# Dimensiones de las pirámides egipcias

**Borut Jurčič Zlobec**[1,a], **Gustavo N. Rubiano O.**[2,b]

**Resumen.** Se revisa la repetida, generalizada y esotérica creencia que en las dimensiones de la Gran Pirámide de Egipto se encuentran cifrados dos números: $\phi$ (el número áureo) y $\pi$ (la razón entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia).

**Palabras claves:** Razón áurea, números de Fibonacci, pirámides egipcias.

**Abstract.** In this article we review the repeated argument and belief that in the dimensions of the Great Pyramid of Egypt are ciphered two numbers, $\phi$ (the golden number) and $\pi$ (the ratio between the perimeter and the diameter of a circumference), in spite of the fact of that the golden ratio in Egypt was not mentioned anywhere, and the number $\pi$ is not known as precisely as we find it in the dimensions of the pyramid (Great Pyramid) of Khufu (Cheops).

Whether that the planners of the construction of the pyramids knew these facts though not historically documented, or it is a question rather of pure coincidence? We will demonstrate that the random coincidence is much more probable than it seems at first glance.

**Keywords:** Linear fractional transformation, cubic equation, roots.

Mathematics Subject Classification: 01-00, 68Wxx.

Recibido: septiembre de 2015 Aceptado: enero de 2016

En este artículo revisamos el repetido argumento y creencia que en las dimensiones de la Gran Pirámide de Egipto se encuentran cifrados dos números, $\phi$ (el número áureo) y $\pi$ (la razón entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia), a pesar del hecho de que la razón áurea en Egipto no se menciona en ninguna parte, y el número $\pi$ no es conocido como precisamente lo encontramos cifrado en las dimensiones de la pirámide (Gran Pirámide) de Khufu (Keops).

Será entonces, que los planificadores de la construcción de las pirámides conocían estos números aunque no estuvieran históricamente documentados, o ¿se trata más bien de pura coincidencia? Demostraremos que la coincidencia

[1]Faculty of Electrical Engineering, University of Ljubljana, Ljubljana, Slovenia
[2]Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
[a]borut@fe.uni-lj.si
[b]gnrubianoo@unal.edu.co

aleatoria es mucho más probable de lo que parece a primera vista, tratando de explicar, cómo los constructores determinaron las dimensiones de esta pirámide y el porqué son como son. En particular, nos centraremos en la razón del triángulo rectángulo formado por, la mitad del lado de la base de la pirámide, la altura de la misma y la altura de su cara lateral (ver la Figura 1b). Nuestro supuesto es que las dimensiones de las pirámides se determinaron principalmente por pragmatismo, como un compromiso entre las propiedades físicas del material utilizado, las instrucciones simples para su construcción y por supuesto, de la escasez de recursos.

# 1. La razón áurea en la literatura

El ubicuo número áureo $\phi$, tiene sin duda alguna muchas e interesantes propiedades, lo cual ha llevado a que la gente lo encuentre dónde no está, o lo relacione casi que de manera esotérica con muchos objetos o construcciones.

El número áureo $\phi$ es de por sí, lo suficientemente interesante para gozar de toda nuestra atención. Es un número irracional y en cierta medida el más irracional de todos los irracionales [4]. Este número resulta ser crucial y es frecuente que lo encontremos en la naturaleza; por ejemplo, lo encontramos cuando queremos encontrar la distribución óptima que deben tener las hojas alrededor de los tallos en las plantas (phyllotaxis) y en la distribución de las semillas en la inflorescencia del girasol [7]. Menos convincentes son las conexiones del número áureo con las estructuras helicoidales en la naturaleza, como la estructura en forma de espiral en la concha del nautilus, o en la estructura espiral de las galaxias.

La característica estructural más importante de la concha del nautilus es su autosimilaridad. Como lo expresó Jacob Bernoulli (1655–1705) *Eadem mutata resurgo* (está creciendo, pero continúa siendo la misma). Esta ocurrencia de la autosimilaridad es frecuente en la naturaleza y es probable que exista debido a la economía en el código genético. Sin embargo, las espirales autosimilares pertenecen a la clase de las espirales logarítmicas, donde la espiral áurea (asociada a la construcción de la razón áurea) es tan solo un caso especial. Por otra parte, la formación de galaxias con forma de espiral está subordinada a leyes diferentes y, en general, no son ni siquiera logarítmicas. Lo más complicado es encontrar a $\phi$ en la música, la arquitectura, la pintura, el arte y la filosofía en general.

