El Modelo Minimal del Espacio de Lazos

DIEGO DANIEL DUARTE VOGEL
MATEMÁTICO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
JUNIO 2012

El Modelo Minimal del Espacio de Lazos

Diego Daniel Duarte Vogel
Matemático

Trabajo de tesis para optar al título de
Maestría en Ciencias Matemáticas

Director
Carlos Segovia González [a]
Doctor en Matemáticas

Codirector
Edward Becerra [b]
Doctor en Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
Junio 2012

---

[a]Universidad de los Andes
[b]Universidad Nacional de Colombia

Título en español

El Modelo Minimal del Espacio de Lazos

Title in English

The Minimal Model of the Free Loop Space

Resumen: El primer objetivo de este trabajo es dotar de una estructura diferencial al espacio de lazos libres de una variedad cerrada simplemente conexa y a partir de esto se definirá el dual del producto de lazos. El segundo objetivo es hacer uso del poder computacional de la teoría de homotopía racional para definir el modelo minimal del espacio de lazos libres de las esferas y los espacios proyectivos complejos y calcular explícitamente la cohomología de estos espacios.

Abstract: The first aim of this work is endow with a differential structure the free loop space of a closed simply connected manifold then it will be defined the dual of the loop product. The second aim is to use the computational power of the rational homotopy theory to define the minimal model of the free loop space of spheres and complex projective spaces and calculate explicitly the cohomology of these spaces.

Palabras clave: Modelo minimal, espacio de lazos libres, homotopía racional, producto de lazos, cohomología racional, variedad de Hilbert

Keywords: Minimal model, free loop space, rational homotopy, loop product, rational cohomology, Hilbert manifold

Nota de aceptación

Jurado
Primer Evaluador

Director
Carlos Segovia González

Codirector
Edward Becerra

Índice general

Introducción

La teoría de homotopía es el estudio de invariantes topológicos de espacios topológicos y de funciones continuas que sólo dependen del tipo de homotopía del espacio y de la clase de homotopía de las funciones.

Definición .0.1. Dos funciones continuas $f, g : X \to Y$ son *homotópicas* ($f \sim g$) si existe $F : X \times I \to Y$ continua tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Dos espacios topológicos X y Y tienen el mismo tipo de homotopía si existen $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ funciones continuas tales que $fg \sim id_Y$ y $gf \sim id_X$.

Los ejemplos clásicos de tales invariantes son los grupos de homología singular $H_i(X)$ y los grupos de homotopía $\pi_n(X)$. Como los grupos $H_i(X)$ y $\pi_n(X)$ con $n \geq 2$, son abelianos estos pueden ser racionalizados, es decir, dotarlos de estructura de $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales notados respectivamente $H_i(X; \mathbb{Q})$ y $\pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}$. A partir de esto nace la idea de la teoría de homotopía racional. La teoría de homotopía racional tiene sus inicios en los años 60 con una construcción geométrica de Dennis Sullivan [5] donde mostraba que los CW complejos simplemente conexos y las funciones continuas entre ellos podían ser racionalizados. Esto quiere decir que construyó espacios topológicos $X_{\mathbb{Q}}$ y funciones $f_{\mathbb{Q}} : X_{\mathbb{Q}} \to Y_{\mathbb{Q}}$ tales que $H_*(X_{\mathbb{Q}}) = H_*(X; \mathbb{Q})$ y $\pi_n(X_{\mathbb{Q}}) = \pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}$. Por lo tanto se puede definir el tipo de homotopía racional de un CW complejo simplemente conexo X como el tipo de homotopía de $X_{\mathbb{Q}}$ y la clase de homotopía racional de $f : X \to Y$ como la clase de homotopía de $f_{\mathbb{Q}} : X_{\mathbb{Q}} \to Y_{\mathbb{Q}}$, así la teoría de homotopía racional es el estudio de los invariantes topológicos de $X_{\mathbb{Q}}$ y las funciones $f_{\mathbb{Q}}$.

La teoría de homotopía racional tiene un gran poder computacional debido a los trabajos de Daniel Quillen [20] y Dennis Sullivan [23] en donde describen una formulación explícita mediante la asignación de un objeto algebraico a un espacio topológico, salvo clases de isomofismo, que determina su tipo de homotopía racional y además de que la clase de homotopía racional de una función continua está determinada por la clase de homotopía algebraica de morfismos entre tales objetos.

Motivado en el álgebra de De Rham de formas diferenciales de una variedad, Sullivan construyó para cada espacio topológico X un álgebra diferencial graduada conmutativa sobre los racionales, $A_{PL}(X)$, conocida como el álgebra de formas polinomiales del espacio X. Sullivan probó que $A_{PL}(X)$ es homotópico al complejo de cocadenas $C^*(X; \mathbb{Q})$.

Los objetos algebraicos que encontraron Quillen y Sullivan se conocen como modelos minimales y se definen de la siguiente manera

Definición .0.2. Un *álgebra de Sullivan* es un álgebra diferencial graduada conmutativa de la forma $(\Lambda V, d)$ con $V = \{V^n\}_{n\geq 1}$ y tal que V admite una base x_α indexada por un conjunto bien ordenado tal que $d(x_\alpha) \in \Lambda(x_\beta)_{\beta<\alpha}$. Se dice que $(\Lambda V, d)$ es *minimal* si $d(V) \subseteq \Lambda^{\geq 2}V$.

Definición .0.3. Un *modelo de Sullivan* para un álgebra diferencial graduada conmutativa (A, d) es un quasi-isomorfismo [1]

$$\varphi : (\Lambda V, d) \to (A, d)$$

donde $(\Lambda V, d)$ es un álgebra de Sullivan. Se dice que el módelo es *minimal* si $(\Lambda V, d)$ es minimal.

De esta manera el modelo minimal que se le asocia a un espacio topológico está dado por el modelo minimal del álgebra diferencial graduada $A_{PL}(X)$.

El objetivo principal de este trabajo es describir la estructura diferencial del espacio de lazos libres LX de una variedad cerrada simplemente conexa X, para esto se describirá su estructura de variedad de Hilbert, se mostrará la equivalencia homotópica entre el espacio de lazos libres visto como variedad de Hilbert y visto como el espacio de aplicaciones continuas entre el círculo unitario y la variedad con la topología compacta-abierta. También se definirá el dual del producto de lazos definido por Chas y Sullivan [3] sobre su cohomología.

Para describir explícitamente la cohomología racional del espacio de lazos libres se hará uso de las herramientas computacionales de los modelos minimales:

Teorema .0.1. *Sea X un espacio simplemente conexo con modelo minimal $(\Lambda V, d)$ entonces el modelo para el espacio de lazos libres LX, está dado por*

$$(\Lambda V \otimes \Lambda sV, \delta)$$

con $\delta(v) = dv$ y $\delta(sv) = -sd(v)$ donde s es la derivación definida por $s(v) = sv$.

Finalmente se calculará explícitamente la cohomología racional del espacio de lazos libres de las esferas y de los espacios proyectivos complejos.

[1] φ induce un isomorfismo en cohomología

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este capítulo se introduciran todas las nociones básicas que se necesitarán para el desarrollo de este trabajo. Este capítulo está divido en seis secciones organizadas de la siguiente manera: álgebras diferenciales graduadas, homología y cohomología singular, fibraciones y fibrados vectoriales, isomorfismo de Thom, clase de Euler y sucesión de Gysin, espacios de Banach y de Hilbert y por último variedades de Hilbert y geometría Riemanniana. Cada una de estas secciones constituye un conjunto de preliminares para los siguientes capítulos.

1.1. Álgebras diferenciales graduadas

En esta sección se hará una breve introducción de álgebras diferenciales graduadas, empezando con deficiones, ejemplos y algunos resultados conocidos. El ejemplo más importante de esta sección será el de *álgebra conmutativa graduada libre*, ΛV , pues a partir de este ejemplo se definirán las nociones de algebra Sullivan y modelos minimales en el siguiente capítulo.

Definición 1.1.1. Sea $\mathbb{K}$ un anillo conmutativo. Un $\mathbb{K}$-*módulo graduado* es una familia de $\mathbb{K}$-módulos $V = \{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ donde los elementos pertenecientes a V_n son llamados *elementos homogeneos de grado* n y se notará por $|v| = n$, $v \in V_n$, al grado del elemento v .

Las notaciones estandar para modulos no-graduados se mantienen en el contexto graduado:

- Un *submodulo* $V' \subseteq V$ es un módulo graduado $\{V'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ donde $V'_n \subseteq V_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
- El *cociente* del módulo V por el submódulo V' es la familia $\{V_n/V'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.
- La *suma directa* $\bigoplus\limits_{\alpha} V(\alpha)$ es la familia $\left\{\bigoplus\limits_{\alpha} V(\alpha)_n\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$.
- El *producto directo* $\prod\limits_{\alpha} V(\alpha)$ es la familia $\left\{\prod\limits_{\alpha} V(\alpha)_n\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$. El producto directo de V y W se notara por $V \times W$.

- Un módulo graduado, V, es *libre* si cada V_n es libre. En este caso se tiene que la unión disjunta de las bases de los V_n es una *base* de V.

- Una *aplicación lineal $f : V \to W$ de grado i* es una familia de aplicaciones lineales $f_j : V_j \to W_{j+i}$ además cada aplicación lineal determina dos submódulos graduados $Ker(f) \subseteq V$ y $Im(f) \subseteq W$ definidos por las familias $(Ker(f))_n = Ker(f_n)$ y $(Im(f))_n = Im(f_{n-i})$.

- $Hom(V,W)$ es el módulo graduado definido por la familia $\{(Hom(V,W))_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, donde $(Hom(V,W))_n$ son todas las aplicaciones lineales de grado n entre V y W. Si $f : V' \to V$ y $g : W \to W'$ son aplicaciones lineales entonces
$$\begin{aligned} Hom(f,g) : Hom(V,W) &\to Hom(V',W') \\ \phi &\mapsto (-1)^{|f|(|g|+|\phi|)} g\phi f \end{aligned}$$
es una aplicación lineal.

- Al *módulo dual de V*, $Hom(V,\mathbb{K})$, se le notara por $V^\sharp$, y $f^\sharp = Hom(f,\mathbb{K}) : W^\sharp \to V^\sharp$ al dual de la aplicación lineal $f : V \to W$.

- Sean $f_\alpha : V_\alpha \to Z$ aplicaciones lineales de grado cero. El *producto fibrado*, $(\prod\limits_{\alpha\in I})_Z(V_\alpha)$, es el submódulo de $\prod\limits_{\alpha\in I} V_\alpha$ de los elementos $\{v_\alpha\}$ tales que $f_\alpha(v_\alpha) = f_\beta(v_\beta)$, $\alpha,\beta \in I$. El producto fibrado de V y W se notara por $V \underset{Z}{\times} W$.

- El *producto tensorial* $V \otimes W$ de un par de módulos graduados es la familia $\left\{(V\otimes W)_n = \bigoplus\limits_{i+j=n} V_i \otimes W_j\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Si $f : V \to V'$ y $g : W \to W'$ son aplicaciones lineales de grados p y q respectivamente entonces
$$\begin{aligned} f\otimes g : V\otimes W &\to V'\otimes W \\ (v\otimes w) &\mapsto (-1)^{|g||v|} f(v)\otimes g(w) \end{aligned}$$
es una aplicación lineal de grado $p+q$.

- Una *aplicación p-lineal* es una aplicación $\alpha : V(1)\times\cdots\times V(p) \to W$ que se extiende al producto tensorial mediante la aplicación lineal $\beta : V(1)\otimes\cdots\otimes V(p) \to W$, es decir, $\alpha(v_1,\ldots,v_p) = \beta(v_1\otimes\cdots\otimes v_p)$.

Además,

- La *suspensión* de un módulo graduado V es el módulo graduado sV definido por $(sV)_n = V_{n-1}$. Si $v \in V_{n-1}$ su elemento correspondiente en $(sV)_n$ se notara por sv.

- Notaciones que serán usadas $V_{-n} = V^n$, $V_{>k} = \{V_n\}_{n>k}$ y $V_{\le k} = \{V_n\}_{n\le k}$. Los módulos graduados $V_{<k}$, $V_{\ge k}$, $V^{<k}$, $V^{\ge k}$, $V^{>k}$, $V^{\le k}$, se definen análogamente. Y se utilizaran las notaciones $V^+ = \{V^n\}_{n>0}$ y $V_+ = \{V_n\}_{n>0}$.

Definición 1.1.2. Se dice que una sucesión de aplicaciones lineales

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q$$

es *exacta* si $Ker(g) = Im(f)$. En particular, si f es inyectiva y g es sobreyectiva entonces

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta que se denomina *sucesión exacta corta.*

Lema 1.1.1 (Lema de los Cinco)**.** *Si en el siguiente diagrama conmutativo de módulos graduados las filas son exactas*

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_L"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_M"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_N"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_P"] & Q \arrow[d, "\alpha_Q"] \\
L' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & P' \arrow[r] & Q'
\end{tikzcd}$$

entonces,

1. *Si α_L es sobreyectiva y además α_M y α_P son inyectivas entonces α_N es inyectiva.*

2. *Si α_M y α_P son sobreyectivas y α_Q es inyectiva entonces α_N es sobreyectiva.*

3. *Si α_L es sobreyectiva, α_Q es inyectiva y además α_M y α_P son isomorfismos entonces α_N es un isomorfismo.*

Demostración. La prueba es inmediata a partir del lema de los cinco para el caso no-graduado, para la prueba consultar [2]. □

Definición 1.1.3. Un *diferencial* en un módulo graduado $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una aplicación lineal $d : M \to M$ de grado -1 tal que $d^2 = 0$, al par (M, d) se le denomina *complejo*. Los elementos de $Ker(d)$ se conocen como *ciclos*, los de $Im(d)$ como *fronteras* y al cociente de módulos graduados $H(M, d) = Ker(d)/Im(d)$ como la *homología de M*.

Definición 1.1.4. Un *morfismo de complejos* $\phi : (M, d) \to (N, d)$ es una aplicación lineal $\phi : M \to N$ de grado cero tal que $\phi d = d\phi$. Este induce una aplicación lineal

$$\begin{aligned} H(\phi) : H(M) &\to H(N) \\ [z] &\mapsto [\phi(z)] \end{aligned}$$

Si $H(\phi)$ es un isomorfismo se dice que ϕ es un *quasi-isomorfismo* y se denota $\phi : M \overset{\cong}{\to} N$. Dos morfismos ϕ y ψ son *homotópicos* ($\phi \sim \psi$) si existe una aplicación lineal $h : M \to N$ de grado 1 tal que $\phi - \psi = hd + dh$. h se conoce como *homotopía de cadenas*.

Definición 1.1.5. Una *equivalencia de cadenas* $\phi : (M, d) \to (N, d)$ es un morfismo tal que existe un segundo morfismo $\psi : (N, d) \to (M, d)$ y se tiene que $\phi\psi \sim id_N$ y $\psi\phi \sim id_M$. Es inmediato que una equivalencia de cadenas es un quasi-isomorfismo.

Note que si (M, d) y (N, d) son complejos entonces $Hom(M, N)$ y $M \otimes N$ también lo son, y los diferenciales se definen por:

$$d(f) = df - (-1)^{|f|} fd, \quad f \in Hom(M, N)$$

$$d(m \otimes n) = dm \otimes n + (-1)^{|m|} m \otimes dn, \quad m \in M, n \in N \tag{1.1}$$

Definición 1.1.6. Un *complejo de cocadenas* es un complejo (M, d) con $M = M^+$, en este caso los elementos de $Ker(d)$ se conocen como *cociclos*, los de $Im(d)$ como *cofronteras* y al cociente de módulos graduados $H(M, d) = Ker(d)/Im(d)$ como la *cohomología de M*.

Definición 1.1.7. La *suspensión* de un complejo (M, d) es el complejo $s(M, d) = (sM, d)$ con diferencial definido por $sdx = -dsx$.

Lema 1.1.2 (Lema de la serpiente)**.** *Dada una sucesión exacta corta de complejos*

$$0 \longrightarrow (M, d) \xrightarrow{f} (N, d) \xrightarrow{g} (Q, d) \longrightarrow 0$$

donde f y g son morfismos entonces existe una sucesión exacta larga de homología

$$\cdots \longrightarrow H_i(M) \xrightarrow{H_i(f)} H_i(N) \xrightarrow{H_i(g)} H_i(Q) \xrightarrow{\partial} H_{i-1}(M) \longrightarrow \cdots$$

Demostración. El morfismo de conexión ∂ se define de la siguiente manera: si $z \in Q$ es un representante de $[z] \in H_i(Q)$ por la sobreyectividad de g existe $n \in N$ tal que $g(n) = z$, y por la exactitud y la inyectividad de f existe un único ciclo $x \in M$ tal que $f(x) = d(n)$ y por tanto ∂ se define como $\partial[z] := [x]$. Para ver que ∂ está bien definida y para la demostración del lema consultar [2]. □

Definición 1.1.8. Un *álgebra graduada* es un módulo graduado, R, con una aplicación lineal asociativa de grado cero

$$R \otimes R \to R$$
$$x \otimes y \mapsto xy$$

la cual tiene un elemento neutro $1 \in R_0$, es decir, para todo $x, y, z \in R$ se cumple

(a) $(xy)z = x(yz)$, y

(b) $1x = x = x1$.

Un *morfismo* $\phi : R \to S$ de álgebras graduadas es una aplicación lineal de grado cero tal que $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ y $\phi(1) = 1$.

El anillo $\mathbb{K}$ puede ser visto como álgebra graduada de la siguiente manera $\mathbb{K} = \{\mathbb{K}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ donde

$$\mathbb{K}_n = \begin{cases} \mathbb{K} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

En este caso un morfismo de álgebras graduadas $\epsilon : R \to \mathbb{K}$ se conoce como *aumentación*.

Definición 1.1.9. Una *derivación de grado k* es una aplicación lineal $\theta : R \to R$ de grado k tal que

$$\theta(xy) = \theta(x)y + (-1)^{k|x|}x\theta(y)$$

Definición 1.1.10. Sea R un álgebra graduada. Un *R-módulo (a izquierda)* es un módulo graduado M junto con una aplicación lineal de grado cero

$$\begin{aligned} R \otimes M &\to M \\ x \otimes m &\mapsto xm \end{aligned}$$

tal que $x(ym) = (xy)m$ y $1m = m$ para todo $x, y \in R$ y todo $m \in M$. Análogamente se definen los R-módulos a derecha. Una *aplicación R-lineal* $f : M \to N$ de grado k es una aplicación lineal de grado k tal que

$$f(xm) = (-1)^{|f||x|}xf(m), \quad x \in R, x \in M$$

Estas aplicaciones forman un submódulo $Hom_R(M, N)$ del módulo graduado $Hom(M, N)$.

Definición 1.1.11. El *producto tensorial* $M' \underset{R}{\otimes} M$ de un R-módulo a derecha M' y un R-módulo a izquierda M es el módulo cociente

$$M' \underset{R}{\otimes} M = \frac{M' \otimes M}{I}$$

donde I es el módulo generado por los elementos de la forma $m'x \otimes m - m' \otimes xm$ con $m' \in M'$, $m \in M$ y $x \in R$.

Ejemplo 1. Algunos ejemplos de álgebras graduadas:

- *Cambio de álgebra.* Un morfismo $\phi : R \to S$ de álgebras graduadas dota a S de una estructura de R-módulo a izquierda (derecha) mediante

  $$x \cdot s = \phi(x)s \quad \text{ó} \quad s \cdot x = s\phi(x), \quad x \in R, s \in S$$

  Si M es un R-módulo entonces $S \underset{R}{\otimes} M$ es un S-módulo a izquierda $s \cdot (s' \underset{R}{\otimes} m) = ss' \underset{R}{\otimes} m$.

- *Módulos libres.* Sea R un álgebra graduada. Un R-módulo M es *libre* si $M \cong R \otimes V$, con V un módulo graduado libre. Una base $\{v_\alpha\}$ de V es una base para el R-módulo libre M. Si $\phi : R \to S$ es un morfismo de álgebras graduadas entonces

  $$S \underset{R}{\otimes} M = S \underset{R}{\otimes} (R \otimes V) = S \otimes V$$

  es un S-módulo libre con la misma base.

- *Producto tensorial de álgebras graduadas.* Si R, S son álgeras graduadas entonces $R \otimes S$ denota el álgebra graduada con producto

  $$(x \otimes y)(x' \otimes y') = (-1)^{|y||x'|}xx' \otimes yy' \tag{1.2}$$

- *Álgebra tensorial.* Para todo módulo graduado libre V, el álgebra tensorial TV se define por

$$TV = \bigoplus_{q=0}^{\infty} T^q V \qquad T^q V = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{q}$$

El producto está dado por $a \cdot b = a \otimes b$. Note que q no es el grado de un elemento $v_1 \otimes \cdots \otimes v_q \in T^q V$ el grado es $\sum |v_i|$ y se dice que tiene *longitud de palabra q.* Toda aplicación lineal $f : V \to R$ de grado cero de V , en un álgebra graduada R , se extiende a un único morfismo de algebras graduadas

$$\begin{aligned} \widehat{f} &: TV \to R \\ a \otimes b &\mapsto f(a)f(b) \end{aligned}$$

Y toda aplicación lineal $g : V \to TV$ de grado k se extiende a una única derivación de grado k en TV

$$\begin{aligned} \widehat{g} &: TV \to TV \\ a \otimes b &\mapsto g(a) \otimes b + (-1)^{k|a|} a \otimes g(b) \end{aligned}$$

- *Álgebras conmutativas graduadas.* Un álgebra graduada A es *conmutativa* si

$$xy = (-1)^{|x||y|} yx, \qquad x, y \in A$$

Si $\frac{1}{2} \in \mathbb{K}$ lo anterior implica que $x^2 = 0$ para todo elemento homogéneo x de grado impar. Si A es un álgebra conmutativa graduada entonces un A-módulo izquierdo, M, es automáticamente un A-módulo derecho

$$mx = (-1)^{|m||x|} xm$$

Si N es otro A-módulo entonces $Hom_A(M, N)$ y $M \underset{A}{\otimes} N$ son A-módulos mediante

$$(xf)(m) = x \cdot f(m) = (-1)^{|f||x|} f(xm)$$

$$x(m \underset{A}{\otimes} n) = xm \underset{A}{\otimes} n = (-1)^{|x||m|} m \underset{A}{\otimes} xn$$

donde $x \in A$, $m \in M$ y $n \in N$.

