



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Bandas de confianza simultáneas para la estimación de los costos de garantía descontados para sistemas coherentes bajo reparo mínimo

Carlos Mario Lopera Gómez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Estadística
Medellín, Colombia
2014

Bandas de confianza simultáneas para la estimación de los costos de garantía descontados para sistemas coherentes bajo reparo mínimo

Carlos Mario Lopera Gómez

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de Doctor en Ciencias Estadísticas

Directora:

Nelfi Gertrudis González Álvarez
Doctora en Ciencias Estadísticas

Línea de Investigación:

Confiabilidad

Grupo de Investigación:

Estadística Industrial

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Estadística
Medellín, Colombia
2014

A Dios...

A mis padres, Luz Elena y Luis Carlos, a quienes debo todo lo que soy... Agradezco tener la suerte y la fortuna de contar siempre con ustedes...

A Luisa Fernanda y Andrés Felipe, quienes son los pilares de mi vida... Su amor y apoyo incondicional, son el motor que me mueve en la búsqueda de nuevos objetivos...

Los amo...

Agradecimientos

El autor desea expresar los más sinceros agradecimientos a su directora de tesis Nelfi González por la acertada, capaz y valiosa tutoría. También, a los colegas de la Escuela de Estadística que de alguna manera apoyaron la realización de este trabajo, y a la Universidad Nacional de Colombia por el apoyo financiero para la realización de estos estudios.

Este trabajo fue soportado por Colciencias, Colombia, como parte del proyecto de investigación “caracterización de la dependencia en modelos de riesgos competitivos en datos de confiabilidad industrial” código 110152128913.

Resumen

La selección de un programa de garantía para un producto nuevo en el mercado genera al fabricante costos adicionales diferentes a aquellos inherentes al proceso de fabricación. Esto hace que sea necesario establecer los costos de garantía para un periodo de tiempo dado, de manera que el fabricante puede estimar el nivel de reserva necesario para atender los reclamos futuros por garantía. En particular se consideran los costos de garantía denominados descontados. Los modelos desarrollados para este tipo de costos incorporan la edad del producto en el momento del reclamo por garantía y se pueden estudiar a través del proceso estocástico conocido como modelo de tiempo de vida general. En la práctica, la mayoría de los productos son sistemas compuestos por varias componentes. Cuando el producto o sistema es reparable y sobre sus componentes se realizan acciones de mantenimiento que implican costos, resulta de interés modelar el impacto de tales acciones sobre los costos de garantía del sistema. Uno de los atractivos principales del modelo de tiempo de vida general, es que bajo éste, se puede evaluar la evolución del sistema bajo el enfoque conocido como aproximación física, que permite modelar en el tiempo el proceso de falla del sistema o producto bajo diferentes niveles de información, y en particular modelar el proceso de tasa de falla, que es el aspecto más importante de estos modelos. Así, la diferencia primordial entre el modelo de confiabilidad clásico, conocido como aproximación estadística, y la aproximación física, es el nivel de información: mientras que en el segundo se observa el proceso de falla al nivel de las componentes, en el primero sólo se observa la falla del sistema. Esto hace que el proceso de falla cambie de una aproximación a otra, debido a que cambian los procesos de tasas de falla asociados, así, en la aproximación estadística la tasa de falla es una función determinística, mientras que en la aproximación física la tasa de falla es un proceso estocástico.

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar bandas de confianza simultáneas para el costo medio de garantía descontado en sistemas coherentes bajo reparo mínimo físico, esto es, cuando el sistema es observado al nivel de sus componentes, usando métodos computacionales intensivos basados en remuestreo. Para ello, con base en el marco teórico de los procesos martingala y el teorema de límite central de remuestreo (CLRT) sobre procesos estocásticos, se prueban las condiciones de éste último en los procesos de costos de garantía descontados. Un estudio de simulación Monte Carlo se realiza para evaluar el desempeño en muestras finitas del método propuesto a través de las probabilidades

de cobertura alcanzadas. Los resultados en los escenarios considerados muestran que las bandas de confianza basadas en remuestreo tienen probabilidades de cobertura con valores cercanos a los esperados, en particular para aquellas basadas en muestras con más de 100 sistemas donde el número de remuestras usada para la aproximación es grande.

Palabras clave: aproximación débil, modelo de tiempo de vida general, probabilidad de cobertura, remuestreo, teorema de límite central de remuestreo.

Abstract

The selection of a warranty program for a new product on the market generates additional costs to the manufacturer other than those inherent to the manufacturing process, what makes necessary to establish warranty costs for a given period of time, thus, the manufacturer can estimate the required level of reserves to deal with the future warranty claims. Particularly, we consider the so-called discounted warranty costs. The models developed for this kind of costs incorporates the age of the product at the time of the warranty claim and it can be studied through the stochastic process known as the General Lifetime Model. In practice, most of the products are systems consisting of several components. When the product or system is repairable and maintenance actions in the components involving costs are made, it is interesting to model the impact of such actions on the system warranty costs. One of the main appeals of the General Lifetime Model is that it can be evaluated the evolution of the system under the so-called physical approach, which allows to model through the time the failure process of the system or product given different levels of information, in particular, it allows to model the failure rate process, which is the most important aspect of these models. Thus, the main difference between the classical reliability model -known as the statistical approach- and the physical approach is the level of information: while the latter shows the failure process at the level of the components, in the former only the system failure is observed. This differentiates the failure process from an approach to the other, due to that the associated failure rate processes change, so that the failure rate in the statistical approach is a deterministic function, while the failure rate in the physical approach is a stochastic process.

The main objective of this thesis is to develop simultaneous confidence bands for the mean of the discounted warranty cost for coherent systems under physical minimum repair, i.e., when the system is observed at the level of its components, using computer intensive methods based on resampling. In doing so, we proof that the discounted warranty cost processes fulfill the conditions of the central limit resampling theorem (CLRT) for stochastic processes, based on the theoretical framework of martingale processes. A Monte Carlo simulation study to evaluate the finite sample performance of the proposed method is performed through the achieved coverage probability. The results show that in the considered scenarios the confidence bands based on resampling have

coverage probabilities close to the expected values, in particular, those based on samples sizes with more than 100 systems where the number of resamples used for the approximation is large.

Keywords: central limit resampling theorem, coverage probability, general lifetime model, resampling, weak approaching.

Contenido

Resumen	IX
Abstract	XI
Lista de figuras	XV
Lista de tablas	XVII
Lista de abreviaturas y símbolos	XIX
1. Introducción	1
2. Conceptos básicos	7
2.1. Sistemas coherentes	7
2.2. Nociones de deterioro	9
2.2.1. Propiedades IFR y DFR de una distribución	9
2.2.2. Funciones de tasa de riesgo más usadas en confiabilidad	11
2.2.3. Propiedades IFRA, DFRA, NBU, NBUE, NWU y NWUE	13
2.3. El modelo de tiempo de vida general	14
2.4. Existencia del proceso de tasa de falla	16
2.4.1. Ejemplos de procesos de tasa de falla	17
2.5. Cambio en el nivel de información	20
2.6. Modelos de reparo mínimo	22
2.7. Costos de garantía descontados y la política de garantía pro-rata (PRW)	24
2.7.1. Costos de garantía descontados	24
2.7.2. Política PRW	25
2.7.3. Costos de garantía descontados para una póliza PRW	25
3. Modelo de reparo mínimo y costos de garantía	27
3.1. Costos de garantía descontados para un sistema coherente	31
3.1.1. Costos de garantía en cada componente	31
3.1.2. Costos de garantía para el sistema coherente	33
3.2. Modelo de estimación para una muestra de n sistemas idénticos	36

4. Bandas de confianza para el costo medio descontado de garantía	39
4.1. Bandas de confianza para funciones	39
4.2. Aproximación débil de distribuciones	40
4.3. Propiedades de los procesos de costos de garantía descontados	44
4.4. Condiciones para aplicar el CLRT en los costos de garantía descontados .	53
4.5. Construcción de bandas de confianza para el costo medio de garantía . .	61
5. Probabilidades de cobertura	65
5.1. Factores y parámetros de simulación	65
5.2. Probabilidad de cobertura	68
5.3. Probabilidades de cobertura alcanzadas en el sistema 1 de 3	70
5.4. Probabilidades de cobertura alcanzadas en el sistema 2 de 4	73
5.5. Probabilidades de cobertura alcanzadas por ambos sistemas	75
5.6. Ejemplos de bandas de confianza simultáneas	76
6. Conclusiones y trabajo futuro	81
6.1. Consideraciones finales	81
6.2. Sugerencias de trabajo futuro	83
Apéndices	85
A. Algunos resultados teóricos importantes	87
A.1. Teorema del valor medio para integrales	87
A.2. Teorema de mapeo continuo	89
A.3. Desigualdades	89
A.4. Función generadora de momentos de un NHPP	90
B. Fundamentos para modelos de falla estocásticos	91
C. Resultados del estudio de simulación	97
Bibliografía	106

Lista de Figuras

2-1. Estructuras más generales de sistemas coherentes	8
2-2. Funciones de tasa de falla para algunas distribuciones	12
2-3. Sistema serie-paralelo	18
2-4. Sistema de 3 componentes en paralelo	18
2-5. Sistema 2 de 4	19
5-1. Costo medio esperado para los sistemas bajo estudio	70
5-2. \widehat{CP} para $SCB_t^{(n)}$, en sistema 1 de 3, variando M	71
5-3. \widehat{CP} para $SCB_t^{(n)}$, en sistema 1 de 3, variando G	72
5-4. \widehat{CP} para $SCB_t^{(n)}$, en sistema 2 de 4, variando M	73
5-5. \widehat{CP} para $SCB_t^{(n)}$, en sistema 2 de 4, variando G	74
5-6. \widehat{CP} para $SCB_t^{(n)}$, por tipo de sistema y descuento, variando M	75
5-7. \widehat{CP} para $SCB_t^{(n)}$ por tipo de sistema y descuento.	76
5-8. Bandas de confianza simultáneas de nivel $1 - \gamma$ para el sistema 1 de 3 . .	77
5-9. Bandas de confianza simultáneas de nivel 0.95 para el sistema 2 de 4 . .	78

Lista de Tablas

2-1.	Características de algunas distribuciones usuales en confiabilidad	11
5-1.	Factores de simulación y sus niveles	66
5-2.	Valores fijados en los parámetros de simulación	68
C-1.	\widehat{CP} para el sistema 1 de 3 con $d_i(t) = c_i e^{-t}$	97
C-2.	\widehat{CP} para el sistema 1 de 3 con $d_i(t) = c_i(1 - tW^{-1})e^{-t}$	98
C-3.	\widehat{CP} para el sistema 2 de 4 con $d_i(t) = c_i e^{-t}$	98
C-4.	\widehat{CP} para el sistema 2 de 4 con $d_i(t) = c_i(1 - tW^{-1})e^{-t}$	99

Lista de abreviaturas y símbolos

En esta sección se presentan algunas abreviaturas y símbolos de uso frecuente a lo largo del trabajo.

Abreviaturas

<i>cadlag</i>	Continua a derecha y con límite a izquierda (del francés “ <i>continue à droite, limite à gauche</i> ”)
CP	Probabilidad de cobertura (<i>Coverage Probability</i>)
CLRT	Teorema de Límite Central de Remuestreo (<i>Central Limit Resampling Theorem</i>)
DFR	Función de tasa de falla decreciente (<i>Decreasing Failure Rate</i>)
FRW	Política de garantía de sustitución sin costo para el comprador (<i>Free Replacement Warranty</i>)
IFR	Función de tasa de falla creciente (<i>Increasing Failure Rate</i>)
iid	Independientes e idénticamente distribuidas
<i>P</i> -c.s.	Que se cumple con probabilidad 1
PRW	Política de garantía de sustitución o reparo <i>pro-rata</i> (<i>Pro-Rata Warranty</i>)
SCB	Banda de confianza simultánea (<i>Simultaneous Confidence Band</i>)
SSM	Semimartingala regular (<i>Smooth Semimartingale</i>)

Símbolos en letras latinas

\xrightarrow{P}	Convergencia en probabilidad
$\xrightarrow[w]{P}$	Convergencia en probabilidad bajo la métrica d
\xrightarrow{w}	Convergencia débil o en distribución
\xleftrightarrow{wa}	Aproximación débil de distribuciones

$\overleftarrow{wa}^{(P)}$	Aproximación débil en probabilidad de distribuciones
$a \wedge b$	mín $\{a, b\}$
$a \vee b$	máx $\{a, b\}$
$B^*(t)$	Costo medio de garantía descontado para un sistema coherente bajo reparo mínimo físico, en $[0, t]$
$\overline{B}_t^{(n)}$	Costo medio estimado de garantía descontado para un sistema coherente bajo reparo mínimo físico, en $[0, t]$, basado en una muestra de n sistemas
c_i	Costo de reparo mínimo de la componente i
\widehat{CP}	Probabilidad de cobertura alcanzada
$D[0, t]$	Espacio de Skorokhod de las llamadas funciones <i>cadlag</i> en $[0, t]$
$d(t), d_i(t)$	Función de descuento, función de descuento para la componente i
$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$	Pre- t -historia de las componentes o filtración completa
G	Número de remuestras en la aproximación realizada por el método propuesto de construcción de bandas de confianza
$H_i(t)$	Función de costo descontado para la componente i
$I(A)$	Indicadora del conjunto A
k	Número mínimo de componentes que deben funcionar en un sistema k de m para que el sistema funcione
$\mathcal{L}(X)$	Ley de distribución de un elemento aleatorio X
$\mathcal{L}(X Z)$	Ley de distribución condicional de un elemento aleatorio X dado Z
m	Número de componentes de un sistema
M	Tamaño de la partición en la aproximación realizada por el método propuesto de construcción de bandas de confianza
\mathcal{M}_0	Clase de martingalas <i>cadlag</i> integrables de media cero
\mathcal{M}_0^2	Clase de martingalas <i>cadlag</i> cuadrado integrables de media cero
n	Número de sistemas bajo garantía o tamaño de muestra
N	Número de simulaciones realizadas para evaluar el desempeño de las bandas de confianza simultáneas propuestas
$SCB_t^{(n)}$	Banda de confianza simultánea para la función $B^*(t)$ en $[0, t]$, basada en una muestra de n sistemas
S_i	Tiempo de vida de la componente i

T	Tiempo de vida del sistema
W	Periodo de garantía
Y_i	Nivel crítico de la componente i

Símbolos en letras griegas

$(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$	Espacio de probabilidad completo
γ	Nivel de significancia
$\Gamma_{\Phi}(t)$	Conjunto de los patrones de falla de un sistema
λ_t	Proceso de tasa o intensidad de falla
$\lambda(t), \lambda^i(t)$	Función de tasa de falla, función de tasa de falla de la componente i
ρ	Tasa de descuento
$\sigma(\mathcal{A})$	σ -álgebra más pequeña generada por la colección de conjuntos no vacía \mathcal{A}
Φ_t	Función de estructura de un sistema coherente
ω	Punto muestral o resultado en el espacio muestral Ω

1. Introducción

Cuando un fabricante coloca un producto nuevo en el mercado, debe seleccionar un programa de garantía que acompañe al producto, el cual dentro de sus opciones incluye el tipo de póliza de garantía, la duración de la cobertura, la prima que debe incluirse en el precio del producto, etc. De ahí que para los fabricantes resulta importante ofrecer un programa de garantía en la comercialización, pero esto puede convertirse en un gran costo si la calidad del producto es baja (Thomas 2005). Bai & Pham (2006) resaltan que una de las cuestiones de interés que surge en el análisis de garantía es la modelación de sus costos, en especial de aquellos que consideran la edad del producto, denominados costos descontados. Para mayores detalles en este tópico ver Blischke & Murthy (1994), Chien (2005), Ja, Kulkarni, Mitra & Patankar (2002), Murthy & Djameludina (2002) y Nguyen & Murthy (1984).

Los modelos de costos de garantía descontados incorporan la edad del producto y proporcionan una medida adecuada de los costos involucrados en el programa de garantía, debido a que en general, éstos se pueden tratar como un flujo de caja aleatorio en un tiempo futuro. Por tanto, es posible modelar su evolución a lo largo del ciclo de vida garantizado, así como estimar los niveles de reserva de los fondos necesarios para atender los reclamos futuros por garantía. En este contexto, los costos por lo general dependientes del tiempo, no son estadísticamente independientes. Varios aspectos de los costos de garantía descontados y de las reservas correspondientes han sido estudiados por Bai & Pham (2004), Duchesne & Marri (2009), Ja et al. (2002), Jain & Maheshwari (2006), Patankar & Mitra (1995), y Thomas (1989).

En la vida real, es posible encontrar muchos productos compuestos por varias componentes, esto es, el producto puede verse como un sistema. Algunos ejemplos de sistemas y sus componentes son: 1) Automóvil: compuesto por batería, neumáticos, eje de transmisión, y el resto; 2) Avión: compuesto por motores, aero-electrónica, parabrisas, otros componentes importantes, y el resto, y 3) Computador: compuesto por procesador, monitor, disco duro, y el resto (Blischke & Murthy 1996). Si cada componente tiene su propia garantía, éstas se pueden combinar para producir una garantía para el sistema. Pero la garantía también puede definirse para el sistema (como un todo) y en tales casos es necesario considerar la estructura del sistema, así como el costo de servicio de garantía al nivel de las componentes (Thomas 1989). El análisis de los costos de garantía para los

sistemas de componentes ha sido considerado en varios trabajos anteriores: Ritchken & Fuh (1986) proporciona un ejemplo de un sistema en paralelo de dos componentes con una política de garantía bidimensional; Chukova & Dimitrov (1996) calculan el costo esperado para sistemas en serie y en paralelo de dos componentes bajo una política de sustitución sin costo alguno para el comprador; Hussain & Murthy (1998) discuten la estimación de costos de garantía para sistemas en paralelo, considerando que el nivel de calidad desconocido de un producto nuevo puede ser incluido en la formulación de los programas de garantía; Bai & Pham (2006) obtienen los dos primeros momentos centrales de los costos de garantía con políticas de servicio completo con renovación, para sistemas complejos en serie/paralelo; Balachandran, Maschmeyer & Livingstone (1981) presentan una aproximación markoviana al análisis de los costos de garantía para un sistema de tres componentes; Jung, Park & Park (2010) consideraron las políticas óptimas de mantenimiento de sistemas durante el período posterior a la garantía bajo una política de renovación de la garantía con costos de mantenimiento que dependen del ciclo de vida.

Existen muchas formas de modelar el impacto de las acciones de reparación sobre los tiempos de falla del sistema. En la literatura relacionada al comportamiento estocástico de sistemas reparables se asume con frecuencia que la reparación de una unidad o sistema proporciona un funcionamiento que es tan bueno como nuevo (Block, Borges & Savits 1985). Sin embargo, la conveniencia técnica de esta hipótesis y sus implicaciones han sido criticadas por muchos autores sobre la base de que la reparación en muchos casos prácticos sólo restaura una unidad o sistema a su condición de funcionamiento justo antes de la falla (Block et al. 1985, Ascher 1968, Ouali, Tadj, Yacout & Ait-Kadi 2011). Por tanto en sistemas complejos, el reparo se asume frecuentemente como mínimo, lo cual restaura la tasa de falla (Blischke & Murthy 1994), y permite que el sistema vuelva a operación tan pronto como es posible (Ouali et al. 2011). Nguyen & Murthy (1984) consideran un modelo general de costo de garantía para productos reparables de una sola componente con los modelos de reparo mínimo, reparo imperfecto y reparo perfecto, sin embargo ignoran la dinámica en el tiempo. Aven (1983) generaliza el modelo de reemplazo de reparo mínimo introducido por Barlow & Hunter (1960). Nakagawa & Kowada (1983) consideran un modelo de sustitución donde un sistema se reemplaza en el tiempo T o en la n -ésima falla y discuten las políticas óptimas. Nakagawa (1984) considera la sustitución continua y discreta combinada con la reparación mínima en la falla, en la que una unidad se sustituye en el tiempo T o en un número N de usos. Sheu, Griffith & Nakagawa (1995) proponen una política de sustitución generalizada donde un sistema tiene dos tipos de fallas (fallas menores y fallas catastróficas), en donde las fallas menores se tratan con reparo mínimo. Ja, Kulkarni, Mitra & Patankar (2001) analizan un modelo de costos de garantía para productos de un componente reparado mínimamente con costos dependientes del tiempo. Aven & Castro (2008) consideran un sistema con dos tipos de fallas. Si la falla es de tipo I el sistema es reparado mínimamente, y si la falla

es de tipo II, el sistema está reparado mínimamente con probabilidad p y reemplazado con probabilidad $1 - p$. Ellos determinan un tiempo de reemplazo planeado óptimo T , minimizando los costos descontados esperados bajo una restricción de seguridad.

Los trabajos previos se caracterizan por modelar la confiabilidad del sistema bajo la teoría clásica, en la cual generalmente no se considera la relación del sistema y sus componentes dinámicamente en el tiempo, lo que se conoce como enfoque *estadístico* o de “caja negra”. Alternativamente, y dependiendo de la información disponible, es posible considerar la relación entre el sistema y sus componentes a lo largo del tiempo observando el proceso de falla del sistema bajo la filtración definida por el estado de sus componentes y del sistema, esto se conoce como enfoque “físico” (Aven & Jensen 1999). La diferencia primordial entre el modelamiento *estadístico* y el *físico* es el nivel de observación del sistema, ya que en el segundo se observa al nivel de sus componentes mientras que en el primero sólo se observa la falla del sistema. Esto hace que el proceso de falla cambie de un enfoque a otro, puesto que cambian las tasas de falla, esto es, en el enfoque estadístico la tasa de falla es una función determinística mientras que en el enfoque físico la tasa de falla es un proceso estocástico.

González & Bueno (2011) proponen un estimador martingala para los costos esperados de garantía descontados para un sistema coherente bajo reparo mínimo, cuando el sistema es observado al nivel de sus componentes, e incluyen el cálculo de límites de confianza puntuales para los costos esperados en un tiempo fijo. A pesar de obtener un conjunto de límites de confianza puntuales del $(1 - \gamma) 100\%$ en el intervalo $[0, t]$, éstos no forman una banda de confianza simultánea del $(1 - \gamma) 100\%$, debido a que el mencionado conjunto de límites generalmente no tiene la probabilidad de cobertura correcta. En general, la construcción de bandas de confianza es más difícil que la de límites de confianza puntuales (Fleming & Harrington 1991). En la construcción de bandas de confianza el objetivo principal es evaluar la precisión de un estimador, la cual puede ser caracterizada por la distribución (o una función de ésta) de las desviaciones de tal estimador de su valor verdadero (Belyaev 2007). El problema radica en que la distribución antes mencionada es desconocida y aún cuando se pueden obtener resultados asintóticos de convergencia en distribución a procesos gaussianos, esto es, con $n \rightarrow \infty$ (González & Bueno 2011), en la práctica no siempre se cuenta con tamaños de muestra (copias independientes de un proceso) suficientemente grandes para que tales aproximaciones funcionen adecuadamente en muestras finitas. Esta limitación puede ser superada a través del remuestreo. En general, los métodos computacionales intensivos (CI) proporcionan una forma de encontrar aproximaciones asintóticamente precisas de las distribuciones de las desviaciones de los estimadores de los verdaderos parámetros desconocidos (Belyaev 2000). La mayoría de los métodos CI se basan en el uso de algún tipo de aleatorización (entre ellos están el remuestreo y el conocido bootstrap introducido por Efron (1979)). En términos

generales se usa, junto con los datos estadísticos originales algunas variables aleatorias adicionales con el fin de obtener copias artificiales de los datos (o de alguna otra cosa) que se puede utilizar para estimar las características de precisión de los estimadores. El bootstrap es un método bastante universal, sin embargo, la necesidad de encontrar un estimador apropiado del parámetro verdadero que caracterice la distribución de los datos, puede ser un problema difícil, por lo que de manera alternativa se puede usar el remuestreo (Belyaev 2000).

El objetivo principal de este trabajo es utilizar métodos CI basados en remuestreo para desarrollar bandas de confianza simultáneas para la función media de los costos de garantía descontados de un sistema coherente bajo reparo mínimo, cuando éste es observado al nivel de sus componentes. Para ello, con base en el marco teórico de los procesos martingala y el teorema de límite central de remuestreo (CLRT) sobre procesos estocásticos propuesto por Belyaev (2000), y Belyaev & Seleznev (2000), se prueban las condiciones de éste último teorema sobre los procesos de costos de garantía descontados bajo el modelo de tiempo de vida general. Adicionalmente, para comprobar las propiedades de muestra finita de las bandas de confianza propuestas se realiza un estudio de simulación sobre las variables más relevantes de la metodología desarrollada, con el fin de calcular la probabilidad de cobertura alcanzada.

Los principales logros del trabajo son:

- Se establecieron las condiciones bajo las cuales los procesos de costos descontados de garantía cumplen las condiciones del CLRT.
- Se desarrollaron bandas de confianza basadas en remuestreo para la estimación del costo medio descontado de garantía en sistemas coherentes, cuando el sistema es observado al nivel de sus componentes y sobre éstas se aplica una política de reparo mínimo.
- Se estableció mediante un estudio de simulación Monte Carlo el comportamiento de las probabilidades de cobertura alcanzadas por las bandas propuestas en diversos escenarios.
- Se desarrolló un método para la construcción de bandas de confianza basadas en remuestreo, cuya implementación es simple y su aplicabilidad puede extenderse a otros procesos estocásticos que cumplan las condiciones mínimas presentadas en este trabajo.

La estructura del trabajo es la siguiente: en el Capítulo 2 se dan algunos conceptos básicos de sistemas coherentes, nociones de deterioro y costos descontados, el modelo de

tiempo de vida general y sus diferencias con el modelo clásico. El Capítulo 3 se presenta el modelo de reparo mínimo y las estimaciones del costo medio de garantía descontado para sistemas coherentes bajo reparo mínimo físico. La propuesta de construcción de bandas de confianza simultáneas para los costos de garantía descontados para sistemas coherentes bajo reparo mínimo se desarrolla en el Capítulo 4. En el Capítulo 5 mediante un estudio de simulación se evalúa el desempeño de las bandas de confianza propuestas para el costo medio de garantía descontado. Finalmente, el Capítulo 6 presenta las conclusiones más relevantes del trabajo y describe los temas relacionados con esta investigación que pueden ser de interés para trabajo futuro en el área de confiabilidad.

2. Conceptos básicos

En este capítulo, se presentan algunas definiciones básicas acerca de sistemas coherentes, modelos estocásticos de confiabilidad, las funciones de tasa de riesgo más usadas en confiabilidad, junto con sus propiedades y formas, y las funciones de intensidad estocástica.

2.1. Sistemas coherentes

Considere un sistema compuesto por m componentes, en las cuales se pueden definir dos estados: funcionamiento o falla. Sean S_1, S_2, \dots, S_m los tiempos de vida de las componentes del sistema, entonces para indicar el estado de la componente i en el tiempo t , se define para $i = 1, 2, \dots, m$ la variable indicadora $X_t(i)$ como:

$$X_t(i) = \begin{cases} 1, & \text{si la componente } i \text{ está en funcionamiento al tiempo } t \text{ } (S_i > t) \\ 0, & \text{si la componente } i \text{ ha fallado al tiempo } t \text{ } (S_i \leq t). \end{cases} \quad (2-1)$$

De manera similar, sea T el tiempo de vida del sistema, entonces defina la variable indicadora Φ_t que indica el estado del sistema en el tiempo t , como:

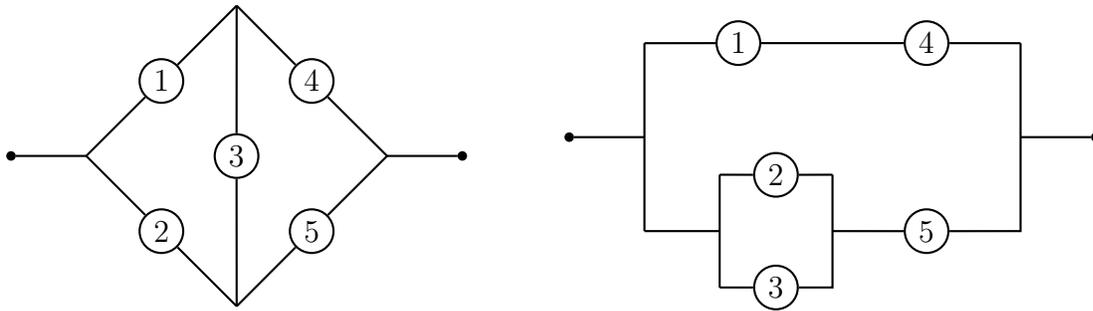
$$\Phi_t = \begin{cases} 1, & \text{si el sistema está en funcionamiento al tiempo } t \text{ } (T > t) \\ 0, & \text{si el sistema ha fallado al tiempo } t \text{ } (T \leq t). \end{cases} \quad (2-2)$$

Se asume que $\Phi_t = \Phi_t(\mathbf{X}_t)$, donde $\mathbf{X}_t = (X_t(1), X_t(2), \dots, X_t(m))$. Esto es, el estado del sistema en el tiempo t está completamente determinado por el estado de las componentes en el tiempo t . La función $\Phi_t(\mathbf{X}_t)$ se conoce como función estructura del sistema o simplemente estructura.

Existen varios tipos de sistemas, tales como:

- **Sistemas en serie.** Es un sistema que funciona sólo si todas las componentes funcionan.
- **Sistemas en paralelo.** Es un sistema que funciona sólo si al menos una componente funciona.
- **Sistemas k de n .** Son sistemas que funcionan sólo si al menos k componentes funcionan. Un sistema 1 de m es un sistema en paralelo, y un sistema m de m es un sistema en serie.

- **Estructuras más generales.** Tales como combinaciones de las estructuras anteriores. Por ejemplo, la Figura 2-1 muestra dos estructuras más generales comunes.



a) Estructura de puente

b) Sistema de 5 componentes

Figura 2-1.: Estructuras más generales de sistemas coherentes

Definición 2.1. (Aven & Jensen 1999) Sean $\mathbf{X}_t = (X_t(1), X_t(2), \dots, X_t(m))$, con $X_t(i)$, $i = 1, \dots, m$, definido en (2-1) y Φ_t la función estructura dada en (2-2). Un sistema se dice monótono si

- Φ_t es no decreciente en cada argumento, esto es, el sistema no puede deteriorarse al mejorar el desempeño de una componente (el sistema no puede pasar del estado funcionando a falla, cuando una componente que ha fallado se cambia por una componente en funcionamiento), y
- $\Phi_t(\mathbf{0}) = 0$ y $\Phi_t(\mathbf{1}) = 1$, esto es, si todas las componentes fallan entonces el sistema falla, y si todas las componentes están funcionando el sistema también lo está.

Denote al vector (\cdot, \mathbf{X}_t) como un vector de estado donde el estado de la componente i es funcionando o falla, esto es, $(1_i, \mathbf{X}_t)$ denota un vector de estado donde el estado de la i -ésima componente es igual a 1, y $(0_i, \mathbf{X}_t)$ denota un vector de estado donde el estado de la i -ésima componente es igual a 0; el estado de la componente j , $j \neq i$ es igual a $X_t(j)$. Si se quiere establecer el estado de algunas componentes, digamos $i \in J$ ($J \subset \{1, 2, \dots, m\}$), se usa la notación (\cdot, \mathbf{X}_t) . Por ejemplo, $(\mathbf{0}_J, \mathbf{X}_t)$ denota el vector de estado donde el estado de las componentes en J son todos 0 y el estado de la componente i , $i \notin J$ es igual a $X_t(i)$.

Definición 2.2. (Aven & Jensen 1999) Un sistema se dice coherente si

- Su función estructura Φ_t es no decreciente en cada argumento, y
- Cada componente es relevante, esto es, existe al menos un vector (\cdot, \mathbf{X}_t) tal que $\Phi_t(1_i, \mathbf{X}_t) = 1$ y $\Phi_t(0_i, \mathbf{X}_t) = 0$.

Como consecuencia de las definiciones anteriores se puede ver que si un sistema es coherente también es monótono.

Definición 2.3. (Aven & Jensen 1999) Un conjunto “de corte” K es un conjunto de componentes que si fallan causan la falla del sistema, es decir, $\Phi_t(\mathbf{0}_K, \mathbf{1}) = 0$. Donde $(\mathbf{0}_K, \mathbf{1})$ es un vector de estado en el cual las componentes en K tienen estado 0 y las demás componentes tienen estado 1. Un conjunto “de corte” se dice minimal si no puede ser reducido sin perder su condición de conjunto de corte.

Definición 2.4. (Aven & Jensen 1999) Un conjunto “camino” S es un conjunto de componentes cuyo funcionamiento asegura el funcionamiento del sistema, es decir, $\Phi_t(\mathbf{1}_S, \mathbf{0}) = 1$. Donde $(\mathbf{1}_S, \mathbf{0})$ es un vector de estado en el cual las componentes en S tienen estado 1 y las demás componentes tienen estado 0. Un conjunto “camino” se dice minimal si no puede ser reducido sin perder su condición de conjunto camino.

Observe que conocer la función estructura de un sistema es equivalente a conocer el tipo de sistema. A continuación se definen algunas propiedades de las funciones de distribución que inducen el concepto de deterioro.

2.2. Nociones de deterioro

En esta sección se introducen algunas propiedades de las funciones de distribución que representan el deterioro de una unidad o sistema en el tiempo. Estas definiciones asumen el enfoque estadístico, es decir, sólo el tiempo de vida del sistema es observado. Cambios en el nivel de información bajo el cual se observa el sistema no necesariamente conservan las propiedades que a continuación se describen.

Sea T el tiempo de vida de una unidad o sistema, con función de distribución acumulada $F(t) = P(T \leq t)$.

Primero se definen las propiedades IFR y DFR de una distribución de tiempo de vida F por medio de la probabilidad de confiabilidad condicional

$$P(T > t + x | T > t) = \bar{F}(t + x) / \bar{F}(t), \quad (2-3)$$

donde $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$ es la función de confiabilidad.

2.2.1. Propiedades IFR y DFR de una distribución

Definición 2.5. (Aven & Jensen 1999) Sea T una variable aleatoria positiva con $T \sim F$.

1. F es una distribución con tasa de falla creciente (IFR) si $\bar{F}(t+x)/\bar{F}(t)$ es no creciente en t sobre el dominio de la distribución para cada $x \geq 0$.
2. F es una distribución con tasa de falla decreciente (DFR) si $\bar{F}(t+x)/\bar{F}(t)$ es no decreciente en t sobre el dominio de la distribución para cada $x \geq 0$.