La gente ha solido atar una fuerte carga semántica a $\phi$, lo que a menudo conduce a la exageración y la interpretación errónea. Siempre ha sido un objeto de mistificación, tanto en los tiempos antiguos (con los filósofos griegos), como en la Edad Media y también en la actualidad.

Veamos una de las descripciones contemporáneas de la proporción áurea.

*La proporción áurea es una puerta de entrada al entendimiento de la vida. Esta proporción se llama áurea o divina, y representa una puerta de entrada para una comprensión más profunda de la belleza, la maravilla y la espirituali-*

*dad de la vida. Es casi increíble, que un único número tenga tanta influencia en la naturaleza, la historia humana, la ciencia, el arte y el universo en general.*

George Markowsky, Profesor de Ciencias de la Computación en la Universidad de Maine (EE. UU.), ha revisado algunos de los argumentos mejor conocidos que se han escrito sobre la razón áurea, en textos escolares, artículos, etc. y se ha sorprendido de la poca verdad que existe en todas estas afirmaciones. En respuesta a esta experiencia escribió el artículo *Misconceptions about the Golden Ratio* [5].

## 2. Proporción áurea, rectángulo áureo y triángulo de Kepler

Esta sección está dedicada a introducir y entender los conceptos de proporción áurea, rectángulo áureo y triángulo de Kepler.

**Definición 2.1** (Proporción áurea)**.** Tome un segmento de línea recta y divídalo en dos partes con longitudes distintas, de suerte que la razón entre la parte mayor y la parte menor sea igual a la razón entre el segmento inicial y la parte mayor. Esta razón o proporción es llamada la *razón áurea*.

La razón áurea se nota $\phi$, en honor a Fidias (500 a. C.–432 a. C.), el gran matemático y filósofo griego quien fue el primero en definirla. Si asumimos que la longitud del segmento inicial es $\phi$ y la longitud de la parte mayor es 1, podemos expresar la definición anterior por medio de la fórmula

$$\frac{1}{\phi - 1} = \frac{\phi}{1}, \quad \text{la cual conduce a la ecuación:} \quad \phi^2 - \phi - 1 = 0 \tag{1}$$

cuya única solución positiva es

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398874989\ldots \tag{2}$$

La proporcionalidad o *relación de aspecto* para un rectángulo, es la razón en su forma (como en un monitor), es decir, es la relación entre el largo y el alto. Cuando construimos un rectángulo que tiene como aspecto la razón áurea tenemos la siguiente propiedad: si removemos un cuadrado que tenga como lado, al lado corto del rectángulo, entonces el aspecto del rectángulo restante es de nuevo la razón áurea.

El rectángulo de la construcción anterior se llama *rectángulo áureo o dorado*. La Figura 1a muestra el proceso para su construcción.

1. Primero dibuje un cuadrado y a continuación tome el punto medio de su lado superior.

2. Seleccione uno de los vértices en el lado opuesto, y dibuje un arco de circunferencia que tenga como centro el punto medio del lado inicial, y como radio la distancia del punto medio al vértice seleccionado.

3. La intersección de la circunferencia con la prolongación del lado bisectado es ahora uno de los vértices del rectángulo áureo.

4. El resto de la construcción se sigue de la Figura 1a.

Mostremos que en realidad hemos construido un rectángulo áureo. Si asumimos que la longitud del lado del cuadrado inicial es 1, de acuerdo al teorema de Pitágoras el radio de la circunferencia es $\sqrt{1+1/4} = \sqrt{5}/2$. Por tanto, la longitud del lado mayor del rectángulo es $(1+\sqrt{5})/2 = \phi$, el cual es la razón áurea.

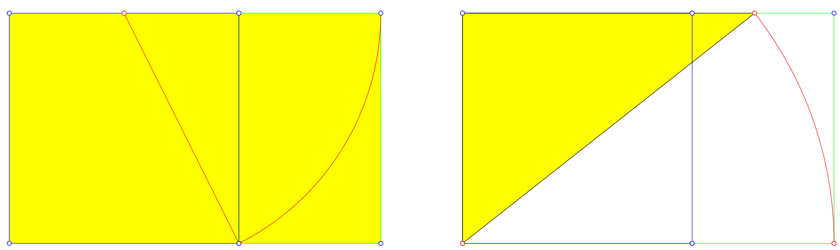


Figura 1: Rectángulo áureo (a) Triángulo de Kepler (b).

