SOLUCION DE PROBLEMAS

41. Demostrar que en el plano el lugar geométrico de los puntos, cuyas distancias a dos puntos dados A y B guardan una relación constante, es un círculo.

Ernesto Núñez.

Corrección a la solución. Como lo observó *Armando Chaves Agudelo,* la primera parte de la solución publicada (vol. II. p. 132) es errónea, ya que para establecer que los triángulos OAP y OQM son semejantes, se necesitaría $OQ : OA = OM : OP$ y no $OQ : OA = OP : OM$.

He aquí una demostración correcta. Sea la relación constante λ. Por continuidad existen sobre la recta determinada por los puntos A y B dos puntos M y N que verifican las relaciones

$$NA : NB = MA : MB = \lambda.$$

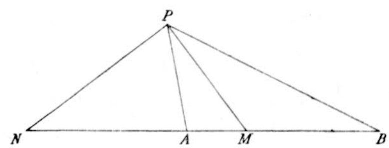

Figura 1

Sea P un punto que verifica $AP : PB = \lambda$. De la relación $AP : PB = AM : MB$ sigue por el recíproco de un teorema bien conocido que PM es bisectriz interior del ángulo APB. De la misma manera resulta que PN es bisectriz exterior del ángulo APB. Puesto que la bisectriz interior de un ángulo es perpendicular a la bisectriz exterior correspondiente, se ve que P está situado sobre la circunferencia con diámetro MN.

59. Si p y $p + 2$ son números primos, se llaman primos gemelos. Ejemplos: 3 y 5, 5 y 7, 11 y 13, 29 y 31, 41 y 43, 59 y 61, 71 y 73, 101 y 103. No se sabe, hoy día, si hay infinitos primos gemelos.

Demostrar que la suma de dos primos gemelos superiores a 3 siempre es divisible por 12.

Solución. Todo primo superior a 3 es de la forma $6n - 1$ ó $6n + 1$. Luego la suma de dos primos gemelos superiores a 3 es $12n$.

Jaime Vanegas Gómez.

Otras soluciones de: *Humberto Aparicio V., Armando Chaves Agudelo, Temístocles García Parra, Juan Gómez Mora, Eusebio López Parra, Arturo Rojas Arango, Alvaro Rodríguez.*

60. Demostrar que la suma de tres cubos consecutivos es siempre divisible por tres veces el término medio y también por 9.

Solución. Tenemos $(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 = 3n(n^2 + 2)$, de donde se ve que la suma es divisible por n.

Por otro lado si n es múltiplo de 3, $3n$ es múltiplo de 9. Si n no es múltiplo de 3, entonces $n = 3k \pm 1$, $n^2 + 2 = 9k^2 \pm 6k + 3$ y $3(n^2 + 2)$ es múltiplo de 9.

Eusebio López Parra.

Otras soluciones de: *Armando Chaves Agudelo, Temístocles García Parra, Juan Gómez Mora, Arturo Rojas Arango, Alvaro Rodríguez, Jaime Vanegas Gómez.*

61. Demostrar que el número $[n^3 + (n + 2)^3]/4$ es siempre un número entero. Además es siempre un número compuesto (cf. Vol. I., pág. 30) si sólo $n > 1$.

Solución. Puesto que $n^3 + (n + 2)^3 = 2n^3 + 6n^2 + 12n + 8 = 2(n + 1)(n^2 + 2n + 4)$, si n es impar, $2(n + 1)$ es un múltiplo de 4 (igual a 4 si $n = 1$). Si n es par, lo es también $n^2 + 2n + 4$ y por lo tanto $2(n^2 + 2n + 4)$ es múltiplo de 4.

Arturo Rojas Arango.

Otras soluciones de: *Armando Chaves Agudelo, Temístocles García Parra, Juan Gómez Mora, Eusebio López Parra, Alvaro Rodríguez, Jaime Vanegas Gómez.*

62. Demostrar que si $n > 1$ todo número entero de la forma $n^4 + n^2 + 1$ es compuesto.

Solución.

$$n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 - n^2 =$$
$$= (n^2 + 1 - n)\ (n^2 + 1 + n).$$

Armando Chaves Agudelo.

Otras soluciones de: *Humberto Aparicio V., Juan Gómez Mora, Eusebio López Parra, Arturo Rojas Arango, Alvaro Rodríguez.*

63. Demostrar que un número de la forma $n(n + 1)/2$ no es jamás un cuadrado perfecto.

Observación. El enunciado es incorrecto, puesto que

$$\frac{8\,.\,9}{2} = 36 = 6^2.$$

En número próximo de esta Revista publicaremos una versión correcta del problema.