- *Álgebras conmutativas graduadas libres.* Si $\frac{1}{2} \in \mathbb{K}$ y V es un módulo graduado libre entonces los elementos $v \otimes w - (-1)^{|v||w|} w \otimes v$ $(v, w \in V)$ generan un ideal $I \subset TV$. El álgebra cociente

$$\Lambda V = TV/I$$

se llama *álgebra conmutativa graduada libre* de V. El álgebra ΛV tiene las siguientes propiedades:

  (i) ΛV es graduada, conmutativa y en particular el cuadrado de un elemento de grado impar en ΛV es cero.

  (ii) Existe un único ismorfismo $\Lambda(V \bigoplus W) = \Lambda V \otimes \Lambda W$ tal que es la identidad en V y en W.

(iii) Si V es libre generado por un único elemento $\{v\}$ entonces una base para ΛV está dada por:

$$\begin{cases} 1 \quad v & \text{si } |v| \text{ es impar} \\ 1 \quad v \quad v^2 \quad v^3 \quad \cdots & \text{si } |v| \text{ es par} \end{cases}$$

(iv) Toda aplicación lineal $V \to A$ de grado cero de V, en un álgebra conmutativa graduada A, se extiende a un único morfismo de algebras graduadas $\Lambda V \to A$ y además toda aplicación lineal $V \to \Lambda V$ de grado k se extiende a una única derivación de grado k en ΛV.

(v) Sea $\Lambda V \to A$ un morfismo de álgebras graduadas con θ y θ' derivaciones en ΛV y A respectivamente. Si $\phi\theta(v) = \theta'\phi(v)$ para algún $v \in V$ entonces $\phi\theta = \theta'\phi$.

(vi) $\Lambda V = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \Lambda^q V$ donde $\Lambda^q V$ es el módulo generado por los elementos $v_1 \wedge \cdots \wedge v_q$, $v_i \in V$; estos elementos tienen grado $\sum |v_i|$ y longitud de palabra q. Los elementos de $\Lambda^{\geq 2} V$ se denominan *elementos descomponibles*.

Definición 1.1.12. Un *álgebra diferencial graduada (adg)* es un álgebra graduada R junto con un diferencial en R que es una derivación. En este caso $Ker(d)$ es un subálgebra de R y $Im(d)$ es un ideal de $Ker(d)$. EL *álgebra de homología* $H(R,d)$, de un adg (R,d), es el álgebra graduada $H(R,d) = Ker(d)/Im(d)$.

Definición 1.1.13. Un *morfismo* de adg $f : (R,d) \to (S,d)$ es un morfismo de álgebras graduadas tal que $fd = df$. Este induce un morfismo $H(f) : H(R) \to H(S)$ de álgebras graduadas. Una *aumentación* es un morfismo $\epsilon : (R,d) \to (\mathbb{K},0)$.

Definición 1.1.14. Un *álgebra de cadenas* es un adg (R,d) con $R = R_+$; un *álgebra de cocadenas* es un adg (R,d) con $R = R^+$, en este caso $H(R,d) = Ker(d)/Im(d)$ es el *álgebra de cohomología de R.*

Definición 1.1.15. Un *módulo (a izquierda)* sobre un adg (R,d) es un R-módulo, M, junto con un diferencial d tal que

$$d(x \cdot m) = dx \cdot m + (-1)^{|x|} x \cdot dm\,, \quad x \in R,\ m \in M\,,$$

entonces $H(M)$ es un $H(R)$-módulo mediante

$$[x] \cdot [m] = [x \cdot m]$$

Un *morfismo* de módulos (a izquierda) sobre un adg (R,d), es un morfismo $f : (M,d) \to (N,d)$ de R-módulos graduados tal que $df = fd$; donde el morfismo inducido $H(f) : H(M) \to H(N)$ es un morfismo de $H(R)$-módulos.

Ejemplo 2. Algunos ejemplos de adg son:

- *Producto tensorial.* Si (R,d) y (S,d) son adg entonces $(R,d) \otimes (S,d)$ es un adg con el diferencial (1.1) y el producto (1.2).

- $Hom_R(M,M)$. Si (M,d) es cualquier (R,d)-módulo entonces $Hom_R(M,M)$ es un adg con producto la composición de aplicaciones.

- *Productos directos.* Si (A,d) y (A',d) son adg entonces el *producto directo* $(A,d)\times(A',d)$ es el adg $(A\times A',d)$ con producto $(a,a')\cdot(b,b')=(ab,a'b')$ y diferencial $d(a,a')=(da,da')$. El producto directo $\prod_{\alpha}(A_\alpha,d)$ de una familia de adg se define de manera análoga.

- *Producto fibrado.* Si $f:(A,d)\to(B,d)$ y $f':(A',d)\to(B,d)$ son morfismos de adg entonces $(A\underset{B}{\times}A',d)$ es un sub adg de $(A\times A',d)$ llamado *producto fibrado.* El producto fibrado de una familia de adg (A_α,d) con respecto a los morfismos de adg $f_\alpha:(A_\alpha,d)\to(B,d)$ es el sub adg $(\prod_{\alpha\in I})_Z(A_\alpha,d)$ de $\prod_{\alpha\in I}(A_\alpha,d)$.

Definición 1.1.16. Una *coálgebra graduada* C es un módulo graduado C con dos aplicaciones lineales de grado cero: un *coproducto* $\Delta: C\to C\otimes C$ y una aumentación $\epsilon: C\to\mathbb{K}$ llamada *counidad* tales que

(a) $(\Delta\otimes id)\Delta=(id\otimes\Delta)\Delta$, y

(b) $(id\otimes\epsilon)\Delta=(\epsilon\otimes id)\Delta=id_C$.

Un *morfismo* $\phi: C\to C'$ de coálgebras graduadas es una aplicación lineal de grado cero tal que $(\phi\otimes\phi)\Delta=\Delta'\phi$ y $\epsilon=\epsilon'\phi$.

Definición 1.1.17. Un *comódulo graduado (a izquierda)* sobre una coálgebra graduada C es un espacio vectorial graduado, M, junto con una aplicación lineal $\Delta_M: M\to C\otimes M$ de grado cero tal que

(a) $(\Delta\otimes id)\Delta_M=(id\otimes\Delta_M)\Delta_M$, y

(b) $(\epsilon\otimes id_M)\Delta_M=id_M$.

Definición 1.1.18. Una coálgebra graduada es *co-conmutativa* si

$$\tau\Delta=\Delta$$

donde $\tau: C\otimes C\to C\otimes C$ es la *involución de Koszul* $a\otimes b\mapsto(-1)^{|a||b|}b\otimes a$. Una *coaumentación* de una coálgebra graduada es la elección de un elemento $1\in C_0$ tal que $\epsilon(1)=1$ y $\Delta(1)=1\otimes 1$. De las relaciones anteriores se obtiene la siguiente realción para $a\in Ker(\epsilon)$

$$\Delta(a)-(a\otimes 1+1\otimes a)\in Ker(\epsilon)\otimes Ker(\epsilon)\,.$$

Un elemento, a, en una coálgebra graduada coaumentada se denomina *primitivo* si $a\in Ker(\epsilon)$ y $\Delta(a)=a\otimes 1+1\otimes a$. Los elementos primitivos forman un submódulo de $Ker(\epsilon)$ y un morfismo de coálgebras graduadas coaumentadas envía elementos primitivos en elementos primitivos.

Definición 1.1.19. Una *coderivación de grado k*, en una coálgebra graduada C, es una aplicación lineal $\theta: C\to C$ de grado k tal que

$$\Delta\theta=(\theta\otimes id+id\otimes\theta)\Delta \quad \text{y} \quad \epsilon\theta=0\,.$$

Una *coálgebra diferencial graduada (cdg)* es una coálgebra graduada C junto con un diferencial que es una coderivación en C.

Si C es una coálgebra graduada entonces $Hom(C, \mathbb{K})$ es un álgebra graduada con producto definido por

$$(f \cdot g)(c) = (f \otimes g)(\Delta(c)) \qquad f, g \in Hom(C, \mathbb{K}),\ c \in C\,,$$

y con elemento neutro la aplicación $\epsilon : C \to \mathbb{K}$. Si (C, d) es una cdg entonces $C^\sharp = Hom(C, \mathbb{K})$ es un adg.

Proposición 1.1.3. *Si $\mathbb{K}$ es un campo entonces las aplicaciones*

$$\begin{array}{ccc} H(M) \otimes H(N) \to H(M \otimes N) & y & H(Hom(M,N)) \to Hom(H(M), H(N)) \\ [z] \otimes [w] \mapsto [z \otimes w] & & [f] \mapsto H(f) \end{array}$$

son isomorfismos.

En particular, suponga que (C, d) es una cdg sobre un campo $\mathbb{K}$, usando el primer isomorfismo de la proposición anterior $H(\Delta) : H(C) \to H(C) \otimes H(C)$ y junto con $H(\epsilon)$, se tiene que $H(C)$ resulta ser una coálgebra graduada. Nuevamente por la proposición anterior el álgebra dual, $Hom(H(C), \mathbb{K})$ resulta ser el álgebra de homología del adg $Hom(C, \mathbb{K})$.

Definición 1.1.20. Si $\mathbb{K}$ es un campo se dice que un espacio vectorial graduado $M = \{M_i\}$ es de *tipo finito* si cada M_i es finito dimensional. Si solo un número finito de los M_i son no nulos entonces M es *finito dimensional* y $dim(M) = \sum dim(M_i)$.
Cuando M tiene tipo finito su *serie de Hilbert* es la serie formal

$$M_*(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (dim(M_i))z^i$$

Si M es finito dimensional entonces su *característica de Euler-Poincaré* es el entero χ_M definido por

$$\chi_M = \sum (-1)^i dim(M_i) = dim(M_{par}) - dim(M_{impar}) = M_*(-1)$$

Si (M, d) es un complejo entonces

$$\chi_M = \chi_{H(M)}$$

1.2. Homología y cohomología singular

En esta sección se hará una breve revisión de la homología y la cohomología singular con coeficientes sobre un anillo conmutativo R y algunos resultados conocidos.

Definición 1.2.1. Un *n-símplice singular* en un espacio topológico X es una función continua

$$\sigma : \Delta^n \to X\,,$$

donde $n \geq 0$ y

$$\Delta^n = \left\{ \sum_0^n t_i e_i \mid 0 \leq t_i \leq 1, \sum t_i = 1 \right\}$$

es la envolvente convexa de la base canónica $e_0, \ldots, e_n$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Note que si $X \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ es un conjunto convexo entonces cualquier sucesión $x_0, \ldots, x_n$ determina un símplice lineal

$$\begin{aligned} \langle x_0 \ldots x_n \rangle : \Delta^n &\to X \\ \sum t_i e_i &\mapsto \sum t_i x_i \end{aligned}$$

Definición 1.2.2. Se demonomina la *j-cara* de Δ^n a la imagen de

$$\lambda_j^n = \langle e_0 \ldots \widehat{e}_j \ldots e_n \rangle : \Delta^{n-1} \to \Delta^n \, ,$$

donde $\widehat{\ }$ significa omitir, $n \geq 1$ y $0 \leq j \leq n$.

Note que

$$\lambda_j^{n+1} \circ \lambda_i^n = \begin{cases} \langle e_0 \ldots \widehat{e}_i \ldots \widehat{e}_j \ldots e_n \rangle & \text{si } i < j \\ \langle e_0 \ldots \widehat{e}_j \ldots \widehat{e}_{i+1} \ldots e_n \rangle & \text{si } i \geq j \end{cases}$$

Definición 1.2.3. Para cada $n \geq 0$ se define el módulo de las *n-cadenas singulares* de un espacio topológico X como el R-módulo libre $C_n(X; R)$ que tiene por base al conjunto de todos los n-símplices singulares.

De este modo, una n-cadena singular no nula se expresa de manera única como

$$\gamma = \sum_{i=0}^{k} a_i \sigma_i \qquad a_i \in R \, .$$

Definición 1.2.4. La *j-cara* de un n-símplice $\sigma : \Delta^n \to X$ es $\sigma^{(j)} = \sigma \circ \lambda_j^n$. La *frontera* de σ se define como la $(n-1)$-cadena

$$\partial_n \sigma = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sigma^{(j)} \, ,$$

donde ∂_n se extiende linealmente a todo $C_n(X; R)$ para obtener un homomorfismo

$$\begin{aligned} \partial_n : C_n(X; R) &\to C_{n-1}(X; R) \\ \gamma = \sum_{i=0}^{k} a_i \sigma_i &\mapsto \partial_n \gamma = \sum_{i=0}^{k} a_i \partial_n \sigma_i \end{aligned}$$

Por convención $C_n(x; R) = 0$ para $p < 0$ y $\partial_n = 0$ para $p \leq 0$. Las cadenas en el kernel de ∂_n se denominan *n-ciclos* y las de la imagen *n-fronteras*. Es decir,

$$\begin{aligned} n - ciclos &= Ker \partial_n = Z_n(X; R) \, , \; y \\ n - fronteras &= Im \partial_{n+1} = B_n(X; R) \, . \end{aligned}$$

Lema 1.2.1. $\partial_n \partial_{n+1} = 0$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\partial_n \partial_{n+1} \sigma &= \partial_n \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \sigma^{(j)} = \partial_n \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j (\sigma \circ \lambda_j^{n+1}) \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma \circ \lambda_j^{n+1}) \circ \lambda_i^n \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+j} \sigma \circ \lambda_j^{n+1} \circ \lambda_i^n \\
&= \sum_{0 \le i < j \le n+1} (-1)^{i+j} \sigma \circ \lambda_j^{n+1} \circ \lambda_i^n + \sum_{0 \le j \le i \le n} (-1)^{i+j} \sigma \circ \lambda_j^{n+1} \circ \lambda_i^n \\
&= \sum_{0 \le i < j \le n+1} (-1)^{i+j} \sigma \circ \lambda_j^{n+1} \circ \lambda_i^n + \sum_{0 \le j \le i \le n} (-1)^{i+j} \sigma \circ \lambda_{i+1}^{n+1} \circ \lambda_j^n
\end{aligned}$$

Reemplazando $i+1$ por i, la segunda suma se vuelve la primera con signo contrario y por tanto $\partial_n \partial_{n+1} \sigma = 0$. □

Definición 1.2.5. El *n-ésimo grupo de homología singular* de un espacio topológico X es

$$H_n(X;R) = Z_n(X;R)/B_n(X;R) = Ker\partial_n / Im\partial_{n+1}$$

Definición 1.2.6. El módulo de *n-cocadenas singulares* $C^n(X;R)$ se define como el dual de $C_n(X;R)$, es decir, $Hom_R(C_n(X;R), R)$ todas las aplicaciones R-lineales de $C_n(X;R)$ en R. El valor de la cocadena c en la cadena γ se notara por $\langle c, \gamma \rangle \in R$.

Definición 1.2.7. La *cofrontera* de la cocadena $c \in C^n(X;R)$ se define como la cocadena $\delta_n c \in C^{n+1}(X;R)$ cuyo valor en cada $(n+1)$-cadena α está determinado por la identidad

$$\langle \delta_n c, \alpha \rangle + (-1)^n \langle c, \partial_{n+1} \alpha \rangle = 0 \,.$$

Las cocadenas en el kernel de δ_n se denominan *n-cociclos* y las de la imagen *n-cofronteras*. Es decir,

$$\begin{aligned}
n - cociclos &= Ker\delta_n = Z^n(X;R)\,,\ y \\
n - cofronteras &= Im\delta_{n-1} = B^n(X;R)\,.
\end{aligned}$$

Definición 1.2.8. El *n-ésimo grupo de cohomología singular* de un espacio topológico X es

$$H^n(X;R) = Z^n(X;R)/B^n(X;R) = Ker\delta_n / Im\delta_{n-1}$$

Existe una relación directa entra la homología y cohomología singular bajo ciertas hipótesis:

Teorema 1.2.2. *Sea R un dominio de ideales principales. Suponga que $H_{n-1}(X;R)$ es cero o libre entonces $H^n(X;R)$ es canónicamente isomorfo a $Hom_R(H_n(X;R), R)$.*

Demostración. El isomorfismo está dado por

$$\begin{aligned} k : H^n(X;R) &\to Hom_R(H_n(X;R), R) \\ x &\mapsto k(x)(-) = \langle x, - \rangle \end{aligned}$$

□

Definición 1.2.9. Dos funciones continuas $f, g : X \to Y$ son *homotópicas* $(f \sim g)$ si existe $F : X \times I \to Y$ continua tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Dos espacios topológicos X y Y tienen el mismo tipo de homotopía $(X \simeq Y)$ si existen $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ funciones continuas tales que $fg \sim id_Y$ y $gf \sim id_X$. En este caso f se denomina *equivalencia homotópica.*

Los siguientes son resultados conocidos para homología y cohomología singular y las pruebas pueden ser consultadas en [1].

Teorema 1.2.3 (Dimensión). *Sea $X = \{pt\}$ el espacio topológico de un punto entonces*

$$H_n(X;R) = H^n(X;R) = \begin{cases} R & si\ n = 0 \\ 0 & si\ n \neq 0 \end{cases}$$

Teorema 1.2.4 (Homotopía). *Si $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ son homotópicas entonces*

$$\begin{aligned} f_* = g_* &: H_*((X, A); R) \to H_*((Y, B); R) \\ f^* = g^* &: H^*((Y, B); R) \to H^*((X, A); R) \end{aligned}$$

Teorema 1.2.5 (Escisión). *Dado un par (X, A) y un abierto $U \subseteq X$ tal que $\overline{U} \subseteq int(A)$ entonces la inclusión $k : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$ induce isomorfismos*

$$\begin{aligned} k_* : H_*((X \setminus U, A \setminus U); R) &\xrightarrow{\approx} H_*((X, A); R) \\ k^* : H^*((X, A); R) &\xrightarrow{\approx} H^*((X \setminus U, A \setminus U); R) \end{aligned}$$

Teorema 1.2.6 (Mayer-Vietoris). *Si $X = int(A) \cup int(B)$ entonces las siguientes sucesiones*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A \cap B; R) \longrightarrow H_n(A; R) \oplus H_n(B; R) \longrightarrow H_n(A \cup B; R) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B; R) \longrightarrow \cdots$$

y

$$\cdots \longrightarrow H^n(A \cup B; R) \longrightarrow H^n(A; R) \oplus H^n(B; R) \longrightarrow H^n(A \cap B; R) \longrightarrow H^{n+1}(A \cup B; R) \longrightarrow \cdots$$

son exactas.

Definición 1.2.10. Sean $\varphi \in C^k(X;R)$ y $\psi \in C^l(X;R)$ dos cocadenas de grados k y l respectivamente, el *producto copa* $\varphi \smile \psi \in C^{k+l}(X;R)$ es la cocadena cuyo valor en un $(k+l)$-símplice singular $\sigma : \Delta^{k+l} \to X$ está dado por

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|[v_0, \ldots, v_k])\psi(\sigma|[v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}])$$

Lema 1.2.7. *Sean $\varphi \in C^k(X;R)$ y $\psi \in C^l(X;R)$ entonces*

$$\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi + (-1)^k \varphi \smile \delta\psi$$

Demostración. Sea $\sigma : \Delta^{k+l} \to X$ entonces

$$(\delta\varphi \smile \psi)(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \varphi(\sigma|[v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_{k+1}])\psi(\sigma|[v_{k+1}, \ldots, v_{k+l+1}])$$
$$(-1)^k(\delta\varphi \smile \psi)(\sigma) = \sum_{i=k}^{k+l+1} (-1)^i \varphi(\sigma|[v_0, \ldots, v_k])\psi(\sigma|[v_k, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_{k+l+1}])$$

Al sumar las expresiones, el primer termino de la segunda expresión se cancela con el último termino de la primera expresión y los terminos restantes son precisamente $\delta(\varphi \smile \psi)(\sigma) = (\varphi \smile \psi)(\partial\sigma)$ pues

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{k+l+1} (-1)^i \sigma|[v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_{k+l+1}]$$

□

Observación 1. Del lema 1.2.7 es claro que el producto copa entre dos cociclos es nuevamente un cociclo y el producto copa entre un cociclo y una cofrontera es nuevamente cofrontera pues $\varphi \smile \delta\psi = \pm\delta(\varphi \smile \psi)$ si $\partial\varphi = 0$ y $\delta\varphi \smile \psi = \delta(\varphi \smile \psi)$ si $\partial\psi = 0$. De esta manera el producto copa se puede extender sobre los grupos de cohomología

$$H^k(X;R) \times H^l(X;R) \xrightarrow{\smile} H^{k+l}(X;R)$$

Además es asociativo y distributivo pues al nivel de las cocadenas lo es. Si R tiene unidad entonces el producto copa tiene unidad determinada por la clase $1 \in H^0(X;R)$ definida por el 0-cociclo que toma el valor $1 \in R$ en cada 0-símplice.

Proposición 1.2.8. *Dada $f : X \to Y$ entonces la aplicación inducida*

$$f^* : H^*(Y;R) \to H^*(X;R)$$

satisface

$$f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta)$$

Demostración. Basta ver que la aplicación inducida sobre las cocadenas $f^\sharp$ cumpla la condición:

$$\begin{aligned}(f^\sharp(\varphi) \smile f^\sharp(\psi))(\sigma) &= f^\sharp\varphi(\sigma|[v_0, \ldots, v_k])f^\sharp\psi(\sigma|[v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}]) \\ &= \varphi(f\sigma|[v_0, \ldots, v_k])\psi(f\sigma|[v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}]) \\ &= (\varphi \smile \psi)(f\sigma) = f^\sharp(\varphi \smile \psi)(\sigma)\end{aligned}$$

□

Teorema 1.2.9. *Si R es un anillo conmutativo entonces*

$$\alpha \smile \beta = (-1)^{kl} \beta \smile \alpha \,,$$

para todo $\alpha \in H^k(X;R)$ y para todo $\beta \in H^l(X;R)$.

