realizan incrementos establecidos de energía (K_α) se puede considerar la finalización cuando se llega al incremento máximo de energía.

7.6. Algoritmo propuesto

El algoritmo de optimización propuesto basado en un enjambre de partículas con comportamiento de vorticidad es mostrado en Algoritmo 2, el cual se denomina VPSO (*Vortex Particle Swarm Optimization*).

Algoritmo 2: Algoritmo propuesto de optimización VPSO.

```

1 Inicializar el enjambre, posiciones aleatorias y velocidad cero.;
2 begin
3   while Bajo algún criterio de finalización. Número de iteraciones o dispersión. do
4     Establecer el mejor punto del enjambre;
5     Establecer la fase del algoritmo;
6     Determinar  $\alpha$  empleando la expresión 7-22;
7     Determinar  $\beta$  empleando la expresión 7-20;
8     for  $i = 1$  hasta  $N$  do
9       Calcular la nueva posición de las partículas con la ecuación 7-1;
10      Calcular la nueva velocidad de las partículas empleando la ecuación 7-2;
11    end
12    Pasar a la siguiente iteración incrementando  $n$ .
13  end
14  Establecer el valor óptimo encontrado por las partículas.
15 end

```

7.7. Consideraciones para la selección de parámetros

La selección de parámetros se realiza considerando el comportamiento del enjambre en las fases de convergencia y dispersión. En este análisis se toman casos aproximados los cuales permiten establecer rangos para los parámetros del algoritmo.

Como un primer aspecto a considerar se toman condiciones iniciales aleatorias para las posiciones y cero para la velocidad según lo expuesto en [26].

7.7.1. Espacio de búsqueda

El espacio de búsqueda $\Omega \in \mathbb{R}^n$ para algoritmos de optimización basados en enjambres de partículas según [27] se puede definir como:

$$\Omega = [x_1^L, x_1^U] \times [x_2^L, x_2^U] \times \cdots \times [x_D^L, x_D^U] \in \mathbb{R}^n \quad (7-41)$$

donde x_d^L y x_d^U son los límites superiores e inferiores del espacio de búsqueda para la dimensión $d = 1, 2, \dots, D$. El rango del espacio de búsqueda Ω para la d dimensión es:

$$\text{range}_d(\Omega) = (x_d^U - x_d^L) \quad (7-42)$$

Para efectos prácticos se puede tener un rango unificado $\text{range}(\Omega)$ al considerar un factor de escala L_d para cada dimensión de tal forma que: $\text{range}(\Omega) = L_1 \text{range}_1(\Omega) = L_2 \text{range}_2(\Omega) = \dots = L_d \text{range}_d(\Omega)$.

Dado el comportamiento circular que se espera tener del enjambre en la fase de dispersión se define el radio de giro para el espacio de búsqueda como:

$$R_\Omega = \frac{\text{range}(\Omega)}{2} \quad (7-43)$$

7.7.2. Velocidad máxima y mínima

El valor de avance máximo para cada partícula se considera como un porcentaje del espacio de búsqueda:

$$\Delta r_{\text{máx}} = \lambda_{\text{máx}} \text{range}(\Omega) \quad (7-44)$$

Por lo general, el valor de $\lambda_{\text{máx}}$ se encuentra entre $0,1 \leq \lambda_{\text{máx}} \leq 0,5$ [27]. Por otro lado, el valor de avance mínimo puede estimarse como:

$$\Delta r_{\text{mín}} = \lambda_{\text{mín}} \text{range}(\Omega) \quad (7-45)$$

La velocidad máxima y mínima se puede determinar considerando el avance máximo y mínimo que se espera tener ($\Delta r_{\text{máx}}, \Delta r_{\text{mín}}$) de tal forma que:

$$v_{\text{máx}} = \frac{\Delta r_{\text{máx}}}{\Delta t} \quad (7-46)$$

$$v_{\text{mín}} = \frac{\Delta r_{\text{mín}}}{\Delta t} \quad (7-47)$$

7.7.3. Radio de convergencia

Para estimar el radio de convergencia R_{con} se debe observar el efecto de $\vec{F}_{int,i}$, $\vec{F}_{mej,i}$ y $\vec{F}_{obj,i}$. En este caso, al considerar la desigualdad triangular para vectores de la ecuación 7-29 se puede establecer una magnitud total máxima:

$$F_{Tot,i} = |\vec{F}_{int,i}| + |\vec{F}_{mej,i}| + |\vec{F}_{obj,i}| \quad (7-48)$$

la cual en la fase de convergencia produce un avance $\Delta r_{Tot,i}$ que se puede calcular como:

$$\Delta r_{Tot,i} = F_{Tot,i} \frac{(\Delta t)^2}{m_i}$$

con el fin de garantizar la convergencia de la partícula se tiene que $R_{con} \geq \Delta r_{Tot,i}$, por lo cual:

$$R_{con} \geq F_{Tot,i} \frac{(\Delta t)^2}{m_i} \quad (7-49)$$

Como se puede apreciar para tener una adecuada convergencia el avance de las partículas en la vecindad del punto mínimo no debe ser mayor que R_{con} . Bajo este mismo enfoque para lograr una adecuada convergencia se debe acotar el valor de $F_{Tot,i}$. Para las fuerzas $\vec{F}_{mej,i}$ y $\vec{F}_{obj,i}$ esto se logra al garantizarlo para $\vec{F}_{mej,i}$ dado que se tiene la restricción $|\vec{F}_{mej,i}| > |\vec{F}_{esp,i}|$. Por su parte, para $\vec{F}_{int,i}$ se debe analizar el valor de la fuerza producida para una partícula localizada en la vecindad de R_{con} .

En el primer caso, la magnitud de la velocidad producida por el potencial asociado al mejor punto encontrado es $|\vec{v}_i| = |\vec{F}_{mej,i}|\Delta t/m_i$, por lo cual se busca que:

$$\frac{k_{mc}|\vec{r}_i - \vec{r}_{mej}|\Delta t}{m_i} \leq v_{\min} \quad (7-50)$$

si la partícula se encuentra en la vecindad del radio de convergencia $R_{con} = |\vec{r}_i - \vec{r}_{mej}|$, se tiene que:

$$\frac{k_{mc}R_{con}\Delta t}{m_i} \leq v_{\min} \quad (7-51)$$

entonces, se obtiene la restricción 7-52 para k_{mc} en la fase de convergencia.

$$k_{mc} \leq \frac{v_{\min}m_i}{R_{con}\Delta t} \quad (7-52)$$

En el segundo caso, para observar el efecto de la fuerza de interacción $\vec{F}_{int,i}$ se tiene que:

$$\frac{a_c|\vec{r}_i - \vec{R}|\Delta t}{m_i} \leq v_{\min} \quad (7-53)$$

de la misma forma, al considerar una partícula localizada en la vecindad del radio de convergencia $R_{con} = |\vec{r}_i - \vec{R}|$, por lo cual:

$$\frac{a_cR_{con}\Delta t}{m_i} \leq v_{\min} \quad (7-54)$$

entonces, se tiene la siguiente restricción para el parámetro asociado a la fuerza de interacción.

$$a_c \leq \frac{v_{\min}m_i}{R_{con}\Delta t} \quad (7-55)$$

Al cumplirse las anteriores restricciones se puede considerar un caso extremo con $|\vec{F}_{int,i}| = |\vec{F}_{mej,i}| = |\vec{F}_{obj,i}|$ donde cada fuerza tiene asociada una velocidad mínima v_{\min} , por lo tanto:

$$R_{con} \geq 3v_{\min}\Delta t \quad (7-56)$$

7.7.4. Parámetros del potencial asociado al mejor punto encontrado

La fuerza producida por el potencial asociado a la mejor posición encontrada presenta el parámetro k_{mc} en la fase de convergencia y k_{md} para la etapa de dispersión. El respectivo parámetro en la fase de convergencia se determina observando la velocidad mínima de las partículas, mientras que en la fase de dispersión se considera comparable con la fuerza producida por la función objetivo y por la interacción entre las partículas.

Parámetro en la fase de convergencia

En la fase de convergencia el parámetro k_{mc} se ajusta observando el paso o incremento Δr producido por este potencial para una determinada partícula. En este caso se considera que el avance Δr_i producido por una diferencia $(\vec{r}_i - \vec{r}_{mej})$ debe cumplir con $\Delta r_i < |\vec{r}_i - \vec{r}_{mej}|$ de tal forma que se logre una adecuada convergencia de la partícula al mejor punto encontrado. Para establecer lo anterior se tiene que la magnitud de esta fuerza para una partícula es:

$$|\vec{F}_{mej,i}| = k_{mc} |\vec{r}_i - \vec{r}_{mej}|$$

por lo cual, el avance asociado a esta fuerza es:

$$\Delta r_i = k_{mc} |\vec{r}_i - \vec{r}_{mej}| \frac{(\Delta t)^2}{m_i} \quad (7-57)$$

Tomando $|\vec{r}_i - \vec{r}_{mej}| = \Delta r_{mej,i}$, entonces, el valor de k_{mc} se puede establecer como:

$$k_{mc} = \frac{\Delta r_i}{\Delta r_{mej,i}} \frac{m_i}{(\Delta t)^2} \quad (7-58)$$

Considerando que $\Delta r_{mej,i}$ corresponde a la distancia desde una partícula hasta el mejor punto encontrado y Δr_i es el avance de esta partícula, entonces, se debe tener $\Delta r_i < \Delta r_{mej,i}$ para lograr una adecuada convergencia. Tomando $\Delta r_i / \Delta r_{mej,i} \in [0, 1)$ se tiene:

$$k_{mc} \leq \frac{m_i}{(\Delta t)^2} \quad (7-59)$$

La anterior expresión permite establecer el parámetro k_{mc} considerando la relación entre el avance producido para una partícula y la distancia entre esta y la mejor posición encontrada.

Parámetro en la fase de dispersión

En este caso el parámetro k_{md} se considera de tal forma que la magnitud de fuerza normal producida por U_{mej} sea comparable con la magnitud de fuerza normal producida por la interacción entre partículas la cual es $F_{intN} = a_d R$, donde R corresponde al radio de giro del enjambre. Aunque R cambia en la medida que se incrementa la energía, un caso extremo se tiene para el radio de la máxima dispersión R_D . Considerando lo anterior se toma un factor de escala $\gamma_{md} \in \mathbb{R}^+$ de tal forma que se tiene:

$$k_{md} = \gamma_{md} a_d R_D \quad (7-60)$$

7.7.5. Parámetros asociados a la función objetivo

Como se menciono anteriormente para el factor de ponderación de la función objetivo se consideran los procesos de convergencia y dispersión por separado.

Parámetro de la función objetivo en la fase de convergencia

Dadas las restricciones planteadas para v_{\min} y v_{\max} en la fase de convergencia y la relación entre la fuerza dada por la mejor posición encontrada y la fuerza asociada a la función objetivo donde $|\vec{F}_{obj,i}| \leq |\vec{F}_{mej,i}|$, entonces, el efecto de la función objetivo está dada principalmente para la partícula localizada en el mejor punto encontrado.

El factor de ponderación de la función objetivo k_{oc} puede ser ajustado por el usuario observando los resultados en la etapa de convergencia. Cuando se aprecia la presencia de incrementos cortos de energía para lograr la convergencia a un mínimo local esto implica que el efecto de la función objetivo es bajo por lo cual se puede incrementar el parámetro k_{oc} .

Parámetro de la función objetivo en la fase de dispersión

En el caso de tener la máxima dispersión del enjambre se considera que la magnitud de la fuerza normal producida por la función objetivo F_{UN} debe ser comparable con la magnitud de fuerza normal producida por la interacción entre partículas, por lo cual, se propone $F_{UN} = \gamma_{od}F_{intN}$ con $\gamma_{od} \in \mathbb{R}^+$, la cual es una constante que pondera el valor de fuerza normal deseada. Considerando un caso donde se presenta la máxima dispersión con radio R_D , entonces, el parámetro asociado a la función objetivo en la fase de dispersión se puede calcular como:

$$k_{od} = \gamma_{od}a_dR_D \quad (7-61)$$

7.7.6. Factor de interacción

Una restricción del factor de interacción en la fase de convergencia se establece de tal manera que la velocidad producida no sea mayor que la máxima establecida. En la fase de dispersión se analiza el factor de interacción de tal forma que se pueda tener una adecuada dispersión de las partículas en el espacio de búsqueda.

Factor de interacción en la fase de convergencia

En este caso se busca acotar el valor máximo producido por la fuerza de interacción de tal forma que para la máxima diferencia entre una partícula y el punto medio del enjambre se genere una velocidad inferior a v_{\max} . Para esto se considera un caso limite donde el punto medio del enjambre se encuentra en un extremo del espacio de búsqueda y una partícula está localizada en el otro extremo de tal forma que se tiene una separación igual a $\text{range}(\Omega)$, es decir, $2R_\Omega$, considerando esta situación se tiene:

$$\frac{a_c 2R_\Omega \Delta t}{m_i} \leq v_{\max}$$

al despejar a_c se establece una restricción adicional para el parámetro asociado al potencial de interacción.

$$a_c \leq \frac{v_{\text{máx}} m_i}{2R_\Omega \Delta t} \quad (7-62)$$

Factor de interacción en la fase de dispersión

En este caso se determina el factor asociado a la fuerza de interacción de tal forma que se pueda tener una buena dispersión de las partículas en el espacio de búsqueda antes de finalizar el algoritmo. La anterior consideración se realiza por tener un valor máximo de velocidad el cual debe estar relacionado con la máxima dispersión deseada. En primer lugar, del análisis realizado al modelo se tiene que la estimación del radio del enjambre corresponde a:

$$a_d R^2 + F_{N_{Tot}} R - m_i v^2 = 0 \quad (7-63)$$

Tomando el caso donde una velocidad $v_{\text{máx}}$ tiene asociado un radio máximo de dispersión R_D , entonces, el factor de interacción a_d se puede determinar como:

$$a_d = \frac{m_i v_{\text{máx}}^2 - F_{N_{Tot}} R_D}{R_D^2} \quad (7-64)$$

Para garantizar la dispersión del enjambre fuera del espacio de búsqueda el radio máximo que se espera tener del enjambre se puede tomar como:

$$R_D \geq R_\Omega \quad (7-65)$$

donde $R_\Omega = \text{range}(\Omega)/2$. Adicionalmente, de las consideraciones realizadas para el potencial asociado a la mejor partícula y para la función objetivo, se tiene $F_{N_{Tot}} = \gamma_{od} a_d R_D + \gamma_{md} a_d R_D$, por lo cual, el parámetro para la fuerza de interacción se puede estimar como:

$$a_d = \frac{m_i v_{\text{máx}}^2}{(1 + \gamma_{od} + \gamma_{md}) R_D^2} \quad (7-66)$$

7.7.7. Factor de propulsión

Considerando el análisis de estabilidad para la implementación del modelo en tiempo discreto se tiene la restricción 5-43, de tal forma que es posible determinar un valor máximo de energía a suministrar:

$$\alpha_{\text{máx}} \leq \frac{m_i}{\Delta t} \quad (7-67)$$

Por otro lado, según el análisis de energía el valor máximo de la velocidad $v_{\text{máx}}$ implica un valor máximo para el factor de propulsión $\alpha_{\text{máx}}$ de tal forma que se puede determinar el valor β_0 como se muestra en la ecuación 7-68.

$$\beta_0 = \frac{\alpha_{\text{máx}}}{v_{\text{máx}}^2} \quad (7-68)$$

7.7.8. Factor de incremento de energía

Considerando que en la estrategia propuesta se realizan incrementos periódicos de energía para cubrir el espacio de búsqueda, se debe garantizar que el incremento más pequeño se pueda realizar en la respectiva iteración sin llegar a sobrepasarlo. Como es de apreciar en la ecuación 5-34 existe una relación directa entre el factor de propulsión α y el radio de giro R de tal forma que para lograr un determinado radio de giro se debe garantizar el respectivo valor de α asociado. De la ecuación 5-34 se puede establecer el valor de α para un determinado radio de giro R de la forma:

$$\alpha = \frac{\beta_0}{m_i}(a_d R^2 + F_{N_{Tot}} R) \quad (7-69)$$

Para realizar los incrementos de energía se divide R_D en un cierto número de pasos N_α , es decir, se realizan incrementos cada $R_\alpha = R_D/N_\alpha$. Considerando lo anterior se pueden calcular los respectivos valores de α_k tomando $R_k = kR_\alpha$ con $k = 1, 2, \dots, N_\alpha$. Empleando la ecuación 7-69 se tiene:

$$\alpha_k = \frac{\beta_0}{m_i}(a_d k^2 R_\alpha^2 + F_{N_{Tot}} k R_\alpha) \quad (7-70)$$

Tomando $F_{N_{Tot}} = (\gamma_{od} + \gamma_{md})a_d R_D$ se obtiene la expresión:

$$\alpha_k = \frac{\beta_0}{m_i} \left(a_d k^2 \left(\frac{R_D}{N_\alpha} \right)^2 + (\gamma_{od} + \gamma_{md}) a_d k \frac{R_D^2}{N_\alpha} \right) \quad (7-71)$$

Calculando $\Delta\alpha_k = \alpha_k - \alpha_{k-1}$ el cual corresponde al incremento de energía para el respectivo valor de k se tiene:

$$\Delta\alpha_k = \frac{\beta_0}{m_i} (a_d(2k-1)R_\alpha^2 + F_{N_{Tot}} R_\alpha) \quad (7-72)$$

En la anterior expresión el incremento de energía más pequeño se logra para $k = 1$ obteniendo:

$$\Delta\alpha_1 = \frac{\beta_0}{m_i} (a_d R_\alpha^2 + F_{N_{Tot}} R_\alpha) \quad (7-73)$$

Por otro lado, el incremento de α en una iteración es $\tau_c \Delta t$, entonces, para garantizar que se cumpla con el incremento más pequeño se tiene que $\tau_c \Delta t \leq \Delta\alpha_1$, por lo tanto:

$$\tau_c \leq \frac{\beta_0}{m_i \Delta t} (a_d R_\alpha^2 + F_{N_{Tot}} R_\alpha)$$

reemplazando $F_{N_{Tot}}$ y R_α se tiene una expresión que permite establecer el límite máximo para τ_c conociendo el número de incrementos de energía a realizar N_α .

$$\tau_c \leq \frac{\beta_0}{m_i \Delta t} \left(a_d \left(\frac{R_D}{N_\alpha} \right)^2 + (\gamma_{od} + \gamma_{md}) a_d \frac{R_D^2}{N_\alpha} \right) \quad (7-74)$$

Considerando un caso extremo donde las partículas escapan del mínimo local con velocidad máxima realizando un desplazamiento lineal igual al radio máximo R_D se puede estimar el número mínimo de veces que se espera dividir R_D de la siguiente forma:

$$N_\alpha = \frac{R_D}{\Delta r_{\text{máx}}} \quad (7-75)$$

entonces, se tiene que $R_\alpha = \Delta r_{\text{máx}}$, por lo cual, finalmente la restricción para τ_c es:

$$\tau_c \leq \frac{\beta_0}{m_i \Delta t} (a_d \Delta r_{\text{máx}}^2 + (\gamma_{od} + \gamma_{md}) a_d R_D \Delta r_{\text{máx}}) \quad (7-76)$$

La ecuación 7-75 no implica que el número de veces a realizar los incrementos de energía debe ser mayor que N_α . Esta expresión permite determinar un limite superior de τ_c considerando un desplazamiento lineal de las partículas con velocidad máxima para un caso extremo, por lo tanto, este parámetro se debe escoger con suficiente holgura para cumplir la restricción planteada. Por otra parte, al tener un valor mayor que el calculado con la ecuación 7-75 se presentan incrementos más pequeños de energía lo cual permite una mejor exploración del espacio de búsqueda y el cumplimiento de la restricción para τ_c .

Estimación de K_V

La estrategia propuesta para lograr una buena dispersión de las partículas consiste en efectuar incrementos progresivos de energía con ciertos tiempos de espera mientras las partículas realizan un determinado número de vueltas N_V . Considerando que las partículas no adquieren la velocidad máxima de forma instantánea, entonces, el tiempo de espera debe ser mayor al estimado. Para establecer el tiempo de espera se tiene la relación entre velocidad angular y lineal:

$$w = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}$$

donde R es el radio de giro de la partícula. Realizando el cálculo para un giro considerando la magnitud de la velocidad constante se tiene:

$$\int_0^{2\pi} d\theta = \int_0^{T_R} \frac{v}{R} dt$$

por lo cual:

$$T_V = \frac{2\pi R}{v}$$

Con N_V el número de vueltas que se espera realizar y $T_V = K_V \Delta t$, entonces, se tiene:

$$K_V = N_V \frac{2\pi R}{v \Delta t} \quad (7-77)$$

Este valor depende del cálculo realizado para v y R en la respectiva iteración, por lo cual, un primer enfoque consiste en emplear:

$$v = \sqrt{\frac{\alpha_k}{\beta_0}}$$

$$R = \frac{-F_{N_{Tot}} + \sqrt{F_{N_{Tot}}^2 + 4a_d m_i v^2}}{2a_d}$$

donde $F_{N_{Tot}} = (\gamma_{od} + \gamma_{md}) a_d R_D$. Realizando los respectivos reemplazos se tiene:

$$K_V = N_V \frac{2\pi}{\Delta t} \sqrt{\frac{\beta_0}{\alpha_k}} \left(\frac{-(\gamma_{od} + \gamma_{md}) a_d R_D + \sqrt{((\gamma_{od} + \gamma_{md}) a_d R_D)^2 + 4a_d m_i (\alpha_k / \beta_0)}}{2a_d} \right) \quad (7-78)$$

Una alternativa para establecer K_V consiste en considerar $F_{N_{Tot}} = 0$ de la ecuación 7-63 de tal forma que se puede estimar un radio R_e mayor que R de la forma:

$$R_e = v \sqrt{\frac{m_i}{a_d}} \quad (7-79)$$

por lo tanto:

$$K_{V_e} = N_V \frac{2\pi}{\Delta t} \sqrt{\frac{m_i}{a_d}} \quad (7-80)$$

Como es de apreciar con la anterior suposición se tiene $K_{V_e} > K_V$.

Estimación de K_α

En este caso se determina el número de iteraciones necesarias para realizar los respectivos incrementos de energía $\Delta\alpha_k$. De la ecuación 7-72 y teniendo T_k correspondiente al tiempo requerido para realizar el respectivo incremento de energía $\Delta\alpha_k = \tau_c T_k$, entonces, se puede establecer el número de iteraciones K_{α_k} que se necesitan para lograr el incremento de energía. Este número de iteraciones se puede calcular como $K_{\alpha_k} = T_k/\Delta t$, por lo cual:

$$K_{\alpha_k} = \frac{\beta_0}{m_i \tau_c \Delta t} (a_d(2k-1)R_\alpha^2 + F_{N_{Tot}} R_\alpha) \quad (7-81)$$

Reemplazando $F_{N_{Tot}}$ y R_α se tiene:

$$K_{\alpha_k} = \frac{\beta_0}{m_i \tau_c \Delta t} \left(a_d(2k-1) \left(\frac{R_D}{N_\alpha} \right)^2 + (\gamma_{od} + \gamma_{md}) a_d \frac{R_D^2}{N_\alpha} \right) \quad (7-82)$$

7.8. Proceso para la estimación de parámetros

Los parámetros involucrados en el algoritmo se consideran de tres tipos: parámetros libres de selección, parámetros libres con criterio de selección y parámetros dependientes de los anteriores.

De los parámetros libres de selección se tiene:

- N : Número de partículas.
- ρ : Criterio de parada considerando el número de partículas en el espacio de búsqueda.
- Δt : Incremento de tiempo.
- m_i : Masa de una partícula. En esta propuesta todas las partículas se consideran de la misma masa.
- k_{oc} : Factor de escala de la función objetivo en la fase de convergencia.

La recomendación para los anteriores parámetros consiste en tomarlos como la unidad o basados en simulaciones previas del modelo.

Los parámetros que se puede seleccionar basados en un criterio son:

- $\lambda_{\text{máx}}$: Factor de escala del espacio de búsqueda para seleccionar $\Delta r_{\text{máx}}$. Este parámetro se escoge considerando el avance máximo esperado para la partícula.
- $\lambda_{\text{mín}}$: Parámetro de escala para el espacio de búsqueda el cual se emplea para establecer $\Delta r_{\text{mín}}$. En este caso el parámetro se establece considerando el avance mínimo esperado por la partícula.
- γ_{od} : Factor de ponderación de la función objetivo en la fase de dispersión. Este se determina considerando el efecto que se quiere tener la función objetivo en relación a la fuerza de interacción (para la máxima dispersión).
- γ_{md} : Término de ponderación del potencial asociado al mejor punto encontrado para la fase de dispersión. Este parámetro se establece considerando el efecto del potencial asociado al mejor punto en relación a la fuerza de interacción cuando se tiene la máxima dispersión.
- η : Relación entre la magnitud de la función objetivo y el potencial asociado el mejor punto encontrado. Este parámetro se determina considerando el efecto que se espera tener de la función objetivo.
- N_V : Número de vueltas a realizar por parte del enjambre. Este parámetro se selecciona considerando el número de vueltas que se espera tener para el enjambre después de incrementar la energía.
- N_α : Número de veces que se realizan los incremento de energía. Considerando la situación donde $R_\alpha = \Delta r_{\text{máx}}$ (ver ecuación 7-75), se puede tomar mayor o menor que el valor calculado en este caso.

De los análisis realizados al modelo como también bajo otras relaciones se pueden establecer parámetros directamente con ecuaciones. Los parámetros que están dados por igualdades son:

- N_e : Número de partículas consideradas en el criterio de parada. Se determina mediante 7-40.
- R_Ω : Radio de giro para el espacio de búsqueda. Se encuentra dado por la ecuación 7-43.
- $\Delta r_{\text{máx}}, \Delta r_{\text{mín}}$: Avance máximo y mínimo que se espera tener de una partícula. Estos parámetros se pueden establecer mediante las ecuaciones 7-44 y 7-45.
- $v_{\text{máx}}, v_{\text{mín}}$: Velocidad máxima y mínima de una partícula. Estos parámetros se determinan mediante las ecuaciones 7-46 y 7-47.
- $F_{\text{máx}}, F_{\text{mín}}$: Magnitud máxima y mínima de la fuerza producida por un potencial sobre una partícula. Estos parámetros se determinan mediante las ecuaciones 7-27 y 7-28.
- a_d : Factor de interacción en la fase de dispersión, este parámetro se establece mediante la ecuación 7-66.
- $\alpha_{\text{máx}}$: Valor máximo del factor de propulsión. Este se puede calcular con la relación 7-67.
- β_0 : Parámetro de frenado en la fase de dispersión el cual se puede determinar mediante la expresión 7-68.

- k_{md} : Factor de escala del potencial asociado el mejor punto encontrado en la fase de dispersión. Dado por la ecuación 7-60.
- k_{od} : Factor de escala de la función objetivo en la fase de dispersión (ecuación 7-61).
- α_k : Valor de α para el respectivo incremento $k = 1, 2, \dots, N_\alpha$, se encuentra dado por la ecuación 7-71.
- K_{α_k} : Número de iteraciones a realizar en cada incremento de energía, se calcula mediante la ecuación 7-82.
- K_V : Número de iteraciones a realizar mientras se espera que las partículas se dispersan de forma circular. Para este parámetro se tienen las opciones dadas por las ecuaciones 7-78 y 7-80.

Los otros parámetros se pueden establecer con las consideraciones de la anterior sección donde se tienen restricciones dadas por desigualdades. Como es de apreciar un parámetro puede estar sujeto a varias desigualdades, por lo cual, para su cálculo se debe garantizar el cumplimiento de estas. Los parámetros que se encuentran dados por desiguales son:

- R_{con} : Radio de convergencia el cual se puede estimar con la restricción 7-56. Para efectos de selección se puede tomar como igualdad la restricción asociada.
- R_D : Radio máximo de dispersión. Este parámetro se considera con la desigualdad 7-65, para efectos prácticos se puede tomar como un 20% mayor que R_Ω .
- τ_c : Parámetro asociado a la tasa de incremento de energía. Este parámetro se puede estimar mediante la desigualdad 7-76, en el caso de considerar un valor de N_α mayor que el estimado con $R_\alpha = \Delta r_{m\acute{a}x}$ se debe emplear la desigualdad 7-74. Para la selección se puede considerar el cumplimiento de la desigualdad 10 veces menor.
- k_{mc} : Término de escala en la fase de convergencia del potencial asociado al mejor punto encontrado, este valor se establece mediante el cumplimiento de las desigualdades 7-52 y 7-59. Para efectos de selección se considera el cumplimiento con un factor de escala de 0,5.
- a_c : Factor de interacción en la fase de convergencia, este parámetro se encuentra sujeto al cumplimiento de las restricciones 7-55 y 7-62. Para la selección de este parámetro se puede considerar el valor calculado en la fase de dispersión bajo el cumplimiento de las respectivas restricciones.

Para realizar el cálculo de parámetros se debe tener presente la dependencia entre estos, por lo cual en la tabla 7-1 se muestra la relación entre variables para su cálculo. También es necesario tener presente que los parámetros de libre selección son: N , ρ , Δt , m_i , η , k_{oc} , $\lambda_{m\acute{a}x}$, $\lambda_{m\acute{m}n}$, γ_{od} , γ_{md} y N_V . En la tabla 7-1 la variable k corresponde al respectivo incremento de energía a realizar. Esta variable se actualiza en la medida que se realizan los incrementos de energía. Al respecto se puede apreciar que α_k es dependiente de k y por lo tanto de N_α . Lo anterior implica que α_k no es una variable que se determine por el usuario directamente ya que esta se ajusta en la medida que se ejecuta el algoritmo.

Variable	Dependencia	Relación
N_e	ρ, N	7-40
R_Ω	Ω	7-43
$\Delta r_{\text{máx}}$	$\lambda_{\text{máx}}$	7-44
$\Delta r_{\text{mín}}$	$\lambda_{\text{mín}}$	7-45
$v_{\text{máx}}$	$\Delta r_{\text{máx}}, \Delta t$	7-46
$v_{\text{mín}}$	$\Delta r_{\text{mín}}, \Delta t$	7-47
$F_{\text{máx}}$	$v_{\text{máx}}, m_i, \Delta t$	7-27
$F_{\text{mín}}$	$v_{\text{mín}}, m_i, \Delta t$	7-28
$\alpha_{\text{máx}}$	$\Delta t, m_i$	7-67
β_0	$v_{\text{máx}}, \alpha_{\text{máx}}$	7-68
R_D	R_Ω	7-65
R_{con}	$v_{\text{mín}}, \Delta t$	7-56
a_d	$m_i, v_{\text{máx}}, \gamma_{od}, \gamma_{md}, R_D$	7-66
a_c	$v_{\text{mín}}, m_i, R_{con}, \Delta t$	7-55
	$v_{\text{máx}}, m_i, R_\Omega, \Delta t$	7-62
k_{mc}	$m_i, v_{\text{mín}}, R_{con}, \Delta t$	7-52
	$m_i, \Delta t$	7-59
k_{md}	γ_{md}, a_d, R_D	7-60
k_{od}	γ_{od}, a_d, R_D	7-61
N_α	$R_D, \Delta r_{\text{máx}}$	7-75
τ_c	$\beta_0, m_i, \Delta t, a_d, R_D, N_\alpha, \gamma_{od}, \gamma_{md}$	7-74
	$\beta_0, m_i, \Delta t, a_d, R_D, \Delta r_{\text{máx}}, \gamma_{od}, \gamma_{md}$	7-76
α_k	$\beta_0, m_i, a_d, \gamma_{od}, \gamma_{md}, R_D, N_\alpha, k$	7-71
K_{α_k}	$\beta_0, m_i, \tau_c, \Delta t, a_d, R_D, N_\alpha, \gamma_{od}, \gamma_{md}, k$	7-82
K_V	$N_V, \Delta t, \beta_0, \alpha_k, \gamma_{od}, \gamma_{md}, a_d, R_D, m_i$	7-78
	$N_V, \Delta t, m_i, a_d$	7-80

Tabla 7-1.: Dependencia de las variables para su cálculo.

8. Resultados experimentales

8.1. Introducción

En este capítulo se presentan los resultados experimentales obtenidos para el algoritmo propuesto empleando diferentes funciones de prueba. Un primer resultado consiste en el comportamiento dinámico del algoritmo lo cual se presenta de forma cualitativa mediante gráficas que muestran las posiciones y velocidades del enjambre. El segundo resultado a considerar consiste en una comparación estadística del desempeño obtenido para diferentes parámetros, como también la comparación con varias configuraciones del algoritmo PSO estándar basado en inercia.

Los resultados cualitativos permiten apreciar que el comportamiento del enjambre se encuentra dentro de los límites estimados según los análisis y simulaciones realizadas del modelo. De los resultados cuantitativos se puede establecer que el algoritmo VPSO resulta ser competitivo en relación con el algoritmo PSO, es decir, que en la mayoría de experimentos se tiene un desempeño favorable del algoritmo VPSO.

De los diferentes aspectos a considerar sobre los experimentos se tiene el número de dimensiones, la inicialización de las partículas sobre el espacio de búsqueda y las diferentes configuraciones de los algoritmos PSO y VPSO. Considerando los anteriores aspectos se realiza un conjunto de experimentos los cuales permiten observar las características del algoritmo propuesto de forma estadística.

8.2. Procedimiento para el análisis estadístico de resultados

La metodología empleada para el análisis estadístico se describe en el anexo A la cual consiste inicialmente en pruebas de normalidad y homocedasticidad (igualdad de varianzas) con las cuales se determina la prueba de hipótesis a realizar para comparar los resultados obtenidos en los diferentes experimentos [20], [113]. La comparación entre los diferentes grupos de parámetros se realiza considerando el valor de la función objetivo. Las tablas con los resultados obtenidos se pueden consultar en el anexo B.

Con el fin de establecer el número de corridas que se debe ejecutar el algoritmo se toma como referencia los trabajos presentados en [31], [114] y [115] donde se realizan 50 ejecuciones para cada experimento.

Para las pruebas de normalidad, homocedasticidad y comparación entre grupos de datos se toma un nivel de significancia de 0,05 lo cual corresponde a un error del 5 % de aceptar la hipótesis nula.

8.3. Funciones de prueba

Las funciones de prueba consideradas son principalmente para dos dimensiones y diez dimensiones, en particular se emplean funciones de dos dimensiones para observar las características cualitativas

del algoritmo propuesto.

Un aspecto importante relacionado con las funciones de prueba consiste en la inicialización de las partículas sobre el espacio de búsqueda. En la mayoría de funciones de prueba el valor óptimo se encuentra en el centro del espacio de búsqueda, sin embargo, en problemas de la vida real esto no se puede garantizar [115].

Los experimentos y las funciones objetivo se establecen considerando resultados de investigaciones realizadas sobre el proceso de optimización con algoritmos PSO; al respecto según [26], [115] y [116] los algoritmos PSO pueden tener un mejor desempeño cuando el óptimo global de la función objetivo se encuentra en el centro del espacio donde el enjambre es inicializado.

Un método para disminuir el efecto que tiene el mínimo global en el centro del espacio de búsqueda consiste en desplazar (*shift*) la función objetivo. Esto también se conoce como el método de desplazamiento central (*center offset*) [116].

Otro método propuesto para reducir este sesgo consiste en la inicialización de la población dentro de un subespacio que no contiene al óptimo global. Este método es denominado región escalada (*region scaling*) [117]. Al respecto se han realizado otras investigaciones tal como se presenta en [115] donde se muestra el efecto que tiene inicializar el enjambre de partículas de forma asimétrica sobre el espacio de búsqueda.

8.3.1. Funciones de prueba en dos dimensiones

En este caso se toman las funciones de prueba presentadas en [59] y la función propuesta por Kevin Passino en [36]. En la tabla 8-1 se pueden apreciar las respectivas expresiones para las funciones de prueba como también los límites de la región factible de búsqueda.

