Boletín de Matemáticas
Nueva Serie Vol.I No.1 (1994) (1-8)

SOBRE EL TEOREMA INTEGRAL DE CAUCHY

JAIRO A. CHARRIS Y GUILLERMO RODRÍGUEZ-BLANCO
Universidad Nacional de Colombia

ABSTRACT. A proof is given of the Cauchy integral theorem for closed 1-forms which is more analytical in character than the usual proof of E. Artin.

En lo que sigue, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ denotarán, respectivamente, los sistemas de los números enteros, reales y complejos. Si $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$ será el disco abierto de centro a y radio r y $\overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq r\}$ será el correspondiente disco cerrado.

1. INTRODUCCION

L. V. Ahlfors [1], p. 144, establece que

Teorema 1.1. *Si ω es una 1-forma cerrada de clase C^1 en un abierto conexo Ω de $\mathbb{C}$, y si α es una trayectoria (curva rectificable) cerrada y nul-homóloga de Ω, entonces*

$$\int_\alpha \omega = 0 . \tag{1.1}$$

Que ω es una 1-forma de clase C^1 significa que

$$\omega = f dx + g dy \tag{1.2}$$

donde f, g son aplicaciones de Ω en $\mathbb{C}$ de clase C^1, y que ω es cerrada, que

$$d\omega := \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy \tag{1.3}$$

1990 AMS Subject Classification. 30A99.
Palabras Clave. Derivadas complejas, funciones de clase C^p, funciones analíticas, 1-formas, diferencial de una forma, curvas homólogas, índice de una curva, operadores de Cauchy-Riemann, versión homológica del teorema de Cauchy.

se anula en Ω. Esto último es equivalente a que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(z) = \frac{\partial f}{\partial y}(z), \quad z \in \Omega\,. \tag{1.4}$$

Que α es nul-homóloga en Ω significa que

$$Ind_\alpha(a) := \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{dz}{z-a} \tag{1.5}$$

se anula en todo punto $a \notin \Omega$. Como es bien sabido ([11], p. 219), si α es una trayectoria cerrada de $\mathbb{C}$ y $\tilde{\alpha}$ *es el camino descrito por* α (si [0,1] es el intervalo de parámetros de α, $\tilde{\alpha} = \alpha([0,1])$), Ind_α *es una aplicación continua de* $\mathbb{C}(\alpha) = \mathbb{C} \setminus \tilde{\alpha}$ *en* $\mathbb{Z}$, *y, por lo tanto, constante sobre toda componente conexa de* $\mathbb{C}(\alpha)$. Además

$$\lim_{a\to\infty} Ind_\alpha(a) = 0 \tag{1.6}$$

como es evidente de (1.5), y los conjuntos

$$\mathbb{I}(\alpha) := \{a \in \mathbb{C}(\alpha) \mid Ind_\alpha(a) \neq 0\} \text{ y } \mathbb{E}(\alpha) := \{a \in \mathbb{C}(\alpha) \mid Ind_\alpha(a) = 0\}, \tag{1.7}$$

denominados respectivamente el *interior* y el *exterior* de α, son cerrados en $\mathbb{C}(\alpha)$ y abiertos en $\mathbb{C}$. Como además (1.6) implica que $\mathbb{I}(\alpha) \subseteq D(0,R)$ si $\tilde{\alpha} \subseteq D(0,R)$, $\overline{\mathbb{I}}(\alpha) = \mathbb{I}(\alpha) \cup \tilde{\alpha} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{E}(\alpha)$ es, de hecho, compacto. Decir que α es nul-homóloga en Ω significa entonces que $\mathbb{C} - \Omega \subseteq \mathbb{E}(\alpha)$ o, lo que es lo mismo, que $\overline{\mathbb{I}}(\alpha) \subseteq \Omega$.

El Teorema 1.1. generaliza el denominado *Teorema Global de Cauchy* del análisis complejo elemental, según el cual (1.1) *es válida si* $\omega = f\,dz = f\,dx + if\,dy$, *donde* f *es derivable en* Ω *en el sentido complejo ([11], p.213) y* α *es nul-homóloga en* Ω.