Existe otra figura en la geometría que está relacionada de manera muy estrecha a la razón áurea, el triángulo de Kepler, el cual es un caso particular de triángulo rectángulo.

En su libro *Mysterium Cosmographicum* (Misterio Cósmico) Johannes Kepler (1571–1630) se refiere a la razón áurea en estos términos:

*La geometría tiene dos grandes tesoros; uno es el teorema de Pitágoras; el otro, la división de una línea en relación extrema y media. El primero lo podemos comparar a una medida de oro, y con el segundo podemos nombrar a una joya preciosa.*

El triángulo de Kepler es entonces, una manera de relacionar estos dos conceptos. Es un triángulo cuyos lados están en la progresión geométrica

$$1 : \sqrt{\phi} : \phi.$$

La Figura 1b muestra la construcción del triángulo de Kepler.

1. Dibujamos un rectángulo áureo y escogemos uno de sus vértices.

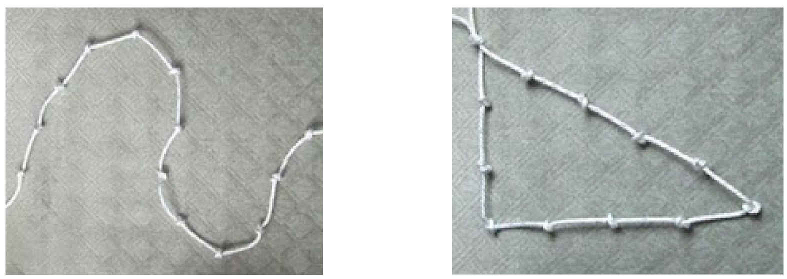
2. Dibujamos entonces una circunferencia centrada en el vértice seleccionado y con radio igual al lado mayor del rectángulo.

3. El resto es evidente de la Figura 1b.

Mostremos que la Figura 1b es el triángulo de Kepler. Asumimos que la longitud del lado mayor del rectángulo es $\phi$ y la longitud del más corto es 1. Denotemos por $x$ la longitud del cateto desconocido. Por el teorema de Pitágoras tenemos $\phi^2 - 1 = x^2$. De la ecuación (1) se sigue que $x^2 = \phi$, es decir $x = \sqrt{\phi}$.

Existe, sin embargo, otra figura geométrica que juega un papel importante en la historia Egipcia. Es el triángulo rectángulo que tiene sus lados en progresión aritmética y como única solución al triángulo con lados de razón igual a $3 : 4 : 5$, la cual es la tripla Pitagórica más pequeña $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$ (una tripla Pitagórica es una tripla de números naturales $a, b, c \in \mathbb{N}$, tales que $a^2 + b^2 = c^2$).

Las triplas pitagóricas fueron usadas para determinar los ángulos rectos en la construcción de las pirámides (ver Figura 2).



(a) $3 + 4 + 5 = 12$ (b) $3 : 4 : 5$

Figura 2: Construcción de un ángulo recto [3].

# 3. La razón áurea inmersa en las dimensiones de la pirámide de Keops (o Khufu)

El siguiente es uno de los mitos más comunes en cuanto a las dimensiones de las pirámides de Egipto y atribuido al historiador griego Heródoto (484 a. C.–425 a. C.).

La historia cuenta que en una ocasión, el Sacerdote egipcio confió a Heródoto el secreto de la pirámide Keops de Giza.

Sacerdote: *Las dimensiones de la Gran Pirámide fueron elegidas de tal manera que, el área del cuadrado que tiene como lado la altura de la pirámide es igual al área de una de sus caras triangulares ([2, p. 62].)*

Todas las pirámides egipcias son pirámides rectas, y en su mayoría con base cuadrada como en el caso de la Gran Pirámide (ver la Figura 1b). Denotemos con $h$ la altura de la pirámide, con $b$ el lado de la base cuadrada, y con $s$ la altura de la cara lateral.