Nombre	Dim	Limites	Ecuación
Parabolic	2	$[-5, 5]$	$U_{obj,1} = x^2 + y^2$
Passino	2	$[-5, 5]$	$U_{obj,2} = 0,05(x^2 + y^2) + \sum_{j=1}^{10} a_{3,j} e^{-a_{4,j}((x-a_{1,j})^2 + (y-a_{2,j})^2)}$
Peaks	2	$[-5, 5]$	$U_{obj,3} = 3(1-x)^2 e^{-(x^2 + (y+1)^2)} - 10\left(\frac{x}{5} - x^3 - y^5\right) e^{-(x^2 + y^2)} - \frac{1}{3} e^{-((x+1)^2 + y^2)}$
Himmelblaus	2	$[-5, 5]$	$U_{obj,4} = -0,01(200 - (x^2 + y^2 - 11)^2 - (x + y^2 - 7)^2)$
Equal Peaks	2	$[-5, 5]$	$U_{obj,5} = \cos(x)^2 + \sin(y)^2$
Rastrigin	2	$[-5, 5]$	$U_{obj,6} = 20 + (x^2 - 10 \cos(2\pi x) + y^2 - 10 \cos(2\pi y))$
Circles	2	$[-5, 5]$	$U_{obj,7} = (x^2 + y^2)^{0,25}((\sin(50(x^2 + y^2)^{0,1}))^2 + 1,0)$
Schaffer	2	$[-5, 5]$	$U_{obj,8} = 0,5 + \frac{(\sin(\sqrt{(x^2 + y^2)}))^2 - 0,5}{(1 + 0,1(x^2 + y^2))^2}$

Tabla 8-1.: Funciones de prueba en 2D.

Los respectivos coeficientes para la función J_2 son:

$$a_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & 1,7 & 3,3 & -1,7 & -3,3 & 0 & -2,3 & 2,0 & 3,3 & -3,3 \\ 1,7 & 0 & -1,7 & -1,7 & -1,7 & -3,3 & 3,3 & 3,3 & 0,3 & -0,3 \\ 5 & -2 & 3 & 2 & -2 & -4 & -2 & -2 & 2 & 2 \\ 0,8 & 0,64 & 0,64 & 0,8 & 4 & 0,8 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Las características asociadas a las funciones de prueba se pueden apreciar en la tabla 8-2. En esta tabla se puede observar el punto óptimo como también el valor mínimo.

Nombre	Dim	Multimodal	Punto óptimo	Limites	Valor óptimo
Parabolic	2	No	(0, 0)	[-5, 5]	0
Passino	2	Si	(0,0113, -3,2597)	[-5, 5]	-3,4354
Peaks	2	Si	(0,2282, -1,6199)	[-5, 5]	-6,4169
Himmelblaus	2	Si	(-1,5616, 2,9260) (2,5616, 2,1068) (2,5615, -2,1068) (-1,5616, -2,9260)	[-5, 5]	-2
Equal Peaks	2	Si	$(\pi/2 + n\pi, m\pi)$	[-5, 5]	0
Rastrigin	2	Si	(0, 0)	[-5, 5]	0
Circles	2	Si	(0, 0)	[-5, 5]	0
Schaffer	2	Si	(0, 0)	[-5, 5]	0

Tabla 8-2.: Características de las funciones de prueba en 2D.

La representación gráfica de las funciones de prueba empleadas se puede apreciar en la figura 8-1.

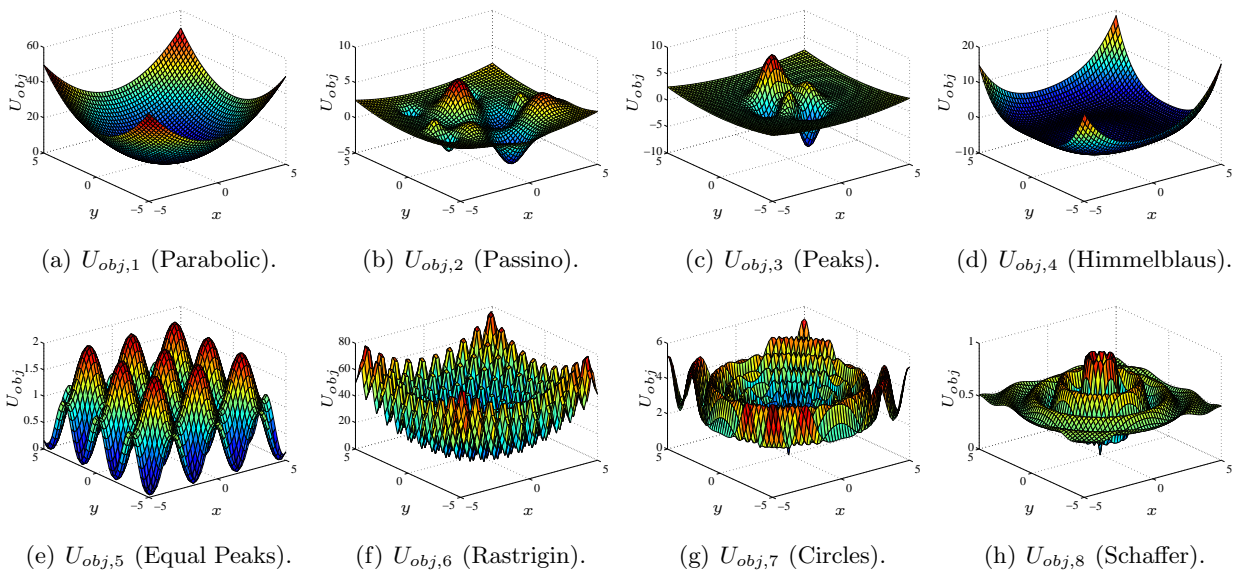


Figura 8-1.: Representación gráfica de las funciones objetivo en 2D.

Como es de apreciar en la tabla **8-2** y en la figura **8-1** la función objetivo $U_{obj,1}$ es monomodal, es decir presenta solo un valor mínimo, por su parte, las otras funciones de prueba tienen diferentes valores mínimos, logrando así una buena variedad de casos experimentales en dos dimensiones.

En particular se observa que las funciones de prueba $U_{obj,7}$ y $U_{obj,8}$ presentan valores mínimos con simetría circular siendo esta característica un caso especial a considerar.

Por otra parte, también es de apreciar que la función de prueba $U_{obj,4}$ presenta cuatro mínimos con el mismo valor. De esta misma forma la función $U_{obj,3}$ tiene varios máximos y mínimos localizados de forma periódica.

8.3.2. Funciones de prueba para varias dimensiones

Las funciones de prueba en varias dimensiones se pueden observar en la tabla **8-3** las cuales fueron seleccionadas considerando lo reportado en [26], [29], [30] y [115] donde se emplean para realizar pruebas con algoritmos basados en enjambres de partículas.

Las características de las funciones de prueba de varias dimensiones se pueden apreciar en la tabla **8-4**. En esta tabla se observa que las funciones empleadas presentan diferentes límites del espacio de búsqueda. También es de notar que se tiene una función monomodal y siete funciones de prueba multimodales.

Nombre	Dim	Límites	Ecuación
Spherical	D	$[-100, 100]^D$	$f_1(\vec{x}) = \sum_{i=1}^D x_i^2$
Levy	D	$[-10, 10]^D$	$f_2(\vec{x}) = \sin^2(\pi w_1) + \sum_{i=1}^{D-1} (w_i - 1)^2 [1 + 10 \sin^2(\pi w_i + 1)] + (w_D - 1)^2 [1 + \sin^2(2\pi w_D)]$, donde, $w_i = 1 + \frac{x_i - 1}{4}$
Styblinski Tang	D	$[-5, 12, 5, 12]^D$	$f_3(\vec{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^D (x_i^4 - 16x_i^2 + 5x_i)$
Rosenbrock Rotate	D	$[-30, 30]^D$	$f_4(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{D-1} [100(x_{i+1} + x_i^2)^2 + (x_i + 1)^2]^2$
Griewank	D	$[-50, 50]^D$	$f_5(\vec{x}) = 1 + \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^D x_i^2 - \prod_{i=1}^D \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right)$
Rastrigin	D	$[-5, 12, 5, 12]^D$	$f_6(\vec{x}) = \sum_{i=1}^D (x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i) + 10)$
Schaffer	D	$[-30, 30]^D$	$f_7(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{D-1} (x_i^2 + x_{i+1}^2)^{0,25} [\sin^2(50(x_i^2 + x_{i+1}^2)^{0,1}) + 1]$
Ackley	D	$[-30, 30]^D$	$f_8(\vec{x}) = e + 20 - 20 \exp\left(-0,2 \sqrt{\frac{1}{D} \sum_{i=1}^D x_i^D}\right) - \exp\left(\frac{1}{D} \sum_{i=1}^D \cos(2\pi x_i)\right)$

Tabla 8-3.: Funciones de prueba generalizadas.

Como es de notar en la tabla **8-4**, las funciones de prueba f_2 , f_3 y f_4 presentan el valor mínimo localizado en punto diferente de cero, mientras que para el resto de las funciones de prueba el

mínimo global se encuentra localizado en cero.

Nombre	Dim	Multi-modal	Punto óptimo	Limites	Valor óptimo
Spherical	D	No	$(0,0)^D$	$[-100, 100]^D$	0
Levy	D	Si	$(1,0)^D$	$[-10, 10]^D$	0
Styblinski Tang	D	Si	$(-2,903534)^D$	$[-5,12, 5,12]^D$	$-39,16599D$
Rosenbrock Rotate	D	Si	$(-1,0)^D$	$[-30, 30]^D$	0
Griewank	D	Si	$(0,0)^D$	$[-50, 50]^D$	0
Rastrigin	D	Si	$(0,0)^D$	$[-5,12, 5,12]^D$	0
Schaffer	D	Si	$(0,0)^D$	$[-30, 30]^D$	0
Ackley	D	Si	$(0,0)^D$	$[-30, 30]^D$	0

Tabla 8-4.: Características de las funciones de prueba generalizadas.

La representación gráfica en dos dimensiones de las funciones de prueba empleadas se puede apreciar en la figura 8-2.

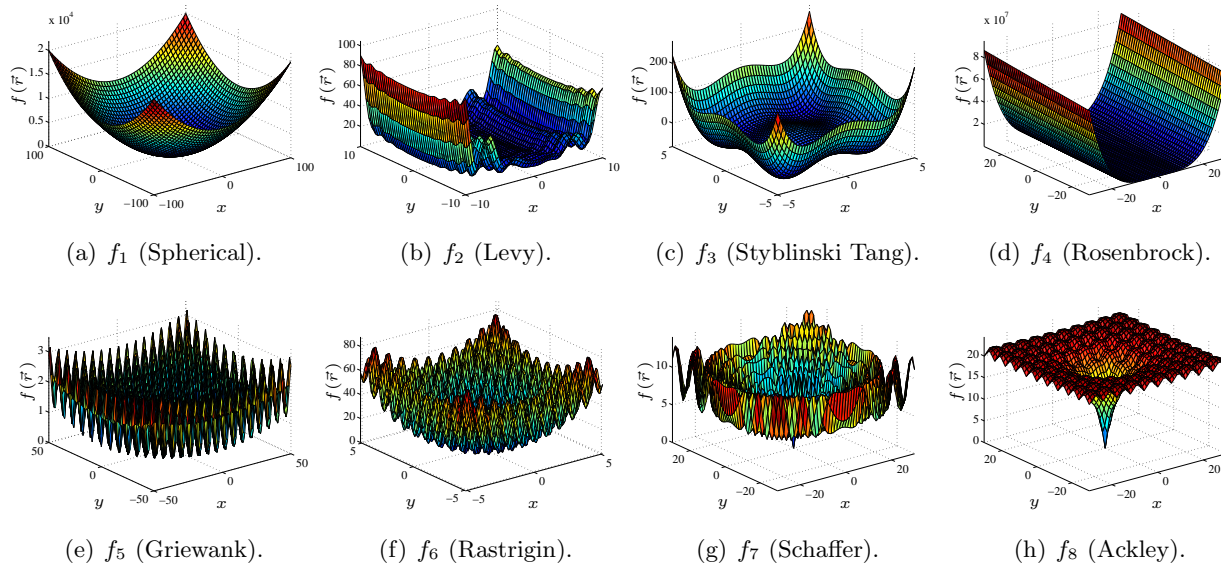


Figura 8-2.: Representación gráfica en 2D de las funciones objetivo de la tabla 8-3.

8.3.3. Algoritmos PSO de referencia

Como referentes para establecer el desempeño del algoritmo propuesto se toman las versiones más conocidas del algoritmo PSO las cuales también son comúnmente empleadas para efectos de comparación [26], [29], [118]. Estas versiones son las dos propuestas realizadas por Ioan Cristian Trelea en [88] y el algoritmo PSO con factor de restricción propuesto por Maurice Clerc y James Kennedy en [62].

Los parámetros empleados para los algoritmos PSO considerados como referentes de comparación son:

- PSO-T1 (Configuración 1 propuesta por Trelea): $w = 0,600$, $\alpha_p = 1,7$, $\alpha_g = 1,7$.
- PSO-T2 (Configuración 2 propuesta por Trelea): $w = 0,729$, $\alpha_p = 1,494$, $\alpha_g = 1,494$.
- PSO-R (PSO con factor de restricción): $\chi = 0,72984$, $\alpha_p = 2,05$, $\alpha_g = 2,05$.

8.4. Configuración de experimentos

Los experimentos se establecieron considerando en primer lugar las funciones objetivo de prueba propuestas y la inicialización del enjambre en el espacio de búsqueda según lo presentado en [26], [115], [116] y [117]. En este caso se consideran funciones de prueba en dos y diez dimensiones con inicialización de las partículas de forma global y local. La inicialización global consiste en localizar las partículas de forma aleatoria sobre todo el espacio de búsqueda. Por su parte, la inicialización local consiste en restringir la posición de las partículas para la primera iteración en un subespacio alejado del mínimo global. Siguiendo las recomendaciones de [117] se propone emplear una forma de inicialización como la mostrada en la figura 8-3. Para este tipo de inicialización en dos dimensiones se tienen los parámetros $(L_x \pm c_x, L_y \pm c_y)$. Cuando se tienen varias dimensiones y se considera que el espacio de búsqueda es simétrico (los mismos límites en todas las dimensiones), entonces se puede expresar como (L, c) .

Para los experimentos realizados se toma $L = 0,8\text{range}(\Omega)/2$ y $c = 0,2\text{range}(\Omega)/2$ es decir una separación del punto medio correspondiente al 80% de R_Ω y un subespacio con un ancho del 40% de R_Ω .

Con la inicialización de tipo local se busca reducir el sesgo que se produce cuando las funciones de prueba presentan el mínimo global en el centro del espacio de búsqueda y en segundo lugar observar la capacidad que tiene el algoritmo VPSO para escapar de mínimos locales.

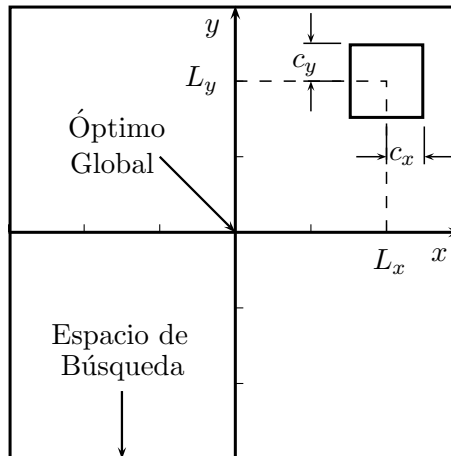


Figura 8-3.: Esquema de la inicialización local de las partículas en dos dimensiones.

El segundo aspecto a considerar consiste en la configuración de parámetros de los algoritmos PSO y VPSO en este caso se tiene para el algoritmo PSO las dos configuraciones propuestas por Trelea y la configuración empleando el factor de restricción. Por su parte, para el algoritmo VPSO se consideran cuatro posibles configuraciones donde se modifica el factor de propulsión, las tres primeras variando el valor de R_α y la cuarta correspondiente a la propuesta adaptativa. Adicionalmente se considera la

versión determinística y estocástica del algoritmo VPSO. Las configuraciones del algoritmo VPSO se encuentran enfocadas principalmente en observar el comportamiento dinámico del enjambre sobre las funciones de prueba, por su parte, las configuraciones para la inicialización de las partículas sobre el espacio de búsqueda se emplean para evidenciar que el algoritmo VPSO logra escapar de mínimos locales.

Considerando lo anterior se tiene el siguiente grupo de experimentos:

- Funciones objetivo:
 - 2D.
 - 10D.
- Inicialización:
 - Global.
 - Local.
- VPSO:
 - Determinístico.
 - Estocástico.
 - VPSO-C1: Caso con $R_\alpha > \Delta_r \text{máx.}$
 - VPSO-C2: Caso con $R_\alpha = \Delta_r \text{máx.}$
 - VPSO-C3: Caso con $R_\alpha < \Delta_r \text{máx.}$
 - VPSO-A: Adaptativo.
- PSO:
 - PSO-T1: (Configuración 1 propuesta por Trelea).
 - PSO-T2: (Configuración 2 propuesta por Trelea).
 - PSO-R: (PSO con factor de restricción).

8.5. Resultados experimentales para 2D

Para la ejecución del algoritmo en primer lugar se establecen los parámetros de libre elección los cuales se muestran en la tabla 8-5.

N	ρ	Δt	m_i	η	k_{oc}	$\lambda_{\text{máx}}$	$\lambda_{\text{mín}}$	γ_{od}	γ_{md}	N_V
10	1	0,1	1	1	1	0,04	0,0001	4	1	2

Tabla 8-5.: Parámetros de libre elección del algoritmo.

Con el fin de estimar los otros parámetros, para las funciones de prueba en 2D el rango del espacio de búsqueda es $(-5 \leq x \leq 5)$ y $(-5 \leq y \leq 5)$ por lo tanto $\text{range}(\Omega) = 10$. Considerando lo anterior se tienen los parámetros de la tabla 8-6.

R_Ω	$\Delta r_{\text{máx}}$	$\Delta r_{\text{mín}}$	$v_{\text{máx}}$	$v_{\text{mín}}$	$F_{\text{máx}}$	$F_{\text{mín}}$	$\alpha_{\text{máx}}$
5	0,4	0,001	4	0,01	40	0,1	10
β_0	R_D	R_{con}	a_d	a_c	k_{mc}	k_{md}	k_{od}
0,625	6	0,003	0,0741	0,0741	16,7	0,444	1,78

Tabla 8-6.: Parámetros estimados del algoritmo.

Los valores de la tabla **8-6** se establecieron con las restricciones:

- $R_D \geq 5$.
- $\alpha_{\text{máx}} \leq 10$.
- $a_c \leq 4$.
- $k_{mc} \leq 33,3333$.

Para τ_c se tienen diferentes valores considerando los casos mostrados en la tabla **8-7**.

Criterio	N_α	Restricción	τ_c
$R_\alpha = 2\Delta r_{\text{máx}}$	8	$\tau_c \leq 5,6296$	0,56296
$R_\alpha = 1\Delta r_{\text{máx}}$	15	$\tau_c \leq 5,6296$	0,56296
$R_\alpha = 0,5\Delta r_{\text{máx}}$	30	$\tau_c \leq 2,7963$	0,27963

Tabla 8-7.: Casos para τ_c .

Al realizar los cálculos para K_α y K_V empleando los anteriores valores se tienen las estrategias para el incremento de energía mostradas en la figura **8-4**.

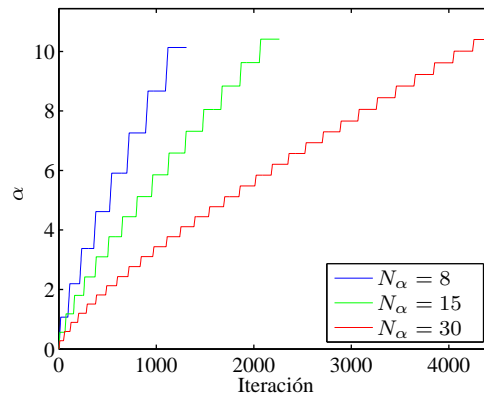


Figura 8-4.: Estrategia para el incremento de energía.

8.5.1. Resultados cualitativos

Para cada función de prueba se observa de forma cualitativa un caso representativo del funcionamiento del algoritmo de tal forma que se tiene el siguiente grupo de figuras:

- Valor mínimo encontrado por la mejor posición $U_{\min P}$ y para el punto medio $U_{\min G}$. También en esta figura se presenta la energía suministrada α .
- Magnitud de la velocidad para todas las partículas como también la velocidad promedio medida y estimada.
- Dispersión de las partículas para cada dimensión dada por la desviación estándar. También se presenta como resultado el radio medido y estimado.
- Trayectorias de las partículas y trayectoria promedio del enjambre sobre el espacio de búsqueda.

En este caso se consideran condiciones iniciales globales y se emplea la versión determinística del algoritmo VPSO. Con este grupo de figuras se busca mostrar de forma cualitativa el funcionamiento del algoritmo.

Resultados cualitativos para U_1

Las figuras que muestran los resultados cualitativos para la función objetivo U_1 son las siguientes:

- Figura 8-5: Valor mínimo encontrado y energía suministrada.
- Figura 8-6: Velocidad medida y estimada considerando α .
- Figura 8-7: Dispersión para cada dimensión, radio medido y estimado.
- Figura 8-8: Trayectorias de las partículas y trayectoria promedio.

En este grupo de figuras se aprecia que el enjambre logra una adecuada dispersión sobre el espacio de búsqueda como también que el radio medido se encuentra cerca del radio mínimo estimado. Finalmente es de resaltar que se logran tener movimientos aproximadamente circulares, esto debido a la simetría de la función objetivo.

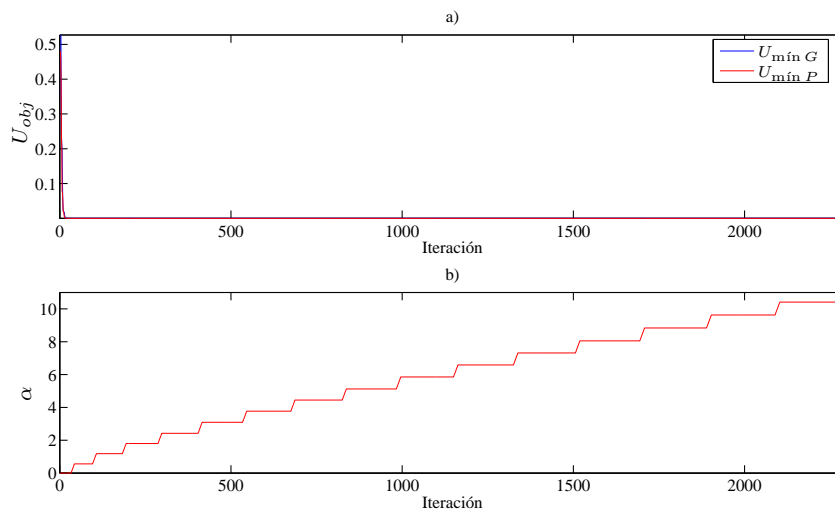


Figura 8-5.: a) Convergencia del algoritmo, b) Energía suministrada.

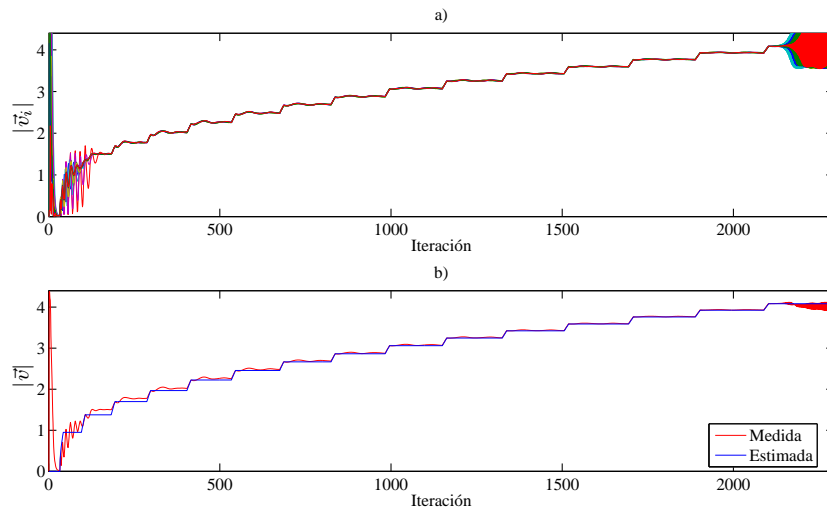


Figura 8-6.: a) Magnitud de las velocidades, b) Magnitud promedio y estimada.

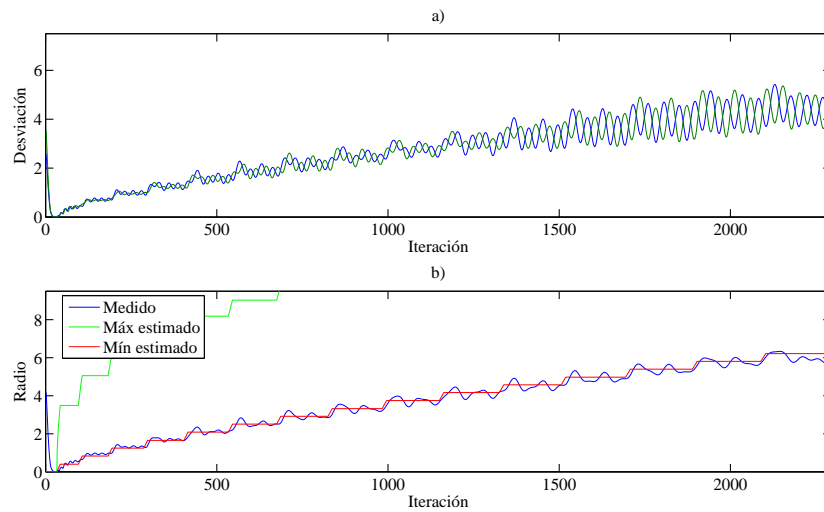


Figura 8-7.: a) Dispersión en cada dimensión, b) Radio medido y máximo, mínimo estimado.

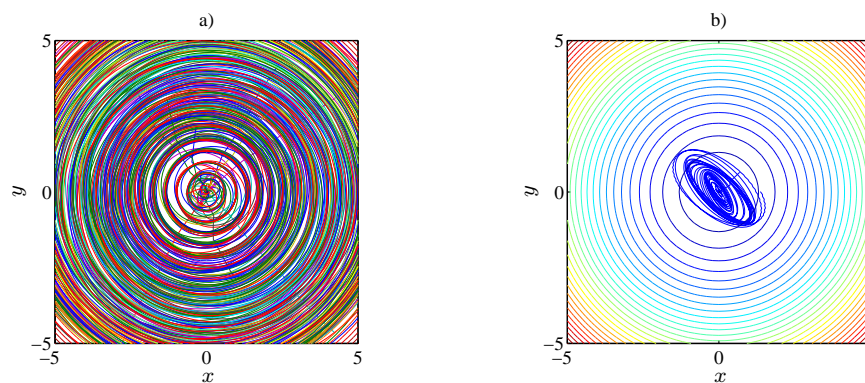


Figura 8-8.: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio.

Resultados cualitativos para U_2

Las figuras que muestran los resultados cualitativos para la función objetivo U_2 son:

- Figura 8-9: Valor mínimo encontrado y energía suministrada.
- Figura 8-10: Velocidad medida y estimada considerando α .
- Figura 8-11: Dispersión para cada dimensión, radio medido y estimado.
- Figura 8-12: Trayectorias de las partículas y trayectoria promedio.

En estos resultados se aprecia que el algoritmo converge a un mínimo local y luego escapa para encontrar el mínimo global. El radio medido se encuentra variando entre el valor máximo y mínimo estimado. Al finalizar el algoritmo se tiene una buena dispersión de las partículas sobre el espacio de búsqueda.

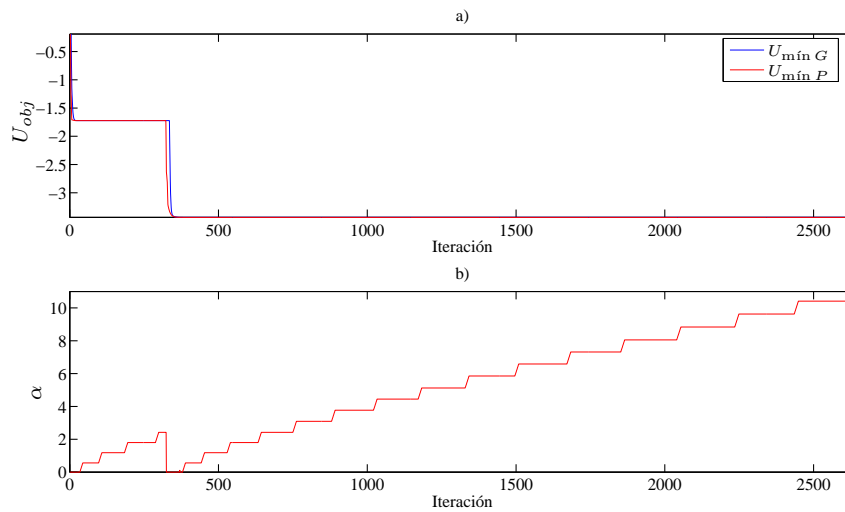


Figura 8-9.: a) Convergencia del algoritmo, b) Energía suministrada.

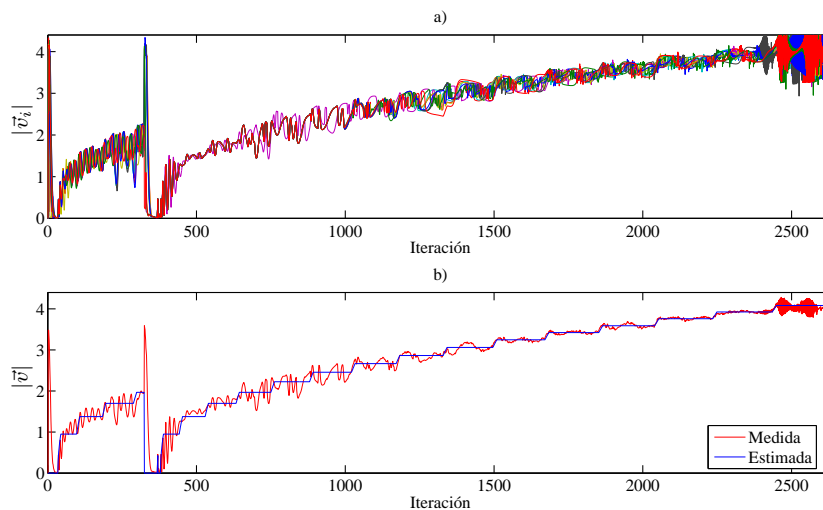


Figura 8-10.: a) Magnitud de las velocidades, b) Magnitud promedio y estimada.

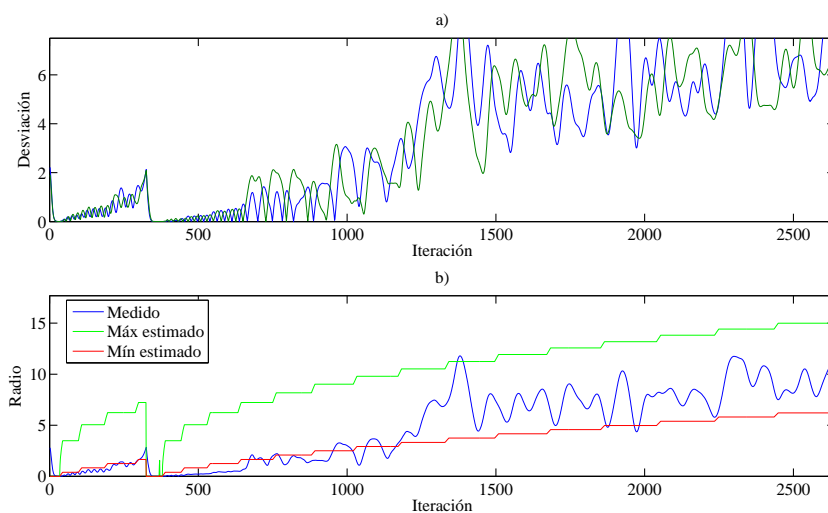


Figura 8-11.: a) Dispersión en cada dimensión, b) Radio medido y máximo, mínimo estimado.

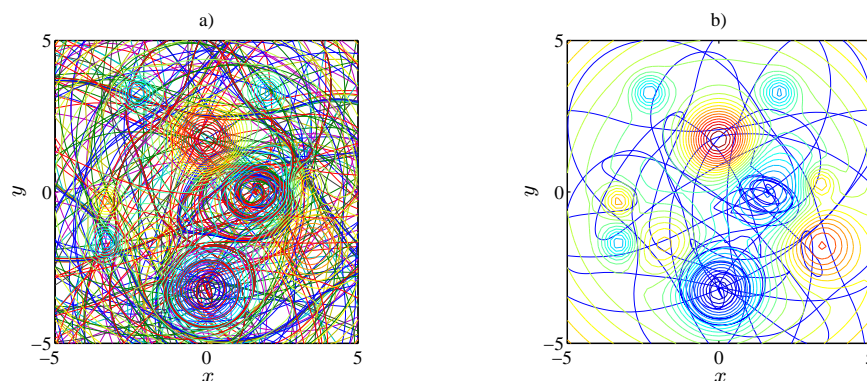


Figura 8-12.: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio.

Resultados cualitativos para U_3

El grupo de figuras que muestra el comportamiento del algoritmo cuando se emplea la función objetivo U_3 es el siguiente:

- Figura 8-13: Valor mínimo encontrado y energía suministrada.
- Figura 8-14: Velocidad medida y estimada considerando α .
- Figura 8-15: Dispersión para cada dimensión, radio medido y estimado.
- Figura 8-16: Trayectorias de las partículas y trayectoria promedio.

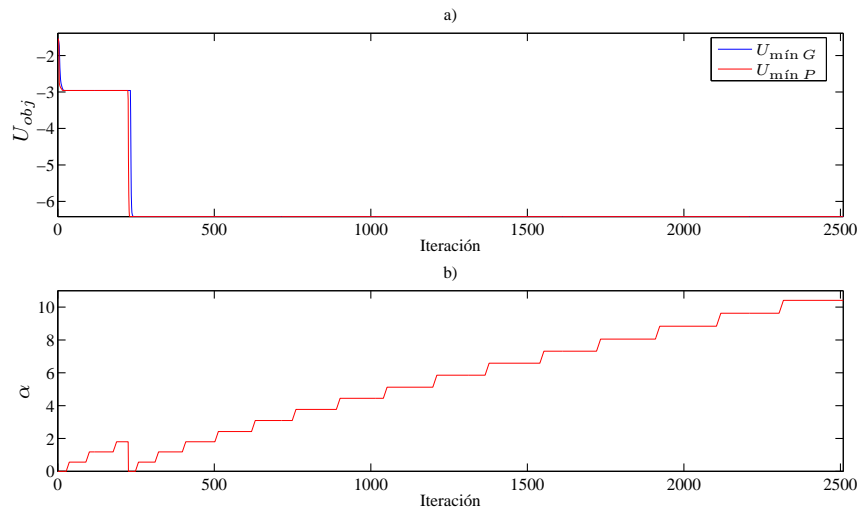


Figura 8-13.: a) Convergencia del algoritmo, b) Energía suministrada.

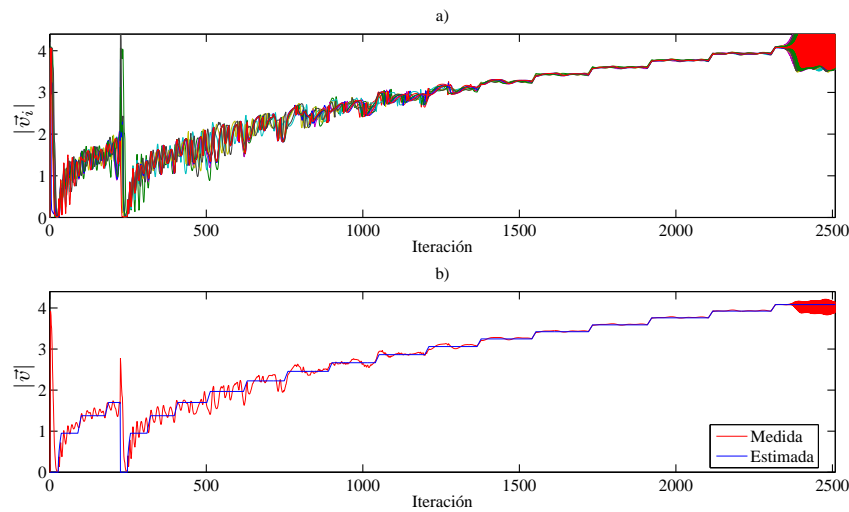


Figura 8-14.: a) Magnitud de las velocidades, b) Magnitud promedio y estimada.