Para establecer el Teorema 1.1, Ahlfors adapta una demostración de E. Artin[2] (v. también [7], p. 137) del teorema de Cauchy (la primera demostración realmente completa de tal teorema). La demostración de Artin recurre, sin embargo, a propiedades topológicas y geométricas del plano, las cuales, aunque elementales, son engorrosas. (En el caso de Cauchy debe recurrir también a la llamada *Teoría Local de Cauchy*, según la cual, si $\omega = f\,dz$ con f derivable, ω es de clase C^1 en Ω). Recientemente, como lo anota Ahlfors ([1], p.142), A. F. Beardon ha observado que el teorema de Cauchy es consecuencia de la teoría local de Cauchy y del siguiente hecho: *Si* K *es un subconjunto compacto de un abierto conexo* Ω *de* $\mathbb{C}$, *existe una trayectoria cerrada* γ *de* $\Omega \setminus K$ *tal que*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi \tag{1.8}$$

para toda función derivable f *en* Ω *y todo punto* $z \in K$. En efecto, si α es nul-homóloga en Ω, tomando $K = \overline{\mathbb{I}}(\alpha)$ y γ en $\Omega \setminus K$ de tal manera que (1.8) se verifique, se tiene necesariamente que

$$\int_\alpha f(z)\,dz = \int_\gamma \left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{dz}{\xi - z}\right\} f(\xi)\,d\xi = 0 \tag{1.9}$$

para toda función derivable de f en Ω, pues, como $\tilde{\gamma} \cap \mathbb{I}(\alpha) = \emptyset$,

$$Ind_\alpha(\xi) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{dz}{z-\xi} = 0, \quad \xi \in \tilde{\gamma}.$$

Ahora, la demostración de (1.8) ([1], p.143; [11], p.287), aunque de caracter geométrico, es más simple que la demostración de Artin. Tanto que Ahlfors en [1] usa (1.8) para demostrar el teorema de Cauchy, y sugiere la conveniencia de una demostración del Teorema 1.1, más analítica en su forma.

Anotamos que (1.8), una forma especial de la denominada *Fórmula de Cauchy*, es útil en muchas otras circunstancias. Por ejemplo, la demostración del llamado *Teorema de Aproximación de Runge* (el cual implica, a su vez, el teorema de Cauchy) puede basarse en ella ([11], p. 288). Curiosamente, W. Rudin [10], p.254, demuestra (1.8) y la usa para este último propósito (p. 256), y luego demuestra el teorema de Cauchy, (p. 259) mediante el teorema de Runge (según ideas de Saks y Zygmund [12]) en lugar de hacerlo directamente a partir de (1.8). Más aún, Rudin [11], p. 287, también demuestra (1.8), pero establece el teorema de Cauchy (p. 235) mediante una demostración reciente de J. Dixon [4] (v. también [7], p. 162), la cual, de caracter esencialmente analítico (solo recurre a la teoría local de Cauchy, es decir, al comportamiento en discos abiertos del plano de las funciones derivables), reduce a un mínimo todo argumento de tipo geométrico.

El objeto de este trabajo es establecer el Teorema 1.1 por reducción al teorema de Cauchy. Esto responde en cierta forma a la inquietud planteada por Ahlfors [1], p. 144. Recurriendo a la demostración de Dixon del teorema de Cauchy, podemos afirmar que nuestra demostración, la cual daremos en la Sección 2, es esencialmente analítica. De hecho, no usa argumentos geométricos más allá de los utilizados en la teoría local de Cauchy ([1], pp. 103-130), necesaria para la demostración de Dixon. Recurre, sin embargo, a dos resultados analíticos (Lemas 1.1 y 1.2 abajo) que, aunque no del todo triviales, y rara vez presentes en los textos elementales, son de gran utilidad en muchas partes del análisis moderno.

Lema 1.1 *([6], p. 4). Si K es un subconjunto compacto de un abierto Ω de $\mathbb{C}$, existe una función ψ, de clase C^∞ y con soporte compacto contenido en Ω, tal que $\psi = 1$ en una vecindad abierta de K.*

La demostración de este resultado es una serie de verificaciones sencillas. En efecto, si

$$\varphi(z) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|z|^4-1}}, & |z| < 1 \\ 0, & |z| \geq 1, \end{cases} \tag{1.10}$$

es fácil verificar que φ es de clase C^∞ con soporte $\overline{D}(0,1)$; y si

$$\varphi_\epsilon(z) = \frac{1}{\epsilon^2 C}\varphi\left(\frac{z}{\epsilon}\right) \quad, \epsilon > 0, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1.11}$$