Con un simple cálculo algebraico obtenemos,

$$h^2 = \frac{b\,s}{2}, \quad s^2 = h^2 + \frac{b^2}{4}. \tag{3}$$

Dividiendo en (3) por $b^2/4$ obtenemos

$$\left(\frac{2h}{b}\right)^4 = \left(\frac{2h}{b}\right)^2 + 1, \quad r = \left(\frac{2h}{b}\right)^2 \quad \text{y finalmente} \quad r^2 - r - 1 = 0. \tag{4}$$

La única solución positiva de la ecuación anterior es $r = \phi = (1+\sqrt{5})/2$. Lo que implica $2h/b = \sqrt{\phi}$.

El triángulo $(b/2, h, s)$ es un triángulo de Kepler y la razón entre sus lados es $1 : \sqrt{\phi} : \phi$.

De hecho, en el libro *Historia* de Heródoto, existe un único párrafo que habla acerca de la Gran Pirámide (ver el artículo de George Markowski [5]) que dice:

Heródoto: *La Pirámide en sí demoró veinte años en su construcción. Es cuadrada donde cada lado mide ochocientos pies, lo mismo que la altura. Su superficie está hecha de piedra pulida unida con muchísimo cuidado. Cada una de las piedras con que está compuesta no tiene menos de treinta pies de longitud.*

Heródoto escribió estas líneas en el año 440 a. C., dos mil años después que la pirámide había sido construida, siguiendo seguramente la tradición oral o sus propias especulaciones. Las dimensiones mencionadas no corresponden al estado actual de la misma. Con algo de imaginación podemos encontrar cómo es que distorsionando de manera intencional el significado de las palabras en el párrafo anterior de Heródoto, se puede concluir que el área del cuadrado que tiene como lado a la altura de la pirámide, coincide con el área de sus caras triangulares. Aquí tenemos todas las palabras claves que son necesarias: la altura y el área (superficie), mientras que el resto es dejado a la imaginación y al deseo de encontrar la razón áurea.

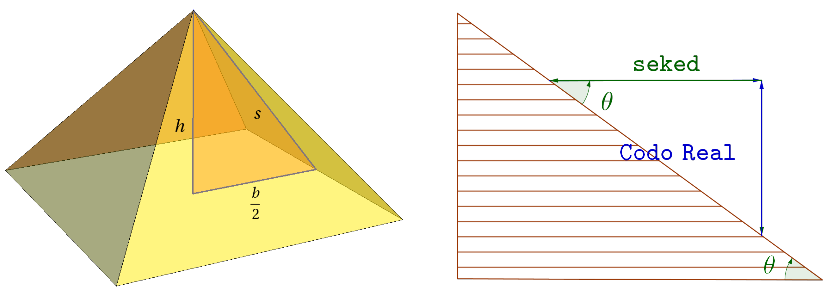
En la gran Pirámide la razón entre la altura y la mitad del lado de la base es $14/11$, el cual es muy cercano a $\sqrt{\phi}$, y sugiere que en las dimensiones de la Pirámide está cifrada la razón áurea. Por otro lado, el valor $4/\sqrt{\phi}$ es muy cercano a $\pi$ y por ello algunas personas argumentan que la Gran Pirámide tiene también codificado al número $\pi$ o a su valor aproximado $22/7$, el cual era la aproximación más cercana a $\pi$ en ese entonces del antiguo Egipto. Durante casi mil años, los documentos en el nuevo Egipto utilizaban aún el valor $256/81$ como una aproximación a $\pi$.

## 4. La medición de ángulos y longitudes en el antiguo Egipto

La razón entre las dimensiones de las pirámides egipcias es mejor entendida si miramos las unidades utilizadas en la medición de las longitudes y los ángulos. La base para medir la longitud era el `codo real` que tenía un papel como el de nuestros pies o metros. El `codo real` tenía 28 `pulgadas`. La longitud de una `pulgada` no ha sido determinada de manera exacta. En el tiempo ha variado de 18.70 mm. a 18.88 mm., así que la longitud de un `codo real` ha variado entre 52.36 cm. y 52.64 cm. Además del `codo real` también era usado el `codo corto`, que tenía 24 `pulgadas`.

Los ángulos se median en grados. Sin embargo, en la construcción y en la topografía los ángulos eran expresados en `sekeds`. El `seked` era una unidad de medida usada por los egipcios para medir superficies inclinadas (la pendiente).

Un `seked` era igual a la longitud, medida en `pulgadas`, del cateto adyacente al ángulo en el triángulo rectángulo, cuya longitud del cateto opuesto es un `codo real` (ver la Figura 3b).