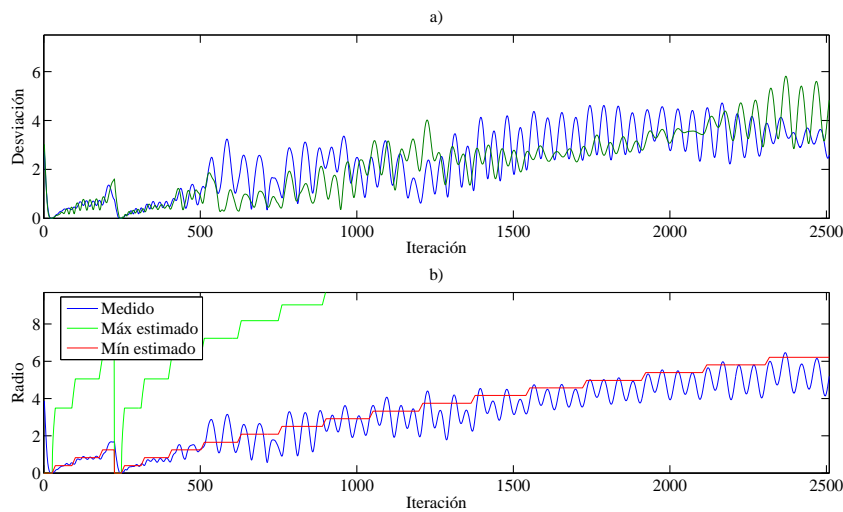


Figura 8-15.: a) Dispersión en cada dimensión, b) Radio medido y máximo, mínimo estimado.

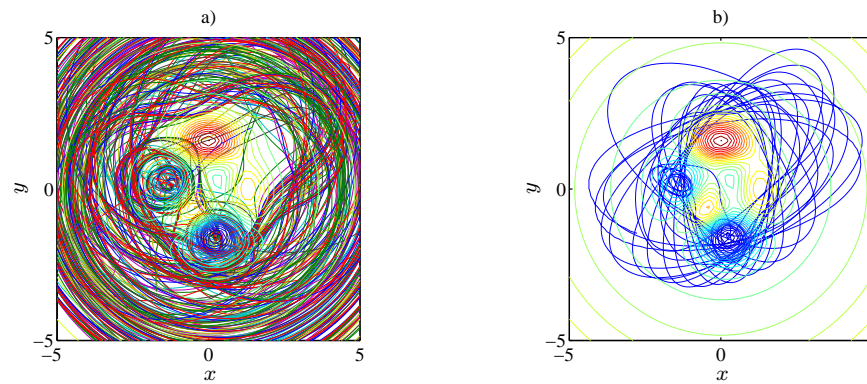


Figura 8-16.: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio.

En las anteriores figuras se aprecia que el enjambre de partículas logra escapar de un mínimo local para posteriormente encontrar el mínimo global. Es de notar que los incrementos de energía se realizan de forma adecuada según lo propuesto y que el radio estimado se encuentra en los límites calculados.

Resultados cualitativos para U_4

Las figuras que muestran los resultados cualitativos para la función objetivo U_4 son:

- Figura 8-17: Valor mínimo encontrado y energía suministrada.
- Figura 8-18: Velocidad medida y estimada considerando α .
- Figura 8-19: Dispersión para cada dimensión, radio medido y estimado.
- Figura 8-20: Trayectorias de las partículas y trayectoria promedio.

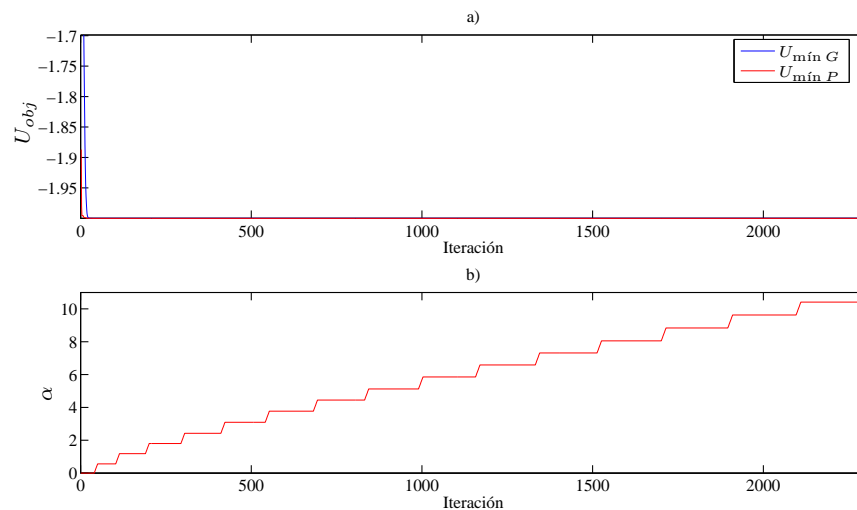


Figura 8-17.: a) Convergencia del algoritmo, b) Energía suministrada.

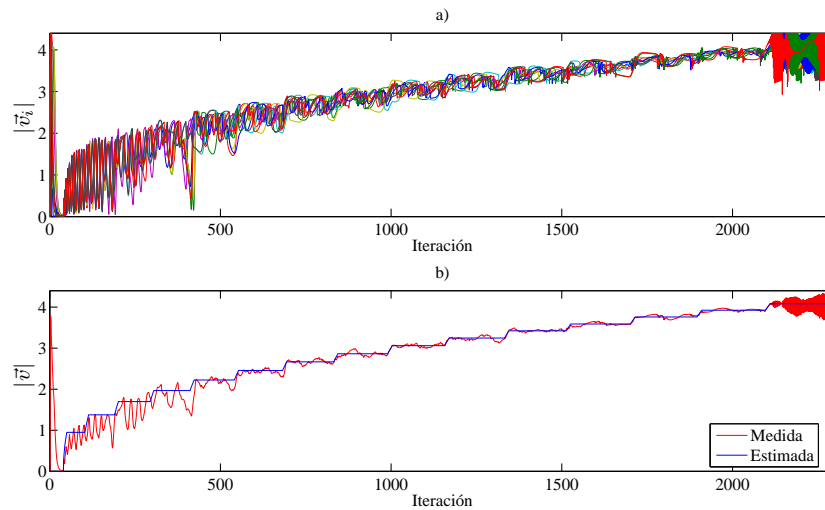


Figura 8-18.: a) Magnitud de las velocidades, b) Magnitud promedio y estimada.

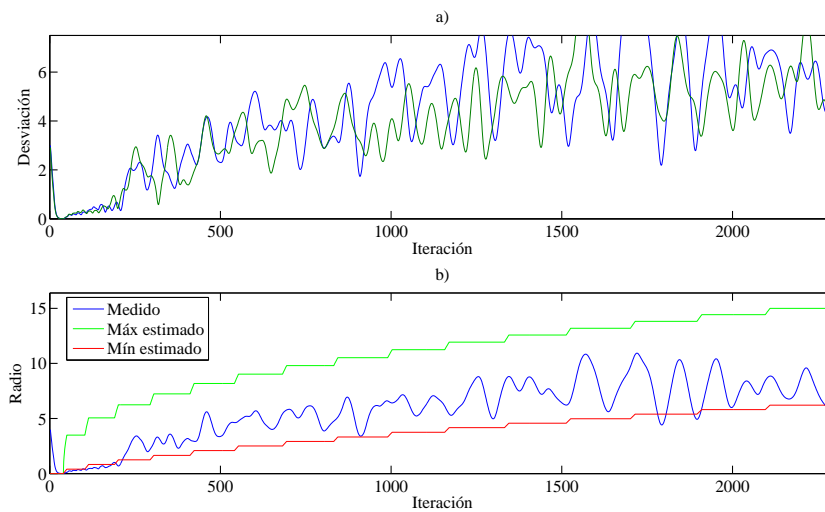


Figura 8-19.: a) Dispersión en cada dimensión, b) Radio medido y máximo, mínimo estimado.

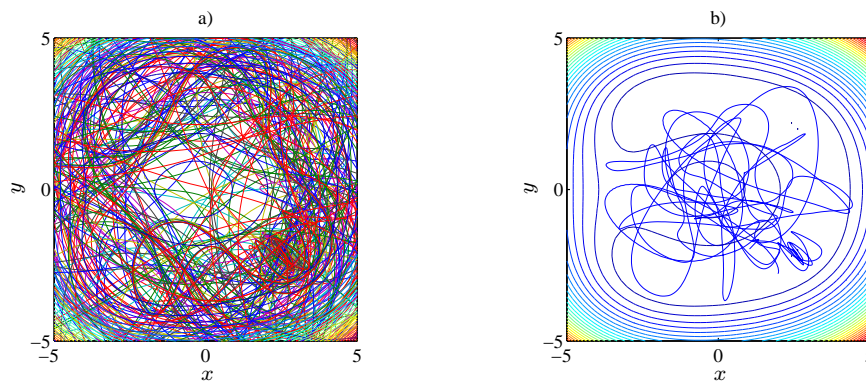


Figura 8-20.: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio.

Como es de notar, esta función objetivo presenta varios mínimos del mismo valor. En este caso se aprecia que el enjambre logra escapar de un mínimo local y encontrar uno de los mínimos globales. Adicionalmente se observa una mayor variación de radio estimado dentro de los límites calculados.

Resultados cualitativos para U_5

En este caso las figuras que muestran los resultados cualitativos para la función objetivo U_5 son las siguientes:

- Figura 8-21: Valor mínimo encontrado y energía suministrada.
- Figura 8-22: Velocidad medida y estimada considerando α .
- Figura 8-23: Dispersión para cada dimensión, radio medido y estimado.
- Figura 8-24: Trayectorias de las partículas y trayectoria promedio.

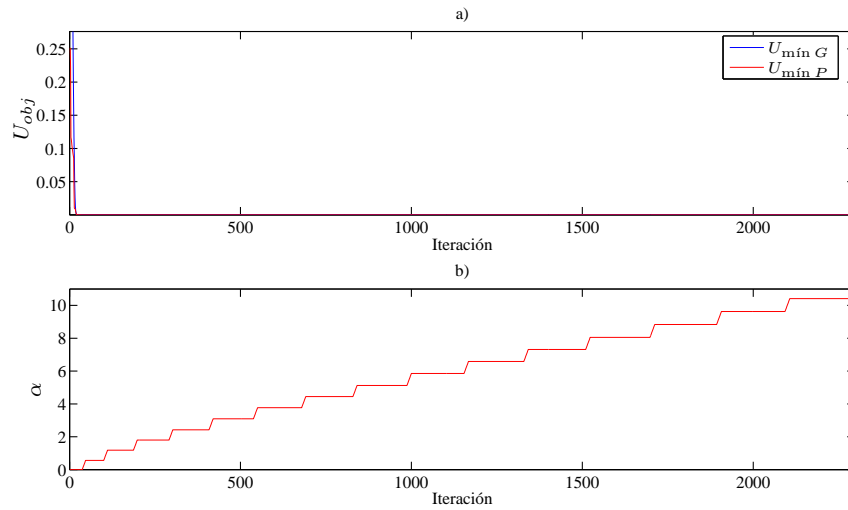


Figura 8-21.: a) Convergencia del algoritmo, b) Energía suministrada.

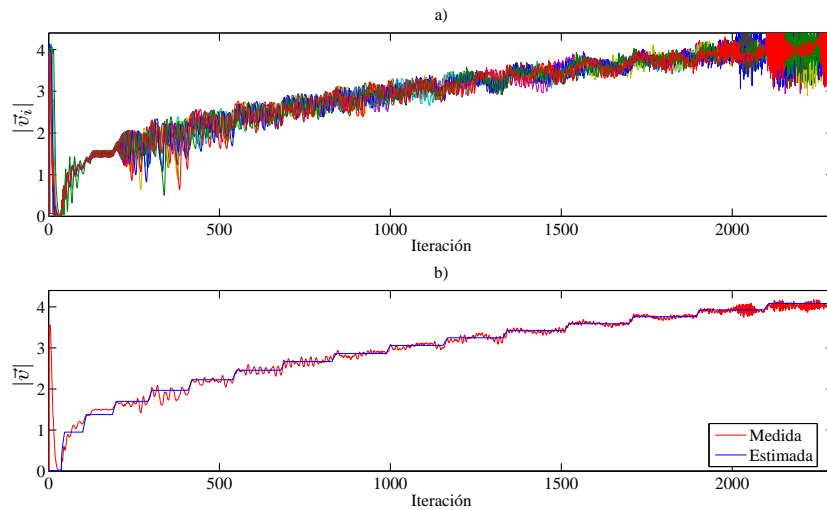


Figura 8-22.: a) Magnitud de las velocidades, b) Magnitud promedio y estimada.

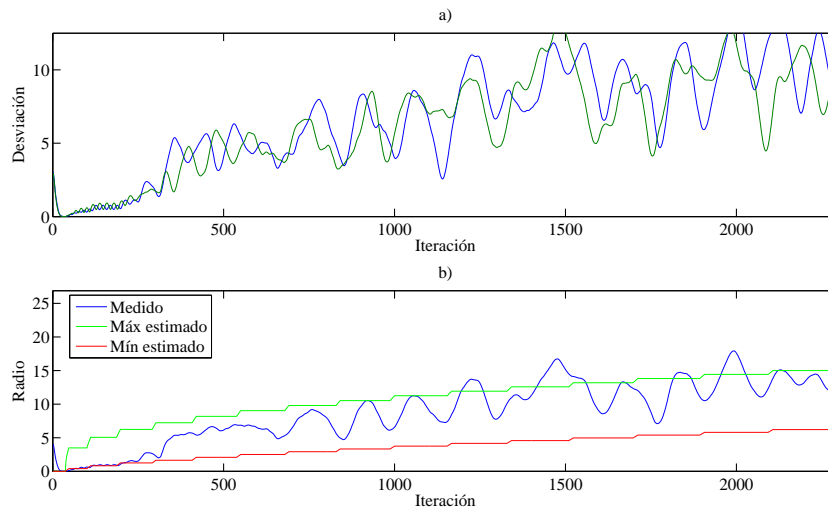


Figura 8-23.: a) Dispersión en cada dimensión, b) Radio medido y máximo, mínimo estimado.

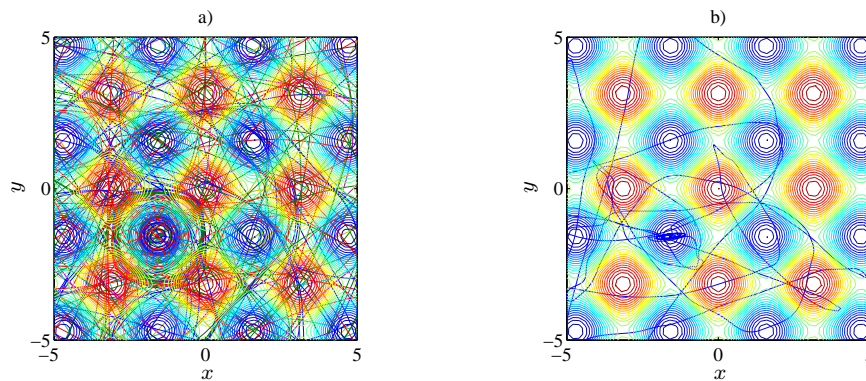


Figura 8-24.: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio.

En estas figuras se observa que el enjambre encuentra uno de los mínimos globales y realiza el proceso de dispersión sin encontrar otro mínimo. También es de notar que el radio medido se acerca al valor máximo calculado. Finalmente se observa una alta dispersión de las partículas sobre el espacio de búsqueda en las iteraciones finales.

Resultados cualitativos para U_6

Las figuras que muestran los resultados cualitativos para la función objetivo U_6 son:

- Figura 8-25: Valor mínimo encontrado y energía suministrada.
- Figura 8-26: Velocidad medida y estimada considerando α .
- Figura 8-27: Dispersión para cada dimensión, radio medido y estimado.
- Figura 8-28: Trayectorias de las partículas y trayectoria promedio.

En estos resultados es de apreciar que el enjambre encuentra un mínimo local y logra escapar de este para seguir el proceso de búsqueda. También es de notar que el agrupamiento del enjambre en el punto mínimo toma más iteraciones que en los casos anteriores.

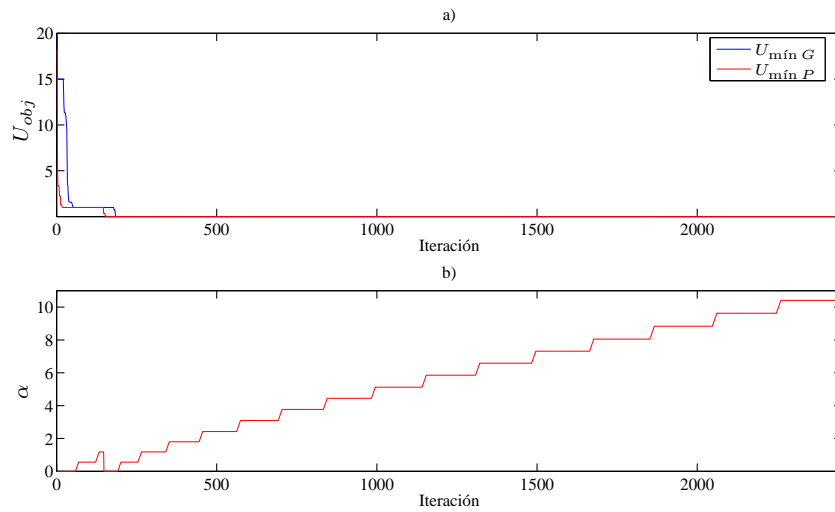


Figura 8-25.: a) Convergencia del algoritmo, b) Energía suministrada.

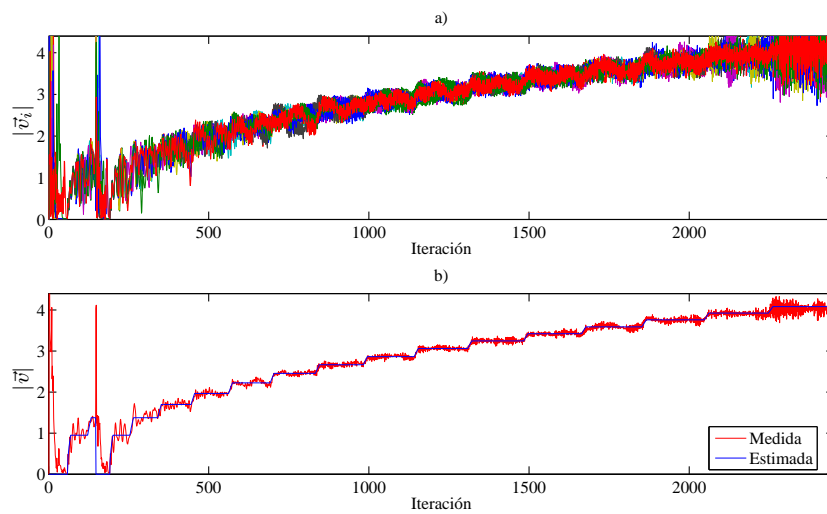


Figura 8-26.: a) Magnitud de las velocidades, b) Magnitud promedio y estimada.

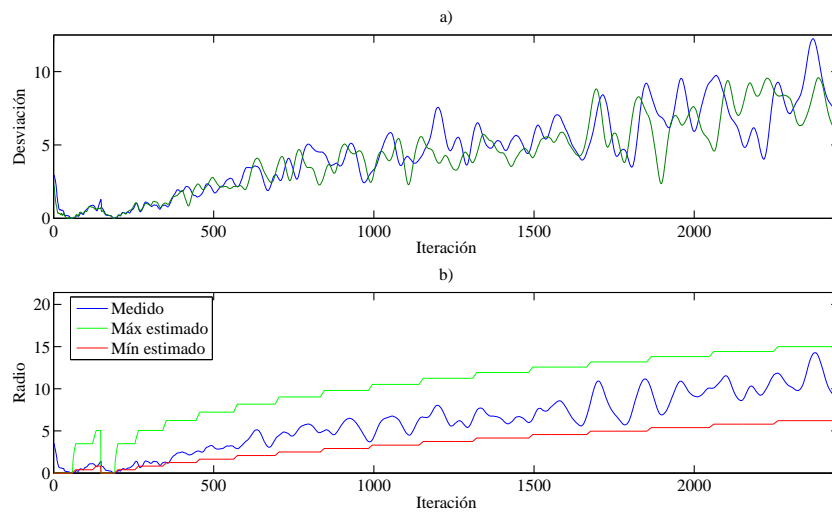


Figura 8-27.: a) Dispersión en cada dimensión, b) Radio medido y máximo, mínimo estimado.

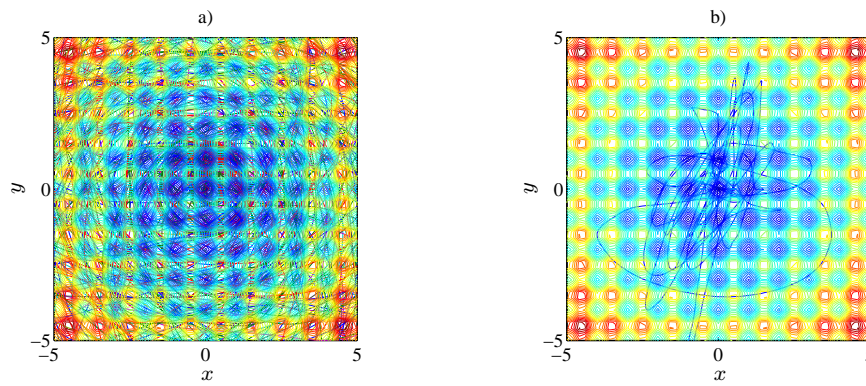


Figura 8-28.: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio.

Para esta función de prueba se logra una buena dispersión del enjambre manteniendo el radio de giro dentro de los valores máximos y mínimos estimados. La función de prueba considerada resulta ser un caso interesante por la cantidad de máximos y mínimos locales que esta presenta sobre el espacio de búsqueda.

Resultados cualitativos para U_7

Las figuras que muestran los resultados cualitativos para la función objetivo U_7 son las siguientes:

- Figura 8-29: Valor mínimo encontrado y energía suministrada.
- Figura 8-30: Velocidad medida y estimada considerando α .
- Figura 8-31: Dispersión para cada dimensión, radio medido y estimado.
- Figura 8-32: Trayectorias de las partículas y trayectoria promedio.

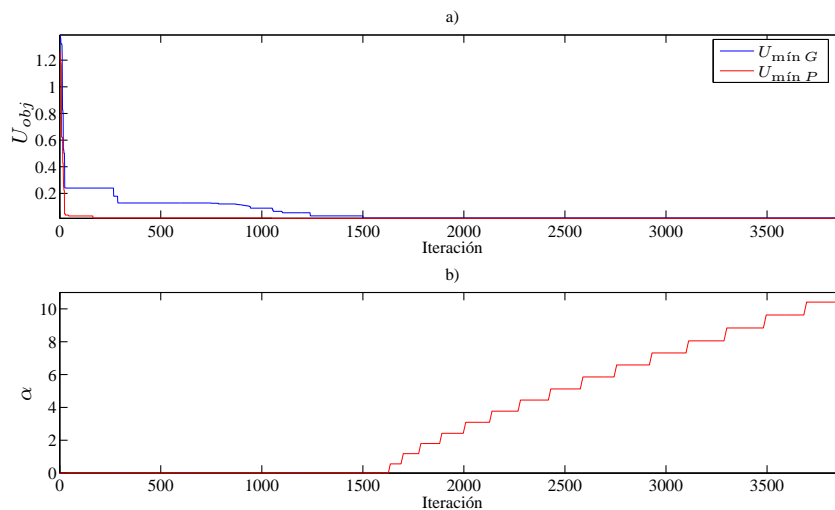


Figura 8-29.: a) Convergencia del algoritmo, b) Energía suministrada.

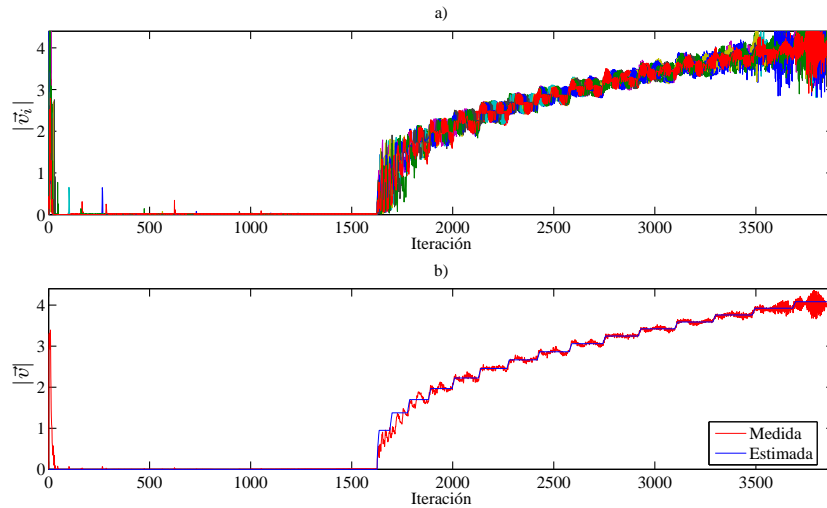


Figura 8-30.: a) Magnitud de las velocidades, b) Magnitud promedio y estimada.

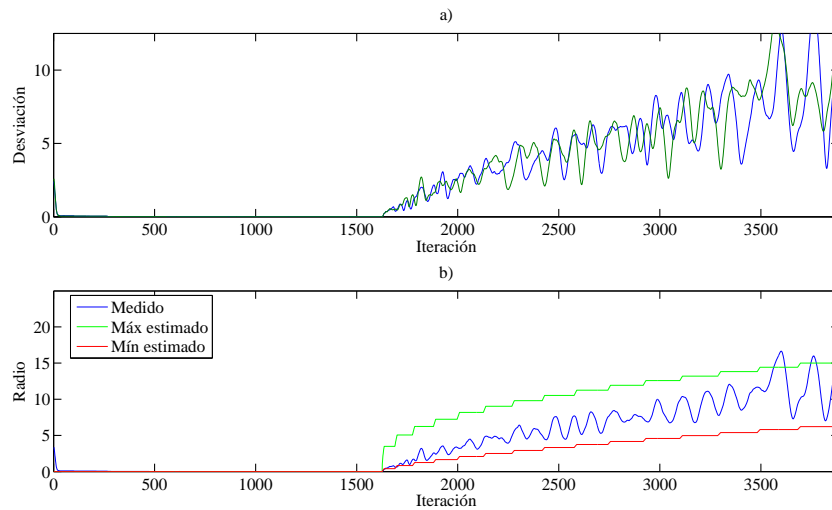


Figura 8-31.: a) Dispersión en cada dimensión, b) Radio medido y máximo, mínimo estimado.

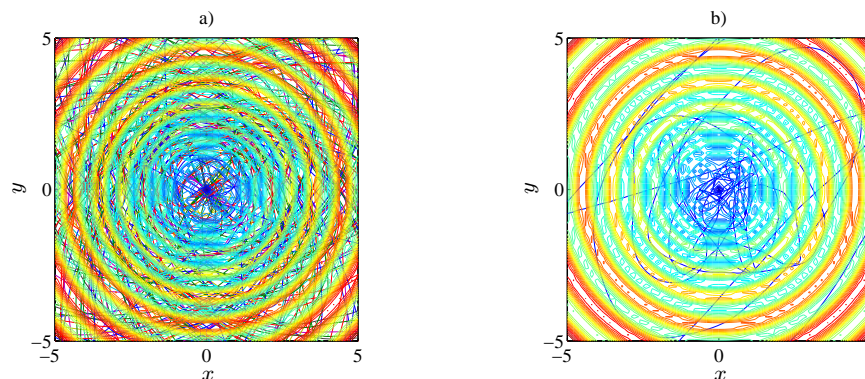


Figura 8-32.: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio.

En estas figuras se observa que la simetría circular de la función objetivo dificulta la convergencia del algoritmo al mínimo global. También es de notar que el radio medido se encuentra dentro de los límites estimados y se obtiene una buena dispersión del enjambre sobre el espacio de búsqueda.

Resultados cualitativos para U_8

En este caso las figuras que muestran los resultados cualitativos para la función objetivo U_8 son las siguientes:

- Figura 8-33: Valor mínimo encontrado y energía suministrada.
- Figura 8-34: Velocidad medida y estimada considerando α .
- Figura 8-35: Dispersión para cada dimensión, radio medido y estimado.
- Figura 8-36: Trayectorias de las partículas y trayectoria promedio.

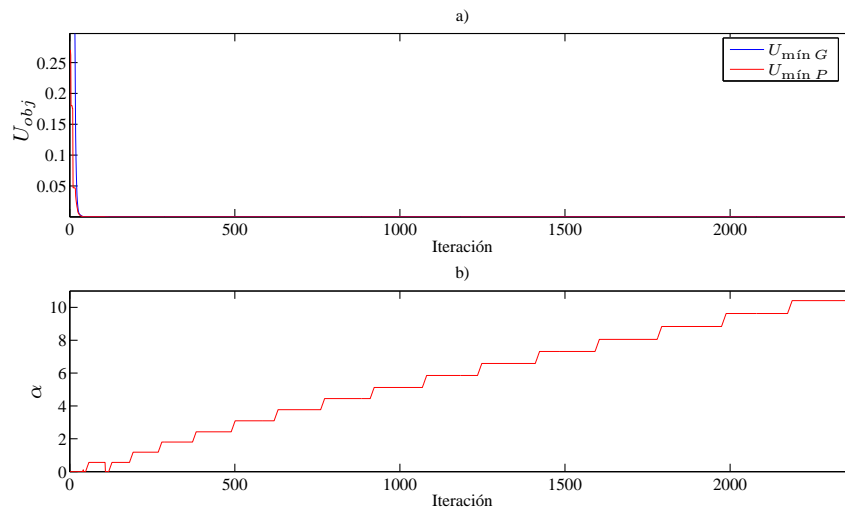


Figura 8-33.: a) Convergencia del algoritmo, b) Energía suministrada.

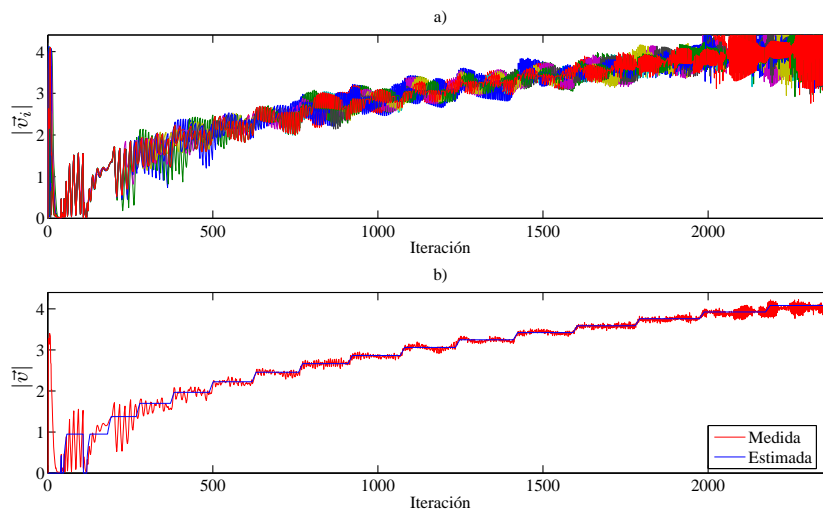


Figura 8-34.: a) Magnitud de las velocidades, b) Magnitud promedio y estimada.

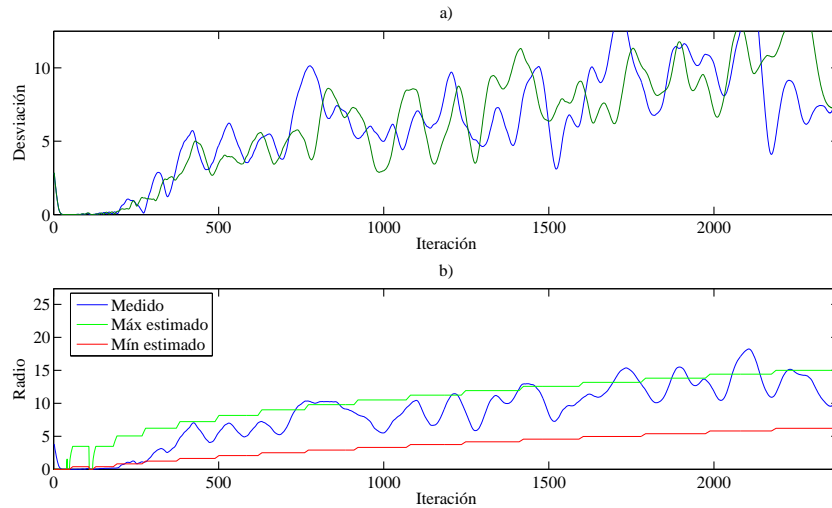


Figura 8-35.: a) Dispersión en cada dimensión, b) Radio medido y máximo, mínimo estimado.

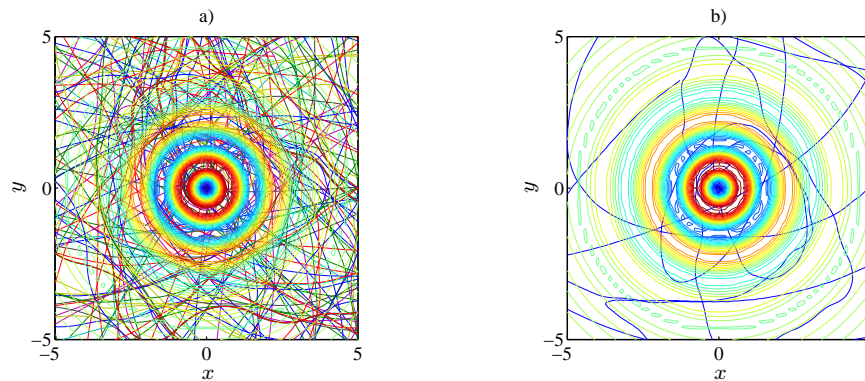


Figura 8-36.: a) Trayectorias de las partículas, b) Trayectoria promedio.

En estos resultados es de apreciar que el enjambre logra escapar de un mínimo local, sin embargo el agrupamiento de las partículas al punto mínimo toma varias iteraciones. También es de notar que se logra una buena dispersión de las partículas, manteniendo el radio de giro dentro del rango calculado.

8.5.2. Resultados cuantitativos

En las tablas **B-1**, **B-2**, **B-3** y **B-4** se pueden apreciar los resultados obtenidos del algoritmo VPSO para diferentes valores de N_α en estas mismas tablas también se presentan los resultados obtenidos del algoritmo PSO. Con los datos recolectados se realizan las respectivas pruebas de normalidad homocedasticidad y comparación entre grupos registrando los respectivos p -value. En las tablas **8-8**, **8-9**, **8-10** y **8-11** se presentan los resultados obtenidos para las pruebas de normalidad, mientras que en las tablas **8-12**, **8-13**, **8-14** y **8-15** se muestran los resultados para las pruebas de homocedasticidad y comparación entre grupos.

Con el fin de establecer los casos que presentan diferencias se realiza la prueba de Bonferroni (no paramétrica) obteniendo los resultados mostrados en las figuras **8-37**, **8-38**, **8-39** y **8-40**.

Función	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
$U_{obj,1}$	8.4906×10^{-12}	2.7968×10^{-10}	6.5022×10^{-8}	5.5012×10^{-8}	1.2414×10^{-8}	7.1598×10^{-7}	1.2387×10^{-6}
$U_{obj,2}$	0.00055461	9.0647×10^{-5}	0.00026035	1.0878×10^{-13}	9.8334×10^{-11}	2.5568×10^{-13}	6.0958×10^{-12}
$U_{obj,3}$	7.7958×10^{-8}	2.5792×10^{-6}	0.00028785	2.4972×10^{-8}	2.3025×10^{-13}	4.7562×10^{-13}	9.8334×10^{-11}
$U_{obj,4}$	1.0819×10^{-8}	0.00062686	0.00031581	2.8898×10^{-8}	5.4872×10^{-9}	1.3982×10^{-10}	1.42×10^{-8}
$U_{obj,5}$	4.3031×10^{-8}	1.6077×10^{-10}	6.6219×10^{-7}	6.0758×10^{-9}	1.7102×10^{-12}	1.0829×10^{-13}	1.0057×10^{-12}
$U_{obj,6}$	2.5144×10^{-10}	2.517×10^{-12}	7.0034×10^{-14}	1.6088×10^{-9}	2.2087×10^{-10}	1.2432×10^{-9}	1.0615×10^{-12}
$U_{obj,7}$	0.0444	0.050837	0.22174	0.11241	0.0021232	0.096934	0.00031948
$U_{obj,8}$	5.5767×10^{-10}	2.796×10^{-7}	4.7842×10^{-7}	5.7618×10^{-9}	2.3785×10^{-8}	9.8344×10^{-11}	4.0015×10^{-9}

Tabla 8-8.: Análisis de normalidad de datos para los resultados de la tabla B-1. Condiciones iniciales globales y VPSO determinístico.