Demostración. Para la prueba consultar [9]. □

Observación 2. De la observación 1 y el teorema 1.2.9 el conjunto

$$H^*(X;R) = \bigoplus_{k \geq 0} H^k(X;R)$$

resulta un anillo graduado conmutativo.

Ejemplo 3. El anillo de cohomología para la esfera n-dimensional sobre $\mathbb{Q}$ es

$$H^*(\mathbb{S}^n;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x]/_{\langle x^2 \rangle}$$

donde x es el generador de $H^n(\mathbb{S}^n;\mathbb{Q})$. Este ejemplo se puede calcular directamente de la definición del producto copa pues los grupos de cohomología de la esfera, sobre $\mathbb{Q}$, son

$$H^k(\mathbb{S}^n;\mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } k = 0, n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si se considera al 1 como el generador de $H^0(\mathbb{S}^n;\mathbb{Q})$ entonces

$$\begin{aligned} &1 \smile 1 = 1 \,, \\ &1 \smile x = x \smile 1 = x \,, \ y \\ &x \smile x = 0 \,; \end{aligned}$$

y así se obtiene el isomorfismo deseado.

Ejemplo 4. El anillo de cohomología para el espacio proyectivo complejo, sobre $\mathbb{Q}$, es

$$H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x]/_{\langle x^{n+1} \rangle}$$

donde x es el generador de $H^2(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Q})$. Una forma de calcular este ejemplo es usando la sucesión de Gysin (ver teorema 1.4.4).

Teorema 1.2.10 (Teorema de Künneth)**.** *Sean X y Y dos espacios topológicos. Si R es un campo y al menos uno de los anillos $H^*(X;R)$, $H^*(Y;R)$ tiene tipo finito entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} H^*(X;R) \otimes H^*(Y;R) &\to H^*(X \times Y;R) \\ (\alpha,\beta) &\mapsto pr_X^*(\alpha) \smile pr_Y^*(\beta) \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Demostración. Para la prueba consultar [9]. □

1.3. Fibraciones y fibrados vectoriales

En esta sección se hará una breve revisión de fibraciones, cofibraciones y haces fibrados. Todas las deficiones irán acompañadas de ejemplos y algunos resultados que serán de vital importancia mas adelante.

Definición 1.3.1. Una función continua $p : X \to Y$ tiene la *propiedad de levantamiento* con respecto al par (Z, A) de espacios topológicos si para todo diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

existe una función continua $k : Z \to X$ tal que $p \circ k = g$ y $k \circ i = f$.
Una función sobreyectiva $p : X \to Y$ es una *fibración* si tiene la propiedad de levantamiento con respecto al par $(Z \times [0,1], Z \times \{0\})$ para todo espacio topológico Z. En este caso X se llama *espacio total*, p la *proyección*, Y la *base* y cada $F_y = p^{-1}(y)$ la *fibra en y*.

Definición 1.3.2. Una *aplicación entre fibrados* es un diagrama conmutativo de funciones continuas de la forma

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p'"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

donde p' y p son fibraciones, que preserva fibras, es decir, para todo $x' \in p^{-1}(y')$ se tiene que $p(f(x')) = g(y')$.

Ejemplo 5 (Fibración trivial)**.** Sean Y y F dos espacios topológicos entonces

$$\begin{aligned} p_Y : Y \times F &\to Y \\ (y, v) &\mapsto y \end{aligned}$$

es una fibración llamada *fibración trivial.*

Ejemplo 6 (Productos fibrados y pullbacks)**.** Sean $f : A \to Y$ y $p : X \to Y$ dos funciones continuas. El *producto fibrado* se define como

$$A \underset{Y}{\times} X = \{(a, x) \in A \times X \mid f(a) = p(x)\}$$

De donde el producto fibrado se puede considerar como el *pullback* del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \underset{Y}{\times} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p_A"'] & X \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

donde p_A y g son las proyecciones en la primera y segunda componente respectivamente. Si $p : X \to Y$ es una fibración entonces $p_A : A \underset{Y}{\times} X \to A$ también lo es y es llamada la *fibración pullback*.

Definición 1.3.3. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Se dice que la inclusión $i : A \hookrightarrow X$ es una *cofibración* si para todo espacio topológico Y, para toda función continua $f : A \to Y^{[0,1]}$ y para todo diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Y & X \arrow[l, "\tilde{f}_0"'] \\ Y^{[0,1]} \arrow[u, "p_0"] & A \arrow[l, "f"] \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

donde $p_0(\beta) = \beta(0)$, existe una función continua $\tilde{f} : X \to Y^{[0,1]}$ tal que $\tilde{f} \circ i = f$ y $p_0 \circ \tilde{f} = \tilde{f}_0$.

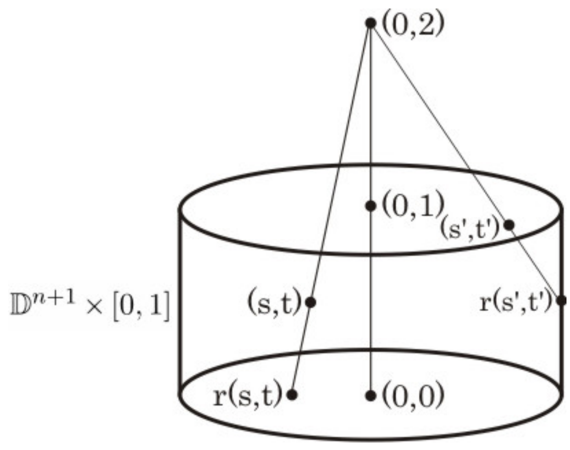
Proposición 1.3.1. *Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. La inclusión $i : A \hookrightarrow X$ es una cofibración si y sólo si $(X \times \{0\} \cup A \times I)$ es un retracto de $X \times I$, es decir, existe una función continua*

$$r : X \times I \to (X \times \{0\} \cup A \times I)$$

tal que la restricción de r a $(X \times \{0\} \cup A \times I)$ es la identidad.

Demostración. Para la prueba consultar [5] □

Ejemplo 7. Sea $\mathbb{D}^{n+1}$ el disco unitario en $\mathbb{R}^{n+1}$ y $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{D}^{n+1}$ la esfera unitaria. Considere la función $r : \mathbb{D}^{n+1} \times [0,1] \to \mathbb{D}^{n+1} \times \{0\} \cup \mathbb{S}^n \times [0,1]$ obtenida al proyectar $\mathbb{D}^{n+1} \times [0,1]$ sobre $\mathbb{D}^{n+1} \times \{0\} \cup \mathbb{S}^n \times [0,1]$ desde el punto $(0,2) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}$



explícitamente la función esta definida por

$$r(s,t) = \begin{cases} \frac{2}{2-t}(s,0) & \text{si} \quad 0 \le t \le 2(1-|s|) \\ \frac{1}{|s|}(s, 2|s| + t - 2) & \text{si} \quad 2(1-|s|) \le t \le 1 \text{ y } |s| \neq 0 \end{cases}$$

Claramente la función es continua y además la restricción de r a $\mathbb{D}^{n+1} \times \{0\} \cup \mathbb{S}^n \times [0,1]$ es la identidad y por lo tanto por la proposición 1.3.1, la inclusión $i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{D}^{n+1}$ es una cofibración.

Proposición 1.3.2. *Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Si la inclusión $i : A \hookrightarrow X$ es una cofibración y B es cualquier espacio topológico entonces la aplicación inducida*

$$p : B^X \to B^A$$

es una fibración.

Demostración. Para la prueba consultar [14]. □

Definición 1.3.4. Un *haz fibrado* (E, X, π, F) consiste de

- Espacios topológicos E, X y F, llamados *espacio total, base* y *fibra* respectivamente, y
- Una función continua sobreyectiva, $\pi : E \to X$, llamada *proyección*

que cumplen la *condición de trivialidad local*, es decir, para todo $x \in X$ existe una vecindad abierta $U \subseteq X$ de x tal que $\pi^{-1}(U)$ es homeomorfo a $U \times F$. La condición de trivialidad local es equivalente a tener el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\
U &
\end{tikzcd}$$

donde ϕ es un homeomorfismo.

Teorema 1.3.3. *Todo haz fibrado sobre un espacio topológico paracompacto es una fibración.*

Demostración. Para la prueba consultar [5]. □

Uno de los ejemplos más importantes de haces fibrados son los *fibrados vectoriales*:

Definición 1.3.5. Un *fibrado vectorial real* ξ es un haz fibrado (E, X, π, F) tal que $F_x = \pi^{-1}(x)$ tiene estructura de espacio vectorial real n-dimensional, para todo $x \in X$ y para algún $n = n(x) \in \mathbb{N}$. Además la aplicación

$$\begin{aligned} \phi_x : \mathbb{R}^n &\to \pi^{-1}(x) \\ v &\mapsto \phi(x, v) \end{aligned}$$

inducida por una trivialización local (U, ϕ) es un isomorfismo lineal entre el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y el espacio vectorial $\pi^{-1}(x)$.

Observación 3. La dimensión de los F_x es una función localmente constante de x pero en la mayoría de los ejemplos es constante y en este caso ξ se denominará $\mathbb{R}^n$-*fibrado*.

Definición 1.3.6. Dos fibrados vectoriales ξ y η sobre el mismo espacio topológico X son *isomorfos ($\xi \cong \eta$)* si existe un homeomorfismo

$$f : E(\xi) \to E(\eta)$$

entre los espacios totales que envía cada espacio vectorial $F_x(\xi)$ isomórficamente en el espacio vectorial $F_x(\eta)$ correspondiente.

Definición 1.3.7. Sean ξ y η dos fibrados vectoriales sobre el mismo espacio topológico X. Se dice que ξ es un *subfibrado* de η ($\xi \subseteq \eta$) si $E(\xi) \subseteq E(\eta)$ y cada fibra $F_x(\xi)$ es un subespacio vectorial de $F_x(\eta)$.

Definición 1.3.8. Una *aplicación de fibrados* entre dos fibrados vectoriales η y ξ es una función continua

$$f : E(\eta) \to E(\xi)$$

que envía fibras de η isomórficamente en fibras de ξ.

Ejemplo 8 (Fibrado trivial)**.** El espacio total de un fibrado trivial sobre un espacio topológico X es $X \times \mathbb{R}^n$, donde la proyección está dada por $\pi(x, v) = x$ y la estructura de espacio vectorial, en las fibras, está dada por

$$t_1(x, v_1) + t_2(x, v_2) = (x, t_1v_1 + t_2v_2)$$

Claramente la identidad $id : X \times \mathbb{R}^n \to X \times \mathbb{R}^n$ cumple la condición de trivialidad local.

Ejemplo 9 (Fibrado tangente)**.** El *fibrado tangente* τ_X de una variedad suave X tiene como espacio total

$$TX = \{(x, v) \mid x \in X \text{ y } v \in T_xX\}$$

La proyección está definida por

$$\begin{aligned} \tau : TX &\to X \\ (x, v) &\mapsto x \end{aligned}$$

y la estructura de espacio vectorial en $\tau^{-1}(x)$ está dada por

$$t_1(x, v_1) + t_2(x, v_2) = (x, t_1v_1 + t_2v_2)$$

La condición de trivialidad local es inmediata a partir de las cartas de la variedad X, para la prueba detallada consultar [24].

Ejemplo 10 (Fibrado normal)**.** El *fibrado normal* υ_X de una variedad suave $X \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene como espacio total

$$E(\upsilon_X) = \{(x, v) \mid x \in X \text{ y } v \perp T_xX\}$$

La proyección está definida por

$$\begin{aligned} \tau : E(\upsilon_X) &\to X \\ (x, v) &\mapsto x \end{aligned}$$

y la estructura de espacio vectorial en $\tau^{-1}(x)$ está dada por

$$t_1(x, v_1) + t_2(x, v_2) = (x, t_1v_1 + t_2v_2)$$

La prueba de la condición de trivialidad local se puede consultar en [15].

Ejemplo 11 (El pullback de un fibrado)**.** Sea ξ un fibrado vectorial $\pi : E \to X$ y $f : B \to X$ cualquier función entre espacios topológicos. A partir de ξ y f se puede construir un nuevo fibrado $f^*\xi$ el *pullback de ξ por medio de f*. El espacio total se define por

$$f^*E := \{(b, e) \mid b \in B,\, e \in E \text{ y } f(b) = \pi(e)\}$$

La proyección

$$\begin{aligned} f^*\pi : f^*E &\to B \\ (b, e) &\mapsto b \end{aligned}$$

La estructura de espacio vectorial en $(f^*\pi)^{-1}(x)$ está dada por

$$t_1(b, e_1) + t_2(b, e_2) = (b, t_1e_1 + t_2e_2)$$

El pullback de un fibrado vectorial se puede representar por medio del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "\widehat{f}"] \arrow[d, "f^*\pi"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ B \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

donde $\widehat{f}(b, e) = e$ entonces $\widehat{f}$ envía cada espacio vectorial $F_b(f^*\xi)$ isomórficamente en el espacio vectorial $F_{f(b)}(\xi)$. Si (U, ϕ) es una trivialización local de ξ, considere $U^* = f^{-1}(U)$ y defina

$$\begin{aligned} \phi^* : U^* \times \mathbb{R}^n &\to (f^*\pi)^{-1}(U^*) \\ (b, v) &\mapsto (b, \phi(f(b), v))\,. \end{aligned}$$

Claramente (U^*, ϕ^*) es una trivialización local de $f^*\xi$ y por tanto $f^*\xi$ cumple la condición de trivialidad local.

Ejemplo 12 (Producto cartesiano)**.** Sean ξ_1 y ξ_2 dos fibrados vectoriales, $\pi_1 : E_1 \to X_1$ y $\pi_2 : E_2 \to X_2$, el *producto cartesiano* $\xi_1 \times \xi_2$ es un fibrado vectorial con espacio total $E_1 \times E_2$, con proyección

$$\pi_1 \times \pi_2 : E_1 \times E_2 \to X_1 \times X_2$$

y fibras

$$(\pi_1 \times \pi_2)^{-1}(x_1, x_2) = F_{x_1}(\xi_1) \times F_{x_2}(\xi_2)$$

con la estructura de producto de espacios vectoriales. De la trivialidad local de ξ_1 y ξ_2 es inmediato que $\xi_1 \times \xi_2$ cumple la condición de trivialidad local.

Ejemplo 13 (Suma de Whitney)**.** Sean ξ_1 y ξ_2 dos fibrados vectoriales sobre el mismo espacio topológico X. Sea

$$\begin{aligned} \Delta : X &\to X \times X \\ x &\mapsto (x, x) \end{aligned}$$

la aplicación diagonal. El fibrado $\Delta^*(\xi_1 \times \xi_2)$ sobre X se llama *suma de Whitney* de ξ_1 y ξ_2 y se notará por $\xi_1 \oplus \xi_2$. Note que cada fibra $F_x(\xi_1 \oplus \xi_2)$ es canónicamente isomorfa a $F_x(\xi_1) \oplus F_x(\xi_2)$.

Definición 1.3.9. Una *sección* de un fibrado vectorial ξ sobre X es una función continua

$$\sigma : X \to E(\xi)$$

tal que $\pi \circ \sigma = id_X$. Se dice que la sección es *nunca cero* si $\sigma(x)$ es un vector no nulo en $F_x(\xi)$ para todo $x \in X$. A las secciones del fibrado tangente de una variedad suave X se les conoce como *campos vectoriales.*

Definición 1.3.10. Una función $\mu : V \to \mathbb{R}$ definida sobre un espacio vectorial de dimensión finita V es una *forma cuadrática* si

$$\mu = \sum_i l_i l'_i$$

donde todas las l_i y l'_i son funciones lineales. Cada forma cuadrática determina una aplicación bilineal y simétrica

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : V \times V &\to \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto \langle v, w \rangle := \frac{1}{2} \left(\mu(v + w) - \mu(v) - \mu(w) \right) \end{aligned}$$

La forma cuadrática μ es *definida positiva* si $\mu(v) = \langle v, v \rangle > 0$ para todo $v \neq 0$.

Definición 1.3.11. Un fibrado vectorial $\pi : E \to X$ se llama *Euclideo* si ξ posee una función continua

$$\mu : E \to \mathbb{R}$$

tal que la restricción de μ en cada fibra es una forma cuadrática y definida positiva. A μ se le denomina *métrica Euclideana.* En el caso particular del fibrado tangente τ_X de una variedad suave X a la métrica Euclideana

$$\mu : TX \to \mathbb{R}$$

se le conoce como *métrica Riemanniana* y al par (X, μ) como *variedad Riemanniana.*

Proposición 1.3.4. *Todo fibrado vectorial sobre una base paracompacta posee una métrica Euclideana.*

Demostración. Para la prueba consultar [10] □

Teorema 1.3.5. *Sea η un fibrado Euclideo y ξ un subfibrado de η. Sea $F_x(\xi^\perp)$ el complementeo ortogonal del subespacio vectorial $F_x(\xi)$, es decir,*

$$F_x(\xi^\perp) = \{v \in F_x(\eta) \mid \langle v, w \rangle = 0 \; \forall w \in F_x(\xi)\}$$

Si $E(\xi^\perp) \subseteq \eta$ es la unión de todos los $F_x(\xi^\perp)$ entonces existe un fibrado vectorial $\xi^\perp$ con espacio total $E(\xi^\perp)$ y fibras $F_x(\xi^\perp)$ tal que $\xi^\perp \subseteq \eta$ y además $\xi \oplus \xi^\perp \cong \eta$.
Al fibrado $\xi^\perp$ se le conoce como el complemento ortogonal *de ξ.*

Demostración. Para la prueba consultar [15]. □

Corolario 1.3.6. *Sea X una variedad suave y N una variedad Riemanniana. Para toda inmersión $f : X \to N$, es decir, Df_x es inyectiva para todo $x \in X$. Existe un fibrado vectorial υ_f , sobre X , tal que*

$$f^*\tau_N \cong \tau_X \oplus \upsilon_f$$

Al fibrado υ_f se le conoce como el fibrado normal *de la inmersión f.*

Demostración. Como N es Riemanniana y f es una inmersión entonces para todo $x \in X$ el espacio tangente $T_{f(x)}N$ se parte como la suma directa de $Df_x(T_xX)$ y su complemento ortogonal. Entonces el pullback del fibrado tangente de N por medio de f se parte como la suma de Whitney de un subfibrado isomorfo a τ_X y a su complemento ortogonal. □

Lema 1.3.7. *El fibrado normal υ_Δ asociado a la diagonal*

$$\begin{aligned} \Delta : X &\to X \times X \\ x &\mapsto (x, x) \end{aligned}$$

de una variedad Riemanniana X es isomorfo al fibrado tangente de X.

Demostración. Como X es Riemanniana entonces $X \times X$ también lo es pues si

$$(u, v), (u', v') \in T_xX \times T_yX \cong T_{(x,y)}(X \times X)$$

entonces

$$\big\langle (u, v), (u', v') \big\rangle := \big\langle u, u' \big\rangle + \big\langle v, v' \big\rangle$$

De donde $(u, v) \in T_xX \times T_xX \cong T_{(x,x)}(X \times X)$ es tangente a $\Delta(X)$ si y sólo si $u = v$ y es normal a $\Delta(X)$ si y sólo si $u + v = 0$. Entonces todo vector tangente $v \in T_xX$ corresponde unívocamente a un vector normal $(-v, v) \in T_{(x,x)}(X \times X)$. Por lo tanto la correspondencia

$$(x, v) \mapsto ((x, x), (-v, v))$$

es un isomorfismo entre el espacio tangente TX y el espacio total del fibrado normal $E(\upsilon_\Delta)$. □

Teorema 1.3.8 (Teorema de la Vecindad Tubular)**.** *Si X es una variedad suave embebida en M una variedad Riemanniana. Entonces existe una vecindad abierta de X en M que es difeomorfa al espacio total del fibrado normal bajo un difeomorfismo que envía todo $x \in X$ a un vector normal nulo de x. Dicha vecindad se conoce como* vecindad tubular *de X en M.*

Demostración. Para la prueba consultar [21]. □

Teorema 1.3.9 (Teorema de Embebimiento de Whitney)**.** *Toda variedad suave X n-dimensional puede ser embebida en $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Demostración. Para la prueba consultar [17] □

1.4. Isomorfismo de Thom, Clase de Euler y sucesión de Gysin

En esta sección se introducirá la clase de Thom, el teorema de isomorfismo de Thom, la clase de Euler y la sucesión de Gysin. Estas nociones serán muy importantes pues a partir de estas se definirá el mapa de Gysin y con este el dual del producto de lazos mas adelante.

Sea ξ un $\mathbb{R}^n$-fibrado con espacio total E, base X y proyección $\pi : E \to X$, se notará al conjunto de todos los elementos no nulos en E por E_0, y por F_0 al conjunto de elementos no nulos de una fibra típica $F = \pi^{-1}(x)$. Es claro que $F_0 = E_0 \cap E$.

Definición 1.4.1. Una orientación para un fibrado ξ es una función que asigna una orientación a cada fibra F de ξ. Localmente para todo $x \in X$ existe (U, ϕ) una carta local que restricta sobre las fibras $v \mapsto \phi(x, v)$ preserva la orientación. Equivalentemente existen $s_1, \ldots, s_n : U \to \pi^{-1}(U)$ tales que $s_1(x), \ldots, s_n(x)$ determinan la orientación requerida en $\pi^{-1}(x)$ para todo $x \in U$. En términos de cohomología significa que cada fibra F tiene asignado un generador predeterminado

$$u_F \in H^n(F, F_0; R)$$

tal que existe

$$u \in H^n(\pi^{-1}(U), \pi^{-1}(U)_0; R)$$

con la propiedad que la restricción

$$u|_{F,F_0} \in H^n(F, F_0; R)$$

es igual a u_F .