(a) Triángulo central de pirámide (b) `Seked`

Figura 3: Triángulo central de pirámide y seked.

Al escribir este artículo, no hemos tenido ni hemos podido contar, con la misma precisión para las dimensiones de todas las pirámides. Tanto en la literatura como en la internet, las dimensiones de las pirámides no siempre concuerdan, pues existen en las fuentes diferencias de hasta 50 cm. Cuando convertimos las dimensiones expresadas en pies o metros a `codos`, mantenemos el principio que las longitudes de los lados básicos de las pirámides expresadas en `codos` son redondeados, y la razón entre la altura y la base de las pirámides es expresada en términos de enteros pequeños. A estos datos los llamamos 'datos idealizados', lo cual tiene sentido, ya que en este caso las instrucciones que se dan para la construcción de las pirámides son más simples. Cuando las dimensiones que hemos obtenido para las pirámides, no concuerdan, hemos escogido aquellas que se expresan en `codos` con valores redondeados.

# 5. Las dimensiones de las pirámides de Egipto

Al considerar las dimensiones de las pirámides de Egipto, nos enfocamos principalmente en la razón entre los lados del triángulo que tiene como lados: la mitad del lado de la base de la pirámide, la altura de la pirámide y la altura de su cara (triángulo) lateral. Como este triángulo lo mencionamos de manera reiterada, lo llamamos *triángulo central recto de la pirámide* (ver la Figura 3a).

Creemos que los constructores, desde un punto de vista tanto estético como geométrico, estaban también interesados en que las pirámides tuvieran otras simetrías adicionales. En general, solo construyeron pirámides rectas, en su mayoría de base cuadrada. La única excepción es la pirámide no. 3 de la Tabla 1 la cual tiene una base rectangular y llamada pirámide de Micerino (nombre helenizado) o de Menkaura (según su nombre egipcio).

Entre las pirámides que tienen simetría adicional, se destacan las que tienen triángulo central recto, con lados en razón de $3 : 4 : 5$ (*tripla Pitagórica*). En la Tabla 1 están marcadas con el símbolo ♣ y son las pirámides más numerosas, hay 8 de estas y tienen un ángulo de inclinación para sus caras laterales de $53.13°$. Luego están las pirámides cuyas caras laterales son cercanas a ser *triángulos equiláteros* con un ángulo de inclinación para sus caras laterales de $54.74°$ y tienen un número irracional como razón entre la altura y el lado de la base. En la Tabla 1 aparecen 4 pirámides marcadas con el símbolo ▲ que son cercanas a esto, con un ángulo de inclinación de 54.46. A continuación siguen tres pirámides con razón $2 : 3$ entre los catetos del *triángulo central recto* y a las cuales les corresponde un ángulo de inclinación de $56.31°$ y se encuentran marcadas con el símbolo $\triangle$.

(a) Pirámide doblada en Dahshur.

(b) Pirámide Roja en Dahshur.

(c) Pirámide de Khufu en Giza.

(d) Pirámide de Khafre Giza.

Figura 4: Pirámides [1].

En la Tabla 1 no aparecen (no existen) las pirámides cuya sección transversal axial sería un triángulo equilátero, las cuales tendrían un ángulo de inclinación para sus caras laterales de 60°.

Las pirámides que más llaman la atencián son las pirámides no. 1 y 4 ya que la razón entre los lados del *triángulo central recto* en estas pirámides es cercano a un triángulo de Kepler. De manera condicional pertenece a este grupo la pirámide no. 3, ya que aunque no posee una base cuadrada, dos de los ángulos de inclinación de las caras laterales son aproximadamente 51.84°, y estos caracterizan a los otros dos. Están identificadas en la Tabla 1 con el símbolo ♠.

En un principio se construyeron las pirámides escalonadas, y posteriormente entre las dinastias III y IV comenzaron a ser construidas las pirámides con caras laterales lisas.

La pirámide de Seneferu representa una forma de transición entre las dos clases anteriores (ver Figuras 4a y 5) y se cree que al comienzo la estructura estaba concebida para tener una cara lateral con pendiente cercana a 60°, más exacto 58.60° pero esta fue reducida ampliando la base da la pirámide de longitud del lado de base de 300 `codos` a 360 `codos`, obteniendo así una inclinación de 54.83° para sus caras laterales. Éste último ángulo es cercano al ángulo que tiene una pirámide con caras equiláteras.