Función	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
$U_{obj,1}$	1.0682×10^{-6}	0.0012044	5.2191×10^{-9}	4.5456×10^{-11}	1.2414×10^{-8}	7.1598×10^{-7}	1.2387×10^{-6}
$U_{obj,2}$	1.4724×10^{-11}	1.2434×10^{-10}	0.021382	3.2356×10^{-10}	9.8334×10^{-11}	2.5568×10^{-13}	6.0958×10^{-12}
$U_{obj,3}$	0.045419	0.042152	0.00049226	0.054647	2.3025×10^{-13}	4.7562×10^{-13}	9.8334×10^{-11}
$U_{obj,4}$	6.1372×10^{-9}	1.6081×10^{-7}	6.0108×10^{-9}	2.5697×10^{-6}	5.4872×10^{-9}	1.3982×10^{-10}	1.42×10^{-8}
$U_{obj,5}$	4.481×10^{-5}	0.00091746	5.7452×10^{-5}	0.00037213	1.7102×10^{-12}	1.0829×10^{-13}	1.0057×10^{-12}
$U_{obj,6}$	6.0966×10^{-12}	2.3031×10^{-13}	0.023987	2.3029×10^{-13}	2.2087×10^{-10}	1.2432×10^{-9}	1.0615×10^{-12}
$U_{obj,7}$	0.00029115	0.021933	0.0053427	0.0028286	0.0021232	0.096934	0.00031948
$U_{obj,8}$	1.2491×10^{-7}	9.0152×10^{-10}	6.1738×10^{-11}	0.00032	2.3785×10^{-8}	9.8344×10^{-11}	4.0015×10^{-9}

Tabla 8-9.: Análisis de normalidad de datos para los resultados de la tabla B-2. Condiciones iniciales globales y VPSO estocástico.

Función	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
$U_{obj,1}$	0.0015332	0.0061353	0.00011243	2.8475×10^{-6}	1.1237×10^{-6}	8.7327×10^{-8}	0.00010885
$U_{obj,2}$	4.3081×10^{-5}	1.0781×10^{-5}	2.4624×10^{-5}	4.7775×10^{-13}	0.00021928	0.0017708	0.00052639
$U_{obj,3}$	0.032892	0.23428	3.4217×10^{-9}	3.6495×10^{-10}	0.0036547	2.4953×10^{-5}	1.6488×10^{-5}
$U_{obj,4}$	1.285×10^{-7}	3.2254×10^{-8}	3.0029×10^{-6}	2.1035×10^{-5}	2.5516×10^{-8}	4.4621×10^{-7}	4.7555×10^{-7}
$U_{obj,5}$	1.1942×10^{-10}	3.2608×10^{-9}	8.8355×10^{-7}	2.3421×10^{-10}	2.3858×10^{-6}	2.2896×10^{-5}	3.8082×10^{-6}
$U_{obj,6}$	5.6602×10^{-8}	1.0652×10^{-12}	7.0049×10^{-14}	1.3149×10^{-9}	0.15953	0.0025169	1.7219×10^{-5}
$U_{obj,7}$	1.8706×10^{-7}	0.0047682	0.15148	0.13733	9.1268×10^{-6}	2.0531×10^{-6}	4.8951×10^{-6}
$U_{obj,8}$	2.1247×10^{-5}	1.8351×10^{-13}	4.0175×10^{-7}	2.8447×10^{-9}	0.0037724	0.032221	0.064372

Tabla 8-10.: Análisis de normalidad de datos para los resultados de la tabla B-3. Condiciones iniciales locales y VPSO determinístico.

Función	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
$U_{obj,1}$	4.2273×10^{-8}	1.1889×10^{-7}	4.2308×10^{-5}	3.0522×10^{-5}	1.1237×10^{-6}	8.7327×10^{-8}	0.00010885
$U_{obj,2}$	1.5396×10^{-7}	1.6368×10^{-7}	1.8271×10^{-11}	3.9468×10^{-10}	0.00021928	0.0017708	0.00052639
$U_{obj,3}$	0.0052904	0.0010572	1.2154×10^{-7}	1.2603×10^{-5}	0.0036547	2.4953×10^{-5}	1.6488×10^{-5}
$U_{obj,4}$	5.7191×10^{-7}	1.824×10^{-7}	1.1517×10^{-8}	3.1522×10^{-9}	2.5516×10^{-8}	4.4621×10^{-7}	4.7555×10^{-7}
$U_{obj,5}$	1.6186×10^{-5}	6.4644×10^{-5}	7.1881×10^{-13}	8.2397×10^{-6}	2.3858×10^{-6}	2.2896×10^{-5}	3.8082×10^{-6}
$U_{obj,6}$	3.8488×10^{-7}	1.0618×10^{-12}	4.7568×10^{-13}	1.6059×10^{-9}	0.15953	0.0025169	1.7219×10^{-5}
$U_{obj,7}$	2.7362×10^{-13}	0.0060892	0.0013159	0.012554	9.1268×10^{-6}	2.0531×10^{-6}	4.8951×10^{-6}
$U_{obj,8}$	0.0079792	5.5882×10^{-8}	1.2145×10^{-11}	5.1989×10^{-9}	0.0037724	0.032221	0.064372

Tabla 8-11.: Análisis de normalidad de datos para los resultados de la tabla B-4. Condiciones iniciales locales y VPSO estocástico.

Función	Normalidad	Homocedasticidad	Kruskal-Wallis	ANOVA
$U_{obj,1}$	No	5.4401×10^{-15}	0	0.002 594 7
$U_{obj,2}$	No	0	0.165 09	1.6098×10^{-7}
$U_{obj,3}$	No	0	0.000 127 2	6.5038×10^{-8}
$U_{obj,4}$	No	1.414×10^{-11}	0	0.002 037 8
$U_{obj,5}$	No	0	0	0.000 100 98
$U_{obj,6}$	No	3.4093×10^{-8}	0.029 447	0.067 473
$U_{obj,7}$	No	8.604×10^{-5}	0	0
$U_{obj,8}$	No	0	2.894×10^{-6}	1.5543×10^{-15}

Tabla 8-12.: Análisis de datos para los resultados de la tabla B-1. Condiciones iniciales globales y VPSO determinístico.

Función	Normalidad	Homocedasticidad	Kruskal-Wallis	ANOVA
$U_{obj,1}$	No	0.006 499 4	3.7492×10^{-13}	0.204 08
$U_{obj,2}$	No	0	6.4811×10^{-8}	3.0242×10^{-8}
$U_{obj,3}$	No	0	1.8044×10^{-7}	6.5026×10^{-8}
$U_{obj,4}$	No	4.3751×10^{-9}	9.3892×10^{-13}	0.010 707
$U_{obj,5}$	No	0.000 603 58	1.2511×10^{-10}	0.4535
$U_{obj,6}$	No	1.0706×10^{-10}	0.027 542	0.023 006
$U_{obj,7}$	No	6.3047×10^{-6}	0	3.5565×10^{-10}
$U_{obj,8}$	No	0	7.1942×10^{-14}	1.5543×10^{-15}

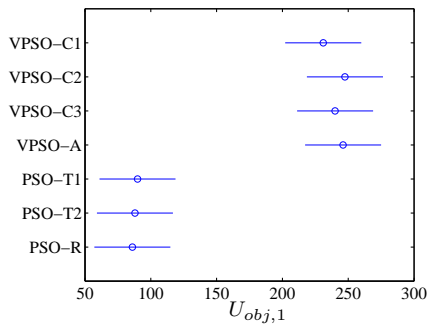
Tabla 8-13.: Análisis de datos para los resultados de la tabla B-2. Condiciones iniciales globales y VPSO estocástico.

Función	Normalidad	Homocedasticidad	Kruskal-Wallis	ANOVA
$U_{obj,1}$	No	0	0	2.2204×10^{-16}
$U_{obj,2}$	No	0	0	0
$U_{obj,3}$	No	0	0	0
$U_{obj,4}$	No	2.3821×10^{-6}	0	0.006 82
$U_{obj,5}$	No	3.4587×10^{-10}	0	0.011 036
$U_{obj,6}$	No	0	0	0
$U_{obj,7}$	No	0	0.408 98	0
$U_{obj,8}$	No	0	0	0

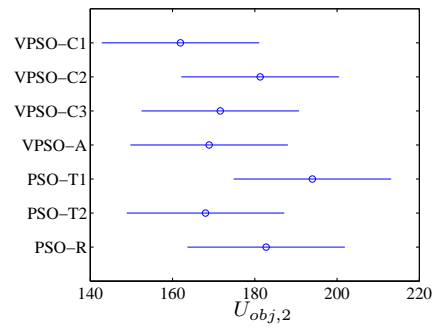
Tabla 8-14.: Análisis de datos para los resultados de la tabla B-3. Condiciones iniciales locales y VPSO determinístico.

Función	Normalidad	Homocedasticidad	Kruskal-Wallis	ANOVA
$U_{obj,1}$	No	1.8272×10^{-8}	0.031 601	0.021 492
$U_{obj,2}$	No	0	0	0
$U_{obj,3}$	No	0	0	0
$U_{obj,4}$	No	3.4101×10^{-9}	1.4433×10^{-15}	0.007 032 1
$U_{obj,5}$	No	1.8566×10^{-7}	3.1826×10^{-12}	0.081 132
$U_{obj,6}$	No	0	0	0
$U_{obj,7}$	No	0	0.013 456	0
$U_{obj,8}$	No	0	0	0

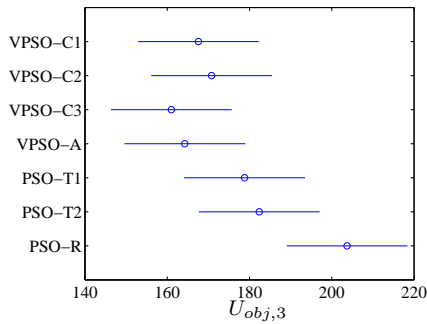
Tabla 8-15.: Análisis de datos para los resultados de la tabla B-4. Condiciones iniciales locales y VPSO estocástico.



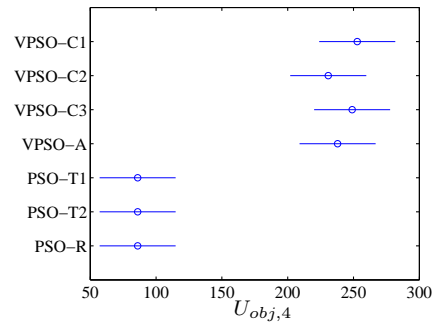
(a) Comparación para $U_{obj,1}$.



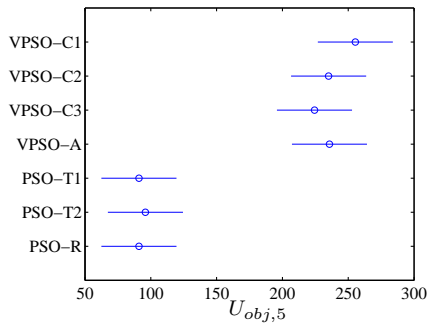
(b) Comparación para $U_{obj,2}$.



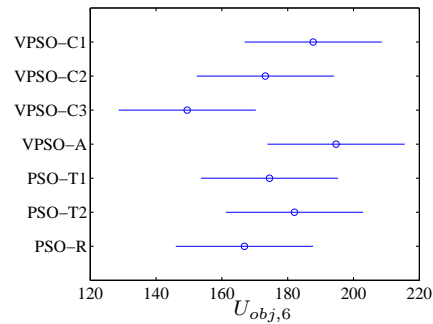
(c) Comparación para $U_{obj,3}$.



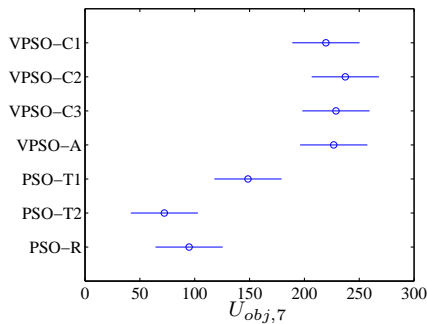
(d) Comparación para $U_{obj,4}$.



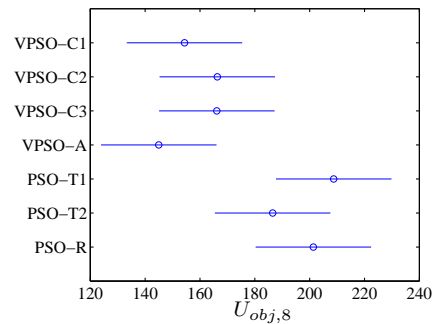
(e) Comparación para $U_{obj,5}$.



(f) Comparación para $U_{obj,6}$.



(g) Comparación para $U_{obj,7}$.



(h) Comparación para $U_{obj,8}$.

Figura 8-37.: Resultados de la comparación para el valor obtenido con las diferentes funciones objetivo. Condiciones iniciales globales y VPSO determinístico.

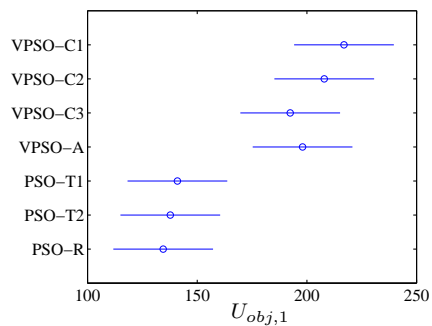
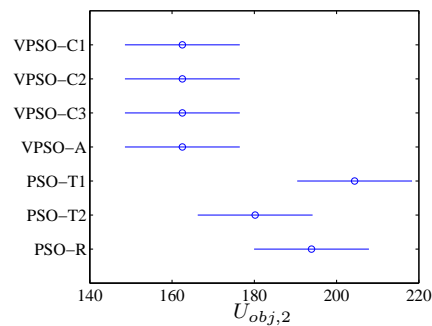
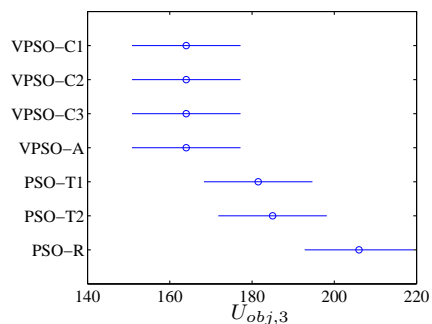
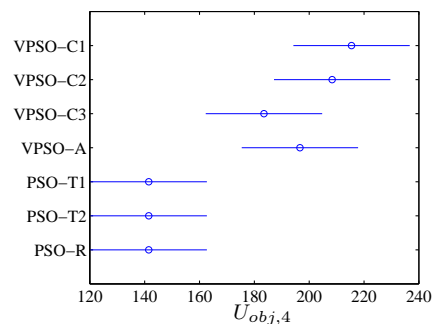
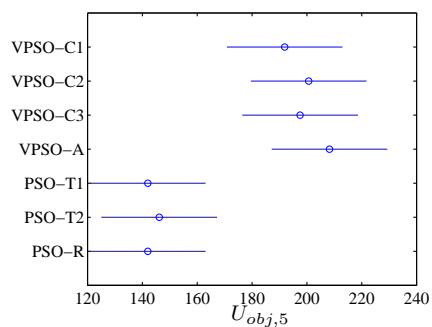
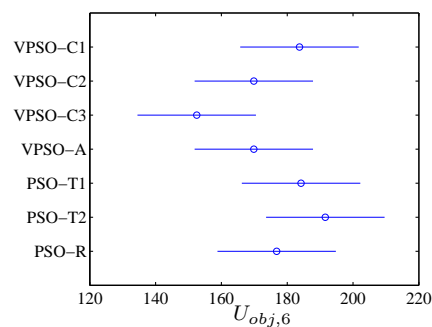
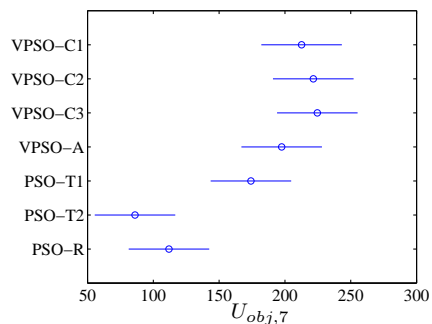
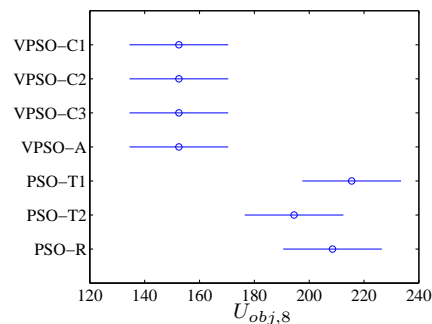
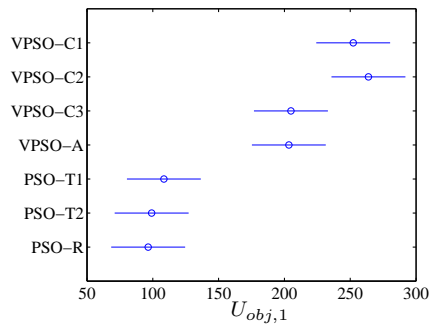
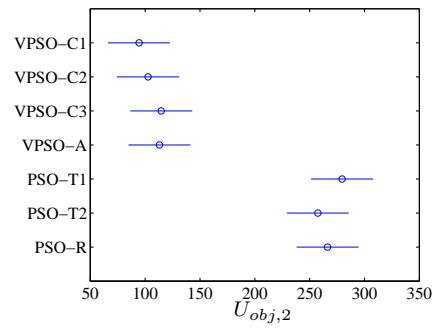
(a) Comparación para $U_{obj,1}$.(b) Comparación para $U_{obj,2}$.(c) Comparación para $U_{obj,3}$.(d) Comparación para $U_{obj,4}$.(e) Comparación para $U_{obj,5}$.(f) Comparación para $U_{obj,6}$.(g) Comparación para $U_{obj,7}$.(h) Comparación para $U_{obj,8}$.

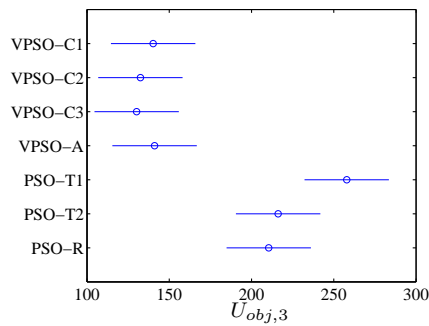
Figura 8-38.: Resultados de la comparación para el valor obtenido con las diferentes funciones objetivo. Condiciones iniciales globales y VPSO estocástico.



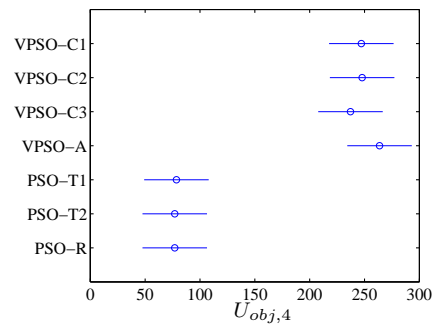
(a) Comparación para $U_{obj,1}$.



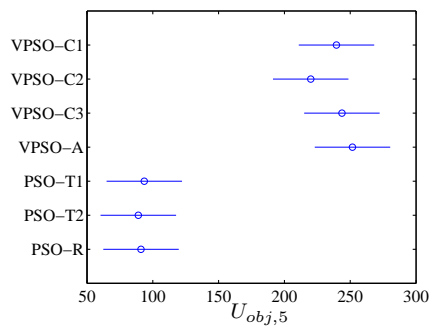
(b) Comparación para $U_{obj,2}$.



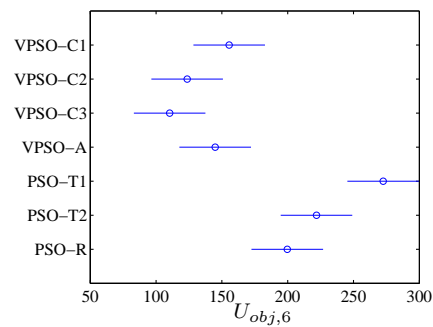
(c) Comparación para $U_{obj,3}$.



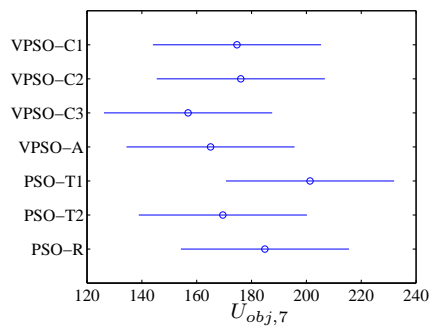
(d) Comparación para $U_{obj,4}$.



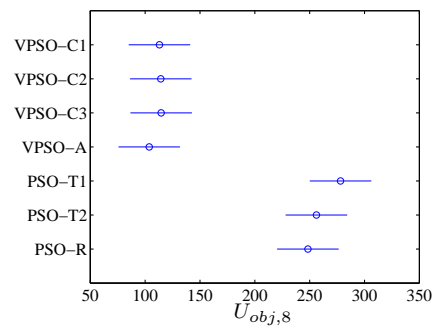
(e) Comparación para $U_{obj,5}$.



(f) Comparación para $U_{obj,6}$.



(g) Comparación para $U_{obj,7}$.



(h) Comparación para $U_{obj,8}$.

Figura 8-39. Resultados de la comparación para el valor obtenido con las diferentes funciones objetivo. Condiciones iniciales locales y VPSO determinístico.

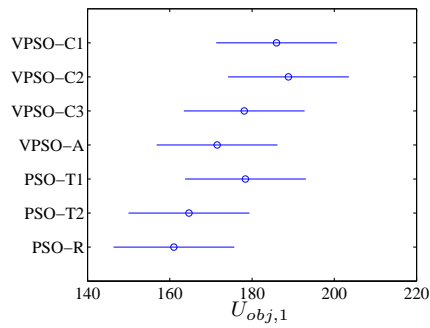
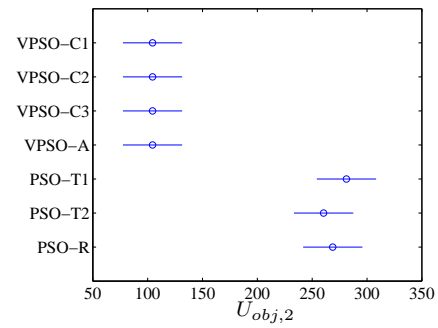
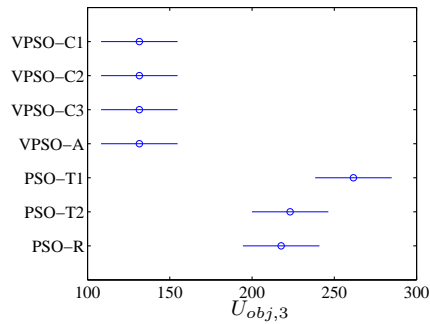
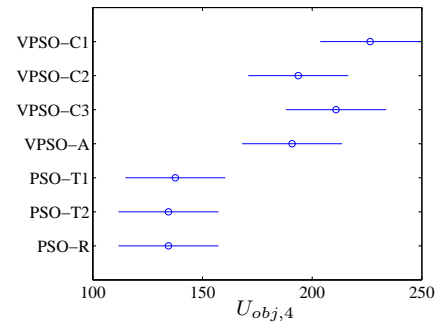
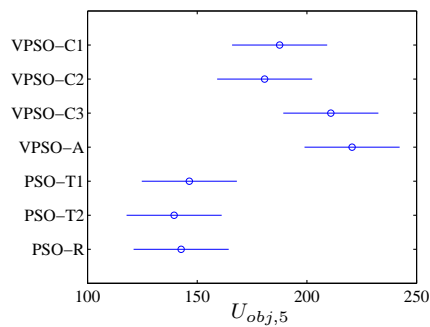
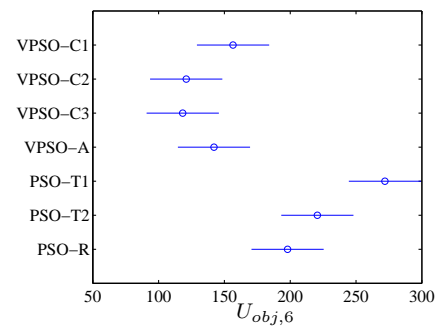
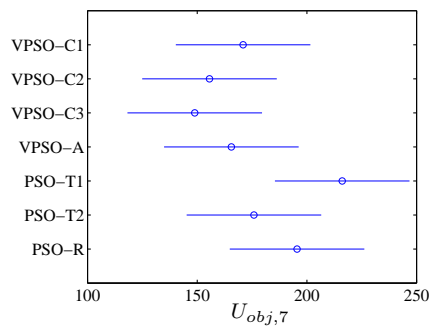
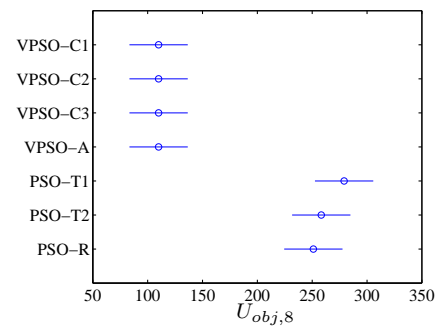
(a) Comparación para $U_{obj,1}$.(b) Comparación para $U_{obj,2}$.(c) Comparación para $U_{obj,3}$.(d) Comparación para $U_{obj,4}$.(e) Comparación para $U_{obj,5}$.(f) Comparación para $U_{obj,6}$.(g) Comparación para $U_{obj,7}$.(h) Comparación para $U_{obj,8}$.

Figura 8-40.: Resultados de la comparación para el valor obtenido con las diferentes funciones objetivo. Condiciones iniciales locales y VPSO estocástico.

Las comparaciones de los resultados obtenidos con las diferentes funciones objetivo se presentan en las figuras **8-37**, **8-38**, **8-39** y **8-40**. En estos resultados se aprecia que al emplear condiciones iniciales globales se tiene un desempeño favorable para el algoritmo PSO con las funciones de prueba $U_{obj,1}$, $U_{obj,4}$, $U_{obj,5}$ y $U_{obj,7}$. Para la función de prueba $U_{obj,6}$ los algoritmos PSO y VPSO presentan un comportamiento similar. Por su parte, con las funciones de prueba $U_{obj,2}$, $U_{obj,3}$ y $U_{obj,8}$ el algoritmo VPSO tiende a presentar un mejor comportamiento que el algoritmo PSO, en particular, cuando se emplea la versión estocástica del algoritmo VPSO.

Cuando se tienen condiciones iniciales locales se aprecia que el algoritmo VPSO presenta un mejor comportamiento con las funciones de prueba $U_{obj,2}$, $U_{obj,3}$, $U_{obj,6}$ y $U_{obj,8}$. Un comportamiento similar de los dos algoritmos se aprecia para la función de prueba $U_{obj,7}$. Finalmente para las funciones de prueba $U_{obj,1}$, $U_{obj,4}$ y $U_{obj,5}$ el algoritmo PSO presenta un mejor comportamiento, sin embargo es necesario tener presente que $U_{obj,1}$ es una función de prueba monomodal y las funciones $U_{obj,4}$ y $U_{obj,5}$ son multimodales con mínimos del mismo valor.

Por otra parte, en estos resultados es de notar que el algoritmo VPSO estocástico tiende a presentar un mejor desempeño que el algoritmo VPSO determinístico tanto para condiciones iniciales globales como locales.

8.6. Resultados experimentales para 10 dimensiones

La configuración de parámetros se encuentra dada principalmente por el espacio de búsqueda para las diferentes funciones de prueba, teniendo así las siguientes posibilidades:

- $\text{range}(\Omega) = 200$.
- $\text{range}(\Omega) = 10,24$.
- $\text{range}(\Omega) = 60$.
- $\text{range}(\Omega) = 20$.

Como es de apreciar, se tienen diferentes rangos para el espacio de búsqueda lo cual influye principalmente en la velocidad con la cual se desplazan las partículas. En primer lugar los parámetros de libre elección comunes a las funciones de prueba son:

N	ρ	Δt	m_i	η	k_{oc}	$\lambda_{\text{máx}}$	$\lambda_{\text{mín}}$	γ_{od}	γ_{md}	N_V
25	1	1	5	1	1	0,04	0,0001	4	1	2

Tabla 8-16.: Parámetros del algoritmo.

La estrategia para el incremento de energía se determina considerando el número de veces que se desea realizar los incrementos de energía, por lo cual, resulta ser igual para todas las funciones de prueba. A continuación se muestran los parámetros empleados considerando los casos presentados anteriormente.

En primer lugar, para el caso donde $\text{range}(\Omega) = 200$ se tienen los parámetros de la tabla **8-17**.

R_Ω	$\Delta r_{\text{máx}}$	$\Delta r_{\text{mín}}$	$v_{\text{máx}}$	$v_{\text{mín}}$	$F_{\text{máx}}$	$F_{\text{mín}}$	$\alpha_{\text{máx}}$
100	8	0,02	8	0,02	40	0,1	5
β_0	R_D	R_{con}	a_d	a_c	k_{mc}	k_{md}	k_{od}
0,0781	120	0,06	0,0037	0,0037	0,833	0,444	1,78

Tabla 8-17.: Parámetros del algoritmo con $\text{range}(\Omega) = 200$.

Por su parte con $\text{range}(\Omega) = 10,24$ se tienen los parámetros de la tabla **8-18**.

R_Ω	$\Delta r_{\text{máx}}$	$\Delta r_{\text{mín}}$	$v_{\text{máx}}$	$v_{\text{mín}}$	$F_{\text{máx}}$	$F_{\text{mín}}$	$\alpha_{\text{máx}}$
5,12	0,4096	0,00102	0,4096	0,00102	2,048	0,00512	5
β_0	R_D	R_{con}	a_d	a_c	k_{mc}	k_{md}	k_{od}
29,8	6,144	0,00307	0,0037	0,0037	0,833	0,0228	0,091

Tabla 8-18.: Parámetros del algoritmo con $\text{range}(\Omega) = 10,24$.

Para $\text{range}(\Omega) = 60$ los respectivos parámetros se pueden apreciar en la tabla **8-19**.

R_Ω	$\Delta r_{\text{máx}}$	$\Delta r_{\text{mín}}$	$v_{\text{máx}}$	$v_{\text{mín}}$	$F_{\text{máx}}$	$F_{\text{mín}}$	$\alpha_{\text{máx}}$
30	2,4	0,006	2,4	0,006	12	0,03	5
β_0	R_D	R_{con}	a_d	a_c	k_{mc}	k_{md}	k_{od}
0,868	36	0,018	0,0037	0,0037	0,833	0,133	0,533

Tabla 8-19.: Parámetros del algoritmo con $\text{range}(\Omega) = 60$.

Finalmente, con $\text{range}(\Omega) = 20$ se tienen los parámetros de la tabla **8-20**.

R_Ω	$\Delta r_{\text{máx}}$	$\Delta r_{\text{mín}}$	$v_{\text{máx}}$	$v_{\text{mín}}$	$F_{\text{máx}}$	$F_{\text{mín}}$	$\alpha_{\text{máx}}$
10	0,8	0,002	0,8	0,002	4	0,01	5
β_0	R_D	R_{con}	a_d	a_c	k_{mc}	k_{md}	k_{od}
7,81	12	0,006	0,0037	0,0037	0,833	0,0444	0,178

Tabla 8-20.: Parámetros del algoritmo con $\text{range}(\Omega) = 20$.

Los valores de las tablas **8-17**, **8-18**, **8-19** y **8-20** se establecieron con las restricciones:

- $R_D \geq 100$, tabla **8-17**.
- $R_D \geq 5,12$, tabla **8-18**.
- $R_D \geq 30$, tabla **8-19**.
- $R_D \geq 10$, tabla **8-20**.
- $\alpha_{\text{máx}} \leq 5$.
- $a_c \leq 0,2$.
- $k_{mc} \leq 1,6667$.

Para τ_c se tienen diferentes valores considerando los casos mostrados en la tabla 8-21.

Criterio	N_α	Restricción	τ_c
$R_\alpha = 2\Delta_r \text{ máx}$	8	$\tau_c \leq 0,28148$	0,028148
$R_\alpha = 1\Delta_r \text{ máx}$	15	$\tau_c \leq 0,28148$	0,028148
$R_\alpha = 0,5\Delta_r \text{ máx}$	30	$\tau_c \leq 0,13981$	0,013981

Tabla 8-21.: Casos para τ_c .

Al realizar los cálculos para K_α y K_V empleando los anteriores valores se tienen las estrategias para el incremento de energía mostradas en la figura 8-41.

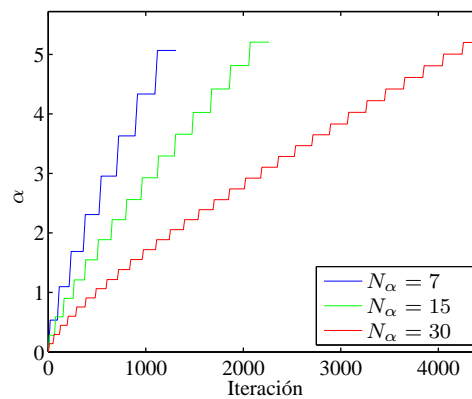


Figura 8-41.: Estrategia para el incremento de energía.

8.6.1. Resultados cualitativos para 10D

En estos resultados para cada función de prueba se observa de forma cualitativa un caso representativo del comportamiento del algoritmo teniendo las siguientes figuras:

- Valor mínimo encontrado y energía suministrada.
- Velocidad medida y estimada con el valor de α .
- Desviación estándar para cada dimensión, radio medido y estimado.

Las figuras se determinan considerando condiciones iniciales locales y empleando la versión estocástica del algoritmo VPSO.

Resultados para f_1

Las figuras que muestran los resultados cualitativos para la función objetivo f_1 son las siguientes:

- Figura 8-42: Valor mínimo encontrado y energía suministrada.
- Figura 8-43: Velocidad medida y estimada.
- Figura 8-44: Dispersión para cada dimensión, radio medido y estimado.

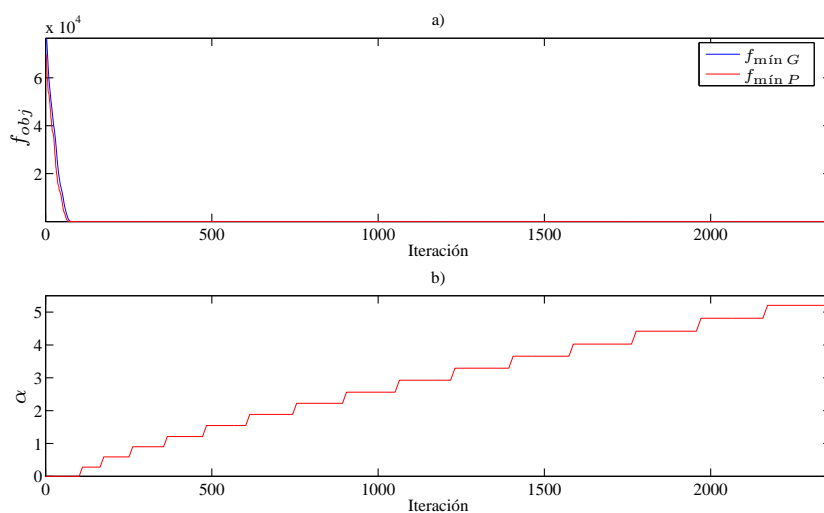


Figura 8-42.: a) Convergencia del algoritmo, b) Energía suministrada.