donde

$$C = \iint_{\mathbb{C}} \varphi(x,y)\, dx\, dy,$$

es claro que φ_ϵ es C^∞, $Supp\,\varphi_\epsilon = \overline{D}(0,\epsilon)$ y $\iint_{\mathbb{C}} \varphi_\epsilon\, dxdy = 1$. Escogiendo entonces $\epsilon < \epsilon' < \epsilon + \epsilon' < \delta = dist(K, \mathbb{C} - \Omega)$, y definiendo

$$\psi(z) := \iint_{\mathbb{C}} f(u,v)\varphi_\epsilon(x-u, y-v)\, du\, dv =: f * \varphi_\epsilon(z), \quad z = x + iy, \tag{1.12}$$

donde f es la función característica de $K + D(0,\epsilon')$, es fácil verificar finalmente que ψ es $\mathbb{C}^\infty$ con soporte compacto contenido en $K + \overline{D}(0,\epsilon') + \overline{D}(0,\epsilon) \subseteq K + \overline{D}(0,\epsilon+\epsilon') \subseteq K + D(0,\delta) \subseteq \Omega$ y que $\psi = 1$ sobre $K + D(0, \epsilon' - \epsilon)$.

Lema 1.2 (Dolbeault). *Si g es de clase C^p, $p \geq 1$, y tiene soporte $Supp\, g$ compacto, entonces, en toda vecindad abierta relativamente compacta U de $Supp\, g$, existe f, de clase C^{p+1} en U, tal que*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = g(z), \quad z \in U\ . \tag{1.13}$$

Recordamos que

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{1.14}$$

es el denominado *Operador de Cauchy-Riemann.*

El lema anterior es un caso particular del denominado *Lema de Dolbeault* de la teoría de funciones de varias variables complejas, y su demostración puede encontrarse en muchas partes (p. ej. [5], p. 40; [7], p.362). Tal demostración, en el caso particular mencionado, es también, esencialmente, una verificación. En efecto, si

$$f(z) := -\frac{1}{\pi}\iint_{I(R)} g(z + re^{i\theta})e^{-i\theta}\, dr\, d\theta, \quad z \in U, \tag{1.15}$$

donde $I(R) = [0,R] \times [0, 2\pi]$ y R es lo suficientemente grande para que $U + (-U) \subseteq D(0,R)$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) &= -\frac{1}{\pi}\iint_{I(R)} \frac{\partial g(z+re^{i\theta})}{\partial \overline{z}} e^{-i\theta}\, dr\, d\theta \\ &= -\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon \to 0}\iint_{I(\epsilon,R)} \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z + re^{i\theta})e^{-i\theta}\, dr\, d\theta\end{aligned} \tag{1.16}$$

donde $I(\epsilon, R) = [\epsilon, R] \times [0, 2\pi]$, $0 < \epsilon < R$. Si ahora definimos

$$\tilde{g}(r,\theta) = g(z + re^{i\theta}) \tag{1.17}$$

para $z \in U$, fijo, un cálculo simple, basado en (1.14) y en la regla de derivación en cadena, muestra que

$$\frac{\partial g(z+re^{i\theta})}{\partial \overline{z}} e^{-i\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}(r,\theta) + \frac{i}{r}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}(r,\theta)\right), \quad r > 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \tag{1.18}$$

de lo cual

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{I(\epsilon,R)} \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z+re^{i\theta})e^{-i\theta}\,dr\,d\theta &= \frac{1}{2}\iint\limits_{I(\epsilon,R)} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}(r,\theta)\,dr\,d\theta + \frac{i}{2}\iint\limits_{I(\epsilon,R)} \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}(r,\theta)\,dr\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{\int_\epsilon^R \frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}(r,\theta)\,dr\right\}d\theta \\
&\quad + \frac{i}{2}\int_\epsilon^R \frac{1}{r}\left\{\int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}(r,\theta)\,d\theta\right\}dr \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \tilde{g}(\epsilon,\theta)\,d\theta + \frac{i}{2}\int_\epsilon^R \frac{1}{r}\{\tilde{g}(r,2\pi)-\tilde{g}(r,0)\}\,dr \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} g(z+\epsilon e^{i\theta})\,d\theta\ ,
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

pues $g(z+Re^{i\theta})=0$, $0\le\theta\le 2\pi$, y $\tilde{g}(r,2\pi)=g(z+r)=\tilde{g}(r,0)$, así que (1.13) resulta de (1.16).