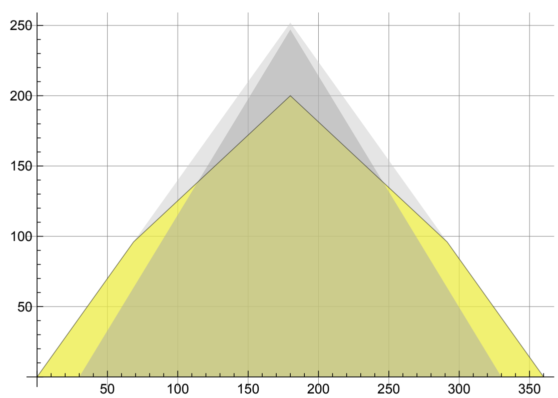



Figura 5: Pirámide doblada.

Finalmente, cuando la altura era aproximadamente de 100 `codos`, la pendiente fue reducida a 43.37°. Este ángulo se repetirá nuevamente en la pirámide Roja, la cual también fue construida durante el reinado del Faraón Seneferu (ver la Figura 4b).

La pirámide que tiene la menor inclinación para sus caras laterales es la pirámide no. 19 de la Tabla 1, con una pendiente de 42°; mientras que, las de mayor pendiente con 56.31° son las no. 8, 20 y 21 pertenecientes al grupo de pirámides con altura baja y semi–baja. A mayor altura en las pirámides debería haber una inclinación menor de sus caras laterales, con el fin de garantizar su estabilidad estructural. Pero tampoco deberían ser demasiado planas, tanto por la apariencia, pues las pirámides con pendiente grande tienen un mayor impacto visual, como por la cantidad de material necesario para su construcción.

Los ángulos de inclinación de las pirámides están en el rango de $42°$ a $56°$, los cuales se encuentran en la pirámide 'doblada', también llamada Pirámide Romboidal o Pirámide sur de Dahshur (Figura 4b). Existen dos teorías principales concernientes con el cambio de la pendiente para la pirámide doblada, ver [6].

Hay un criterio adicional que afecta la elección de las dimensiones, y es además muy práctico. Es este: ¿cómo hacer que las instrucciones para la construcción sean lo más simple posibles? Veamos como las unidades egipcias para la medición de la longitud y los ángulos afectan la determinación de las dimensiones.

# 6. Ángulos de inclinación de las pirámides egipcias

Las dimensiones de la Gran Pirámide son extremadamente precisas. Los lados de la base difieren sólo en algunos centímetros, al igual que los ángulos entre los lados de la base difieren en menos de $2'$. El `seked` (el cateto) del ángulo de inclinación de la Gran pirámide es 22 `pulgadas` y la desviación es menor a $1'$. También, la pirámide Khafre de Giza (la segunda en mayor tamaño) tiene dimensiones muy exactas. El `seked` (el cateto) del ángulo de inclinación de ésta pirámide es 22 `pulgadas` y la desviación es menor a $1'$.

En la Tabla 1 están escritas las dimensiones de las 24 pirámides de Egipto. La séptima columna de esta tabla describe la razón entre la mitad del lado de la base y la altura de la pirámide para un caso idealizado. Si el denominador es 28, entonces el numerador revela (corresponde) al `seked`. La octava columna muestra las diferencias entre el ángulo obtenido al idealizar los datos, y el ángulo que corresponde a los datos reales de la cuarta y quinta columna.

En la Tabla 1, se encuentran dieciséis pirámides que tienen la inclinación de sus caras laterales expresada con un `seked` entero (como número) de `pulgadas`, y cinco pirámides donde se expresa la razón entre los catetos del *triángulo central recto* como $x : 10$ o $10 : y$ y están marcadas en la tabla con el símbolo $\square$. La excepción son las pirámides con razón de $2 : 3$ entre los catetos marcadas con el símbolo $\triangle$, y la pirámide no. 2 con razón $21 : 21$ marcada con el símbolo $\diamondsuit$. La pirámide 18 tiene un `seked` con un número entero de `pulgadas` que no pertenece a ningún grupo de los mencionados anteriormente, y por tanto, la hemos marcado con el símbolo $\heartsuit$.