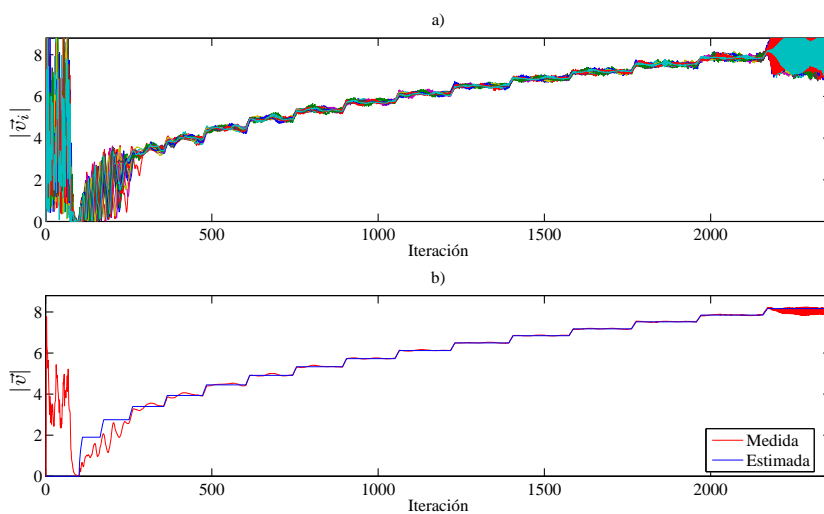


Figura 8-43.: a) Magnitud de las velocidades, b) Magnitud promedio y estimada.

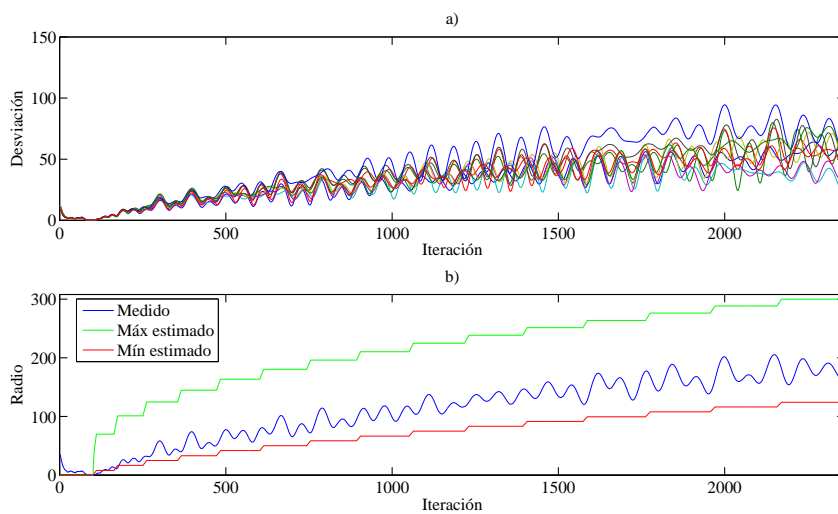


Figura 8-44.: a) Dispersión en cada dimensión, b) Radio medido y máximo, mínimo estimado.

En un primer lugar, para la función de prueba f_1 , en la figura 8-42 se aprecia la convergencia rápida del enjambre hacia el valor mínimo. Por su parte en la figura 8-43 se observa el incremento de energía y la velocidad medida la cual se aproxima a la estimada. Adicionalmente en la figura 8-44 se puede apreciar que el radio medido se encuentra cerca al radio mínimo estimado. Finalmente es de notar que se logra una buena dispersión en la mayoría de dimensiones.

Resultados para f_2

Las figuras que muestran los resultados cualitativos para la función objetivo f_2 son las siguientes:

- Figura 8-45: Valor mínimo encontrado y energía suministrada.
- Figura 8-46: Velocidad medida y estimada.
- Figura 8-47: Dispersión para cada dimensión, radio medido y estimado.

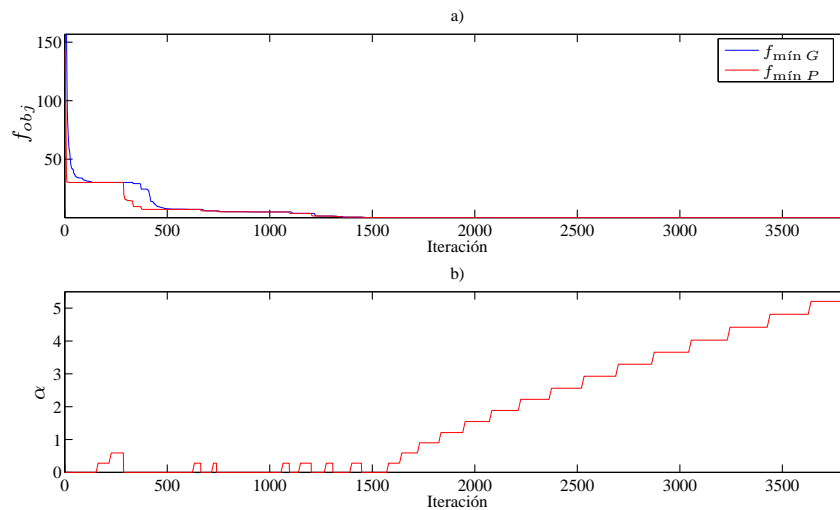


Figura 8-45.: a) Convergencia del algoritmo, b) Energía suministrada.

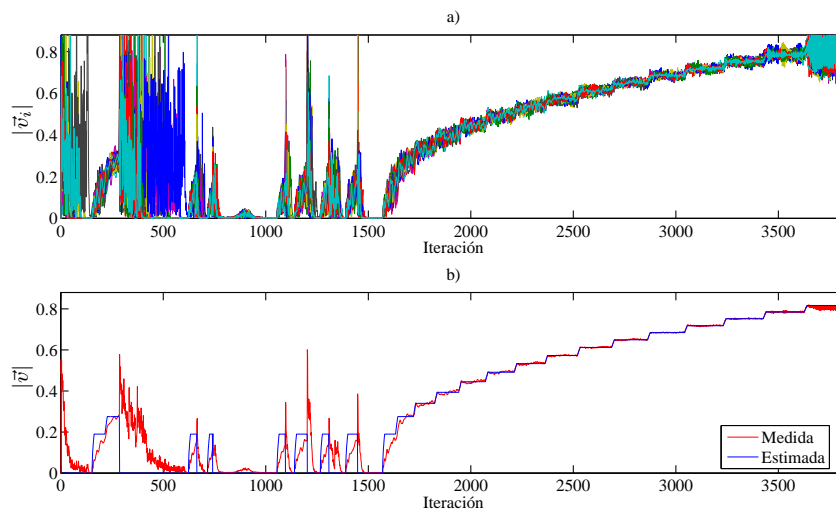


Figura 8-46.: a) Magnitud de las velocidades, b) Magnitud promedio y estimada.

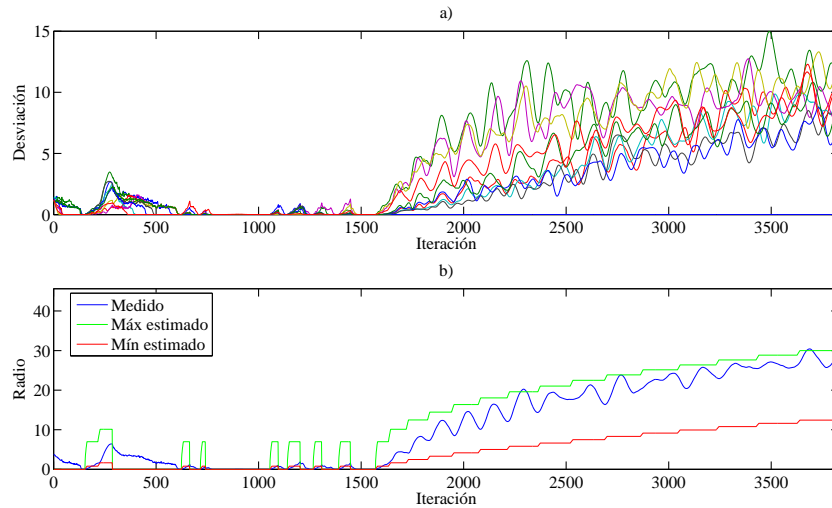


Figura 8-47.: a) Dispersión en cada dimensión, b) Radio medido y máximo, mínimo estimado.

En este caso en la figura 8-45 se observa una adecuada convergencia del algoritmo. También se aprecia que la velocidad medida se aproxima a la estimada (figura 8-46). Como es de notar en la figura 8-47 durante las ultimas iteraciones se logra una buena dispersión en la mayoría de las dimensiones. Finalmente se observa que el radio medido se encuentra cerca al radio mínimo estimado.

Resultados para f_3

Las figuras que muestran los resultados cualitativos para la función objetivo f_3 son las siguientes:

- Figura 8-48: Valor mínimo encontrado y energía suministrada.
- Figura 8-49: Velocidad medida y estimada.
- Figura 8-50: Dispersión para cada dimensión, radio medido y estimado.

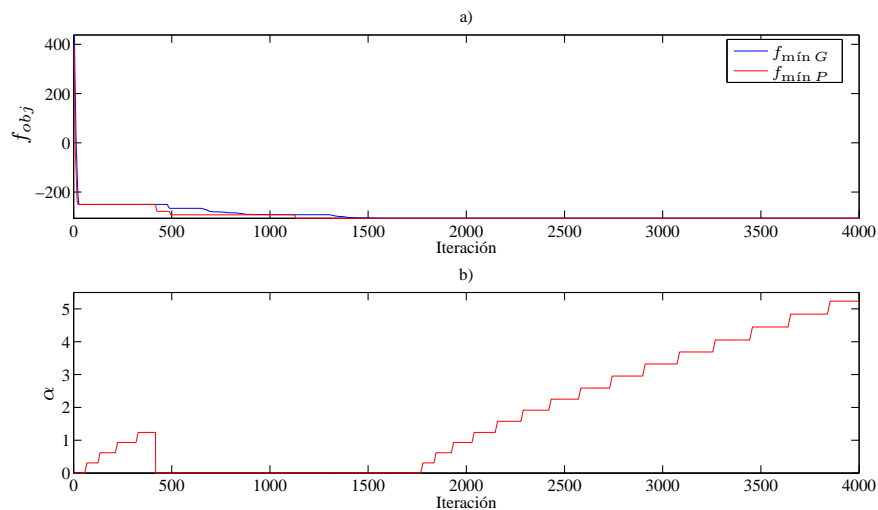


Figura 8-48.: a) Convergencia del algoritmo, b) Energía suministrada.

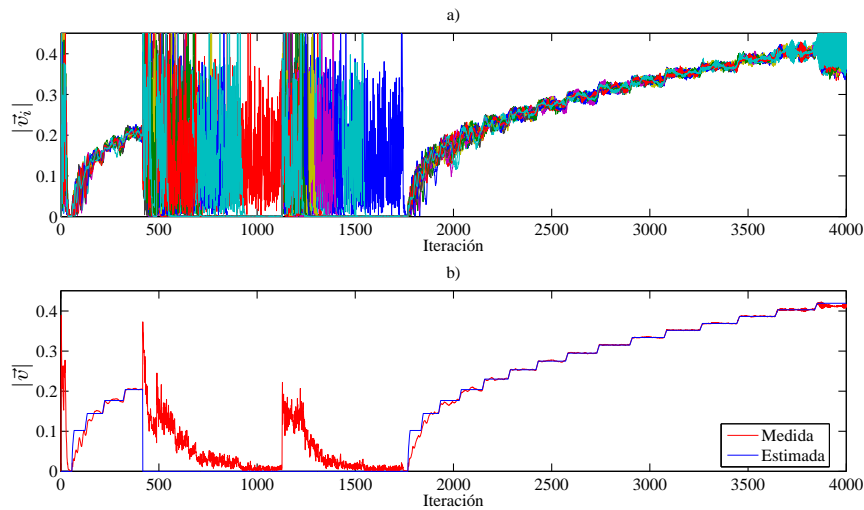


Figura 8-49.: a) Magnitud de las velocidades, b) Magnitud promedio y estimada.

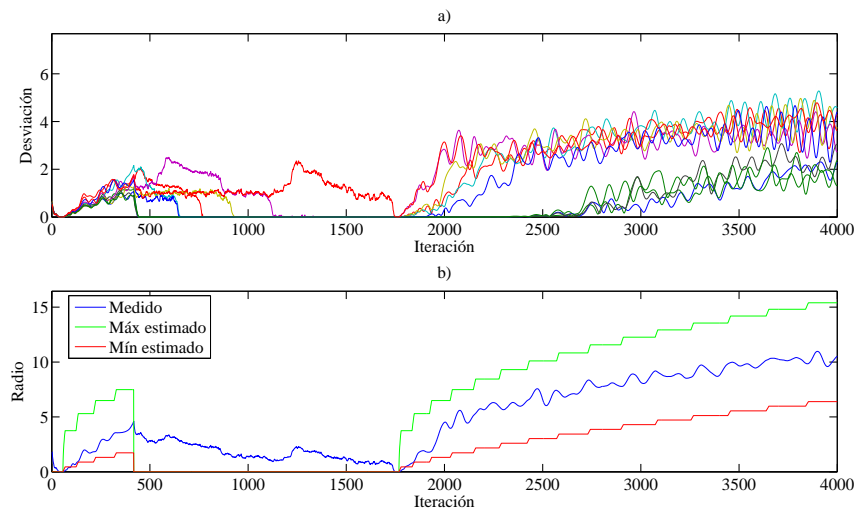


Figura 8-50.: a) Dispersión en cada dimensión, b) Radio medido y máximo, mínimo estimado.

En estas figuras se observa el proceso de convergencia y dispersión lo cual se encuentra regido por la estrategia para el incremento de energía. Es de notar que la mayor parte de las iteraciones se emplea para realizar el proceso de dispersión (figura 8-48). En la figura 8-49 se aprecia que la velocidad de las partículas está dada por el incremento de energía teniendo una mejor aproximación con la velocidad estimada en las últimas iteraciones. Otro resultado consiste en la baja dispersión que se logra para algunas dimensiones del espacio de búsqueda (figura 8-50). Finalmente es de apreciar que el radio medido se encuentra dentro de los límites estimados.

Resultados para f_4

Las figuras que muestran los resultados cualitativos para la función objetivo f_4 son las siguientes:

- Figura 8-51: Valor mínimo encontrado y energía suministrada.
- Figura 8-52: Velocidad medida y estimada.
- Figura 8-53: Dispersión para cada dimensión, radio medido y estimado.

En este grupo de figuras se puede observar que el enjambre logra escapar de un valor mínimo para luego realizar la convergencia hacia otro punto mínimo. Como es de apreciar en las figuras **8-51** y **8-53** en la medida que se incrementa el radio de giro se emplean más iteraciones para lograr la dispersión del enjambre.

En estos resultados también se puede apreciar que para las iteraciones finales se tiene una mejor aproximación entre la velocidad medida y estimada.

Por otra parte, es de notar que en la mayoría de las dimensiones se logra una buena dispersión de las partículas. Finalmente se observa que el radio medido se encuentra dentro de los límites estimados.

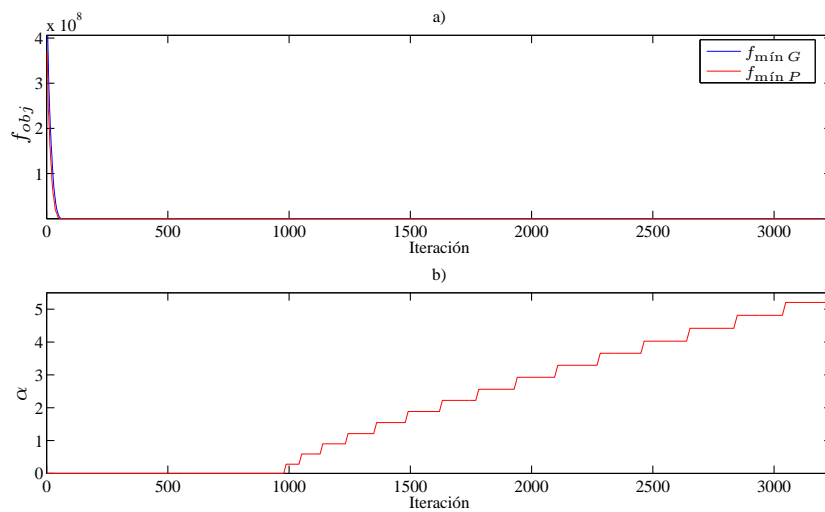


Figura 8-51.: a) Convergencia del algoritmo, b) Energía suministrada.

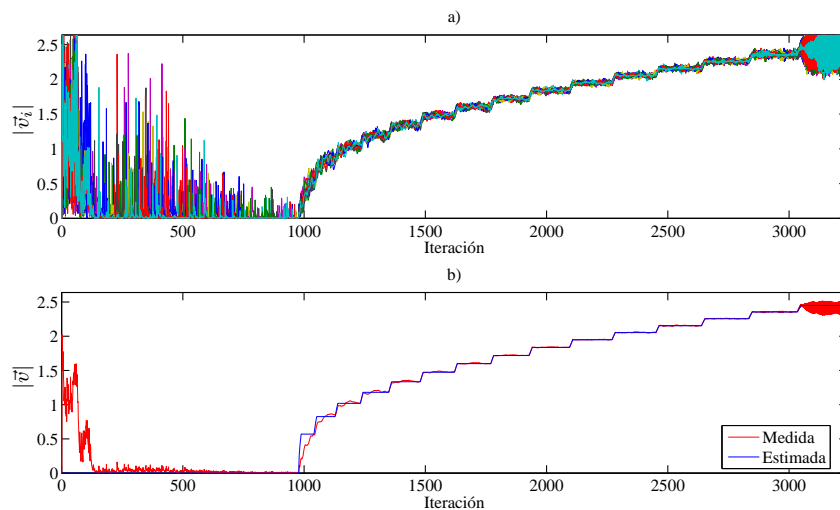


Figura 8-52.: a) Magnitud de las velocidades, b) Magnitud promedio y estimada.

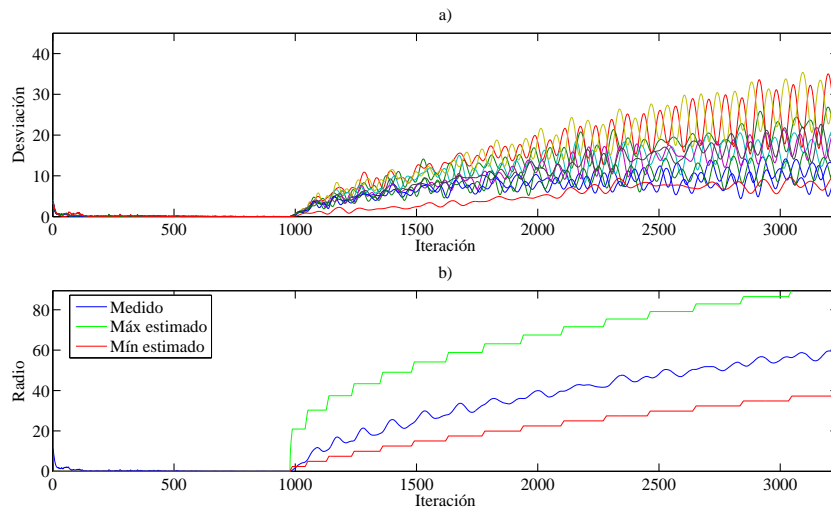


Figura 8-53.: a) Dispersión en cada dimensión, b) Radio medido y máximo, mínimo estimado.

Resultados para f_5

En este caso las figuras que muestran los resultados cualitativos para la función objetivo f_5 son las siguientes:

- Figura 8-54: Valor mínimo encontrado y energía suministrada.
- Figura 8-55: Velocidad medida y estimada.
- Figura 8-56: Dispersión para cada dimensión, radio medido y estimado.

En este grupo de resultados se puede observar que el enjambre converge a varios mínimos locales lo cual se logra realizando procesos de dispersión mediante incrementos de energía. El máximo incremento de energía se presenta en el último proceso de dispersión indicando esto que el enjambre de partículas no encontró un mejor valor de la función objetivo.

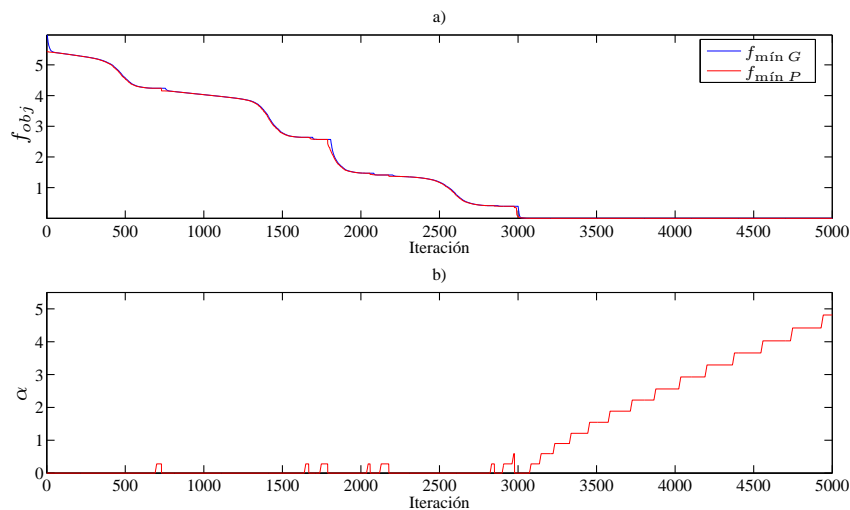


Figura 8-54.: a) Convergencia del algoritmo, b) Energía suministrada.

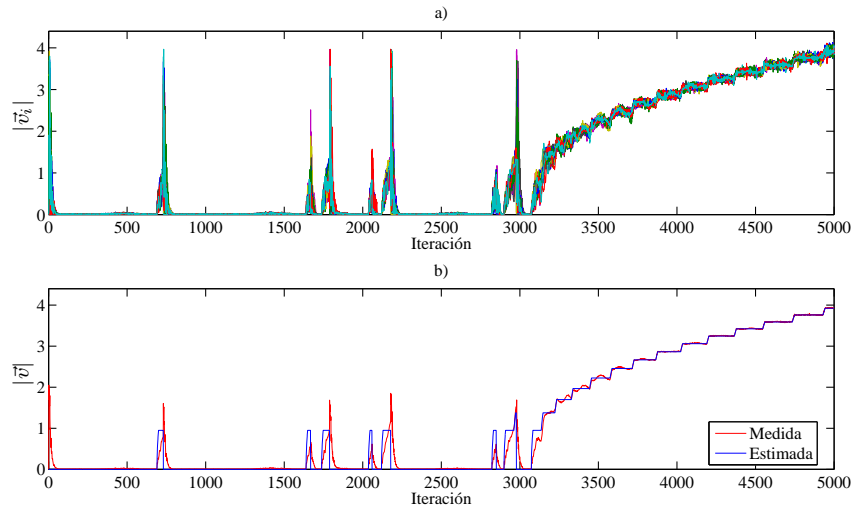


Figura 8-55.: a) Magnitud de las velocidades, b) Magnitud promedio y estimada.

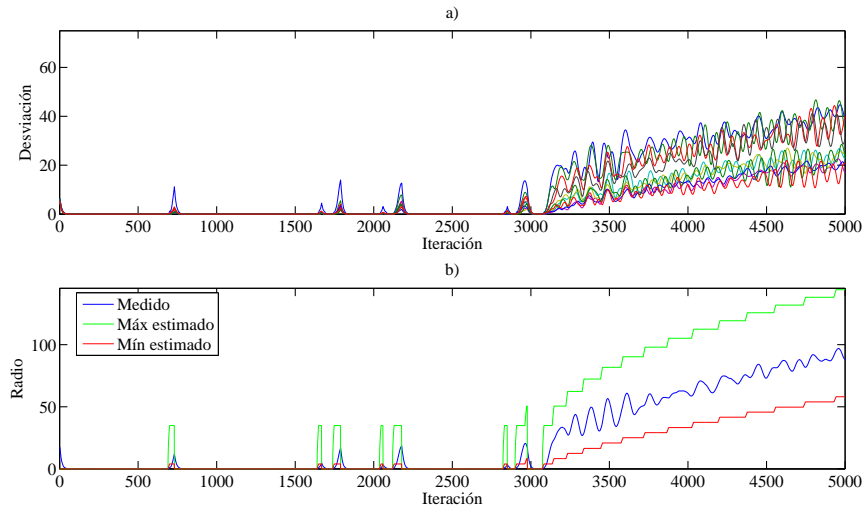


Figura 8-56.: a) Dispersión en cada dimensión, b) Radio medido y máximo, mínimo estimado.

Adicionalmente, en estas figuras se puede observar una buena dispersión de las partículas en todas las dimensiones del espacio de búsqueda. Finalmente también se aprecia que el radio medido varía entre los límites estimados.

Resultados para f_6

Para observar de forma cualitativa el comportamiento del algoritmo con la función objetivo f_6 se tiene el siguiente grupo de figuras:

- Figura 8-57: Valor mínimo encontrado y energía suministrada.
- Figura 8-58: Velocidad medida y estimada.
- Figura 8-59: Dispersión para cada dimensión, radio medido y estimado.

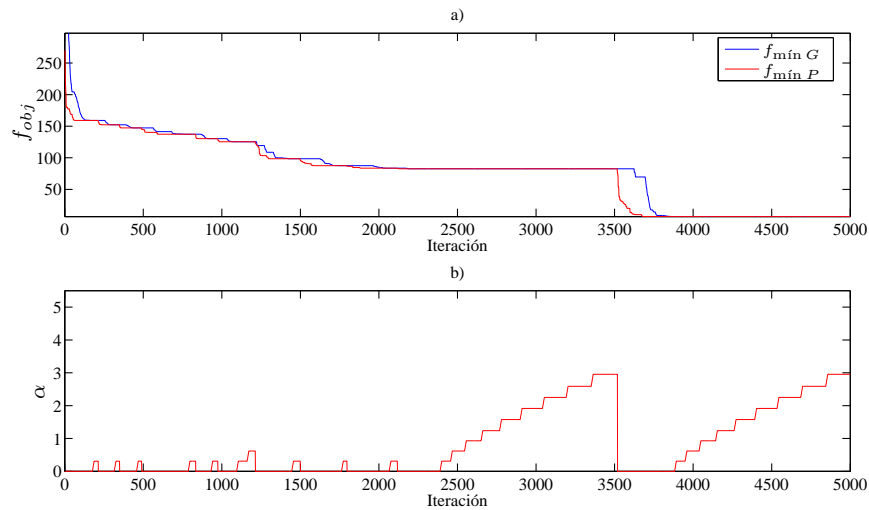


Figura 8-57.: a) Convergencia del algoritmo, b) Energía suministrada.

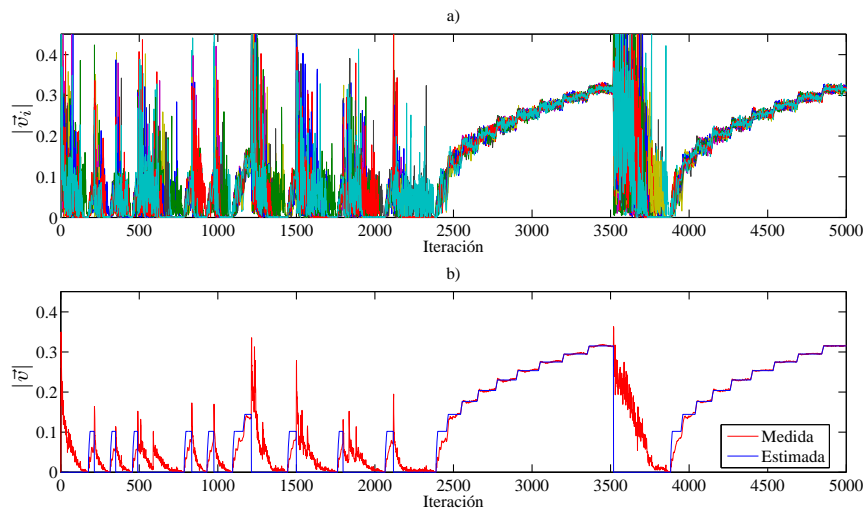


Figura 8-58.: a) Magnitud de las velocidades, b) Magnitud promedio y estimada.

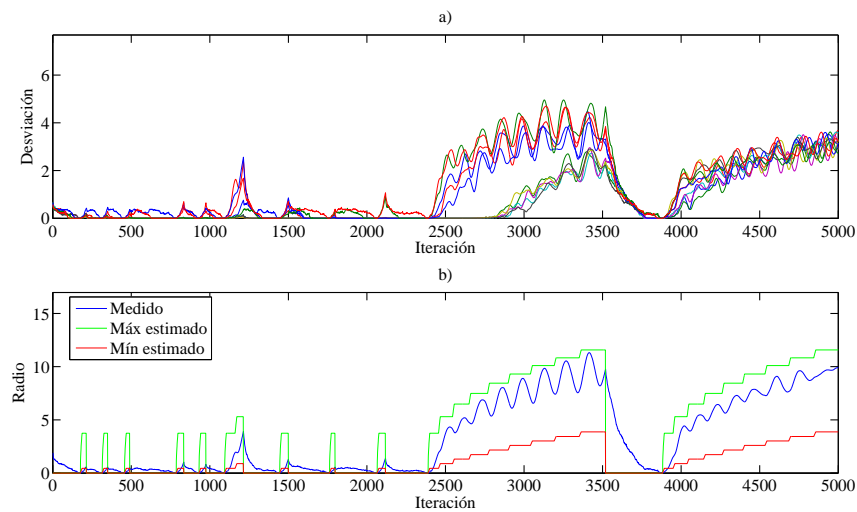


Figura 8-59.: a) Dispersión en cada dimensión, b) Radio medido y máximo, mínimo estimado.

En estas figuras se observa que mediante el proceso de dispersión el enjambre logra escapar de un mínimo local y de esta forma encontrar un mejor valor de la función objetivo. También se aprecia que la velocidad medida se aproxima a la estimada en buena parte de las iteraciones. Finalmente es de notar que se tiene una buena dispersión de las partículas en cada dimensión y el radio medido se encuentra en los límites estimados.

Resultados para f_7

Las figuras que muestran los resultados cualitativos para la función objetivo f_7 son las siguientes:

- Figura 8-60: Valor mínimo encontrado y energía suministrada.
- Figura 8-61: Velocidad medida y estimada.
- Figura 8-62: Dispersión para cada dimensión, radio medido y estimado.

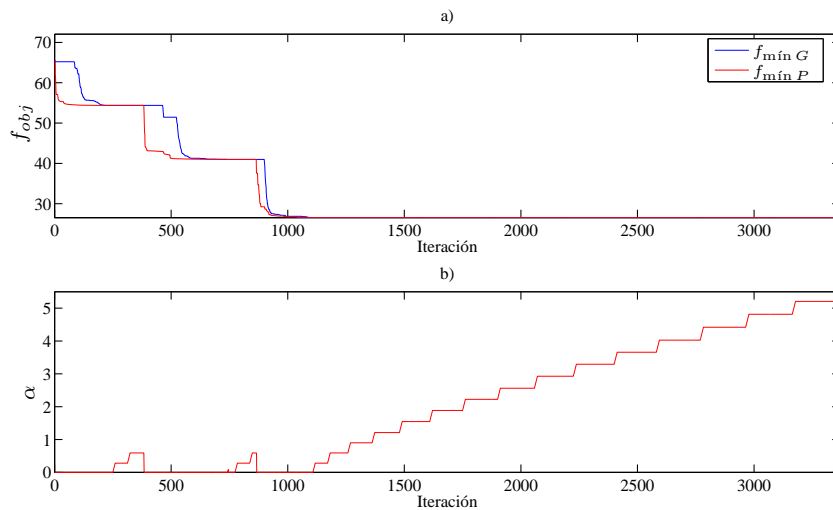


Figura 8-60.: a) Convergencia del algoritmo, b) Energía suministrada.

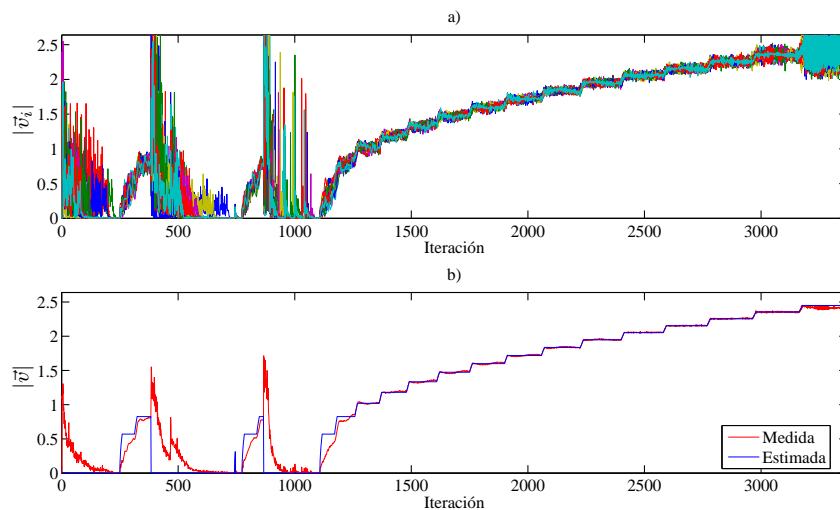


Figura 8-61.: a) Magnitud de las velocidades, b) Magnitud promedio y estimada.

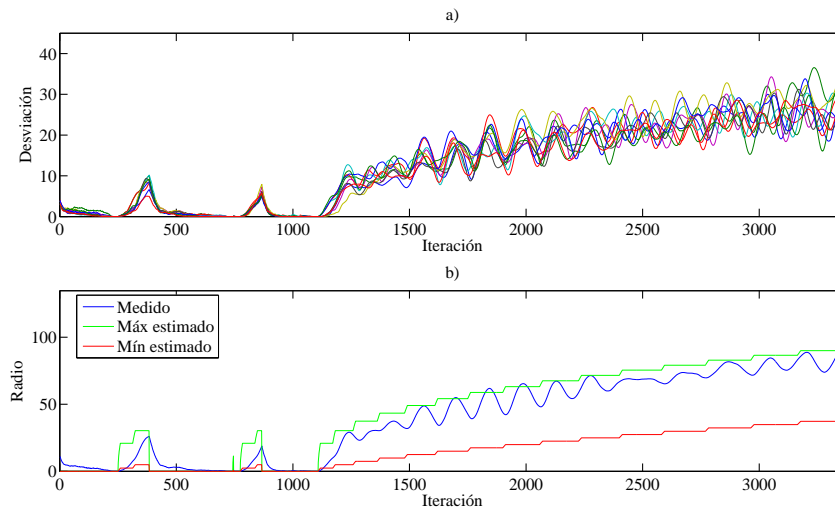


Figura 8-62.: a) Dispersión en cada dimensión, b) Radio medido y máximo, mínimo estimado.

En estos resultados se puede apreciar que el algoritmo realiza varios incrementos de energía lo cual le permite encontrar un mejor valor de la función objetivo. También se observa que la velocidad de las partículas depende de los incrementos realizados al factor de propulsión. Finalmente es de apreciar que se logra una buena dispersión de las partículas en el espacio de búsqueda. En este caso el radio medido se acerca al valor máximo calculado.

Resultados para f_8

Las figuras que muestran los resultados cualitativos para la función objetivo f_8 son las siguientes:

- Figura 8-63: Valor mínimo encontrado y energía suministrada.
- Figura 8-64: Velocidad medida y estimada.
- Figura 8-65: Dispersión para cada dimensión, radio medido y estimado.

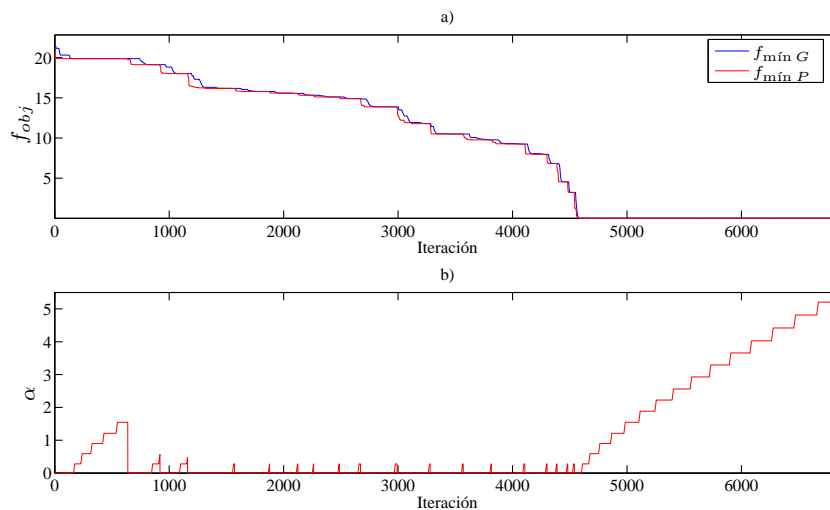


Figura 8-63.: a) Convergencia del algoritmo, b) Energía suministrada.