De los dos resultados anteriores se deduce que

Corolario 1.1. *Si g es de clase C^p, $p\ge 1$, en un abierto Ω de $\mathbb{C}$, y K es un subconjunto compacto de Ω, existe f, de clase C^{p+1} en una vecindad abierta U de K en Ω, tal que $\partial f/\partial\overline{z}=g$ en U.*

Demostración. Sea ψ para K como en el Lema 1.1. Como ψg es de clase C^p y tiene soporte compacto en Ω, el cual contiene a K, existe f, de clase C^{p+1}, tal que $\dfrac{\partial f}{\partial\overline{z}}=\psi g$ en una vecindad abierta V de K. Como también $\psi=1$ en una vecindad abierta W de K en Ω, es claro que $\dfrac{\partial f}{\partial\overline{z}}=g$ en $U=V\cap W$. □

Nota 1.1. Es posible en realidad demostrar que si g es de clase C^p en Ω, $p\ge 1$, existe, aun si g no tiene soporte compacto, una función f, de clase C^{p+1} en Ω, tal que $\dfrac{\partial f}{\partial\overline{z}}(z)=g(z)$ para todo z en Ω. Esto se conoce como el *Lema Global de Dolbeault* ([5], p. 42). La demostración requiere, sin embargo, el *Teorema de Aproximación de Runge* ([11], p. 288). Como es obvio, el Corolario 1.1 es consecuencia del lema global de Dolbeault y, establecido éste, sería aparentemente innecesario recurrir a él y, de paso, al Lema 1.1. Sin embargo, el Lema 1.1 es necesario en la demostración del lema global de Dolbeault ([5], p. 42).

2. La Demostracion

Recordamos en primer lugar que si f es de clase C^1 en Ω, $f'(z)$ existe en $z\in\Omega$ si y sólo si vale la siguiente *Condición de Cauchy-Riemann*:

$$\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}(z)=0\ . \tag{2.1}$$

Recodamos también que

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{2.2}$$

y que

$$df := \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy. \tag{2.3}$$

En particular, si $z = x + iy$, $dz = dx + idy$, $d\overline{z} = dx - idy$. Un cálculo simple muestra entonces que

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,d\overline{z} \tag{2.4}$$

y, si f es de clase C^1 y γ es una trayectoria, que

$$\int_\gamma df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))\ . \tag{2.5}$$

Si además

$$F := \frac{1}{2}(f - ig), \quad G := \frac{1}{2}(f + ig), \tag{2.6}$$

un cálculo simple muestra también que

$$f\,dx + g\,dy = F\,dz + G\,d\overline{z} \tag{2.7}$$

y que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{si y sólo si} \quad \frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial G}{\partial z}\ . \tag{2.8}$$

Demostración del Teorema 1.1. Sea $K = \overline{\mathbb{I}}(\alpha)$, así que $K \subseteq \Omega$. Sean F, G definidas en Ω por (2.6), y sean U una vecindad de K en Ω y H de clase C^2 en U tales que (Corolario 1.1)

$$\frac{\partial H}{\partial \overline{z}}(z) = G(z), \quad z \in U. \tag{2.9}$$

Como, de (2.9) y (2.8),

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(F - \frac{\partial H}{\partial z}\right) = \frac{\partial F}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial H}{\partial \overline{z}\partial z} = \frac{\partial F}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \tag{2.10}$$

en U, $F - \dfrac{\partial H}{\partial z}$ es derivable en U, así que, según el teorema de Cauchy (nótese que α es nul-homóloga en U, pues $\overline{\mathbb{I}}(\alpha) \subseteq U$),

$$\int_\alpha \left(F - \frac{\partial H}{\partial z}\right)\,dz = 0. \tag{2.11}$$

Pero entonces, de (2.7), (2.11), (2.9), (2.4) y (2.5),

$$\begin{aligned}\int_\alpha f\,dx + g\,dy &= \int_\alpha F\,dz + G\,d\overline{z} = \int_\alpha \frac{\partial H}{\partial z}\,dz + \frac{\partial H}{\partial \overline{z}}\,d\overline{z}\\ &= \int_\alpha \frac{\partial H}{\partial x}\,dx + \frac{\partial H}{\partial y}\,dy = \int_\alpha dH\\ &= H(\alpha(1)) - H(\alpha(0)) = 0,\end{aligned} \tag{2.12}$$

y el teorema queda demostrado. □

3. Algunas Observaciones Finales

Nota 3.1. Obsérvese que usar el lema global de Dolbeault (en lugar del Corolario 1.1) en la demostración del Teorema 1.1 sería en esencia equivalente a usar el teorema de aproximación de Runge ([10], p. 259) en la demostración del teorema de Cauchy.