*Si escribimos la razón* $2 : 3$, *que tienen las tres pirámides como* $10 : 15$, *queda tan solo una pirámide, la pirámide no. 2, cuya razón entre los catetos del triángulo central recto no se expresa mediante* $x : 10$ *o* $10 : y$*; ni siquiera se expresa la inclinación de sus caras laterales con un* `seked` *entero.*

| Pirámide | | | dimensiones | | | $\frac{b}{2}:h$, error | | ** | ángulo |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| no. | Faraón | sitio | $b[m]$ | $h[m]$ | $b'$ | $s:q$ | $\epsilon[']$ | | $\phi[°]$ |
| 1 | Snefru | Maidum | 147,0 | 93,5 | 280 | 22:28 | 0,8 | ♠ | 51,84 |
| 2 | Snefru* | Dahshur | 220,0 | 105,0 | 420 | 21:20 | 3,9 | ♢ | 43,60 |
| 3 | Menkaure | Giza | 103,0 | 65,6 | 195 | 22:28 | 1,4 | ♠ | 51,84 |
| 3 | Menkaure⋆ | Giza | 105,0 | 65,6 | 200 | 8:10 | 0,6 | □ | 51,34 |
| 4 | Khufu (Cheops) | Giza | 230,3 | 146,6 | 440 | 22:28 | 0,5 | ♠ | 51,84 |
| 5 | Khafre | Giza | 215,2 | 143,5 | 410 | 21:28 | 0,4 | ♣ | 53,13 |
| 6 | Sahure | Abusir | 78,7 | 47,2 | 150 | 10:12 | 0,7 | □ | 50,19 |
| 7 | Userkaf | Sakkara | 73,5 | 52,5 | 140 | 7:10 | 0,0 | □ | 55,01 |
| 8 | Unas | Sakkara | 57,7 | 43,3 | 110 | 2:3 | 0,9 | △ | 56,31 |
| 9 | Neferirkare | Abusir | 105,0 | 73,5 | 200 | 20:28 | 0,0 | ▲ | 54,46 |
| 10 | Niuserre | Abusir | 78,7 | 52,5 | 150 | 21:28 | 1,0 | ♣ | 53,13 |
| 11 | Djedkare Isesi | Sakkara | 78,7 | 52,5 | 150 | 21:28 | 1,0 | ♣ | 53,13 |
| 12 | Teti | Sakkara | 78,7 | 52,5 | 150 | 21:28 | 1,0 | ♣ | 53,13 |
| 13 | Pepi-I | Sakkara | 78,7 | 52,5 | 150 | 21:28 | 1,0 | ♣ | 53,13 |
| 14 | Merenre | Sakkara | 78,7 | 52,5 | 150 | 21:28 | 1,0 | ♣ | 53,13 |
| 15 | Pepi-II | Sakkara | 78,7 | 52,5 | 150 | 21:28 | 1,0 | ♣ | 53,13 |
| 16 | Qakare Ibi | Sakkara | 31,5 | 21,0 | 60 | 21:28 | 0,0 | ♣ | 53,13 |
| 17 | Amenemhat-I | El-Lisht | 84,0 | 58,8 | 160 | 20:28 | 0,0 | ▲ | 54,46 |
| 18 | Senusret-I | El-Lisht | 105,0 | 61,2 | 200 | 24:28 | 1,4 | ♡ | 49,40 |
| 19 | Senusret-II | El-Lahun | 105,0 | 47,2 | 200 | 10:9 | 1,8 | □ | 41,99 |
| 20 | Senosret-III | Dahshur | 105,0 | 78,7 | 200 | 2:3 | 1,0 | △ | 56,31 |
| 21 | Amenemhat-III | Dahshur | 105,0 | 78,7 | 200 | 2:3 | 1,0 | △ | 56,31 |
| 22 | Amenemhat-III | Hawara | 105,9 | 57,7 | 200 | 10:11 | 1,5 | □ | 47,73 |
| 23 | Ameny Qemau | Sakkara | 52,5 | 36,7 | 100 | 20:28 | 0,0 | ▲ | 54,46 |
| 24 | Khendjer | Sakkara | 52,5 | 36,7 | 100 | 20:28 | 0,0 | ▲ | 54,46 |

** El significado de los símbolos está explicado en las páginas 5 y 6.
* Pirámide Roja, véase la Figura 4b.
$b'$ Longitud del lado de base, expresado en codos reales.
⋆ La pirámide no. 3 no tiene base cuadrada.

Tabla 1: Dimensiones de las pirámides de Egipto.