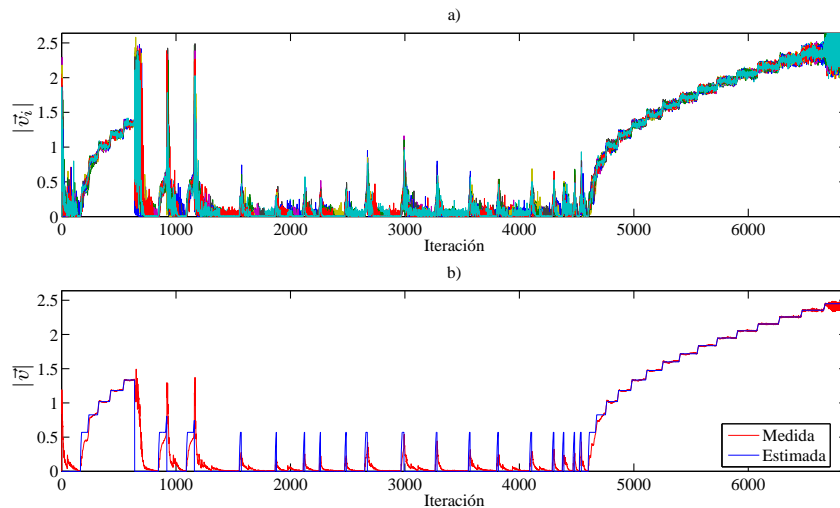


Figura 8-64.: a) Magnitud de las velocidades, b) Magnitud promedio y estimada.

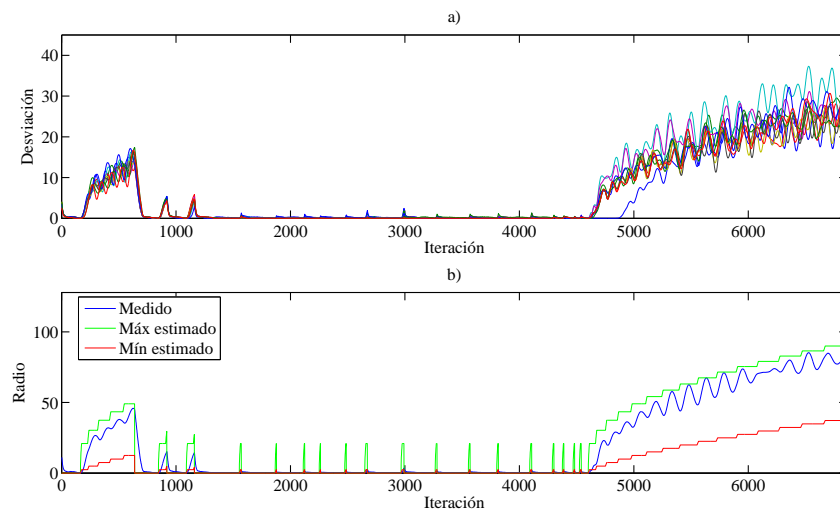


Figura 8-65.: a) Dispersión en cada dimensión, b) Radio medido y máximo, mínimo estimado.

Para esta función objetivo se observa que el enjambre logra escapar varios mínimos locales. Por otra parte se aprecia que la diferencia entre la velocidad medida y estimada tiende a ser menor para velocidades altas de las partículas. En estos resultados también se observa una buena dispersión para cada dimensión del espacio de búsqueda. Finalmente es de notar que el radio medido se aproxima al máximo estimado.

8.6.2. Resultados cuantitativos para 10D

En esta sección se compara el desempeño del algoritmo VPSO con las diferentes versiones del algoritmo PSO tomadas como referente. En las tablas **B-5**, **B-6**, **B-7** y **B-8** se pueden apreciar los resultados obtenidos de los algoritmos VPSO y PSO. Con los datos recolectados se realizan las respectivas pruebas de normalidad homocedasticidad y comparación entre grupos registrando los respectivos p -value. En las tablas **8-22**, **8-23**, **8-24** y **8-25** se presentan los resultados obtenidos para las pruebas de normalidad, por su parte, en las tablas **8-26**, **8-27**, **8-28** y **8-29** se muestran los resultados para las pruebas de homocedasticidad y comparación entre grupos.

Función	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
f_1	0.58408	0.44459	0.46642	0.26832	0.062891	0.010782	0.013056
f_2	0.0093316	0.0070868	0.0034615	0.003293	1.0015×10^{-7}	1.948×10^{-11}	1.3386×10^{-11}
f_3	0.16017	0.33151	0.064795	1.0685×10^{-13}	0.00089234	0.034887	0.00020455
f_4	0.11365	0.049457	0.060747	0.072205	2.0326×10^{-9}	1.9234×10^{-8}	8.4419×10^{-9}
f_5	0.029545	0.060337	0.11681	0.26211	0.31753	0.38411	0.47537
f_6	0.66513	0.43339	0.4169	0.4323	0.079888	0.10877	0.067353
f_7	0.74832	0.6324	0.57402	0.57685	0.0039877	0.0095959	0.00067202
f_8	4.5759×10^{-7}	2.7566×10^{-9}	3.7322×10^{-11}	3.1134×10^{-12}	1.7×10^{-13}	1.1578×10^{-13}	3.0661×10^{-13}

Tabla 8-22.: Análisis de normalidad de datos para los resultados de la tabla B-5. Condiciones iniciales globales y VPSO determinístico.

Función	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
f_1	0.0013235	0.0018679	0.026557	0.00026321	0.062891	0.010782	0.013056
f_2	0.010334	2.3937×10^{-6}	1.5459×10^{-8}	2.6533×10^{-5}	1.0015×10^{-7}	1.948×10^{-11}	1.3386×10^{-11}
f_3	1.0684×10^{-13}	0.10573	0.0012687	1.0684×10^{-13}	0.00089234	0.034887	0.00020455
f_4	3.8615×10^{-9}	0.039566	1.5888×10^{-9}	3.0353×10^{-8}	2.0326×10^{-9}	1.9234×10^{-8}	8.4419×10^{-9}
f_5	0.019713	0.31166	0.052718	0.022605	0.31753	0.38411	0.47537
f_6	0.026893	0.044753	0.031664	0.037342	0.079888	0.10877	0.067353
f_7	0.46539	0.32374	0.70305	0.28332	0.0039877	0.0095959	0.00067202
f_8	1.1599×10^{-13}	1.1118×10^{-13}	0.29159	0.075397	1.7×10^{-13}	1.1578×10^{-13}	3.0661×10^{-13}

Tabla 8-23.: Análisis de normalidad de datos para los resultados de la tabla B-6. Condiciones iniciales globales y VPSO estocástico.

Función	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
f_1	9.4477×10^{-7}	1.2498×10^{-6}	9.664×10^{-6}	5.1684×10^{-6}	0.0048632	0.00039168	0.038222
f_2	2.618×10^{-10}	8.3045×10^{-14}	1.4508×10^{-13}	1.5599×10^{-12}	0.47612	0.28278	0.70685
f_3	0.00016964	1.0283×10^{-6}	4.4767×10^{-8}	1.0845×10^{-6}	0.0070706	0.076486	0.013982
f_4	0.011211	0.017053	0.071528	0.077343	1.9384×10^{-8}	0.00023221	0.028977
f_5	0.00048504	0.0092897	0.00031291	0.00089235	0.021998	0.17092	0.009697
f_6	0.40445	0.27949	0.68496	0.5613	0.34411	0.34764	0.20133
f_7	0.69063	0.63768	0.76066	0.54504	0.082183	0.54167	0.10999
f_8	4.824×10^{-6}	1.4904×10^{-5}	0.00013777	0.00027199	6.2645×10^{-8}	8.8196×10^{-7}	9.5862×10^{-8}

Tabla 8-24.: Análisis de normalidad de datos para los resultados de la tabla B-7. Condiciones iniciales locales y VPSO determinístico.

Función	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
f_1	1.9315×10^{-6}	0.0063959	5.4284×10^{-5}	9.1812×10^{-5}	0.0048632	0.00039168	0.038222
f_2	3.5272×10^{-6}	1.597×10^{-6}	4.7567×10^{-13}	7.4405×10^{-12}	0.47612	0.28278	0.70685
f_3	5.1728×10^{-5}	0.0010165	1.5747×10^{-8}	3.0034×10^{-6}	0.0070706	0.076486	0.013982
f_4	2.4601×10^{-9}	0.010578	9.6914×10^{-11}	0.028476	1.9384×10^{-8}	0.00023221	0.028977
f_5	0.001344	0.011746	0.0009954	0.00031062	0.021998	0.17092	0.009697
f_6	0.11052	0.029169	0.054579	0.077386	0.34411	0.34764	0.20133
f_7	0.81327	0.57163	0.69226	0.20423	0.082183	0.54167	0.10999
f_8	2.6215×10^{-6}	4.0062×10^{-9}	2.5037×10^{-12}	1.3482×10^{-5}	6.2645×10^{-8}	8.8196×10^{-7}	9.5862×10^{-8}

Tabla 8-25.: Análisis de normalidad de datos para los resultados de la tabla B-8. Condiciones iniciales locales y VPSO estocástico.

Con el fin de establecer los casos que presentan diferencias se realiza la prueba de Bonferroni (no paramétrica) obteniendo los resultados mostrados en las figuras 8-66, 8-67, 8-68 y 8-69.

Función	Normalidad	Homocedasticidad	Kruskal-Wallis	ANOVA
f_1	No	0	0	0
f_2	No	8.6547×10^{-11}	0	0.012 591
f_3	No	0	0	0
f_4	No	0	2.5313×10^{-14}	1.2196×10^{-5}
f_5	No	0.028 327	0.045 225	0.043 381
f_6	Si	0	0	0
f_7	No	2.6594×10^{-9}	0	0
f_8	No	0	0	6.1424×10^{-10}

Tabla 8-26.: Análisis de datos para los resultados de la tabla **B-5**. Condiciones iniciales globales y VPSO determinístico.

Función	Normalidad	Homocedasticidad	Kruskal-Wallis	ANOVA
f_1	No	0	0	0
f_2	No	3.885×10^{-11}	9.1994×10^{-7}	0.002 061 4
f_3	No	0	0	0
f_4	No	0	0	4.5457×10^{-7}
f_5	No	0.022 333	0.126 12	0.057 856
f_6	No	3.3307×10^{-16}	0	0
f_7	No	1.6098×10^{-14}	0	0
f_8	No	0.000 140 48	0	0.317 14

Tabla 8-27.: Análisis de datos para los resultados de la tabla **B-6**. Condiciones iniciales globales y VPSO estocástico.

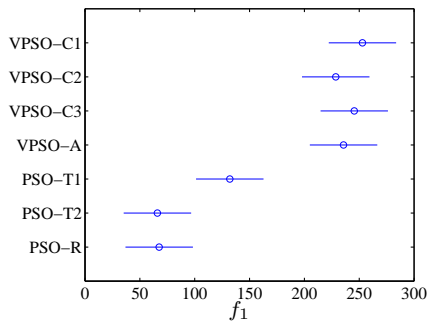
Función	Normalidad	Homocedasticidad	Kruskal-Wallis	ANOVA
f_1	No	2.2204×10^{-14}	3.0395×10^{-8}	0.000 116 89
f_2	No	0	0	0
f_3	No	1.0272×10^{-7}	0	0
f_4	No	9.7313×10^{-5}	9.992×10^{-16}	0.001 707 8
f_5	No	2.1926×10^{-9}	1.7379×10^{-7}	4.585×10^{-6}
f_6	Si	1.9956×10^{-6}	1.0125×10^{-9}	8.1268×10^{-14}
f_7	Si	2.5377×10^{-11}	0	0
f_8	No	0	0.011 341	0

Tabla 8-28.: Análisis de datos para los resultados de la tabla **B-7**. Condiciones iniciales locales y VPSO determinístico.

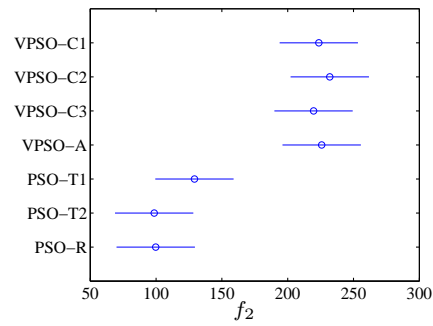
Función	Normalidad	Homocedasticidad	Kruskal-Wallis	ANOVA
f_1	No	0	0	0
f_2	No	0	0	0
f_3	No	2.9957×10^{-5}	0	0
f_4	No	1.8828×10^{-7}	0	5.526×10^{-11}
f_5	No	7.1122×10^{-8}	1.2927×10^{-6}	1.2441×10^{-6}
f_6	Si	5.2956×10^{-7}	0	0
f_7	Si	1.2948×10^{-7}	0	0
f_8	No	0	3.2998×10^{-11}	0

Tabla 8-29.: Análisis de datos para los resultados de la tabla **B-8**. Condiciones iniciales locales y VPSO estocástico.

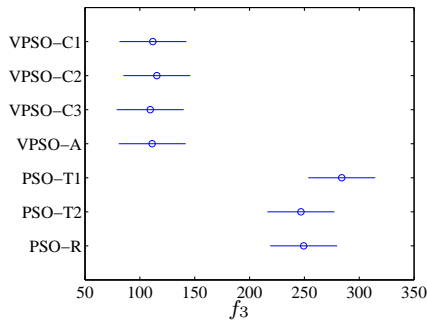
Como se puede observar en las figuras **8-66**, **8-67**, **8-68** y **8-69** se presentan las comparaciones entre los algoritmos VPSO y PSO con sus diferentes configuraciones de parámetros.



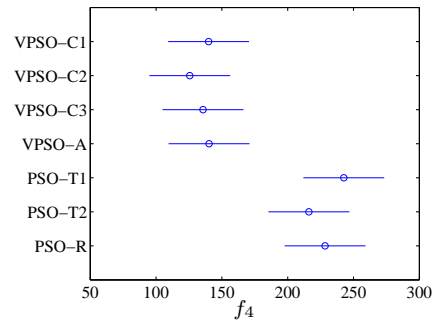
(a) Comparación para f_1 .



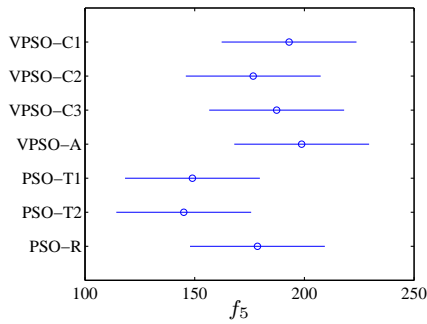
(b) Comparación para f_2 .



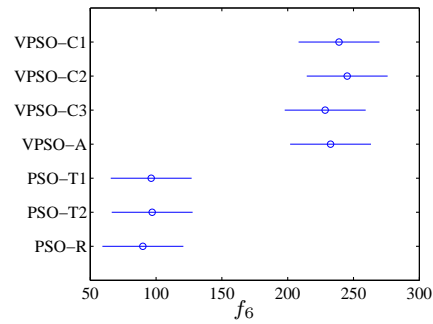
(c) Comparación para f_3 .



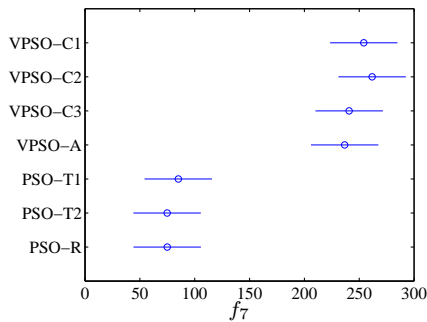
(d) Comparación para f_4 .



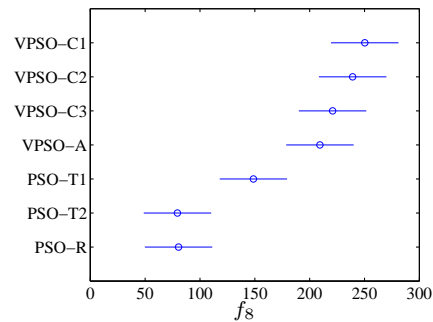
(e) Comparación para f_5 .



(f) Comparación para f_6 .



(g) Comparación para f_7 .



(h) Comparación para f_8 .

Figura 8-66.: Resultados de la comparación para el valor obtenido con las diferentes funciones objetivo. Condiciones iniciales globales y VPSO determinístico.

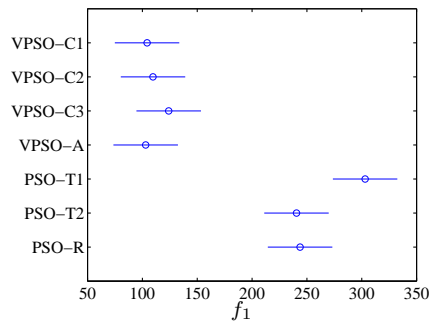
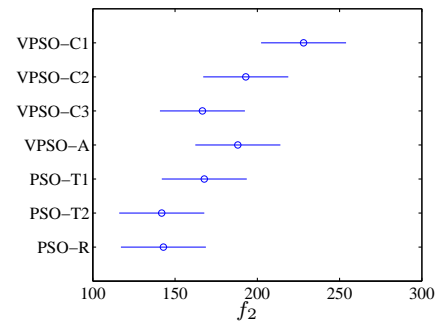
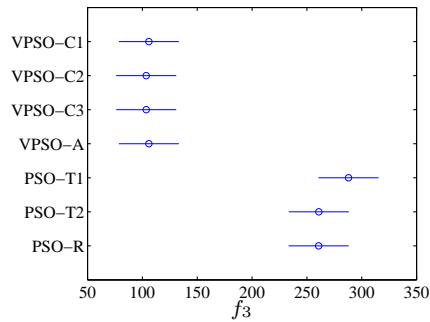
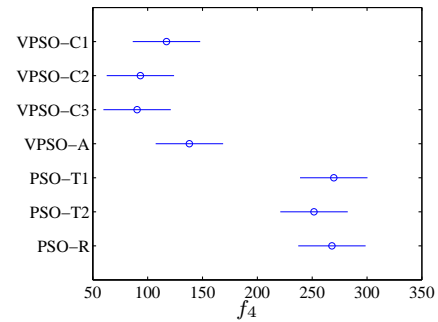
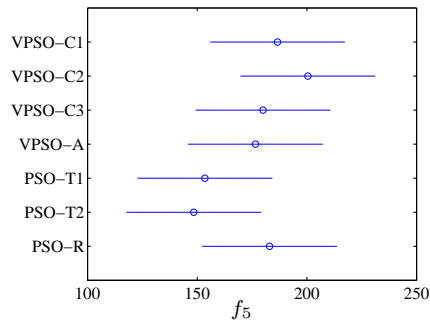
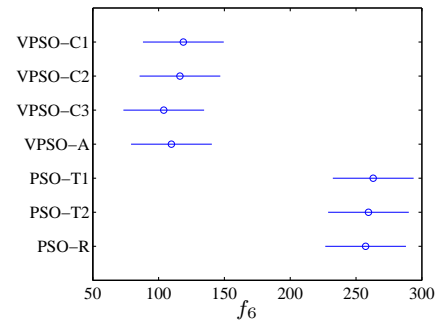
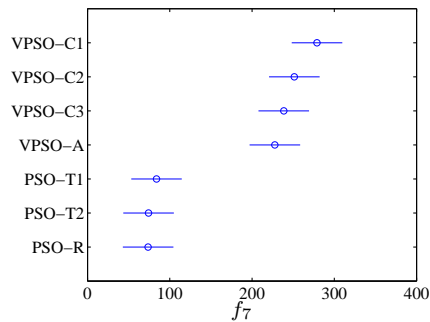
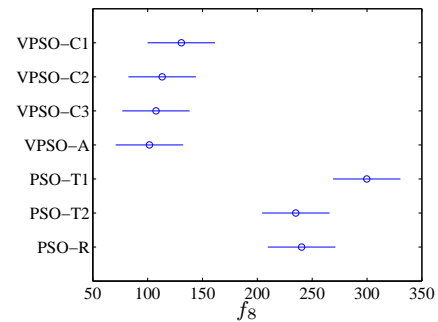
(a) Comparación para f_1 .(b) Comparación para f_2 .(c) Comparación para f_3 .(d) Comparación para f_4 .(e) Comparación para f_5 .(f) Comparación para f_6 .(g) Comparación para f_7 .(h) Comparación para f_8 .

Figura 8-67.: Resultados de la comparación para el valor obtenido con las diferentes funciones objetivo. Condiciones iniciales globales y VPSO estocástico.

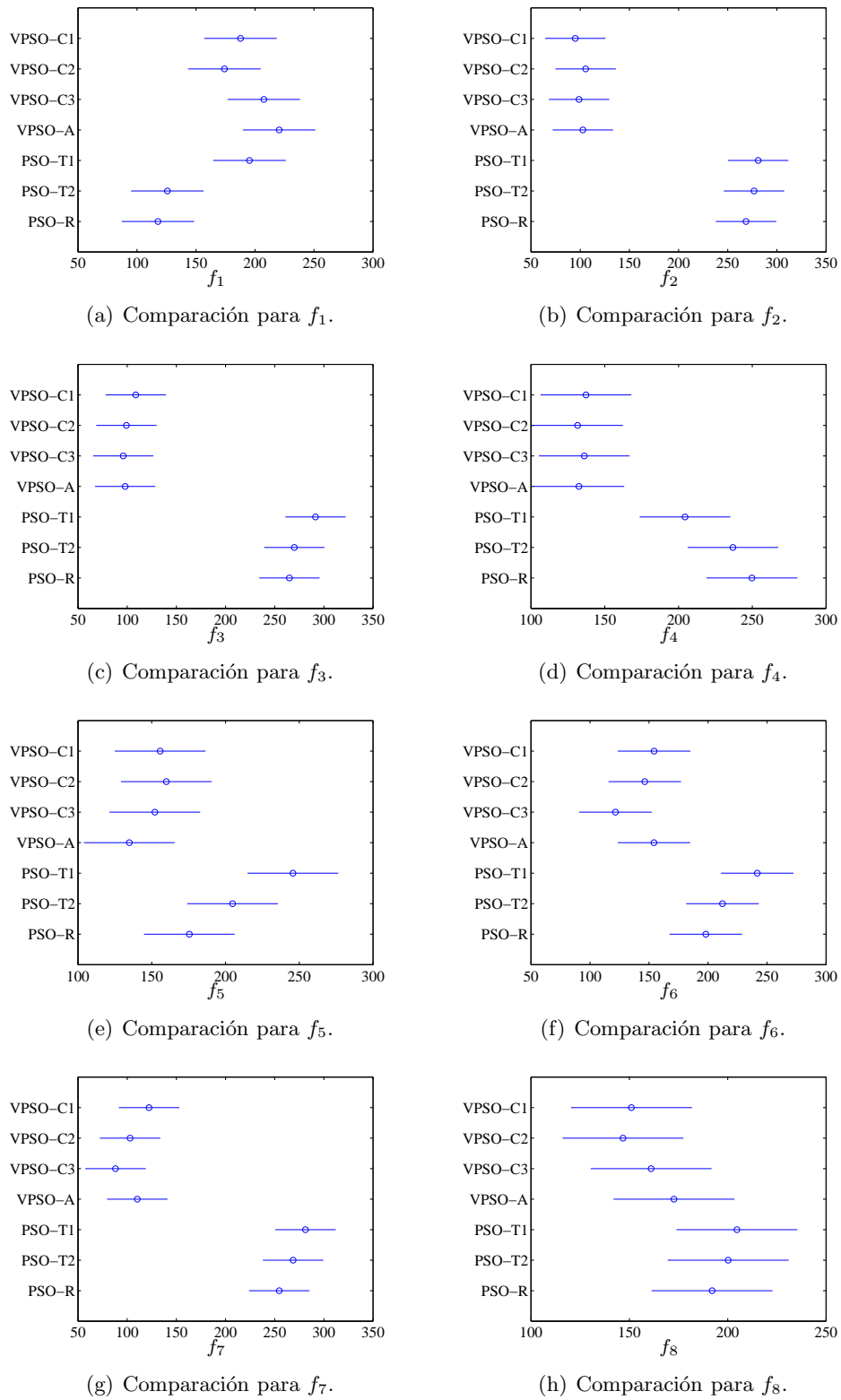


Figura 8-68.: Resultados de la comparación para el valor obtenido con las diferentes funciones objetivo. Condiciones iniciales locales y VPSO determinístico.

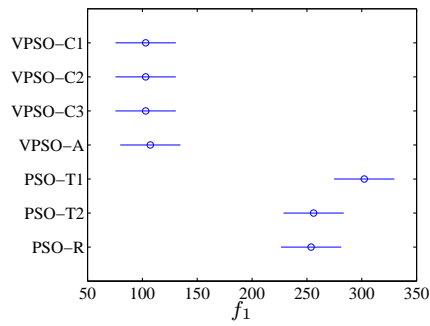
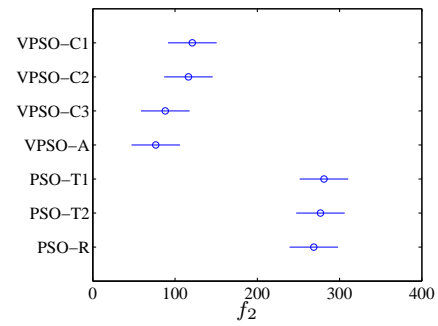
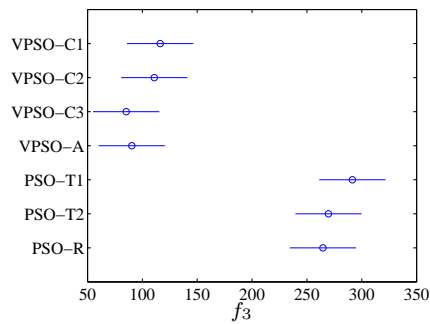
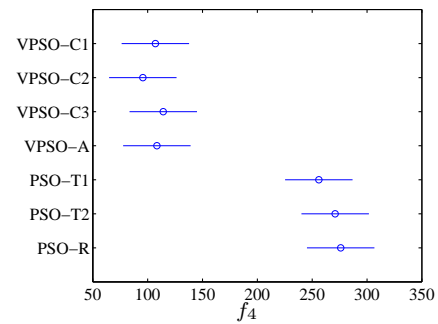
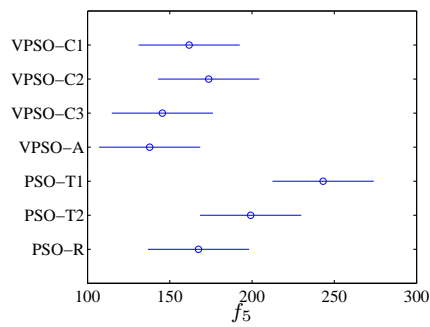
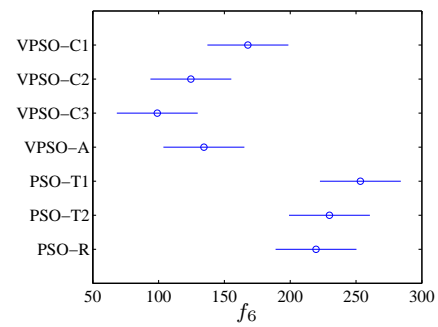
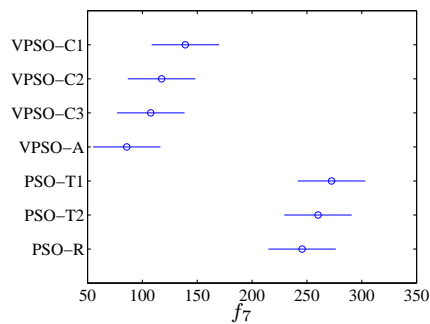
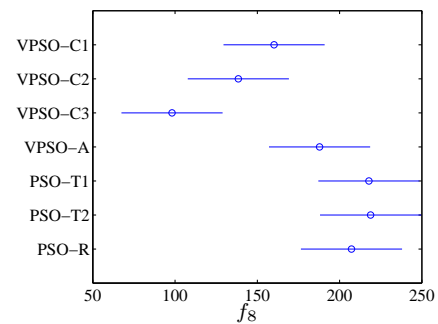
(a) Comparación para f_1 .(b) Comparación para f_2 .(c) Comparación para f_3 .(d) Comparación para f_4 .(e) Comparación para f_5 .(f) Comparación para f_6 .(g) Comparación para f_7 .(h) Comparación para f_8 .

Figura 8-69.: Resultados de la comparación para el valor obtenido con las diferentes funciones objetivo. Condiciones iniciales locales y VPSO estocástico.

En estos resultados es de apreciar que al tener condiciones iniciales globales y para las funciones de prueba f_1 , f_2 y f_7 el algoritmo PSO presenta un mejor resultado. Por su parte, para las funciones de prueba f_3 y f_4 el algoritmo VPSO tiene un mejor desempeño. En particular para la función de prueba f_5 los algoritmos PSO y VPSO presentan resultados similares. Cuando se tienen condiciones iniciales globales para las función de prueba f_6 y f_8 se aprecia que la versión estocástica del algoritmo VPSO presenta un mejor desempeño que la versión determinística, incluso logrando un mejor desempeño que el algoritmo PSO.

Por otra parte cuando se tienen condiciones iniciales locales se aprecia que el algoritmo VPSO presenta un mejor comportamiento con las funciones de prueba $f_{obj,2}$, $f_{obj,3}$, $f_{obj,4}$ y $f_{obj,7}$. Adicionalmente para las funciones de prueba $f_{obj,5}$ y $f_{obj,6}$ se observa un comportamiento favorable para el algoritmo VPSO. Finalmente, al tener condiciones iniciales locales y con las función de prueba f_1 y f_8 se aprecia que la versión estocástica del algoritmo VPSO presenta un mejor desempeño que la versión determinística.

Por otra parte en estos resultados se observa que el algoritmo VPSO estocástico tiende a presentar un mejor desempeño que el algoritmo VPSO determinístico tanto para condiciones iniciales globales como locales.

9. Conclusiones, trabajos futuros y aportes originales

9.1. Conclusiones

- La revisión de modelos permitió establecer las diferentes formas de implementar a nivel computacional un modelo de partículas que exhiba tanto desplazamientos lineales como circulares. La selección se realizó buscando tener un modelo compacto que describa los movimientos deseados.
- El modelo seleccionado permitió el desarrollo de un algoritmo de optimización basado en el comportamiento de seres vivos que presentan movimientos circulares y desplazamientos lineales.
- Los análisis realizados fueron consistentes con las simulaciones del modelo. La propuesta del algoritmo y la selección de parámetros se efectuó considerando los análisis y simulaciones realizadas. De esta misma forma se aprecia que la precisión del algoritmo se encuentra dada por la velocidad mínima de las partículas.
- Los resultados cualitativos mostraron que el algoritmo presenta un comportamiento dinámico según lo deseado manteniéndose dentro de los límites estimados. Estos resultados también muestran que la dispersión de las partículas se encuentra afectada por la forma de la función objetivo.
- Con los resultados experimentales se aprecia que el algoritmo VPSO mostró ser competitivo en comparación con el algoritmo PSO estándar, es decir, que en más del 50 % de los experimentos se tiene un mejor desempeño del algoritmo VPSO.
- En los resultados experimentales se aprecia un mejor comportamiento del algoritmo VPSO cuando se tienen condiciones iniciales locales. También se observa la tendencia a presentar un mejor comportamiento del algoritmo VPSO cuando se emplea la versión estocástica de este.

9.2. Trabajos futuros

- En un trabajo a desarrollar se pueden mejorar las aproximaciones realizadas para el análisis del modelo.
- Como fue de apreciar, existen otras alternativas para un modelo de partículas que describa movimientos lineales y circulares, por lo cual, en un trabajo futuro se pueden emplear otros modelos para implementar el algoritmo.

- Al eliminar del algoritmo el gradiente de la función objetivo se observa que las fases de este se conservan, por lo cual, se aprecia la posibilidad de tener una versión del algoritmo que no requiere el cálculo de gradientes la cual puede ser empleada en funciones no continuas.
- En un trabajo futuro se espera extender el principio del algoritmo VPSO a problemas multi-objetivo y optimización con restricciones.

9.3. Aportes originales

- Se propone una estrategia de optimización que permite escapar de mínimos locales ampliando de esta forma las capacidades de búsqueda para encontrar mejores valores de la función objetivo.
- El algoritmo emplea de forma alternada procesos de convergencia y dispersión. La convergencia se realiza mediante movimientos lineales, por su parte, para la dispersión se emplean movimientos circulares.
- La propuesta del algoritmo se realiza considerando el análisis y simulaciones del modelo seleccionado, de tal forma que se puede estimar el comportamiento dinámico del enjambre para los procesos de convergencia y dispersión.
- Tomando como referente el análisis del modelo se propone una estrategia para la selección de parámetros de tal forma que se puedan controlar las características dinámicas del enjambre.

A. Metodología para el análisis estadístico de resultados

A.1. Metodología

Cuando existe variabilidad en los datos recolectados de un experimento se suele emplear prueba estadística de hipótesis. Cuando se quiere establecer si los resultados obtenidos para dos configuraciones de parámetros son iguales, las hipótesis a considerar son:

- H_0 Hipótesis nula. Los resultados obtenidos para los dos grupos de parámetros presentan valores medios iguales.
- H_1 Hipótesis alternativa. Los resultados obtenidos para los dos grupos de parámetros no presentan valores medios iguales.

Cuando se acepta o rechaza la hipótesis nula existe la posibilidad de cometer un error el cual se puede clasificar como se muestra en la tabla **A-1**. En el error tipo I se rechaza la hipótesis nula cuando esta es verdadera, mientras que para el error tipo II se acepta la hipótesis nula siendo esta falsa.

Decisión \ Condición real	H_0 verdadera	H_0 falsa
Rechazar H_0	Error Tipo I	Correcto
Aceptar H_0	Correcto	Error Tipo II

Tabla A-1.: Error tipo I y tipo II.

Luego de realizar los experimentos con la respectiva recolección de datos el procedimiento general para la prueba de hipótesis es:

1. Establecer la hipótesis nula y alternativa.
2. Fijar el estadístico de prueba (tipo de prueba a realizar).
3. Establecer la región de rechazo de la hipótesis nula (nivel de significancia).
4. Tomar los datos y calcular el estadístico de prueba.
5. Establecer si se acepta o rechaza la hipótesis nula.

En muchas oportunidades la prueba de hipótesis se realiza considerando un nivel de significancia α -value el cual corresponde a la probabilidad de cometer un error tipo I. Para pruebas de una cola si el estadístico de prueba calculado con los datos es mayor que el calculado para el valor de

significancia la hipótesis nula se rechaza. Otro enfoque para la prueba de hipótesis consiste en el p -value el cual es la probabilidad de obtener un resultado donde la hipótesis nula es cierta. Bajo este enfoque la hipótesis nula se rechaza si el p -value del estadístico de prueba es igual o menor que el nivel de significancia establecido.

A.1.1. Pruebas estadísticas de hipótesis

Para determinar si se acepta o rechaza la hipótesis nula existen diferentes pruebas estadísticas las cuales principalmente se pueden clasificar como paramétricas y no paramétricas. Las pruebas paramétricas están basadas en suposiciones sobre los datos sin embargo son más robustas, por otro lado las pruebas no paramétricas no requieren suposiciones para su aplicación. En el caso de emplear pruebas paramétricas es necesario comprobar previamente las suposiciones mediante pruebas de normalidad y homocedasticidad, la primera determina si los datos siguen una distribución normal y la segunda consiste en establecer si los grupos de datos a comparar presentan la misma varianza. Considerando que las pruebas paramétricas son más confiables pero requieren de una verificación preliminar de las suposiciones que las soportan, entonces, una posible metodología para realizar este tipo de pruebas según [45] y [119] se describe a continuación. En el caso de tener normalidad y homocedasticidad lo recomendado es realizar un análisis de varianza (ANOVA), cuando se presente la normalidad de los datos pero no la homocedasticidad, se puede emplear la prueba de Welch o de Kruskal Wallis, finalmente si no se presenta normalidad la prueba recomendada es la de Kruskal Wallis. Esta metodología se puede apreciar en la figura A-1.