Teorema 1.4.1 (Isomorfismo de Thom)**.** *Sea ξ un $\mathbb{R}^n$-fibrado orientado con espacio total E. Entonces $H^i(E, E_0; R) = 0$ para $i < n$ y existe una única clase $u \in H^n(E, E_0; R)$ tal que $u|_{F,F_0} = u_F$. Además para todo k la aplicación*

$$\begin{aligned} \psi : H^k(E; R) &\to H^{k+n}(E, E_0; R) \\ y &\mapsto y \smile u \end{aligned}$$

es un isomorfismo. El isomorfismo de Thom se define como

$$\begin{aligned} \phi : H^k(X; R) &\to H^{k+n}(E, E_0; R) \\ x &\mapsto (\pi^* x) \smile u \end{aligned}$$

A la clase u se le denomina clase de Thom.

Demostración. Para la prueba consultar [15]. □

Definición 1.4.2. Sea ξ un $\mathbb{R}^n$-fibrado orientado. La *clase de Euler* de ξ se define como la clase

$$e(\xi) = (\pi^*)^{-1} j^*(u) \in H^n(X; R)$$

donde $j : E \to (E, E_0)$.

Proposición 1.4.2 (Naturalidad). *Si $f : X \to X'$ es cubierto por una aplicación $\widehat{f} : E \to E'$ que preserva orientación entonces $e(\xi) = f^*e(\xi')$. En particular si ξ es trivial $e(\xi) = 0$.*

Demostración. Como $f : X \to X'$ es cubierto por una aplicación $\widehat{f} : E \to E'$ entonces está induce el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(E, E_0) \arrow[r, "(\widehat{f},\widehat{f_0})"] & (E', E'_0) \\
E \arrow[u, "j"] \arrow[r, "\widehat{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & E'_0 \arrow[u, "j'"'] \arrow[d, "\pi'"] \\
X \arrow[r, "f"'] & X'
\end{tikzcd}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\pi^* f^*(e(\xi')) &= \pi^* f^*(\pi'^*)^{-1} j'^*(u') = (\pi' \widehat{f})^*(\pi'^*)^{-1} j'^*(u') \\
&= \widehat{f}^* j'^*(u') = (j' \widehat{f})^*(u') = ((\widehat{f}, \widehat{f}_0) j)^*(u') \\
&= j^*(u)
\end{aligned}$$

Entonces $e(\xi) = f^*e(\xi')$. □

Proposición 1.4.3. $e(\xi) = \phi^{-1}(u \smile u)$

Demostración. $\phi(e(\xi)) = \pi^*((\pi^*)^{-1} j^*(u)) \smile u = j^*(u) \smile u = u \smile u$ pues j es la inclusión. □

Teorema 1.4.4 (Sucesión de Gysin). *Para todo $\mathbb{R}^n$-fibrado orientado ξ existe una sucesión exacta larga en cohomología con coeficientes en R*

$$\cdots \longrightarrow H^i(X) \xrightarrow{\smile e(\xi)} H^{i+n}(X) \xrightarrow{\pi^*} H^{i+n}(E_0) \xrightarrow{\vartheta} H^{i+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

donde $\vartheta : H^{i+n}(E_0) \to H^{i+1}(E, E_0)$ es la composición del homomorfismo de conexión y el inverso del isomorfismo de Thom $\phi^{-1} : H^{i+1}(E, E_0) \to H^{i+1-n}(X)$.

Demostración. Considere el siguiente diagrama conmutativo con fila superior exacta gracias a la sucesión exacta corta del par (E, E_0)

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{i+n}(E, E_0) \arrow[r, "j^*"] & H^{i+n}(E) \arrow[r] & H^{i+n}(E_0) \arrow[r] & H^{i+n+1}(E, E_0) \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^i(X) \arrow[r] \arrow[u, "\phi"'] & H^{i+n}(X) \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[u, "\pi^*"'] & H^{i+n}(E_0) \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[u, leftrightarrow, "id"'] & H^{i+1}(X) \arrow[r] \arrow[u, "\phi"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Como ϕ, id y π^* son isomorfismos basta mostrar que el primer diagrama conmuta, es decir,

$$\begin{aligned}
(\pi^*)^{-1} j^* \phi(x) &= (\pi^*)^{-1} j^*(\pi^*(x) \smile u) = (\pi^*)^{-1}(\pi^*(x) \smile j^*(u)) \\
&= x \smile (\pi^*)^{-1} j^*(u) = x \smile e(\xi)
\end{aligned}$$

□

1.5. Espacios de Banach y de Hilbert

En esta sección se hará una breve revisión de espacios de Banach y de Hilbert, definiciones, ejemplos y resultados básicos.

Definición 1.5.1. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio vectorial normado $(\mathbb{E}, |\cdot|_{\mathbb{E}})$ se denomina *sucesión de Cauchy* si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_m| < \epsilon \quad \forall\, n, m \geq N$$

Definición 1.5.2. Un espacio vectorial normado $(\mathbb{E}, |\cdot|_{\mathbb{E}})$ se llama de *Banach* si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Ejemplo 14. Algunos ejemplos de espacios de Banach:

- $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Banach con cualquiera de sus normas

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p < \infty$$
$$\|x\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} \{|x_i|\}$$

- Todo subespacio cerrado de un espacio de Banach es de Banach.

- Sea $\mathbb{K}$ un campo completo. El espacio

$$l^p = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\} \quad \text{con} \quad 1 \leq p < \infty$$

  es un espacio de Banach con la norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

- Sea $\mathbb{K}$ un campo completo. El espacio

$$l^\infty = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} \mid \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}$$

  es un espacio de Banach con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

- Sea K un espacio topológico compacto. El espacio $C(K, \mathbb{R}^n)$ de todas las funciones continuas $f : K \to \mathbb{R}^n$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in K} |f(x)|$$

- El espacio vectorial $L(\mathbb{E};\mathbb{F})$ de todas las aplicaciones lineales continuas

$$A:\mathbb{E}\to\mathbb{F}$$

entre dos espacios de Banach $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbb{E}}\left\{\frac{|A(x)|_{\mathbb{F}}}{|x|_{\mathbb{E}}}\right\}$$

En general el espacio vectorial $L(\mathbb{E}_1,\ldots,\mathbb{E}_k;\mathbb{F})$ de todas las aplicaciones multilineales continuas

$$A:\mathbb{E}_1\times\cdots\times\mathbb{E}_k\to\mathbb{F}$$

es un espacio de Banach con la norma

$$\|A\| = \sup\left\{\frac{|A(x_1,\ldots,x_k)|_{\mathbb{F}}}{|x_1|_{\mathbb{E}_1}\cdots|x_k|_{\mathbb{E}_k}} \;\middle|\; (x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{E}_1\times\cdots\times\mathbb{E}_k\right\}$$

Teorema 1.5.1. *Todo espacio vectorial normado $\mathbb{E}$ posee un* completado*, es decir, un espacio de Banach $\widehat{\mathbb{E}}$ que contiene a $\mathbb{E}$ como subespacio denso.*

Demostración. Para la prueba consultar [13]. □

Definición 1.5.3. Un espacio vectorial normado $\mathbb{E}$ es *separable* si posee un subconjunto denso enumerable.

Ejemplo 15. El espacio vectorial $C_p^\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ de todas las funciones diferenciables a trozos definidas sobre un intervalo cerrado $[a,b]$ se puede dotar con la norma

$$\|c\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]}|c(x)|\ ,$$

y así el completado de este espacio vectorial normado es $(C([a,b],\mathbb{R}^n),\|\cdot\|_\infty)$.

Definición 1.5.4. Un espacio vectorial con producto interno $(\mathbb{E},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un *espacio de Hilbert* si es de Banach con la norma

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

Ejemplo 16. Algunos ejemplos de espacios de Hilbert:

- $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

- $\mathbb{C}^n$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$$

- El espacio l^2 es de Hilbert con el producto interno

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n$$

- El espacio de todas las funciones complejas de cuadrado (Lebesgue) integrable en el intervalo $[0, 2\pi]$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

Definición 1.5.5. Una función $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es *absolutamente continua* si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si

$$a \leq t_0 < \cdots < t_{2k+1} \leq b \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{k} |t_{2i+1} - t_{2i}| < \delta$$

implican que

$$\sum_{i=0}^{k} |c(t_{2i+1}) - c(t_{2i})| < \epsilon$$

Ejemplo 17. El espacio $C_p^\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$ (ejemplo 15) se puede dotar con el producto interno

$$\langle \alpha, \beta \rangle_1 = \langle \alpha, \beta \rangle_0 + \left\langle \dot{\alpha}, \dot{\beta} \right\rangle_0$$

donde

$$\langle \alpha, \beta \rangle_0 = \int_a^b \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle \, dt \quad \dot{\alpha} = \frac{d}{dt}(\alpha) \quad \text{y} \quad \dot{\beta} = \frac{d}{dt}(\beta)$$

El completado de este espacio con producto interno es notado por $H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$. Lebesgue mostró que una función α pertenece al espacio $H^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ si es absolutamente continua y $\dot{\alpha}$ (que existe en casi toda parte) es cuadrado integrable, es decir, $\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle_0 < \infty$.

1.6. Variedades de Hilbert y geometría Riemanniana

En esta sección se introducirá la noción de variedad de Hilbert y algunos resultados conocidos de geometría Riemanniana. A partir de las definiciones y los resultados mencionados en esta sección será posible dotar de estructura diferencial al espacio de lazos libres de una variedad cerrada compacta.

Definición 1.6.1. Sean $U \subseteq \mathbb{E}$ y $U' \subseteq \mathbb{F}$ dos abiertos de los espacios de Banach $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$. Una función $f : U \to U'$ es *diferenciable en* $p \in U$ si existe una aplicación lineal $Df_p \in L(\mathbb{E}; \mathbb{F})$, llamada *diferencial*, tal que

$$f(x) - f(p) - Df_p(x - p) = r(|x - p|) \quad \text{donde} \quad \lim_{|r| \to 0} \left| \frac{o(v)}{v} \right| = 0$$

Se dice que f es *diferenciable de clase* C^1 si es diferenciable para todo $x \in U$ y además la aplicación

$$x \in U \mapsto Df_x \in L(\mathbb{E};\mathbb{F})$$

es continua. Por inducción se dice que f es *diferenciable de clase* C^{k+1} si $D^k f = D(D^{k-1}f)$ es *diferenciable de clase* C^1.

Definición 1.6.2. Sean $U \subseteq \mathbb{E}$ y $U' \subseteq \mathbb{F}$ dos abiertos en los espacios de Banach $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$. Una función $f : U \to U'$ es *diferenciable* si es diferenciable de clase C^k para todo k; se dice que f es un *difeomorfismo* si f es invertible con f y su inversa f^{-1} diferenciables.

Definición 1.6.3. Sea $U \subseteq \mathbb{E}$ un abierto en un espacio de Banach $\mathbb{E}$. Para todo $x \in U$ se define el *espacio tangente de* U *en* x como

$$T_xU = \{(x,v) \mid v \in \mathbb{E}\}$$

dotado con la estructura de espacio vectorial proveniente de la aplicación canónica

$$\begin{aligned} pr_2 : T_xU &\to \mathbb{E} \\ (x,v) &\mapsto v \end{aligned}$$

El *espacio tangente en* U es la colección de espacios tangentes T_xU, $x \in U$, y se notará por TU. El isomorfismo canónico $TU \cong U \times \mathbb{E}$ convierte a TU en un abierto de $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$.

Definición 1.6.4. Sea $f : U \subseteq \mathbb{E} \to V \subseteq \mathbb{F}$ una función diferenciable, el *tangencial* de f se define como la aplicación

$$\begin{aligned} Tf : TU &\to TV \\ (x,v) &\mapsto (f(x), Df_x(v)) \end{aligned}$$

Note que para cada $x \in U$ la restricción $T_xf = Tf|_{T_xU}$ es una aplicación lineal que esta completamente determinada por el diferencial $Df_x : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$.

Definición 1.6.5. Un espacio topológico X es *metrizable* si existe una métrica sobre X que induce la topología dada.

Definición 1.6.6. Un espacio topológico X es una *variedad topológica de Hilbert* si es un espacio 2-contable, metrizable y localmente homeomorfo a un espacio de Hilbert separable $\mathbb{E}$, es decir, para todo $x \in X$ existe un abierto $x \in U \subseteq X$ y un homeomorfismo

$$\alpha : U \to \mathbb{E}$$

Al par (U, α) se le denomina *carta*.

Definición 1.6.7. Sea X una variedad topológica de Hilbert modelada localmente por $\mathbb{E}$ un espacio de Hilbert separable. Un *atlas diferenciable* para X es una familia de cartas $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \alpha)\}$ tal que

1. $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ y

2. la *función de transición*

$$\alpha \circ \beta^{-1} : \beta\left(U_\beta \cap U_\alpha\right) \to \alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$$

es un difeomorfismo para cualquier par de cartas (U_α, α) y (U_β, β).

Dos atlas para X son *equivalentes* si la unión de ellas es nuevamente un atlas para X, una *estructura diferenciable* sobre X es una clase de equivalencia de atlas diferenciables.

Definición 1.6.8. Un espacio topológico X es una *variedad de Hilbert* si es una variedad topológica de Hilbert y posee una estructura diferenciable.

Ejemplo 18. Algunos ejemplos de variedades de Hilbert:

- Cualquier espacio de Hilbert separable $\mathbb{E}$ es una variedad de Hilbert con atlas $(\mathbb{E}, id_{\mathbb{E}})$, en general cualquier abierto $U \subseteq \mathbb{E}$ es una variedad de Hilbert con atlas (U, id_U).
- Cualquier variedad suave X de dimensión n es una variedad de Hilbert pues $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Hilbert.
- Cualquier abierto V de una variedad de Hilbert X es una variedad de Hilbert. De hecho si $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \alpha)\}$ es un atlas diferenciable entonces su resticción $\mathcal{U}|_V = \left\{(U_\alpha \cap V, \alpha|_{(U_\alpha \cap V)})\right\}$ es un atlas diferenciable para V.
- Sean X y Y dos variedades de Hilbert entonces $X \times Y$ es una variedad de Hilbert. De hecho si $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \alpha)\}$ y $\mathcal{V} = \{(V_\beta, \beta)\}$ son atlas diferenciables de X y Y respectivamente entonces $\mathcal{U} \times \mathcal{V} = \{(U_\alpha \times V_\beta, \alpha \times \beta)\}$ es un atlas diferenciable de $X \times Y$.

Definición 1.6.9. Sea X una variedad de Hilbert. Sea (V, α) una carta sobre $x \in X$ si $\alpha(V) = U \subseteq \mathbb{E}$ entonces $T_{\alpha(x)}U$ se denomina *el representante del espacio tangente de X en x*. Los elementos de $T_{\alpha(x)}U$ se notarán por $(\alpha(x), X_{\alpha(x)})$ con $X_{\alpha(x)} \in \mathbb{E}$ (ver definición 1.6.3). A $X_{\alpha(x)}$ se le denomina la *parte principal* del vector $(\alpha(x), X_{\alpha(x)})$.

Sean (V, α) y (V', α') dos cartas sobre $x \in X$ si $\alpha(V) = U$ y $\alpha(V') = U'$ entonces la función de transición

$$\alpha' \circ \alpha^{-1} : \alpha\left(V \cap V'\right) \to \alpha'\left(V' \cap V\right)$$

determina el isomorfismo lineal

$$T_{\alpha(x)}(\alpha' \circ \alpha^{-1}) : T_{\alpha(x)}U \to T_{\alpha(x)}U'$$

entonces $(\alpha(x), X_{\alpha(x)})$ y $(\alpha'(x), X_{\alpha'(x)})$ representan el mismo vector tangente de X en x si

$$T_{\alpha(x)}(\alpha' \circ \alpha^{-1})(\alpha(x), X_{\alpha(x)}) = (\alpha'(x), X_{\alpha'(x)})$$

Definición 1.6.10. Un *vector tangente de X en x* se define por medio de la familia de sus representantes dados por las cartas sobre $x \in X$ y el *espacio tangente* T_xX es el conjunto de los vectores tangentes de X en x. Si se considera el isomorfismo lineal

$$T_x\alpha : T_xX \to T_{\alpha(x)}U$$

entonces T_xX tiene la estructura de un espacio vectorial isomorfo a $\mathbb{E}$. El *diferencial de α en x* es la aplicación $D\alpha_x = pr_2 \circ T_x\alpha$ determinada por el isomorfismo $pr_2 : \{\alpha(x)\} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}$.

Proposición 1.6.1. *El* espacio tangente total

$$TX = \bigcup_{x \in X} T_x X$$

de una variedad de Hilbert X es una variedad de Hilbert y además la proyección

$$\begin{aligned} \tau : TX &\to X \\ (x, v) &\mapsto x \end{aligned}$$

es diferenciable.

Demostración. Para la prueba consultar [12]. □

Definición 1.6.11. Sea X una variedadad de Hilbert. Un *fibrado suave* sobre X es un haz fibrado $\pi : E \to X$ donde π es diferenciable y la fibra es un espacio de Banach $\mathbb{E}$. Una *representación local* del fibrado π es una terna (U, φ, ϕ) donde (U, φ) es una carta de X y (U, ϕ) es una trivialización local del haz fibrado π, de esta manera se puede considerar el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & \phi(U) \times \mathbb{E} \arrow[d, "pr_1"] \\ U \arrow[r, "\varphi"'] & \phi(U) \end{tikzcd}$$

Si $(x, \xi) \in \phi(U) \times \mathbb{E}$ es una representación local de un elemento de E, entonces ξ se denomina la *parte principal.*

Ejemplo 19 (Fibrado trivial)**.** Sea X una variedad de Hilbert y $\mathbb{E}$ un espacio de Banach. El fibrado trivial

$$\pi : X \times \mathbb{E} \to X$$

es un fibrado suave.

Ejemplo 20 (Fibrado tangente)**.** El *fibrado tangente* τ_X de una variedad de Hilbert X

$$\begin{aligned} \tau : TX &\to X \\ (x, v) &\mapsto x \end{aligned}$$

es un fibrado suave con fibra $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$ donde $\mathbb{F}$ es el espacio de Hilbert que modela localmente a X.

Ejemplo 21 (El pullback de un fibrado)**.** Sea $\pi : E \to X$ un fibrado suave y $f : B \to X$ una función diferenciable entre variedades de Hilbert. El *pullback de π por medio de f* definido por

$$\begin{aligned} f^*\pi : f^*E &\to B \\ (b, e) &\mapsto b \end{aligned}$$

es un fibrado suave que se puede representar por el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "\widehat{f}"] \arrow[d, "f^*\pi"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ B \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

y además $\widehat{f}(b,e) = e$ es diferenciable.

Ejemplo 22. Sea $\pi : E \to X$ un fibrado suave y $\tau_E : TE \to E$ el fibrado tangente sobre E. Si (U, φ, ϕ) es una representación local del fibrado π entonces $(\pi^{-1}(U), T\phi, \phi)$ es una representación local para el fibrado τ_E , esto se representa por el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} T\pi^{-1}(U) \arrow[r, "T\phi"] \arrow[d, "\tau_E"'] & \phi(U) \times \mathbb{E} \times \mathbb{F} \times \mathbb{E} \arrow[d, "pr_{1,2}"] \\ \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"'] & \phi(U) \times \mathbb{E} \end{tikzcd}$$

Definición 1.6.12. Sea $\pi : E \to X$ un fibrado suave. Una *conexión* es una aplicación

$$K : TE \to E$$

tal que para cada representación local (U, φ, ϕ) de E existe una aplicación diferenciable

$$\Gamma_\varphi : \varphi(U) \to L(\mathbb{F}, \mathbb{E}; \mathbb{E})$$

tal que la representación local $K_\varphi := \phi \circ K \circ T\phi^{-1}$ de K está dada por

$$\begin{aligned} K_\varphi : \varphi(U) \times \mathbb{E} \times \mathbb{F} \times \mathbb{E} &\to \varphi(U) \times \mathbb{E} \\ (x, \xi, y, \eta) &\mapsto (x, \eta + \Gamma_\varphi(x)(y, \xi)) \end{aligned}$$

Note que K es una aplicación de fibrados entre los fibrados τ_E y π, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} TE \arrow[r, "K"] \arrow[d, "\tau_E"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ E \arrow[r, "\pi"'] & X \end{tikzcd}$$

y además $K|_{T_\xi E} \in L(T_\xi E; E_{\pi(\xi)})$.

Definición 1.6.13. Sea K una conexión del fibrado suave $\pi : E \to X$. La *derivada covariante* de una sección diferenciable $\sigma : X \to E$ se define por

$$\nabla\sigma = K \circ T\sigma$$

Note que $\nabla\sigma$ es una sección del fibrado

$$L(\tau; \pi) : L(TX; E) \to X$$

Si (U, φ, ϕ) es una representación local de π entonces la parte principal de $\nabla\sigma$ está representada por

$$\nabla\sigma_\varphi(x)(-) = D\sigma_\varphi(x) + \Gamma_\varphi(x)(-, \sigma_\varphi(x))$$

donde $\sigma_\varphi(x) : \varphi(U) \to \mathbb{E}$ es la parte principal de la representación local de σ.

Observación 4. Si $\Xi(X)$ y $\Xi_E(X)$ denotan el espacio de secciones de los fibrados τ_X y $\pi : E \to X$ entonces la derivada covariante define la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \Xi(X) \times \Xi_E(X) &\to \Xi_E(X) \\ (\upsilon, \sigma) &\mapsto \nabla\sigma(\upsilon) \end{aligned}$$

Definición 1.6.14. Sea μ una métrica diferenciable en el fibrado $\pi : E \to X$. Se dice que una conexión K sobre π es *compatible con la métrica* si para todo abierto $U \subseteq X$ se tiene que

$$D\mu(\sigma, \eta)(\upsilon) = \mu(\nabla\sigma(\upsilon), \eta) + \mu(\sigma, \nabla\eta(\upsilon))$$

donde υ es cualquier sección en $\tau_X|_U$; σ y η son secciones en $\pi|_U$ y $\nabla\sigma = K \circ T\sigma$ es la derivada covariante determinada por

$$K : T(E|_U) \to E|_U$$

Definición 1.6.15. Sea K una conexión sobre el fibrado tangente $\tau : TX \to X$. Considere el fibrado

$$L^2_a(\tau; \tau) : L^2_a(TX; TX) \to X$$

asociado a τ con fibra el conjunto de aplicaciones continuas bilineales alternadas, $L^2_a(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. La *torsión* de K se define como la sección T de $L^2_a(\tau; \tau)$ cuya parte principal se define localmente por

$$T_\varphi(x) = \Gamma_\varphi(x)(u, \upsilon) - \Gamma_\varphi(x)(\upsilon, u)$$

Si $T \equiv 0$ entonces se dice que K es *libre de torsión*.