La propiedad IFR (DFR) dice que al incrementar la edad, la probabilidad de sobrevivir x unidades de tiempo más, disminuye (aumenta). La definición anterior no hace uso de la existencia de una densidad f y en consecuencia una función de tasa de falla o función de tasa de riesgo $\lambda(t)$. En el caso de que la densidad exista

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}, \quad (2-4)$$

y se tendría que

$$\bar{F}(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(s) ds \right\}, \quad (2-5)$$

por tanto la propiedad IFR (DFR) es equivalente a una tasa de falla no decreciente (no creciente), ya que

$$\lambda(t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left\{ 1 - \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)} \right\}, \quad (2-6)$$

de donde se obtiene que la propiedad IFR (DFR) implica que $\lambda(t)$ es no decreciente (no creciente). A la inversa si $\lambda(t)$ es no decreciente (no creciente), entonces se puede concluir que (Aven & Jensen 1999)

$$P(T > t+x | T > t) = \exp \left\{ - \int_t^{t+x} \lambda(u) du \right\} \quad (2-7)$$

es no creciente (no decreciente), es decir F es IFR (DFR).

Las funciones de tasa de riesgo también son conocidas como funciones de tasa instantánea de falla. Sea T el tiempo de vida de una unidad o sistema, con función de distribución acumulada $F(t) = P(T \leq t)$ y función de densidad de probabilidad $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$, entonces la función de tasa de riesgo se define como (Meeker & Escobar 1998):

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \quad (2-8)$$

$\lambda(t)$ mide la propensión a falla en el próximo instante de tiempo, dado la sobrevivencia hasta el tiempo t . En otras palabras, la función de tasa de riesgo puede ser interpretada como el número de fallas por unidad de tiempo por unidad bajo riesgo. Es necesario aclarar que $\lambda(t)$ no es una probabilidad y puede tomar valores mayores que 1, pero no puede tomar valores negativos (es una función no negativa).

2.2.2. Funciones de tasa de riesgo más usadas en confiabilidad

Para cada función de distribución acumulada paramétrica se puede calcular la correspondiente función de tasa de riesgo. En confiabilidad se utilizan frecuentemente las distribuciones: Exponencial, Lognormal, Weibull y Gamma. En la Tabla **2-1**, basada en Meeker & Escobar (1998), se presentan las funciones de densidad, $f(t)$, y de tasa de riesgo o falla, $\lambda(t)$, de las distribuciones anteriores.

Tabla 2-1.: Características de algunas distribuciones usuales en confiabilidad

Distribución	Parámetros	Densidad	Tasa de falla
Exponencial	$\alpha > 0$	$f_{\text{exp}}(t) = \alpha e^{-\alpha t}, t > 0$	$\lambda_{\text{exp}}(t) = \alpha$
Lognormal	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$	$f_{\text{lnor}}(t) = \frac{1}{\sigma t} \psi_{\text{nor}} \left[\frac{\log(t) - \mu}{\sigma} \right], t > 0$	$\lambda_{\text{lnor}}(t) = \frac{\psi_{\text{nor}} \left[\frac{\log(t) - \mu}{\sigma} \right]}{\sigma t (1 - \Psi_{\text{nor}} \left[\frac{\log(t) - \mu}{\sigma} \right])}$
Weibull	$\eta, \beta > 0$	$f_{\text{wei}}(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{\beta-1} \exp \left(-\frac{t}{\eta} \right)^{\beta}$	$\lambda_{\text{wei}}(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{\beta-1}$
Gamma	$\alpha, \beta > 0$	$f_{\text{gam}}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} t^{\alpha-1} \exp \left(-\frac{t}{\beta} \right)$	$\lambda_{\text{gam}}(t) = \frac{t^{\alpha-1} \exp \left(-\frac{t}{\beta} \right)}{\beta^{\alpha} \left[\Gamma(\alpha) - \Gamma \left(\frac{t}{\beta}, \alpha \right) \right]}$

donde, ψ_{nor} es la función de densidad de probabilidad de una distribución normal estándar, Ψ_{nor} es la función de distribución acumulada de una normal estándar. $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} z^{\alpha-1} \exp(-z) dz$ y $\Gamma_v(\alpha) = \int_0^v z^{\alpha-1} \exp(-z) dz$ son las funciones gamma y gamma incompleta, respectivamente.

La Figura **2-2** presenta distintas formas de las funciones de tasa de falla en las distribuciones anteriores.

Observe que las distribuciones consideradas pueden cumplir con las propiedades IFR o DFR, de acuerdo al valor de los parámetros de la distribución, en este sentido, las distribuciones más versátiles son la Weibull y la Gamma que pueden estar asociadas a tasas de falla creciente, decreciente y constante.

Existen otros modelos de tasas de falla más generales conocidos como “de forma de bañera” o “bathtub shape” que combinan características IFR y DFR. Una breve definición de estos modelos se presenta a continuación.

Definición 2.6. Distribución bathtub (BTD). (Rajarshi & Rajarshi 1988) Sea $T > 0$ una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad, $f(t)$. Sean $F(t)$ y $\lambda(t)$, la función de distribución y la función tasa de falla, respectivamente. Asuma que $\lambda(t)$ es diferenciable en todo el rango de la variable T . Se dice que T tiene una BTD si existe t_0 : un punto interior del rango de T , tal que $\lambda'(t) < 0$ si $t < t_0$, $\lambda'(t_0) = 0$ y $\lambda'(t) > 0$ si $t > t_0$, donde $\lambda'(t)$ es la primera derivada de la función $\lambda(t)$.

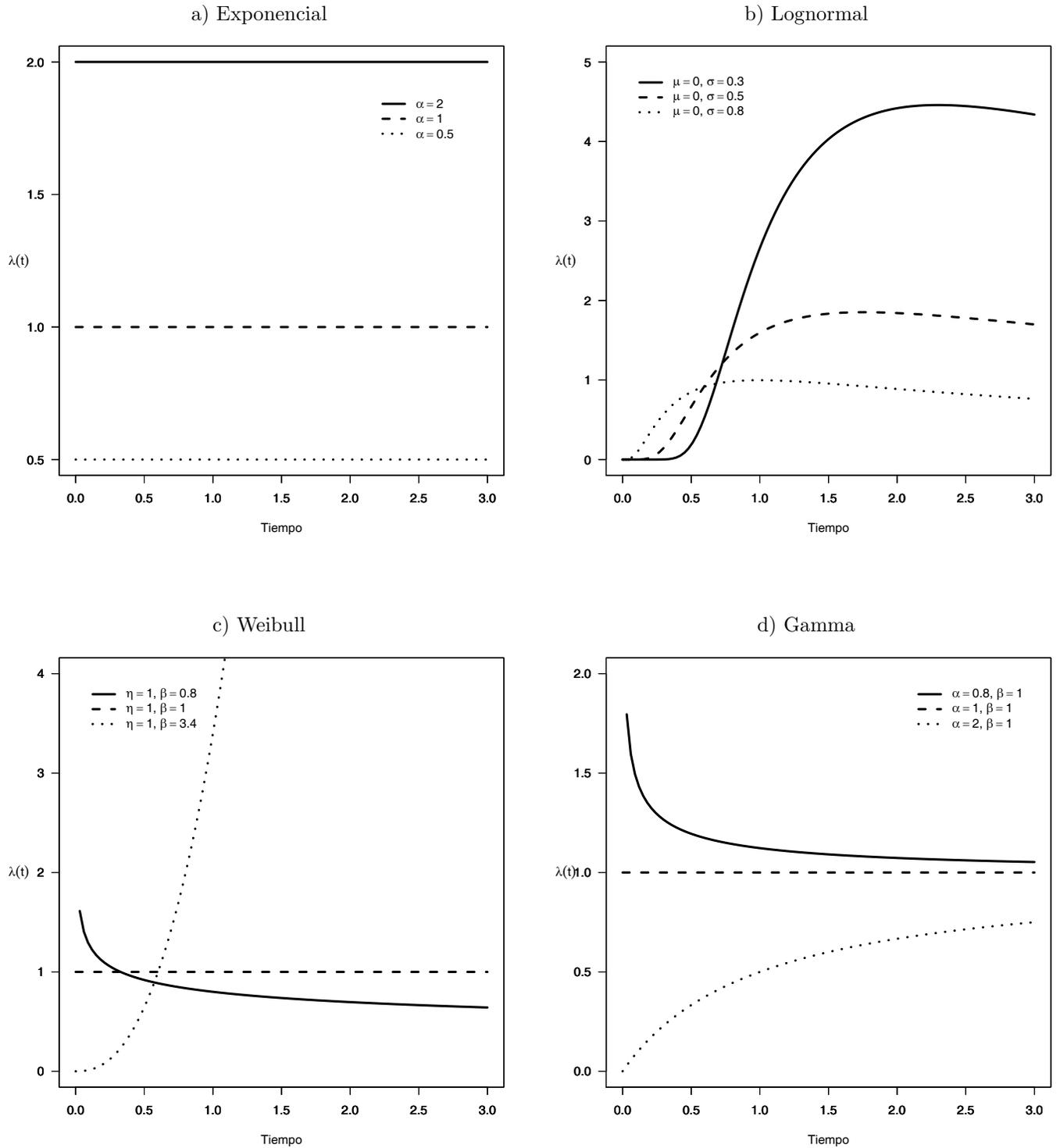


Figura 2-2.: Funciones de tasa de falla para algunas distribuciones

Note que en la Figura 2-2 las distribuciones Weibull y gamma tienen versiones de distribución DFR (línea continua), IFR (línea punteada), y DFR/IFR al mismo tiempo (línea

discontinua). La distribución exponencial en todos sus casos es distribución DFR/IFR a la vez. Por otro lado observe que la distribución lognormal comienza como una distribución IFR y llega a un punto a partir del cual se convierte en una distribución DFR, lo cual es conocido como “forma de bañera invertida” (Lai & Xie 2006).

Las propiedades IFR y DFR en algunos casos pueden ser muy fuertes, por lo cual se han sugerido otras nociones de deterioro como las que se presentan a continuación.

2.2.3. Propiedades IFRA, DFRA, NBU, NBUE, NWU y NWUE

Definición 2.7. (Aven & Jensen 1999)

- i. Una distribución F tiene una tasa promedio de falla creciente (IFRA) si $-(1/t) \ln \bar{F}(t)$ es no decreciente en $t > 0$ sobre $\{t \in \mathbb{R}_+ : \bar{F}(t) > 0\}$
- ii. Una distribución F tiene una tasa promedio de falla decreciente (DFRA) si $-(1/t) \ln \bar{F}(t)$ es no creciente en $t > 0$ sobre $\{t \in \mathbb{R}_+ : \bar{F}(t) > 0\}$

Sea $T \sim F$ una variable aleatoria positiva con esperanza finita. Entonces la distribución del tiempo de vida restante después de $t \geq 0$ es dada por

$$P(T - t > x | T > t) = \frac{\bar{F}(x + t)}{\bar{F}(t)} \quad (2-9)$$

con esperanza

$$\mu(t) = E[T - t | T > t] = \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_0^\infty \bar{F}(u + t) du = \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_t^\infty \bar{F}(u) du, \quad (2-10)$$

para $0 \leq t < t^* = \sup\{t \in \mathbb{R}_+ : \bar{F}(t) > 0\}$. La esperanza condicional $\mu(t)$ es llamada tiempo medio residual en el tiempo t . Otras nociones de deterioro que están relacionadas con el tiempo de vida residual de una componente en la edad t se definen a continuación.

Definición 2.8. (Aven & Jensen 1999) Sea $T \sim F$ una variable aleatoria positiva

- i. F es nueva mejor que usada (NBU), si $\bar{F}(x + t) \leq \bar{F}(x) \bar{F}(t)$ $x, t \geq 0$.
- ii. F es nueva mejor que usada en esperanza (NBUE), si $\mu = E[T] < \infty$ y $\mu(t) \leq \mu$, para $0 \leq t < t^*$.
- iii. F es nueva peor que usada (NWU), si $\bar{F}(x + t) \geq \bar{F}(x) \bar{F}(t)$, para $x, t \geq 0$.
- iv. F es nueva peor que usada en esperanza (NWUE), si $\mu = E[T] < \infty$ y $\mu(t) \geq \mu$, para $0 \leq t < t^*$.

Estas propiedades son nociones intuitivas de deterioro. F es NBU (NWU) significa que la probabilidad de sobrevivir x unidades de tiempo más para una componente de edad t crece en t . Para distribuciones NBUE (NWUE) el tiempo de vida restante para una componente de edad t es menor (mayor) que el tiempo de vida esperado de una nueva componente.

Ahora, el siguiente teorema probado en Aven & Jensen (1999), establece relaciones entre las propiedades anteriores.

Teorema 2.1. (Aven & Jensen 1999) *Sea $T \sim F$ una variable aleatoria positiva con esperanza finita. Entonces se tiene que*

$$i. F \text{ es IFR} \Rightarrow F \text{ es IFRA} \Rightarrow F \text{ es NBU} \Rightarrow F \text{ es NBUE.}$$

$$ii. F \text{ es DFR} \Rightarrow F \text{ es DFRA} \Rightarrow F \text{ es NWU} \Rightarrow F \text{ es NWUE.}$$

Para mayores detalles de estas nociones de deterioro ver Hollander & Proschan (1982).

Todas las nociones antes vistas deberían ser aplicables a sistemas complejos. Si se considera la dinámica en el tiempo de tales sistemas, el objetivo es investigar cómo cambia en el tiempo la confiabilidad del sistema completo si las componentes tienen una de las mencionadas propiedades de deterioro. Es por ello que se debe realizar un análisis de la confiabilidad teniendo en cuenta la dinámica en el tiempo y la relación del sistema con sus componentes en lo que se conoce como modelo de tiempo de vida general.

2.3. El modelo de tiempo de vida general

En la teoría clásica de confiabilidad, el modelamiento y el análisis de los procesos asociados con las políticas de garantía, generalmente no tiene en cuenta la relación entre el sistema y sus componentes en la dinámica del tiempo (González 2009). Este enfoque es conocido como “estadístico” o de “caja negra”. A continuación se presentan tanto el modelo clásico (enfoque *estadístico*) como el modelo de tiempo de vida general (enfoque *físico*) y un ejemplo ilustrativo de las diferencias entre ambos modelos.

Siguiendo a Blischke & Murthy (1996), en la aproximación *estadística* el tiempo hasta la primera falla del sistema T es descrito a través de una función de distribución univariada conocida $F(t)$ que tiene asociada una función de tasa de falla ordinaria $\lambda(t)$ en $\{T > t\}$. En este modelamiento, una filtración o historia, es generada por el tiempo de vida del sistema T , esto es, por $\mathbb{G}^T = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$, con $\mathcal{G}_t = \sigma(T \wedge t) = \sigma\{I(T > s), 0 \leq s \leq t\}$, donde $\sigma(\mathcal{A})$ es la σ -álgebra más pequeña generada por la colección de conjuntos no vacía \mathcal{A} , $a \wedge b = \min\{a, b\}$ y la función $I(A)$ es la función indicadora del conjunto o el

evento A . Por otra parte, si la función de distribución de T es absolutamente continua, el proceso indicador $N_t = I(T \leq t)$ tiene una representación semimartingala regular (SSM) (ver Definición B.10 en Apéndice B)

$$N_t = \int_0^t I(T > s) \lambda(s) ds + M'_t, \quad (2-11)$$

donde $M'_t \in \mathcal{M}_0^2$.

En el análisis de sistemas coherentes en la dinámica del tiempo, se puede usar el *modelo de tiempo de vida general* representado por una SSM del proceso de conteo de las fallas del sistema en relación a la σ -álgebra generada por las fallas de las componentes (Aven & Jensen 1999). Sea T el tiempo de vida del sistema, una variable aleatoria definida sobre un espacio de probabilidad completo (Ω, \mathcal{F}, P) con una filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. En el enfoque *físico* la filtración \mathbb{F} es llamada la pre- t -historia de las componentes o filtración completa, definida por $\mathcal{F}_t = \sigma\{I(S_i > s), 0 \leq s \leq t, i = 1, \dots, m\}$, donde m es el número de componentes del sistema y la variable aleatoria S_i corresponde al tiempo de vida de la componente i . El modelo de tiempo de vida general es definido por el proceso indicador $N_t = I(T \leq t)$ que corresponde al proceso de conteo relativo al proceso puntual simple $(T_n), n \geq 1$, donde $T = T_1$ y $T_n = \infty$ para $n \geq 2$. Este proceso tiene una representación SSM con una \mathbb{F} -martingala $M_t \in \mathcal{M}_0^2$ y un proceso estocástico no negativo $\lambda = (\lambda_t)$:

$$I(T \leq t) = \int_0^t I(T > s) \lambda_s ds + M_t, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (2-12)$$

El modelo de tiempo de vida general es entonces definido por la filtración \mathbb{F} y la correspondiente \mathbb{F} -representación semimartingala regular del proceso indicador.

Definición 2.9. (Aven & Jensen 1999) *El proceso $\lambda = (\lambda_t)_{t \geq 0}$, en la representación semimartingala regular (2-12) es llamado la \mathbb{F} -tasa o intensidad de falla, y el compensador $\Lambda_t = \int_0^t I(T > s) \lambda_s ds$ es llamado el \mathbb{F} -proceso de riesgo.*

El proceso $\lambda = (\lambda_t)_{t \geq 0}$, es un proceso estocástico progresivamente medible (cuyo valor depende de la historia \mathcal{F}_t y de la estructura del sistema coherente de m componentes), tal que $E \left[\int_0^t \lambda_s ds \right] < \infty, \forall t \geq 0$, y el proceso $M = (M_t)_{t \geq 0}$ es un \mathcal{F}_t -martingala de media cero. La existencia de la representación SSM anterior implica que T es un \mathcal{F}_t -tiempo de parada totalmente inaccesible (ver Definición B.5 de tiempo de parada totalmente inaccesible en el Apéndice B) y $M_t \in \mathcal{M}_0^2$.

Modelo de confiabilidad clásico vs. modelo de tiempo de vida general.

Para apreciar la diferencia entre el enfoque *estadístico* y el enfoque *físico* usando el

modelo de tiempo de vida general, Aven & Jensen (1999) describen el siguiente caso: considere un sistema coherente de $m = 2$ componentes en paralelo, esto es, el tiempo de vida del sistema es $T = S_1 \vee S_2$, donde $a \vee b = \max\{a, b\}$. Suponga que S_1 y S_2 son variables aleatorias exponenciales independientes, con parámetro de intensidad de falla α_1 y α_2 respectivamente. Bajo un enfoque *estadístico* T tiene una tasa de falla ordinaria dada por

$$\lambda(t) = \frac{\alpha_1 e^{-\alpha_1 t} + \alpha_2 e^{-\alpha_2 t} - (\alpha_1 + \alpha_2) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}}{e^{-\alpha_1 t} + e^{-\alpha_2 t} - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}} \quad (2-13)$$

Esta fórmula bastante compleja no revela nada acerca de la estructura del sistema ni incorpora la información del estado de las componentes en el instante t . Así, por cálculo diferencial se puede mostrar que para $\alpha_1 \neq \alpha_2$ la tasa de falla $\lambda(t)$ es creciente en $(0, t^*)$ y es decreciente en (t^*, ∞) para algún $t^* > 0$. Por el contrario, en el enfoque *físico* bajo el modelo de tiempo de vida general, la tasa de falla del sistema es el proceso estocástico $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ tal que $I(T > t) \lambda_t = \alpha_1 I(S_2 \leq t < S_1) + \alpha_2 I(S_1 \leq t < S_2)$, esto es

$$I(T > t) \lambda_t = \begin{cases} \alpha_1, & \text{en } \{S_1 > t, S_2 \leq t\} \\ \alpha_2, & \text{en } \{S_1 \leq t, S_2 > t\} \end{cases} \quad (2-14)$$

de donde, en $\{T > t\}$

$$\lambda_t = \alpha_1 I(S_2 \leq t) + \alpha_2 I(S_1 \leq t). \quad (2-15)$$

Así, en cuanto ambas componentes funcionen, ninguna falla del sistema puede ocurrir, y cuando una de las componentes falla la tasa de falla del sistema es igual a la tasa de falla de la componente que todavía no ha fallado. Este resultado es más simple que aquel obtenido en el enfoque *estadístico*, y usa la información del estado de las componentes en el instante t , representada por la filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, bajo la cual el sistema coherente es observado al nivel de sus componentes. Con este enfoque también es posible cambiar el nivel de información y la tasa de falla ordinaria se puede calcular a partir de λ_t en el menor nivel de información posible, esto es, cuando sólo se tiene información del estado del sistema pero no de los tiempos de vida de las componentes.

2.4. Existencia del proceso de tasa de falla

Sea N un proceso estocástico que admite la representación SSM. Es posible formular condiciones más generales sobre N , que las mostradas en el Teorema B.1, dadas en Apéndice B, para asegurar la representación SSM en (2-12).

El siguiente lema establece que si T es un tiempo de parada con respecto a \mathbb{F} , entonces una representación (2-12) sólo existe para tiempos de parada que sean totalmente inaccesibles.

Lema 2.1. (Aven & Jensen 1999) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ un espacio de probabilidad filtrado y T un \mathbb{F} -tiempo de parada.

1. Si el proceso $N = (N_t)$, $N_t = I(T \leq t)$, tiene una representación SSM

$$N_t = \int_0^t I(T > u) \lambda_u du + M_t, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (2-16)$$

entonces T es un tiempo de parada totalmente inaccesible y $M_t \in \mathcal{M}_0^2$

2. Si T es un tiempo de parada totalmente inaccesible, entonces el proceso $N = (N_t)$, $N_t = I(T \leq t)$, tiene una única descomposición $N = A + M$, P -c.s. (donde P -c.s., indica que lo anterior se cumple con probabilidad 1), donde M es una martingala uniformemente integrable y A es continuo P -c.s. (el compensador previsible).

Se puede concluir del Lema anterior que la clase de modelos de tiempo de vida con un compensador A de la forma $A_t = \int_0^t I(T > u) \lambda_u du$ es lo suficientemente rica para incluir en la práctica la mayoría de sistemas en tiempo continuo (Aven & Jensen 1999).

Para un nivel de información \mathbb{F} dado, en general se puede encontrar o identificar el proceso de tasa de falla bajo las condiciones del Teorema B.2 como el límite

$$I(T > t) \lambda_t = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} P(t < T \leq t + h | \mathcal{F}_t). \quad (2-17)$$

Otra forma de verificar si un proceso dado λ es la tasa de falla de algún sistema es mostrar que el correspondiente proceso de riesgo define el compensador de $I(T \leq t)$. En algunos casos especiales λ_t se puede determinar en una forma más explícita, como por ejemplo para sistemas complejos.

Aven & Jensen (1999) presentan un método para calcular los procesos de intensidad de sistemas complejos sobre condiciones generales. En este método el \mathcal{F}_t -proceso de intensidad de falla para el tiempo de vida T de un sistema complejo se define como

$$\lambda_t = \sum_{J \in \Gamma_{\Phi}(t)} \lambda_t(J), \quad (2-18)$$

donde, cada $J = \{j_1, \dots, j_r\} \subset \{1, \dots, m\}$ es un conjunto de componentes que pueden fallar simultáneamente, llamado bloque o patrón de falla; $\Gamma_{\Phi}(t)$ es el conjunto de los bloques que son críticos para el sistema en el instante t , esto es, aquellas componentes cuya falla en t^- resultaría en la falla del sistema en t ; y $\lambda_t(J)$ es el \mathcal{F}_t -proceso de intensidad de falla correspondiente a S_J , el tiempo de ocurrencia del bloque J .

2.4.1. Ejemplos de procesos de tasa de falla

Para ilustrar el uso de la ecuación (2-18) veamos algunos ejemplos de procesos de tasa de falla en sistemas coherentes. Asuma que $P(S_i = S_j) = 0$, $\forall i \neq j$, es decir, que no

existen fallas simultáneas, y que $S_i, i = 1, \dots, m$ es un tiempo de parada totalmente inaccesible.

Sistema serie-paralelo: Considere el siguiente sistema de una componente en serie con un sistema de dos componentes en paralelo, presentado en la Figura 2-3.

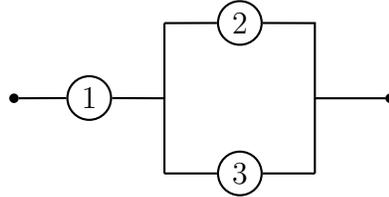


Figura 2-3.: Sistema serie-paralelo

Sean T y S_i los tiempos de vida del sistema y de la i -ésima componente $i = 1, 2, 3$, respectivamente. Sea $\lambda^i(t)$, $i = 1, 2, 3$ la función de tasa de falla de la i -ésima componente. Asumiendo que las tres componentes son independientes, note que cuando las tres componentes funcionan $\Gamma_{\Phi}(t) = \{\{1\}\}$. Si una de las componentes 2 o 3 falla, digamos la 2, entonces $\Gamma_{\Phi}(t) = \{\{1\}, \{3\}\}$. Si fallara primero la 3, entonces $\Gamma_{\Phi}(t) = \{\{1\}, \{2\}\}$. Luego,

$$I(T > t) \lambda_t = \begin{cases} \lambda^1(t) & \text{en } \{S_1 > t, S_2 > t, S_3 > t\} \\ \lambda^1(t) + \lambda^3(t) & \text{en } \{S_1 > t, S_2 \leq t, S_3 > t\} \\ \lambda^1(t) + \lambda^2(t) & \text{en } \{S_1 > t, S_2 > t, S_3 \leq t\} \end{cases} \quad (2-19)$$

La expresión anterior se reduce a,

$$I(T > t) \lambda_t = I(T > t) [\lambda^1(t) + \lambda^2(t) I(S_3 \leq t) + \lambda^3(t) I(S_2 \leq t)], \quad (2-20)$$

de donde,

$$\lambda_t = \lambda^1(t) + \lambda^2(t) I(S_3 \leq t) + \lambda^3(t) I(S_2 \leq t). \quad (2-21)$$

Sistema de 3 componentes en paralelo: Suponga un sistema de tres componentes en paralelo como el mostrado en la Figura 2-4 con tiempo de vida T . Sea S_i el tiempo de vida de la i -ésima componente y $\lambda^i(t)$ la correspondiente función de tasa de falla ($i = 1, 2, 3$).

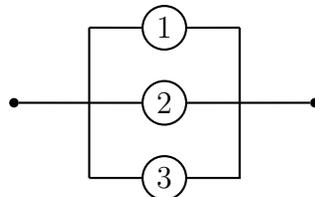


Figura 2-4.: Sistema de 3 componentes en paralelo

Asumiendo que las componentes son independientes y teniendo en cuenta que el sistema funciona cuando al menos una de las componentes funciona (sistema 1 de 3), entonces $\Gamma_{\Phi}(t) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ y el proceso de tasa de falla es tal que:

$$I(T > t) \lambda_t = \begin{cases} \lambda^1(t) & \text{en } \{S_1 > t, S_2 \leq t, S_3 \leq t\} \\ \lambda^2(t) & \text{en } \{S_1 \leq t, S_2 > t, S_3 \leq t\} \\ \lambda^3(t) & \text{en } \{S_1 \leq t, S_2 \leq t, S_3 > t\} \end{cases} \quad (2-22)$$

La expresión anterior se puede escribir como,

$$I(T > t) \lambda_t = I(T > t) [\lambda^1(t) I(S_2 \vee S_3 \leq t) + \lambda^2(t) I(S_1 \vee S_3 \leq t) + \lambda^3(t) I(S_1 \vee S_2 \leq t)], \quad (2-23)$$

donde,

$$\lambda_t = \lambda^1(t) I(S_2 \vee S_3 \leq t) + \lambda^2(t) I(S_1 \vee S_3 \leq t) + \lambda^3(t) I(S_1 \vee S_2 \leq t). \quad (2-24)$$

Sistema 2 de 4: Asuma un sistema con estructura 2 de 4 componentes (ver Figura 2-5). Sea S_i , $i = 1, 2, 3, 4$, el tiempo de vida de la i -ésima componente y $\lambda^i(t)$ la correspondiente función de tasa de falla.

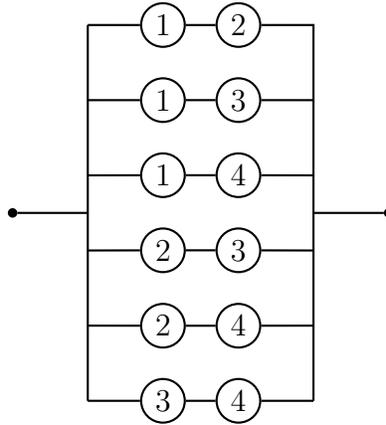


Figura 2-5.: Sistema 2 de 4

Suponga que las 4 componentes son independientes. Sabemos que este sistema funciona si al menos 2 de las 4 componentes funcionan. Luego el proceso de tasa de falla es:

$$I(T > t) \lambda_t = \begin{cases} \lambda^1(t) + \lambda^2(t) & \text{en } \{S_1 > t, S_2 > t, S_3 \leq t, S_4 \leq t\} \\ \lambda^1(t) + \lambda^3(t) & \text{en } \{S_1 > t, S_2 \leq t, S_3 > t, S_4 \leq t\} \\ \lambda^1(t) + \lambda^4(t) & \text{en } \{S_1 > t, S_2 \leq t, S_3 \leq t, S_4 > t\} \\ \lambda^2(t) + \lambda^3(t) & \text{en } \{S_1 \leq t, S_2 > t, S_3 > t, S_4 \leq t\} \\ \lambda^2(t) + \lambda^4(t) & \text{en } \{S_1 \leq t, S_2 > t, S_3 \leq t, S_4 > t\} \\ \lambda^3(t) + \lambda^4(t) & \text{en } \{S_1 \leq t, S_2 \leq t, S_3 > t, S_4 > t\} \end{cases} \quad (2-25)$$

La expresión anterior se puede escribir como,

$$\begin{aligned}
 I(T > t) \lambda_t = & I(T > t) [(\lambda^1(t) + \lambda^2(t)) I(S_3 \vee S_4 \leq t) + (\lambda^1(t) + \lambda^3(t)) I(S_2 \vee S_4 \leq t) \\
 & + (\lambda^1(t) + \lambda^4(t)) I(S_2 \vee S_3 \leq t) + (\lambda^2(t) + \lambda^3(t)) I(S_1 \vee S_4 \leq t) \\
 & + (\lambda^2(t) + \lambda^4(t)) I(S_1 \vee S_3 \leq t) + (\lambda^3(t) + \lambda^4(t)) I(S_1 \vee S_2 \leq t)],
 \end{aligned} \tag{2-26}$$

donde,

$$\begin{aligned}
 \lambda_t = & (\lambda^1(t) + \lambda^2(t)) I(S_3 \vee S_4 \leq t) + (\lambda^1(t) + \lambda^3(t)) I(S_2 \vee S_4 \leq t) \\
 & + (\lambda^1(t) + \lambda^4(t)) I(S_2 \vee S_3 \leq t) + (\lambda^2(t) + \lambda^3(t)) I(S_1 \vee S_4 \leq t) \\
 & + (\lambda^2(t) + \lambda^4(t)) I(S_1 \vee S_3 \leq t) + (\lambda^3(t) + \lambda^4(t)) I(S_1 \vee S_2 \leq t).
 \end{aligned} \tag{2-27}$$

2.5. Cambio en el nivel de información

Una de las ventajas de la técnica semimartingala es la posibilidad de estudiar la evolución aleatoria de un proceso estocástico en diferentes niveles de información. Aquí se usa el Teorema de proyección (ver Teorema B.2, en el Apéndice B). Por ejemplo el Teorema de proyección se puede aplicar al proceso indicador del tiempo de vida

$$N_t = I(T \leq t) = \int_0^t I(T > u) \lambda_u du + M_t. \tag{2-28}$$

Si por ejemplo el tiempo de vida puede observarse en $\{T \leq t\} \in \mathcal{A}_t$, entonces el cambio del nivel de información desde $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ a $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ lleva de (2-28) a la representación

$$\widehat{N}_t = E[I(T \leq t) | \mathcal{A}_t] = I(T \leq t) = \int_0^t I(T > u) \widehat{\lambda}_u du + \overline{M}_t, \tag{2-29}$$

donde $\widehat{\lambda}_u = E[\lambda_u | \mathcal{A}_u]$.

Un ejemplo ilustrativo

Para ilustrar cómo funcionan en la práctica los cambios en el nivel de información, considere el ejemplo de dos componentes en paralelo previamente presentado en la página 15.

Observe que para el tiempo de vida del sistema $T = S_1 \vee S_2$, la filtración de información completa es dada por

$$\mathcal{F}_t = \sigma(I(S_1 > u), I(S_2 > u), 0 \leq u \leq t). \tag{2-30}$$

En este caso la \mathbb{F} -representación SSM (2-12) es dada por

$$\begin{aligned} N_t &= I(T \leq t) = \int_0^t I(T > u) \lambda_u du + M_t \\ &= \int_0^t I(T > u) \{ \alpha_1 I(S_2 \leq u) + \alpha_2 I(S_1 \leq u) \} du + M_t. \end{aligned} \quad (2-31)$$

Veamos ahora cómo cambia el proceso de tasa de falla al cambiar el nivel de información, es decir la filtración bajo la cual es observado el proceso de falla del sistema.

- a) Suponga que sólo se tiene información del tiempo de vida de la primera componente S_1 y del tiempo de vida del sistema T .

En tal caso

$$\mathcal{A}_t = \sigma(I(T > u), I(S_1 > u), 0 \leq u \leq t) \quad (2-32)$$

y aplicando el Teorema de proyección, se obtiene la representación

$$\widehat{N}_t = E[I(T \leq t) | \mathcal{A}_t] = I(T \leq t) = \int_0^t I(T > u) \widehat{\lambda}_u du + \overline{M}_t, \quad (2-33)$$

donde,

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_u &= E[\lambda_u | \mathcal{A}_u] \\ &= E[\alpha_1 I(S_2 \leq u) + \alpha_2 I(S_1 \leq u) | \mathcal{A}_u] \\ &= E[\alpha_1 I(S_2 \leq u) + \alpha_2 I(S_1 \leq u) | T > u, S_1 > u] I(S_1 > u) \\ &\quad + E[\alpha_1 I(S_2 \leq u) + \alpha_2 I(S_1 \leq u) | T > u, S_1 \leq u] I(S_1 \leq u) \\ &= \alpha_1 P(S_2 \leq u) I(S_1 > u) + \alpha_2 I(S_1 \leq u). \end{aligned} \quad (2-34)$$

- b) Asuma ahora, que sólo se observa el tiempo de vida del sistema T . En ese caso

$$\mathcal{A}_t = \sigma(I(T > u), 0 \leq u \leq t), \quad (2-35)$$

y aplicando el Teorema de proyección, se obtiene la representación

$$\widehat{N}_t = E[I(T \leq t) | \mathcal{A}_t] = I(T \leq t) = \int_0^t I(T > u) \widehat{\lambda}_u du + \overline{M}_t, \quad (2-36)$$

donde,

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_u &= E[\lambda_u | \mathcal{A}_u] \\ &= E[\alpha_1 I(S_2 \leq u) + \alpha_2 I(S_1 \leq u) | \mathcal{A}_u] \\ &= E[\alpha_1 I(S_2 \leq u) + \alpha_2 I(S_1 \leq u) | T > u] \\ &= \frac{\alpha_1 P(S_2 \leq u, T > u) + \alpha_2 P(S_1 \leq u, T > u)}{P(T > u)} \\ &= \frac{\alpha_1 e^{-\alpha_1 u} + \alpha_2 e^{-\alpha_2 u} - (\alpha_1 + \alpha_2) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)u}}{e^{-\alpha_1 u} + e^{-\alpha_2 u} - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)u}}. \end{aligned} \quad (2-37)$$

En la próxima Sección se introducen los modelos de reparo mínimo con especial énfasis en aquellos que reparan mínimamente un sistema complejo observado al nivel de sus componentes.