## 7. ¿Por qué el `seked` de la Gran pirámide de Keops es de 22 `pulgadas`?

Con un `seked` de 22 `pulgadas`, la razón del triángulo recto central es cercano a la razón del triángulo de Kepler. Como la razón áurea nunca se mencionó en la historia del antiguo Egipto, no debemos caer en la trampa de argumentar que el triángulo de Kepler se eligió deliberadamente. Un `seked` de 21 `pulgadas` sería comprensible ya que está dentro de los límites para construir una pirámide de forma segura y, además, la razón en el triángulo central recto es $3:4:5$ (tripla Pitagórica).

El Teorema de Pitágoras era conocido en el antiguo Egipto, pero en ese tiempo no tenía ese nombre ya que se debía esperar más de 1500 años, ha que

Pitágoras naciera. Los `seked` con números enteros para la pendiente del ángulo de las pirámides, que están en la tabla, son de 20, 21, 22 y 24 `pulgadas`.

Por todo lo que hemos mencionado, concluimos que en la construcción de las grandes pirámides únicamente cuentan las pirámides que tienen `sekeds` de 21 o 22 `pulgadas`. Con `sekeds` más pequeños se tiene mas riesgo, y con `sekeds` más grandes demasiado desperdicio en términos del material para su construcción. Con una misma altura, el volumen de una pirámide con `seked` 22 es aproximadamente 10 % más grande que una con `seked` 21. Vemos entonces que no hay muchas posibilidades para elegir. Antes del inicio de la construcción de la pirámide de Keops, no se había logrado construir con éxito una pirámide más grande con `seked` menor de 22 `pulgadas`, así que, quienes planearon la construcción de la pirámide de Keops, sabiendo que se ocupaban de la mayor pirámide nunca antes construida, decidieron no arriesgarse, y en lugar de un `seked` de 21 `pulgadas` (la tripla Pitagórica), escogieron un `seked` de 22 `pulgadas`.

Después del éxito en la construcción de la pirámide de Keops, decidieron arriesgarse para la construcción de la Pirámide de Jafra, o Kefrén en griego, con un `seked` de 21 `pulgadas`.

## 8. Conclusión

Queremos hacer hincapié en que al planificar la construcción de las pirámides las dimensiones seleccionadas corresponden en su mayoría a un `seked` entero. Aún, en las pirámides cuyo `seked` no es un número entero, la razón entre la altura y el lado de la base es expresada como el cociente de números enteros no muy grandes, ya que teniendo como datos a números enteros, era más fácil describir las guías y planos de construcción para los trabajadores. Además, las opciones para elegir un `seked` que fuera un número entero que estuviera dentro de los límites de la prudencia y la cantidad de materiales, era algo muy limitado.

Por ello, podemos afirmar que la elección de un `seked` de 22 `pulgadas` no fue por tener la razón áurea escondida en el triángulo de Kepler, sino más bien, por '*la Áurea mediocritas*' o '*Dorada moderación*' del compromiso entre la seguridad y la economía. De hecho, para los constructores era más atractivo un `seked` de 21 `pulgadas`, que ocultar una terna pitagórica, que era sin duda familiar a ellos.

## Referencias

[1] http://www.bradshawfoundation.com/pyramids_of_egypt/, [Online; accessed 1-January-2016].

[2] David M. Burton, *The History of Mathematic: An Introduction*, Allyn and Bacon, Boston, 1985.

[3] Off The Hypotenuse, *Pythagorean theorem and egyptian knotted ropes*, http://offthehypotenuse.blogspot.com/2010/02/7th-grade-pythagorean-theorem-and.html, [Online; accessed 5-August-2015].

[4] Mario Livio, *The Golden Ratio, The Story of PHI, the World's Most Astonishing Number*, Brodway books, New York, 2002.

[5] George Markowky, *Misconceptions about the Golden Ratio*, The College Mathematics Journal **23** (1992), no. 1, 2–19.

[6] Ancient Egypt Online, *Bent pyramid of dashur*, http://www.ancientegyptonline.co.uk/bent-pyramid-dashur.html, [Online; accessed 1-January-2016].

[7] Gustavo Rubiano, *Iteración y fractales [con* Mathematica*]*, 'Obra selecta', UN Editorial, Univ. Nacional. de Colombia. Bogotá, Colombia, 2009, ISBN 958-719-208-7.