Teorema 1.6.2 (Conexión de Levi-Cività)**.** *Sobre una variedad Riemanniana (X, g) existe una única conexión libre de torsión compatible con la métrica llamada* conexión de Levi-Cività*.*

Demostración. Para la prueba consultar [11]. □

CAPÍTULO 2

Modelos minimales

En este capítulo se definirá la noción de modelo minimal para adg, se definira modelo minimal para espacios topológicos a partir de la construcción de Sullivan del álgebra de formas polinomiales, se construirán los modelos minimales de las esferas y los espacios proyectivos complejos, el modelo minimal asociado a la diagonal y finalmente se hablará del modelo minimal relativo asociado a una fibración, este último será de vital importacia pues a partir de este se construirá el modelo minimal del espacio de lazos libres de una variedad simplemente conexa. En este capítulo todas las adg serán consideradas $\mathbb{K}$-adg con $\mathbb{K}$ un campo.

2.1. Álgebras de Sullivan

En esta sección se definirá la noción de álgebra de Sullivan que permitirá definir los modelos minimales.

Definición 2.1.1. Un *álgebra de Sullivan* es un adg conmutativa de la forma $(\Lambda V, d)$ con $V = \{V^n\}_{n\geq 1}$ y tal que V admite una base x_α indexada por un conjunto bien ordenado tal que $d(x_\alpha) \in \Lambda(x_\beta)_{\beta<\alpha}$. Se dice que $(\Lambda V, d)$ es *minimal* si $d(V) \subseteq \Lambda^{\geq 2}V$.

Ejemplo 23. $(\Lambda(x, y, z), d)$ con $|x| = |y| = 2$, $|z| = 3$, $dx = dy = 0$ y $dz = x^2 - y^2$ es un álgebra de Sullivan.

Definición 2.1.2. Un *adg conmutativa aumentada* es un adg conmutativa (A, d) junto con una aumentación $\epsilon : (A, d) \to (\mathbb{K}, 0)$ que induce un isomorfismo $H^0(\epsilon; \mathbb{K}) : H^0(A, d) \to \mathbb{K}$. El kernel de ϵ es un ideal notado por $\overline{A}$, los *indescomponibles* de un adg conmutativa aumentada es el complejo cociente $Q(A) = \overline{A}/(\overline{A} \cdot \overline{A})$ con el diferencial inducido $Q(d)$.

Cuando $A^0 = \mathbb{K}$ se tiene que (A, d) admite una aumentación única y canónica, y $Q(A) = \overline{A}/(A^+ \cdot A^+)$. Cuando $(A, d) = (\Lambda V, d)$ sea un álgebra de Sullivan se considerará la aumentación ϵ definida por $\epsilon(V) = 0$ y por tanto se tiene el isomorfismo $(Q(V), Q(d)) \cong (V, d_o)$, donde d_0 es la parte lineal del diferencial. Cada morfismo $f : (\Lambda V, d) \to (\Lambda W, d)$ entre álgebras de Sullivan induce un morfimos entre complejos

$$Q(f) : (Q(\Lambda V), Q(d)) \to (Q(\Lambda W), Q(d))$$

Proposición 2.1.1. *Sea $f : (\Lambda V, d) \to (\Lambda W, d)$ un morfismo entre álgebras de Sullivan entonces f es un quasi-isomorfismo si y sólo si $Q(f)$ es un quasi-isomorfismo.*

Demostración. Para la prueba consultar ([5], 14.13). □

Corolario 2.1.2. *Si $f : (\Lambda V, d) \to (\Lambda W, d)$ es un quasi-isomorfismo entre álgebras de Sullivan minimales, entonces f es un isomorfismo.*

Demostración. Como f es un quasi-isomorfismo entonces $Q(f)$ es un quasi-isomorfismo. Como las álgebras son minimales entonces $Q(d) = 0$, esto significa que la restricción de f a los elementos indescomponibles es un isomorfismo de donde se deduce que f es un isomorfismo. □

2.2. Homotopía entre morfismos de adg conmutativas

En esta sección se introducirá el concepto de homotopía entre morfismos de adg conmutativas. Se notará por $(\Lambda(t, dt), d)$ al adg conmutativa generada por dos elementos t y dt, de grados 0 y 1 respectivamente, con diferencial $d(t) = dt$ y $d(dt) = 0$. Este adg conmutativa es *acíclica*, es decir, $H^0(\Lambda(t, dt), d) = \mathbb{K}$ y $H^k(\Lambda(t, dt), d) = 0$ para $k > 0$. Sean

$$p_i : (\Lambda(t, dt), d) \to (\mathbb{K}, 0)$$

los quasi-isomorfimos definidos por $p_i(t) = i$ y $p_i(dt) = 0$. Este adg conmutativa puede interpretarse como el análogo algebraico de las formas diferenciales en el intervalo $[0, 1]$.

Definición 2.2.1. Dos morfismos de adg conmutativas $f, g : (A, d) \to (B, d)$ son *homotópicos* ($f \sim g$) si existe una aplicación de adg conmutativas

$$H : (A, d) \to (B, d) \otimes (\Lambda(t, dt), d)$$

tal que $p_0 \circ H = f$ y $p_1 \circ H = g$

Proposición 2.2.1. *Si $(A, d) = (\Lambda V, d)$ es un álgebra de Sullivan entonces la relación de homotopía $\sim$ es una relación de equivalencia en el conjunto de aplicaciones de $(\Lambda V, d)$ en (B, d). Al conjunto de clases de homotopía entre $(\Lambda V, d)$ y (B, d) se notara por $[(\Lambda V, d), (B, d)]$.*

Demostración. Para la prueba consultar ([5], 12.7). □

Lema 2.2.2 (Lema de levantamiento)**.** *Sean $(\Lambda V, d)$ un álgebra de Sullivan, $f : (A, d) \to (B, d)$ un quasi-isomorfismo entre adg conmutativas y $\phi : (\Lambda V, d) \to (B, d)$ un morfismo de adg conmutativas. Entonces existe un mofismo de adg conmutativas $\psi : (\Lambda V, d) \to (A, d)$ tal que $f \circ \psi$ es homotópico a ϕ.*

$$\begin{tikzcd}
 & (A,d) \arrow[d, "f"] \\
(\Lambda V,d) \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r, "\phi"'] & (B,d)
\end{tikzcd}$$

Lema 2.2.3. *Sea $(\Lambda V, d)$ un álgebra de Sullivan, $f, g : (\Lambda V, d) \to (A, d)$ dos morfismos de adg conmutativas y $h : (A, d) \to (B, d)$ un quasi-isomorfismo. Si $hf \sim hg$ entonces $f \sim g$.*

Los lemas 2.2.2 y 2.2.3 son casos particulares del siguiente enunciado mas global:

Teorema 2.2.4. *Sea $(\Lambda V, d)$ un álgebra de Sullivan y $f : (A, d) \to (B, d)$ un quasi-isomorfismo. Entonces la composición con f induce una biyección en clases de homotopía*

$$[(\Lambda V, d), (A, d)] \to [(\Lambda V, d), (B, d)]$$

Demostración. Para la prueba consultar ([5], 12.9). □

Existe otra manera de definir la relación de homotopía entre morfismos de adg conmutativas por medio de la *exponencial*:

Definición 2.2.2. Sea $(\Lambda V, d)$ un álgebra de Sullivan, sean $\overline{V}$ y $\widehat{V}$ los espacios vectoriales definidos por $(\overline{V})^n = V^{n+1}$ y $(\widehat{V})^n = V^n$, a partir de estos se construye el álgebra de Sullivan $(\Lambda(V \oplus \overline{V} \oplus \widehat{V}), D)$ donde el diferencial está definido por

$$D(v) = dv, \quad D(\overline{v}) = \widehat{v} \quad \text{y} \quad D(\widehat{v}) = 0$$

Así a partir de la construcción la inclusión $i : (\Lambda V, d) \to (\Lambda(V \oplus \overline{V} \oplus \widehat{V}), D)$ resulta un quasi-isomofismo. Sea s una derivación de grado -1 en el álgebra $\Lambda(V \oplus \overline{V} \oplus \widehat{V})$ definida por $s(v) = \overline{v}$ y $s(\overline{v}) = s(\widehat{v}) = 0$. La derivación $\theta = sD + Ds$ es una derivación de grado 0 tal que para todo elemento u existe p tal que $\theta^p(u) = 0$. Por tanto se puede considerar el automorfismo e^θ de $\Lambda(V \oplus \overline{V} \oplus \widehat{V})$ definido por

$$e^\theta = Id + \theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!}$$

Como para todo u existe p tal que $\theta^p(u) = 0$ entonces $e^\theta(u)$ es una suma finita. Como $\theta(\overline{v}) = \theta(\widehat{v}) = 0$ entonces

$$e^\theta(v) = v + \widehat{v} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(sd)^n(v)}{n!}$$

Al automorfismo e^θ se le denominará la *exponencial*.

Definición 2.2.3. Dos morfismos de adg conmutativas $f, g : (\Lambda V, d) \to (B, d)$ son *homotópicos a izquierda* si existe una aplicación

$$H : (\Lambda(V \oplus \overline{V} \oplus \widehat{V}), D) \to (B, d)$$

tal que $f = H \circ i$ y $g = H \circ e^\theta$.

La ventaja de las homotopías a izquierda es la facilidad para construir homotopías. Por ejemplo si $f : (\Lambda V, d) \to (B, d)$ es un morfismo de adg conmutativas y si $g : \overline{V} \to B$ es una aplicación lineal entonces el morfismo de adg conmutativas $F : (\Lambda(V \oplus \overline{V} \oplus \widehat{V}), D) \to (B, d)$ definido por $F(v) = f(v)$, $F(\overline{v}) = g(\overline{v})$ y $F(\widehat{v}) = d(g(\overline{v}))$ es una homotopía a izquierda entre f y $F \circ e^\theta$.

Proposición 2.2.5. *Dos morfismos de adg conmutativas $f, g : (\Lambda V, d) \to (B, d)$ son homotópicos a izquierda si y sólo si son homotópicos.*

Demostración. Considere la proyección $\pi : (\Lambda(V \oplus \overline{V} \oplus \widehat{V}), D) \to (\Lambda V, d)$ definida por $\pi(v) = v$ y $\pi(\overline{v}) = \pi(\widehat{v}) = 0$ claramente π es un quasi-isomorfismo entonces por el lema 2.2.3 los morfismos e^{θ} y $i : (\Lambda(V, d) \to (\Lambda(V \oplus \overline{V} \oplus \widehat{V}), D)$ son homotópicos pues $\pi \circ e^{\theta} = \pi \circ i$. Por lo tanto todo par de morfismos $f, g : (\Lambda V, d) \to (B, d)$ homotópicos a izquierda son homotópicos gracias a la homotopía entre e^{θ} e i.
Ahora suponga que $f, g : (\Lambda V, d) \to (B, d)$ son homotópicos por medio de la homotopía

$$H : (\Lambda V, d) \to (B, d) \otimes (\Lambda(t, dt), d)$$

Sea F la composición de f con la inyección canónica $(B, d) \to (B, d) \otimes (\Lambda(t, dt), d)$

$$F : (\Lambda V, d) \to (B, d) \otimes (\Lambda(t, dt), d)$$

El ideal $I = B \otimes \Lambda^{+}(t, dt)$ es un ideal acíclico y $Im(H - F) \subseteq I$. Además por el lema 2.2.6 se tiene que F y H son homotópicas a izquierda y por lo tanto también lo son $f = p_1 \circ F$ y $g = p_1 \circ H$. □

Lema 2.2.6. *Sean f y g dos morfismos del álgebra de Sullivan $(\Lambda V, d)$ en un adg conmutativa (B, d). Suponga que I es un ideal acíclico en B tal que para todo $v \in V$, $f(v) - g(v) \in I$, entonces f y g son homotópicos a izquierda.*

Demostración. Por simplicidad suponga que $V^1 = 0$. La homotopía a izquierda de f y g se construirá por inducción en el grado de una base homogénea de V. Suponga que se tiene definido $H(v)$ y $H(\overline{v})$ para todo $v \in V^{\leq n}$ como $H(v) = f(v)$, $H(\overline{v}) \in I$ y $g(v) = H(e^{\theta}(v))$. Sea $x \in V^{n+1}$. El elemento

$$g(x) - f(x) - H(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(sd)^n(x)}{n!})$$

es un cociclo bien definido en I, como I es acíclico entonces existe $u \in I$ tal que

$$d(u) = g(x) - f(x) - H(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(sd)^n(x)}{n!})$$

Entonces H se extiende linealmente sobre $V^{n+1} \oplus (\overline{V})^n$ definiendola como $H(x) = f(x)$ y $H(\overline{x}) = u$ y claramente esta extensión tiene las propiedades deseadas. □

Proposición 2.2.7 (Levantamiento de homotopías)**.** *Sean $f : (\Lambda V, d) \to (A, d)$, $h : (A, d) \to (B, d)$ y $g : (\Lambda V, d) \to (B, d)$ morfismos de adg conmutativas como en el diagrama, con $h \circ f \sim g$,*

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda V, d) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & (A, d) \arrow[d, "h"] \\
 & (B, d)
\end{tikzcd}$$

Si h es sobreyectiva entonces existe un morfismo $f' : (\Lambda V, d) \to (A, d)$ tal que $f \sim f'$ y $h \circ f' = g$

Demostración. Sea $H : (\Lambda(V \oplus \overline{V} \oplus \widehat{V}), D) \to (B, d)$ la homotopía entre $h \circ f$ y g. Para cada elemento $\overline{v}$ de la base de $\overline{V}$ existe un elemento $u_v \in A$ tal que $h(u_v) = H(\overline{v})$ pues h es sobreyectiva. Se define el morfismo $K : (\Lambda(V \oplus \overline{V} \oplus \widehat{V}), D) \to (A, d)$ por $K(v) = f(v)$ y $K(\overline{v}) = u_v$. Este morfismo es una homotopía entre f y f' definido por $f'(v) = K \circ e^{\theta}(v)$, donde además se tiene que $h \circ f' = g$. □

Proposición 2.2.8 (Extensión de homotopías). *Sea $(\Lambda V \otimes \Lambda W, D)$ un álgebra de Sullivan con $D(V) \subseteq \Lambda V$, sea $f : (\Lambda V \otimes \Lambda W, D) \to (A, d)$ un morfismo de adg conmutativas y sea $g : (\Lambda V, D) \to (A, d)$ un morfismo de adg conmutativas homotópico a la restricción de f sobre $(\Lambda V, D)$. Entonces g se extiende a un morfismo $\widehat{g} : (\Lambda V \otimes \Lambda W, D) \to (A, d)$ homotópico a f, es decir, como en el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda V, D) \arrow[r] \arrow[dr, "g"'] & (\Lambda V \otimes \Lambda W, D) \arrow[d, "f"', "\widehat{g}"] \\
& (A, d)
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea H la homotopía entre la restricción de f y g, $H(v) = f(v)$ y $H \circ e^{\theta} = g$, H se extiende por medio de $H(\overline{w}) = 0$ para $w \in W$. Esto genera un nuevo morfismo $\widehat{g} = H \circ e^{\theta} : (\Lambda V \otimes \Lambda W, D) \to (A, d)$ que es homotópico a f y se extiende a g. □

Ejemplo 24. Suponga que la inclusión $i : (\Lambda V, D) \to (\Lambda V \otimes \Lambda W, D)$ tiene un sección homotópica σ entonces la identidad en $(\Lambda V, D)$ es homotópica a $\sigma \circ i$ y puede ser levantada a un morfismo de adg conmutativas $\sigma' : (\Lambda V \otimes \Lambda W, D) \to (\Lambda V, D)$ que es homotópica a σ y donde se puede suponer que $\sigma(v) = v$ para todo $v \in V$.

2.3. Modelos minimales y minimales relativos

En esta sección se definirá el concepto de modelo minimal y modelo minimal relativo. Además se mostrará un forma explícita para construir los modelos minimales asociados a cierto tipo de adg conmutativas.

Definición 2.3.1. Un *modelo de Sullivan* para un adg conmutativa (A, d) es un quasi-isomorfismo

$$\varphi : (\Lambda V, d) \to (A, d) ,$$

donde $(\Lambda V, d)$ es un álgebra de Sullivan. Se dice que el módelo es *minimal* si $(\Lambda V, d)$ es minimal.

Teorema 2.3.1 (Existencia y unicidad de modelos minimales). *Sea (A, d) un $\mathbb{K}$-adg tal que $H^0(A, d) = \mathbb{K}$ entonces*

1. *Existe un modelo minimal $\varphi : (\Lambda V, d) \to (A, d)$.*
2. *Si $H^1(A, d) = 0$ y $H^*(A, d)$ es de tipo finito entonces V también es de tipo finito.*

3. *El modelo minimal es único en el siguiente sentido: Si $\psi : (\Lambda W, d) \to (A, d)$ es otro modelo minimal entonces existe un isomorfismo $f : (\Lambda V, d) \to (\Lambda W, d)$ tal que $\psi \circ f$ es homotópico a φ.*

Demostración. *(1)* Sea (A, d) un $\mathbb{K}$-adg tal que $H^0(A, d) = \mathbb{K}$ y $H^1(A, d) = 0$ (para el caso general consultar ([5], 14.9)). La construcción es por inducción:
Sea $\varphi_2 : (\Lambda V^2, 0) \to (A, d)$ tal que $H^2(\varphi_2) : V^2 \to H^2(A, d)$ es un isomorfismo entonces como $H^1(A, d) = 0$ se tiene que $H^1(\varphi_2)$ es un isomorfismo y además $H^3(\varphi_2)$ es inyectiva pues $(\Lambda V^2)^3 = 0$. Suponga que $\varphi_n : (\Lambda V^{\leq n}, d) \to (A, d)$ ya esta construida e induce isomorfismos en cohomología en grados $\leq n$ y $H^{n+1}(\varphi_n)$ es inyectiva. Sean $a_i \in A^{n+1}$ y $b_j \in (\Lambda V^{\leq n})^{n+2}$ cociclos tales que sus clases de cohomología $[a_i]$ y $[b_j]$ son bases para $\mathrm{coker}(H^{n+1}(\varphi_n))$ y $\ker(H^{n+2}(\varphi_n))$ respectivamente, y de esta manera además existen elementos $c_j \in A^{n+1}$ tales que $\varphi_n(b_j) = dc_j$.
Sea V^{n+1} el espacio vectorial con base $\{x_i, y_j\}$ que esta en correspondencia uno a uno con los elementos $\{a_i\}$ y $\{c_j\}$. Como $\Lambda V^{\leq n+1} = \Lambda V^{\leq n} \otimes \Lambda V^{n+1}$ entonces φ_n se puede extender a un morfismo de adg conmutativas $\varphi_{n+1} : (\Lambda V^{\leq n}, d) \to (A, d)$ de la siguiente manera

$$dx_i = 0, \quad dy_j = b_j, \quad \varphi_{n+1}(x_i) = a_i \quad \text{y} \quad \varphi_{n+1}(y_j) = c_j$$

Por construcción $d^2 = 0$ y $\varphi_{n+1} d = d\varphi_{n+1}$ en ΛV^{n+1} y $\Lambda V^{\leq n}$, además $H^{\leq n+1}(\varphi_{n+1})$ es un isomorfismo y $H^{n+2}(\varphi_{n+1})$ es inyectiva.
(2) Como $V^2 \cong H^2(A, d)$ entonces es finito dimensional. Suponga que V^i es finito dimensional para $i \leq n$ entonces $\Lambda V^{\leq n}$ es de tipo finito y en particular $\ker(H^{n+2}(\varphi_n))$ es finito dimensional, como $H^{n+1}(A, d)$ es finito dimensional entonces por construcción V^{n+1} es finito dimensional.
(3) Consultar ([5], 14.12). □

Ejemplo 25. Sea (A, d) el adg conmutativa $(\mathbb{Q}[x]/x^n, 0)$ con $|x| = 2r$. Siguiendo el procedimiento general descrito anteriormente, primero se introduce un generador y de grado $2r$ con $dy = 0$ y $\varphi(y) = x$. Con esto se obtiene una aplicación $\varphi_{2r} : (\Lambda(y), 0) \to (A, d)$ que induce en cohomología una sobreyección

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}[y] &\to \mathbb{Q}[x]/x^n \\ y &\mapsto x \end{aligned}$$

Para volver esta aplicación inyectiva se introduce un nuevo generador z de grado $2rn - 1$ con diferencial $dz = y^n$ y $\varphi(z) = 0$. Esto induce una nueva aplicación

$$\varphi_{2rn} : (\Lambda(y, z), d) \to (A, d)$$

Como los grados de y y z son par e impar respectivamente entonces $\Lambda(y, z) \cong Q[y] \oplus Q[y] \cdot z$ como espacios vectoriales. Además $d(y^k z) = y^{k+n}$, entonces $H^*(\Lambda(y, z), d) = \mathbb{Q}[y]/y^n$. En particular φ_{2rn} es un quasi-isomorfismo y por tanto el modelo minimal de (A, d) es el adg conmutativa $(\Lambda(y, z), d)$ con $dy = 0$ y $dz = y^n$.