2.6. Modelos de reparo mínimo

En la literatura relacionada a los modelos de reparo se le ha prestado atención especial a los denominados modelos de reparo mínimo. En el cual, en lugar de reemplazar un sistema que falló por uno nuevo, se hace una reparación que restaura el sistema a la condición que tenía justo antes de la falla (Aven & Jensen 1999).

Conceptualmente un reparo mínimo es descrito (y definido) como:

- Un reparo mínimo es aquel que después de realizado no altera la tasa de falla del sistema o unidad (Barlow & Hunter 1960).
- Un reparo mínimo es aquel que deja al sistema o unidad en la misma condición que tenía justo antes de la falla (Phelps 1983).

De acuerdo a Aven & Jensen (1999), la definición del estado del sistema justo antes de la falla depende de la información que se tenía del mismo, de manera que es diferente si se observan todas las componentes de un sistema coherente, o si sólo se observa la falla del sistema completo. En el primer caso el tiempo de vida de la componente reparada está asociado con el tiempo de vida residual del sistema. En el segundo caso la única información acerca de la condición del sistema justo antes de la falla es la edad. Así, un reparo mínimo en este caso significaría reemplazar el sistema por otro de la misma edad que aún no ha fallado. Los reparos mínimos de este tipo son llamados reparos mínimos de *caja negra* o *estadísticos*, mientras que los reparos mínimos sobre componentes son llamados reparos mínimos *físicos*.

Un ejemplo ilustrativo (Aven & Jensen 1999)

Considere un sistema simple en paralelo de dos componentes con tiempos de vida de las componentes X_1 y X_2 independientemente distribuidos exponencial con parámetro $\alpha = 1$, donde sólo se permite exactamente un reparo mínimo.

- **Reparo mínimo físico.** Después de la falla en $T = T_1 = X_1 \vee X_2$ la componente que causó la falla del sistema es reparada mínimamente. Como los tiempos de vida están distribuidos exponencialmente, el tiempo de vida adicional es dado por una variable aleatoria X_3 también con distribución exponencial e independiente de X_1 y X_2 . Después del reparo mínimo, el tiempo de vida total $T_1 + X_3$ tiene la distribución

$$P(T_1 + X_3 > t) = e^{-t} (3t + e^{-t}). \quad (2-38)$$

- **Reparo mínimo de caja negra.** El tiempo de vida $T = T_1 = X_1 \vee X_2$ hasta la primera falla del sistema tiene distribución $P(T_1 \leq t) = (1 - e^{-t})^2$ y la tasa de falla $\lambda(t) = 2 \left[\frac{1 - \exp(-t)}{2 - \exp(-t)} \right]$. El tiempo de vida adicional $T_2 - T_1$ hasta la segunda falla se asume que tiene la distribución condicional

$$P(T_2 - T_1 \leq x | T_1 = t) = P(T_1 \leq t + x | T_1 > t) = 1 - e^{-x} \frac{2 - e^{-(t+x)}}{2 - e^{-t}}. \quad (2-39)$$

Integración lleva a la distribución del tiempo de vida total T_2 :

$$P(T_2 - T_1 \leq x | T_1 = t) = P(T_1 \leq t + x | T_1 > t) = 1 - e^{-x} \left[\frac{2 - e^{-(t+x)}}{2 - e^{-t}} \right]. \quad (2-40)$$

Note que para el ejemplo se tiene el proceso de tasa de falla es $\lambda_t = I(X_1 \wedge X_2 \leq t)$ en el nivel de componentes y $\lambda'(t) = 2 \left[\frac{1 - \exp(-t)}{2 - \exp(-t)} \right]$ en el nivel de caja negra. Así, se tienen dos representaciones *SSM* del mismo proceso puntual simple $I(T_1 \leq t)$, así:

$$\begin{aligned} I(T_1 \leq t) &= \int_0^t I(T_1 > s) I(X_1 \wedge X_2 \leq s) ds + M_t \\ &= \int_0^t I(T_1 > s) 2 \left[\frac{1 - \exp(-t)}{2 - \exp(-t)} \right] ds + M'_t. \end{aligned} \quad (2-41)$$

El proceso N que cuenta el número de reparos mínimos sobre el nivel de componentes es dado por:

$$N_t = \int_0^t I(X_1 \wedge X_2 \leq s) ds + M_t. \quad (2-42)$$

Este es un proceso Poisson con retraso, cuya intensidad (de reparo) es igual a 1 después de la primera falla de componente. El proceso N' que cuenta el número de reparos mínimos en el nivel de caja negra corresponde a:

$$N'_t = \int_0^t I(T_1 > s) 2 \left[\frac{1 - \exp(-t)}{2 - \exp(-t)} \right] ds + M'_t. \quad (2-43)$$

Este es un proceso Poisson no homogéneo con una intensidad que corresponde a la tasa de falla ordinaria de T_1 . Mediante cálculos elementales se obtiene

$$E[N_t] = t - \frac{1}{2} (1 - e^{-2t}) \geq E[N'_t] = t - \ln(2 - e^{-t}) \quad (2-44)$$

Para interpretar este resultado se debe señalar que en el nivel de componentes sólo se repara la componente crítica que provoca la falla del sistema, mientras que en el nivel de caja negra se sustituye el sistema por otro de la misma edad que aún no ha fallado, esto es, con ambas componentes funcionando.

Para mayores detalles sobre los modelos de reparo mínimo se pueden consultar los siguientes textos Nakagawa (2005), Tadj, Ouali, Yacout & Ait-Kadi (2011).

El modelamiento de los reparos mínimos en sistemas coherentes observados al nivel de sus componentes se ampliará en el siguiente capítulo. Por ahora se prestará especial atención a la definición de los costos de garantía denominados descontados, que se describen en la siguiente sección.

2.7. Costos de garantía descontados y la política de garantía pro-rata (PRW)

En esta sección se presentan los conceptos básicos acerca de costos de garantía descontados, la política PRW y cómo esta última afecta la estimación de los costos de garantía descontados.

2.7.1. Costos de garantía descontados

El análisis de los costos de garantía en el tiempo es útil para descontar los costos a su valor actual. Para ello se pueden utilizar varias funciones de descuento, una de las más comunes es la función exponencial. Bajo esta modalidad de descuento, el valor actual de una cantidad C en un instante futuro t es dado por (Blischke & Murthy 1996)

$$Cd(t) = Ce^{-\rho t} \quad (2-45)$$

donde $d(t)$ es la función de descuento y ρ es la tasa de descuento. La ecuación anterior se puede usar para determinar los valores presentes en las garantías no renovables, es decir, aquellas que ofrecen un período de garantía que no es afectado por la sustitución o reparo del producto inicial. Bajo descuento, sea $q_d(t)$ la función de reembolso bajo descuento para el tiempo t , entonces se define el reembolso esperado para el consumidor en el instante t , denotado por $E[q_d(t)]$, como (Blischke & Murthy 1996)

$$E[q_d(t)] = E[d(t)q(t)] = \int_0^{\infty} d(u)q(u)dF(u), \quad (2-46)$$

donde $q(t)$ es la función de reembolso debido a una falla durante el periodo de garantía y $F(t)$ es la función de distribución acumulada de T . En principio, es posible usar otras funciones de descuento. En general se pretende calcular los costos de descuento desde la perspectiva del vendedor o fabricante, lo cual es relevante debido a que éste generalmente maneja un gran volumen de ventas, mientras que normalmente el comprador sólo adquiere un producto. Sin embargo, de una forma similar se pueden determinar los costos descontados desde la perspectiva del comprador por cada producto.

Hay dos métodos usados para el descuento en el tiempo: el descuento continuo y el descuento discreto. Para el primero la función de descuento es dada por $d(t) = e^{-\rho t}$ y para el segundo $d(t) = 1/(1 + \rho)^t$ (Bai & Pham 2004).

2.7.2. Política PRW

Bajo esta política el fabricante se compromete a proporcionar un producto de reemplazo o una reparación del producto, a un costo pro-rata, esto es, a un costo proporcional al tiempo de uso del producto, para cualquier producto que falle hasta alcanzar un tiempo de vida de al menos W (Blischke & Murthy 1996).

La proporcionalidad puede ser una función lineal o no lineal de $W - T$, donde T es la edad de falla y es menor que W . Dependiendo de la función de proporcionalidad, ésta a su vez define una familia de políticas PRW. La mayoría de los neumáticos de automóviles y las baterías se venden bajo la política PRW, donde al comprador se le ofrece el reemplazo de un producto que falló a un menor precio, sin la opción de un reembolso en efectivo (Blischke & Murthy 1996).

La política PRW requiere que los clientes estén dispuestos a aceptar su parte de la reparación o el costo del reemplazo, de tal forma que el fabricante pague el excedente (Thomas 2005). Esta política se aplica comúnmente a los artículos no reparables, sin embargo, esta política podría ser utilizada para productos reparables debido a que (Wang & Pham 2006):

- i. Los consumidores podrían estar dispuestos a compartir el costo de reparación con los emisores de garantía por los beneficios que han recibido después de la compra;
- ii. Los emisores de garantía tiene la opción de ofrecer una garantía más amplia, que puede ser más atractiva para los consumidores, gracias a que parte de los costos son compartidos con éstos últimos.

2.7.3. Costos de garantía descontados para una póliza PRW

Siguiendo a Bai & Pham (2004), para ilustrar algunos resultados considere un sistema en serie con m componentes reparables y estadísticamente independientes, bajo una política PRW con un período de garantía fijo W . Asuma que se monitorea el sistema al nivel de sus componentes. El interés se concentra en obtener expresiones matemáticas para los costos esperados descontados y la varianza de tales costos.

Se sabe que un sistema en serie falla si y sólo si cualquiera de sus componentes falla, por tanto asumiendo que las fallas simultáneas de las componentes son imposibles, cada

vez que un sistema en garantía falle antes de W , sólo debe de haber una y sólo una componente en el sistema que ha fallado. Bajo la política PRW, la componente que falló se identifica y repara (por simplicidad, se supone que cada reparación es instantánea), de forma que el consumidor obtendrá un reembolso en función del costo y la edad de la componente que falló en lugar del precio total del producto, se puede definir entonces una función de reembolso, $q(\cdot)$, como sigue: Sea S_{ij} , $0 \leq S_{ij} \leq W$, un tiempo de falla del sistema correspondiente el j -ésimo tiempo de falla de la componente i , entonces, el reembolso por garantía debida a esta falla es dada por

$$q(S_{ij}) = c_i \left(1 - \frac{S_{ij}}{W}\right). \quad (2-47)$$

Sea $d(\cdot)$ la función de descuento y defina $Z_i(W)$, $\forall i, i \in \{1, \dots, m\}$ como

$$Z_i(W) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N_i(W)} q(S_{ij}) d(S_{ij}) & \text{si } N_i(W) \in \{1, 2, \dots\} \\ 0 & \text{si } N_i(W) = 0 \end{cases}. \quad (2-48)$$

El reembolso descontado total para un sistema en serie en garantía se puede escribir como

$$C(W) = \sum_{j=1}^m Z_i(W). \quad (2-49)$$

3. Modelo de reparo mínimo y costos de garantía

En este capítulo se presentan en el marco teórico de los procesos martingala, algunos resultados obtenidos por González & Bueno (2011) que serán utilizados en la propuesta de construcción de bandas de confianza. Entre ellos se destaca la estimación martingala del costo medio de garantía descontado para sistemas coherentes bajo reparo mínimo físico, la cual es insesgada y consistente, y que permite obtener un intervalo de confianza aproximado del $(1 - \gamma) 100\%$.

Como se mencionó previamente, reparar mínimamente un sistema (reparable) significa restaurar su tasa de falla a la condición inmediatamente anterior a la falla. La definición del estado del sistema inmediatamente antes de la falla depende considerablemente del nivel de información que se tiene del estado del sistema y de sus componentes. Así, es posible distinguir dos tipos básicos de reparo mínimo: reparo mínimo estadístico (caja negra) y reparo mínimo físico. En el primer tipo, el reparo mínimo es equivalente a sustituir el sistema completo por otro con la misma edad que tenía el sistema antes de haber fallado. En el segundo tipo se supone que el sistema es observado al nivel de sus componentes y el reparo mínimo significa que sólo es reparada la componente crítica que causó la falla del sistema, de forma que éste último vuelva a su condición inmediatamente antes de la falla.

Asuma que sobre el sistema coherente se hacen reparos mínimos físicos, esto es bajo la aproximación física del modelo de falla general presentado en la Sección 2.3, suponga que el sistema tiene m componentes, siendo T el tiempo de vida del sistema, S_i el tiempo de vida de la componente i , y \tilde{N}_t el número de reparos mínimos del sistema en el intervalo $[0, t]$, definidos en un espacio de probabilidad completo (Ω, \mathcal{F}, P) con la filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$,

$$\mathcal{F}_t = \sigma \left(\tilde{N}_s, I(S_i > s), 0 \leq s \leq t, i = 1, \dots, m \right), \quad (3-1)$$

esto es, el proceso de falla y reparo del sistema es observado al nivel de sus m componentes. Considere que las siguientes condiciones son válidas:

- a) $0 < S_i < \infty$ P -c.s., $i = 1, \dots, m$.

- b) Para todo $i \neq j$, $P(S_i = S_j) = 0$, esto es, no hay dos componentes que fallen simultáneamente.
- c) Todos los tiempos de vida S_i son \mathcal{F}_t -tiempos de parada totalmente inaccesibles (por tanto el tiempo de vida del sistema T es un \mathcal{F}_t -tiempo de parada totalmente inaccesible) y consecuentemente, todos los compensadores A^i de los procesos $N_t^i = I(S_i \leq t)$, respectivamente, son continuos P -c.s.

Debido a que la condición b) implica que los bloques de falla (conjuntos de componentes que pueden fallar simultáneamente) observables en un instante t constan de uno de los m componentes (esto es, $\{i\}, i = 1, \dots, m$), se consideran los m (únicos P -c.s.) compensadores A^i correspondientes a los procesos de conteo simples $N_t^i = I(S_i \leq t)$, obtenidos de la descomposición de Doob-Meyer,

$$N_t^i = A_t^i + M_t^i, \quad M_t^i \in \mathcal{M}_0^2, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3-2)$$

Suponga que cada componente tiene una tasa de falla determinística $\lambda^i(t)$, el compensador en la ecuación anterior es dado por,

$$A_t^i = \int_0^t I(S_i > s) \lambda^i(s) ds < \infty \quad P\text{-c.s.}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3-3)$$

Sea $N_t = I(T \leq t)$. De la descomposición de Doob-Meyer se tiene que,

$$N_t = A_t + M_t, \quad M_t \in \mathcal{M}_0^2. \quad (3-4)$$

Asumiendo que en $\{T > t\}$, T tiene una \mathcal{F}_t -intensidad λ_t , el compensador de $N_t = I(T \leq t)$ es dado por

$$A_t = \int_0^t I_{\{T > s\}} \lambda_s ds < \infty \quad P\text{-c.s.} \quad (3-5)$$

La componente i contribuye a la falla del sistema después de su nivel crítico Y_i (Aven & Jensen 1999), esto es, el primer instante después del cual la falla de la componente i causa la falla del sistema. Sean $K_j, j = 1, \dots, r$, los conjuntos de corte minimales del sistema (r es el número total de éstos conjuntos en el sistema), esto es, cada K_j es un subconjunto mínimo de componentes cuya falla causa la falla del sistema (ver Barlow & Proschan (1981)). Entonces, el nivel crítico Y_i es el \mathcal{F}_t -tiempo de parada

$$Y_i = \min_{j:i \in K_j} \max_{u \in K_j - \{i\}} S_u. \quad (3-6)$$

Se adopta $Y_i = \infty$ si la componente o el sistema falla antes de que tal componente sea crítica, esto es, si $S_i \leq Y_i$ o $T \leq Y_i$. Como ninguna de las componentes falla simultáneamente, el sistema fallará en el instante t cuando la primera de las componentes críticas falle en t . Así, se puede escribir el tiempo de vida del sistema como

$$T = \min_{i:Y_i < \infty} S_i, \quad (3-7)$$

Veamos cómo se calculan los niveles críticos de las componentes en algunos de los sistemas previamente ilustrados en la Sección 2.4.1, de acuerdo a la ecuación (3-6).

Sistema de 3 componentes en paralelo. Teniendo en cuenta que el único conjunto de corte minimal en este sistema es $K_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ y aplicando (3-6) se obtiene que:

$$Y_1 = S_2 \vee S_3, \quad Y_2 = S_1 \vee S_3, \quad Y_3 = S_1 \vee S_2. \quad (3-8)$$

o en general,

$$Y_i = \max_{j \neq i} S_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3-9)$$

Luego, sólo será crítica la componente que sobrevive a su nivel crítico, esto es, la componente i tal que $S_i > Y_i$.

Sistema 2 de 4. Teniendo en cuenta que los conjuntos de corte minimales en este sistema son $K_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $K_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{4\}\}$, $K_3 = \{\{1\}, \{3\}, \{4\}\}$, $K_4 = \{\{2\}, \{3\}, \{4\}\}$, y aplicando (3-6) se obtiene que:

$$\begin{aligned} Y_1 &= (S_2 \vee S_3) \wedge (S_2 \vee S_4) \wedge (S_3 \vee S_4), \\ Y_2 &= (S_1 \vee S_3) \wedge (S_1 \vee S_4) \wedge (S_3 \vee S_4), \\ Y_3 &= (S_1 \vee S_2) \wedge (S_1 \vee S_4) \wedge (S_2 \vee S_4), \\ Y_4 &= (S_1 \vee S_2) \wedge (S_1 \vee S_3) \wedge (S_2 \vee S_3). \end{aligned} \quad (3-10)$$

o en general,

$$Y_i = (S_j \vee S_k) \wedge (S_j \vee S_l) \wedge (S_k \vee S_l), \quad j, k, l \neq i \quad k, l \neq j, \quad l \neq k. \quad (3-11)$$

siendo crítica la componente que sobrevive a su nivel crítico, esto es, la componente i tal que $S_i > Y_i$.

Respecto al proceso compensador en (3-5), siguiendo a Arjas (1981) se obtiene que bajo las condiciones establecidas, el \mathcal{F}_t -compensador de N_t es dado por

$$A_t = \sum_{i=1}^m [A_{t \wedge T}^i - A_{Y_i}^i]^+ \quad P\text{-c.s.}, \quad (3-12)$$

donde $[a]^+ = \max\{0, a\}$. De (3-3) y (3-12) se obtiene que:

$$A_t = \sum_{i=1}^m \left[\int_0^{t \wedge T} I(S_i > s) \lambda^i(s) ds - \int_0^{Y_i} I(S_i > s) \lambda^i(s) ds \right]^+ = \sum_{i=1}^m [\mathcal{A}_t^i]^+, \quad (3-13)$$

donde $\mathcal{A}_t^i = \int_0^{t \wedge T} I(S_i > s) \lambda^i(s) ds - \int_0^{Y_i} I(S_i > s) \lambda^i(s) ds$. Note que $[\mathcal{A}_t^i]^+ > 0$, si y sólo si $Y_i < t \wedge T$ (es decir $Y_i < \infty$). Luego,

$$\begin{aligned}
A_t &= \sum_{i=1}^m I(Y_i < t \wedge T) \int_{Y_i}^{t \wedge T} I(S_i > s) \lambda^i(s) ds \\
&= \sum_{i=1}^m \int_0^{t \wedge T} I(Y_i < t \wedge T) I(Y_i \leq s) I(S_i > s) \lambda^i(s) ds \\
&= \sum_{i=1}^m \int_0^{t \wedge T} I(Y_i < s) I(S_i > s) \lambda^i(s) ds \\
&= \sum_{i=1}^m \int_0^t I(T > s) I(S_i > s) I(Y_i < s) \lambda^i(s) ds \\
&= \sum_{i=1}^m \int_0^t I(Y_i < s < S_i \wedge T) \lambda^i(s) ds.
\end{aligned} \tag{3-14}$$

De (3-7), note que para toda componente i tal que $\{Y_i < \infty\}$, se cumple que $T \leq S_i$ y $Y_i < S_i$. Luego, (3-14) se simplifica así

$$\begin{aligned}
A_t &= \sum_{i=1}^m \int_0^t I(Y_i < s < T) \lambda^i(s) ds \\
&= \sum_{i=1}^m \int_0^t I(T > s) I(Y_i < s) \lambda^i(s) ds \\
&= \int_0^t I(T > s) \sum_{i=1}^m I(Y_i < s) \lambda^i(s) ds.
\end{aligned} \tag{3-15}$$

De (3-5) y (3-15) es claro que la \mathcal{F}_t -intensidad del sistema en $\{T > t\}$, es dada por

$$\lambda_t = \sum_{i=1}^m I(Y_i < t) \lambda^i(t). \tag{3-16}$$

Al tener en cuenta la historia acumulada en la filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ el sistema es reparado mínimamente al nivel de sus componentes, y por tanto el proceso λ_t es reconstituido a la condición inmediatamente anterior a la falla del sistema, y por tanto, sólo es reparada mínimamente aquella componente crítica que causó la falla en el instante t . Por tanto, el proceso que cuenta el número de reparos mínimos del sistema al nivel de sus componentes en el intervalo $[0, t]$, es dado por

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_t &= \int_0^t \lambda_s ds + \tilde{M}_t = \int_0^t \sum_{i=1}^m I(Y_i < s) \lambda^i(s) ds + \tilde{M}_t \\
&= \sum_{i=1}^m \int_0^t I(Y_i < s) \lambda^i(s) ds + \tilde{M}_t, \quad \tilde{M}_t \in \mathcal{M}_0^2.
\end{aligned} \tag{3-17}$$

Los procesos de reparo mínimo en cada componente del sistema y los costos asociados a cada reparo bajo una función de descuento, digamos $H_i(s)$, $0 \leq s \leq t$ una función continua, acotada en $[0, t]$ y decreciente, permiten estimar los costos de garantía para el sistema coherente en un periodo de tiempo dado. A continuación se establecen los procesos de costos descontados para un sistema coherente bajo reparo mínimo, observado al nivel de sus componentes.

3.1. Costos de garantía descontados para un sistema coherente bajo reparo mínimo

Siguiendo a González & Bueno (2011), se presentan algunos resultados para la estimación de los costos de garantía descontados de un sistema coherente observado al nivel de sus componentes, bajo reparo mínimo.

3.1.1. Costos de garantía en cada componente

Considere inicialmente, el proceso de reparo mínimo de la componente i , $i = 1, \dots, m$. De (3-2) se tiene que $N_t^i = I(S_i \leq t) = A_t^i + M_t^i$, $M_t^i \in \mathcal{M}_0^2$. Luego, si en cada tiempo de falla S_i se hace un reparo mínimo sobre la componente, el proceso de conteo de los reparos mínimos en el intervalo $[0, t]$ es un Proceso Poisson no Homogéneo (NHPP) con la descomposición de Doob-Meyer (o representación SSM), dada por

$$\tilde{N}_t^i = \int_0^t \lambda^i(s) ds + \tilde{M}_t^i, \quad \tilde{M}_t^i \in \mathcal{M}_0^2 \quad (3-18)$$

y por tanto el número esperado de reparos mínimos sobre la componente i en el intervalo $[0, t]$ es $E[\tilde{N}_t^i] = \int_0^t \lambda^i(s) ds$.

Sea $H_i(t)$ una función determinística continua (y por tanto previsible) y decreciente por ser una función de descuento, acotada e integrable en el intervalo $[0, t]$, que corresponde al costo descontado por reparo mínimo de la componente i en el tiempo t , tal que $\int_0^t H_i(s) \lambda^i(s) ds < \infty$, $\forall 0 \leq t < \infty$, y sea $\hat{B}_t^i = \sum_{j=1}^{\tilde{N}_t^i} H_i(S_{ij})$, el proceso de costo de los reparos mínimos de la componente i , donde S_{ij} es el tiempo del j -ésimo reparo mínimo de la componente i , y $S_{i1} = S_i$. Como la función $H_i(t)$ es previsible y acotada en el intervalo $[0, t]$, y $E[\tilde{N}_t^i] = \int_0^t \lambda^i(s) ds < \infty$, entonces el proceso $\int_0^t H_i(s) d\tilde{M}_s^i$ es una \mathcal{F}_t -martingala cuadrado integrable de media cero (Fleming & Harrington 1991), y por tanto el \mathcal{F}_t -compensador de \hat{B}_t^i es

$$B_t^i = \int_0^t H_i(s) \lambda^i(s) ds < \infty, \quad \forall 0 \leq t < \infty. \quad (3-19)$$

Los procesos anteriores están definidos para todo $\omega \in \Omega$. De acá en adelante considere la siguiente partición en las realizaciones de $S_i(\omega)$,

$$\mathcal{C}^i = \{\omega \in \Omega : S_i(\omega) > Y_i(\omega)\} \quad \text{y} \quad \bar{\mathcal{C}}^i = \{\omega \in \Omega : S_i(\omega) \leq Y_i(\omega)\}, \quad (3-20)$$

con Y_i el nivel crítico para la componente i , definido en (3-6). Sean N_t^{i*} y N_t^{i**} los procesos N_t^i restringidos a \mathcal{C}^i y $\bar{\mathcal{C}}^i$ respectivamente, esto es

$$N_t^{i*}(\omega) = I(\omega \in \mathcal{C}^i) N_t^i(\omega) \quad \text{y} \quad N_t^{i**}(\omega) = I(\omega \in \bar{\mathcal{C}}^i) N_t^i(\omega), \quad (3-21)$$

de manera que

$$\begin{aligned} E[N_t^i] &= E[N_t^{i*}] + E[N_t^{i**}] = P(S_i > Y_i, S_i \leq t) + P(S_i \leq Y_i, S_i \leq t) \\ &= P(S_i > Y_i) P(S_i \leq t | S_i > Y_i) + P(S_i \leq Y_i) P(S_i \leq t | S_i \leq Y_i) \\ &= P(S_i > Y_i) E[N_t^i | S_i > Y_i] + P(S_i \leq Y_i) E[N_t^i | S_i \leq Y_i]. \end{aligned} \quad (3-22)$$

En particular, interesa el proceso de falla restringido a \mathcal{C}^i , es decir, el proceso N_t^{i*} que indica la falla de la componente i cuando ésta es crítica para el sistema, lo que implica una falla del sistema coherente bajo las condiciones previamente asumidas.

Teorema 3.1. (González & Bueno 2011) *El proceso indicador $N_t^i = I(S_i \leq t)$ en \mathcal{C}^i , $(N_t^{i*})_{t \geq 0}$, tiene como \mathcal{F}_t -compensador al proceso*

$$\begin{aligned} A_t^{i*} &= \int_{Y_i}^t I(S_i > s) \lambda^i(s) ds \\ &= \int_0^t I(S_i > s) I(Y_i \leq s) \lambda^i(s) ds < \infty, \forall 0 \leq t < \infty, \quad P\text{-c.s.} \end{aligned} \quad (3-23)$$

Nota 3.1. *Observe que*

$$E[N_t^i | S_i > Y_i] = E[A_t^{i*} | S_i > Y_i] = E \left[\int_{Y_i}^t I(S_i > s) \lambda^i(s) ds \middle| S_i > Y_i \right] \quad (3-24)$$

Corolario 3.1. (González & Bueno 2011) *Sea \tilde{N}_t^i el proceso que cuenta el número de reparos mínimos de la componente i en $[0, t]$ y $H_i(t)$ la respectiva función del costo descontado en el tiempo t , una función determinística, continua, acotada e integrable en el intervalo $[0, t]$, tal que $\int_0^t H_i(s) \lambda^i(s) ds < \infty, \forall 0 \leq t < \infty$ y $\hat{B}_t^i = \sum_{j=1}^{\tilde{N}_t^i} H(S_{ij})$, el proceso de costo por reparo mínimo de la componente i . En \mathcal{C}^i tenemos que,*

i. El \mathcal{F}_t -compensador de \tilde{N}_t^i es el proceso

$$\tilde{A}_t^{i*} = \int_{Y_i}^t \lambda^i(s) ds = \int_0^t I(Y_i < s) \lambda^i(s) ds < \infty, \quad \forall 0 \leq t < \infty \text{ P-c.s.} \quad (3-25)$$

ii. El \mathcal{F}_t -compensador de \hat{B}_t^i es el proceso

$$B_t^{i*} = \int_{Y_i}^t H_i(s) \lambda^i(s) ds = \int_0^t I(Y_i < s) H_i(s) \lambda^i(s) ds < \infty, \quad \forall 0 \leq t < \infty, \text{ P-c.s.} \quad (3-26)$$

Nota 3.2. Para cada $i = 1, \dots, m$, y $\omega \in \mathcal{C}^i$, el proceso $B_t^i(\omega)$ dado en (3-19) restringido a \mathcal{C}^i es igual al proceso $B_t^{i*}(\omega)$ dado en (3-26).

A continuación se establecen los procesos de variación previsible para el proceso de desviaciones $\hat{B}_t^i - B_t^i$, asociado a la componente i , cuando ésta es crítica para el sistema.

Proposición 3.1. (González & Bueno 2011) Sean $H_i(t)$ $i = 1, \dots, m$, funciones continuas, acotadas e integrables en $[0, t]$, tales que

$$\sum_{i=1}^m \int_0^t H_i^2(s) \lambda^i(s) ds < \infty, \quad \forall 0 \leq t < \infty. \quad (3-27)$$

Considere una realización fija ω y el conjunto $\mathcal{C}^\Phi(\omega) = \{i \in \{1, \dots, m\} : S_i(\omega) > Y_i(\omega)\}$ de las componentes que son críticas para el sistema en tal realización. Para $i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)$, esto es, para tales componentes críticas los procesos $(\hat{B}_t^i - B_t^i)_{t \geq 0}$ son \mathcal{F}_t -martingalas ortogonales y cuadrado integrables de media cero, con proceso de variación previsible $(\langle \hat{B}^i - B^i \rangle_t)_{t \geq 0}$ igual al proceso

$$\langle R^i \rangle_t = \langle \hat{B}^i - B^{i*} \rangle_t = \int_{Y_i}^t H_i^2(s) \lambda^i(s) ds = \int_0^t H_i^2(s) I(Y_i < s) \lambda^i(s) ds \quad (3-28)$$

Basados en los resultados anteriores que aplican a cada componente del sistema, siempre y cuando ésta sea crítica para el mismo, se definen los procesos del número de reparos mínimos y de los costos correspondientes para un sistema coherente.

3.1.2. Costos de garantía para el sistema coherente

Definición 3.1. Para un resultado fijo $\omega \in \Omega$, sea

$$\mathcal{C}^\Phi(\omega) = \{i \in \{1, \dots, m\} : S_i(\omega) > Y_i(\omega)\}, \quad (3-29)$$

el conjunto de las componentes que sobreviven a su nivel crítico, y por tanto, aquellas sobre las cuales el sistema será reparado mínimamente. Para cada $i = 1, \dots, m$, sea C^i una variable indicadora, tal que,

$$C^i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3-30)$$

Entonces, el número de reparos mínimos del sistema, en el intervalo $[0, t]$ es igual a

$$\tilde{N}_t(\omega) = \sum_{i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)} \tilde{N}_t^i(\omega) = \sum_{i=1}^m C^i(\omega) \tilde{N}_t^i(\omega). \quad (3-31)$$

mientras que el proceso de costo correspondiente, es dado por

$$\hat{B}_t(\omega) = \sum_{i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)} \hat{B}_t^i(\omega) = \sum_{i=1}^m C^i(\omega) \hat{B}_t^i(\omega), \quad (3-32)$$

La definición anterior establece el costo de los reparos mínimos de un sistema coherente como la suma de los costos de los reparos mínimos de aquellas componentes que en una realización dada, son críticas para el sistema.

Nota 3.3. Note que $C^i(\omega) = 1 \iff \omega \in \mathcal{C}^i$ dado en (3-20) y adicionalmente, para cada realización o resultado $\omega \in \Omega$, las variables indicadoras $C^i(\omega)$, $i = 1, \dots, m$, son constantes en $[0, t]$. Luego, si $C^i(\omega) = 0$, $\hat{B}_s^i = 0$, $\forall 0 \leq s \leq t$ P-c.s., esto significa que en cada realización del proceso de falla/reparo del sistema, sólo son observados los procesos de reparo/costo sobre aquellas componentes que fallan después de sus niveles críticos. Así, para cada realización, el proceso de reparo/costo del sistema coherente con estructura Φ es equivalente al respectivo proceso para un sistema con una estructura en serie formado por las componentes que en la realización resultan críticas para el sistema.

Definición 3.2. Suponga que

$$\sum_{i=1}^m \int_0^t H_i(s) \lambda^i(s) ds < \infty, \forall 0 \leq t < \infty. \quad (3-33)$$

Para un resultado fijo $\omega \in \Omega$, sea el proceso,

$$B_t(\omega) = \sum_{i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)} B_t^i(\omega) = \sum_{i=1}^m C^i(\omega) B_t^i(\omega) \quad (3-34)$$

Seguendo a Karr (1991), definimos como el \mathcal{F}_t -estimador martingala del proceso $B_t^i(\omega)$, $i = 1, \dots, m$, en \mathcal{C}^i , respectivamente, al proceso,

$$\hat{B}_t^i(\omega) = \int_0^t H_i(s) d\tilde{N}_s^i(\omega), \text{ en } \mathcal{C}^i. \quad (3-35)$$

Luego, para un resultado fijo $\omega \in \Omega$, definimos como el \mathcal{F}_t -estimador martingala del proceso B_t en (3-34), al proceso $\widehat{B}_t(\omega)$, dado en (3-32).