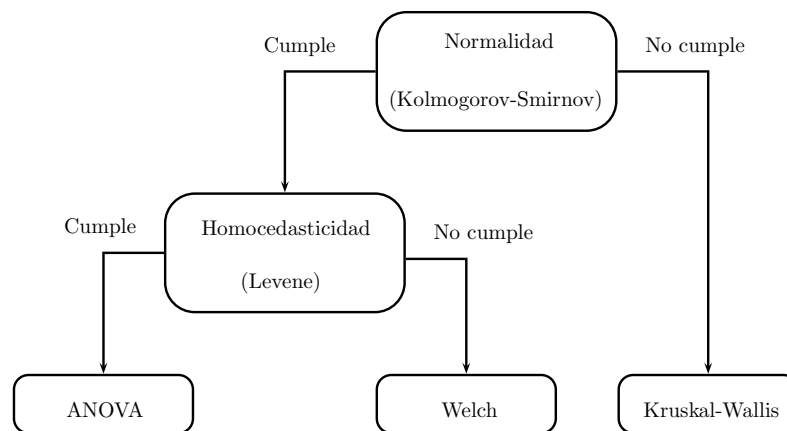


Figura A-1.: Metodología para establecer la prueba de hipótesis a realizar.

La prueba ANOVA requiere normalidad y homocedasticidad de las muestras. La homocedasticidad consiste en que dos grupos presenten la misma varianza.

Considerando el tipo de característica a establecer (normalidad, homocedasticidad, comparación de distribuciones) las pruebas citadas en la figura A-1 con sus respectivas alternativas son:

- Normalidad de datos:
 - Kolmogorov-Smirnov.
 - Shapiro-Wilk.
 - Anderson-Darling.

- Igualdad de las varianzas (homocedasticidad):
 - Levene.
 - Bartled.
- Pruebas para comparar varias distribuciones:
 - Análisis de varianza (ANOVA), requiere normalidad y homocedasticidad.
 - Welch, es una extensión de la T de Student, esta prueba requiere normalidad de los datos.
 - Kruskal-Wallis, no requiere suposiciones previas.

Si luego de aplicar la metodología indicada anteriormente se rechaza la hipótesis nula se concluye que existen diferencias significativas entre los grupos de resultados, por lo cual, el siguiente paso consiste en realizar pruebas de comparaciones múltiples para establecer que grupos presentan diferencias entre sí [119].

Si se cumplen los supuestos de normalidad y homocedasticidad, las comparaciones múltiples se pueden realizar empleando los contrastes de: Duncan, Newman-Keuls, Bonferroni, Scheffé o HSD de Tukey [119], [120].

En el caso de no cumplirse los supuestos de normalidad y homocedasticidad se pueden emplear pruebas no paramétricas para comparaciones múltiples de: Friedman, Nemenyi, Holm, Bonferroni-Dunn [121], [122] o la prueba de Bonferroni como método complementario a la prueba de Kruskal-Wallis [123].

La prueba de Friedman es un equivalente no paramétrico al test de medidas-repetidas para ANOVA. Por su parte la prueba de Bonferroni-Dunn es similar al test de Tukey para ANOVA y es útil cuando se quiere comparar un algoritmo de control en relación a otros. El test de Holm prueba secuencialmente las hipótesis ordenadas según su significancia. Finalmente la prueba de Ranking de Signos de Wilcoxon es una alternativa no paramétrica a la prueba t por parejas.

Para determinar que grupos de resultados son significativos entre sí se tienen dos enfoques, el primero consiste de una comparación de todos a todos para lo cual se emplea la prueba de Nemenyi, la cual es similar a la prueba de Tukey para ANOVA. El otro enfoque consiste en realizar la comparación con un algoritmo de control donde se tienen menos comparaciones, ejemplos de este tipo de pruebas son Bonferroni-Dunn y Step-down.

Un método válido para comparaciones múltiples consiste en la versión no paramétrica de la prueba de Bonferroni siempre que el tamaño de las muestras no sea muy pequeño.

Para la implementación de estas pruebas MATLAB[®] tiene el comando *multicompare* el cual utiliza los valores críticos de la distribución t , después de un ajuste de Bonferroni para compensar las comparaciones múltiples. Este procedimiento es conservador, pero por lo general menor que el procedimiento de Scheffé.

Como resultado de aplicar el método no paramétrico de Bonferroni se tienen intervalos de confianza los cuales permiten determinar si los grupos a comparar no presentan diferencias significativas. Una representación aproximada del resultado de esta prueba se realiza de forma gráfica donde se muestra el ranking promedio de cada grupo y un intervalo equivalente. Dos grupos de resultados se consideran con diferencias significativas si sus intervalos no se traslapan [124].

B. Resultados experimentales

En este anexo se muestran los resultados experimentales obtenidos para el algoritmo VPSO. Los resultados se consignan en tablas donde se tiene:

- Máx: valor máximo.
- Mín: valor mínimo.
- Media: promedio.
- STD: desviación estándar.

También se presentan resultados del algoritmo PSO estándar los cuales se toman como referentes de comparación. Los resultados se presentan para 2 y 10 dimensiones. Las tablas con los respectivos resultados son:

- Tabla **B-1**: Para 2 dimensiones, condiciones iniciales globales y VPSO determinístico.
- Tabla **B-2**: Para 2 dimensiones, condiciones iniciales globales y VPSO estocástico.
- Tabla **B-3**: Para 2 dimensiones, condiciones iniciales locales y VPSO determinístico.
- Tabla **B-4**: Para 2 dimensiones, condiciones iniciales locales y VPSO estocástico.
- Tabla **B-5**: Para 10 dimensiones, condiciones iniciales globales y VPSO determinístico.
- Tabla **B-6**: Para 10 dimensiones, condiciones iniciales globales y VPSO estocástico.
- Tabla **B-7**: Para 10 dimensiones, condiciones iniciales locales y VPSO determinístico.
- Tabla **B-8**: Para 10 dimensiones, condiciones iniciales locales y VPSO estocástico.

Para el algoritmo VPSO se consideran las siguientes configuraciones:

- VPSO-C1: Incremento de energía tomando $R_\alpha = 2\Delta_{r\text{máx}}$.
- VPSO-C2: Incremento de energía tomando $R_\alpha = \Delta_{r\text{máx}}$.
- VPSO-C3: Incremento de energía tomando $R_\alpha = 0,5\Delta_{r\text{máx}}$.
- VPSO-A: Incremento de energía adaptativo.

Para el algoritmo PSO estándar tienen las siguientes configuraciones:

- PSO-T1: Configuración 1 propuesta por Trelea.
- PSO-T2: Configuración 2 propuesta por Trelea.
- PSO-R: PSO con factor de restricción.

$U_{obj,1}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	5.1875×10^{-5}	5.1746×10^{-5}	4.8981×10^{-5}	1.8647×10^{-5}	1.1469×10^{-8}	7.0669×10^{-9}	2.5009×10^{-9}
Mín	2.3576×10^{-10}	2.5441×10^{-10}	3.2053×10^{-10}	9.7676×10^{-10}	1.4416×10^{-14}	1.4282×10^{-16}	5.7376×10^{-16}
Media	4.4414×10^{-6}	2.7773×10^{-6}	2.0631×10^{-6}	6.8395×10^{-7}	4.9875×10^{-10}	2.9053×10^{-10}	1.9095×10^{-10}
STD	1.2251×10^{-5}	9.578×10^{-6}	7.4452×10^{-6}	2.7306×10^{-6}	1.8846×10^{-9}	1.0394×10^{-9}	4.6981×10^{-10}
$U_{obj,2}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	-3.4353	-3.4353	-3.4353	-1.7226	-1.7226	-1.1857	-1.7226
Mín	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-3.4354
Media	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-3.4011	-3.0243	-3.2534	-3.1271
STD	1.8853×10^{-5}	3.5347×10^{-5}	3.4857×10^{-5}	0.242 23	0.738 93	0.555 84	0.664 71
$U_{obj,3}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	-6.4167	-6.4168	-6.4169	-6.4168	-2.9576	-2.9576	-2.9576
Mín	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-6.4169
Media	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-6.0709	-6.0018	-5.5866
STD	2.0712×10^{-5}	4.6142×10^{-6}	2.5782×10^{-6}	7.0084×10^{-6}	1.0483	1.1355	1.4924
$U_{obj,4}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	-1.9999	-2	-2	-1.9999	-2	-2	-2
Mín	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
Media	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
STD	2.2016×10^{-5}	1.2243×10^{-6}	1.1006×10^{-6}	2.1668×10^{-5}	2.6468×10^{-10}	2.7267×10^{-10}	1.2017×10^{-10}
$U_{obj,5}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	7.2824×10^{-5}	6.7718×10^{-5}	4.4917×10^{-6}	2.5646×10^{-5}	7.7227×10^{-10}	1.0931×10^{-5}	4.523×10^{-10}
Mín	1.4039×10^{-9}	2.661×10^{-10}	1.4406×10^{-10}	1.1746×10^{-10}	5.2521×10^{-27}	1.5762×10^{-19}	3.0978×10^{-21}
Media	6.3203×10^{-6}	4.0641×10^{-6}	2.4435×10^{-7}	7.9133×10^{-7}	3.5489×10^{-11}	2.1863×10^{-7}	1.162×10^{-11}
STD	1.6082×10^{-5}	1.3579×10^{-5}	7.1717×10^{-7}	3.6916×10^{-6}	1.4312×10^{-10}	1.5458×10^{-6}	6.5968×10^{-11}
$U_{obj,6}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	0.995	0.995 02	0.994 97	0.995 01	3.9798	3.9798	0.994 96
Mín	1.9957×10^{-7}	8.5556×10^{-7}	9.6285×10^{-8}	7.2866×10^{-7}	0	0	0
Media	0.2587	0.1592	0.039 809	0.2985	0.238 79	0.298 49	0.139 29
STD	0.440 85	0.368 46	0.196 95	0.460 58	0.653 21	0.703 54	0.348 74
$U_{obj,7}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	0.018 313	0.016 063	0.019 018	0.016 12	0.031 354	0.015 239	0.015 161
Mín	0.005 365 2	0.005 371 3	0.005 364 5	0.005 426 3	0.000 527 47	0.000 170 49	0.000 262 64
Media	0.011 395	0.012 303	0.011 95	0.011 588	0.008 422	0.003 834 5	0.005 343 4
STD	0.004 294 1	0.003 929 3	0.004 063 4	0.004 042 9	0.006 767 1	0.003 232 8	0.004 921
$U_{obj,8}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	0.000 273 58	0.000 288 87	0.000 304 19	7.4599×10^{-5}	0.1758	0.1758	0.1758
Mín	2.5734×10^{-9}	4.2543×10^{-10}	1.9249×10^{-10}	8.2093×10^{-10}	0	0	0
Media	1.6163×10^{-5}	2.6522×10^{-5}	2.335×10^{-5}	4.3501×10^{-6}	0.063 288	0.042 192	0.056 256
STD	5.0301×10^{-5}	5.9675×10^{-5}	5.4457×10^{-5}	1.3235×10^{-5}	0.085 24	0.075 843	0.082 838

Tabla B-1.: Resultados para 50 ejecuciones en dos dimensiones. Condiciones iniciales globales y algoritmo VPSO determinístico.

$U_{obj,1}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	4.3898×10^{-7}	3.0968×10^{-8}	3.804×10^{-7}	5.9107×10^{-7}	1.1469×10^{-8}	7.0669×10^{-9}	2.5009×10^{-9}
Mín	5.2602×10^{-11}	2.6565×10^{-11}	7.5483×10^{-11}	7.1433×10^{-12}	1.4416×10^{-14}	1.4282×10^{-16}	5.7376×10^{-16}
Media	1.7828×10^{-8}	7.1753×10^{-9}	1.2×10^{-8}	1.6305×10^{-8}	4.9875×10^{-10}	2.9053×10^{-10}	1.9095×10^{-10}
STD	6.3024×10^{-8}	8.7687×10^{-9}	5.3411×10^{-8}	8.3067×10^{-8}	1.8846×10^{-9}	1.0394×10^{-9}	4.6981×10^{-10}
$U_{obj,2}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-1.7226	-1.1857	-1.7226
Mín	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-3.4354
Media	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-3.0243	-3.2534	-3.1271
STD	1.8834×10^{-6}	1.0153×10^{-6}	3.8273×10^{-8}	7.1672×10^{-7}	0.73893	0.55584	0.66471
$U_{obj,3}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-2.9576	-2.9576	-2.9576
Mín	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-6.4169
Media	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-6.0709	-6.0018	-5.5866
STD	7.2312×10^{-8}	4.85×10^{-8}	1.2242×10^{-7}	7.6554×10^{-8}	1.0483	1.1355	1.4924
$U_{obj,4}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
Mín	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
Media	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
STD	1.5086×10^{-7}	2.6853×10^{-7}	1.2981×10^{-7}	4.9845×10^{-8}	2.6468×10^{-10}	2.7267×10^{-10}	1.2017×10^{-10}
$U_{obj,5}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	1.4288×10^{-7}	3.8999×10^{-8}	5.4538×10^{-8}	8.1539×10^{-8}	7.7227×10^{-10}	1.0931×10^{-5}	4.523×10^{-10}
Mín	1.1411×10^{-10}	2.3661×10^{-11}	2.0462×10^{-11}	1.2742×10^{-11}	5.2521×10^{-27}	1.5762×10^{-19}	3.0978×10^{-21}
Media	9.5654×10^{-9}	6.8444×10^{-9}	6.8965×10^{-9}	8.5458×10^{-9}	3.5489×10^{-11}	2.1863×10^{-7}	1.162×10^{-11}
STD	2.2819×10^{-8}	9.4052×10^{-9}	1.1387×10^{-8}	1.5326×10^{-8}	1.4312×10^{-10}	1.5458×10^{-6}	6.5968×10^{-11}
$U_{obj,6}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	0.99496	0.99496	1.6559×10^{-6}	0.99496	3.9798	3.9798	0.99496
Mín	1.4202×10^{-8}	3.7406×10^{-9}	5.7537×10^{-9}	4.8876×10^{-10}	0	0	0
Media	0.17909	0.099496	2.8454×10^{-7}	0.099496	0.23879	0.29849	0.13929
STD	0.38613	0.30152	3.4383×10^{-7}	0.30152	0.65321	0.70354	0.34874
$U_{obj,7}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	0.01554	0.015235	0.031385	0.015213	0.031354	0.015239	0.015161
Mín	0.0046973	0.0044215	0.0039722	0.001605	0.00052747	0.00017049	0.00026264
Media	0.0085359	0.0083878	0.009482	0.0075966	0.008422	0.0038345	0.0053434
STD	0.0039909	0.0035107	0.004993	0.003205	0.0067671	0.0032328	0.004921
$U_{obj,8}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	1.1586×10^{-6}	9.0841×10^{-6}	2.2066×10^{-5}	3.602×10^{-7}	0.1758	0.1758	0.1758
Mín	7.2703×10^{-11}	1.4228×10^{-11}	1.8125×10^{-10}	7.5112×10^{-11}	0	0	0
Media	5.9111×10^{-8}	3.6962×10^{-7}	4.9096×10^{-7}	4.8652×10^{-8}	0.063288	0.042192	0.056256
STD	1.7588×10^{-7}	1.509×10^{-6}	3.1154×10^{-6}	7.7337×10^{-8}	0.08524	0.075843	0.082838

Tabla B-2.: Resultados para 50 ejecuciones en dos dimensiones. Condiciones iniciales globales y algoritmo VPSO estocástico.

$U_{obj,1}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	9.1431×10^{-7}	8.5912×10^{-7}	7.914×10^{-7}	8.9615×10^{-7}	3.9955×10^{-8}	1.6084×10^{-8}	2.348×10^{-9}
Mín	1.4223×10^{-11}	1.8611×10^{-10}	1.0013×10^{-14}	9.5791×10^{-13}	1.1289×10^{-15}	1.189×10^{-15}	2.3284×10^{-14}
Media	2.0737×10^{-7}	2.4696×10^{-7}	4.7899×10^{-8}	1.4342×10^{-7}	1.9195×10^{-9}	5.8467×10^{-10}	1.779×10^{-10}
STD	2.7296×10^{-7}	2.853×10^{-7}	1.1404×10^{-7}	2.6672×10^{-7}	6.1955×10^{-9}	2.3219×10^{-9}	4.0654×10^{-10}
$U_{obj,2}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	-3.4353	-3.4352	-3.4352	-1.722	-1.2336	-1.2336	-1.2336
Mín	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-3.4354
Media	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-3.2298	-1.4439	-1.6347	-1.5613
STD	1.4376×10^{-5}	2.921×10^{-5}	4.032×10^{-5}	0.562 29	0.369 82	0.586 37	0.533 69
$U_{obj,3}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	-6.4168	-6.4168	-6.4166	-6.4158	0.462 99	0.462 99	0.462 99
Mín	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-6.4169
Media	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-6.4168	-1.7362	-3.113	-3.3874
STD	1.13×10^{-5}	6.9163×10^{-6}	4.3548×10^{-5}	0.000 156 19	3.0091	3.3301	3.2332
$U_{obj,4}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	-1.9999	-1.9999	-1.9999	-1.9999	-2	-2	-2
Mín	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
Media	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
STD	1.3786×10^{-5}	2.1414×10^{-5}	1.1486×10^{-5}	1.2731×10^{-5}	2.0393×10^{-9}	4.2753×10^{-10}	5.9389×10^{-10}
$U_{obj,5}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	4.5213×10^{-5}	2.1991×10^{-5}	5.4112×10^{-6}	4.9061×10^{-5}	1.6811×10^{-8}	3.7495×10^{-9}	7.9061×10^{-9}
Mín	5.8918×10^{-11}	1.0627×10^{-11}	9.5475×10^{-10}	2.1644×10^{-10}	4.0954×10^{-23}	2.8502×10^{-18}	6.9181×10^{-19}
Media	1.5459×10^{-6}	5.6379×10^{-7}	2.5414×10^{-7}	2.7897×10^{-6}	7.7591×10^{-10}	2.6808×10^{-10}	4.094×10^{-10}
STD	7.1121×10^{-6}	3.1012×10^{-6}	7.8691×10^{-7}	8.9101×10^{-6}	2.5088×10^{-9}	6.5091×10^{-10}	1.2239×10^{-9}
$U_{obj,6}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	0.995	0.994 99	0.994 98	1.9899	31.838	31.838	31.838
Mín	1.5805×10^{-7}	4.0498×10^{-9}	3.2273×10^{-7}	6.227×10^{-7}	0	0	0
Media	0.3781	0.139 31	0.039 812	0.2985	11.303	7.7208	5.4722
STD	0.487 84	0.348 74	0.196 95	0.502 53	8.4347	9.5211	8.3104
$U_{obj,7}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	0.0869	0.043 625	0.015 853	0.020 486	2.5098	2.2458	2.5098
Mín	0.005 370 3	0.005 366	0.005 377 8	0.004 214 2	0.000 492 21	0.000 703 57	0.000 218 29
Media	0.013 678	0.012 814	0.010 958	0.012 049	1.0951	0.963 33	1.0405
STD	0.011 23	0.006 002 7	0.003 936 7	0.004 192 3	1.1121	1.0573	1.1048
$U_{obj,8}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	0.000 288 4	0.1758	0.000 281 06	0.000 126 06	0.479 41	0.479 41	0.479 41
Mín	7.451×10^{-9}	2.2534×10^{-9}	1.3943×10^{-9}	5.7815×10^{-10}	0	0	0
Media	3.3071×10^{-5}	0.003 550 5	2.5187×10^{-5}	1.1248×10^{-5}	0.386 92	0.326 45	0.301 69
STD	6.9855×10^{-5}	0.024 857	5.5119×10^{-5}	2.9761×10^{-5}	0.126 18	0.1684	0.180 58

Tabla B-3.: Resultados para 50 ejecuciones en dos dimensiones. Condiciones iniciales locales y algoritmo VPSO determinístico.

$U_{obj,1}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	1.0989×10^{-7}	2.366×10^{-8}	1.3571×10^{-8}	2.0252×10^{-8}	3.9955×10^{-8}	1.6084×10^{-8}	2.348×10^{-9}
Mín	2.867×10^{-15}	2.2773×10^{-12}	5.0677×10^{-14}	5.1124×10^{-14}	1.1289×10^{-15}	1.189×10^{-15}	2.3284×10^{-14}
Media	6.4482×10^{-9}	2.3595×10^{-9}	1.3932×10^{-9}	1.5189×10^{-9}	1.9195×10^{-9}	5.8467×10^{-10}	1.779×10^{-10}
STD	2.0213×10^{-8}	5.2043×10^{-9}	2.8081×10^{-9}	3.244×10^{-9}	6.1955×10^{-9}	2.3219×10^{-9}	4.0654×10^{-10}
$U_{obj,2}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-1.2336	-1.2336	-1.2336
Mín	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-3.4354
Media	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-3.4354	-1.4439	-1.6347	-1.5613
STD	4.4063×10^{-7}	6.8207×10^{-7}	1.7025×10^{-6}	1.3694×10^{-6}	0.36982	0.58637	0.53369
$U_{obj,3}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-6.4169	0.46299	0.46299	0.46299
Mín	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-6.4169
Media	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-6.4169	-1.7362	-3.113	-3.3874
STD	6.9674×10^{-8}	9.174×10^{-8}	6.4009×10^{-7}	2.3546×10^{-7}	3.0091	3.3301	3.2332
$U_{obj,4}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
Mín	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
Media	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
STD	9.6327×10^{-8}	6.5949×10^{-8}	5.9643×10^{-8}	1.1167×10^{-7}	2.0393×10^{-9}	4.2753×10^{-10}	5.9389×10^{-10}
$U_{obj,5}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	7.9613×10^{-8}	5.5097×10^{-8}	3.0951×10^{-6}	4.2942×10^{-7}	1.6811×10^{-8}	3.7495×10^{-9}	7.9061×10^{-9}
Mín	1.5241×10^{-12}	1.0472×10^{-11}	9.7234×10^{-16}	2.3776×10^{-11}	4.0954×10^{-23}	2.8502×10^{-18}	6.9181×10^{-19}
Media	7.3013×10^{-9}	5.4335×10^{-9}	1.008×10^{-7}	2.6519×10^{-8}	7.7591×10^{-10}	2.6808×10^{-10}	4.094×10^{-10}
STD	1.579×10^{-8}	1.0567×10^{-8}	4.9328×10^{-7}	7.1669×10^{-8}	2.5088×10^{-9}	6.5091×10^{-10}	1.2239×10^{-9}
$U_{obj,6}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	1.9899	0.99496	0.99496	0.99496	31.838	31.838	31.838
Mín	2.3906×10^{-9}	2.0011×10^{-9}	7.0659×10^{-9}	1.5875×10^{-9}	0	0	0
Media	0.43778	0.13929	0.1194	0.29849	11.303	7.7208	5.4722
STD	0.57421	0.34874	0.32661	0.46058	8.4347	9.5211	8.3104
$U_{obj,7}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	1.9991	0.015183	0.015166	0.015241	2.5098	2.2458	2.5098
Mín	0.0049523	0.0013301	0.005152	0.0038208	0.00049221	0.00070357	0.00021829
Media	0.049004	0.008593	0.0078786	0.0086704	1.0951	0.96333	1.0405
STD	0.28144	0.00392	0.0034325	0.0036177	1.1121	1.0573	1.1048
$U_{obj,8}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	2.1967×10^{-7}	3.0352×10^{-6}	7.0585×10^{-6}	3.1533×10^{-6}	0.47941	0.47941	0.47941
Mín	1.7379×10^{-10}	4.2624×10^{-11}	8.2098×10^{-11}	2.2255×10^{-10}	0	0	0
Media	3.3375×10^{-8}	1.0017×10^{-7}	2.9952×10^{-7}	1.1319×10^{-7}	0.38692	0.32645	0.30169
STD	5.2133×10^{-8}	4.2973×10^{-7}	1.3092×10^{-6}	4.7796×10^{-7}	0.12618	0.1684	0.18058

Tabla B-4.: Resultados para 50 ejecuciones en dos dimensiones. Condiciones iniciales locales y algoritmo VPSO estocástico.

$f_{obj,1}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	0.000 446 2	0.000 232 06	0.000 345 37	0.000 518 4	0.000 139 86	4.344×10^{-5}	4.8384×10^{-5}
Mín	1.1096×10^{-5}	4.9427×10^{-6}	6.1194×10^{-6}	1.0546×10^{-5}	5.4806×10^{-7}	2.6007×10^{-8}	7.116×10^{-8}
Media	0.000 142 9	0.000 113 64	0.000 134 65	0.000 131 6	3.5457×10^{-5}	9.1529×10^{-6}	9.9204×10^{-6}
STD	8.2682×10^{-5}	6.7507×10^{-5}	8.2571×10^{-5}	9.9557×10^{-5}	3.2921×10^{-5}	1.0177×10^{-5}	1.1981×10^{-5}
$f_{obj,2}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	0.358 17	0.358 12	0.358 13	0.268 59	1.7277	0.454 32	0.454 32
Mín	2.6763×10^{-8}	1.2823×10^{-7}	2.0215×10^{-9}	4.5451×10^{-7}	5.3327×10^{-9}	8.5892×10^{-11}	5.7792×10^{-10}
Media	0.109 23	0.119 97	0.098 487	0.093 116	0.158 88	0.036 212	0.041 718
STD	0.113 37	0.122 15	0.105 85	0.097 332	0.401 34	0.111 55	0.124 76
$f_{obj,3}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	-391.66	-391.66	-391.66	-377.52	-335.11	-335.11	-306.84
Mín	-391.66	-391.66	-391.66	-391.66	-391.66	-391.66	-391.66
Media	-391.66	-391.66	-391.66	-391.38	-363.39	-367.91	-367.63
STD	1.5979×10^{-6}	1.5347×10^{-6}	1.2791×10^{-6}	1.9992	13.396	14.961	14.633
$f_{obj,4}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	9.5535	9.6058	9.5723	9.5291	158.86	167.04	252.56
Mín	0.788 52	0.792 68	0.864 34	0.765 17	0.034 436	5.5952×10^{-5}	0.031 022
Media	2.2708	2.0947	2.2302	2.2655	19.773	10.701	21.521
STD	1.4519	1.4349	1.4776	1.4344	40.564	26.527	48.598
$f_{obj,5}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	0.323 19	0.337 63	0.4063	0.347 19	0.290 34	0.179 53	0.187
Mín	0.018 14	0.015 029	0.014 94	0.000 701 16	1.1016×10^{-11}	0.012 321	0.029 587
Media	0.1098	0.100 87	0.106 63	0.106 39	0.082 972	0.079 71	0.092 665
STD	0.066 681	0.065 103	0.070 139	0.056 32	0.057 613	0.043 332	0.036 055
$f_{obj,6}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	44.773	45.768	43.778	52.733	19.899	23.879	16.914
Mín	2.9849	5.9698	2.9849	3.9798	0.99496	1.9899	1.9899
Media	24.078	24.695	22.367	23.163	8.5566	8.7361	8.1786
STD	11.145	10.941	10.287	11.3	4.2403	5.11	4.1258
$f_{obj,7}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	17.186	16.471	13.663	14.416	4.9108	5.236	12.51
Mín	2.544	3.9868	2.068	3.2501	0.182 82	0.188 79	0.152 69
Media	8.8742	9.2316	8.2285	8.0389	1.4809	1.1655	1.34
STD	2.7556	2.8106	2.7614	2.7901	1.4137	1.2001	2.0049
$f_{obj,8}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	4.4246	3.2228	2.8145	2.317	1.1552	1.6462	1.1552
Mín	0.001 830 6	0.001 272	0.001 491 2	0.001 373 4	0.000 224 06	9.7889×10^{-5}	3.2142×10^{-5}
Media	0.961 68	0.601 68	0.409 31	0.222 11	0.071 504	0.057 134	0.116 37
STD	1.2656	1.0443	0.854 66	0.577 61	0.276 56	0.281 44	0.349 78

Tabla B-5.: Resultados para 50 ejecuciones en 10 dimensiones. Condiciones iniciales globales y algoritmo VPSO determinístico.

$f_{obj,1}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	3.8387×10^{-6}	2.5376×10^{-6}	2.6834×10^{-6}	2.28×10^{-6}	0.000 139 86	4.344×10^{-5}	4.8384×10^{-5}
Mín	9.1859×10^{-9}	3.799×10^{-8}	5.8403×10^{-9}	1.7074×10^{-8}	5.4806×10^{-7}	2.6007×10^{-8}	7.116×10^{-8}
Media	4.8035×10^{-7}	5.3436×10^{-7}	5.843×10^{-7}	3.7101×10^{-7}	3.5457×10^{-5}	9.1529×10^{-6}	9.9204×10^{-6}
STD	6.7802×10^{-7}	4.8934×10^{-7}	5.7144×10^{-7}	4.3702×10^{-7}	3.2921×10^{-5}	1.0177×10^{-5}	1.1981×10^{-5}
$f_{obj,2}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	0.447 64	0.447 64	0.358 11	0.447 64	1.7277	0.454 32	0.454 32
Mín	3.1665×10^{-10}	6.596×10^{-10}	1.0095×10^{-9}	1.7936×10^{-11}	5.3327×10^{-9}	8.5892×10^{-11}	5.7792×10^{-10}
Media	0.143 25	0.091 319	0.044 764	0.069 832	0.158 88	0.036 212	0.041 718
STD	0.150 25	0.133 52	0.087 214	0.099 547	0.401 34	0.111 55	0.124 76
$f_{obj,3}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	-377.52	-391.66	-391.66	-377.52	-335.11	-335.11	-306.84
Mín	-391.66	-391.66	-391.66	-391.66	-391.66	-391.66	-391.66
Media	-391.38	-391.66	-391.66	-391.38	-363.39	-367.91	-367.63
STD	1.9992	7.2752×10^{-9}	1.4334×10^{-8}	1.9992	13.396	14.961	14.633
$f_{obj,4}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	3.5647	0.298 42	4.1441	4.4984	158.86	167.04	252.56
Mín	0.060 256	0.067 632	0.056 784	0.064 659	0.034 436	5.5952×10^{-5}	0.031 022
Media	0.1939	0.112 08	0.268 74	0.416 57	19.773	10.701	21.521
STD	0.489 29	0.0472	0.795 32	0.991 82	40.564	26.527	48.598
$f_{obj,5}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	0.403 28	0.2755	0.270 73	0.295 34	0.290 34	0.179 53	0.187
Mín	0.019 691	0.014 773	0.027 101	3.0969×10^{-7}	1.1016×10^{-11}	0.012 321	0.029 587
Media	0.1102	0.108 54	0.098 818	0.097 147	0.082 972	0.079 71	0.092 665
STD	0.079 643	0.058 599	0.056 401	0.060 324	0.057 613	0.043 332	0.036 055
$f_{obj,6}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	7.9597	6.9647	8.9546	6.9647	19.899	23.879	16.914
Mín	4.7853×10^{-9}	4.2322×10^{-8}	2.3351×10^{-8}	1.0575×10^{-8}	0.994 96	1.9899	1.9899
Media	2.7262	2.5869	2.368	2.4277	8.5566	8.7361	8.1786
STD	1.926	1.8091	1.7511	1.7657	4.2403	5.11	4.1258
$f_{obj,7}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	20.309	17.948	17.583	19.236	4.9108	5.236	12.51
Mín	4.517	3.5052	2.7525	3.3359	0.182 82	0.188 79	0.152 69
Media	12.117	10.44	9.5386	9.0314	1.4809	1.1655	1.34
STD	3.4819	3.6396	2.8853	3.3287	1.4137	1.2001	2.0049
$f_{obj,8}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	2.0133	2.5799	0.000 619 98	0.000 731 73	1.1552	1.6462	1.1552
Mín	4.2008×10^{-5}	6.4687×10^{-5}	2.3839×10^{-5}	4.0707×10^{-5}	0.000 224 06	9.7889×10^{-5}	3.2142×10^{-5}
Media	0.040 54	0.051 833	0.000 230 06	0.000 230 22	0.071 504	0.057 134	0.116 37
STD	0.284 69	0.364 82	0.000 118 69	0.000 145 04	0.276 56	0.281 44	0.349 78

Tabla B-6.: Resultados para 50 ejecuciones en 10 dimensiones. Condiciones iniciales globales y algoritmo VPSO estocástico.

$f_{obj,1}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	0.0017389	0.0033572	0.002272	0.0036201	0.00019998	0.0001396	4.4625×10^{-5}
Mín	1.319×10^{-8}	2.4991×10^{-7}	1.5943×10^{-7}	1.3036×10^{-8}	1.8768×10^{-6}	1.4823×10^{-8}	7.4577×10^{-8}
Media	0.00018756	0.00024879	0.00025529	0.00036466	4.2353×10^{-5}	1.6503×10^{-5}	1.1606×10^{-5}
STD	0.00040234	0.00068855	0.0005213	0.00071905	4.455×10^{-5}	2.5415×10^{-5}	1.2008×10^{-5}
$f_{obj,2}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	0.97371	0.089561	0.089535	7.1587	27.236	28.303	25.486
Mín	8.8851×10^{-9}	1.3978×10^{-8}	1.8331×10^{-8}	2.3586×10^{-8}	3.2722	8.4537	3.5359
Media	0.028432	0.0035923	0.0018021	0.32451	17.151	16.718	15.707
STD	0.13908	0.017723	0.012661	1.4005	4.878	4.3354	5.2644
$f_{obj,3}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	-320.98	-320.98	-335.11	-306.84	-250.29	-250.29	-250.29
Mín	-391.66	-391.66	-391.66	-391.66	-292.7	-292.7	-292.7
Media	-374.13	-379.5	-381.48	-378.66	-260.19	-263.58	-265
STD	23.82	18.512	17.146	21.908	10.396	13.215	13.076
$f_{obj,4}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	9.329	5.5514	4.4133	9.1839	65.065	50.684	9.6017
Mín	0.79153	0.84679	0.81209	0.81285	0.075703	0.0019103	0.020206
Media	2.3091	2.0253	2.0833	2.1409	5.4614	4.8151	3.9363
STD	1.7454	1.1181	1.093	1.3497	12.087	7.0472	1.7531
$f_{obj,5}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	0.56857	0.47562	0.39638	0.65488	1.1636	0.44472	0.32726
Mín	9.0448×10^{-5}	0.00010718	6.4497×10^{-5}	5.8593×10^{-5}	0.045631	0.029547	0.007396
Media	0.13797	0.12027	0.10608	0.093406	0.23863	0.14067	0.10448
STD	0.18353	0.13505	0.12331	0.13612	0.20552	0.080462	0.068704
$f_{obj,6}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	80.591	72.632	67.657	78.602	114.42	99.495	125.36
Mín	11.94	13.929	5.9698	10.945	22.884	21.889	18.904
Media	43.48	41.37	37.092	42.843	63.976	56.414	54.344
STD	18.176	15.021	12.569	16.158	22.809	20.53	23.554
$f_{obj,7}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	31.17	28.103	25.845	26.766	51.27	52.583	52.583
Mín	4.0664	4.1486	3.5418	8.0121	18.219	18.04	0.31081
Media	17.833	16.128	14.746	16.831	41.59	39.88	38.279
STD	6.179	5.2553	5.1583	4.6967	9.5387	8.9033	11.605
$f_{obj,8}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	19.887	19.898	19.887	19.893	19.946	20.054	19.947
Mín	0.001215	0.0020839	0.0010578	0.00082999	0.0033586	0.00058686	0.00015379
Media	7.7345	7.1032	9.6854	10.777	19.234	18.433	18.903
STD	9.2149	9.2754	9.8604	9.9218	2.799	4.7464	3.9005

Tabla B-7.: Resultados para 50 ejecuciones en 10 dimensiones. Condiciones iniciales locales y algoritmo VPSO determinístico.