Proposición 2.3.2. *Sea $f : (A, d) \to (B, d)$ un morfismo de adg conmutativas y sean $\varphi : (\Lambda V, d) \to (A, d)$ y $\psi : (\Lambda W, d) \to (B, d)$ sus respectivos modelos de Sullivan. Entonces* *existe un morfismo de adg conmutativas $g : (\Lambda V, d) \to (\Lambda W, d)$ tal que es único salvo homotopía y $\psi \circ g \sim f \circ \varphi$.*

$$\begin{tikzcd}
(A,d) \arrow[r, "f"] & (B,d) \\
(\Lambda V, d) \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "g"'] & (\Lambda W, d) \arrow[u, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Demostración. la existencia de g es consecuencia del lema de levantamiento de homotopías 2.2.2 pues ψ es un quasi-isomorfismo, la unicidad salvo homotopía es consecuencia del lema 2.2.3. □

Definición 2.3.2. Si $(\Lambda V, d)$ y $(\Lambda W, d)$ son minimales, entonces $g : (\Lambda V, d) \to (\Lambda W, d)$ se denomina el *modelo minimal de f.*

Definición 2.3.3. Un *adg conmutativa minimal relativa* es un morfismo de adg conmutativas de la forma

$$i : (A, d_A) \to (A \otimes \Lambda V, d)$$

donde $i(a) = a$, $d_{|A} = d_A$, $d(V) \subseteq (A^+ \otimes \Lambda V) \oplus \Lambda^{\leq 2} V$, y además V admite una base (x_α) indexada por un conjunto bien ordenado tal que $d(x_\alpha) \in A \otimes (\Lambda(x_\beta))_{\beta<\alpha}$.

Teorema 2.3.3 (Versión relativa teorema 2.3.1)**.** *Sea $f : (A, d) \to (B, d)$ un morfismo de adg conmutativas. Entonces*

$$\begin{tikzcd}
(A,d) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i"'] & (B,d) \\
 & (A \otimes \Lambda V, d) \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo donde i es un adg conmutativa relativa minimal y g es un quasi-isomorfismo. Esta propiedad caracteriza $(A \otimes \Lambda V, d)$ salvo isomorfismo.

Demostración. Para la prueba consultar ([5], 14.3). □

Definición 2.3.4. Bajo las condiciones del teorema 2.3.3 i se denomina el *modelo relativo minimal de f.*

2.4. Modelos minimales para espacios topológicos

Para la construcción de modelos minimales y modelos minimales relativos para un espacio topológico X se debe introducir un adg conmutativa denotada por $A_{PL}(X; \mathbb{K})$. La construcción explícita de este adg no es necesaria basta con garantizar su existencia y las propiedades de los modelos minimales, por esta razón en esta sección solo se dará una breve introducción al álgebra $A_{PL}(X; \mathbb{K})$, para la construcción detallada y todas sus propiedades ver ([5], 10).

Para esto recuerde que el n-símplex estandar Δ^n es la envolvente convexa de la base canónica $e_0, \ldots, e_n$ de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Delta^n = \left\{ \sum_0^n t_i e_i \mid 0 \leq t_i \leq 1, \sum t_i = 1 \right\},$$

Y un n-símplice singular en X es una función continua

$$\sigma : \Delta^n \to X\,.$$

Al conjunto de n-símplices singulares en X se le denotará por $S_n(X)$. Los $S_n(X)$ constituyen un conjunto simplicial con operadores frontera ∂_i y degeneración s_j definidos por:

$$\begin{aligned}
&\partial_i : S_n(X) \to S_{n-1}(X) \\
&\qquad \partial_i(\sigma)(t_0, \ldots, t_{n-1}) = \sigma(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1}) \\
&s_j : S_n(X) \to S_{n+1}(X) \\
&\qquad s_j(\sigma)(t_0, \ldots, t_{n+1}) = \sigma(t_0, \ldots, t_j + t_{j+1}, \ldots, t_{n+1})
\end{aligned}$$

Definición 2.4.1. El $\mathbb{K}$-adg conmutativa simplicial A_{PL} se define por:

$$(A_{PL})_n = \frac{\Lambda(t_0, \ldots, t_n, dt_0, \ldots, dt_n)}{(\sum t_i - 1, \sum dt_i)}$$

donde los elementos t_i son de grado 0, los dt_i de grado 1 y el diferencial d está definido por $d(t_i) = dt_i$. Los operadores cara y degeneración del adg conmutativa simplicial A_{PL} son morfismos de $\mathbb{K}$-adg conmutativas definidos por:

$$\begin{aligned}
&\partial_i : (A_{PL})_n \to (A_{PL})_{n-1} \\
&\qquad \partial_i(t_k) = \begin{cases} t_k & \text{si } k < i \\ 0 & \text{si } k = i \\ t_{k-1} & \text{si } k > i \end{cases} \\
&s_j : (A_{PL})_n \to (A_{PL})_{n-1} \\
&\qquad s_j(t_k) = \begin{cases} t_k & \text{si } k < j \\ t_j + t_{j+1} & \text{si } k = j \\ t_{k+1} & \text{si } k > j \end{cases}
\end{aligned}$$

Definición 2.4.2. El adg conmutativa $A_{PL}(X;\mathbb{K})$ se define como

$$A_{PL}(X;\mathbb{K}) = Hom_{simplicial}(S_*(X), (A_{PL})_*)$$

Por lo tanto una q-forma ω es una correspondencia que asigna a cada n-símplice singular σ un elemento $\omega_\sigma \in (A_{PL})_n^q$ tal que

$$\omega_{\partial_i \sigma} = \partial_i \omega_\sigma \quad \text{y} \quad \omega_{s_j \sigma} = s_j \omega_\sigma$$

Teorema 2.4.1. $H^*(A_{PL}(X;\mathbb{K})) \cong H^*(X;\mathbb{K})$.

Demostración. Para la prueba consultar ([5], 10.15). □

En adelante se considerará $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

Definición 2.4.3. Sea X un espacio arco-conexo. El *modelo minimal* de X es el modelo minimal $(\Lambda V, d)$ del adg conmutativa $A_{PL}(X;\mathbb{Q})$. De esta manera si $f : X \to Y$ es una aplicación entre espacios arco-conexos, el modelo minimal de $A_{PL}(f)$, notado por $\mathcal{M}_f$, será el *modelo minimal* de f.

Proposición 2.4.2. *Si X es un espacio simplemente conexo y además cada $H_i(X;\mathbb{Q})$ es finito dimensional. Entonces el modelo minimal $(\Lambda V, d)$ de X tiene la propiedad que $V = V^{\geq 2}$ y cada V^i es finito dimensional.*

Demostración. Para la prueba consultar ([5], 12.2). □

Proposición 2.4.3. *Dos aplicaciones homotópicas $f, g : X \to Y$ entre espacios arco-conexos induce morfismos homotópicos $\mathcal{M}_f \sim \mathcal{M}_g$. En otras palabras, si $(\Lambda V, d)$ y $(\Lambda W, d)$ son los modelos minimales de X y Y entonces existe una aplicación bien definida*

$$[X, Y] \to [(\Lambda W, d), (\Lambda V, d)]$$

Demostración. Por la naturalidad de $A_{PL}(X;\mathbb{Q})$ cada aplicación continua $f : X \to Y$ entre espacios arco-conexos induce un morfismo de adg conmutativas $A_{PL}(f) : A_{PL}(Y) \to A_{PL}(X)$ y por tanto por la proposición 2.3.2 tiene un único modelo minimal $\mathcal{M}_f : (\Lambda W, d) \to (\Lambda V, d)$ salvo homotopía. □

Ejemplo 26 (Esferas)**.** Como el anillo de cohomología de la esfera $\mathbb{S}^n$ (ver ejemplo 3) es

$$H^*(\mathbb{S}^n;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x]/_{\langle x^2 \rangle} \quad \text{con} \quad |x| = n$$

Considere a ω el cociclo de grado n en $A_{PL}(\mathbb{S}^n;\mathbb{Q})$ que representa al generador de $H^n(\mathbb{S}^n;\mathbb{Q})$ y considere el morfismo de adg conmutativas

$$\begin{aligned} \varphi : (\Lambda(x), 0) &\to A_{PL}(\mathbb{S}^n;\mathbb{Q}) \\ x &\mapsto \omega \end{aligned}$$

Cuando n es impar entonces $x^2 = 0$ pues el grado de x es impar y claramente φ es un quasi-isomorfimo. Cuando n es par entonces $\Lambda(x) \cong \mathbb{Q}[x]$ y por tanto

$$H^*(\varphi) : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]/_{\langle x^2 \rangle}$$

no es un isomorfismo. Como $[\omega^2] \in H^n(\mathbb{S}^n;\mathbb{Q}) = 0$ entonces $\omega^2 = d\alpha$ para algún $\alpha \in A_{PL}(\mathbb{S}^n;\mathbb{Q})$. Considere un nuevo generador y de grado $2n-1$ tal que $dy = x^2$ y defina el morfismo de adg conmutativas

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : (\Lambda(x, y), d) &\to A_{PL}(\mathbb{S}^n;\mathbb{Q}) \\ x &\mapsto \omega \\ y &\mapsto \alpha \end{aligned}$$

Como $H^*(\Lambda(x, y), d) \cong \mathbb{Q}[x]/_{\langle x^2 \rangle}$ entonces $\tilde{\varphi}$ es un quasi-isomorfismo. En resumen el modelo minimal para $\mathbb{S}^n$ es

$$\begin{cases} (\Lambda(x), 0),\ dx = 0,\ |x| = n & \text{cuando } n \text{ es impar.} \\ (\Lambda(x, y), d),\ dx = 0,\ dy = x^2,\ |x| = n,\ |y| = 2n-1 & \text{cuando } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Ejemplo 27 (Espacios proyectivos complejos). Como el anillo de cohomología del espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^n$ (ver ejemplo 4) es

$$H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x]/_{\langle x^{n+1}\rangle} \quad \text{con} \quad |x| = 2$$

Se pueden considerar en $A_{PL}(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Q})$ elementos α y β de grados 2 y $2n+1$ respectivamente tales que α representa al generador de $H^2(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Q})$ y $d\beta = \alpha^{n+1}$. De esta manera defina el morfismo de adg conmutativas

$$\begin{aligned} \varphi : (\Lambda(x,y),d) &\to A_{PL}(\mathbb{S}^n;\mathbb{Q}) \\ x &\mapsto \alpha \\ y &\mapsto \beta \end{aligned}$$

donde $dx = 0$, $dy = x^{n+1}$, $|x| = 2$ y $|y| = 2n+1$. De esta manera φ es un quasi-isomorfismo y $(\Lambda(x,y),d)$ es el modelo minimal de $\mathbb{C}P^n$.

Ejemplo 28 (Productos). Sean $(\Lambda V,d)$ y $(\Lambda W,d)$ los modelos minimales de X y Y respectivamente. La aplicación multiplicación

$$A_{PL}(X;\mathbb{Q}) \otimes A_{PL}(Y;\mathbb{Q}) \to A_{PL}(X\times Y;\mathbb{Q})$$

es un quasi-isomorfismo gracias al Teorema de Künneth 1.2.10 y por tanto $(\Lambda V,d)\otimes(\Lambda W,d)$ es el modelo minimal de $X \times Y$.

Ejemplo 29 (La diagonal $\Delta : X \to X \times X$). Sea $(\Lambda V,d)$ el modelo minimal de X. Por el ejemplo 28 se tiene que $(\Lambda V,d)\otimes(\Lambda V,d)$ es el modelo minimal de $X\times X$ si se considera

$$\begin{aligned} \mu : (\Lambda V,d)\otimes(\Lambda V,d) &\to (\Lambda V,d) \\ a\otimes b &\mapsto a\cdot b \end{aligned}$$

entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} A_{PL}(X\times X;\mathbb{Q}) \arrow[r, "A_{PL}(\Delta)"] & A_{PL}(X;\mathbb{Q}) \\ (\Lambda V,d)\otimes(\Lambda V,d) \arrow[u, "\phi", "\cong"'] \arrow[r, "\mu"] & (\Lambda V,d) \arrow[u, "\psi", "\cong"'] \end{tikzcd}$$

y así μ es el modelo minimal de la diagonal Δ. Un modelo relativo para la diagonal va a ser de la forma

$$\begin{tikzcd} (\Lambda V,d)\otimes(\Lambda V,d) \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr] & (\Lambda V,d) \\ & (\Lambda V\otimes\Lambda V\otimes\Lambda(sV),D) \arrow[u, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

donde $(sV)^n = V^{n+1}$, $\varphi(sx) = 0$ y $D(sx) = (x\otimes 1\otimes 1) - (1\otimes x\otimes 1) + \alpha_x$ con α_x un elemento descomponible, $x \in V$. Para probar que efectivamente el modelo relativo es de esta forma la construcción del diferencial D y el morfismo φ se realizará por inducción en el grado de los generadores. Suponga que D y φ están definidos sobre $(sV)^{<n}$ entonces la restricción de φ

$$\varphi_n : (\Lambda V^{\leq n} \otimes \Lambda V^{\leq n} \otimes \Lambda(sV)^{<n}, D) \to (\Lambda V^{\leq n}, d)$$

es un quasi-isomorfismo porque $Q(\varphi_n)$ es un quasi-isomorfismo (ver proposición 2.1.1). Sea $x \in V^{n+1}$. El elemento $y = (dx \otimes 1 \otimes 1) - (1 \otimes dx \otimes 1)$ es un cociclo que es enviado a cero por φ_n entonces existe un elemento descomponible $z \in (\Lambda V^{\leq n} \otimes \Lambda V^{\leq n} \otimes \Lambda(sV)^{<n})^{n+1}$ tal que $D(z) = y$. El elemento $\varphi_n(z)$ es un cociclo y como φ_n es un quasi-isomorfismo entonces existen $u \in \Lambda V^{\leq n} \otimes \Lambda V^{\leq n} \otimes \Lambda(sV)^{<n}$ y $a \in \Lambda V$ tales que $\varphi_n(z) = \varphi_n(u) + da$. Como φ_n es sobreyectiva se puede considerar un elemento a' tal que $\varphi_n(a') = a$. Defina

$$z' = z - u - D(a') \quad \text{y} \quad D(sx) = (x \otimes 1 \otimes 1) - (1 \otimes x \otimes 1) - z' \,,$$

esto pues $\varphi_n(z') = 0$ y de esta manera el paso inductivo queda definido.

Sea $F \to E \xrightarrow{p} B$ una fibración con B simplemente conexo. Considere el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A_{PL}(B;\mathbb{Q}) \arrow[r, "A_{PL}(p)"] & A_{PL}(E;\mathbb{Q}) \arrow[r] & A_{PL}(F;\mathbb{Q}) \\
(\Lambda V, d) \arrow[u, "\phi", "\cong"'] \arrow[r, "i"] & (\Lambda V \otimes \Lambda W, d) \arrow[u, "\psi", "\cong"'] \arrow[r, "\rho"] & (\Lambda W, \overline{d}) \arrow[u, "\overline{\psi}"]
\end{tikzcd}$$

donde $\phi : (\Lambda V, d) \to A_{PL}(B;\mathbb{Q})$ es el modelo minimal de B, ψ es un quasi-isomorfismo e $i : (\Lambda V, d) \to (\Lambda V \otimes \Lambda W, d)$ es un modelo minimal relativo. El adg conmutativa $(\Lambda W, \overline{d})$ es el cociente $(\Lambda V \otimes \Lambda W, d)/(\Lambda^+(V) \otimes \Lambda W)$ y ρ es la proyección al cociente. La aplicación $\overline{\psi}$ es la inducida por la conmutatividad del cuadrado de la izquierda.

Teorema 2.4.4. *Sea $F \to E \xrightarrow{p} B$ una fibración con B simplemente conexo. Si al menos uno de los espacios graduados $H_*(B;\mathbb{Q})$, $H_*(F;\mathbb{Q})$ tiene tipo finito entonces*

$$\overline{\psi} : (\Lambda W, \overline{d}) \to A_{PL}(F;\mathbb{Q})$$

y

$$\psi : (\Lambda V \otimes \Lambda W, d) \to A_{PL}(X;\mathbb{Q})$$

son los modelos minimales de la fibra F y el espacio total E respectivamente.

Demostración. Para la prueba consultar ([5], 15.5). □

Teorema 2.4.5. *Sea $f : X \to B$ una función continua entre espacios simplemente conexos y $F \to E' \xrightarrow{q} X$ la fibración pullback de la fibración $F \to E \xrightarrow{p} B$ por medio de f. Si*

$$(\Lambda V, d) \to (\Lambda V \otimes \Lambda W, d) \to (\Lambda W, \overline{d})$$

es un modelo minimal relativo de p y $\varphi : (\Lambda V, d) \to (\Lambda Z, d)$ es un modelo minimal de f. Entonces

$$(\Lambda Z, d) \to (\Lambda Z, d) \underset{(\Lambda V, d)}{\otimes} (\Lambda V \otimes \Lambda W, D) \to (\Lambda W, \overline{D})$$

es un modelo minimal relativo de q. Donde $(\Lambda Z, d) \underset{(\Lambda V, d)}{\otimes} (\Lambda V \otimes \Lambda W, D)$ *es el pushout del diagrama*

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda V, d) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & (\Lambda V \otimes \Lambda W, D) \arrow[d] \\
(\Lambda Z, d) \arrow[r] & (\Lambda Z, d) \underset{(\Lambda V, d)}{\otimes} (\Lambda V \otimes \Lambda W, D)
\end{tikzcd}$$

y el diferencial D esta definido por $D(w) = (\phi \otimes 1)d(w)$*, donde* $\phi \otimes 1$ *es la multiplicación natural* $\phi \otimes 1 : \Lambda V \otimes \Lambda W \to \Lambda Z \otimes \Lambda W$ *.*

Demostración. Para la prueba consultar ([5], 15.8). $\square$

CAPÍTULO 3

Espacio de lazos de una variedad

En este capítulo se describirá la estructura diferencial del espacio de lazos libres LX de una variedad cerrada simplemente conexa X, para esto se describirá su estructura de variedad de Hilbert, se mostrará la equivalencia homotópica entre el espacio de lazos libres visto como variedad de Hilbert y visto como el espacio de aplicaciones continuas entre el círculo unitario y la variedad con la topología compacta-abierta. También se definirá el dual del producto de lazos definido por Chas y Sullivan [3] sobre su cohomología.

3.1. Estructura diferencial del espacio de lazos

Definición 3.1.1. Sean X y Y dos espacios topológicos y sea $C(X,Y) = Y^X$ el conjunto de todas las funciones continuas entre X y Y. Si $K \subseteq X$ es compacto y $U \subseteq Y$ es abierto, sea

$$S(K,U) = \{f : X \to Y \mid f(K) \subseteq U\} \ ,$$

los conjuntos

$$S(K_1, \dots, K_n; U_1, \dots, U_n) = \bigcap_{i=1}^{n} S(K_i, U_i) \quad n \in \mathbb{N}$$

forman un base para una topología sobre $C(X,Y)$ llamada la *topología compacta-abierta.*

Proposición 3.1.1. *Si X es un espacio topológico Hausdorff compacto y Y es un espacio métrico entonces $C(X,Y)$ es un espacio métrico con la métrica del supremo*

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$$

Además la topología compacta-abierta y la inducida por esta métrica coinciden.

Demostración. Para la prueba consultar [22]. $\square$

Proposición 3.1.2. *Sea X una variedad compacta. Entonces*

$$\begin{aligned}(p_0, p_1) : X^{[0,1]} &\to X \times X\\ c &\mapsto (p_o, p_1)(c) := (c(0), c(1))\end{aligned}$$

es una fibración.

Demostración. Por el ejemplo 7 se tiene que $i : \mathbb{S}^0 \simeq \{0,1\} \hookrightarrow [0,1] \simeq \mathbb{D}^1$ es una cofibración entonces por 1.3.2 la aplicación inducida

$$\begin{aligned}p = (p_0, p_1) : X^{[0,1]} &\to X^{\{0,1\}} = X \times X\\ c &\mapsto (c(0), c(1))\end{aligned}$$

es una fibración. $\square$

Definición 3.1.2. El *espacio de lazos libres*, LX, de una variedad compacta X es el pullback del siguiente diagrama de fibraciones

$$\begin{tikzcd} LX \arrow[r] \arrow[d, "p_0"'] & X^{[0,1]} \arrow[d, "(p_0,p_1)"] \\ X \arrow[r, "\Delta"'] & X \times X \end{tikzcd}$$

Bajo esta definición el espacio de lazos libres se define como el espacio de funciones continuas entre $\mathbb{S}^1$ y la variedad X con la topología compacta-abierta. Ahora se definirá una estructura diferencial sobre el espacio de lazos libres, es decir, se dotará con una estructura de variedad de Hilbert.

Definición 3.1.3. Una función $c : I = [0,1] \to X$ es de *clase* H^1 si para toda carta (U, ϕ) de X y $c^{-1}(U) = I'$ la función $\phi \circ c \in H^1(I', \mathbb{R}^n)$. A partir de esto se definen los conjuntos

$$\begin{aligned}C(I,X) &:= \{c : I \to X \mid c \text{ es una función continua}\}\ ,\\ C_p^\infty(I,X) &:= \{c : I \to X \mid c \text{ es una función diferenciable a trozos}\}\ ,\ \text{y}\\ H^1(I,X) &:= \left\{c : I \to X \mid c \text{ es una función de clase } H^1\right\}\end{aligned}$$

De esta manera se tiene la siguiente sucesión de inclusiones

$$C_p^\infty(I,X) \subseteq H^1(I,X) \subseteq C(I,X)\,.$$

Proposición 3.1.3. *El espacio $C_p^\infty(I,X)$ es un subespacio denso del espacio de Banach $(C(I,X), \|\cdot\|_\infty)$.*

Demostración. Como I es compacto, cualquier curva $c \in C(I,X)$ se puede cubrir por finitas cartas. De esta manera la prueba se reduce al caso real y por el ejemplo 15 se tiene que $C_p^\infty(I', \mathbb{R}^n)$ es un subespacio denso del espacio de Banach $(C(I', \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$, con I' un intevalo en I. $\square$

Definición 3.1.4. Sean $\tau : TX \to X$ el fibrado tangente sobre X, $c \in C_p^\infty(I, X)$ y $c^*\tau : c^*TX \to I$ el pullback del fibrado tangente τ_X por medio de c. Sobre el fibrado $c^*\tau$ se define el conjunto

$$C_p^\infty(c^*TX) = \{\sigma : I \to c^*TX \mid \sigma \text{ es una sección diferenciable a trozos}\}$$

Como X es una variedad Riemanniana entonces este fibrado puede ser dotado con una métrica Riemanniana y así para $\sigma, \eta \in C_p^\infty(c^*TX)$ se definen la norma

- $\|\sigma\|_\infty := \sup_t |\sigma(t)|$

y los productos internos

- $\langle \sigma, \eta \rangle_0 := \int_I \langle \sigma(t), \eta(t) \rangle_t \, dt$
- $\langle \sigma, \eta \rangle_1 := \langle \sigma, \eta \rangle_0 + \langle \nabla\sigma, \nabla\eta \rangle_0$

donde ∇ es la derivada covariante proveniente de la conexión de Levi-Civitá (ver Teorema 1.6.2). Las normas provenientes de estos productos internos se notarán respectivamente por $\|\|_0$ y $\|\|_1$. A los completados con respecto a las normas $\|\sigma\|_\infty$, $\|\|_0$ y $\|\|_1$ se les notará respectivamente por $C(c^*TX)$, $H^0(c^*TX)$ y $H^1(c^*TX)$.