Corolario 3.2. (González & Bueno 2011) Considere un resultado o realización fija $\omega \in \Omega$ y el conjunto $\mathcal{C}^\Phi(\omega)$ correspondiente. Sean $H_i(t)$ $i = 1, \dots, m$, funciones continuas, acotadas e integrables en $[0, t]$ que satisfacen (3-27), y los procesos $(\widehat{B}_t)_{t \geq 0}$ y $(B_t)_{t \geq 0}$, definidos en (3-32) y (3-34), respectivamente. Entonces el proceso

$$(R_t)_{t \geq 0} = \left(\widehat{B}_t - B_t \right)_{t \geq 0}, \quad (3-36)$$

es una \mathcal{F}_t -martingala cuadrado integrable de media cero, con proceso de variación previsible $(\langle \widehat{B} - B \rangle_t)_{t \geq 0}$ dado por

$$\begin{aligned} \langle R \rangle_t = \langle \widehat{B} - B \rangle_t &= \sum_{i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)} \int_{Y_i}^t H_i^2(s) \lambda^i(s) ds \\ &= \sum_{i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)} \int_0^t H_i^2(s) I(Y_i < s) \lambda^i(s) ds \\ &= \sum_{i=1}^m C^i(\omega) \int_0^t H_i^2(s) I(Y_i < s) \lambda^i(s) ds. \end{aligned} \quad (3-37)$$

Nota 3.4. De (3-37), tenemos que el valor esperado del proceso de variación previsible asociado al costo de los reparos mínimos del sistema, es

$$E[\langle \widehat{B} - B \rangle_t] = \sum_{i=1}^m P(S_i > Y_i) E \left[\int_{Y_i}^t H_i^2(s) \lambda^i(s) ds \middle| S_i > Y_i \right]. \quad (3-38)$$

Teniendo en cuenta que el objetivo es estimar el costo esperado de los reparos mínimos realizados sobre el sistema en el intervalo $[0, t]$, esto es

$$B^*(t) = E \left[\widehat{B}_t \right]. \quad (3-39)$$

Entonces, de las Definiciones 3.1 y 3.2, y por el Corolario 3.2, se tiene que,

$$\begin{aligned} B^*(t) = E[\widehat{B}_t] = E[B_t] &= E \left[\sum_{i \in \mathcal{C}^\Phi(\omega)} B_t^i \right] = E \left[\sum_{i=1}^m C^i B_t^i \right] \\ &= \sum_{i=1}^m P(S_i > Y_i) E \left[\int_{Y_i}^t H_i(s) \lambda^i(s) ds \middle| S_i > Y_i \right] \\ &= \sum_{i=1}^m B^{i*}(t), \end{aligned} \quad (3-40)$$

con

$$B^{i*}(t) = P(S_i > Y_i) E \left[\int_{Y_i}^t H_i(s) \lambda^i(s) ds \mid S_i > Y_i \right], \quad (3-41)$$

que corresponde al costo esperado de los reparos mínimos relativos a la componente i .

A continuación, con base en los resultados anteriores, se establece un modelo de estimación basado en una muestra aleatoria de n sistemas idénticos (o n copias independientes del proceso).

3.2. Modelo de estimación para una muestra de n sistemas idénticos

Considere n copias independientes del proceso m -variado $(\widehat{B}_t^i, C^i, i = 1, \dots, m)_{t \geq 0}$. Es decir, para cada $t \geq 0$, las sucesiones $(\widehat{B}_t^{i(j)}, C^{i(j)}, i = 1, \dots, m), 1 \leq j \leq n$, son independientes e idénticamente distribuidas (iid) como $(\widehat{B}_t^i, C^i, i = 1, \dots, m)$. Para $j = 1, \dots, n$, sea $\mathcal{C}^{\Phi(j)} = \{i \in \{1, \dots, m\} : S_i^{(j)} > Y_i^{(j)}\}$, el conjunto de las componentes críticas para el j -ésimo sistema observado, donde $S_i^{(j)}$ y $Y_i^{(j)}$, son, respectivamente, el primer tiempo de falla de la componente i y su nivel crítico. Entonces el costo por reparos mínimos observado para el j -ésimo sistema o copia del proceso, es

$$\widehat{B}_t^{(j)} = \sum_{i \in \mathcal{C}^{\Phi(j)}} \widehat{B}_t^{i(j)} = \sum_{i=1}^m C^{i(j)} \widehat{B}_t^{i(j)}, \quad (3-42)$$

y su proceso compensador es (por el Corolario 3.2),

$$B_t^{(j)} = \sum_{i \in \mathcal{C}^{\Phi(j)}} B_t^{i(j)} = \sum_{i=1}^m C^{i(j)} B_t^{i(j)} = \sum_{i=1}^m C^{i(j)} \int_{Y_i^{(j)}}^t H_i(s) \lambda^i(s) ds. \quad (3-43)$$

Para las n copias, obtenemos los siguientes procesos medios,

$$\overline{\widehat{B}}_t^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \widehat{B}_t^{(j)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m C^{i(j)} \widehat{B}_t^{i(j)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m C^{i(j)} \int_0^t H_i(s) d\widetilde{N}_s^{i(j)}, \quad (3-44)$$

$$\overline{B}_t^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n B_t^{(j)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m C^{i(j)} B_t^{i(j)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m C^{i(j)} \int_{Y_i^{(j)}}^t H_i(s) \lambda^i(s) ds. \quad (3-45)$$

Sean

$$\overline{\widehat{B}}_t^{i(n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n C^{i(j)} \widehat{B}_t^{i(j)} \quad \text{y} \quad \overline{B}_t^{i(n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n C^{i(j)} B_t^{i(j)}. \quad (3-46)$$

Entonces, de (3-44), (3-45) y (3-46), se tiene también que

$$\overline{\widehat{B}}_t^{(n)} = \sum_{i=1}^m \overline{\widehat{B}}_t^{i(n)} \quad \text{y} \quad \overline{B}_t^{(n)} = \sum_{i=1}^m \overline{B}_t^{i(n)}. \quad (3-47)$$

Para cada $i = 1, \dots, m$, se propone a $\overline{\widehat{B}}_t^{i(n)}$ como \mathcal{F}_t -estimador martingala para el costo medio de los reparos mínimos de sistema, relativos a la componente i .

Teorema 3.2. (González & Bueno 2011) Para cada $i = 1, \dots, m$, sea

$$B^{i*}(t) = P(T_i > Y_i) E \left[\int_{Y_i}^t H_i(s) \lambda^i(s) ds \mid T_i > Y_i \right] \quad (3-48)$$

Entonces, bajo las condiciones en la Proposición 3.1, $\overline{\widehat{B}}_t^{i(n)}$ es un estimador insesgado y consistente para el costo medio de los reparos mínimos debido a la componente i , $B^{i*}(t)$.

Teorema 3.3. (González & Bueno 2011)

- i. $\overline{\widehat{B}}_t^{(n)}$ es un estimador insesgado y consistente para $B^*(t)$.
- ii. Un estimador insesgado y consistente para $\text{Var} \left[\overline{\widehat{B}}_t^{(n)} \right]$ es

$$\widehat{\text{Var}} \left[\overline{\widehat{B}}_t^{(n)} \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \varrho_t^{2i(n)}. \quad (3-49)$$

con

$$\begin{aligned} \varrho_t^{2i(n)} &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \left[C^{i(j)} \left(\widehat{B}_t^{i(j)} - \overline{\widehat{B}}_t^{i(n)} \right) \right]^2 \\ &= \left(\frac{n}{n-1} \right) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n C^{i(j)} \left[\left(\widehat{B}_t^{i(j)} - B^{i*}(t) \right)^2 - \left(\overline{\widehat{B}}_t^{i(n)} - B^{i*}(t) \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3-50)$$

- iii. Un intervalo de confianza aproximado del $(1 - \gamma) 100\%$ para $B^*(t)$, con la siguiente expresión

$$\overline{\widehat{B}}_t^{(n)} \pm Z_{\gamma/2} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \varrho_t^{2i(n)}}{n}}, \quad (3-51)$$

donde, $Z_{\gamma/2}$ es el cuantil $(1 - \gamma/2)$ de la distribución normal estándar.

A pesar de obtener en (3-51), un conjunto de límites de confianza puntuales aproximados del $(1 - \gamma) 100\%$ en el intervalo $[0, t]$, éstos no forman una banda de confianza simultánea del $(1 - \gamma) 100\%$. De ahí que, un problema de interés consiste en establecer bandas de confianza para el costo esperado de garantía del sistema coherente, que ayuden en la toma de decisiones. En el capítulo siguiente se propone un método de construcción de bandas de confianza.

4. Bandas de confianza para el costo medio descontado de garantía

En este capítulo se presentan inicialmente algunas definiciones importantes tales como la definición general de bandas de confianza para funciones y una generalización de la convergencia débil de distribuciones denominada aproximación débil de distribuciones (Belyaev 2000). Luego, se establecen algunas propiedades importantes de los procesos de costos de garantía descontados que permiten probar las condiciones necesarias para la aplicación de un teorema de límite central de remuestreo (CLRT) propuesto por Belyaev (2000). Todo lo anterior soporta la propuesta de un método basado en remuestreo para construir bandas de confianza del costo medio de garantía descontado para sistemas coherentes bajo reparo mínimo, observados al nivel de sus componentes.

4.1. Bandas de confianza para funciones

Suponga que el objetivo es estimar una función $f(t)$ en un intervalo $[0, t]$ y que se quiere acotar la función $f(t)$ sobre ese intervalo. Esto es, para una probabilidad de cobertura dada $1 - \gamma$, encontrar dos funciones aleatorias $b_1(s)$ y $b_2(s)$ con la propiedad que

$$P(b_1(t) \leq f(t) \leq b_2(t), \forall s \in [0, t]) \approx 1 - \gamma, \quad (4-1)$$

Excepto para funciones que tengan una estructura muy simple, en general no se obtienen bandas de confianza con una probabilidad de cobertura exactamente de $1 - \gamma$ (Knowles 1988).

Sea $(\hat{f}_t^{(n)})_{t \geq 0}$ un estimador de la función $f(t)$ basado en una muestra aleatoria de tamaño n , entonces la convergencia débil de procesos de la forma $\sqrt{n}(\hat{f}_t^{(n)} - f(t))$ proporciona un método general para calcular bandas de confianza para la función $f(t)$ (Fleming & Harrington 1991). Cuando $\sqrt{n}(\hat{f}_t^{(n)} - f(t))$ converge en distribución (\xrightarrow{w}) en el intervalo $[0, t]$ a un proceso límite Q , entonces el Teorema de Mapeo Continuo (ver Teorema A.2 en el Apéndice A.2) implica que

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \sqrt{n} |\hat{f}_s^{(n)} - f(s)| \xrightarrow{w} \sup_{0 \leq s \leq t} |Q(s)|. \quad (4-2)$$

Si $q_\gamma(t)$ satisface

$$P\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |Q(s)| \leq q_\gamma(t)\right) \approx 1 - \gamma, \quad (4-3)$$

donde $q_\gamma(t)$ representa el cuantil $1 - \gamma$ de la distribución de $\sup_{0 \leq s \leq t} |Q(s)|$. Entonces, asintóticamente,

$$P\left(\sup_{0 \leq s \leq t} \sqrt{n} \left| \widehat{f}_s^{(n)} - f(s) \right| \leq q_\gamma(t)\right) \approx 1 - \gamma. \quad (4-4)$$

Luego, el objetivo en la construcción de las bandas de confianza simultáneas es ahora encontrar a $q_\gamma(t)$ que garantice la probabilidad de cobertura deseada a lo largo de un intervalo $[0, t]$.

Las bandas de confianza simultáneas basadas en $\sup_{0 \leq s \leq t} \sqrt{n} \left| \widehat{f}_s^{(n)} - f(s) \right|$, serán útiles sólo cuando las condiciones suficientes para la convergencia de $\sqrt{n} \left| \widehat{f}_t^{(n)} - f(t) \right|$ sobre intervalos razonables $[0, t]$ no sean muy restrictivas, cuando $q_\gamma(t)$ resulte fácil de calcular y cuando las bandas obtenidas tengan propiedades atractivas (Fleming & Harrington 1991).

En el caso de la estimación del costo medio descontado bajo reparo mínimo para un sistema coherente observado al nivel de las componentes, $B^*(t)$, se tienen condiciones generales para la convergencia débil (González & Bueno 2011), pero el cálculo de $q_\gamma(t)$ requiere determinar el proceso límite $\sup_{0 \leq s \leq t} |Q(s)|$ al que converge $\sup_{0 \leq s \leq t} \sqrt{n} \left| \widehat{B}_s - B(s) \right|$, lo cual no resulta sencillo cuando sólo se cuenta con una muestra de n sistemas. Por tanto se propone usar métodos computacionales intensivos basados en remuestreo propuestos por Belyaev (2000) y Belyaev & Seleznev (2000), los cuales utilizan resultados generalizados de la convergencia débil de procesos, los cuales se enuncian a continuación.

4.2. Aproximación débil de distribuciones

En esta sección se presentan las principales definiciones y resultados de convergencia débil en el contexto de los métodos de remuestreo, en los cuales el concepto de convergencia de distribuciones es generalizado por el de aproximación débil de distribuciones.

Siguiendo a Belyaev (2000), sean $\{\mathcal{L}(U_n)\}_{n \geq 1}$ y $\{\mathcal{L}(V_n)\}_{n \geq 1}$ dos sucesiones de distribuciones de variables aleatorias U_n y V_n con valores en \mathcal{H}_n , donde \mathcal{H}_n es un espacio métrico con una métrica d_n . Además, sea $\mathcal{C}_b(\mathcal{H}_n, d_n)$ el conjunto de todas las funciones reales continuas y acotadas en \mathcal{H}_n .

Definición 4.1. (Belyaev 2000) *Las distribuciones $\{\mathcal{L}(U_n)\}_{n \geq 1}$ aproximan débilmente a $\{\mathcal{L}(V_n)\}_{n \geq 1}$, denotado por \xrightarrow{wa} , si para cualquier función $h = h(\cdot) \in \mathcal{C}_b(\mathcal{H}_n, d_n)$ se*

tiene que

$$E[h(U_n)] - E[h(V_n)] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4-5)$$

Lo anterior se abrevia como $\mathcal{L}(U_n) \xrightarrow{wa} \mathcal{L}(V_n), n \rightarrow \infty$.

Si todos los V_n son iguales, $V_n = V_0, n = 1, 2, \dots$, entonces este tipo de convergencia coincide con la conocida convergencia débil $\mathcal{L}(U_n) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(V_0), n \rightarrow \infty$ (Shiryayev 1996). A continuación se considera el caso donde las distribuciones son aleatorias. Sea \mathcal{W}_n un espacio métrico y sean (U_n, W_n) un par de variables aleatorias, $U_n \in \mathcal{H}_n, W_n \in \mathcal{W}_n$, definidas en el mismo espacio de probabilidad, $n = 1, 2, \dots$ (U_n y W_n puede ser variables aleatorias dependientes). Suponga que la distribución condicional $\mathcal{L}(U_n|W_n)$ de U_n dado W_n existe. Las distribuciones $\mathcal{L}(U_n|W_n)$ son distribuciones aleatorias, $n = 1, 2, \dots$

Definición 4.2. (Belyaev 2000) Las distribuciones aleatorias $\{\mathcal{L}(U_n|W_n)\}_{n \geq 1}$ aproximan débilmente a $\{\mathcal{L}(V_n)\}_{n \geq 1}$ en probabilidad, denotado por $\xrightarrow{wa(P)}$, si para cualquier $h \in \mathcal{C}_b(\mathcal{H}_n, d_n)$ se cumple que $E[h(U_n)|W_n] - E[h(V_n)] \xrightarrow{P} 0, n \rightarrow \infty$, donde \xrightarrow{P} denota convergencia en probabilidad, y se escribe $\mathcal{L}(U_n|W_n) \xrightarrow{wa(P)} \mathcal{L}(V_n), n \rightarrow \infty$.

Bajo ciertos supuestos adicionales sobre $\{\mathcal{L}(V_n)\}_{n \geq 1}$ la aproximación débil implica la convergencia en algunas métricas en espacios de distribuciones (Belyaev & Sjöstedt-De Luna 2000).

Definición 4.3. (Belyaev 2000) Sea \mathcal{H}_n un espacio lineal, $n = 1, 2, \dots$, es decir, contiene las formas lineales $\sum_i c_i x_i, c_i \in \mathbb{R}, x_i \in \mathcal{H}_n$. Suponga que existe $0 \in \mathcal{H}_n$, tal que $0 + x = x$ para cualquier $x \in \mathcal{H}_n$. Entonces, la sucesión $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ de variables aleatorias de valor en \mathcal{H}_n convergen bajo la métrica d_n en probabilidad a cero, si $d_n(Y_n, 0) \xrightarrow{P} 0, n \rightarrow \infty$, y se escribe $Y_n \xrightarrow[w]{P} 0, n \rightarrow \infty$.

A continuación se introduce el concepto de estabilidad de la aproximación débil. Para ello considere además de las variables U_n y V_n , la variable Z_n definida en el mismo espacio de probabilidad de $U_n, n = 1, 2, \dots$. Así, todas las variables definidas toman valor en \mathcal{H}_n .

Lema 4.1. (Belyaev 2000) Sean U_n, Z_n, W_n y V_n definidas como antes. Suponga que $\mathcal{L}(U_n|W_n) \xrightarrow{wa(P)} \mathcal{L}(V_n)$, y que $Z_n \xrightarrow[w]{P} 0, n \rightarrow \infty$. Entonces,

$$\mathcal{L}(U_n + Z_n|W_n) \xrightarrow{wa(P)} \mathcal{L}(V_n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4-6)$$

Una prueba es dada en Belyaev (1996a) para \mathbb{R}^1 , y en Belyaev & Sjöstedt-De Luna (2000) para \mathcal{H}_n .

Mediante la noción de aproximación débil, es posible establecer una variante del Teorema de Límite Central (TLC) de Lyapunov para \mathbb{R}^k .

Sea $\mathbb{U}_n = \{\mathbf{U}_{1n}, \dots, \mathbf{U}_{nn}\}$, $n = 1, 2, \dots$, un arreglo triangular de vectores aleatorios, independientes para cada n , $\mathbf{U}_{in} = (U_{1in}, \dots, U_{kin})^T$, donde \mathbf{A}^T es la traspuesta de la matriz \mathbf{A} , $(i, n) \in \mathcal{T} = \{(i', n') : i' = 1, \dots, n'; n' = 1, 2, \dots\}$, y sean $\mathbf{U}_{\cdot n} = \sum_{i=1}^n \mathbf{U}_{in}$, $\mu_{hin} = E[U_{hin}]$ y $\bar{\mathbf{C}}_{\cdot n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{C}_{in}$, con $\mathbf{C}_{in} = V[\mathbf{U}_{in}]$ las matrices de covarianzas entre las k variables de cada vector del arreglo \mathbf{U}_{in} , $i = 1, \dots, n$.

Teorema 4.1. (Belyaev 2000) (TLC en \mathbb{R}^k) Suponga que para algunas constantes $\delta > 0$ y $c = c(2 + \delta) < \infty$, $E|\sqrt{n}U_{hin}|^{2+\delta} \leq c$ para todo $(i, n) \in \mathcal{T}$. Entonces se cumple que:

$$\mathcal{L}(\sqrt{n}(\mathbf{U}_{\cdot n} - \boldsymbol{\mu}_{\cdot n})) \xrightarrow{wa} N_k(\mathbf{0}_k, \bar{\mathbf{C}}_{\cdot n}), n \rightarrow \infty. \quad (4-7)$$

Aquí $\boldsymbol{\mu}_{\cdot n} = \sum_{i=1}^n E[\mathbf{U}_{in}]$ y $N_k(\mathbf{0}_k, \bar{\mathbf{C}}_{\cdot n})$ es la distribución normal k -dimensional con media cero y matriz de covarianzas $\bar{\mathbf{C}}_{\cdot n} > 0$. Se admite que el rango de $\bar{\mathbf{C}}_{\cdot n}$ puede ser menor que k . Si $|\bar{\mathbf{C}}_{\cdot n}| > 0$ entonces existe la matriz inversa $\bar{\mathbf{C}}_{\cdot n}^{-1} = (c_n^{gh})$.

Corolario 4.1. (Belyaev 2000) Si los supuestos del Teorema 4.1 se cumplen y existe $\bar{\mathbf{C}}_{\cdot n}^{-1}$, $n = 1, 2, \dots$ tal que $\sup_n \sum_{g=1}^k c_n^{gg} < \infty$ entonces, cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\sup_{(Z_1, \dots, Z_k)} \left| P \left[\sqrt{n} \sum_{i=1}^n (U_{hin} - \mu_{hin}) \leq Z_h, h = 1, \dots, k \right] - \frac{1}{(2\pi)^{k/2} |\bar{\mathbf{C}}_{\cdot n}|^{1/2}} \int_{-\infty}^{Z_1} \dots \int_{-\infty}^{Z_k} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{g=1}^k \sum_{h=1}^k c_n^{gh} y_g y_h \right) dy_1 \dots dy_k \right| \rightarrow 0. \quad (4-8)$$

En lo que sigue se introduce el Teorema de Límite Central de Remuestreo (CLRT). Para ello considere la siguiente notación relacionada con el remuestreo (muestreo aleatorio simple con reemplazo) de n valores observados de variables aleatorias.

Sean $J_{1n}^*, \dots, J_{nn}^*$, n variables aleatorias iid con $P^*[J_{in}^* = h] = 1/n$, $h = 1, \dots, n$, donde las J_{in}^* representan a los índices de las observaciones que de la muestra inicial fueron tomadas aleatoriamente con reemplazo. Note que las variables aleatorias $J_{1n}^*, \dots, J_{nn}^*$ se pueden simular fácilmente. Considere $N_{hn}^* = \sum_{i=1}^n I(J_{in}^* = h)$, el número de veces que la observación h resulta en la remuestra. Se tiene $E[N_{hn}^*] = 1$, $E[(N_{hn}^*)^2] = 1 + 1/n$ y $E[(N_{gn}^* - 1)(N_{hn}^* - 1)] = -1/n$, $g \neq h$, $g, h = 1, \dots, n$. Se utiliza “*” para resaltar que las variables aleatorias J_{hn}^* y sus valores j_{hn}^* están relacionados únicamente con la aleatoriedad simulada.

A continuación se establecen dos variantes del CLRT, en las cuales se establece que cuando $n \rightarrow \infty$ lo que se observa en la distribución de las remuestras converge a lo que se observaría en la distribución de copias independientes de un conjunto de sistemas.

Considere $\mathbb{U}_n = \{\mathbf{U}_{1n}, \dots, \mathbf{U}_{nn}\}$ un esquema triangular de variables aleatorias vectoriales $\mathbf{U}_{in} \in \mathbb{R}^k$, $(i, n) \in \mathcal{T}$ previamente introducido en el Teorema 4.1. Sea la variable aleatoria vectorial

$$\mathbf{U}_{\cdot n}^{*0} := \sum_{i=1}^n (N_{in}^* - 1) \mathbf{U}_{in}. \quad (4-9)$$

Teorema 4.2. (Belyaev 2000) (CLRT en \mathbb{R}^k) *Suponga que los supuestos del Teorema 4.1 son válidos y $E[U_{hin}] = \mu_{hn}$, es decir, no depende de i . Entonces, se cumple que*

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}_{\cdot n}^{*0} | \mathbb{U}_n) \xrightarrow{wa(P)} \mathcal{L}(\mathbf{U}_{\cdot n} - \boldsymbol{\mu}_{\cdot n}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4-10)$$

El siguiente Corolario establece que el cálculo de valores de la distribución basado en remuestreo es consistente.

Corolario 4.2. (Belyaev 2000) *Bajo los supuestos del Corolario 4.1*

$$\sup_{\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^k} |P(\mathbf{U}_{\cdot n}^{*0} \leq \mathbf{Z} | \mathbb{U}_n) - P(\mathbf{U}_{\cdot n} - \boldsymbol{\mu}_{\cdot n} \leq \mathbf{Z})| \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4-11)$$

Las pruebas del Teorema 4.2 y del Corolario 4.2 se dan en Belyaev (1996b), y Belyaev & Sjöstedt-De Luna (2000).

La distribución condicional de $\mathbf{U}_{\cdot n}^{*0}$ dado \mathbb{U}_n se puede obtener mediante la simulación de G copias de $\{J_{1n}^*, \dots, J_{nn}^*\}$. Luego, los resultados de tal simulación $\{J_{1n}^{*r}, \dots, J_{nn}^{*r}\}$, $r = 1, \dots, G$, se pueden utilizar para aproximar $\mathcal{L}(\mathbf{U}_{\cdot n}^{*0r} | \mathbb{U}_n)$. Para cada $r = 1, \dots, G$, se hallan los procesos $\mathbf{U}_{\cdot n}^{*0r} = \sum_{i=1}^n (N_{in}^{*r} - 1) \mathbf{u}_{in}$, con $N_{in}^{*r} = \sum_{h=1}^n I(J_{hn}^{*r} = i)$ que representa el número de veces que la i -ésima observación inicial fue seleccionada en la r -ésima remuestra, y \mathbf{u}_{in} es el valor dado de \mathbf{U}_{in} , $i = 1, \dots, n$. Entonces, para cualquier conjunto de Borel $A \subset \mathbb{R}^k$ se tiene que

$$\frac{1}{G} \sum_{r=1}^G I(\mathbf{U}_{\cdot n}^{*0r} \in A) \xrightarrow{P} P(\mathbf{U}_{\cdot n}^{*0r} \in A | \mathbb{U}_n), \quad G \rightarrow \infty. \quad (4-12)$$

Para evaluar la precisión de algunos estimadores no paramétricos, es necesario considerar espacios más generales que \mathbb{R}^k . Por ejemplo, en muchos modelos estadísticos no paramétricos vale la pena tener en cuenta al espacio de Skorokhod $D[0, t]$, $t > 0$, de las llamadas funciones *cadlag*, es decir, el conjunto de todas las funciones reales $v(\cdot)$ definidas en $[0, t]$ tales que para cualquier $s \in (0, t)$ existen valores límite $v(s \pm 0) = \lim_{h \downarrow 0} v(s \pm h)$ y $v(s) = v(s + 0)$ (Belyaev 2000).

El siguiente Teorema establece condiciones para que la distribución basada en remuestreo se aproxime débilmente en probabilidad a la distribución real a la que convergen los procesos *cadlag*, cuando $n \rightarrow \infty$.

Teorema 4.3. (*CLRT en el espacio de Skorokhod*). Sea $\mathbb{U}_n = \{U_{1n}(t), \dots, U_{nn}(t)\}$ un arreglo triangular de variables aleatorias de valor en $D[0, t]$, las cuales son independientes para cada $n = 1, 2, \dots$. Sea $U_{\cdot n}(t) = \sum_{i=1}^n U_{in}(t)$. Suponga que $E[U_{in}(s)] = \mu_n(s)$, $i = 1, \dots, n$, $s \in [0, t]$ y que existen constantes positivas c_1, c_2, c_3 y $\delta > 0$ tales que para todo $0 \leq t_1 \leq s \leq t_2 \leq t$.

$$C-1. \quad nE[(U_{jn}(t_2) - U_{jn}(t_1))^2] \leq c_1 (t_2 - t_1)^{(1+\delta)/2},$$

$$C-2. \quad n^2 E[(U_{jn}(s) - U_{jn}(t_1))^2 (U_{jn}(t_2) - U_{jn}(s))^2] \leq c_2 |t_2 - t_1|^{1+\delta}, \text{ y}$$

$$C-3. \quad E[|\sqrt{n}U_{jn}(s)|^{2+\delta}] \leq c_3.$$

Entonces, se tiene que

$$\mathcal{L} \left(\sum_{j=1}^n (N_{jn}^* - 1) U_{jn}(\cdot) \middle| \mathbb{U}_n \right) \xleftrightarrow{wa(P)} \mathcal{L}(U_{\cdot n}(\cdot) - \mu_n(\cdot)), n \rightarrow \infty. \quad (4-13)$$

La prueba del Teorema 4.3 es dada en Belyaev & Seleznev (2000).

Las condiciones *C-1*, *C-2* y *C-3* del Teorema anterior garantizan directamente la tirantez (*tightness*) uniforme de los procesos $U_{\cdot n}^{*0}(t) = \sum_{j=1}^n (N_{jn}^* - 1) U_{jn}(t)$ y $U_{\cdot n}(t)$ (Belyaev & Seleznev 2000, Billingsley 1999), que es un paso esencial en la convergencia débil de procesos en $D[0, t]$.

A continuación se establecen algunas propiedades de los costos de garantía descontados para un sistema coherente bajo reparo mínimo físico, que permitirán validar las condiciones del Teorema 4.3.

4.3. Propiedades de los procesos de costos de garantía descontados

Las características de los procesos definidos en la Sección 3.1, ayudan a establecer algunas propiedades que permitirán verificar las condiciones para la aplicación del CLRT (Teorema 4.3).

Considere el proceso de costos de reparos mínimos asociado a una realización (j) del proceso, $\widehat{B}_t^{(j)}$, dado en (3-42), y a la función del costo medio por reparos mínimos $B^*(t)$, dado en (3-40). Defina el siguiente proceso de desviaciones entre el costo medio y el costo estimado por reparos mínimo en el sistema,

$$\widehat{B}_t^{(j)} - B^*(t), \quad (4-14)$$

Note que de acuerdo al Corolario 3.2, $B^*(t)$ no corresponde al compensador del estimador martingala $\widehat{B}_t^{(j)}$, observado en la j -ésima copia del proceso, ya que este rol lo cumple el proceso $B_t^{(j)}$ dado en (3-43).

Lo anterior permite descomponer el proceso de desviaciones en (4-14) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \widehat{B}_t^{(j)} - B^*(t) &= \left(\widehat{B}_t^{(j)} - B_t^{(j)} \right) + \left(B_t^{(j)} - B^*(t) \right) \\ &= R_t^{(j)} + D_t^{(j)}, \end{aligned} \quad (4-15)$$

donde, $R_t^{(j)} = \widehat{B}_t^{(j)} - B_t^{(j)}$ es el proceso martingala dado en (3-36) observado en la j -ésima copia del proceso de costos y

$$D_t^{(j)} = B_t^{(j)} - B^*(t) \quad (4-16)$$

es un proceso continuo P -c.s. obtenido como la diferencia entre (3-43) y (3-40).

A continuación se enuncian algunas propiedades de los procesos anteriores.

Proposición 4.1. *Sea $R_t^{(j)}$ definido en (3-36) y sean $t_1, t_2 \in [0, t]$, tales que $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t < \infty$. Entonces,*

$$E \left[R_{t_2}^{(j)} R_{t_1}^{(j)} \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] = \left(R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \quad P\text{-c.s.}, \quad (4-17)$$

y por tanto

$$E \left[R_{t_2}^{(j)} R_{t_1}^{(j)} \right] = E \left[\left(R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \right]. \quad (4-18)$$

Prueba.

En efecto, usando la medibilidad de $R_{t_1}^{(j)}$ con respecto a \mathcal{F}_{t_1} , y la propiedad martingala de $R_{t_2}^{(j)}$, se obtiene que

$$\begin{aligned} E \left[R_{t_2}^{(j)} R_{t_1}^{(j)} \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] &= R_{t_1}^{(j)} E \left[R_{t_2}^{(j)} \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] \\ &= R_{t_1}^{(j)} R_{t_1}^{(j)} \\ &= \left(R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \quad P\text{-c.s.}, \end{aligned}$$

y aplicando el operador esperanza sobre el resultado anterior se obtiene

$$E \left[R_{t_2}^{(j)} R_{t_1}^{(j)} \right] = E \left[\left(R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \right].$$

□

Proposición 4.2. *Sea $R_t^{(j)}$ definido en (3-36) y sean $t_1, t_2 \in [0, t]$, tales que $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t < \infty$. Entonces,*

a) *Se cumple que*

$$E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] = E \left[\langle R^{(j)} \rangle_{t_2} - \langle R^{(j)} \rangle_{t_1} \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right], \quad (4-19)$$

y por tanto,

$$E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \right] = E \left[\langle R^{(j)} \rangle_{t_2} - \langle R^{(j)} \rangle_{t_1} \right] \quad (4-20)$$

b) *Existe $L_1 > 0$, tal que*

$$E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \right] \leq L_1 |t_2 - t_1|. \quad (4-21)$$

Prueba.

a) En efecto,

$$\begin{aligned} E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] &= E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] + E \left[\left(R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] \\ &\quad - 2E \left[R_{t_2}^{(j)} R_{t_1}^{(j)} \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] \quad P\text{-c.s.} \end{aligned} \quad (4-22)$$

De acuerdo al resultado (4-17) de la Proposición 4.1, se tiene que

$$E \left[R_{t_2}^{(j)} R_{t_1}^{(j)} \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] = \left(R_{t_1}^{(j)} \right)^2 = E \left[\left(R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] \quad P\text{-c.s.}, \quad (4-23)$$

y reemplazando (4-23) en (4-22) se obtiene que

$$\begin{aligned}
& E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] \\
&= E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] + E \left[\left(R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] - 2E \left[\left(R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] \\
&= E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] - E \left[\left(R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] \\
&= E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} \right)^2 - \left(R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] \\
&= E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} \right)^2 - \langle R^{(j)} \rangle_{t_2} + \langle R^{(j)} \rangle_{t_2} - \left(R_{t_1}^{(j)} \right)^2 + \langle R^{(j)} \rangle_{t_1} - \langle R^{(j)} \rangle_{t_1} \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] \\
&= E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} \right)^2 - \langle R^{(j)} \rangle_{t_2} \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] - E \left[\left(R_{t_1}^{(j)} \right)^2 - \langle R^{(j)} \rangle_{t_1} \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] \\
&\quad + E \left[\langle R^{(j)} \rangle_{t_2} - \langle R^{(j)} \rangle_{t_1} \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right]. \tag{4-24}
\end{aligned}$$

Como $R_t^{(j)} \in \mathcal{M}_0^2$, entonces $\left(R_t^{(j)} \right)^2 - \langle R^{(j)} \rangle_t \in \mathcal{M}_0^2$ (Fleming & Harrington 1991, Corolario 1.4.2), lo cual implica que para todo $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t < \infty$, $\left(R_{t_2}^{(j)} \right)^2 - \langle R^{(j)} \rangle_{t_2} \in \mathcal{M}_0^2$ y $\left(R_{t_1}^{(j)} \right)^2 - \langle R^{(j)} \rangle_{t_1} \in \mathcal{M}_0^2$. Luego por la propiedad martingala de estos procesos, en (4-24) se tiene que

$$\begin{aligned}
E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] &= \left(R_{t_1}^{(j)} \right)^2 - \langle R^{(j)} \rangle_{t_1} - \left(R_{t_1}^{(j)} \right)^2 + \langle R^{(j)} \rangle_{t_1} \\
&\quad + E \left[\langle R^{(j)} \rangle_{t_2} - \langle R^{(j)} \rangle_{t_1} \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] \\
&= E \left[\langle R^{(j)} \rangle_{t_2} - \langle R^{(j)} \rangle_{t_1} \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right]
\end{aligned}$$

y aplicando el operador esperanza sobre el resultado anterior se obtiene

$$E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \right] = E \left[\langle R_{t_2}^{(j)} \rangle - \langle R_{t_1}^{(j)} \rangle \right]$$

b) Por (3-37) en (4-20), se obtiene que

$$\begin{aligned}
& E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \right] \\
&= E \left[\sum_{i=1}^m C^{i(j)} \int_0^{t_2} I \left(Y_i^{(j)} < u \right) H_i^2(u) \lambda^i(u) du \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^m C^{i(j)} \int_0^{t_1} I \left(Y_i^{(j)} < u \right) H_i^2(u) \lambda^i(u) du \right] \\
&= \sum_{i=1}^m E \left[C^{i(j)} \int_{t_1}^{t_2} I \left(Y_i^{(j)} < u \right) H_i^2(u) \lambda^i(u) du \right] \\
&= \sum_{i=1}^m P \left(S_i^{(j)} > Y_i^{(j)} \right) E \left[\int_{t_1}^{t_2} I \left(Y_i^{(j)} < u \right) H_i^2(u) \lambda^i(u) du \middle| S_i^{(j)} > Y_i^{(j)} \right] \\
&\leq \sum_{i=1}^m E \left[\int_{t_1}^{t_2} I \left(Y_i^{(j)} < u \right) H_i^2(u) \lambda^i(u) du \middle| S_i^{(j)} > Y_i^{(j)} \right]. \tag{4-25}
\end{aligned}$$

Por otro lado, note que

$$\left[\int_{t_1}^{t_2} I \left(Y_i^{(j)} < u \right) H_i^2(u) \lambda^i(u) du \middle| S_i^{(j)} > Y_i^{(j)} \right] \leq \int_{t_1}^{t_2} H_i^2(u) \lambda^i(u) du \text{ P-c.s.}, \tag{4-26}$$

y por el resultado (A-2) dado en el Apéndice A.1, existe $\kappa_0 > 0$, tal que para todo $i = 1, \dots, m$, se cumple que $\int_{t_1}^{t_2} H_i^2(u) \lambda^i(u) du \leq \kappa_0 |t_2 - t_1|$. Por tanto en (4-26) se tiene que

$$\left[\int_{t_1}^{t_2} I \left(Y_i^{(j)} < u \right) H_i^2(u) \lambda^i(u) du \middle| S_i^{(j)} > Y_i^{(j)} \right] \leq \kappa_0 |t_2 - t_1| \text{ P-c.s.}$$

Luego,

$$E \left[\int_{t_1}^{t_2} I \left(Y_i^{(j)} < u \right) H_i^2(u) \lambda^i(u) du \middle| S_i^{(j)} > Y_i^{(j)} \right] \leq \kappa_0 |t_2 - t_1|. \tag{4-27}$$

Por (4-27) en (4-25), se llega a

$$\begin{aligned}
E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \right] &\leq \sum_{i=1}^m \kappa_0 |t_2 - t_1| \\
&= m\kappa_0 |t_2 - t_1| = L_1 |t_2 - t_1|, \text{ con } L_1 = m\kappa_0.
\end{aligned}$$

□

Proposición 4.3. Sea $D_t^{(j)}$, definido en (4-16), la j -ésima realización del proceso D_t en el intervalo $[0, t]$. Sean t_1, t_2 dos tiempos en ese intervalo, tales que $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t < \infty$. Entonces, existe $L_2 > 0$, tal que

$$E \left(D_{t_2}^{(j)} - D_{t_1}^{(j)} \right)^2 \leq L_2 |t_2 - t_1|^2. \quad (4-28)$$

Prueba.