Nota 3.2. Si α, nul-homólogo en Ω, no es una curva, sino un ciclo ([11], p.234), (1.8) es todavía cierta. En efecto,

$$\alpha := \sum_{i=1}^{n} m_i \alpha_i \quad , \; m_i \in \mathbb{Z}, \tag{3.1}$$

donde las α_i son trayectorias cerradas de Ω tales que

$$Ind_{\alpha}(a) := \sum_{i=1}^{n} m_i Ind_{\alpha_i}(a) \tag{3.2}$$

se anula para todo $a \notin \Omega$. Si entonces γ_i, para $i = 1, 2, ..., n-1$, es una trayectoria de Ω tal que $\gamma_i(0) = \alpha_i(0)$, $\gamma_i(1) = \alpha_{i+1}(0)$, $\gamma = \gamma_1 ... \gamma_{n-1}$ (producto de las trayectorias), y $\hat{\alpha} = \alpha_1^{m_1}\gamma_1\alpha_2^{m_2}\gamma_2 ... \gamma_{n-1}\alpha_n^{m_n}\gamma^{-1}$ (donde, para β cerrada, $\beta^m = \beta ... \beta$ (m-veces) si $m > 0$, $\beta^m = (\beta^{-1})^{-m}$ si $m < 0$, y β^0 es la curva constante igual a $\beta(0)$), es claro que $\hat{\alpha}$ es una trayectoria nul-homóloga de Ω y que

$$\int_{\alpha} \omega := \sum_{i=1}^{n} m_i \int_{\alpha_i} \omega = \int_{\hat{\alpha}} \omega = 0. \tag{3.3}$$

La anterior demostración del Teorema 1.1 fué presentada por los autores, hace ya
varios años, en el *Seminario de Metodología, Didáctica e Historia de la Matemática* que anualmente se ofrece a los estudiantes de último año de la Carrera de Matemáticas de la Universidad Nacional de Bogotá, en tres conferencias dedicadas a la evolución del teorema de Cauchy y a un examen crítico de sus diferentes demostraciones. Las conferencias, las cuales incluían también una demostración de los autores de la llamada *Versión Homotópica del Teorema de Cauchy* (v. [7], p. 116), fueron repetidas en el III-*Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística*, Bogotá, 1986, y publicadas, en edición limitada, para uso de los asistentes a tal evento (v. [3]).

En tal época consideramos que la demostración que aquí presentamos, aunque analítica en carácter, no era sencilla (por depender de los Lemas 1.1 y 1.2), y por lo tanto era poco práctica para fines didácticos. Sin embargo, como hemos notado que la demostración de Artin no es fácilmente asimilada por los estudiantes, como consideramos que el Teorema 1.1 es útil para muchos propósitos (v. [3]), y como hemos observado que el interés por encontrar nuevas demostraciones del teorema de Cauchy, o por simplificar las existentes (v. [8],[9]), aún persiste, hemos decidido presentarla ahora, tanto más cuanto que hemos logrado una pequeña simplificación de la demostración del Lema 1.2 con respecto a la que presentamos en [3].

Referencias

1. L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, Third Edition, Mc Graw-Hill, New York, N.Y., 1979.
2. E. Artin, *On the theory of complex functions*, The Collected Papers of E. Artin, S. Lang and J. T. Tate Editors, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1965.
3. J. A. Charris, G. Rodríguez-Blanco y J. C. Quintero, *Teoría de Cauchy y Fundamentos del Análisis Complejo*, Publicación III Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Bogotá, 1986.
4. J. D. Dixon, *A brief proof of Cauchy's integral theorem*, Proc. Amer. Math. Soc **29** (1971), 625-626.
5. R. Gunning, *Lectures on Riemann Surfaces*, Princeton, N. J., 1966.
6. L. Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*, Springer, Berlin, 1963.
7. S. Lang, *Complex Analysis*, Second Edition, Springer, Berlin, 1985.
8. P. A. Loeb, *A note on Dixon's proof of Cauchy's integral theorem*, Amer. Math. Monthly **98** (1991), 242-244.
9. P. A. Loeb, *A further simplification of Dixon's proof of Cauchy's integral theorem*, Amer. Math. Monthly **100** (1993), 680-681.
10. W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mc. Graw-Hill, New York, N. Y., 1966.
11. W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Second Edition, Mc. Graw-Hill, New York, N. Y., 1974.
12. S. Saks and A. Zygmund, *Analytic Functions*, Monografje Matematyczne, vol. 28, Warsaw, 1952.

Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.