64. Demostrar la fórmula

$$\frac{sen\ x}{x} = cos\ \frac{x}{2}\ cos\ \frac{x}{2^2}\ cos\ \frac{x}{2^3}\ \ldots\ .$$

Solución: De

$$sen\ x = 2\ sen\ \frac{x}{2}\ cos\ \frac{x}{2} = 2^2\ sen\ \frac{x}{2^2}\ cos\ \frac{x}{2^2}\ cos\ \frac{x}{2} =$$

$$= \ldots = 2^n\ sen\ \frac{x}{2^n}\ cos\ \frac{x}{2^n}\ \ldots\ cos\ \frac{x}{2^2}\ cos\ \frac{x}{2}$$

sigue

$$\lim_{n \to \infty} \frac{sen\ x}{2^n sen \frac{x}{2^n}} = cos\ \frac{x}{2}\ cos\ \frac{x}{2^2}\ cos\ \frac{x}{2^3}\ \ldots$$

Pero

$$\lim_{n \to \infty} 2^n\ sen\ \frac{x}{2^n} = \lim_{n \to \infty} x\ \frac{sen\ \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} = x.$$

Alvaro Rodríguez.

Otras soluciones de: *Armando Chaves Agudelo, Juan Gómez Mora.*

65. Dados: Dos círculos con centros O y O' que se cortan y el primero pasa por el centro del segundo. Sean B y C sus puntos comunes. Una secante cualquiera que pasa por O' encuentra la cuerda BC en el punto D situado entre B y C, el círculo con centro O en un segundo punto A y el círculo con centro O' en los puntos I e I'.

(i) Establecer la relación $\overline{O'B}^2 = \overline{O'D}.\ \overline{O'A}$.

(ii) Demostrar que los puntos I e I' son los centros de círculos inscritos y exinscritos al ángulo A del triángulo ABC.

(iii) Se suponen conocidos los puntos B y C, cuya distancia se denota por a, las longitudes r y r' de los radios de los círculos inscritos y exinscritos al ángulo A del triángulo ABC $(r' > r)$. Deducir del estudio precedente la construcción del triángulo ABC. Encontrar la condición que deben satisfacer a, r, r' para que la construcción sea posible.

(iv) El punto B es fijo y el punto C variable sobre una semirrecta fija Bx, las longitudes r y r' son dadas. Encontrar el lugar de los puntos O', I, I' y A y también la envolvente de la recta II'.

(Bachillerato, 2ª parte, La Réunion, 1948).

Solución. (i) $O'B = O'C$ ya que son radios del círculo con centro O'. Luego $\angle O'BC = \angle O'AB$ y los triángulos $O'DB$ y $O'BA$ son semejantes, puesto que $\angle BO'D$ es común. De ahí $O'D : O'B = O'B : O'A$ es decir $O'B^2 = O'D \,.\, O'A$.

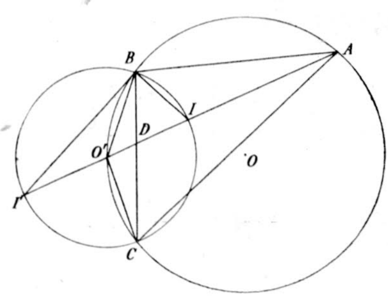

Figura 2

(ii) Por la misma razón que antes $\angle O'AB = \angle O'AC$, luego I e I' están situadas sobre la bisectriz de $\angle BAC$. Además $\angle IBC =$

$$\frac{1}{2}\ \angle IO'C = \frac{1}{2}\ \angle AO'C = \frac{1}{2}\ \angle ABC,$$

luego I es el centro del círculo inscrito a ABC.

Por otro lado BI' es perpendicular a BI, entonces BI' es bisectriz exterior del ángulo $\angle ABC$ e I' es centro del círculo exinscrito al ángulo A del triángulo ABC.

(iii) Dibujamos el segmento BC de longitud a y a los dos lados dos paralelas p y p' a una distancia igual respectivamente a r y a r'. Trazamos la mediatriz perpendicular a BC cuyo punto medio entre p y p' se llama O'. Determinamos el punto I sobre p y el punto I' sobre p' que satisfacen a $O'I = O'I' = O'B$. Pintamos el círculo que pasa por B, C y O'. El punto donde la recta II' corta ese círculo será el tercer vértice buscado A.

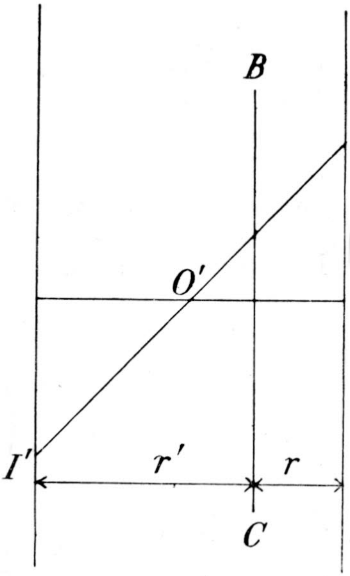

Figura 3

Para que la construcción sea posible se necesita que la distancia de p a O' sea menor que $O'B$, es decir

$$\frac{r'+r}{2} \leqslant \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{r'-r}{2}\right)^2},$$

$$4\, r r' \leqslant a^2.$$

(iv) Por lo anteriormente visto I e I' se mueven sobre las rectas p y p' respectivamente y O' se mueve sobre la recta q paralela a Bx y a distancia igual a p y a p'.