Dado que, para toda realización (j) del proceso en $[0, t]$, $D_t^{(j)} = B_t^{(j)} - B^*(t)$, con

$$B_t^{(j)} = \sum_{i=1}^m C^{i(j)} \int_0^t I \left(Y_i^{(j)} < u \right) H_i(u) \lambda^i(u) du,$$

y $B^*(t) = \sum_{i=1}^m B^{i*}(t)$, se tiene que

$$\begin{aligned} D_{t_2}^{(j)} - D_{t_1}^{(j)} &= \sum_{i=1}^m C^{i(j)} \int_0^{t_2} I \left(Y_i^{(j)} < u \right) H_i(u) \lambda^i(u) du - \sum_{i=1}^m B^{i*}(t_2) \\ &\quad - \sum_{i=1}^m C^{i(j)} \int_0^{t_1} I \left(Y_i^{(j)} < u \right) H_i(u) \lambda^i(u) du + \sum_{i=1}^m B^{i*}(t_1) \\ &= \sum_{i=1}^m C^{i(j)} \int_{t_1}^{t_2} I \left(Y_i^{(j)} < u \right) H_i(u) \lambda^i(u) du \\ &\quad - \sum_{i=1}^m (B^{i*}(t_2) - B^{i*}(t_1)). \end{aligned} \quad (4-29)$$

Luego, aplicando en (4-29), la desigualdad elemental (A-9), dada en el Apéndice A.3, se obtiene que

$$\begin{aligned} \left(D_{t_2}^{(j)} - D_{t_1}^{(j)} \right)^2 &\leq 2 \left(\sum_{i=1}^m C^{i(j)} \int_{t_1}^{t_2} I \left(Y_i^{(j)} < u \right) H_i(u) \lambda^i(u) du \right)^2 \\ &\quad + 2 \left[\sum_{i=1}^m (B^{i*}(t_2) - B^{i*}(t_1)) \right]^2 \quad P\text{-c.s.}, \end{aligned} \quad (4-30)$$

Luego, usando la desigualdad de Cauchy (A-13), dada en el Apéndice A.3, en ambos términos de la derecha en (4-30), se obtiene que

$$\begin{aligned} \left(D_{t_2}^{(j)} - D_{t_1}^{(j)} \right)^2 &\leq 2m \sum_{i=1}^m C^{i(j)} \left(\int_{t_1}^{t_2} I \left(Y_i^{(j)} < u \right) H_i(u) \lambda^i(u) du \right)^2 \\ &\quad + 2m \sum_{i=1}^m (B^{i*}(t_2) - B^{i*}(t_1))^2 \quad P\text{-c.s.}, \end{aligned} \quad (4-31)$$

y por tanto en (4-31) se obtiene

$$\begin{aligned}
& E \left[\left(D_{t_2}^{(j)} - D_{t_1}^{(j)} \right)^2 \right] \\
& \leq 2m \sum_{i=1}^m E \left[C^{i(j)} \left(\int_{t_1}^{t_2} I \left(Y_i^{(j)} < u \right) H_i(u) \lambda^i(u) du \right)^2 \right] \\
& \quad + 2m \sum_{i=1}^m \left(B^{i*}(t_2) - B^{i*}(t_1) \right)^2 \\
& = 2m \sum_{i=1}^m P \left(S_i^{(j)} > Y_i^{(j)} \right) E \left[\left(\int_{t_1}^{t_2} I \left(Y_i^{(j)} < u \right) H_i(u) \lambda^i(u) du \right)^2 \middle| S_i^{(j)} > Y_i^{(j)} \right] \\
& \quad + 2m \sum_{i=1}^m \left(B^{i*}(t_2) - B^{i*}(t_1) \right)^2 \\
& \leq 2m \sum_{i=1}^m E \left[\left(\int_{t_1}^{t_2} I \left(Y_i^{(j)} < u \right) H_i(u) \lambda^i(u) du \right)^2 \middle| S_i^{(j)} > Y_i^{(j)} \right] \\
& \quad + 2m \sum_{i=1}^m \left(B^{i*}(t_2) - B^{i*}(t_1) \right)^2. \tag{4-32}
\end{aligned}$$

Ahora bien, por definición, y con $t_1 \leq t_2$,

$$\begin{aligned}
0 \leq B^{i*}(t_2) - B^{i*}(t_1) & = P(S_i > Y_i) E \left[\int_0^{t_2} I(Y_i < u) H_i(u) \lambda^i(u) du \middle| S_i > Y_i \right] \\
& \quad - P(S_i > Y_i) E \left[\int_0^{t_1} I(Y_i < u) H_i(u) \lambda^i(u) du \middle| S_i > Y_i \right] \\
& = P(S_i > Y_i) E \left[\int_{t_1}^{t_2} I(Y_i < u) H_i(u) \lambda^i(u) du \middle| S_i > Y_i \right] \\
& \leq E \left[\int_{t_1}^{t_2} I(Y_i < u) H_i(u) \lambda^i(u) du \middle| S_i > Y_i \right], \tag{4-33}
\end{aligned}$$

y reemplazando (4-33) en (4-32) se obtiene

$$\begin{aligned}
& E \left[\left(D_{t_2}^{(j)} - D_{t_1}^{(j)} \right)^2 \right] \\
& \leq 2m \sum_{i=1}^m E \left[\left(\int_{t_1}^{t_2} I \left(Y_i^{(j)} < u \right) H_i(u) \lambda^i(u) du \right)^2 \middle| S_i^{(j)} > Y_i^{(j)} \right] \\
& \quad + 2m \sum_{i=1}^m \left(E \left[\int_{t_1}^{t_2} I(Y_i < u) H_i(u) \lambda^i(u) du \middle| S_i > Y_i \right] \right)^2. \tag{4-34}
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\left[\int_{t_1}^{t_2} I(Y_i < u) H_i(u) \lambda^i(u) du \middle| S_i > Y_i \right] \leq \int_{t_1}^{t_2} H_i(u) \lambda^i(u) du \text{ P-c.s.}, \tag{4-35}$$

y aplicando el resultado (A-2) del Apéndice A.1, se tiene que existe $\kappa_1 > 0$ tal que para todo $i = 1, \dots, m$, se cumple que

$$\int_{t_1}^{t_2} H_i(u) \lambda^i(u) du \leq \kappa_1 |t_2 - t_1|, \quad (4-36)$$

de donde, en (4-35) se obtiene que

$$\left[\int_{t_1}^{t_2} I(Y_i < u) H_i(u) \lambda^i(u) du \middle| S_i > Y_i \right] \leq \kappa_1 |t_2 - t_1| \text{ P-c.s.}, \quad (4-37)$$

y también,

$$\left[\left(\int_{t_1}^{t_2} I(Y_i < u) H_i(u) \lambda^i(u) du \right)^2 \middle| S_i > Y_i \right] \leq \kappa_1^2 |t_2 - t_1|^2 \text{ P-c.s.} \quad (4-38)$$

Luego, aplicando esperanza en (4-37) y (4-38), se tiene que

$$E \left[\int_{t_1}^{t_2} I(Y_i < u) H_i(u) \lambda^i(u) du \middle| S_i > Y_i \right] \leq \kappa_1 |t_2 - t_1|, \quad (4-39)$$

y

$$E \left[\left(\int_{t_1}^{t_2} I(Y_i < u) H_i(u) \lambda^i(u) du \right)^2 \middle| S_i > Y_i \right] \leq \kappa_1^2 |t_2 - t_1|^2. \quad (4-40)$$

Luego, reemplazando (4-39) y (4-40) en (4-34)

$$\begin{aligned} & E \left[\left(D_{t_2}^{(j)} - D_{t_1}^{(j)} \right)^2 \right] \\ & \leq 2m \sum_{i=1}^m \kappa_1^2 |t_2 - t_1|^2 + 2m \sum_{i=1}^m (\kappa_1 |t_2 - t_1|)^2 \\ & = 2m^2 \kappa_1^2 |t_2 - t_1|^2 + 2m^2 \kappa_1^2 |t_2 - t_1|^2 \\ & = 4m^2 \kappa_1^2 |t_2 - t_1|^2 \\ & = L_2 |t_2 - t_1|^2, \text{ con } L_2 = 4m^2 \kappa_1^2 |t_2 - t_1|^2. \end{aligned}$$

□

Proposición 4.4. Sea $R_t^{(j)}$ definido en (3-36). Sean s, t_1, t_2 tiempos en ese intervalo tales que $0 \leq t_1 \leq s \leq t_2 \leq t < \infty$. Entonces, existe $L_3 > 0$, tal que

$$E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} - R_s^{(j)} \right)^2 \left(R_s^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \right] \leq L_3 |t_2 - t_1|^2. \quad (4-41)$$

Prueba.

Note que

$$\begin{aligned}
& E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} - R_s^{(j)} \right)^2 \left(R_s^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \right] \\
&= E \left\{ E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} - R_s^{(j)} \right)^2 \left(R_s^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] \right\} \\
&= E \left\{ \left(R_s^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} - R_s^{(j)} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] \right\}, \tag{4-42}
\end{aligned}$$

donde la última igualdad proviene de la medibilidad de $\left(R_s^{i(j)} - R_{t_1}^{i(j)} \right)^2$ con respecto a \mathcal{F}_s . Usando el mismo argumento que condujo a la ecuación (4-24), se tiene que

$$E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} - R_s^{(j)} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] = E [\langle R^{(j)} \rangle_{t_2} - \langle R^{(j)} \rangle_s | \mathcal{F}_s],$$

y por (3-37)

$$\begin{aligned}
E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} - R_s^{(j)} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] &= E \left[\sum_{i=1}^m C^{i(j)} \int_0^{t_2} I \left(Y_i^{(j)} < u \right) H_i^2(u) \lambda^i(u) du \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^m C^{i(j)} \int_0^s I \left(Y_i^{(j)} < u \right) H_i^2(u) \lambda^i(u) du \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= \sum_{i=1}^m E \left[C^{i(j)} \int_s^{t_2} I \left(Y_i^{(j)} < u \right) H_i^2(u) \lambda^i(u) du \middle| \mathcal{F}_s \right]. \tag{4-43}
\end{aligned}$$

Por otro lado, como $\left[C^{i(j)} \int_s^{t_2} I \left(Y_i^{(j)} < u \right) H_i^2(u) \lambda^i(u) du \middle| \mathcal{F}_s \right] \leq \int_s^{t_2} H_i^2(u) \lambda^i(u) du$ *P-c.s.*, ya que $C^{i(j)} \leq 1$ y $I \left(Y_i^{(j)} < u \right) \leq 1$ *P-c.s.*, entonces por propiedad de la esperanza condicional

$$E \left[C^{i(j)} \int_s^{t_2} I \left(Y_i^{(j)} < u \right) H_i^2(u) \lambda^i(u) du \middle| \mathcal{F}_s \right] \leq \int_s^{t_2} H_i^2(u) \lambda^i(u) du \text{ P-c.s.} \tag{4-44}$$

y aplicando en el lado derecho de la desigualdad el resultado (A-2) dado en el Apéndice A.1, se tiene que existe $\kappa_2 > 0$, tal que para todo $i = 1, \dots, m$,

$$\int_s^{t_2} H_i^2(u) \lambda^i(u) du \leq \kappa_2 |t_2 - s|,$$

de donde, en (4-44) se obtiene que

$$E \left[C^{i(j)} \int_s^{t_2} I \left(Y_i^{(j)} < u \right) H_i^2(u) \lambda^i(u) du \middle| \mathcal{F}_s \right] \leq \kappa_2 |t_2 - s| \text{ P-c.s.} \tag{4-45}$$

Por (4-45) en (4-43)

$$\begin{aligned} E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} - R_s^{(j)} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] &\leq \sum_{i=1}^m \kappa_2 |t_2 - s| \\ &= m\kappa_2 |t_2 - s| \quad P\text{-c.s.} \end{aligned} \quad (4-46)$$

Luego $\left(R_s^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} - R_s^{(j)} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] \leq \left(R_s^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 m\kappa_2 |t_2 - s|$ P -c.s. y por tanto

$$\begin{aligned} &E \left\{ \left(R_s^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} - R_s^{(j)} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] \right\} \\ &\leq m\kappa_2 |t_2 - s| E \left[\left(R_s^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4-47)$$

Ahora bien, del resultado (4-21) de la Proposición 4.2, se tiene que para $t_1 \leq s$ existe $L'_1 > 0$ tal que $E \left[\left(R_s^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \right] \leq L'_1 |s - t_1|$. Luego en (4-47),

$$\begin{aligned} E \left\{ \left(R_s^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} - R_s^{(j)} \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] \right\} &\leq m\kappa_2 |t_2 - s| L'_1 |s - t_1| \\ &= m\kappa_2 L'_1 |t_2 - s| |s - t_1| \\ &\leq m\kappa_2 L'_1 |t_2 - t_1|^2, \end{aligned} \quad (4-48)$$

desde que $|t_2 - s| \leq |t_2 - t_1|$ y $|s - t_1| \leq |t_2 - t_1|$ con $0 \leq t_1 \leq s \leq t_2 \leq t < \infty$. Por tanto de (4-48) en (4-42),

$$\begin{aligned} E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} - R_s^{(j)} \right)^2 \left(R_s^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \right] &\leq m\kappa_2 L'_1 |t_2 - t_1|^2 \\ &= L_3 |t_2 - t_1|^2, \quad \text{con } L_3 = m\kappa_2 L'_1. \end{aligned}$$

□

4.4. Condiciones para aplicar el CLRT en los costos de garantía descontados

Teniendo en cuenta la definición de los procesos de costos de garantía dados en la Sección 3.1, y de las condiciones establecidas por el Teorema 4.3, se deben estudiar los procesos

de desviaciones

$$\begin{aligned}
U_{\cdot n}(t) &= \sqrt{n} \left(\widehat{B}_t^{(n)} - B^*(t) \right) \\
&= \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \widehat{B}_t^{(j)} - \frac{n}{n} B^*(t) \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\widehat{B}_t^{(j)} - B^*(t) \right) \\
&= \sum_{j=1}^n U_{jn}(t)
\end{aligned} \tag{4-49}$$

donde

$$U_{jn}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\widehat{B}_t^{(j)} - B^*(t) \right), \tag{4-50}$$

son procesos estocásticos en $D[0, t]$, con $B^*(t)$ y $\widehat{B}_t^{(j)}$ definidos como en (3-40) y (3-42), respectivamente.

Así para usar el Teorema 4.3 dado por Belyaev (2000), se debe verificar en los procesos $U_{jn}(t)$, antes mencionados, que se cumplen las condiciones *C-1*, *C-2* y *C-3*, lo cual se verifica en el siguiente teorema.

Teorema 4.4. *Sea $U_{jn}(t)$ definido como en 4-50, para los tiempos s, t_1, t_2 en el intervalo $[0, t]$, tales que $0 \leq t_1 \leq s \leq t_2 \leq t < \infty$, existen constantes positivas c_1, c_2, c_3 y $\delta > 0$, para las cuales se cumple*

$$C-1. \quad nE[(U_{jn}(t_2) - U_{jn}(t_1))^2] \leq c_1 (t_2 - t_1)^{(1+\delta)/2},$$

$$C-2. \quad n^2 E[(U_{jn}(s) - U_{jn}(t_1))^2 (U_{jn}(t_2) - U_{jn}(s))^2] \leq c_2 |t_2 - t_1|^{1+\delta}, \text{ y}$$

$$C-3. \quad E \left[|\sqrt{n} U_{jn}(s)|^{2+\delta} \right] \leq c_3.$$

Prueba. Antes de comenzar las pruebas, note que $U_{jn}(t)$ se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
U_{jn}(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\widehat{B}_t^{(j)} - B^*(t) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\widehat{B}_t^{(j)} - B_t^{(j)} + B_t^{(j)} - B^*(t) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(R_t^{(j)} + D_t^{(j)} \right),
\end{aligned} \tag{4-51}$$

con $R_t^{(j)}$ y $D_t^{(j)}$ definidos como en (3-36) y (4-16), respectivamente.

Prueba de la condición C-1

Considere $\delta = 1$

Entonces, se quiere probar que

$$n E [U_{jn}(t_2) - U_{jn}(t_1)]^2 \leq c_1 |t_2 - t_1|. \quad (4-52)$$

Note que, usando (4-51)

$$\begin{aligned} n [U_{jn}(t_2) - U_{jn}(t_1)]^2 &= n \left[\frac{1}{\sqrt{n}} (R_{t_2}^{(j)} + D_{t_2}^{(j)}) - \frac{1}{\sqrt{n}} (R_{t_1}^{(j)} + D_{t_1}^{(j)}) \right]^2 \\ &= \left[(R_{t_2}^{(j)} - R_{t_1}^{(j)}) + (D_{t_2}^{(j)} - D_{t_1}^{(j)}) \right]^2 \\ &\leq 2 (R_{t_2}^{(j)} - R_{t_1}^{(j)})^2 + 2 (D_{t_2}^{(j)} - D_{t_1}^{(j)})^2 \quad P\text{-c.s.}, \end{aligned} \quad (4-53)$$

la última desigualdad debida a la desigualdad elemental en (A-9) dada en el Apéndice A.3. Luego, aplicando esperanza en (4-53) se obtiene que

$$n E [U_{jn}(t_2) - U_{jn}(t_1)]^2 \leq 2E \left[(R_{t_2}^{(j)} - R_{t_1}^{(j)})^2 \right] + 2E \left[(D_{t_2}^{(j)} - D_{t_1}^{(j)})^2 \right]. \quad (4-54)$$

De las Proposiciones 4.2 y 4.3, en (4-54) se tiene que

$$\begin{aligned} n E [(U_{jn}(t_2) - U_{jn}(t_1))^2] &\leq 2L_1 |t_2 - t_1| + 2L_2 |t_2 - t_1|^2 \\ &= 2(L_1 + L_2 |t_2 - t_1|) |t_2 - t_1| \\ &\leq 2(L_1 + L_2 \kappa_3) |t_2 - t_1| \\ &= c_1 |t_2 - t_1| \quad \text{con } c_1 = 2(L_1 + L_2 \kappa_3), \end{aligned}$$

para algún $\kappa_3 > 0$ tal que $|t_2 - t_1| \leq \kappa_3$.

Prueba de la condición C-2

Considere $\delta = 1$

Entonces, se quiere probar que

$$n^2 E [(U_{jn}(t_2) - U_{jn}(s))^2 (U_{jn}(s) - U_{jn}(t_1))^2] \leq c_2 |t_2 - t_1|^2. \quad (4-55)$$

Usando (4-53) se obtiene que

$$n (U_{jn}(t_2) - U_{jn}(s))^2 \leq 2 (R_{t_2}^{(j)} - R_s^{(j)})^2 + 2 (D_{t_2}^{(j)} - D_s^{(j)})^2 \quad P\text{-c.s.}$$

y

$$n (U_{jn}(s) - U_{jn}(t_1))^2 \leq 2 (R_s^{(j)} - R_{t_1}^{(j)})^2 + 2 (D_s^{(j)} - D_{t_1}^{(j)})^2 \quad P\text{-c.s.}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
& n^2 [U_{jn}(t_2) - U_{jn}(s)]^2 [U_{jn}(s) - U_{jn}(t_1)]^2 \\
& \leq 4 \left[\left(R_{t_2}^{(j)} - R_s^{(j)} \right)^2 + \left(D_{t_2}^{(j)} - D_s^{(j)} \right)^2 \right] \left[\left(R_s^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 + \left(D_s^{(j)} - D_{t_1}^{(j)} \right)^2 \right] \\
& = 4 \left[\left(R_{t_2}^{(j)} - R_s^{(j)} \right)^2 \left(R_s^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 + \left(R_{t_2}^{(j)} - R_s^{(j)} \right)^2 \left(D_s^{(j)} - D_{t_1}^{(j)} \right)^2 \right. \\
& \quad \left. + \left(D_{t_2}^{(j)} - D_s^{(j)} \right)^2 \left(R_s^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 + \left(D_{t_2}^{(j)} - D_s^{(j)} \right)^2 \left(D_s^{(j)} - D_{t_1}^{(j)} \right)^2 \right] \quad P\text{-c.s.} \quad (4-56)
\end{aligned}$$

Note que para $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t < \infty$, existe $\kappa_1 > 0$, tal que

$$\left(D_{t_2}^{(j)} - D_{t_1}^{(j)} \right)^2 \leq 4m^2 \kappa_1^2 |t_2 - t_1|^2 \quad P\text{-c.s.} \quad (4-57)$$

En efecto, reemplazando (4-33) en (4-31) se tiene que

$$\begin{aligned}
\left(D_{t_2}^{(j)} - D_{t_1}^{(j)} \right)^2 & \leq 2m \sum_{i=1}^m C^{i(j)} \left(\int_{t_1}^{t_2} I(Y_i^{(j)} < u) H_i(u) \lambda^i(u) du \right)^2 \\
& \quad + 2m \sum_{i=1}^m \left(E \left[\int_{t_1}^{t_2} I(Y_i < u) H_i(u) \lambda^i(u) du \middle| S_i > Y_i \right] \right)^2 \quad P\text{-c.s.}, \\
& \hspace{15em} (4-58)
\end{aligned}$$

Por otra parte, observe que

$$\int_{t_1}^{t_2} I(Y_i^{(j)} < u) H_i(u) \lambda^i(u) du \leq \int_{t_1}^{t_2} H_i(u) \lambda^i(u) du \quad P\text{-c.s.},$$

y aplicando el resultado (A-2) dado en el Apéndice A.1, existe $\kappa_1 > 0$ tal que para todo $i = 1, \dots, m$, se cumple que $\int_{t_1}^{t_2} H_i(u) \lambda^i(u) du \leq \kappa_1 |t_2 - t_1|$ y en consecuencia,

$$\int_{t_1}^{t_2} I(Y_i^{(j)} < u) H_i(u) \lambda^i(u) du \leq \kappa_1 |t_2 - t_1| \quad P\text{-c.s.} \quad (4-59)$$

Luego, de (4-39) y (4-58) en (4-59), se tiene que

$$\begin{aligned}
\left(D_{t_2}^{(j)} - D_{t_1}^{(j)} \right)^2 & \leq 2m \sum_{i=1}^m C^{i(j)} (\kappa_1 |t_2 - t_1|)^2 + 2m \sum_{i=1}^m (\kappa_1 |t_2 - t_1|)^2 \\
& = 2m \kappa_1^2 |t_2 - t_1|^2 \sum_{i=1}^m C^{i(j)} + 2m^2 \kappa_1^2 |t_2 - t_1|^2 \\
& \leq 4m^2 \kappa_1^2 |t_2 - t_1|^2 \quad P\text{-c.s.},
\end{aligned}$$

la última desigualdad debida a que $\sum_{i=1}^m C^{i(j)} \leq m$ P -c.s..

Aplicando para $0 \leq t_1 \leq s \leq t_2 \leq t < \infty$ el resultado (4-57) en (4-56), se obtiene

$$\begin{aligned} & n^2 [U_{jn}(t_2) - U_{jn}(s)]^2 [U_{jn}(s) - U_{jn}(t_1)]^2 \\ & \leq 4 \left[\left(R_{t_2}^{(j)} - R_s^{(j)} \right)^2 \left(R_s^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 + \left(R_{t_2}^{(j)} - R_s^{(j)} \right)^2 4m^2 \kappa_1'^2 |s - t_1|^2 \right. \\ & \quad \left. + 4m^2 \kappa_1''^2 |t_2 - s|^2 \left(R_s^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 + 16m^4 \kappa_1'^2 \kappa_1''^2 |t_2 - s|^2 |s - t_1|^2 \right] \quad P\text{-c.s.}, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} & n^2 E [U_{jn}(t_2) - U_{jn}(s)]^2 [U_{jn}(s) - U_{jn}(t_1)]^2 \\ & \leq 4 \left\{ E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} - R_s^{(j)} \right)^2 \left(R_s^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \right] + 4m^2 \kappa_1'^2 |s - t_1|^2 E \left[\left(R_{t_2}^{(j)} - R_s^{(j)} \right)^2 \right] \right. \\ & \quad \left. + 4m^2 \kappa_1''^2 |t_2 - s|^2 E \left[\left(R_s^{(j)} - R_{t_1}^{(j)} \right)^2 \right] + 16m^4 \kappa_1'^2 \kappa_1''^2 |t_2 - s|^2 |s - t_1|^2 \right\} \quad (4-60) \end{aligned}$$

Aplicando en la última desigualdad de (4-60), la Proposición 4.4 sobre la primera esperanza y la Proposición 4.2 en las esperanzas siguientes, se llega a

$$\begin{aligned} & n^2 E [(U_{jn}(t_2) - U_{jn}(s))^2 (U_{jn}(s) - U_{jn}(t_1))^2] \\ & \leq 4 [L_3 |t_2 - t_1|^2 + 4m^2 \kappa_1'^2 |s - t_1|^2 L_1'' |t_2 - s| \\ & \quad + 4m^2 \kappa_1''^2 |t_2 - s|^2 L_1' |s - t_1| + 16m^4 \kappa_1'^2 \kappa_1''^2 |s - t_1|^2 |t_2 - s|^2] \\ & \leq 4 [L_3 |t_2 - t_1|^2 + 4m^2 \kappa_1'^2 L_1'' |t_2 - t_1|^3 + 4m^2 \kappa_1''^2 L_1' |t_2 - t_1|^3 + 16m^4 \kappa_1'^2 \kappa_1''^2 |t_2 - t_1|^4] \\ & = 4 [L_3 + 4m^2 \kappa_1'^2 L_1'' |t_2 - t_1| + 4m^2 \kappa_1''^2 L_1' |t_2 - t_1| + 16m^4 \kappa_1'^2 \kappa_1''^2 |t_2 - t_1|^2] |t_2 - t_1|^2 \\ & \leq 4 [L_3 + 4m^2 \kappa_1'^2 L_1'' \kappa_3 + 4m^2 \kappa_1''^2 L_1' \kappa_3 + 16m^4 \kappa_1'^2 \kappa_1''^2 \kappa_3^2] |t_2 - t_1|^2 \\ & = c_2 |t_2 - t_1|^2, \quad \text{con } c_2 = 4 [L_3 + 4m^2 \kappa_1'^2 L_1'' \kappa_3 + 4m^2 \kappa_1''^2 L_1' \kappa_3 + 16m^4 \kappa_1'^2 \kappa_1''^2 \kappa_3^2], \end{aligned}$$

donde, la segunda desigualdad se debe a que para todo $0 \leq t_1 \leq s \leq t_2 \leq t < \infty$, $|t_2 - s| \leq |t_2 - t_1|$, $|s - t_1| \leq |t_2 - t_1|$, y la cuarta desigualdad debida a que existe $\kappa_3 > 0$ tal que $|t_2 - t_1| \leq \kappa_3$.

Prueba de la condición C-3

Considere $\delta = 1$

Entonces, se quiere probar que

$$E \left[\left| \sqrt{n} U_{jn}(s) \right|^3 \right] \leq c_3. \quad (4-61)$$

Note que por definición

$$\begin{aligned} |\sqrt{n} U_{jn}(s)|^3 &= \left| \sqrt{n} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\widehat{B}_s^{(j)} - B^*(s) \right) \right] \right|^3 \\ &= \left| \widehat{B}_s^{(j)} - B^*(s) \right|^3. \end{aligned} \quad (4-62)$$

Por otro lado, por desigualdad triangular

$$\left| \widehat{B}_s^{(j)} - B^*(s) \right| \leq \left(\left| \widehat{B}_s^{(j)} \right| + |B^*(s)| \right) = \widehat{B}_s^{(j)} + B^*(s) \quad P\text{-c.s.}, \quad (4-63)$$

puesto que para todo $s : 0 \leq s \leq t < \infty$, $\widehat{B}_s^{(j)} \geq 0$ P -c.s. y $B^*(s) \geq 0$.

Ahora bien, como $g(x) = x^3$ con $x \geq 0$ es una función creciente, entonces en (4-63) se tiene que

$$\left| \widehat{B}_s^{(j)} - B^*(s) \right|^3 \leq \left(\widehat{B}_s^{(j)} + B^*(s) \right)^3 \quad P\text{-c.s.},$$

por tanto, en (4-62) se llega a

$$\left| \sqrt{n} U_{jn}(s) \right|^3 \leq \left(\widehat{B}_s^{(j)} + B^*(s) \right)^3 \quad P\text{-c.s.} \quad (4-64)$$

Usando la desigualdad C_r (Loève 1977), dada en (A-10) del Apéndice A.3, en (4-64) se obtiene que

$$\left| \sqrt{n} U_{jn}(s) \right|^3 \leq 4 \left(\widehat{B}_s^{(j)} \right)^3 + 4 \left(B^*(s) \right)^3 \quad P\text{-c.s.},$$

y por tanto

$$E \left[\left| \sqrt{n} U_{jn}(s) \right|^3 \right] \leq 4E \left[\left(\widehat{B}_s^{(j)} \right)^3 \right] + 4E \left[\left(B^*(s) \right)^3 \right]. \quad (4-65)$$

Ahora, por definición

$$B^*(s) = \sum_{i=1}^m B^{i*}(s) = \sum_{i=1}^m P(S_i > Y_i) E \left[\int_0^s I(Y_i < u) H_i(u) \lambda^i(u) du \middle| S_i > Y_i \right],$$

Note que para todo $i = 1, \dots, m$,

$$\left[\int_0^s I(Y_i < u) H_i(u) \lambda^i(u) du \middle| S_i > Y_i \right] \leq \int_0^s H_i(u) \lambda^i(u) du \quad P\text{-c.s.},$$

y por tanto

$$E \left[\int_0^s I(Y_i < u) H_i(u) \lambda^i(u) du \middle| S_i > Y_i \right] \leq \int_0^s H_i(u) \lambda^i(u) du,$$

de lo cual, también se obtiene que

$$B^{i*}(s) = P(S_i > Y_i) E \left[\int_0^s I(Y_i < u) H_i(u) \lambda^i(u) du \middle| S_i > Y_i \right] \leq \int_0^s H_i(u) \lambda^i(u) du.$$

Luego,

$$B^*(s) = \sum_{i=1}^m B^{i*}(s) \leq \sum_{i=1}^m \int_0^s H_i(u) \lambda^i(u) du,$$

y usando el resultado (A-2), dado en el Apéndice A.1, en cada integral del lado derecho de la desigualdad anterior, se tiene que existe $\kappa_1 > 0$ tal que para todo $i = 1, \dots, m$, se cumple que $\int_0^s H_i(s) \lambda^i(s) ds \leq \kappa_1 s \leq \kappa_1 \zeta_1$ *P*-c.s., para algún $\zeta_1 > 0$ tal que para todo $0 \leq s \leq t < \infty$, $s \leq \zeta_1$ y en consecuencia

$$B^*(s) = \sum_{i=1}^m \kappa_1 \zeta_1 = m \kappa_1 \zeta_1. \quad (4-66)$$

Por otro lado,

$$\widehat{B}_s^{(j)} = \sum_{i=1}^m C^{i(j)} \widehat{B}_s^{i(j)},$$

donde

$$\widehat{B}_s^{i(j)} = \sum_{l=1}^{\widetilde{N}_s^{i(j)}} H_i(S_{il}^{(j)}).$$

Luego,

$$\widehat{B}_s^{(j)} = \sum_{i=1}^m C^{i(j)} \sum_{l=1}^{\widetilde{N}_s^{i(j)}} H_i(S_{il}^{(j)}), \quad (4-67)$$

y desde que $H_i(s)$ con $s \in [0, t]$, son funciones continuas, no negativas y acotadas en el intervalo $[0, t]$, existe $0 < v < \infty$ tal que $H_i(s) \leq v$ para todo $i = 1, \dots, m$.