$f_{obj,1}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	4.6071×10^{-7}	4.486×10^{-7}	3.4564×10^{-7}	6.5164×10^{-7}	0.00019998	0.0001396	4.4625×10^{-5}
Mín	1.2527×10^{-10}	1.1836×10^{-12}	3.9876×10^{-13}	1.3215×10^{-10}	1.8768×10^{-6}	1.4823×10^{-8}	7.4577×10^{-8}
Media	8.0905×10^{-8}	5.4002×10^{-8}	4.2535×10^{-8}	6.7962×10^{-8}	4.2353×10^{-5}	1.6503×10^{-5}	1.1606×10^{-5}
STD	1.3821×10^{-7}	8.6306×10^{-8}	7.4613×10^{-8}	1.3133×10^{-7}	4.455×10^{-5}	2.5415×10^{-5}	1.2008×10^{-5}
$f_{obj,2}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	3.2453	2.3367	0.97371	3.0942×10^{-6}	27.236	28.303	25.486
Mín	2.5623×10^{-10}	2.5982×10^{-10}	5.3378×10^{-12}	1.5396×10^{-12}	3.2722	8.4537	3.5359
Media	0.65267	0.444	0.11685	7.0698×10^{-8}	17.151	16.718	15.707
STD	1.0303	0.57886	0.31963	4.3651×10^{-7}	4.878	4.3354	5.2644
$f_{obj,3}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	-278.57	-292.7	-320.98	-306.84	-250.29	-250.29	-250.29
Mín	-391.66	-391.66	-391.66	-391.66	-292.7	-292.7	-292.7
Media	-371.02	-376.68	-382.33	-381.77	-260.19	-263.58	-265
STD	29.155	19.246	18.2	17.893	10.396	13.215	13.076
$f_{obj,4}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	3.6691	0.29605	7.3473	0.24663	65.065	50.684	9.6017
Mín	0.069496	0.069241	0.062908	0.059984	0.075703	0.0019103	0.020206
Media	0.1834	0.112	0.26293	0.11862	5.4614	4.8151	3.9363
STD	0.50442	0.044724	1.0236	0.04253	12.087	7.0472	1.7531
$f_{obj,5}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	0.52637	0.56348	0.52663	0.32727	1.1636	0.44472	0.32726
Mín	1.8076×10^{-7}	1.9023×10^{-7}	3.8093×10^{-7}	2.3272×10^{-7}	0.045631	0.029547	0.007396
Media	0.12697	0.14087	0.11138	0.093512	0.23863	0.14067	0.10448
STD	0.14282	0.13988	0.14181	0.10247	0.20552	0.080462	0.068704
$f_{obj,6}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	98.5	78.601	65.667	75.617	114.42	99.495	125.36
Mín	0.99496	0.99496	0.99496	0.99496	22.884	21.889	18.904
Media	40.216	28.197	21.551	30.386	63.976	56.414	54.344
STD	31.208	23.224	17.646	21.413	22.809	20.53	23.554
$f_{obj,7}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	37.003	33.235	30.814	31.709	51.27	52.583	52.583
Mín	7.5885	12.174	4.0059	6.255	18.219	18.04	0.31081
Media	24.211	22.214	21.072	19.081	41.59	39.88	38.279
STD	7.114	5.5323	5.4779	6.1605	9.5387	8.9033	11.605
$f_{obj,8}$	VPSO-C1	VPSO-C2	VPSO-C3	VPSO-A	PSO-T1	PSO-T2	PSO-R
Máx	19.896	19.865	19.896	19.907	19.946	20.054	19.947
Mín	5.332×10^{-5}	4.9335×10^{-5}	1.4574×10^{-5}	6.3999×10^{-5}	0.0033586	0.00058686	0.00015379
Media	8.7691	6.3449	3.174	10.315	19.234	18.433	18.903
STD	9.9152	9.3427	7.3459	10.011	2.799	4.7464	3.9005

Tabla B-8.: Resultados para 50 ejecuciones en 10 dimensiones. Condiciones iniciales locales y algoritmo VPSO estocástico.

C. Cálculos adicionales para el análisis del modelo seleccionado

En este anexo se presentan cálculos adicionales asociados al análisis realizado del modelo seleccionado.

C.1. Análisis del potencial de interacción

El potencial de interacción es:

$$U_{int}(\vec{r}_i) = \frac{c}{2}(\vec{r}_i - \vec{R})^2$$

con $\vec{R} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \vec{r}_j$, entonces:

$$U_{int}(\vec{r}_i) = \frac{c}{2} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right)^2$$

$$U_{int}(\vec{r}_i) = \frac{c}{2} \left(\vec{r}_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \vec{r}_j \right)^2$$

$$U_{int}(\vec{r}_i) = \frac{c}{2} \left(\vec{r}_i - \frac{1}{N} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \cdots + \vec{r}_i + \cdots + \vec{r}_N) \right)^2$$

de la misma forma se puede tener:

$$U_{int}(\vec{r}) = \frac{c}{2} \left(\vec{r} - \frac{1}{N} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \cdots + \vec{r} + \cdots + \vec{r}_N) \right)^2$$

La fuerza asociada al potencial se puede calcular como:

$$\vec{F}_{int,i} = -\vec{\nabla} U_{int}(\vec{r}_i) = -\vec{\nabla} U_{int}(\vec{r})|_{r=r_i}$$

por lo tanto:

$$\vec{F}_{int,i} = -c \left(\vec{r}_i - \frac{1}{N} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \cdots + \vec{r}_i + \cdots + \vec{r}_N) \right) \left(1 - \frac{1}{N} \right)$$

En forma general se puede expresar como:

$$\vec{F}_{int,i} = -c \left(1 - \frac{1}{N} \right) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$\vec{F}_{int,i} = -a \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

C.2. Derivada temporal de la energía asociada al potencial de interacción

En primer lugar se tiene que el potencial de interacción es:

$$U_{int}(\vec{r}_i) = \frac{c}{2} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right)^2$$

La derivada temporal del potencial de interacción corresponde a:

$$\frac{dU_{int}(\vec{r}_i)}{dt} = c \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) + c \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(-\frac{d\vec{r}_j}{dt} \right) \right)$$

$$\frac{dU_{int}(\vec{r}_i)}{dt} = c \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right) \frac{d\vec{r}_i}{dt} + c \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(-\frac{d\vec{r}_j}{dt} \right) \right)$$

Tomando la suma para todas las partículas:

$$\sum_{i=1}^N \frac{dU_{int}(\vec{r}_i)}{dt} = \sum_{i=1}^N \left[c \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right) \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right] + \sum_{i=1}^N \left[c \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(-\frac{d\vec{r}_j}{dt} \right) \right) \right]$$

de la ultima sumatoria separando el término para la derivada temporal de \vec{r}_i se tiene:

$$= \sum_{i=1}^N \left[c \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right) \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right] + \sum_{i=1}^N \left[c \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \left(-\frac{d\vec{r}_j}{dt} \right) + \frac{1}{N} \left(-\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) \right) \right]$$

realizando los respectivos productos:

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^N \left[c \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right) \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right] + \sum_{i=1}^N \left[c \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N -\frac{d\vec{r}_j}{dt} \right) \right] \\ &+ \sum_{i=1}^N \left[c \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right) \frac{1}{N} \left(-\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \left[c \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right) \left(1 - \frac{1}{N} \right) \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right] + \left(\frac{1}{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N -\frac{d\vec{r}_j}{dt} \right) \sum_{i=1}^N \left[c \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right) \right] \end{aligned}$$

Considerando que:

$$\frac{c}{N} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right) = \frac{c}{N} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \vec{r}_i - \sum_{j=1}^N \vec{r}_j \right) =$$

$$\frac{c}{N} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}_i - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}_j \right) = \frac{c}{N} \left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \vec{r}_i - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}_j \right) = 0$$

adicionalmente con $a = c \left(1 - \frac{1}{N}\right)$ se tiene:

$$\sum_{i=1}^N \frac{dU_{int}(\vec{r}_i)}{dt} = \sum_{i=1}^N \left[a \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right) \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right]$$

C.3. Gradiente de la función objetivo

Considerando que la posición de una partícula se puede representar como $\vec{r}_i = r_{1,i}\hat{u}_1 + r_{2,i}\hat{u}_2 + \dots + r_{d,i}\hat{u}_d + \dots + r_{D,i}\hat{u}_D$ donde (\hat{u}_d) es un vector unitario en la dirección d , entonces, la derivada temporal del potencial externo U_{obj} se puede calcular como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U_{obj}(\vec{r}_i) &= \frac{\partial U_{obj}}{\partial r_{1,i}} \frac{dr_{1,i}}{dt} + \frac{\partial U_{obj}}{\partial r_{2,i}} \frac{dr_{2,i}}{dt} + \dots + \frac{\partial U_{obj}}{\partial r_{d,i}} \frac{dr_{d,i}}{dt} + \dots + \frac{\partial U_{obj}}{\partial r_{D,i}} \frac{dr_{D,i}}{dt} \\ &= \left[\frac{\partial U_{obj}}{\partial r_{1,i}} \hat{u}_1 + \frac{\partial U_{obj}}{\partial r_{2,i}} \hat{u}_2 + \dots + \frac{\partial U_{obj}}{\partial r_{d,i}} \hat{u}_d + \dots + \frac{\partial U_{obj}}{\partial r_{D,i}} \hat{u}_D \right] \cdot \\ &\quad \left[\frac{dr_{1,i}}{dt} \hat{u}_1 + \frac{dr_{2,i}}{dt} \hat{u}_2 + \dots + \frac{dr_{d,i}}{dt} \hat{u}_d + \dots + \frac{dr_{D,i}}{dt} \hat{u}_D \right] \\ &= \vec{\nabla}U_{obj}(\vec{r}_i) \cdot \vec{v}_i \\ &= \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}U_{obj}(\vec{r}_i) \end{aligned}$$

D. Nomenclatura utilizada

En este anexo se presenta la nomenclatura utilizada en el documento.

- \mathbb{N} : números naturales.
 - $\mathbb{N} - \{0\}$: números naturales excluyendo el cero.
 - $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$: números reales.
 - \mathbb{R}^n : números reales de n dimensiones.
 - \mathbb{R}^+ : números reales positivos.
 - \mathbb{Z} : números enteros.
 - \mathbb{Z}^+ : números enteros positivos.
 - $\vec{f}(\vec{x}) = [f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})]^T$: función vectorial.
 - $f \in C^1$: función continua.
 - $f \in C^\infty$: función suave.
 - \mathbf{A} : matriz A .
 - $[]^T$: matriz o vector transpuesto.
 - \vec{x}^T : vector transpuesto.
 - Ω : región factible.
 - Λ : valores posibles de la función objetivo.
 - $\vec{\nabla} f(\vec{x})$: vector gradiente, formado por la primeras derivadas parciales de f si existen.
- $$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \left[\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n} \right]$$
- $\nabla^2 f(\vec{x}) = \mathbf{H}(f)$: matriz Hessiana, formada por las segundas derivadas parciales de f si existen.

$$\mathbf{H}(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

- f' : primera derivada de f .
- f'' : segunda derivada de f .
- $\vec{\nabla} f(\vec{x})$: matriz jacobiana, formada por las primeras derivadas de f si existen.

$$\vec{\nabla} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

- $|$: tal que.
- mín: mínimo.

$$\text{mín}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N\} = \text{mín}_{i=1,2,\dots,N} f(\vec{x}_i)$$

- $\vec{0}$: vector de ceros.
- \vec{r} : vector r .
- $|\vec{r}| = r$: magnitud del vector r .
- $|\vec{r}|^2 = r^2$: magnitud al cuadrado del vector r .
- \vec{r}_i : vector r para la i -ésima partícula.
- $\vec{r}_i = [r_{i,1}\hat{u}_1, r_{i,2}\hat{u}_2, \dots, r_{i,d}\hat{u}_d, \dots, r_{i,D}\hat{u}_D]^T$: vector r_i en D dimensiones.
- \hat{u}_D : vector unitario en la dirección D .
- $|\vec{r}_i| = \sqrt{r_{i,1}^2 + r_{i,2}^2 + \dots + r_{i,d}^2 + \dots + r_{i,D}^2}$: magnitud del vector r_i en D dimensiones.
- $\vec{a} \cdot \vec{b}$: producto punto entre el vector a y el vector b .
- $\vec{a} \times \vec{b}$: producto vectorial entre el vector a y el vector b .
- $f^{-1}\{\}$: función inversa.
- δ_{ij} : delta de Kroneck:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

- Δt : paso de simulación.
- $(\Delta x, \Delta y)$: variación de x y y .
- \in : pertenece.
- \neq : no es igual a.

- \cdot : producto escalar.
- \times : producto vectorial.
- $|\vec{v}(t)| = v$: magnitud de la velocidad.
- $|\vec{v}(t)|^2 = v^2$: magnitud de la velocidad al cuadrado.
- $\langle f(t)g(t) \rangle$: función de correlación:

$$\langle f(t)g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t + \tau)dt$$

- $\frac{dw}{dt}$: derivada de w con respecto a t .
- $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$: derivada temporal de x .
- $\frac{\partial w}{\partial \theta}$: derivada parcial de w con respecto a θ .
- $\vec{\nabla}U$: gradiente del campo potencial U .
- $\vec{\nabla}U(\vec{r}_i) = \vec{\nabla}U(\vec{r})|_{\vec{r}_i}$: gradiente del campo potencial U con respecto a las coordenadas de \vec{r}_i .
- $|\vec{\nabla}U|$: magnitud del gradiente del campo potencial U .

Bibliografía

- [1] SÁENS Eladio, *Apuntes para el curso: Historia de las matemáticas*, Fondo Universitario, Universidad Autónoma de Nuevo León, 1994.
- [2] MALASPINA Uldarico, *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un enfoque desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática*, Tesis de Doctorado, Pontificia Universidad Católica del Perú Escuela de Graduados, Perú, 2008.
- [3] PERERO Mariano, *Historia e historias de matemáticas*, Grupo editorial Iberoamérica, 1994.
- [4] BOYD Stephen, VANDENBERGHE Lieven, *Convex optimization*, Cambridge University Press, 2004.
- [5] CASTILLO Enrique, CONEJO Antonio, PEDREGAL Pablo, GARCÍA Ricardo, ALGUACIL Natalia, *Formulación y resolución de modelos de programación matemática en ingeniería y ciencia*, Universidad de Castilla La Mancha. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, 2002.
- [6] ABIDIN Zulkifli, ARSHAD Mohd, *A survey: Animal-inspired metaheuristic algorithms*, Proceedings of the Electrical and Electronic Postgraduate Colloquium (EEPC), 2009.
- [7] ANDERSON Robert, CONRAD Michael, *Hans J. Bremermann: A pioneer in mathematical biology*, BioSystems, Vol. 34, Num. 1-3, 1995.
- [8] NITSCHKE Geoffrey, SCHUT Martijn, EIBEN A., *Emergent specialization in biologically inspired collective behavior systems*, IGI Publishing, Chapter in Intelligent Complex Adaptive Systems, 2008.
- [9] BALLERINI M., CABIBBO N., CANDELIER R., CAVAGNA A., CISBANI E., GIARDINA I., LECOMTE V., ORLANDI A., PARISI G., PROCACCINI A., VIALE M., ZDRAVKOVIC V., *Interaction ruling animal collective behavior depends on topological rather than metric distance: Evidence from a field study*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America (PNAS), Vol. 105, Num. 4, 2008.
- [10] COUZIN Iain, KRAUSE Jens, FRANKS Nigel, LEVIN Simon, *Effective leadership and decision making in animal groups on the move*, Letters to nature, Vol. 433, 2005.
- [11] BAJEC Iztok, HEPPNER Frank, *Organized flight in birds*, Animal Behaviour, Vol. 78, Num. 4, 2009.
- [12] ZHANG Hai, CHEN Michael, STAN Guy, ZHOU Tao, MACIEJOWSKI Jan, *Collective behavior coordination with predictive mechanisms*, IEEE Circuits and Systems Magazine, Vol. 8, Num. 3, 2008.

-
- [13] SUMPTER David, *The principles of collective animal behaviour*, Philosophical Transactions of the Royal Society B, Vol. 361, Num. 1465, 2006.
- [14] VICSEK Tamas, *Universal patterns of collective motion from minimal models of flocking*, Second IEEE International Conference on Self-Adaptive and Self-Organizing Systems, 2008.
- [15] MACH Robert, SCHWEITZER Frank, *Multi-agent model of biological swarming*, Lecture Notes in Artificial Intelligence (LNAI), Vol. 2801, 2003.
- [16] KANE Andrew, SALIERNO James, BREWER Sandra, *Fish models in behavioral toxicology: Automated techniques, updates and perspectives*, Methods in Aquatic Toxicology, Vol. 2, 2004.
- [17] ZOHDI Tarek, *Mechanistic modeling of swarms*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 198, Num. 21-26, 2009.
- [18] BANKS Alec, VINCENT Jonathan, PHALP Keith, *Natural strategies for search*, Natural Computing, Vol. 8, Num. 3, 2009.
- [19] MORA Héctor, *Optimización no lineal y dinámica*, Unibiblios, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, 2001.
- [20] GARCÍA José, ALBA Enrique, *Restart particle swarm optimization with velocity modulation: A scalability test*, Soft Computing, A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications, Vol. 15, Num. 11, 1997.
- [21] HAZEN Megan, GUPTA Maya, *A multiresolutional estimated gradient architecture for global optimization*, IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), 2006.
- [22] LIANG J., QIN Alex, SUGANTHAN Ponnuthurai, SUBRAMANIAN Baskar, *Comprehensive learning particle swarm optimizer for global optimization of multimodal functions*, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, Vol. 10, Num. 3, 2006.
- [23] PALMER Michael, SMITH Stephen, *Improved evolutionary optimization of difficult landscapes: Control of premature convergence through scheduled sharing*, Complex Systems, Vol. 5, Num. 5, 1991.
- [24] YIN Lei, LIU Xiaoxiang, *A PSO algorithm based on biologic population multiplication (PM-PSO)*, Proceedings of the Second Symposium International Computer Science and Computational Technology, 2009.
- [25] PEER E., VAN DEN BERGH Frans, ENGELBRECHT Andries, *Using neighborhoods with guaranteed convergence PSO*, Proceedings of IEEE Swarm Intelligence Symposium (SIS'03), 2003.
- [26] BRATTON Daniel, KENNEDY James, *Defining a standard for particle swarm optimization*, Proceedings of IEEE Swarm Intelligence Symposium (SIS), 2007.
- [27] EVERS George, GHALIA Mounir, *Regrouping particle swarm optimization: A new global optimization algorithm with improved performance consistency across benchmarks*, IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, 2009.

-
- [28] SCHUTTE Jaco, *Particle swarms in sizing and global optimization*, Master's Dissertation, University of Pretoria, South Africa, 2002.
- [29] EVERS George, *An automatic regrouping mechanism to deal with stagnation in particle swarm optimization*, Master Thesis, University of Texas-Pan American, USA, 2009.
- [30] HVASS Magnus, *Tuning & Simplifying Heuristical Optimization*, Doctor of Philosophy Thesis, University of Southampton, UK, 2010.
- [31] VAN DEN BERGH Frans, *An analysis of particle swarm optimizers*, Doctor of Philosophy Thesis, University of Pretoria, South Africa, 2001.
- [32] RAVINDRAN Ravi, RAGSDELL Kenneth, REKLAITIS Gintaras, *Engineering optimization: Methods and applications*, John Wiley and Sons, Second Edition, 2006.
- [33] PÉREZ Jesús, *Contribución a los métodos de optimización basados en procesos naturales y su aplicación a la medida de antenas en campo próximo*, Tesis Doctoral, Universidad de Cantabria, Santander España, 2005.
- [34] WEISE Thomas, *Global optimization algorithms - theory and application*, Self-Published Thomas Weise, 2009.
- [35] DORIGO Marco, DI CARO Gianni, GAMBARDELLA Luca, *Ant algorithms for discrete optimization*, Artificial Life, Vol. 5, Num. 2, 1999.
- [36] PASSINO Kevin, *Biomimicry of bacterial foraging for distributed optimization and control*, IEEE Control Systems Magazine, Vol. 22, Num. 3, 2002.
- [37] RUSSELL Eberhart, JAMES Kennedy, *Particle swarm optimization*, IEEE Proceedings Neural Networks, 1995.
- [38] BIRATTARI Mauro, PELLEGRINI Paola, DORIGO Marco, *On the invariance of ant colony optimization*, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, Vol. 11, Num. 6, 2007.
- [39] DORIGO Marco, BIRATTARI Mauro, STÜTZLE Thomas, *Ant colony optimization: Artificial ants as a computational intelligence technique*, IEEE Computational Intelligence Magazine, Vol. 1, Num. 4, 2006.
- [40] ZECCHIN Aaron, SIMPSON Angus, MAIER Holger, NIXON John, *Parametric study for an ant algorithm applied water distribution system optimization*, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, Vol. 9, Num. 2, 2005.
- [41] KARABOGA Dervis, *An idea based on honey bee swarm for numerical optimization*, Technical Report-TR06, Erciyes University, Engineering Faculty, Computer Engineering Department, 2005.
- [42] THAKOOR Sarita, MOROOKIAN John, JAVAAN Chahl, HINE Butler, ZORNETZER Steve, *BEES: Exploring Mars with bioinspired technologies*, IEEE Computer, Vol. 37, Num. 9, 2004.

-
- [43] GUZMÁN Maria, DELGADO Alberto, DE CARVALHO Jonas, *Optimización multiobjetivo de un eje con algoritmo basado en quimiotaxis de bacterias*, 8° Congreso Iberoamericano De Ingeniería Mecánica, 2007.
- [44] GUZMÁN Maria, DELGADO Alberto, DE CARVALHO Jonas, *A bacterial chemotaxis multi-objective optimization algorithm*, International Conference on Engineering Optimization, 2008.
- [45] CAGNINA Leticia, *Optimización mono y multiobjetivo a través de una heurística de inteligencia colectiva*, Tesis de Doctorado, Doctorado en Ciencias de la Computación, Universidad Nacional de San Luis, Argentina, 2010.
- [46] VAZ António, PINTO Edite, *Optimization of nonlinear constrained particle swarm*, Technological and Economic Development of Economy, Vol. 12, Num. 1, 2006.
- [47] LIU Jenn-Long, CHANG Chao-Chun, *Novel orthogonal momentum-type particle swarm optimization applied to solve large parameter optimization problems*, Journal of Artificial Evolution and Applications, Vol. 2008, 2008.
- [48] DOS SANTOS Leandro, *A quantum particle swarm optimizer with chaotic mutation operator*, Chaos Solitons & Fractals, Vol. 37, Num. 5, 2006.
- [49] DOS SANTOS Leandro, COCCO Viviana, *Particle swarm approach based on quantum mechanics and harmonic oscillator potential well for economic load dispatch with valve-point effects*, Energy Conversion and Management, Vol. 49, Num. 11, 2008.
- [50] SEDIGHIZADEH Davoud, MASEHIAN Ellips, *Particle swarm optimization methods, taxonomy and applications*, International Journal of Computer Theory and Engineering, Vol. 1, Num. 5, 2009.
- [51] YANG Xin-She, *A new metaheuristic bat-inspired algorithm*, Nature Inspired Cooperative Strategies for Optimization, Studies in Computational Intelligence, Vol. 284, 2010.
- [52] YANG, Xin-She, *Firefly algorithm, Lévy flights and global optimization*, Research and Development in Intelligent Systems XXVI, 2009.
- [53] MUCHERINO Antonio, SEREF Onur, *Monkey search: a novel metaheuristic search for global optimization*, Data mining systems analysis and optimization in biomedicine, 2007.
- [54] KAVEH Ali, TALATAHARI Siamak, *A novel heuristic optimization method: charged system search*, Acta Mechanica, Vol. 213, Num. 3-4, 2010.
- [55] YANG Xin-She, *Harmony search as a metaheuristic algorithm*, Studies in Computational Intelligence, Music-Inspired Harmony Search Algorithm, Vol. 191, 2009.
- [56] SHAH Hamed, *Problem solving by intelligent water drops*, IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), 2007.
- [57] BARRAQUAND Jérôme, LANGLOIS Bruno, LATOMBE Jean-Claude, *Numerical potential field techniques for robot path planning*, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Vol. 22, Num. 2, 1992.

- [58] MESA Eddy, *Supernova: Un algoritmo novedoso de optimización global*, Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín, Colombia, 2010.
- [59] KAIPA Krishnanand, GHOSE Debasish, *Glowworm swarm optimization for simultaneous capture of multiple local optima of multimodal functions*, Swarm Intelligence, Vol. 3, Num. 2, 2009.
- [60] PASSINO Kevin, *Biomimicry for optimization, control, and automation*, Springer-Verlag, London, UK, 2005.
- [61] FENG C., CONG S., FENG X., *A new adaptive inertia weight strategy in particle swarm optimization*, IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), 2007.
- [62] CLERC Maurice, KENNEDY James, *The particle swarm-explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space*, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, Vol. 6, Num. 1, 2002.
- [63] FIELDSEND Jonathan, SINGH Sameer, *A multiobjective algorithm based upon particle swarm optimization, an efficient data structure and turbulence*, UK Workshop on Computational Intelligence (UKCI'02), 2002.
- [64] CERVANTES Alejandro, *Clasificación mediante enjambre de prototipos*, Tesis Doctoral, Universidad Carlos III de Madrid, Departamento de Informática, España, 2009.
- [65] DEB Kalyanmoy, PADHYE Nikhil, *Development of efficient Particle Swarm Optimizers by using concepts from evolutionary algorithms*, Proceedings of the 12th annual conference on Genetic and evolutionary computation (GECCO'10), 2010.
- [66] LIU Hongbo, ABRAHAM Ajith, *Fuzzy adaptive turbulent particle swarm optimization*, Proceedings of fifth international conference on hybrid intelligent systems (HIS'05), 2005.
- [67] HE S., WU Q., WEN J., SAUNDERS J., PATTON P., *A particle swarm optimizer with passive congregation*, Biosystems, Vol. 78, Num. 1-3, 2004.
- [68] VLACHOGIANNIS John, LEE Kwang, *A comparative study on particle swarm optimization for optimal steady-state performance of power systems*, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 21, Num. 4, 2006.
- [69] HENDTLASS Tim, *A particle swarm algorithm for high dimensional, multi-optima problem spaces*, IEEE Swarm Intelligence Symposium (SIS-05), 2005.
- [70] PARSOPOULOS Konstantinos, VRAHATIS Michael, *On the computation of all global minimizers through particle swarm optimization*, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, Vol. 8, Num. 3, 2004.
- [71] TOSHIHARU Hatanaka, KORENAGA Takeshi, KONDO Nobuhiko, UOSAKI Katsuji, *Search performance improvement for PSO in high dimensional space*, InTech, Particle Swarm Optimization, Chapter 15, 2009.

- [72] VICSEK Tamás, CZIRÓK András, BEN-JACOB Eshel, COHEN Inon, SHOCHET Ofer, *Novel type of phase transition in a system of self-driven particles*, Physical Review Letters, Vol. 75, 1995.
- [73] BERG Howard, *Random walks in biology*, Princeton University Press, 1983.
- [74] ÇENGEL Yunus, CIMBALA John, *Mecánica de fluidos, Fundamentos y Aplicaciones*, McGraw-Hill, 2006.
- [75] ERDMANN Udo, EBELING Werner, SCHIMANSKY Lutz, ORDEMANN Anke, MOSS Frank, *Active brownian particle and random walk theories of the motions of zooplankton: Application to experiments with swarms of daphnia*, arXiv:q-bio/0404018v2, 2004.
- [76] MACH Robert, SCHWEITZER Frank, *Modeling vortex swarming in Daphnia* Bulletin of Mathematical Biology, Vol. 69, Num. 2, 2007.
- [77] EBELING Werner, *Nonequilibrium statistical mechanics of swarms of driven particles*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Vol. 314, Num. 1-4, 2002.
- [78] LEVINE Herbert, RAPPEL Wouter, COHEN Inon, *Self-organization in systems of self-propelled particles*, Physical Review E, Vol. 63, Num. 1, 2001.
- [79] D'ORSOGNA M., CHUANG Y., BERTOZZI A., CHAYES L., *Self-propelled agents with soft-core interactions: patterns, stability, and collapse*, Physical Review Letters, Vol. 96, Num. 10, 2006.
- [80] ERDMANN Udo, EBELING Werner, MIKHAILOV Alexander, *Noise-induced transition from translational to rotational motion of swarms*, Physical Review E, Vol. 71, Num. 5, 2005.
- [81] MABROUK Mohammed, MCINNES Colin, *An emergent wall following behaviour to escape local minima for swarms of agents*, International Journal of Computer Science, Vol. 35, Num. 4, 2008.
- [82] MENSER Silas, HERFORD James, *A new optimization technique*, Proceedings of the IEEE Southeast Con, 2006.
- [83] APOSTOL Tom, *Análisis matemático*, Editorial Reverté, Segunda Edición, Barcelona, 1976.
- [84] BARTLE Robert, SHERBERT Donald, *Introducción al análisis matemático*, Editorial Limusa, México, 1980.
- [85] TOVAR Andrés, *Introducción al diseño óptimo en ingeniería*, Universidad Nacional de Colombia, 2007.
- [86] DORIGO Marco, STÜTZLE Thomas, *The ant colony optimization metaheuristic: Algorithms, applications, and advances*, Handbook of Metaheuristics, International Series in Operations Research & Management Science, Vol. 57, 2002.
- [87] AKBARI Reza, MOHAMMADI Alireza, ZIARATI Koorush, *A powerful bee swarm optimization algorithm*, IEEE 13th International Multitopic Conference (INMIC), 2009.

-
- [88] TRELEA Ioan, *The particle swarm optimization algorithm: Convergence analysis and parameter selection*, Information Processing Letters, Vol. 85, Num. 6, 2003.
- [89] BANSAL J., SINGH P., SARASWAT Mukesh, VERMA Abhishek, JADON Singh, ABRAHAM Ajith, *Inertia weight strategies in particle swarm optimization*, IEEE Third World Congress on Nature and Biologically Inspired Computing, 2011.
- [90] VÁZQUEZ Juan, *Fundamentos matemáticos de la mecánica de fluidos*, Universidad Autónoma de Madrid, 2002.
- [91] GILES Ranald, EVETT Jack, LIU Cheng, *Mecánica de fluidos e hidráulica*, Schaum McGraw-Hill, Tercera Edición, 2003.
- [92] NIÑO José, DUARTE Arturo, *Introducción a la mecánica de fluidos*, Universidad Nacional de Colombia, 2001.
- [93] ORDEMANN Anke, *Vortex-swarming of the zooplankton Daphnia*, The Biological Physicist, 2002.
- [94] SCHWEITZER Frank, *Active Brownian particles with internal energy depot*, Traffic and Granular Flow'99, 2000.
- [95] EBELING Werner, SCHWEITZER Frank, TILCH Benno, *Active Brownian particles with energy depots modeling animal mobility*, Biosystems, Vol. 49, Num. 1, 1999.
- [96] SCHWEITZER Frank, EBELING Werner, TILCH Benno, *Statistical mechanics of canonical-dissipative systems and applications to swarm dynamics*, Physical Review E, Vol. 64, Num. 2, 2001.
- [97] ERDMANN Udo, EBELING Werner, ANISHCHENKO Vadim, *Excitation of rotational modes in two-dimensional systems of driven Brownian particles*, Physical Review E, Volume 65, Num. 6, 2002.
- [98] MIKHAILOV Alexander, CALENBUHR Vera, *From cells to societies: Models of complex coherent action*, Springer Series in Synergetics, 2002.
- [99] LIU Hongbo, ABRAHAM Ajith, CLERC Maurice, *Chaotic dynamic characteristics in swarm intelligence*, Applied Soft Computing, Vol. 7, Num. 3, 2007.
- [100] EBELING Werner, SCHWEITZER Frank, *Self-organization, active brownian dynamics, and biological applications*, Nova Acta Leopoldina NF, Vol. 88, Num. 332, 2003.
- [101] EBELING Werner, *Active Brownian motion of pairs and swarms of particles*, Acta Physica Polonica B, Vol. 38, Num. 5, 2007
- [102] HELBING Dirk, MOLNÁR Péter, SCHWEITZER Frank, *Computer simulations of pedestrian dynamics and trail formation*, Evolution of Natural Structures, Vol. 9, 1994.
- [103] EBELING Werner, SCHIMANSKY Lutz, *Swarm dynamics attractors and bifurcations of active Brownian motion*, The European Physical Journal, Special Topics, Vol. 157, Num. 1, 2008.

-
- [104] LUKEMAN Ryan, *Modeling collective motion in animal groups: From mathematical analysis to field data*, Doctor of Philosophy Thesis, The University of British Columbia, Vancouver, Canada, 2009.
- [105] LUKEMAN Ryan, LI Yue, EDELSTEIN Leah, *A conceptual model for milling formations in biological aggregates*, Bulletin of Mathematical Biology, Vol. 71, Num. 2, 2009.
- [106] CHEN Hsuan, LEUNG Kwan, *Rotating states of self-propelling particles in two dimensions*, Physical Review E, Vol. 73, 2006.
- [107] SMITH J., MARTIN A., *Comparison of hard-core and soft-core potentials for modeling flocking in free space*, arXiv:0905.2260, 2009.
- [108] YOU Sang, KWON Dae, PARK Yong, KIM Sun, CHUNG Myung, KOOKIM Chul, *Collective behaviors of two-component swarms*, Journal of Theoretical Biology, Vol. 261, Num. 3, 2009.
- [109] MCINNES Colin, *Vortex formation in swarms of interacting particles*, Physical Review E, Vol. 75, Num. 3, 2007.
- [110] GROSSMAN D., ARANSON I., JACOB Ben, *Emergence of agent swarm migration and vortex formation through inelastic collisions*, New Journal of Physics, Vol. 10, 2008.
- [111] ALT Wolfgang, *Nonlinear hyperbolic systems of generalized Navier-Stokes type for interactive motion in biology*, Geometric Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations, 2003.
- [112] GARCÍA Ricardo, MOSS Frank, NIHONGI Ai, STRICKLER Rudi, GÖLLER Sebastian, ERDMANN Udo, SCHIMANSKY Lutz, SOKOLOV Igor, *Optimal foraging by zooplankton within patches: The case of Daphnia*, Mathematical Biosciences, Vol. 207, Num. 2, 2007.
- [113] PICEK Stjepan, GOLUB Marin, JAKOBOVIC Domagoj, *On the analysis of experimental results in evolutionary computation*, Proceedings of the 35th International Convention (MIPRO), 2012.
- [114] ZHANG Xiao, MENG Hong, JIAO Li, *Intelligent particle swarm optimization in multiobjective optimization*, IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), 2005.
- [115] KENNEDY James, EBERHART Russell, SHI Yuhui, *Swarm Intelligence*, Morgan Kaufmann Publishers, 2001.
- [116] MONSON Christopher, SEPPI Kevin, *Exposing Origin-Seeking Bias in PSO*, Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference, 2005.
- [117] GEHLHAAR Daniel, FOGEL David, *Tuning evolutionary programming for conformationally flexible molecular docking*, Evolutionary Programming, 1996.
- [118] MONTES Marco, THOMAS Stützle, MAURO Birattari, MARCO Dorigo, *A comparison of particle swarm optimization algorithms based on run-length distributions*, Proceedings of the 5th international conference on Ant Colony Optimization and Swarm Intelligence (ANTS'06), 2006.

-
- [119] ARRIAZA Gómez, FERNÁNDEZ Palacín, LÓPEZ Sánchez, MUÑOZ Márquez, PÉREZ Plaza, SÁNCHEZ Navas, *Estadística básica con R y R-Commander*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz, 2008.
- [120] MONTGOMERY Douglas, *Diseño y análisis de experimentos*, Limusa Wiley, 2003.
- [121] DEMSAR Janez, *Statistical comparisons of classifiers over multiple data sets*, Journal of Machine Learning Research, Vol. 7, 2006.
- [122] GARCÍA Salvador, MOLINA Daniel, LOZANO Manuel, HERRERA Francisco, *A study on the use of non-parametric tests for analyzing the evolutionary algorithms' behaviour: a case study on the CEC'2005 Special Session on Real Parameter Optimization*, Journal of Heuristics, Vol. 15, Num. 6, 2009.
- [123] MORENO Luis, *Texto y software en diseños experimentales no-paramétricos más importantes*, Tesis profesional, Universidad de las Américas Puebla, México, 2005.
- [124] HOCHBERG Yosef, TAMHANE Ajit, *Multiple comparison procedures*, Wiley, New York, 1987.