Observación 5. Note que $C(c^*TX)$ es un espacio de Banach y $H^0(c^*TX)$ y $H^1(c^*TX)$ son espacios de Hilbert.

Proposición 3.1.4. *Las inclusiones*

$$H^1(c^*TX) \hookrightarrow C(c^*TX) \hookrightarrow H^0(c^*TX)$$

son continuas. Más precisamente

1. *Si $\sigma \in C(c^*TX)$ entonces $\|\sigma\|_0^2 \leq \|\sigma\|_\infty^2$*
2. *Si $\sigma \in H^1(c^*TX)$ entonces $\|\sigma\|_\infty^2 \leq 2\|\sigma\|_1^2$*

Demostración. (1) Sea $\sigma \in C(c^*TX)$ entonces

$$\|\sigma\|_0^2 = \int_I \langle \sigma(t), \sigma(t) \rangle_t \, dt \leq \int_I \sup |\sigma(t)|^2 \, dt = \|\sigma\|_\infty^2$$

(2) Sea $\sigma \in H^1(c^*TX)$, como σ es continua entonces existe t_1 tal que $|\sigma(t)| \leq |\sigma(t_1)|$ para todo t. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|\sigma\|_\infty^2 &= |\sigma(t)|^2 + \int_t^{t_1} \frac{d}{dt} |\sigma(t)|^2 \, dt \\
&\leq |\sigma(t)|^2 + 2\int_I |\sigma(t)| \, |\nabla\sigma(t)| \, dt \\
&\leq \langle \sigma, \sigma \rangle_0 + \langle \sigma, \sigma \rangle_0 + \langle \nabla\sigma, \nabla\sigma \rangle_0 \\
&\leq 2\|\sigma\|_1^2
\end{aligned}$$

□

Observación 6. Como I es paracompacto cualquier fibrado suave

$$\pi : E \to I$$

puede ser dotado con una métrica y analógamente como en la definición 3.1.4 se pueden contruir los completados

$$C(E),\ H^0(E) \text{ y } H^1(E)$$

del espacio

$$C_p^\infty(E) = \{\sigma : I \to E \mid \sigma \text{ es una sección diferenciable a trozos}\}$$

La proposición 3.1.4 también se cumple para este caso y la prueba es totalmente análoga.

Proposición 3.1.5. *Sea $\mathcal{O}$ un abierto del espacio total del fibrado*

$$\pi : E \to I \quad (\dim(\mathbb{E}) < \infty)$$

tal que $\mathcal{O}_t := \mathcal{O} \cap \pi^{-1}(t) \subseteq E_t$ sea no vacío para todo $t \in I$. Entonces

$$H^1(\mathcal{O}) := \left\{\sigma \in H^1(E) \mid \sigma(t) \in \mathcal{O}_t \text{ para todo } t \in I\right\}$$

es abierto en $H^1(E)$.

Demostración. Como $\mathcal{O}$ es abierto entonces dada $\sigma \in H^1(\mathcal{O})$ existe $\epsilon_t > 0$ tal que $B_{\epsilon_t}(\sigma(t)) = \{x \in \mathcal{O}_t \mid |x - \sigma(t)| < \epsilon_t\} \subseteq \mathcal{O}_t$ para todo $t \in I$. Estos ϵ_t se pueden reducir a un conjunto finito pues I es compacto. Sea $\epsilon = \min\{\epsilon_t, 1/2\}$ ($\epsilon \neq 0$ pues de lo contrario $\mathcal{O}$ no sería abierto en E) entonces por la proposición 3.1.4 se tiene que para toda $\eta \in H^1(E)$ tal que $\|\eta - \sigma\|_1 < \epsilon$, se tiene la desigualdad

$$|\eta(t) - \sigma(t)|^2 \leq \|\eta - \sigma\|_\infty^2 \leq 2\|\eta - \sigma\|_1^2 < 2\epsilon^2$$

Entonces $\eta(t) \in \mathcal{O}_t$ para todo $t \in I$ y por tanto $\eta \in H^1(\mathcal{O})$. □

Proposición 3.1.6. *Sean $\pi : E \to I$, $\mathcal{O} \subseteq E$ como en 3.1.5 y $\varphi : F \to I$ $(\dim(\mathbb{F}) < \infty)$ un fibrado sobre I. Si $f : \mathcal{O} \to F$ es una aplicación de fibrados diferenciable entonces la aplicación inducida*

$$\begin{aligned} \tilde{f} : H^1(\mathcal{O}) &\to H^1(F) \\ \sigma &\mapsto f \circ \sigma \end{aligned}$$

es diferenciable.

Demostración. Para la prueba consultar [11]. □

Lema 3.1.7. *Sea X una variedad compacta. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que la aplicación*

$$\begin{aligned} (\tau, \exp) : \mathcal{O}_\epsilon &\to X \times X \\ v &\mapsto (\tau(v), \exp(v)) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo sobre un abierto de la diagonal de $X \times X$ y $\mathcal{O}_\epsilon = \{v \in TX \mid |v| < \epsilon\}$ es una vecindad abierta de la sección cero del fibrado tangente $\tau : TX \to X$. En particular $\exp|_{\mathcal{O}_p := \mathcal{O}_\epsilon \cap T_pX}$ *es inyectiva.*

Demostración. Para la prueba consultar [16]. □

Proposición 3.1.8. *Sean $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\epsilon \subseteq TX$ como en 3.1.7 y $c \in C_p^\infty(I,X)$. Entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} \exp_c : H^1(\mathcal{O}_c) &\to H^1(I,X) \\ \sigma &\mapsto \exp(\widehat{c}\sigma) \end{aligned}$$

es inyectiva y

$$Im(\exp_c) = \left\{ e \in H^1(I,X) \mid e(t) \in \exp(\mathcal{O} \cap T_{c(t)}X) \right\}$$

donde $\mathcal{O}_c := c^*\mathcal{O} \subseteq c^*TX$ y $\widehat{c}$ es como en el ejemplo 11.

Demostración. La prueba es inmediata a partir de la definición y del lema 3.1.7. □

Lema 3.1.9. *Sean $c, d \in C_p^\infty(I,X)$ y $\mathcal{U}(*) = \exp_* H^1(\mathcal{O}_*)$. Entonces*

$$\exp_d^{-1} \circ \exp_c : \exp_c^{-1}(\mathcal{U}(c) \cap \mathcal{U}(d)) \to \exp_d^{-1}(\mathcal{U}(c) \cap \mathcal{U}(d))$$

es un difeomorfismo.

Demostración. Para cada $t \in I$ sean

$$\mathcal{O}_{c,d,t} := \mathcal{O}_{c,t} \cap \left((\exp \circ \tau^* c)^{-1} \circ (\exp \circ \tau^* d) \right) (\mathcal{O}_{d,t})$$

y

$$\mathcal{O}_{c,d} := \begin{cases} \bigcup\limits_t \mathcal{O}_{c,d,t} & \text{si } \mathcal{O}_{c,d,t} \neq \phi \text{ para todo } t \in I \\ \phi & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se tiene que $\mathcal{O}_{c,d}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{O}_c$ y

$$H^1(\mathcal{O}_{c,d}) = \exp_c^{-1}(\mathcal{U}(c) \cap \mathcal{U}(d))$$

Entonces la aplicación

$$f_{c,d} := (\exp \circ \tau^* d)^{-1} \circ (\exp \circ \tau^* c) : \mathcal{O}_{c,d} \to d^*TX$$

es una aplicación diferenciable de fibrados y

$$\exp_d^{-1} \circ \exp_c = \tilde{f_{c,d}}$$

resulta ser un difeomorfismo por la proposición 3.1.6. □

Teorema 3.1.10. *$H^1(I,X)$ es una variedad de Hilbert.*

Demostración. El atlas canónico de $H^1(I,X)$ está dado por

$$(\mathcal{U}(c), \exp_c^{-1}) \quad c \in C_p^\infty(I,X)$$

que cumple las siguientes propiedades:
(1) Por la proposición 3.1.8 el modelo local de $H^1(I,X)$ es el espacio de Hilbert separable

$H^1(c^*TX) \cong H^1(I, \mathbb{R}^n)$ y es independiente de $c \in C_p^\infty(I, X)$ por el lema 3.1.9.
(2) Los conjuntos $\mathcal{U}(c)$, $c \in C_p^\infty(I, X)$, forman un cubrimiento abierto de $H^1(I, X)$ pues son abiertos por la proposición 3.1.5 y el lema 3.1.7 y además $C_p^\infty(I, X)$ es denso en $H^1(I, X)$ por la definición 3.1.4.
(3) El atlas canónico de $H^1(I, X)$ es diferenciable gracias al lema 3.1.9. Para ver que $H^1(I, X)$ es 2-contable basta mostrar que el atlas canónico posee un subatlas contable. Para esto se mostrará que para todo natural $n > 0$ el conjunto

$$H^1(I, X)^n := \left\{ c \in H^1(I, X) \mid \int_I \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle_{c(t)} \, dt < 2n \right\}$$

se puede cubrir por un subconjunto finito del atlas canónico. Sea $\epsilon > 0$ como en el lema 3.1.7 y $m = m(\epsilon, n)$ un natural tal que $18n < m\epsilon^2$. Entonces para toda $e \in H^1(I, X)^n$ se tiene que

$$\begin{aligned} d_X(e((j-1)/m), e(j/m))^2 &\leq \left(\int_{(j-1)/m}^{j/m} |\dot{e}(t)| \, dt \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{m} \int_I \langle \dot{e}(t), \dot{e}(t) \rangle_{c(t)} \, dt \\ &\leq 2\frac{l}{m} \leq \frac{\epsilon^2}{9} \end{aligned}$$

Entonces $e|_{[(j-1)/m, j/m]}$ cae completamente en una bola de radio $\epsilon/3$. Como X es compacta existe un conjunto finito P de puntos de X tal que las bolas de radio $\epsilon/3$ centradas en dichos puntos cubren a X,es decir, para toda $e \in H^1(I, X)^n$ existe una sucesión $\{p_1, \ldots, p_m\}$ en P tal que $e(j/m) \in B_{\epsilon/3}(p_j)$. Entonces para cada sucesión $\{p_1, \ldots, p_m\}$ de m elementos en P se puede considerar una función $c \in C_p^\infty(I, X) \subseteq H^1(I, X)^n$ con $c(j/m) = p_j$ y por tanto $e \in \mathcal{U}(c)$. Y por lo tanto $H^1(I, X)$ es 2-contable. □

Teorema 3.1.11. *La aplicación*

$$\begin{aligned} p = (p_0, p_1) : H^1(I, X) &\to X \times X \\ c &\mapsto (c(0), c(1)) \end{aligned}$$

es una submersión, es decir, Dp_c es sobreyectiva para toda $c \in H^1(I, X)$. Además si $N \subseteq X \times X$ es una subvariedad de codimensión k entonces $p^{-1}(N)$ es una subvariedad de $H^1(I, X)$ de codimensión k.

Demostración. Para la prueba consultar [12]. □

Corolario 3.1.12. *El espacio de lazos libres LX de una variedad compacta X es una variedad de Hilbert.*

Demostración. Sea $N = \Delta(X) \subseteq X \times X$ entonces

$$p^{-1}(N) = \left\{ c \in H^1(I, X) \mid c(0) = c(1) \right\} = H^1(\mathbb{S}^1, X)$$

es una variedad de Hilbert modelada localmente por el subespacio de Hilbert separable $H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$. □

Para la prueba del siguiente teorema se hará uso del siguiente resultado de Palais:

Teorema 3.1.13 (Teorema de Palais). *Sean V_1 y V_2 dos espacios de Banach localmente convexos y $f : V_1 \to V_2$ una aplicación lineal y continua de V_1 sobre un subespacio denso de V_2. Dado $\mathcal{O}$ un abierto en V_2 sea $\tilde{\mathcal{O}} = f^{-1}(\mathcal{O})$ y $\tilde{f} = f|_{\tilde{\mathcal{O}}}$. Entonces $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{O}} \to \mathcal{O}$ es una equivalencia homotópica.*

Demostración. Para la prueba consultar [19] □

Teorema 3.1.14. *La inclusión*

$$H^1(\mathbb{S}^1, X) \hookrightarrow C(\mathbb{S}^1, X)$$

es una equivalencia homotópica.

Demostración. Por el teorema del embebimiento de Whitney 1.3.9, X se puede embeber en un espacio Euclideano $\mathbb{E}$. Entonces por el teorema de la vecindad tubular1.3.8 existe N una vecindad tubular de X en $\mathbb{E}$ y además X es un retracto fuerte de deformación de N bajo una homotopía diferenciable

$$h_s : N \to N \quad 0 \leq s \leq 1$$

con $h_0 = id_N$ y $h_1(N) = X$. Entonces h_s induce equivalencias homotópicas entre $H^1(\mathbb{S}^1, N)$ y $H^1(\mathbb{S}^1, X)$ y entre $C(\mathbb{S}^1, N)$ y $C(\mathbb{S}^1, X)$ por medio de $\tilde{h_s}$, $0 \leq s \leq 1$, definida por $(\tilde{h_s} \circ c)(t) = h_s \circ c(t)$. Entonces $H^1(\mathbb{S}^1, X)$ es homotópicamente equivalente al abierto $U^1 := H^1(\mathbb{S}^1, N)$ del espacio de Hilbert $H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{E})$ y $C(\mathbb{S}^1, X)$ es homotópicamente equivalente al abierto $U^0 := C(\mathbb{S}^1, N)$ del espacio de Banach localmente convexo $C(\mathbb{S}^1, \mathbb{E})$ con la norma del supremo. Por la observación 6 se tiene que la inclusión $H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{E}) \hookrightarrow C(\mathbb{S}^1, \mathbb{E})$ es continua y tiene imagen densa. Entonces por el teorema de Palais 3.1.13 se tiene que U^1 y U^0 son homotópicamente equivalentes y de esta manera la inclusión

$$H^1(\mathbb{S}^1, X) \hookrightarrow C(\mathbb{S}^1, X)$$

es una equivalencia homotópica. □

Observación 7. Como $\mathbb{S}^1$ es compacto y X es una variedad Riemanniana entonces la topología compacta-abierta sobre $C(\mathbb{S}^1, X)$ coincide con la topología inducida por la métrica del supremo 3.1.1, así el espacio de lazos libres con la topología compacta-abierta es homotópico al espacio de lazos libres visto como variedad de Hilbert.

3.2. Estructura algebraica de la cohomología del espacio de lazos

La *homología de lazos* $\mathbb{H}_*(LX; \mathbb{K})$ de una variedad cerrada orientable X de dimensión n es la homología singular del espacio de lazos libres de X con un desplazamiento de grado, es decir,

$$\mathbb{H}_*(LX; \mathbb{K}) = H_{*+n}(LX; \mathbb{K})$$

En [3] M. Chas y D. Sullivan definieron un producto sobre las cadenas de LX que dota con estructura de álgebra a $\mathbb{H}_*(LX;\mathbb{K})$.
A grandes rasgos este producto, llamado *producto de lazos*, se define de la siguiente manera. Sean $\sigma : \Delta^p \to LX$ y $\tau : \Delta^q \to LX$ dos símplices singulares en LX tales que la aplicación

$$\Delta^p \times \Delta^q \xrightarrow{\sigma\times\tau} LX \times LX \xrightarrow{p_0\times p_0} X \times X$$

es transversal a la diagonal. Ahora considere el espacio

$$E = \{(s,k,x) \in \Delta^p \times \Delta^q \times X \mid (p_0 \circ \sigma)(s) = (p_0 \circ \tau)(k) = x\}$$

el cual es el pullback del diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "\Delta"] \\ \Delta^p \times \Delta^q \arrow[r, "p_0\cdot\sigma\times p_0\cdot\tau"] & X \times X \end{tikzcd}$$

Note que la composición de los lazos $\sigma(s)$ y $\tau(k)$ está definida para $(s,k,x) \in E$, es decir, existe una aplicación

$$\begin{aligned} * : E &\to LX \\ (s,k,x) &\mapsto \sigma(s) * \tau(k) \end{aligned}$$

donde

$$(\sigma(s) * \tau(k))(t) = \begin{cases} \sigma(s)(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tau(k)(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Como X tiene codimensión n en $X \times X$ entonces E tiene codimensión n en $\Delta^p \times \Delta^q$. De esta manera $\sigma * \tau$ define una $(p+q-n)$-cadena sobre LX. En [3] M. Chas y D. Sullivan muestran que este procedimiento define una aplicación de cadenas

$$C_p(LX) \otimes C_q(LX) \to C_{p+q-n}(LX)$$

que induce un producto asociativo y conmutativo sobre $\mathbb{H}_*(LX;\mathbb{K})$. En [4] se puede encontrar otra forma de construir el producto de lazos a partir de la construcción de Thom-Pontryagin.

Definición 3.2.1. Sea $\pi : E \to X$ un fibrado vectorial Euclideo. Se definen el *haz fibrado disco* como el haz fibrado sobre X con espacio total

$$D(E) = \{v \in E \mid |v| \leq 1\}$$

y el *haz fibrado esfera* como el haz fibrado sobre X con espacio total

$$S(E) = \{v \in E \mid |v| = 1\}$$

Definición 3.2.2 (Mapa de Gysin)**.** Sean M y N variedades de Hilbert conexas y $f : M \to N$ un embebimiento, entonces por el corolario 1.3.6 se tiene que

$$TN|_M \cong TM \oplus \upsilon_f$$

Si f es de codimensión k entonces el fibrado normal υ_f es un fibrado vectorial de dimensión k. Considere los haces fibrados disco y esfera $D(\upsilon_f)$ y $S(\upsilon_f)$ asociados al fibrado normal υ_f y la clase de Thom $u_f \in H^k(D(\upsilon_f), S(\upsilon_f))$. Por el lema 3.1.7 la aplicación exponencial $\exp : D \subseteq TN \to N$ restringida a υ_f es un isomorfimo local alrededor de la sección cero del fibrado $\tau_N : TN \to N$. Como f es un embebimiento y N es una variedad Riemanniana entonces por el teorema de la vecindad tubular 1.3.8 existen una vecindad abierta Z de la sección cero de υ_f, un abierto U de $f(M)$ en N y un difeomorfismo $\theta : Z \to U$ que identifica la sección cero de υ_f con $f(M)$. Como f tiene codimensión finita k entonces Z se puede identificar con $D(\upsilon_f)$ y así el isomorfismo θ define un «tubo» $D(\upsilon_f) \cong \theta(D(\upsilon_f)) = C_f$ y su frontera $S(\upsilon_f) \cong \theta(S(\upsilon_f)) = \partial C_f$. Además aplicando el isomorfismo de Thom 1.4.1 y la sucesión de Gysin 1.4.4, todo lo dicho anteriormente se puede resumir en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H^*(N, N \setminus f(M)) \arrow[r, "j^{(N,N\setminus f(M))}"] \arrow[d, "\cong"', "\text{Escisión}"] & H^*(N) \arrow[d] \\
H^*(C_f, \partial C_f) \arrow[r, "j^{(C_f,\partial C_f)}"] \arrow[d, leftrightarrow, "id"'] & H^*(C_f) \arrow[d, leftrightarrow, "id"] \\
H^*(D(\upsilon_f), S(\upsilon_f)) \arrow[r, "j^{(D(\upsilon_f),S(\upsilon_f))}"] & H^*(D(\upsilon_f)) \\
H^{*-k}(M) \arrow[r, "-\smile e(\upsilon_f)"] \arrow[u, "H^*(\pi(D)\circ f)(-)\smile u_f"', "\cong"] & H^*(M) \arrow[u, "\pi(D)\circ f^{-1}|_{f(M)}"']
\end{tikzcd}$$

Así el *mapa de Gysin* $f^!$ asociado a f se define como la composición

$$\begin{tikzcd}
H^{*+k}(D(\upsilon_f), S(\upsilon_f)) = H^*(C_f, \partial C_f) \arrow[r, "(\text{Escisión})^{-1}", "\cong"'] & H^*(N, N \setminus f(M)) \arrow[d, "j^{(N,N\setminus f(M))}"] \\
H^*(M) \arrow[r, "f^!"] \arrow[u, "H^*(\pi(D)\circ f)(-)\smile u_f", "\cong"'] & H^*(N)
\end{tikzcd}$$

y $f^!(1) = e_f \in H^*(N)$ es la *clase de Euler del embebimiento f*.