Entonces, en (4-67), se tiene que

$$\widehat{B}_s^{(j)} \leq v \sum_{i=1}^m C^{i(j)} \widetilde{N}_s^{i(j)} \quad \text{P-c.s.}, \quad (4-68)$$

y como $g(x) = x^3$ con $x \geq 0$, es una función creciente, entonces de (4-68) se obtiene

$$\left(\widehat{B}_s^{(j)}\right)^3 \leq v^3 \left(\sum_{i=1}^m C^{i(j)} \widetilde{N}_s^{i(j)}\right)^3 \quad \text{P-c.s.},$$

donde aplicando la desigualdad en (A-14) del Apéndice A.3,

$$\left(\widehat{B}_s^{(j)}\right)^3 \leq v^3 m^2 \sum_{i=1}^m C^{i(j)} \left(\widetilde{N}_s^{i(j)}\right)^3 \quad \text{P-c.s.},$$

y aplicando esperanza se obtiene que

$$\begin{aligned} E \left[\left(\widehat{B}_s^{(j)} \right)^3 \right] &\leq v^3 m^2 \sum_{i=1}^m E \left[\left(C^{i(j)} \widetilde{N}_s^{i(j)} \right)^3 \right] \\ &= v^3 m^2 \sum_{i=1}^m P \left(S_i^{(j)} > Y_i^{(j)} \right) E \left[\left(\widetilde{N}_s^{i(j)} \right)^3 \middle| S_i^{(j)} > Y_i^{(j)} \right]. \end{aligned} \quad (4-69)$$

Ahora bien, recuerde que sólo para $i \in \mathcal{C}^\Phi$, existe el proceso de conteo del número de reparos mínimos en $[0, t]$, es decir, para todo $i \in \mathcal{C}^\Phi$, $\widetilde{N}_s^{i(j)} \geq 0$, mientras que para $i \notin \mathcal{C}^\Phi$, $\widetilde{N}_s^{i(j)} = 0$ *P*-c.s.. Por otro lado, se tiene que $\widetilde{N}_s^i(\omega)$ restringido a $\mathcal{C}^i = \{\omega \in \Omega : S_i(\omega) > Y_i(\omega)\}$ es un proceso Poisson no homogéneo (NHPP) con la descomposición de Doob-Meyer dada en (3-18). Por tanto, para cada realización (j) , se tiene que $\left[\widetilde{N}_s^{i(j)} \middle| S_i^{(j)} > Y_i^{(j)} \right]$ satisface que

$$E \left[\left(\widetilde{N}_s^{i(j)} \right)^3 \middle| S_i^{(j)} > Y_i^{(j)} \right] = \sum_{x=0}^3 \mathcal{S}_{x,3} \left(\int_0^s \lambda^i(u) du \right)^x, \quad (4-70)$$

donde $\mathcal{S}_{x,3}$ son los números de Stirling (ver Apéndice A.4) y $\int_0^s \lambda^i(u) du < \infty$ para todo $i = 1, \dots, m$. Luego, aplicando el resultado (A-2) del Apéndice A.1, se tiene que existe $\kappa_4 > 0$ tal que $\int_0^s \lambda^i(u) du \leq \kappa_4 s \leq \kappa_4 \zeta_2$ para algún $\zeta_2 > 0$ tal que $s \leq \zeta_2$. Entonces en (4-70) se obtiene

$$E \left[\left(\widetilde{N}_s^{i(j)} \right)^3 \middle| S_i^{(j)} > Y_i^{(j)} \right] \leq \sum_{x=0}^3 \mathcal{S}_{x,3} (\kappa_4 \zeta_2)^x. \quad (4-71)$$

Note que, en (4-71) la suma del lado derecho de la desigualdad es un número finito no negativo y por tanto existe $\kappa_5 > 0$ tal que para todo $i = 1, \dots, m$, se cumple que

$$E \left[\left(\widetilde{N}_s^{i(j)} \right)^3 \middle| S_i^{(j)} > Y_i^{(j)} \right] \leq \kappa_5,$$

y por tanto, para todo $i = 1, \dots, m$

$$P \left(S_i^{(j)} > Y_i^{(j)} \right) E \left[\left(\widetilde{N}_s^{i(j)} \right)^3 \middle| S_i^{(j)} > Y_i^{(j)} \right] \leq \kappa_5. \quad (4-72)$$

Por (4-72) en (4-69), se obtiene

$$E \left[\left(\widehat{B}_s^{(j)} \right)^3 \right] \leq v^3 m^2 \sum_{i=1}^m \kappa_5 = v^3 m^3 \kappa_5. \quad (4-73)$$

Aplicando (4-66) y (4-73) en (4-65), se tiene que

$$E \left[\left| \sqrt{n} U_{jn}(s) \right|^3 \right] \leq 4v^3 m^3 \kappa_5 + 4m\kappa_1 \zeta_1 = c_3.$$

□

Las condiciones anteriores sobre los procesos de costo de garantía descontado para sistemas coherentes bajo reparo mínimo, observado al nivel de sus componentes, permiten el uso del CLRT propuesto por Belyaev (2000) para construir bandas de confianza basadas en remuestreo para la media del proceso antes mencionado.

A continuación se describe el proceso de construcción de bandas de confianza basadas en remuestreo para el costo medio descontado en sistemas coherentes bajo reparo mínimo, observado al nivel de sus componentes.

4.5. Construcción de bandas de confianza para el costo medio de garantía

Considere de nuevo, n copias independientes del proceso m -variado $(\widehat{B}_t^i, C^i, i = 1, \dots, m)_{t \geq 0}$, donde $\widehat{B}_t^{i(j)}$ es definido para el j -ésimo sistema como en (3-35) y $C^{i(j)}$ es la indicadora de si la componente i es crítica para el sistema j , como fue definido en (3-30). Entonces, el costo por reparos mínimos observado para el j -ésimo sistema, es

$$\widehat{B}_t^{(j)} = \sum_{i=1}^m C^{i(j)} \widehat{B}_t^{i(j)}, \quad (4-74)$$

y para los n sistemas, se tiene que el estimador martingala del costo medio descontado para sistemas bajo reparo mínimo físico, notado $B^*(t)$, es

$$\overline{\widehat{B}}_t^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \widehat{B}_t^{(j)}. \quad (4-75)$$

En la construcción de bandas de confianza para $B^*(t)$ interesa evaluar las desviaciones del estimador en (4-75) con respecto a la función de costo verdadera (normalizadas por la función $g_n(t) = \sqrt{n}$). Esto es, defina el estadístico

$$\begin{aligned} U_n(t) &= \sqrt{n} \left(\overline{\widehat{B}}_t^{(n)} - B^*(t) \right) \\ &= \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \widehat{B}_t^{(j)} - \frac{n}{n} B^*(t) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\sqrt{n}}{n} \left(\widehat{B}_t^{(j)} - B^*(t) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n U_{jn}(t), \end{aligned} \quad (4-76)$$

donde,

$$U_{jn}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\widehat{B}_t^{(j)} - B^*(t) \right). \quad (4-77)$$

González & Bueno (2011), mostraron que el estadístico $U_{jn}(t)$ converge débilmente en el espacio $D[0, t]$, a un proceso aleatorio Gaussiano, digamos $Q(t)$, y usando el Teorema de Mapeo Continuo se tiene que:

$$\sup_{0 \leq s \leq t} |U_{jn}(s)| \xrightarrow{w} \sup_{0 \leq s \leq t} |Q(s)|. \quad (4-78)$$

Por otro lado, en el Teorema 4.4 se probaron las condiciones necesarias para usar el CLRT sobre el proceso $U_{jn}(t)$ dado en (4-77). El uso del CLRT en los procesos de costos de garantía descontados para sistemas coherentes bajo reparo mínimo físico se establece en el siguiente corolario.

Corolario 4.3. *Dada una muestra de n copias independientes del proceso m -variado $\left(\widehat{B}_t^i, C^i, i = 1, \dots, m \right)_{t \geq 0}$, donde $\widehat{B}_t^{i(j)}$ es definido para el j -ésimo sistema como en (3-35) y $C^{i(j)}$ es la indicadora de si la componente i es crítica para el sistema j , como fue definido en (3-30). Sea $\mathbb{U}_n(t) = \{U_{n1}(t), \dots, U_{nn}(t)\}$ un arreglo triangular, con $U_{jn}(t)$ dado en (4-77). Entonces, para el proceso*

$$U_n^{*0}(t) = \sum_{j=1}^n (N_{jn}^* - 1) U_{jn}(t). \quad (4-79)$$

se cumple que

$$\mathcal{L}(U_n^{*0}(t) | \mathbb{U}_n) \xleftrightarrow{wa(P)} \mathcal{L}(U_n(t)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4-80)$$

Prueba. Aplicando el Teorema 4.4 sobre el proceso $U_{jn}(t)$ se obtienen las condiciones necesarias para el Teorema 4.3, de cuya aplicación se obtiene el resultado. \square

Note que los procesos $U_{jn}(t)$, $j = 1, \dots, n$, dados en (4-77), son inobservables (puesto que la función $B^*(t)$ es desconocida), pero pueden reescribirse como:

$$U_{jn}(t) = \widehat{U}_{jn}(t) + \widetilde{U}_{jn}(t), \quad (4-81)$$

donde,

$$\widehat{U}_{jn}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\widehat{B}_t^{(j)} - \widetilde{B}_t^{(n)} \right), \quad (4-82)$$

y

$$\widetilde{U}_{jn}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\widetilde{B}_t^{(n)} - B^*(t) \right). \quad (4-83)$$

La ecuación (4-81) permite usar en la práctica el CLRT, de la forma que se expone en el siguiente corolario.

Corolario 4.4. *Para el proceso*

$$\widehat{U}_{\cdot n}^{\star 0}(t) = \sum_{j=1}^n (N_{jn}^{\star} - 1) \widehat{U}_{jn}(t) \quad (4-84)$$

donde, $\widehat{U}_{jn}(t)$ está dado en (4-82). Se cumple que

$$\mathcal{L} \left(\widehat{U}_{\cdot n}^{\star 0}(t) \middle| \mathbb{U}_n \right) \xrightarrow{wa(P)} \mathcal{L} (U_{\cdot n}(t)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (4-85)$$

Prueba. Usando (4-81) en (4-79) se obtiene la identidad

$$U_{\cdot n}^{\star 0}(t) = \widehat{U}_{\cdot n}^{\star 0}(t) + \widetilde{U}_{\cdot n}^{\star 0}(t), \quad (4-86)$$

donde $\widehat{U}_{\cdot n}^{\star 0}(t) = \sum_{j=1}^n (N_{jn}^{\star} - 1) \widehat{U}_{jn}(t)$ y $\widetilde{U}_{\cdot n}^{\star 0}(t) = \sum_{j=1}^n (N_{jn}^{\star} - 1) \widetilde{U}_{jn}(t)$.

Note que $\widetilde{U}_{\cdot n}^{\star 0}(t) \equiv 0$ (ya que $\sum_{j=1}^n N_{jn}^{\star} = n$) y así $\widetilde{U}_{\cdot n}^{\star 0}(t) \xrightarrow{P} 0$, por tanto usando el Lema 4.1 se tiene que

$$\mathcal{L} \left(\widehat{U}_{\cdot n}^{\star 0}(t) \middle| \mathbb{U}_n \right) \xrightarrow{wa(P)} \mathcal{L} (U_{\cdot n}(t)), \quad n \rightarrow \infty.$$

□

El resultado anterior establece que la distribución de $\widehat{U}_{\cdot n}^{\star 0}(t)$ resulta ser la misma distribución de $U_{\cdot n}^{\star 0}(t)$.

Lo anterior permite, en la práctica, la construcción de bandas de confianza basadas en remuestreo para el costo medio de garantía descontado en sistemas coherentes bajo reparo mínimo físico, lo cual se establece en el siguiente teorema.

Teorema 4.5. *Una banda de confianza aproximada de nivel $1 - \gamma$ para $B^*(t)$, el proceso de costo medio de garantía descontado en sistemas coherentes bajo reparo mínimo físico, en el intervalo $[0, t]$ es*

$$\overline{B}_t^{(n)} \pm \frac{q_{\gamma}^{\star}(t)}{\sqrt{n}}, \quad 0 \leq s \leq t, \quad (4-87)$$

donde, $q_{\gamma}^{\star}(t)$ es el cuantil $(1 - \gamma)$ de la distribución empírica basada en remuestreo de $\sup_{0 \leq s \leq t} \left| \widehat{U}_{\cdot n}^{\star 0}(s) \right|$.

Prueba. Siguiendo la definición de bandas de confianza simultáneas presentada en la Sección 4.1 y de (4-78), el objetivo es encontrar $q_{\gamma}(t)$ tal que:

$$P \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |Q(s)| \leq q_{\gamma}(t) \right) \approx 1 - \gamma, \quad (4-88)$$

pero el proceso $\sup_{0 \leq s \leq t} |Q(s)|$, al que converge débilmente el proceso $\sup_{0 \leq s \leq t} |U_n(s)|$, es desconocido. Usando el Corolario 4.3 se tiene que

$$\mathcal{L}(U_n^{*0}(t) | \mathbb{U}_n) \xrightarrow{wa(P)} \mathcal{L}(U_n(t)), \quad n \rightarrow \infty,$$

por tanto en lugar de buscar $q_\gamma(t)$ que cumpla (4-88), se debe encontrar el valor $q_\gamma^*(t)$ tal que:

$$P\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |U_n^{*0}(s)| \leq q_\gamma^*(t)\right) \approx 1 - \gamma. \quad (4-89)$$

lo cual por Corolario 4.4 equivale a encontrar el valor $q_\gamma^*(t)$ tal que

$$P\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |\widehat{U}_n^{*0}(s)| \leq q_\gamma^*(t)\right) \approx 1 - \gamma. \quad (4-90)$$

Así, $q_\gamma^*(t)$ se puede escoger como el cuantil $(1 - \gamma)$ de la distribución empírica basada en remuestreo de $\sup_{0 \leq s \leq t} |\widehat{U}_n^{*0}(s)|$. Luego, teniendo en cuenta que

$$\sup_{0 \leq s \leq t} |\widehat{U}_n^{*0}(s)| = \lim_{M \rightarrow \infty} \max_{t_j \in \mathcal{A}} |\widehat{U}_n^{*0}(t_j)|, \quad (4-91)$$

donde $\mathcal{A} = \{t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{M-1} \leq t_M = t\}$ es una partición del intervalo $[0, t]$, entonces con un valor de M suficientemente grande, se cumple que

$$P\left(\overline{\widehat{B}}_t^{(n)} - \frac{q_\gamma^*(t)}{\sqrt{n}} \leq B^*(s) \leq \overline{\widehat{B}}_t^{(n)} + \frac{q_\gamma^*(t)}{\sqrt{n}} : 0 \leq s \leq t\right) \approx 1 - \gamma, \quad (4-92)$$

de modo que $\overline{\widehat{B}}_t^{(n)} \pm \frac{q_\gamma^*(t)}{\sqrt{n}}$, $0 \leq s \leq t$, es una banda de confianza aproximada de nivel $1 - \gamma$ para $B^*(t)$ en el intervalo $[0, t]$. \square

En el capítulo siguiente se calculan las probabilidades de cobertura empíricas para evaluar el desempeño en muestras finitas de las bandas de confianza propuestas para el costo medio de garantía descontado en sistemas coherentes bajo reparo mínimo físico.

5. Probabilidades de cobertura

En este Capítulo se evalúa el desempeño de las bandas de confianza propuestas basadas en remuestreo, a través de un estudio de simulación que tiene en cuenta diversos escenarios construidos variando algunos de los factores que pueden afectar el desempeño de las bandas establecidas en el Teorema 4.5, tales como: el tipo de sistema complejo bajo estudio, el número de sistemas en garantía, la función de descuento fijada por el productor, el número de remuestras usadas para la aproximación y el tamaño de la partición del intervalo $[0, W]$ que sirve para aproximar el valor del supremo del proceso límite dado en (4-78).

Adicionalmente, se deben fijar algunas variables tales como: las distribuciones del tiempo de vida de las componentes del sistema coherente bajo estudio, el periodo de garantía para el sistema, los costos de reparo mínimo de las componentes del sistema, la probabilidad de cobertura deseada por la banda de confianza simultánea y el número de simulaciones para evaluar el desempeño de la misma.

En la siguiente sección se establecen los valores de los factores y variables de simulación a tener en cuenta en el estudio de simulación.

5.1. Factores y parámetros de simulación

Se comienza definiendo los factores de simulación y los valores a tener en cuenta en el estudio.

- **Tipo de sistema.** Como fue descrito en la Sección 2.1, los sistemas pueden tener estructura en serie, paralelo, k de m (esté último tiene como casos particulares a los sistemas en serie y paralelo) o cualquier otra estructura coherente más general. En la simulación se utilizarán un sistema en paralelo de tres componentes y un sistema 2 de 4 componentes. Vale la pena aclarar que no se usa en la simulación un sistema en serie, teniendo en cuenta que el proceso de reparo/costo de un sistema coherente es equivalente al respectivo proceso para un sistema con una estructura en serie formado por las componentes que resultan críticas para el sistema (ver Nota 3.3). Para evitar confusión se tratarán ambos sistemas como sistemas k de

m , los cuales se denotarán así: a) $\Phi_t^{1:3}$: sistema en paralelo de tres componentes o sistema 1 de 3 componentes, y b) $\Phi_t^{2:4}$: sistema 2 de 4 componentes.

- **Número de sistemas en garantía.** Denotado por n , corresponde al número de copias iid del proceso de reparo/costo utilizados en la construcción de bandas de confianza. Su variación permitirá estudiar el efecto del tamaño de muestra sobre la convergencia a la probabilidad de cobertura esperada. Los valores que se considerarán son $n = 10, 30, 50, 100, 500, 1000$.
- **Función de descuento.** Denotada por $d_i(t)$, establece cómo el consumidor comparte los costos de reparos mínimos sobre las componentes críticas del sistema durante el periodo de garantía W . Se usarán dos funciones de descuento, $d_i(t) = c_i e^{-t}$, $c_i (1 - tW^{-1}) e^{-t}$, $i = 1, \dots, m$.
- **Número de remuestras.** Se denotará G y con él se pretende establecer cómo este factor cambia la probabilidad de cobertura alcanzada, cuando se manejan valores de $G = 500, 1000, 5000, 10000$.
- **Tamaño de la partición.** Denotado por M , fija qué tan fina se hace la partición del periodo de garantía, para llevar a cabo la aproximación basada en remuestreo del supremo del proceso límite dado en (4-78). Se tomarán valores de $M = 100, 500, 1000$.

La Tabla 5-1 resume los valores que se tendrán en cuenta para los factores de la simulación descritos anteriormente $\Phi_t^{k:m}$, n , $d_i(t)$, G , M .

Tabla 5-1.: Factores de simulación y sus niveles

Factor	Niveles
$\Phi_t^{k:m}$	$\Phi_t^{1:3}$, $\Phi_t^{2:4}$
n	10, 30, 50, 100, 500, 1000
$d_i(t)$	$c_i e^{-t}$, $c_i (1 - tW^{-1}) e^{-t}$
G	500, 1000, 5000, 10000
M	100, 500, 1000

Como parámetros de simulación se tiene lo siguiente:

- **Distribuciones de falla de las componentes.** Para los sistemas considerados ($\Phi_t^{1:3}$ y $\Phi_t^{2:4}$) en cada componente i , cuyo tiempo de vida asociado se denota S_i , se considera la función de distribución acumulada F_i respectiva, de la siguiente forma: $F_1(t) = \text{Weibull}(\eta = 1.0, \beta = 1.5)$, $F_2(t) = \text{Weibull}(\eta = 1.0, \beta = 1.5)$, $F_3(t) = \text{Weibull}(\eta = 2.0, \beta = 2.0)$, $F_4(t) = \text{Weibull}(\eta = 2.0, \beta = 2.0)$.

- **Periodo de garantía.** Denotado por W , establece el periodo de tiempo que el sistema estará bajo garantía, de forma que las fallas producidas dentro de ese intervalo son reparadas mínimamente por el fabricante y los costos de las mismas son compartidos por ambas partes. Se define como periodo de garantía un valor de $W = 5$, que puede representar cinco años o cinco mil ciclos de uso.
- **Costo de reparo mínimo por componente.** Corresponde al valor de una reparación mínima en la i -ésima componente y se denota c_i . Para este estudio se toma $c_1 = c_2 = 3$ y $c_3 = c_4 = 5$ como valores de los costos de reparo mínimo en cada componente.
- **Probabilidad deseada de cobertura.** Denotada por $1-\gamma$, especifica con qué probabilidad se espera acotar la función de costo medio verdadera. Se toma un valor de $1 - \gamma = 0.95$.
- **Número de simulaciones.** Se denota N , y establece en la evaluación del desempeño de la banda cuántas simulaciones se realizan para tal fin. Se usa un valor de $N = 10000$ simulaciones.

La selección de la distribución Weibull para los tiempos de vida de las componentes en los sistemas bajo estudio, se debe al uso frecuente de esta distribución en confiabilidad industrial. Además, los parámetros de la distribución Weibull fijados en cada componente del sistema simulado garantizan que las distribuciones sean IFR y que en cada sistema se obtenga una historia de fallas con al menos un evento durante el tiempo de garantía establecido. La condición de $F_1 \equiv F_2$ y $F_3 \equiv F_4$ es usada para simplificar los escenarios de simulación.

Se debe resaltar que los dos sistemas complejos considerados usan las mismas distribuciones de falla en las tres primeras componentes y el mismo periodo de garantía.

La Tabla 5-2 muestra los valores adoptados para el estudio de simulación en los parámetros considerados.

Tabla 5-2.: Valores fijados en los parámetros de simulación

Parámetro	Valor adoptado
$F_1(t)$	Weibull ($\eta = 1.0, \beta = 1.5$)
$F_2(t)$	Weibull ($\eta = 1.0, \beta = 1.5$)
$F_3(t)$	Weibull ($\eta = 2.0, \beta = 2.0$)
$F_4(t)$	Weibull ($\eta = 2.0, \beta = 2.0$)
W	5
c_i	$c_1 = c_2 = 3, c_3 = c_4 = 5$
$1 - \gamma$	0.95
N	10000

Teniendo en cuenta los valores considerados en los factores dados en la Tabla 5-1, se tienen diversos escenarios de simulación (todos bajo los valores fijados en los parámetros dados en la Tabla 5-2), para los cuales se construye una banda de confianza simultánea del costo medio descontado de garantía en sistemas coherentes bajo reparo mínimo físico. El objetivo en este punto será evaluar para cada escenario el desempeño de la banda de confianza propuesta.

En la siguiente Sección se presenta una definición de probabilidad de cobertura, basada en (4-1), y el procedimiento llevado a cabo para evaluar el desempeño de las bandas de confianza construidas en cada escenario, que incluye el uso de una medida de la probabilidad de cobertura alcanzada por una banda de confianza basada en simulación Monte Carlo.

5.2. Probabilidad de cobertura

Sea $SCB_t^{(n)}$ una banda de confianza simultánea para la función $B^*(t)$ en $[0, t]$, basada en una muestra de n sistemas, entonces la probabilidad de cobertura (CP) para $SCB_t^{(n)}$ se define como:

$$CP = P\left(B^*(t) \in SCB_t^{(n)}\right). \quad (5-1)$$

Si la banda de confianza $SCB_t^{(n)}$ tiene nivel $1 - \gamma$, entonces $CP \approx 1 - \gamma$.

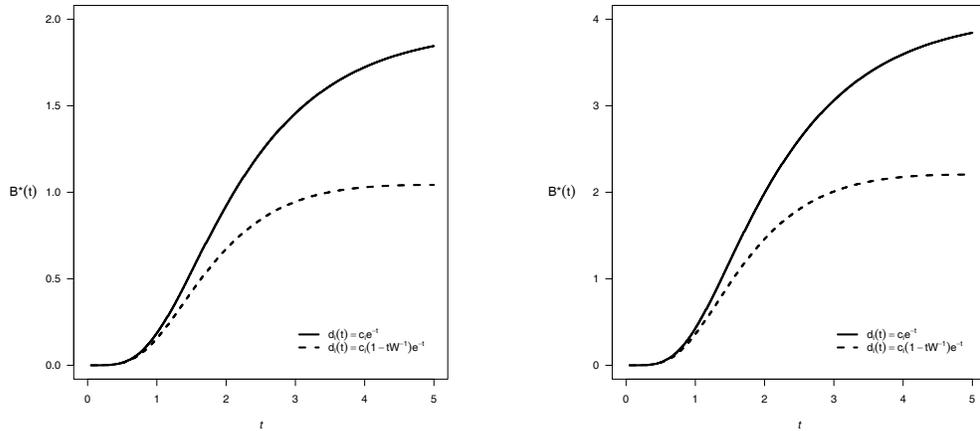
El procedimiento seguido en las simulaciones es el siguiente:

- i. En cada escenario, definido por una de las combinaciones posibles de los factores descritos en la Sección anterior (ver Tabla 5-1), se generan N simulaciones de n sistemas bajo garantía.
- ii. En cada una de las simulaciones anteriores:

- a) Observar el proceso de falla de las componentes del j -ésimo sistema durante el periodo de garantía $[0, W]$ y sobre las componentes críticas se realizan los reparos mínimos a que haya lugar, registrando las variables indicadoras de si la i -ésima componente es crítica para el j -ésimo sistema $C^{i(j)}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ y los procesos de costos en cada componente crítica $\widehat{B}_t^{i(j)}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, los cuales se combinan para obtener el proceso de costo de garantía del j -ésimo sistema $\widehat{B}_t^{(j)}$, $j = 1, \dots, n$, como fue descrito en (3-42). Finalmente, se calcula el costo promedio de garantía descontado $\overline{\widehat{B}}_t^{(n)}$, basado en n sistemas bajo reparo mínimo físico (ver (3-44)).
- b) Obtener G conjuntos de índices $\{J_{1n}^{*r}, \dots, J_{nn}^{*r}\}$, $r = 1, \dots, G$ correspondientes a G muestras aleatorias con reemplazo (remuestreo) de tamaño n . Para cada $r = 1, \dots, G$, calcular $\max_{t_j \in \mathcal{A}} \left| \widehat{U}_{.n}^{*0}(t_j) \right|$, donde $\mathcal{A} = \{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{M-1} \leq t_M = W\}$ es una partición de tamaño M del intervalo $[0, W]$. Los G valores obtenidos sirven para aproximar la distribución del estadístico $\sup_{0 \leq s \leq t} \left| \widehat{U}_{.n}^{*0}(s) \right|$ como fue descrito en (4-91). Luego, se obtiene $q_\gamma^*(t)$, el cuantil $1 - \gamma$ de la distribución aproximada mediante remuestreo de $\sup_{0 \leq s \leq t} \left| \widehat{U}_{.n}^{*0}(s) \right|$.
- iii. Para la l -ésima simulación, usando (4-87), calcular una banda de confianza de nivel $1 - \gamma$ para el costo medio de garantía descontado, basada en n sistemas bajo reparo mínimo físico, $\text{SCB}_t^{l(n)}$, $l = 1, \dots, N$.
- iv. Evaluar en cada escenario la probabilidad de cobertura alcanzada por la banda de confianza a través del estadístico

$$\widehat{\text{CP}} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N I \left(B^*(t) \in \text{SCB}_t^{l(n)} \right) \quad (5-2)$$

Dado que la función del costo medio $B^*(t)$ es desconocida, usando el Teorema 3.3 (González & Bueno 2011), donde se establece que $\overline{\widehat{B}}_t^{(n)}$ es un estimador insesgado y consistente para $B^*(t)$ se realiza una aproximación de $B^*(t)$ con $\overline{\widehat{B}}_t^{(n)}$ para una muestra de 100000 sistemas con una partición del intervalo $[0, 5]$ de tamaño 1000. La Figura 5-1 muestra las funciones asumidas para el costo medio $B^*(t)$ para los dos sistemas coherentes bajo estudio, considerando las dos funciones de descuento.



a) $B^*(t)$ aproximado para el sistema 1 de 3 b) $B^*(t)$ aproximado para el sistema 2 de 4

Figura 5-1.: Costo medio esperado para los sistemas bajo estudio

Luego, en cada escenario de simulación se evalúa la probabilidad de cobertura alcanzada por la banda de confianza propuesta, mediante (5-2), cuyas indicadoras determinan si la función $B^*(t)$ está totalmente contenida en la banda resultante en cada simulación.

A continuación se presentan los resultados del estudio de simulación para cada uno de los sistemas coherentes considerados.

5.3. Probabilidades de cobertura alcanzadas en el sistema 1 de 3

Para cada valor considerado del tamaño de la remuestra G , la Figura 5-2 presenta los resultados para analizar los efectos del tamaño de la partición M y el tamaño de la muestra n , sobre las probabilidades de cobertura alcanzadas, para ambas funciones de descuento.

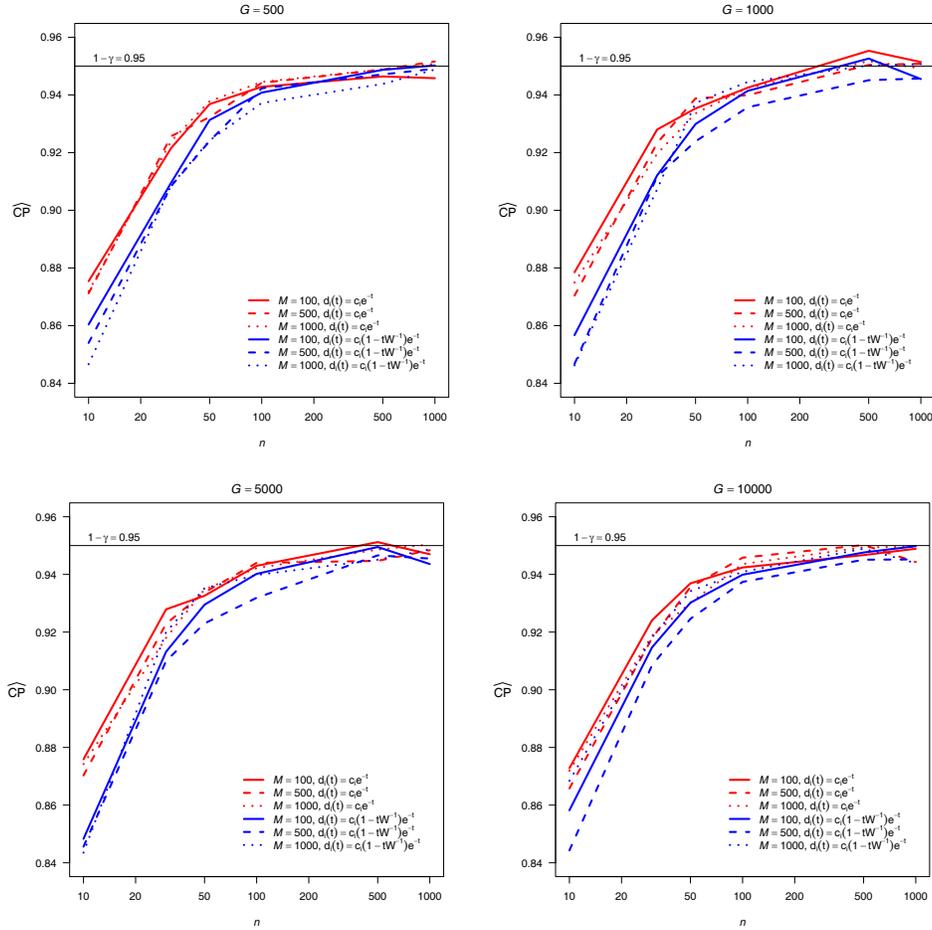


Figura 5-2.: \widehat{CP} para $SCB_t^{(n)}$, en sistema 1 de 3, variando M .

En la Figura 5-2 se observa que para ambas funciones de descuento, a medida que aumenta el número de sistemas bajo garantía, las probabilidades empíricas de cobertura de las bandas de confianza correspondientes aumentan hasta llegar al valor de $1 - \gamma$ fijado en la simulación. Observe que aunque no parece existir un patrón claro que pueda atribuirse a un efecto del tamaño de la partición M sobre la probabilidad de cobertura alcanzada, se puede apreciar que si se desean obtener probabilidades de cobertura mayores esto ocurre cuando la partición del período de garantía es más fina. También, en la Figura 5-2 se observa que hay diferencias apreciables entre las probabilidades de cobertura alcanzadas por las bandas de confianza para las dos funciones de descuento consideradas, cuando en las muestras $n \leq 100$, sin embargo cuando el número de sistemas sobrepasa ese valor estas diferencias se reducen.

A continuación se hace un análisis del efecto del tamaño de la remuestra G , sobre las probabilidades de cobertura bajo diferentes tamaños de muestra.

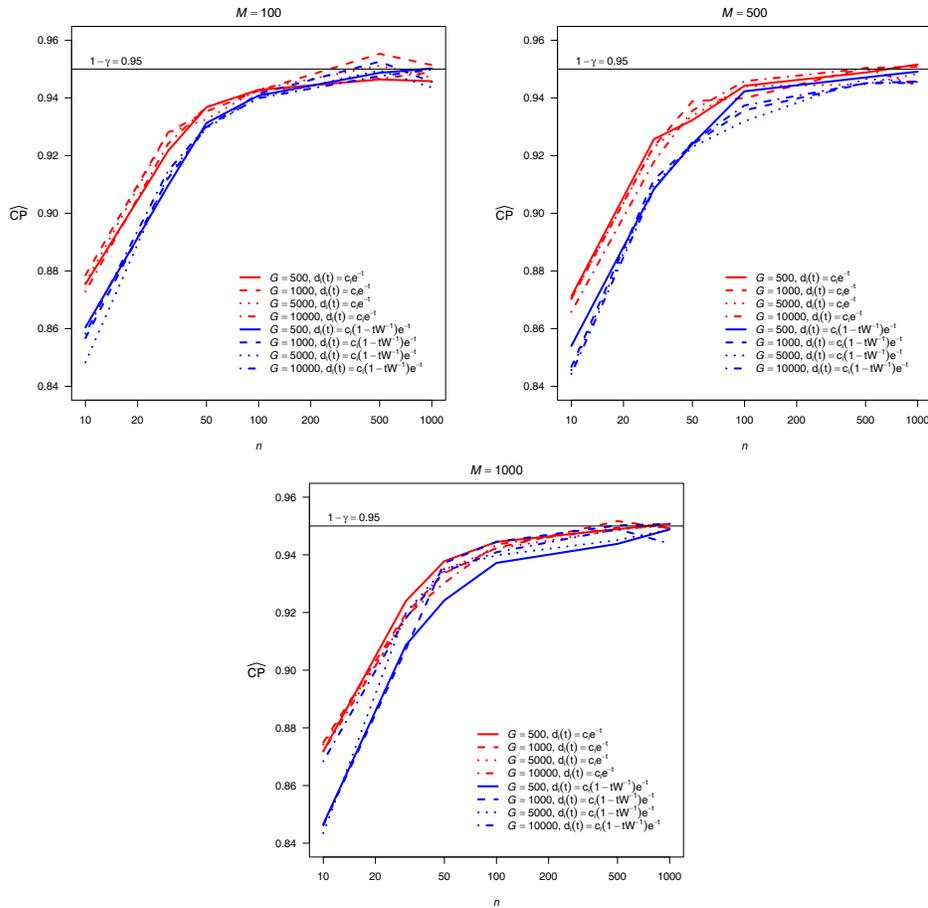


Figura 5-3.: \widehat{CP} para $SCB_t^{(n)}$, en sistema 1 de 3, variando G .