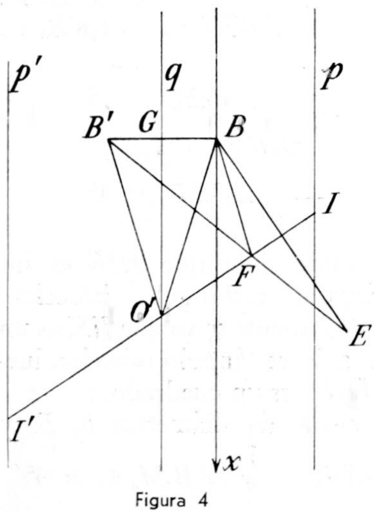

Figura 4

Los puntos A, D, I e I' forman una división armónica, luego A también se mueve sobre una recta.

Busquemos la envolvente de la recta II'. Sea E el simétrico de B con respecto a la recta II' y B' el simétrico de B con respecto a q. Sea F el punto de intersección de II' y de EB'. Tenemos $BF = FE$, luego $BF + B'F = B'F + FE = B'E$. Puesto que $\angle IO'B = \frac{1}{2} \angle EO'B$ y $\angle BO'G = \frac{1}{2} \angle BO'B'$.

(siendo G un punto sobre q en la posición indicada sobre la figura) tenemos $\angle EO'B' = 2\angle IO'G$, de donde resulta que $EB' = BF + B'F = r + r'$. Entonces F está situado sobre la elipse con focos en B y B', eje mayor $r + r'$ y eje menor $2\sqrt{rr'}$. Además $\angle B'FI = \angle O'FE = \angle O'FB$, luego II' toca la elipse en el punto F y entonces dicha elipse es la envolvente buscada.

Solución de: *Armando Chaves Agudelo.*

Soluciones parciales de: *Temístocles García Parra, Juan Gómez Mora, Arturo Rojas Arango, Alvaro Rodríguez, Jaime Vanegas Gómez.*

66. Demostrar por geometría elemental el teorema siguiente: Sea $B_1 B_2 B_3 B_4$ un cuadrilátero cualquiera. Sean M_1, M_2, M_3, M_4 los puntos medios respectivos de los lados $B_1 B_2$, $B_2 B_3$, $B_3 B_4$, $B_4 B_1$. Tracemos los segmentos $M_1\ A_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ que son perpendiculares al lado correspondiente, son dirigidos hacia el exterior del cuadrilátero y son iguales a la mitad del lado correspondiente, es decir $B_i M_i = M_i A_i$. Entonces el segmento $A_1 A_3$ es perpendicular al segmento $A_2 A_4$.

Alberto Ospina M.

Solución. A_1, A_2, A_3, A_4 son los puntos medios de las semicircunferencias exteriores de diámetros B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, $B_4 B_1$ respectivamente. Sean K e I los otros cortes de las circunferencias de diámetro $B_3 B_4$ y $B_1 B_2$ con $A_1 A_3$, H el punto de intersección de $B_2 I$ y de $B_3 K$, y J el punto de intersección de $B_1 I$ y de $B_4 K$. Tenemos $\angle HKI = \angle A_3KB_3 =$

$$\frac{1}{2} \angle A_3M_3B_3 = 45^\circ$$

y $\angle HIK = \angle A_1IB_2 =$

$$\frac{1}{2} \angle A_1M_1B_2 = 45^\circ$$

de donde sigue que HIK es un triángulo rectángulo isósceles. Análogamente se ve que JIK es un triángulo rectángulo isósceles, luego $HIJK$ es un cuadrado.

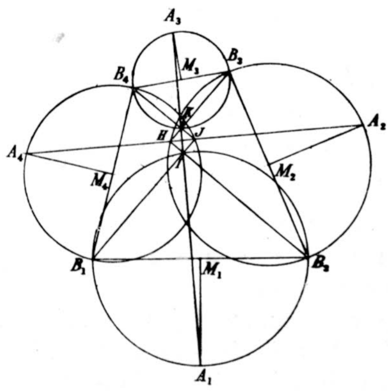

Figura 5

Así J y H están sobre las circunferencias de diámetros $B_4\ B_1$ y $B_2\ B_3$ respectivamente. Ahora $\angle B_4JA_4 = \dfrac{1}{2} \angle B_4M_4A_4 = 45^\circ$

luego H está sobre la recta $A_4 J$. De la misma manera $\angle B_3 H A_2 =$
$= \dfrac{1}{2} \quad B_3 M_2 A_2 = 45^\circ$, luego J está sobre la recta HA_2. Entonces $A_2 A_4$ es una diagonal del cuadrado $HIJK$ y por tal motivo perpendicular a $A_1 A_3$.

Q. E. D.

Armando Chaves Agudelo.

Otras soluciones de: *Temístocles García Parra, Eusebio López Parra, Alberto Ospina M., Alvaro Rodríguez.*