Ahora se va a definir *el dual del producto de lazos* sobre $H^*(LX; \mathbb{K})$, para esto considere el espacio de lazos libres LX con la estructura de variedad de Hilbert descrita anteriormente. Sea $LX \underset{X}{\times} LX$ el pullback del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
LX \underset{X}{\times} LX \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p_0"'] & LX \times LX \arrow[d, "p_0 \times p_0"'] \\
X \arrow[r, "\Delta"] & X \times X
\end{tikzcd}$$

de esta manera

$$LX \underset{X}{\times} LX = \{(\alpha, \beta) \in LX \times LX \mid \alpha(0) = \beta(0)\}$$

es la variedad de Hilbert de lazos componibles. Note que i es un embebimiento de codimensión n de variedades de Hilbert pues la diagonal Δ es un embebimiento de codimensión n. Como $LX \underset{X}{\times} LX$ es el espacio de lazos componibles se puede considerar la aplicación

$$\begin{aligned} * : LX \underset{X}{\times} LX &\to LX \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha * \beta \end{aligned}$$

pero esta aplicación no es necesariamente diferenciable en $1/2$ o 1, para que la composición de lazos resulte diferenciable se puede considerar una biyección $\phi : [0,1] \to [0,1]$ con la propiedad que su derivada tienda a cero en los extremos $\{0,1\}$, con esta ϕ se pueden reparametrizar los lazos α y β y así la composición resulta una función diferenciable. Esta nueva composición de lazos se notará por

$$\mathrm{Comp} : LX \underset{X}{\times} LX \to LX$$

Todo lo dicho anteriormente se puede resumir en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} LX \times LX \arrow[d, "p_0 \times p_0"'] & LX \underset{X}{\times} LX \arrow[l, "i"'] \arrow[r, "\mathrm{Comp}"] \arrow[d, "p_0"'] & LX \arrow[d, "p_0"'] \\ X \times X & X \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, leftrightarrow, "id_X"] & X \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Como los embebimientos Δ e i tienen codimensión n entonces existen sus respectivos mapas de Gysin (ver definición 3.2.2)

$$\begin{aligned} \Delta^! &: H^k(X) \to H^{k+n}(X \times X) \\ i^! &: H^k(LX \underset{X}{\times} LX) \to H^{k+n}(LX \times LX) \end{aligned}$$

entonces el diagrama 3.1 induce en cohomología el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} H^{k+n}(LX \times LX) & H^k(LX \underset{X}{\times} LX) \arrow[l, "i^!"'] & H^k(LX) \arrow[l, "H^*(\mathrm{Comp})"'] \\ H^{k+n}(X \times X) \arrow[u, "H^*(p_0 \times p_0)"] & H^k(X) \arrow[l, "\Delta^!"'] \arrow[u, "H^*(p_0)"] \arrow[r, leftrightarrow, "id_{H^*(X)}"] & X \arrow[u, "H^*(p_0)"] \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

De esta manera se define el *dual del producto de lazos* como la composición de las aplicaciones de la fila superior del diagrama:

$$i^! \circ H^*(\mathrm{Comp}) : H^*(LX) \to H^{*+n}(LX \times LX)$$

CAPÍTULO 4

Modelo minimal del espacio de lazos

En este capítulo se construirá el modelo minimal asociado al espacio de lazos libres de un espacio simplemente conexo y por último se construirá explícitamente el modelo minimal del espacio de lazos libres de las esferas y los planos proyectivos complejos y a partir de este se calculará la cohomología de estos espacios.

Teorema 4.0.1. *Sea X un espacio simplemente conexo con modelo minimal $(\Lambda V, d)$ entonces el modelo para el espacio de lazos libres LX, está dado por*

$$(\Lambda V \otimes \Lambda sV, \delta)$$

con $\delta(v) = dv$ y $\delta(sv) = -sd(v)$ donde s es la derivación definida por $s(v) = sv$.

Demostración. Sea $i : X \to X^{[0,1]}$ la aplicación que asigna a cada punto $x \in X$ el camino constante x. De esta manera se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\Delta"'] & X^{[0,1]} \arrow[d, "(p_0,p_1)"] \\ & X \times X \end{tikzcd}$$

Claramente i es una equivalencia homotópica y hace que el diagrama conmute, esto implica que (p_0, p_1) y Δ tengan el mismo modelo minimal relativo.
Sean $(\Lambda V_1, d)$ y $(\Lambda V_2, d)$ dos copias de $(\Lambda V, d)$. El modelo minimal de Δ está dado por la multiplicación (ver ejemplo 29)

$$\mu : (\Lambda V_1, d) \otimes (\Lambda V_2, d) \to (\Lambda V, d)$$

Un modelo relativo para μ (ver ejemplo 29) está dado por el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} (\Lambda V_1, d) \otimes (\Lambda V_2, d) \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr] & (\Lambda V, d) \\ & (\Lambda V_1 \otimes \Lambda V_2 \otimes \Lambda sV, D) \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

donde φ es un quasi-isomorfismo con $\varphi(sv) = 0$ y $D(sv) - v_2 + v_1$ es un elemento descomponible en $\Lambda V_1 \otimes \Lambda V_2 \otimes \Lambda sV$.
Por el teorema 2.4.5 y la descripción de LX como un pullback (definición 3.1.2) su modelo minimal está dado por

$$(\Lambda V, d) \otimes_{\Lambda V_1 \otimes \Lambda V_2} (\Lambda V_1 \otimes \Lambda V_2 \otimes \Lambda sV, D)$$

La idea es construir un isomorfismo entre

$$(\Lambda V, d) \otimes_{\Lambda V_1 \otimes \Lambda V_2} (\Lambda V_1 \otimes \Lambda V_2 \otimes \Lambda sV, D) \quad \text{y} \quad (\Lambda V \otimes \Lambda sV, \delta)$$

Para este fin se dará una construcción mas detallada de $(\Lambda V_1 \otimes \Lambda V_2 \otimes \Lambda sV, D)$ en base a la construcción de la definición 2.2.2 del modelo $(\Lambda(V \oplus \overline{V} \oplus \widehat{V}), D) = (\Lambda V \otimes \Lambda \overline{V} \otimes \Lambda \widehat{V}, D)$ donde D se define como

$$D(v) = dv, \quad D(\overline{v}) = \widehat{v} \quad \text{y} \quad D(\widehat{v}) = 0$$

y $\overline{V} = sV$. Este modelo tiene una derivación s definida por

$$s(v) = \overline{v} \quad \text{y} \quad s(\overline{v}) = s(\widehat{v}) = 0\,,$$

donde $\theta = sD + Ds$ es una derivación de grado 0 y a partir de ella se define el morfismo de adg conmutativas

$$\begin{aligned} e^{\theta} : (\Lambda V, d) &\longrightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda \overline{V} \otimes \Lambda \widehat{V}, D) \\ v &\longmapsto e^{\theta}(v) = v + \widehat{v} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(sd)^n(v)}{n!} \end{aligned}$$

Considere el isomorfismo de álgebras

$$\psi : \Lambda V_1 \otimes \Lambda V_2 \otimes \Lambda sV \to \Lambda V \otimes \Lambda \overline{V} \otimes \Lambda \widehat{V}$$

definido por $\psi(v_1) = v$, $\psi(v_2) = e^{\theta}(v)$ y $\psi(sv) = \overline{v}$. Definiendo D en $\Lambda V_1 \otimes \Lambda V_2 \otimes \Lambda sV$ por la fórmula

$$D = \psi^{-1} D \psi$$

la aplicación ψ resulta un isomorfismo de adg conmutativas. Este diferencial hereda las buenas propiedades de D en $\Lambda V_1 \otimes \Lambda V_2 \otimes \Lambda sV$, es decir, $D = d$ en V_1 y en V_2 y $D(sv) - v_2 + v_1$ es un elemento descomponible.
Considere el morfismo de adg conmutativas

$$q : (\Lambda V \otimes \Lambda \overline{V} \otimes \Lambda \widehat{V}, D) \to (\Lambda V \otimes \Lambda sV, \delta)$$

por $q(v) = v$, $q(\overline{v}) = sv$ y $q(\widehat{v}) = -sd(v)$ directamente de las deficiones se puede ver que $q(sD + Ds) = 0$ y por tanto la composición

$$q \circ \psi : (\Lambda V_1 \otimes \Lambda V_2 \otimes \Lambda sV, D) \to (\Lambda V \otimes \Lambda sV, \delta)$$

queda determinada por $q \circ \psi(v_1) = v$, $q \circ \psi(v_2) = v$ y $q \circ \psi(sv) = sv$. Por lo tanto el isomorfismo deseado es

$$(\Lambda V, d) \otimes_{\Lambda V_1 \otimes \Lambda V_2} (\Lambda V_1 \otimes \Lambda V_2 \otimes \Lambda sV, D) \xrightarrow{1 \otimes (q \circ \psi)} (\Lambda V \otimes \Lambda sV, \delta)$$

$\square$

En adelante los elementos $v \in sV$ se notaran por $\overline{v}$.

Ejemplo 30 (Espacio de lazos de las esferas)**.** En el ejemplo 26 se mostró que el modelo minimal de la esfera $\mathbb{S}^n$ esta dado por

$$\begin{cases} (\Lambda(x), 0),\ dx = 0,\ |x| = n & \text{si } n \text{ es impar.} \\ (\Lambda(x,y), d),\ dx = 0,\ dy = x^2,\ |x| = n,\ |y| = 2n-1 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Entonces por el teorema 4.0.1 el modelo minimal de $L\mathbb{S}^n$ es

- Si n es impar el modelo minimal de $L\mathbb{S}^n$ está dado por

  $$(\Lambda(x) \otimes \Lambda(\overline{x}), \delta)$$

  con

  $$|x| = n\,, \quad |\overline{x}| = n-1\,,$$

  y

  $$\delta(x) = dx = 0\,,$$
  $$\delta(\overline{x}) = -sdx = 0\,.$$

  Como n es impar entonces $x^2 = 0$ y $\Lambda(\overline{x}) \cong \mathbb{Q}[\overline{x}]$ de donde se tiene el isomofismo

  $$(\Lambda(x) \otimes \Lambda(\overline{x}), 0) \cong (\mathbb{Q}[\overline{x}] \oplus x \cdot \mathbb{Q}[\overline{x}], 0)$$

  Por el teorema 2.4.1 y la definición de modelo minimal 2.3.1 se tiene que el anillo de cohomología del espacio lazos libres de $\mathbb{S}^n$ para n impar es

  $$H^*(L\mathbb{S}^n; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\overline{x}] \oplus x \cdot \mathbb{Q}[\overline{x}]$$

- Si n es par el modelo minimal de $L\mathbb{S}^n$ está dado por

  $$(\Lambda(x,y) \otimes \Lambda(\overline{x}, \overline{y}), \delta)$$

  con

  $$|x| = n\,,\ |y| = 2n-1\,,\ |\overline{x}| = n-1\,,\ |\overline{y}| = 2n-2\,,$$

  y

  $$\begin{aligned} \delta(x) &= dx = 0\,, \\ \delta(y) &= dy = x^2\,, \\ \delta(\overline{x}) &= -sdx = 0\,, \\ \delta(\overline{y}) &= -sdy = -s(x^2) = -(s(x)x + (-1)^n x s(x)) \\ &= -2x\overline{x}\,. \end{aligned}$$

  En este caso para calcular la cohomología de $L\mathbb{S}^n$ se debe calcular la cohomología del complejo $(\Lambda(x,y) \otimes \Lambda(\overline{x}, \overline{y}), \delta)$ entonces

Elemento	Diferencial	Grado
x	0	n
y	x^2	$2n-1$
$\overline{x}$	0	$n-1$
$\overline{y}$	$-2x\overline{x}$	$2n-2$
x^k	0	kn
$\overline{y}^k$	$-2kx\overline{x}\,\overline{y}^{k-1}$	$2k(n-1)$
$y\overline{x}$	$x^2\overline{x}$	$3n-2$
$x^k\overline{x}$	0	$n(k+1)-1$
x^ky	x^{k+2}	$n(2+k)-1$
$y\overline{y}^k$	$x\overline{y}^{k-1}(x\overline{y}+2ky\overline{x})$	$2(k+1)(n-1)+1$
$\overline{x}\,\overline{y}^k$	0	$(n-1)(2k+1)$
$x^i\overline{y}^k$	$-2kx^{i+1}\overline{x}\,\overline{y}^{k-1}$	$n(2k+i)-2k$
$x^ky\overline{x}$	$x^{k+2}\overline{x}$	$n(k+3)-2$
$x^i\overline{x}\,\overline{y}^k$	0	$n(2k+i+1)-2k-1$
$x^iy\overline{y}^k$	$x^{i+1}\overline{y}^{k-1}(x\overline{y}+2ky\overline{x})$	$n(2k+i+2)-2k-1$
$y\overline{x}\,\overline{y}^k$	$x^2\overline{x}\,\overline{y}^k$	$n(2k+3)-2k-2$
$x^iy\overline{x}\,\overline{y}^k$	$x^{i+2}\overline{x}\,\overline{y}^k$	$n(2k+i+3)-2k-2$

Observe que

1. $\delta(x^{k+2})=0$ pero $\delta(x^ky)=x^{k+2}$ para todo $k\geq 0$,
2. $\delta(x\overline{x})=0$ pero $\delta(-\frac{1}{2}\,\overline{y})=x\overline{x}$,
3. $\delta(x^{k+2}\overline{x})=0$ pero $\delta(x^ky\overline{x})=x^{k+2}\overline{x}$ para todo $k\geq 0$,
4. $\delta(x\overline{x}\,\overline{y}^k)=0$ pero $\delta(-\frac{1}{2(k+1)}\,\overline{y}^{k+1})=x\overline{x}\,\overline{y}^k$,
5. $\delta(x^{i+2}\overline{x}\,\overline{y}^k)=0$ pero $\delta(x^iy\overline{x}\,\overline{y}^k)=x^{i+2}\overline{x}\,\overline{y}^k$ para todo $i,k\geq 0$,
6. $\delta(x^i\overline{y}^k+2kx^{i-1}y\overline{x}\,\overline{y}^{k-1})=-2kx^{i+1}\overline{x}\,\overline{y}^{k-1}+2kx^{i+1}\overline{x}\,\overline{y}^{k-1}=0$, para todo $i,k\geq 1$ pero $\delta(x^{i-2}y\overline{y}^k)=x^i\overline{y}^k+2kx^{i-1}y\overline{x}\,\overline{y}^{k-1}$ para todo $i\geq 2$.

Entonces

$H^{\cdot}(L\mathbb{S}^n;\mathbb{Q})$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$
Generador	1	$\overline{x}$	x	$\overline{x}\,\overline{y}^k$	$x\overline{y}^k+2ky\overline{x}\,\overline{y}^{k-1}$
Grado	0	$n-1$	n	$(n-1)(2k+1)$	$(n-1)(2k+1)+1$

para todo $k\geq 1$ y es cero en los demás casos.

Ejemplo 31 (Espacio de lazos de los espacios proyectivos complejos). En el ejemplo 27 se mostró que el modelo minimal del espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^n$ esta dado por

$$(\Lambda(x,y),d),\ dx=0,\ dy=x^{n+1},\ |x|=2,\ |y|=2n+1$$

Entonces por el teorema 4.0.1 el modelo minimal de $L\mathbb{C}P^n$ es

$$(\Lambda(x,y)\otimes\Lambda(\overline{x},\overline{y}),\delta)$$

con

$$|x|=2\,,\ |y|=2n+1\,,\ |\overline{x}|=1\,,\ |\overline{y}|=2n\,,$$

y

$$\begin{aligned}
&\delta(x)=dx=0\,,\\
&\delta(y)=dy=x^{n+1}\,,\\
&\delta(\overline{x})=-sdx=0\,,\\
&\delta(\overline{y})=-sdy=-s(x^{n+1})=-(n+1)x^n\overline{x}\,.
\end{aligned}$$

Para calcular la cohomología de $L\mathbb{C}P^n$ se debe calcular la cohomología del complejo $(\Lambda(x,y)\otimes\Lambda(\overline{x},\overline{y}),\delta)$ entonces

Elemento	Diferencial	Grado
x	0	2
y	x^{n+1}	$2n+1$
$\overline{x}$	0	1
$\overline{y}$	$-(n+1)x^n\overline{x}$	$2n$
x^k	0	$2k$
$\overline{y}^k$	$-(n+1)kx^n\overline{x}\,\overline{y}^{k-1}$	$2kn$
$y\overline{x}$	$x^{n+1}\overline{x}$	$2n+2$
$x^k\overline{x}$	0	$2k+1$
x^ky	x^{k+n+1}	$2(n+k)+1$
$y\overline{y}^k$	$x^n\overline{y}^{k-1}(x\overline{y}+(n+1)ky\overline{x})$	$2n(k+1)+1$
$\overline{x}\,\overline{y}^k$	0	$2kn+1$
$x^i\overline{y}^k$	$-(n+1)kx^{n+i}\overline{x}\,\overline{y}^{k-1}$	$2(kn+i)$
$x^ky\overline{x}$	$x^{k+n+1}\overline{x}$	$2(k+n+1)$
$x^i\overline{x}\,\overline{y}^k$	0	$2(kn+i)+1$
$x^iy\overline{y}^k$	$x^{n+i}\overline{y}^{k-1}(x\overline{y}+(n+1)ky\overline{x})$	$2(n(k+1)+i)+1$
$y\overline{x}\,\overline{y}^k$	$x^{n+1}\overline{x}\,\overline{y}^k$	$2(n(k+1)+1)$
$x^iy\overline{x}\,\overline{y}^k$	$x^{i+n+1}\overline{x}\,\overline{y}^k$	$2(n(k+1)+i+1)$

Observe que

1. $\delta(x^{k+n+1})=0$ pero $\delta(x^ky)=x^{k+n+1}$ para todo $k\geq 0$,
2. $\delta(x^n\overline{x})=0$ pero $\delta(-\frac{1}{n+1}\,\overline{y})=x^n\overline{x}$,
3. $\delta(x^{k+n+1}\overline{x})=0$ pero $\delta(x^ky\overline{x})=x^{k+n+1}\overline{x}$ para todo $k\geq 0$,

4. $\delta(x^n \overline{x}\,\overline{y}^k) = 0$ pero $\delta(-\frac{1}{(n+1)(k+1)}\,\overline{y}^{k+1}) = x^n \overline{x}\,\overline{y}^k$,

5. $\delta(x^{i+n+1}\overline{x}\,\overline{y}^k) = 0$ pero $\delta(x^i y \overline{x}\,\overline{y}^k) = x^{i+n+1}\overline{x}\,\overline{y}^k$ para todo $i, k \geq 0$,

6. $\delta(x^i\overline{y}^k + (n+1)kx^{i-1}y\overline{x}\,\overline{y}^{k-1}) = -(n+1)kx^{n+i}\overline{x}\,\overline{y}^{k-1} + (n+1)kx^{n+i}\overline{x}\,\overline{y}^{k-1} = 0$, para todo $i, k \geq 1$ pero $\delta(x^{i-n-1}y\overline{y}^k) = x^i\overline{y}^k + (n+1)kx^{i-1}y\overline{x}\,\overline{y}^{k-1}$ para todo $i \geq n+1$,

Entonces

$H^{\cdot}(L\mathbb{C}P^n;\mathbb{Q})$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$
Generador	1	$\overline{x}$	x^i	$x^i\overline{y}^k + (n+1)kx^{i-1}y\overline{x}\,\overline{y}^{k-1}$	$x^j\overline{x}\,\overline{y}^k$
Grado	0	1	$2i$	$2(kn+i)$	$2(kn+j)+1$

para $0 \leq j \leq n-1$, $1 \leq i \leq n$ y para todo $k \geq 1$. Entonces

$$H^k(L\mathbb{C}P^n;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q} \qquad \forall\, k \geq 0$$

Bibliografía

[1] G.E. BREDON, *Topology and Geometry*. Grad. Texts in Math. 139, Springer, New York, 1993.

[2] H. CARTAN, S. EILENBERG, *Homological Algebra*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956.

[3] M. CHAS, D. SULLIVAN, *String Topology*. Preprint:math.GT/9911159, 1999.

[4] R. COHEN, J.D.S. JONES, *A Homotopy Theoretic Realization of String Topology*. Math. Ann. 324, no. 4, 773798, 2002.

[5] Y. FÉLIX, S. HALPERIN, J.C. THOMAS, *Rational Homotopy Theory*. Grad. Texts in Math. 205, Springer-Verlag, New York, 2001.

[6] Y. FÉLIX, J. OPREA, D. TANRÉ, *Algebraic Models in Geometry*. Oxford Graduate Texts in Mathematics 17, Oxford University Press, Oxford, 2008.

[7] Y. FÉLIX, J.C. THOMAS, M. VIGUÉ-POIRRIER, *Rational String Topology*. J. Eur. Math. Soc. (JEMS), **9**(1), 123−156, 2007.

[8] A. GONZÁLEZ, *Estructuras Casi-Frobenius*. Tesis de Doctorado, Mexico, 2010.

[9] A. HATCHER, *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[10] D. HUSEMOLLER, *Fibre Bundles*. Grad. Texts in Math. 20, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1994.

[11] W. KLINGENBERG, *Lectures on Closed Geodesics*. Die Grundlehren der Math. Wissenschaften, Band 230, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.

[12] W. KLINGENBERG, *Riemannian Geometry*. Walter de Gruyter, Berlin, 1995.

[13] E. KREYSZIG, *Introductory Functional Analysis With Applications*. John Wiley and Sons, New York, 1978.

[14] J.P. MAY, *A Concise Course in Algebraic Topology*. University of Chicago Press, Chicago, 1999.

[15] J. MILNOR, J. STASHEFF, *Characteristic Classes*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1974.

[16] J. MILNOR, *Morse Theory*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.

[17] J. MUNKRES, *Lectures Notes on Differential Topology*. Lectures by John Milnor, Princeton University, Fall term 1958.

[18] H. OSBORN, *Vector Bundles, Vol. 1, Foundations and Stiefel-Whitney Classes*. Academic Press, New York, London, 1982.

[19] R. PALAIS, *Homotopy Theory of Infinite Dimensional Manifolds*. Topology **5**, 1−16, Pergamon Press, Great Britain, 1966.

[20] D. QUILLEN, *Rational Homotopy Theory*. The Annals of Mathematics, **90**(2), 205−295, 1969.

[21] M. SPIVAK, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1*. Publish or Perish, Inc., Berkeley, 1979.

[22] N.P. STRICKLAND, *The Category of CGWH Spaces*. University of Sheffield, Sheffield.

[23] D. SULLIVAN, *Infinitesimal Computations in Topology*. Publications mathématiques de l' I.H.É.S., **47**, 269−331, 1977.

[24] L. TU, *An Introduction to Manifolds*. Springer, New York, 2008.