La Figura 5-3 muestra simultáneamente, para los tamaños de partición M considerados, el efecto del tamaño de la remuestra G , sobre las probabilidades de cobertura bajo diferentes tamaños de muestra, para ambas funciones de descuento.

Observe que en los niveles $M = 100, 500$ considerados del tamaño de la partición existen leves diferencias entre las curvas de \widehat{CP} para los tamaños de remuestras G estudiados, para los casos con igual modelo de costo descontado, lo que sugiere que al menos en los valores considerados el tamaño de la remuestra G no afecta el comportamiento de las probabilidades de cobertura alcanzadas por bandas propuestas, sin embargo cuando la partición es fina $M = 1000$ se tiene que las probabilidades de cobertura se ven favorecidas por un número de remuestras mayor. Note que en la Figura 5-3 también se confirma que las diferencias que pueden existir en las probabilidades de cobertura alcanzadas para las dos funciones de descuento consideradas disminuyen al aumentar el número de las sistemas llegando a valores similares cercanos al valor fijado $1 - \gamma$.

En la siguiente Sección se presentan los resultados obtenidos en las probabilidades de

cobertura alcanzadas por las bandas de confianza propuestas para el sistema 2 de 4.

5.4. Probabilidades de cobertura alcanzadas en el sistema 2 de 4

La Figura 5-4 muestra el efecto del tamaño de la partición M , sobre las probabilidades de cobertura bajo diferentes tamaños de muestra, en cada nivel considerado del tamaño de la remuestra G , para ambas funciones de descuento.

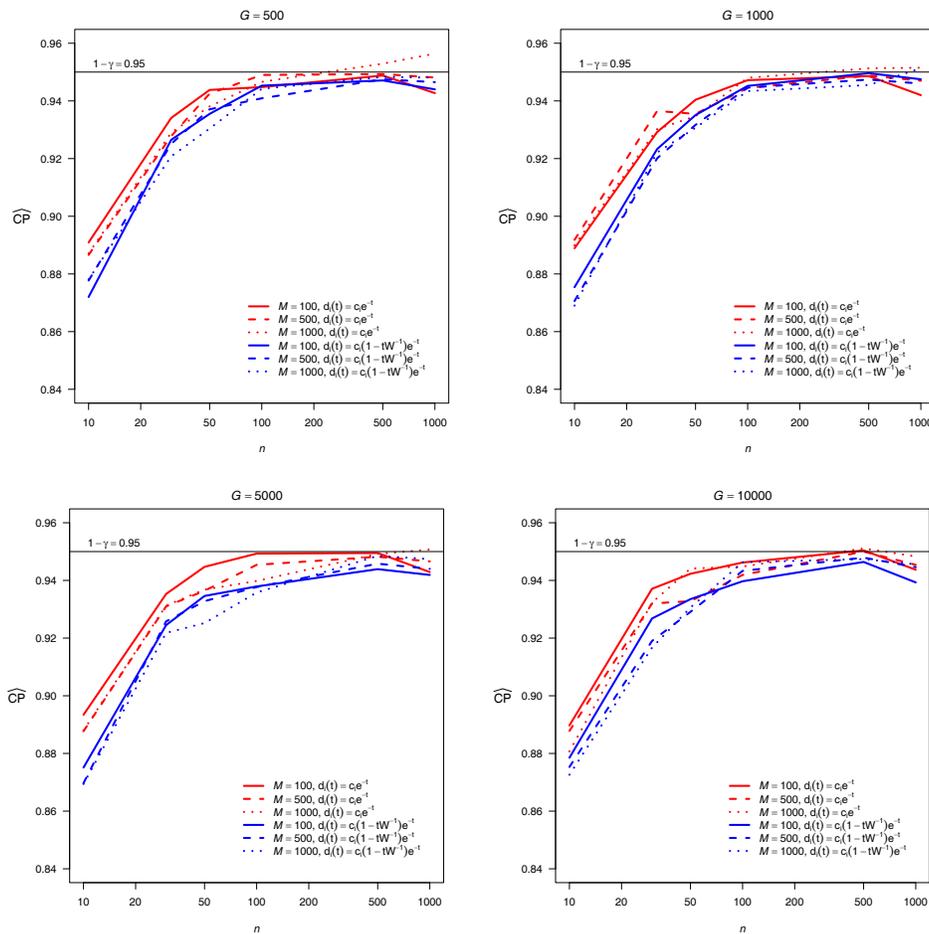


Figura 5-4.: \widehat{CP} para $SCB_t^{(n)}$, en sistema 2 de 4, variando M .

En la Figura 5-4 se observa que, al igual que en el sistema 1 de 3, para las dos funciones de descuento consideradas al aumentar el número de sistemas bajo garantía, las probabilidades empíricas de cobertura de las bandas de confianza también aumentan hasta llegar al valor deseado $1-\gamma$. Además, las probabilidades de cobertura estimadas al variar el tamaño de la partición M nuevamente indican que las probabilidades de cobertura mejoran a medida que la partición del periodo de garantía es más fina. También se obser-

va que las probabilidades de cobertura alcanzadas para las dos funciones de descuento consideradas son diferentes, al menos cuando el número de sistemas bajo garantía es inferior o igual a 100, pero cuando el número de sistemas es grande las diferencias entre las probabilidades de cobertura se desvanecen.

En lo que sigue, se hace un análisis del efecto del tamaño de la remuestra G , sobre las probabilidades de cobertura alcanzadas bajo diferentes tamaños de muestra. La Figura 5-5 explora el efecto del tamaño de la remuestra G , sobre las probabilidades de cobertura bajo diferentes tamaños de muestra, para ambas funciones de descuento.

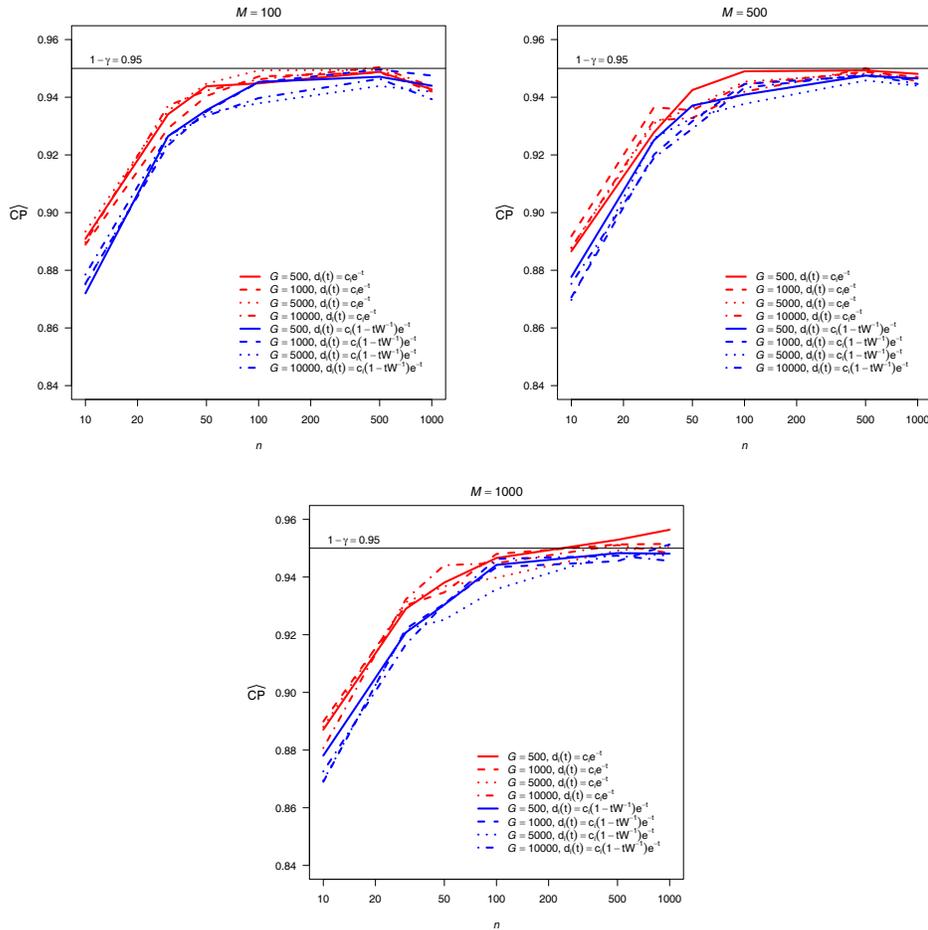


Figura 5-5.: \widehat{CP} para $SCB_t^{(n)}$, en sistema 2 de 4, variando G .

La Figura 5-5 permite concluir de nuevo que en cada nivel estudiado del tamaño de la partición M , para ambas funciones de descuento, las probabilidades de cobertura sugieren una mejora cuando los tamaños de remuestra G aumentan. De nuevo, se reitera que hay diferencias apreciables entre las probabilidades de cobertura para las dos funciones de descuento, cuando el número de las sistemas es menor o igual a 100, mientras que al aumentar ese número de sistemas se llega a valores similares en ambas funciones de

descuento y cercanos el valor fijado $1 - \gamma$.

En la siguiente Sección se realiza una comparación general que involucra a los sistemas y funciones de descuento consideradas.

5.5. Probabilidades de cobertura alcanzadas por ambos sistemas

Para el siguiente análisis se asume que las diferencias encontradas entre las probabilidades de cobertura para los diferentes números de remuestras considerados son despreciables y así se toman los promedios de las probabilidades de cobertura en los niveles de G . La Figura 5-6 se muestra simultáneamente cómo cambian las probabilidades de cobertura alcanzadas de acuerdo al tamaño de la partición, el tipo de sistema, la función de descuento y al número de sistemas bajo garantía.

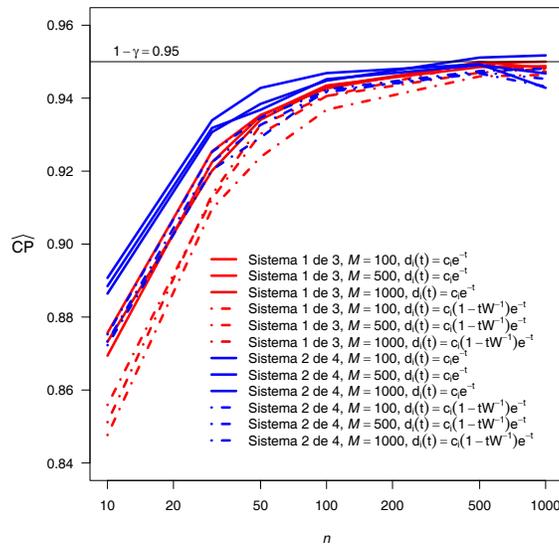


Figura 5-6.: \widehat{CP} para $SCB_t^{(n)}$, por tipo de sistema y descuento, variando M .

Note de la Figura 5-6 que, en general con el sistema 2 de 4, comparado con el sistema 1 de 3, para $n \leq 100$ las probabilidades de cobertura son mayores con cualquiera de las funciones de descuento y tamaños de partición considerados. Además, la función de descuento no pro-rateada $d_i(t) = c_i e^{-t}$ produce probabilidades de cobertura alcanzadas mayores en los dos sistemas que se ven favorecidas a medida que el tamaño de la partición M se hace más fina, corroborando el análisis hecho anteriormente sobre este factor en ambos sistemas.

Ahora, si se asume que las diferencias en las probabilidades de cobertura para los distintos tamaños de partición y número de remuestras considerados son despreciables y se toma el promedio de éstas, se tendría como resultado lo que se muestra en la Figura 5-7 que se presenta a continuación.

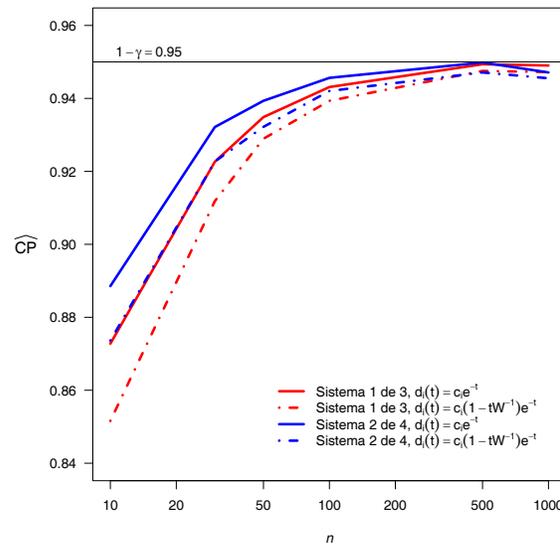


Figura 5-7.: \widehat{CP} para $SCB_t^{(n)}$ por tipo de sistema y descuento.

Observe que de la Figura 5-7 se concluye que en promedio las probabilidades de cobertura alcanzadas para el sistema 2 de 4 son mayores que las del sistema 1 de 3 para tamaños de muestra $n \leq 100$, y luego tales diferencias disminuyen conforme aumenta n , convergiendo los valores de \widehat{CP} al valor deseado de $1 - \gamma = 0.95$, aunque la convergencia parece más rápida en el sistema 2 de 4.

5.6. Ejemplos de bandas de confianza simultáneas

Se ilustran las bandas de confianza en los dos sistemas coherentes en los cuales se adelantó el estudio de simulación previo, esto es, para el sistema de 3 componentes en paralelo y el sistema 2 de 4 componentes. Adicionalmente a los parámetros de simulación en Tabla 5-2, se fijará el tamaño de la partición en $M = 1000$ y el número de remuestras en $R = 10000$.

Las Figuras 5-8 y 5-9 muestran cómo cambian las bandas de confianza al variar el número de sistemas bajo garantía n para los sistemas 1 de 3 y 2 de 4, respectivamente.

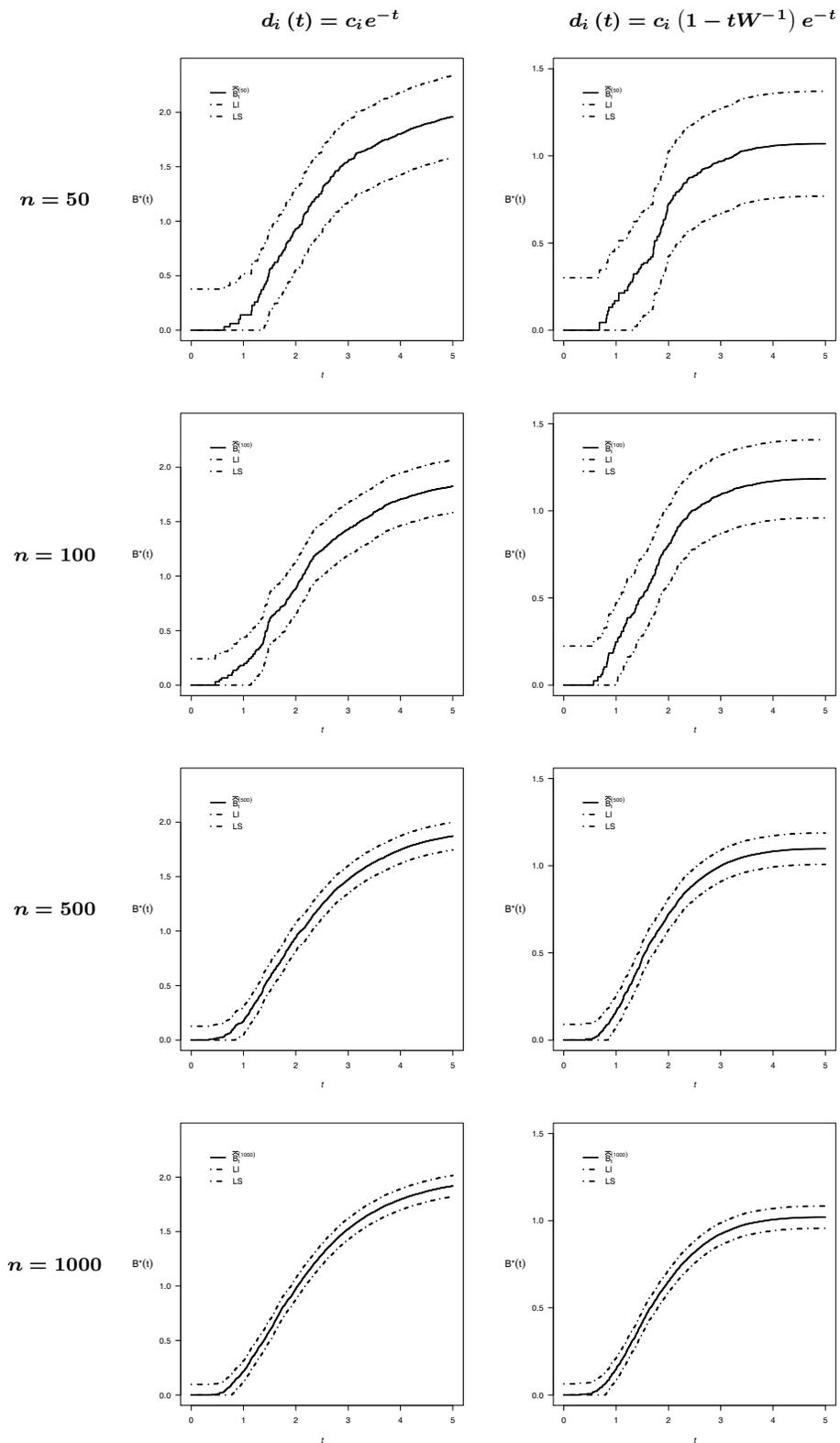


Figura 5-8.: Bandas de confianza simultáneas de nivel $1 - \gamma$ para el sistema 1 de 3

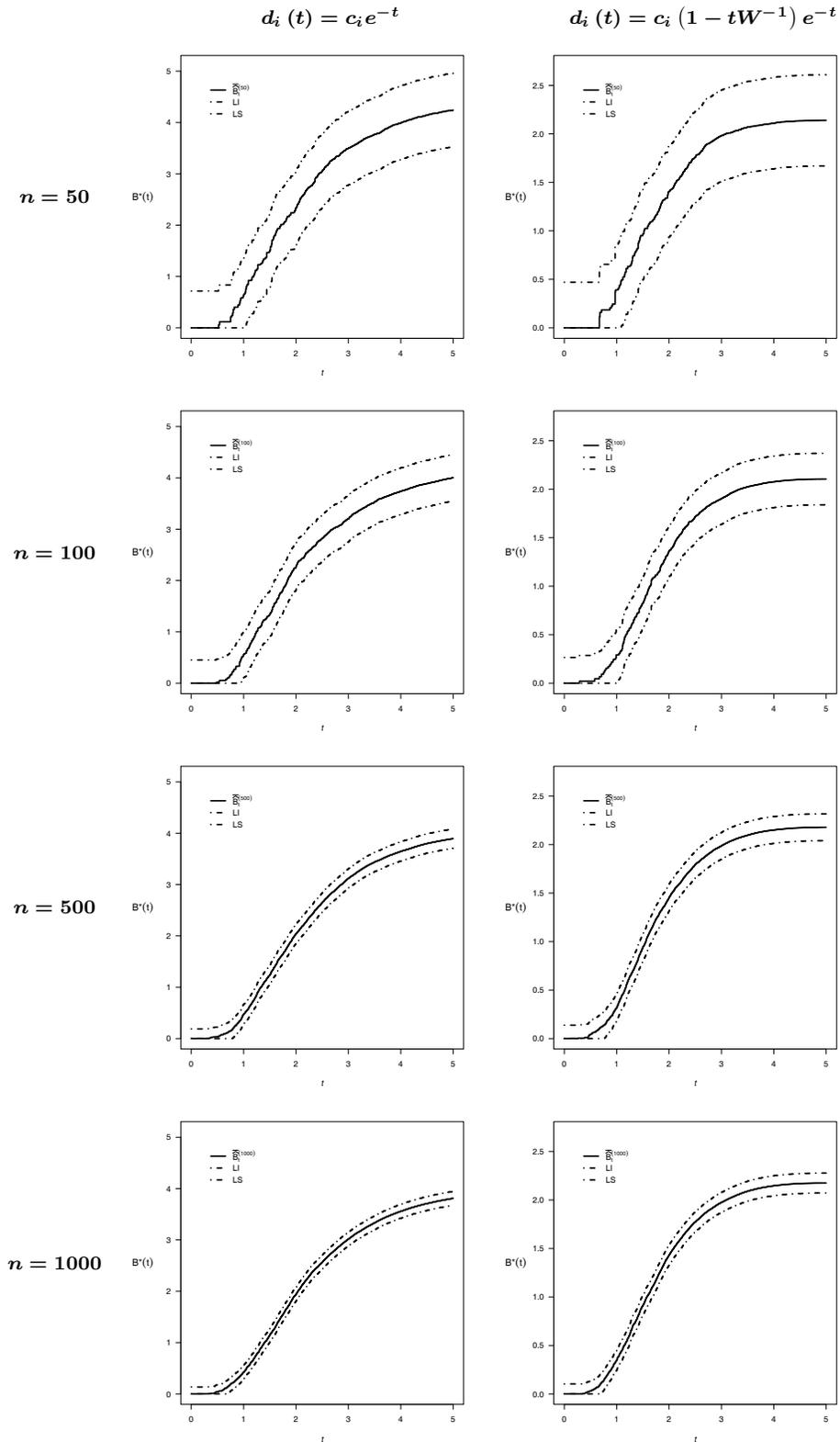


Figura 5-9.: Bandas de confianza simultáneas de nivel 0.95 para el sistema 2 de 4

Note que en ambos sistemas considerados el número de sistemas bajo garantía es un factor fundamental en la precisión de la banda de confianza propuesta, vista como la amplitud de la banda de confianza, llegándose a una precisión óptima con $n \geq 500$. Pocos sistemas en garantía $n \leq 100$ generan una alta variabilidad en los procesos de costo/reparo que se refleja en bandas de confianza muy amplias y que, de acuerdo a los resultados del estudio de simulación, tienen probabilidades de cobertura alejadas del nivel $1 - \gamma = 0.95$ fijado.

6. Conclusiones y trabajo futuro

6.1. Consideraciones finales

1. El concepto de nivel crítico de las componentes observadas en la estructura de un sistema coherente, permite modelar el proceso de intensidad de falla del sistema como la intensidad de un sistema en serie de las componentes observadas después de sus niveles críticos. Esto permite modelar el proceso de conteo de los reparos mínimos del sistema al nivel de sus componentes y los costos asociados, cuando este tipo de reparo se lleva a cabo bajo la filtración definida por la observación completa del sistema y sus componentes en cada instante de tiempo.
2. Para sistemas coherentes con estructuras relativamente simples es posible incorporar la información completa del sistema y de sus componentes en el análisis y modelamiento estocástico de los costos involucrados en los procesos de garantía, utilizando la información definida por la pre- t -historia de las componentes, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Por el contrario en sistemas coherentes con estructuras muy complejas, cuando no es práctico ni económico la observación bajo una pre- t -historia de las componentes, pero si sobre módulos o subestructuras de componentes, en cuyo caso, en lugar de considerar la estructura original Φ , se puede considerar una estructura $\tilde{\Phi}$ definida por el sistema formado por las subestructuras o módulos factibles de ser observados en todo tiempo $t \geq 0$. Luego, las consideraciones hechas en este trabajo sobre el sistema y sus componentes deben ser aplicadas bajo la estructura $\tilde{\Phi}$, en la cual las componentes son subsistemas. En el contexto anterior, donde los reparos mínimos de un sistema al nivel de sus componentes pueden ser poco prácticos, los resultados del Capítulo 3 también se podrían aplicar a la estructura $\tilde{\Phi}$, en la cual las funciones $\lambda^i(t)$ corresponderían a las subestructuras consideradas como las componentes de $\tilde{\Phi}$.
3. En algunos modelos estadísticos la evaluación de la precisión de las inferencias estadísticas se puede hacer mediante el uso de métodos computacionales intensivos Efron (1979), Davison & Hinkley (1997) y Belyaev (2007). En este trabajo se utilizó eficientemente el remuestreo para la construcción de bandas de confianza para el costo medio de garantía descontado en sistemas coherentes bajo reparo mínimo físico, es decir, cuando el sistema es observado al nivel de sus componentes, de

forma que se tiene una herramienta para evaluar la precisión de inferencias realizadas bajo el modelo de tiempo de vida general que evita las complicaciones que puede tener el análisis asintótico de los procesos estocásticos asociados, por ejemplo no encontrar formas cerradas para estos procesos. Además, se debe destacar que la técnica usada para la estimación de los costos de garantía y la posterior construcción de bandas de confianza simultáneas son no paramétricas, y por tanto ningún supuesto distribucional sobre los procesos de falla/reparo es requerido por el método propuesto.

4. Las condiciones consideradas para los procesos estocásticos usados en la estimación del costo medio descontado en sistemas coherentes bajo reparo mínimo físico y que permiten el uso de remuestreo para la construcción de bandas de confianza, resultan ser bastante generales. En los Capítulos 3 y 4 se requieren como condiciones suficientes para tal fin las siguientes:
 - Los tiempos de vida de las componentes S_i , son tales que $0 < S_i < \infty$, P -c.s., $i = 1, \dots, m$, y son \mathcal{F}_t -tiempos de parada totalmente inaccesibles.
 - Para todo $i \neq j$, $P(S_i = S_j) = 0$. Esto es dos componentes no fallan simultáneamente.
 - Las funciones de tasa de falla de la componente i en el tiempo t , $\lambda^i(t)$, son funciones determinísticas continuas e integrables en el intervalo $(0, t]$.
 - Las funciones de costo descontado por reparo mínimo de la componente i en el tiempo t , $H_i(t)$, son funciones determinísticas continuas acotadas e integrables en el intervalo $[0, t]$, tales que $\int_0^t H_i(u) \lambda_u du < \infty$ y $\int_0^t H_i^2(u) \lambda_u du < \infty$.

Las cuales frecuentemente se cumplen (Fleming & Harrington 1991, Aven & Jensen 1999). Por tanto la propuesta de construcción de bandas de confianza simultáneas puede ser válida en una amplia gama de modelos de costos en confiabilidad de sistemas coherentes.

5. Si no se dispone de la filtración de información completa $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, pero es posible observar el proceso bajo una filtración de información parcial $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$, tal que $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{F}_t$, entonces la aplicación de las técnicas desarrolladas en este trabajo debería conducir a resultados similares, puesto que bajo la filtración \mathbb{A} también se tiene una representación SSM, que debe cumplir las condiciones mínimas que se mencionaron en el ítem anterior.
6. La propuesta de construcción de bandas de confianza simultáneas para el costo medio descontado de garantía para sistemas coherentes bajo reparo mínimo físico, es de fácil implementación en cualquier paquete estadístico, puesto que involucra sólo muestreo aleatorio con reemplazo. Además, en los escenarios de simulación

estudiados en el Capítulo 5 se llegó a probabilidades de cobertura alcanzadas razonables (cercanas a la probabilidad de cobertura fijada), en particular si el número de sistemas bajo garantía es amplio (mayor a 100 productos o sistemas), se tiene una partición fina del periodo de garantía y el número de remuestras es grande. Lo anterior indica que la precisión de las inferencias estadísticas realizadas sobre los procesos considerados depende en gran medida del tamaño del conjunto de datos, es decir, del número de sistemas bajo garantía, afortunadamente, las bases de datos para análisis de garantía por lo general son suficientemente grandes para que la propuesta de construcción de bandas de confianza pueda ser usada.

6.2. Sugerencias de trabajo futuro

Diversas consideraciones adicionales se pueden incluir en la construcción de bandas de confianza simultáneas y en el modelamiento de los costos de garantía en sistemas coherentes. A continuación se enumeran algunos de los problemas de interés para desarrollar en trabajos futuros.

1. En la construcción de bandas de confianza simultáneas basadas en remuestreo se puede incluir un factor de corrección de sesgo, debido a la utilización de muestras finitas (Cowling, Hall & Phillips 1996, Genovese & Wasserman 2008). Tal modificación debe mejorar el desempeño de las bandas de confianza. Por otro lado este trabajo se concentró en la construcción de bandas de confianza para el costo medio de garantía descontado para sistemas coherentes bajo reparo mínimo físico, sin embargo frecuentemente en confiabilidad interesan otras medidas distribucionales, tales como, la mediana y otros cuantiles de la distribución. Así, puede interesar realizar la estimación puntual de estas medidas con una banda de confianza simultánea con una probabilidad de cobertura dada $1 - \gamma$.
2. El modelo de costo estudiado en este trabajo sólo incluye un tipo de falla, sin embargo es posible utilizar otros modelos de costo. Por ejemplo, Block et al. (1985) describen un modelo de falla general, denominado en forma resumida como el modelo BBS, en el que se asume que un sistema puede presentar uno de dos tipos de fallas en un instante t : falla tipo I o falla tipo II. Las fallas tipo I, son reparadas mínimamente, es decir, se lleva al sistema a la condición inmediatamente anterior al momento en que se presenta la falla. Las fallas tipo II ocurren con probabilidad $p(t)$ y son catastróficas, por tanto no reparables, de ahí que el sistema sea reemplazado en su totalidad por uno nuevo. En estas condiciones se puede generalizar el método de construcción de bandas de confianza simultáneas para alguna de las funciones de interés, antes mencionadas.

3. El trabajo realizado se enfoca en el modelo de reparo mínimo y en la política de garantía donde el costo de las reparaciones es compartido por el cliente y el fabricante (política PRW). En la literatura se conocen otros tipos de reparo adicionales al reparo mínimo, tales como: el reparo perfecto, donde el producto después de reparado queda tan bueno como nuevo, y el reparo imperfecto, donde el producto queda mejor que usado pero no tan bueno como nuevo, ambos tipos de reparo hacen uso de los conocidos procesos de renovación (Park & Pham 2010, Su & Shen 2012). Además, es posible considerar políticas de garantía de sustitución gratuita (FRW) o combinaciones de las políticas FRW y PRW (Chien 2008, Chien 2010). La generalización de los resultados de esta tesis a las situaciones previamente descritas es un tópico de interés.
4. El periodo de garantía ofrecido por el fabricante ha venido creciendo progresivamente hasta el punto que actualmente es común ofrecer una garantía que cubre la vida útil del producto (Chattopadhyay & Rahman 2008, Hong-Zhong, Zhie-Jie, Yanfeng, Yu & Liping 2008), lo cual hace que la estimación de los costos de garantía se torne más compleja, debido a factores tales como: incertidumbre en los precios de las partes, mano de obra y la creciente entrada de productos nuevos al mercado. Alternativamente, el fabricante puede ofrecer una garantía extendida, de manera que es de interés modelar los costos asociados a ésta (Jack & Murthy 2007, Su & Shen 2012). Así, ambas situaciones pueden ser estudiadas bajo el modelo de tiempo de vida general aplicando distintos tipos de reparo y teniendo como objetivo producir estimaciones similares a las obtenidas en esta tesis.
5. Un factor que no se tiene en cuenta en este trabajo es la tasa o intensidad de uso del producto bajo garantía, lo cual se convierte en un factor clave para el fabricante en la decisión de ofrecer una reparación o un reemplazo del producto. Chattopadhyay & Murthy (2000), Hong-Zhong et al. (2008), Jack, Iskandar & Murthy (2009) y Vahdani, Chukova & Mahlooji (2011) estudian el problema de la estimación de los costos de garantía en esta situación bajo el enfoque clásico, de manera que alternativamente se puede investigar cómo cambia la estimación de tales costos usando la aproximación física y cómo acotar tal estimación usando bandas de confianza simultáneas.

Se debe destacar que en la mayoría de las situaciones que ameritan un trabajo posterior, a pesar de contar con algo de literatura al respecto, la mayoría de los trabajos consideran la aproximación estadística de dichos problemas, de manera que tan solo llevar estas situaciones a la aproximación física es suficiente para lograr un aporte significativo al área de la confiabilidad en sistemas multicomponentes.

Apéndices

A. Algunos resultados teóricos importantes

A.1. Teorema del valor medio para integrales

A continuación se presenta la primera versión del teorema de valor medio para integrales de Riemann-Stieltjes (Apostol 1974), y como corolario se presenta un resultado que se aplica con frecuencia en el trabajo.

Teorema A.1. *Asuma que ν es creciente y sea f una función Riemann integrable con respecto a ν en el intervalo $[a, b]$. Denote por M y m al supremo e ínfimo del conjunto $\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Entonces, existe un número real κ que satisface $m \leq \kappa \leq M$ tal que*

$$\int_a^b f(x) d\nu(x) = \kappa \int_a^b d\nu(x) = \kappa [\nu(b) - \nu(a)]. \quad (\text{A-1})$$

En particular, si f es continua en $[a, b]$, entonces $\kappa = f(x_0)$ para algún x_0 en $[a, b]$.

Una aplicación del Teorema A.1 se da en el ámbito de las integrales de la forma $\int_a^b H(u) \lambda(u) du$.

Corolario A.1. *Sea $H(t)$ una función continua, no negativa y acotada en $[a, b]$ con $0 \leq a \leq b \leq t < \infty$. Sea $\lambda(t)$ una función no negativa que representa una tasa de falla que puede estar asociada a una distribución con tasa de falla creciente (IFR) o con tasa de falla decreciente (DFR) o con tasa de falla que combina ambos patrones, por ejemplo una tasa de falla con forma de bañera. Asuma que $\int_a^b H(u) \lambda(u) du < \infty$, es decir $f(t) = H(t) \lambda(t)$ es Riemann integrable en $[a, b]$. Entonces, existe $\kappa \geq 0$ tal que*

$$\int_a^b H(u) \lambda(u) du \leq \kappa |b - a|. \quad (\text{A-2})$$

Prueba. Dado que las funciones $\lambda(t)$ representan tasas de falla, las cuales pueden estar o no definidas en $a = 0$, específicamente en casos de distribuciones DFR o en forma de bañera, de manera que $a = 0$ puede ser un punto de discontinuidad de $\lambda(t)$, entonces se distinguirán dos casos así:

Caso 1: $\lambda(t)$ es una función de tasa de falla continua en $[0, t]$.

Como $H(t)$ y $\lambda(t)$ son continuas en $[0, t]$, entonces se tiene que $f(t) = H(t)\lambda(t)$ también es una función continua en $[0, t]$ y por tanto es Riemann integrable con respecto a $\nu(u) = u$. En consecuencia, aplicando el Teorema (A.1), se tiene que para $0 \leq a \leq b \leq t < \infty$, existe $\kappa \geq 0$ tal que

$$\int_a^b H(u)\lambda(u)du \leq \kappa|b-a|. \quad (\text{A-3})$$

Caso 2: $\lambda(t)$ es una función de tasa de falla continua en $(0, t]$.

Lo anterior puede ocurrir por ejemplo en distribuciones DFR. Como $H(t)$ es continua en $[0, t]$ pero $\lambda(t)$ es continua en $(0, t]$, entonces se tiene que $f(t) = H(t)\lambda(t)$ es continua en $(0, t]$ y de manera que $f(0)$ no está definida. Luego se deben estudiar las siguientes opciones:

- i. Si $a > 0$ con $0 < a \leq b \leq t < \infty$. Entonces, $f(t) = H(t)\lambda(t)$ es continua y Riemann integrable en $[a, b]$ y por Teorema A.1, existe $\kappa \geq 0$ tal que

$$\int_a^b H(u)\lambda(u)du \leq \kappa|b-a|. \quad (\text{A-4})$$

- ii. $a = 0$ con $0 = a \leq b \leq t < \infty$. Entonces, para $\epsilon > 0$

$$\int_a^b H(u)\lambda(u)du = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b H(u)\lambda(u)du. \quad (\text{A-5})$$

Note que en la integral del lado derecho se puede aplicar el Teorema A.1, ya que $f(t) = H(t)\lambda(t)$ es continua y Riemann integrable en $[a+\epsilon, b]$ por tanto existe $\kappa \geq 0$ tal que

$$\int_{a+\epsilon}^b H(u)\lambda(u)du \leq \kappa|b-(a+\epsilon)|, \quad (\text{A-6})$$

y tomando $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$ en ambos lados de (A-6) se obtiene que

$$\int_a^b H(u)\lambda(u)du = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b H(u)\lambda(u)du \leq \kappa|b-a|. \quad (\text{A-7})$$

Luego, de (A-4) y (A-7) se tiene que si $\lambda(t)$ es continua en $(0, t]$, se cumple también que para todo $a, b \in (0, t]$,

$$\int_a^b H(u)\lambda(u)du \leq \kappa|b-a|. \quad (\text{A-8})$$

De (A-3) y (A-8) se concluye que para toda $\lambda(t)$ y $H(t)$ tales que $\int_0^t H(u)\lambda(u)du < \infty$ y para todo $a, b \in [0, t]$, se cumple que

$$\int_a^b H(u)\lambda(u)du \leq \kappa|b-a|. \quad \square$$

A.2. Teorema de mapeo continuo

El Teorema de Mapeo Continuo extiende la convergencia débil de una sucesión de medidas sobre un espacio métrico (Y, \mathcal{S}_0) a una sucesión de medidas inducida en otro espacio (Y', \mathcal{S}'_0) .

Teorema A.2. (Fleming & Harrington 1991) *Suponga que f es un mapeo continuo desde un espacio métrico (Y, \mathcal{S}_0) a otro espacio (Y', \mathcal{S}'_0) . Sean \mathcal{P}_n y \mathcal{P} medidas de probabilidad en (Y, \mathcal{S}_0) . Si \mathcal{P}_n converge débilmente a \mathcal{P} ($\mathcal{P}_n \xrightarrow{w} \mathcal{P}$), entonces $\mathcal{P}_n f^{-1}$ converge débilmente a $\mathcal{P} f^{-1}$ ($\mathcal{P}_n f^{-1} \xrightarrow{w} \mathcal{P} f^{-1}$).*

A.3. Desigualdades

En esta Sección se presentan algunas desigualdades útiles en las pruebas realizadas durante este trabajo.

Sean a_1, a_2, \dots, a_m y b_1, b_2, \dots, b_m dos m -tuplas arbitrarias de números reales. Sean $d_1, d_2, \dots, d_m \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, entonces se cumplen las siguientes desigualdades:

- **Desigualdad Elemental:**

$$(a_1 \pm b_1)^2 \leq 2a_1^2 + 2b_1^2. \quad (\text{A-9})$$

- **Desigualdad c_r :**

$$|a_1 + b_1|^r \leq c_r |a_1|^r + c_r |b_1|^r, \quad r > 0, \quad (\text{A-10})$$

donde $c_r = 1$ o 2^{r-1} , de acuerdo a si $r \leq 1$ o $r \geq 1$, respectivamente.

- **Desigualdad triangular:**

$$\left| \sum_{k=1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=1}^m |a_k|. \quad (\text{A-11})$$

- **Desigualdad de Cauchy:**

$$\left(\sum_{k=1}^m a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^m a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^m b_k^2 \right). \quad (\text{A-12})$$

La igualdad ocurre en (A-12) sólo si $a_k = 0$ ($1 \leq k \leq m$), o si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $b_k = t a_k$ ($1 \leq k \leq m$).

De la desigualdad A-12 se desprende un caso especial cuando $b_k = 1$ ($1 \leq k \leq m$), que resulta en

$$\left(\sum_{k=1}^m a_k \right)^2 \leq m \left(\sum_{k=1}^m a_k^2 \right). \quad (\text{A-13})$$

y usando argumentos similares de la prueba de (A-12) y usando la m -tupla de números en $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, se tiene que (Herman, Kučera & Šimša 2000)

$$\left(\sum_{k=1}^m d_k \right)^3 \leq m^2 \left(\sum_{k=1}^m d_k^3 \right). \quad (\text{A-14})$$

A.4. Función generadora de momentos de un NHPP

En esta Sección se describe la función generadora de momentos de un Proceso Poisson no Homogéneo.

En general, se tiene que la función generadora de momentos de un NHPP, \tilde{N}_t , con parámetro $\int_0^t \lambda(s) ds$, es (Riordan 1937)

$$M_{\tilde{N}_t}(r) = E \left[\exp \left(r \tilde{N}_t \right) \right] = \exp \left\{ [e^r - 1] \int_0^t \lambda(s) ds \right\}, \quad (\text{A-15})$$

de donde por cálculos directos, el momento de orden k alrededor del origen (con $k \in \mathbb{N}$), se obtiene como:

$$E \left[\left(\tilde{N}_t \right)^k \right] = \left. \frac{d^{(k)} M_{\tilde{N}_t}(r)}{dr^k} \right|_{r=0} = \sum_{x=0}^k S_{x,k} \left(\int_0^t \lambda(s) ds \right)^x, \quad (\text{A-16})$$

con

$$S_{x,k} = (x!)^{-1} \sum_{v=0}^x (-1)^{x-v} \binom{x}{v} v^k, \quad (\text{A-17})$$

los números de Stirling de segundo tipo (Riordan 1937).

B. Fundamentos para modelos de falla estocásticos

Las siguientes definiciones están basadas en Aven & Jensen (1999) y Bremaud (1981).

Definición B.1. *Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias indexadas en el tiempo, $X = (X_t)$, las cuales son definidas sobre el mismo espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . La información hasta el tiempo t está representado por la historia \mathcal{F}_t , la cual contiene todos los eventos de \mathcal{F} que pueden ser distinguidos hasta el tiempo t .*

Definición B.2. *Una variable aleatoria Y es integrable si $E[|Y|] < \infty$. Si la p -ésima potencia de Y es integrable ($E[|Y|^p] < \infty$, $0 \leq p < \infty$), entonces se dice que Y es un elemento del espacio L_p , el espacio vectorial de variables aleatorias de valores reales con momento p -ésimo finito. Un proceso estocástico X_t , $t \in \mathbb{R}_+$, es llamado integrable si todas las variables aleatorias X_t son integrables. Una familia de variables aleatorias X_t , $t \in \mathbb{R}_+$ es llamada uniformemente integrable, si*

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}_+} E[|X_t| I(|X_t| \geq c)] = 0. \quad (\text{B-1})$$

Esta condición garantiza que $E(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n)$.

Definición B.3. *Un proceso estocástico X es \mathcal{F}_t -progresivo o progresivamente medible, si para todo t el mapeo $(s, \omega) \rightarrow X_s(\omega)$ sobre $[0, t] \times \Omega$ es medible con respecto a la σ -álgebra producto $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$, donde $\mathcal{B}([0, t])$ es la σ -álgebra de Borel en $[0, t]$.*

Definición B.4. *Una variable aleatoria τ con valores en $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ es llamada un tiempo de parada con respecto a la filtración \mathcal{F} , si y sólo si, $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Así, un tiempo de parada está relacionado a la información dada, si en cualquier tiempo t es posible decidir si τ ha ocurrido hasta ese tiempo o no, usando sólo la información del pasado y presente, pero no anticipando la futura.*

Definición B.5. Un \mathcal{F} -tiempo de parada es previsible si existe una sucesión $(\tau_n)_{n \geq 0}$ de \mathcal{F} -tiempos de parada, $\tau_n < \tau$, tal que $\tau_n \rightarrow \tau$, P -c.s., cuando $n \rightarrow \infty$. Un \mathcal{F} -tiempo de parada es totalmente inaccesible si $P(\tau = \phi < \infty) = 0$ para todo \mathcal{F} -tiempo de parada previsible ϕ .

Definición B.6. Un proceso X es previsible si y sólo si X_τ es \mathbb{F} -medible para todo tiempo de parada τ .

Definición B.7. Un proceso estocástico X_t integrable y adaptado a la filtración \mathcal{F} , es llamado martingala (submartingala), si para todo $s > t$, $s, t \in \mathbb{R}_+$, $E[X_s | \mathcal{F}_t] = (\geq) X_t$. La notación \mathcal{M} representa al conjunto de martingalas con trayectorias que son continuas a derecha y para las cuales el límite a izquierda existe (trayectorias cadlag). El conjunto \mathcal{M}_0 corresponde a la familia de martingalas $X_t \in \mathcal{M}$ que tienen media cero, esto es, con $X_0 = 0$, lo que implica $E[X_t] = 0$, $\forall t \geq 0$.

Definición B.8. Una martingala X_t se dice cuadrado integrable, si $\sup_{t \geq 0} E[X_t^2] < \infty$. \mathcal{M}^2 representa al conjunto de martingalas X_t que son cuadrado integrables. Si $X_t \in \mathcal{M}^2$ y además tiene media cero, entonces se dice que X_t es una martingala cuadrado integrable de media cero, y se utiliza la notación $X_t \in \mathcal{M}_0^2$.

Definición B.9. Descomposición de Doob y Meyer: Sea X un proceso continuo a derecha y adaptado a \mathbb{F} . Entonces X es una submartingala uniformemente integrable, si y solo si tiene una descomposición $X = A + M$, donde A es un proceso creciente, previsible, continuo a derecha e integrable, con $A_0 = 0$ y M es una martingala uniformemente integrable.

Definición B.10. Representación semimartingala regular: Un proceso estocástico $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$, es llamado una semimartingala regular (SSM), si admite una descomposición de la forma:

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t f_u du + M_t, \quad (\text{B-2})$$

donde, $(f_t)_{t \geq 0}$ es un proceso estocástico progresivamente medible, $E \left[\int_0^t |f_u| du \right] < \infty$ para todo $t \geq 0$, $E[|Z_0|] < \infty$, y $M_t \in \mathcal{M}_0$.

Teorema B.1. (Aven & Jensen 1999) Sea $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ un proceso estocástico sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , adaptado a la filtración \mathbb{F} . Si se cumplen

i. Para todo $t, h \in \mathbb{R}_+$, existen versiones de la esperanza condicional $E [Z_{t+h} | \mathcal{F}_t]$ tales que el límite

$$f_t = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} E [Z_{t+h} - Z_t | \mathcal{F}_t] \quad (\text{B-3})$$

existe P -c.s para todo $t \in \mathbb{R}_+$ y $(f_t)_{t \geq 0}$ es \mathbb{F} -progresivamente medible con $E \left[\int_0^t |f_u| du \right] < \infty$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$.

ii. Para todo $t \in \mathbb{R}_+$, $(E [Z_{t+h} - Z_t | \mathcal{F}_t])$, $h \in \mathbb{R}_+$, tiene trayectorias P -c.s., las cuales son absolutamente continuas.

iii. Para todo $t \in \mathbb{R}_+$, existe $c > 0$ tal que $\left\{ \frac{1}{h} E [Z_{t+h} - Z_t | \mathcal{F}_t] : 0 < h \leq c \right\}$ es uniformemente integrable.

Entonces Z es una SSM con la representación $Z_t = Z_0 + \int_0^t f_s ds + M_t$, donde f es definido como en (B.1.) y M es una \mathbb{F} -martingala dada por

$$M_t = Z_t - Z_0 - \int_0^t f_u du. \quad (\text{B-4})$$

Cambio de filtración. El cambio de filtración permite la observación de un proceso estocástico bajo diferentes niveles de información. La siguiente definición establece cuando una filtración está contenida en otra.

Definición B.11. Sean $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$ y $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ dos filtraciones en el mismo espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Entonces \mathbb{A} es una subfiltración de \mathbb{F} si $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{F}_t$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$.

\mathbb{F} puede verse como la filtración de información completa y \mathbb{A} como la filtración de observación actual en un nivel más bajo. Si Z tiene una \mathbb{F} -representación SSM, entonces la proyección a la filtración de observación \mathbb{A} es dada por la esperanza condicional \widehat{Z} con $\widehat{Z}_t = E [Z_t | \mathcal{A}_t]$. Este resultado es presentado en el Teorema de proyección que se da a continuación.

Teorema B.2. Teorema de Proyección. Sea Z un proceso estocástico con \mathbb{F} -representación SSM y sea \mathbb{A} una subfiltración de \mathbb{F} . Entonces \widehat{Z} con

$$\widehat{Z}_t = \widehat{Z}_0 + \int_0^t \widehat{f}_u du + \overline{M} \quad (\text{B-5})$$

es una \mathbb{A} -martingala, donde

1. \widehat{Z} es \mathbb{A} -adaptada con trayectorias cadlag c.s. y $\widehat{Z}_t = E [Z_t | \mathcal{A}_t]$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$;
2. \widehat{f} es \mathbb{A} -progresivamente medible con $\widehat{f}_t = E [f_t | \mathcal{A}_t]$ para casi todo $t \in \mathbb{R}_+$ (medida de Lebesgue);

3. \bar{M} es una \mathbb{A} -martingala.

Si adicionalmente, $Z_0, \int_0^\infty |f_u| du \in L^2$ y $M \in \mathcal{M}_0^2$, entonces $\widehat{Z}_0, \int_0^\infty |\widehat{f}_u| du \in L^2$ y $\bar{M} \in \mathcal{M}_0^2$.

Definición B.12. Procesos Puntuales: Un proceso puntual sobre \mathbb{R}_+ puede ser descrito por una sucesión creciente de variables aleatorias o por su correspondiente proceso de conteo. Un proceso puntual (univariado) es una sucesión creciente de variables aleatorias positivas $(T_n), n \in \mathbb{N}$, las cuales también pueden tomar el valor $+\infty$: $0 < T_1 \leq T_2 \dots$. Otra forma de describir un proceso puntual es por medio de un proceso de conteo $N = (N_t)_{t \geq 0}$, con

$$N_t = \sum_{n \geq 1} I(T_n(\omega) \leq t) = \max_{n \geq 1} \{T_n \leq t\}. \quad (\text{B-6})$$

el cual es, para cada realización de ω , una función de salto continua a derecha con saltos de magnitud 1 y $N_0(\omega) = 0$. N_t cuenta el número de puntos T_n que ocurren hasta el tiempo t (Aven & Jensen 1999). De la ecuación anterior se desprende la relación $N_t \geq n \Leftrightarrow T_n \leq t$, esto equivale a decir que en el tiempo t han ocurrido por lo menos n eventos si, y sólo si, el n -ésimo evento ocurrió antes de t .

Un proceso estocástico puntual N_t para cada realización ω debe satisfacer (Ross 1970),

- a. $N_t(\omega) \geq 0$.
- b. $N_t(\omega)$ es un valor entero.
- c. Si $s < t$ entonces $N_s(\omega) \leq N_t(\omega)$.
- d. Para $s < t$, $[N_t(\omega) - N_s(\omega)]$ es el número de eventos en el intervalo $(s, t]$.

Un proceso de conteo se dice que tiene incrementos independientes si el número de eventos que ocurren en intervalos de tiempo, que no se traslapan, son independientes. Un proceso estocástico se dice que tiene incrementos estacionarios si la distribución del número de eventos que ocurren en cualquier intervalo depende sólo de la longitud del intervalo de tiempo. En otras palabras, el proceso tiene incrementos estacionarios si el número de eventos en el intervalo $(t_1 + s, t_2 + s]$ (esto es, $N_{t_2+s} - N_{t_1+s}$) tiene la misma distribución que el número de eventos en $(t_1, t_2]$, para todo $t_1 < t_2$, y $s > 0$.

Sea N_t un proceso de conteo integrable con representación SSM bajo la filtración \mathbb{F}

$$N_t = A_t + M_t = \int_0^t \lambda_s ds + M_t, \quad (\text{B-7})$$

donde, $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ es un proceso no negativo. Entonces, λ es llamado el proceso de \mathbb{F} -intensidad de N (Aven & Jensen 1999).

La forma más comúnmente utilizada para modelar la confiabilidad de un sistema es a través de procesos estocásticos puntuales. Un proceso estocástico puntual es un modelo de probabilidad que describe un fenómeno físico que está caracterizado por la ocurrencia de eventos aleatorios a lo largo del tiempo continuo. En la modelación de la confiabilidad, los eventos son las fallas que presenta el sistema a lo largo del tiempo de operación (o de cualquier otra medida de información sobre el uso actual del sistema). Bajo este escenario, las fallas del sistema observadas a través del tiempo $t \geq 0$, ocurren en los tiempos $T_1 \leq T_2 \leq \dots$, donde el tiempo T_i ($i = 1, 2, \dots$) es medido desde cero y es llamado tiempo de llegada de la i -ésima falla. Si los tiempos de reparo son despreciables, entonces los tiempos entre llegadas $X_i = T_i - T_{i-1}$ ($T_0 = 0, i = 1, 2, \dots$) representan los tiempos de operación entre la $(i - 1)$ y la i -ésima falla, y constituye el patrón de falla del sistema (Pham 2003).

C. Resultados del estudio de simulación

En este Anexo se presentan las Tablas de resultados del estudio de simulación llevado a cabo para evaluar el desempeño de las bandas de confianza propuestas, sobre los cuales se basan los resultados gráficos y análisis presentados en el Capítulo 5.

Tabla C-1.: \widehat{CP} para el sistema 1 de 3 con $d_i(t) = c_i e^{-t}$

M	G	$n = 10$	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 500$	$n = 1000$
100	500	0.8754	0.9216	0.9368	0.9428	0.9464	0.9458
	1000	0.8785	0.9280	0.9353	0.9425	0.9553	0.9514
	5000	0.8759	0.9279	0.9326	0.9430	0.9512	0.9470
	10000	0.8728	0.9241	0.9369	0.9424	0.9467	0.9489
500	500	0.8712	0.9257	0.9323	0.9442	0.9488	0.9516
	1000	0.8704	0.9233	0.9388	0.9399	0.9504	0.9508
	5000	0.8703	0.9229	0.9338	0.9440	0.9447	0.9484
	10000	0.8658	0.9179	0.9356	0.9458	0.9502	0.9443
1000	500	0.8719	0.9240	0.9378	0.9445	0.9489	0.9508
	1000	0.8749	0.9196	0.9336	0.9424	0.9517	0.9492
	5000	0.8742	0.9180	0.9348	0.9422	0.9486	0.9504
	10000	0.8719	0.9188	0.9302	0.9436	0.9494	0.9496

Tabla C-2.: \widehat{CP} para el sistema 1 de 3 con $d_i(t) = c_i(1 - tW^{-1})e^{-t}$

M	G	$n = 10$	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 500$	$n = 1000$
100	500	0.8604	0.9096	0.9313	0.9408	0.9487	0.9502
	1000	0.8567	0.9121	0.9299	0.9414	0.9526	0.9455
	5000	0.8483	0.9132	0.9295	0.9402	0.9495	0.9436
	10000	0.8582	0.9147	0.9302	0.9399	0.9476	0.9498
500	500	0.8540	0.9084	0.9240	0.9423	0.9471	0.9491
	1000	0.8467	0.9117	0.9239	0.9357	0.9451	0.9457
	5000	0.8456	0.9100	0.9230	0.9319	0.9466	0.9455
	10000	0.8443	0.9085	0.9246	0.9374	0.9451	0.9452
1000	500	0.8466	0.9087	0.9242	0.9372	0.9438	0.9488
	1000	0.8462	0.9073	0.9372	0.9445	0.9502	0.9507
	5000	0.8435	0.9200	0.9352	0.9398	0.9451	0.9487
	10000	0.8684	0.9181	0.9342	0.9409	0.9489	0.9439

Tabla C-3.: \widehat{CP} para el sistema 2 de 4 con $d_i(t) = c_i e^{-t}$

M	G	$n = 10$	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 500$	$n = 1000$
100	500	0.8909	0.9341	0.9438	0.9448	0.9488	0.9427
	1000	0.8889	0.9292	0.9404	0.9472	0.9486	0.9420
	5000	0.8934	0.9353	0.9447	0.9493	0.9495	0.9429
	10000	0.8897	0.9371	0.9423	0.9462	0.9504	0.9437
500	500	0.8866	0.9278	0.9425	0.9490	0.9493	0.9481
	1000	0.8918	0.9365	0.9355	0.9445	0.9488	0.9470
	5000	0.8877	0.9310	0.9364	0.9454	0.9482	0.9466
	10000	0.8878	0.9320	0.9328	0.9419	0.9500	0.9454
1000	500	0.8871	0.9290	0.9381	0.9466	0.9529	0.9564
	1000	0.8899	0.9302	0.9347	0.9480	0.9513	0.9515
	5000	0.8880	0.9313	0.9368	0.9398	0.9492	0.9507
	10000	0.8807	0.9323	0.9441	0.9448	0.9511	0.9483

Tabla C-4. \widehat{CP} para el sistema 2 de 4 con $d_i(t) = c_i(1 - tW^{-1})e^{-t}$

M	G	$n = 10$	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 500$	$n = 1000$
100	500	0.8720	0.9265	0.9355	0.9453	0.9471	0.9440
	1000	0.8754	0.9233	0.9351	0.9452	0.9496	0.9475
	5000	0.8751	0.9245	0.9346	0.9379	0.9439	0.9419
	10000	0.8785	0.9268	0.9335	0.9397	0.9464	0.9393
500	500	0.8777	0.9251	0.9371	0.9409	0.9475	0.9465
	1000	0.8706	0.9201	0.9317	0.9446	0.9474	0.9460
	5000	0.8697	0.9258	0.9328	0.9377	0.9458	0.9440
	10000	0.8753	0.9190	0.9291	0.9433	0.9479	0.9446
1000	500	0.8781	0.9208	0.9304	0.9442	0.9483	0.9481
	1000	0.8690	0.9221	0.9307	0.9434	0.9455	0.9513
	5000	0.8694	0.9218	0.9252	0.9358	0.9485	0.9474
	10000	0.8726	0.9167	0.9306	0.9463	0.9474	0.9456

Bibliografía

- Apostol, T. (1974), *Mathematical analysis*, 2nd edn, Pearson Education, Inc., New York.
- Arjas, E. (1981), ‘The failure and hazard processes in multivariate reliability systems’, *Mathematics of Operation Research* **6**(4), 551–562.
- Ascher, H. (1968), ‘Evaluation of repairable system reliability using the “bad-as-old” concept’, *IEEE Transactions on Reliability* **R-17**(2), 103–110.
- Aven, T. (1983), ‘Optimal Replacement under a Minimal Repair Strategy: A General Failure Model’, *Advances in Applied Probability* **15**(1), 198–211.
- Aven, T. & Castro, I. (2008), ‘A minimal repair replacement model with two types of failure and a safety constraint’, *European Journal of Operational Research* **188**(2), 506–515.
- Aven, T. & Jensen, U. (1999), *Stochastic models in reliability*, 1st edn, Springer-Verlag Inc, New York.
- Bai, J. & Pham, H. (2004), ‘Discounted warranty cost of minimally repaired series systems’, *IEEE Transactions on Reliability* **53**(1), 37–42.
- Bai, J. & Pham, H. (2006), ‘Cost analysis on renewable full-service warranties for multi-component systems’, *European Journal of Operation Research* **168**(2), 492–508.
- Balachandran, K., Maschmeyer, R. & Livingstone, J. (1981), ‘Product warranty period: A markovian approach to estimation and analysis of repair and replacement costs’, *The Accounting Review* **56**(1), 115–124.
- Barlow, R. & Hunter, L. (1960), ‘Optimum preventive maintenance policies’, *Operations Research* **8**(1), 90–100.
- Barlow, R. & Proschan, F. (1981), *Statistical theory of reliability and life testing*, 2nd edn, MD: To Begin With, Silver Spring.
- Belyaev, Y. (1996a), ‘Central Limit Resampling Theorems for m Dependent Heterogeneous Random variables’, *Research Report 5, Department of Mathematical Statistics, Umea University, Sweden* .

- Belyaev, Y. (1996b), 'Weakly Approaching Sequences of Random Distribution Laws with Applications to Resampling', *Research Report 8, Department of Mathematical Statistics, Umea University, Sweden*.
- Belyaev, Y. (2000), *Computer intensive methods based on resampling in analysis of reliability and survival data. In Recent advances in reliability theory: methodology, practice and inference*, Birkhäuser, Boston.
- Belyaev, Y. (2007), *Resampling for Lifetime Distributions. In Encyclopedia of Statistics: Quality and Reliability*, Wiley, Chichester.
- Belyaev, Y. & Seleznev, O. (2000), 'Approaching in distribution with applications to resampling of stochastic processes', *Scandinavian Journal of Statistics* **27**(2), 371–384.
- Belyaev, Y. & Sjöstedt-De Luna, S. (2000), 'Weakly Approaching Sequences of Random Distributions', *Journal of Applied Probability* **37**(3), 807–822.
- Billingsley, P. (1999), *Convergence of probability measures*, 2nd edn, John Wiley and Sons Inc, New York.
- Blischke, W. & Murthy, D. (1994), *Warranty cost analysis*, 1st edn, Marcel Dekker Inc, New York.
- Blischke, W. & Murthy, D. (1996), *Product warranty handbook*, 1st edn, Marcel Dekker Inc, New York.
- Block, H., Borges, W. & Savits, T. (1985), 'Age-dependent minimal repair', *Journal of Applied Probability* **22**(2), 370–385.
- Bremaud, P. (1981), *Point Processes and Queues: Martingale Dynamics*, 1st edn, Springer-Verlag Inc, New York.
- Chattopadhyay, G. & Murthy, D. (2000), 'Warranty cost analysis for second-hand products', *Mathematical and Computer Modelling* **31**(10-12), 81–88.
- Chattopadhyay, G. & Rahman, A. (2008), 'Development of Lifetime Warranty Policies and Models for Estimating Costs', *Reliability Engineering and System Safety* **93**(4), 522–529.
- Chien, Y. (2005), 'Determining optimal warranty periods from the seller's perspective and optimal out-of-warranty replacement age from the buyer's perspective', *International Journal of Systems Science* **36**(10), 631–637.

- Chien, Y. (2008), ‘A general age-replacement model with minimal repair under renewing free-replacement warranty’, *European Journal of Operation Research* **186**(3), 1046–1058.
- Chien, Y. (2010), ‘Optimal age for preventive replacement under a combined fully renewable free replacement with a pro-rata warranty’, *International Journal of Production Economics* **124**(1), 198–205.
- Chukova, S. & Dimitrov, B. (1996), *Warranty analysis for complex systems*, In *Product warranty handbook*, 1st edn, Marcel Dekker Inc, New York.
- Cowling, A., Hall, P. & Phillips, M. (1996), ‘Bootstrap confidence regions for the intensity of a poisson point process’, *Journal of the American Statistical Association* **91**(436), 1516–1524.
- Davison, A. & Hinkley, D. (1997), *Bootstrap methods and Their Applications*, 1st edn, Cambridge University Press, Cambridge.
- Duchesne, T. & Marri, F. (2009), ‘General distributional properties of discounted warranty costs with risk adjustment under minimal repair’, *IEEE Transactions on Reliability* **58**(1), 143–151.
- Efron, B. (1979), ‘Bootstrap methods: another look at the jackknife’, *The Annals of Statistics* **7**(1), 1–26.
- Fleming, T. & Harrington, D. (1991), *Counting processes and survival analysis*, 1st edn, John Wiley and Sons, Inc, New York.
- Genovese, C. & Wasserman, L. (2008), ‘Adaptive confidence bands’, *The Annals of Statistics* **36**(2), 875–905.
- González, N. (2009), ‘Procesos de *burn-in* y de garantía em sistemas coherentes sob el modelo de tempo de vida geral’, *Tese de Doutorado en Ciências, Instituto de Matemática y Estadística, Universidade de São Paulo* .
- González, N. & Bueno, V. (2011), ‘Estimating the discounted warranty cost of a minimally repaired coherent system’, *Revista Colombiana de Estadística* **34**(3), 513–543.
- Herman, J., Kučera, R. & Šimša, J. (2000), *Equations and Inequalities*, 1st edn, Springer-Verlag, Inc., New York.
- Hollander, M. & Proschan, F. (1982), ‘Nonparametric concepts and methods in reliability’, *Technical Report No. 77, Division of Biostatistics, Stanford University, USA*

- Hong-Zhong, H., Zhie-Jie, L., Yanfeng, L., Yu, L. & Liping, H. (2008), 'A Warranty Cost Model with Intermittent and Heterogeneous Usage', *Eksploatacja I Niezawodnosc-Maintenance and Reliability* **40**(4), 9–15.
- Hussain, A. & Murthy, D. (1998), 'Warranty and redundancy design with uncertain quality', *IIE Transactions* **30**(12), 1191–1199.
- Ja, S., Kulkarni, V., Mitra, A. & Patankar, J. (2001), 'A nonrenewable minimal-repair warranty policy with time-dependent costs', *IEEE Transactions on Reliability* **50**(4), 346–352.
- Ja, S., Kulkarni, V., Mitra, A. & Patankar, J. (2002), 'Warranty reserves for nonstationary sales processes', *Naval Research Logistics* **49**(5), 499–513.
- Jack, N., Iskandar, B. & Murthy, D. (2009), 'A repair-replace strategy based on usage rate for items sold with a two dimensional warranty', *Reliability Engineering and System Safety* **94**(2), 611–617.
- Jack, N. & Murthy, D. (2007), 'A Flexible Extended Warranty and Related Optimal Strategies', *Journal of the Operational Research Society* **58**(12), 1612–1620.
- Jain, M. & Maheshwari, S. (2006), 'Discounted costs for repairable units under hybrid warranty', *Applied Mathematics and Computation* **173**(2), 887–901.
- Jung, K., Park, M. & Park, D. (2010), 'System Maintenance Cost Dependent on Life Cycle under Renewing Warranty Policy', *Reliability Engineering and System Safety* **95**(7), 816–821.
- Karr, A. (1991), *Point processes and their statistical inference*, 2nd edn, Marcel Dekker Inc, New York.
- Knowles, M. (1988), 'Simultaneous confidence bands for random functions', *Technical Report 113, SIAM Institute for Mathematics and Society*.
- Lai, C. & Xie, M. (2006), *Stochastic Ageing and Dependence for Reliability*, 1st edn, Springer-Verlag Inc, New York.
- Loève, M. (1977), *Probability theory, volumes I and II*, 4th edn, Springer-Verlag Inc, New York.
- Meeker, W. & Escobar, L. (1998), *Statistical Methods for Reliability Data*, 1st edn, John Wiley & Sons, New York.
- Murthy, D. & Djameludina, I. (2002), 'New product warranty: a literature review', *International Journal of Production Economics* **79**(3), 231–260.

- Nakagawa, T. (1984), 'Optimal policy of continuous and discrete replacement with minimal repair at failure', *Naval Research Logistics Quarterly* **31**(4), 543–550.
- Nakagawa, T. (2005), *Maintenance Theory of Reliability*, 1st edn, Springer-Verlar Inc, London.
- Nakagawa, T. & Kowada, M. (1983), 'Analysis of a system with minimal repair and its application to replacement policy', *European Journal of Operational Research* **12**(2), 176–182.
- Nguyen, D. & Murthy, D. (1984), 'Cost analysis of warranty policies', *Naval Research Logistics* **31**(4), 525–541.
- Ouali, M., Tadj, L., Yacout, S. & Ait-Kadi, D. (2011), *A Survey of Replacement Models with Minimal Repair*. In: *Replacement Models with Minimal Repair*, 1st edn, Springer-Verlag Inc, London.
- Park, M. & Pham, H. (2010), 'Altered quasi-renewal concepts for modeling renewable warranty costs with imperfect repairs', *Mathematical and Computer Modelling* **52**(9–10), 1435–1450.
- Patankar, J. & Mitra, A. (1995), 'Effect of warranty execution on warranty reserve costs', *Management Science* **41**(3), 395–400.
- Pham, H. (2003), *Handbook of Reliability Engineering*, 1st edn, Springer, London.
- Phelps, R. (1983), 'Optimal policy for minimal repair', *Journal of the Operational Research Society* **34**(5), 425–427.
- Rajarshi, S. & Rajarshi, H. (1988), 'Bathtub distributions: A review', *Communications in Statistics- Theory and Methods* **17**(8), 2597–2621.
- Riordan, J. (1937), 'Moment Recurrence Relations for Binomial, Poisson and Hypergeometric Frequency Distributions', *The Annals of Mathematical Statistics* **8**(2), 103–111.
- Ritchken, P. & Fuh, D. (1986), 'Optimal replacement policies for irreparable warranty item', *IEEE Transactions on Reliability* **35**(5), 621–624.
- Ross, S. (1970), *Applied Probability Models with Optimization Applications*, 1st edn, Holden-Day Inc., San Francisco.
- Sheu, S., Griffith, W. & Nakagawa, T. (1995), 'Extended optimal replacement model with random minimal repair costs', *European Journal of Operational Research* **85**(3), 636–649.

- Shiryayev, A. (1996), *Probability*, 2nd edn, Springer-Verlag Inc, New York.
- Su, C. & Shen, J. (2012), ‘Analysis of extended warranty policies with different repair options’, *Engineering Failure Analysis* **25**, 49–62.
- Tadj, L., Ouali, M., Yacout, S. & Ait-Kadi, D. E. (2011), *Replacement Models with Minimal Repair*, 1st edn, Springer-Verlag Inc, London.
- Thomas, M. (1989), ‘A prediction model for manufacturer warranty reserves’, *Management Science* **35**(12), 1515–1519.
- Thomas, M. (2005), ‘Engineering economic decisions and warranties’, *The Engineering Economist* **50**(4), 307–326.
- Vahdani, H., Chukova, S. & Mahlooji, H. (2011), ‘On optimal replacement-repair policy for multi-state deteriorating products under renewing free replacement warranty’, *Computers and Mathematics with Applications* **61**(4), 840–850.
- Wang, H. & Pham, H. (2006), *Reliability and Optimal Maintenance*, 1st edn, Springer-Verlag, London.