Una Propuesta Para la Enseñanza de la Derivada como Razón de Cambio a Estudiantes de Grado Undécimo

Robinson Alfonso Cardona Aguirre

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Bogotá, Colombia

2012

Una Propuesta Para la Enseñanza de la Derivada como Razón de Cambio a Estudiantes de Grado Undécimo

Robinson Alfonso Cardona Aguirre

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:
Magister en Educación, Crescencio Huertas Campos

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Bogotá, Colombia
2012

Dedicatoria

A mi esposa y mí querido hijo Nicolás.

A mis padres y hermanos.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a Dios por darme vida para continuar con mis metas.

A mi esposa Katherine por haberme apoyado y colaborado todo este tiempo, y a mi hijo Nicolás que es la razón de mi vida y el que me impulsa para seguir adelante.

A mis padres y hermanos, que siempre me han apoyado y colaborado en todos mis sueños.

A Crescencio Huertas Campos, mi director de proyecto, cuya importancia es vital en el desarrollo del mismo y me ha aportado un punto de vista de las matemáticas y su enseñanza muy interesante a partir de su experiencia.

A todos mis profesores, de la maestría, por todo lo que he aprendido gracias a ustedes y en especial a mi profe Ivan Castro Chadid,

A todos mis compañeros y amigos de la universidad, sobre todo a Wilson, Evaristo, Carolina, Hans, Edna y Mónica, porque sin todos ustedes que desde lejos me acompañaron en las actividades académicas y sin su ayuda seguro que no estaba escribiendo estas líneas.

A todos mis compañeros y amigos de Girardot, porque me han ayudado a de una forma u otra a culminar este gran logro en mi vida.

Gracias.

Resumen

En este trabajo se pretende fortalecer la comprensión del concepto de derivada como razón de cambio en estudiantes de grado undécimo de educación media. El cual se basa en investigaciones acerca del tema hechas por diferentes autores, preocupados por la enseñanza de las matemáticas, en especial la del cálculo diferencial, que permitió ver diferentes puntos de vista sobre esta temática, así como otras estrategias de enseñanza en el aula de clase. Partiendo desde el punto de vista histórico, epistemológico, disciplinar y didáctico, se permitió realizar una mejor conceptualización y diseñar unas actividades por medio del método de laboratorio de aprendizaje activo donde se presenta al estudiante una nueva forma de introducción en los temas de las matemáticas y ver dichos temas de una forma diferente a como se habían enseñado, incluyendo un cambio en el currículo ya que se van a explicar antes de introducir el concepto de límite y continuidad.

Palabras clave: Historia, Epistemología, Didáctica, Enseñanza, Razón de Cambio, Derivada.

Abstract

In this work aims to enhance understanding of the concept of derivative as reason of change in eleventh grade students of middle school, which is based on investigations about the subject by different authors, concerned with the teaching of mathematics in particular the differential calculus which allowed to see different views on this topic, and other teaching strategies in the classroom.

Starting from the historical point of view, epistemological, discipline and didactic, are allowed a better conceptualization and design some activities by the method of active learning laboratory where the student presents a new way of introduction to the topics of mathematics and see these issues differently to how you were taught, including a change in the curriculum as will be explained before introducing the concept of limit and continuity.

Keywords: History, Epistemology, Didactic, Teaching, Reason of Change, Derivative.

Contenido

Lista de figuras

Pág.

Introducción

En este trabajo se quiere explicar el problema que existe en los estudiantes de bachillerato para comprender los conceptos del cálculo diferencial, en especial el concepto de derivada, como lo evidencia Orton (1983) citado en (Ferrini & Geuther, 1993) quien realizó un estudio cualitativo, a gran escala, para investigar la comprensión estudiantil de los conceptos de diferenciación e integración. Encontró que los estudiantes en su mayoria aplican el algoritmo de la derivada bien. Pero las respuestas a aspectos más conceptuales no fueron satisfactorias; los resultados le mostraron poca comprensión *intuitiva* de la derivada y algunos errores en los conceptos fundamentales tambien en (Azcarate. et al. 1996):

> "la mayoria de los alumnos no comprenden la definición rigurosa de derivada a partir del concepto de límite y, por tanto, teniamos que apartarnos del programa oficial. Entre los libros de texto y materiales que consultamos, destacan unos fascículos de Janvier (1975) para los profesores en ejercicio y los textos SMP (1973) de matemáticas de bachillerato, que nos dieron la idea de introducir el concepto de derivada de una función en un punto, como la tasa instantánea de variación de la función, a partir de la tasa media de variación de las función entre dos puntos".

Lo que para nosotros es la razón de cambio promedio que de ahora en adelante solo llamaremos razón de cambio y la razón de cambio instantánea. Por eso se hace un estudio minucioso de los trabajos adelantados por otros autores preocupados por la enseñanza del cálculo y de ahí nace la propuesta de realizar este trabajo desde la historia, la epistemología, lo disciplinar y la didáctica de la razón de cambio para así introducir el concepto de **derivada** a estudiantes de grado undécimo.

Se realizo una introducción histórica y epistemológica, del concepto de derivada como razón de cambio, empezando desde el concepto de razón, proporción, desde las civilizaciones babilónica y egipcia, luego la gran civilización griega de ahí a la edad media después al renacimiento hasta la época actual. Viendo la importancia que tuvo la variación y el cambio para el desarrollo del concepto de la derivada.

Se vio la importancia de realizar una revisión teórica de diferentes conceptos y de varios tipos de desarrollo realizado por los autores, lo que nos permite tener una claridad acertada y diferentes puntos de vista de los conceptos del cálculo diferencial, los cuales desarrollaron el de derivada como razón de cambio, esto permite una mejor transposición de dichos conceptos a los estudiantes afirma, (Chevallard, 1998) que se puede pasar de un saber sabio a un saber enseñado, lo que quiere decir que se transforman los conceptos científicos del cálculo diferencial en saberes totalmente enseñados a los estudiantes para que estos los apropien y los apliquen de la mejor manera en vida diaria y su contexto.

Da acuerdo a lo anteriormente expuesto se realizaron una serie de actividades utilizando el método de laboratorio de aprendizaje activo, donde el estudiante interactúa se cuestiona y se vuelve en un actor activo de su propio aprendizaje. Desarrollando así los conceptos previos de la derivada como razón de cambio, para permitirle al estudiante un mejor desarrollo del objetivo que es la compresión de la derivada como razón de cambio.

1. Desarrollo histórico y epistemológico de la derivada como razón de cambio

> Si queremos prever el futuro de la matemática el camino adecuado para conseguirlo es el de estudiar la historia y el estado actual de esta ciencia.
>
> Henri Poincaré

Los resultados matemáticos son construcciones intelectuales realizadas por muchas personas en diferentes momentos y no como un conjunto de verdades absolutas, como afirmo Newton citado por (Boyer, 1986) "si he conseguido ver más lejos que Descartes ha sido por me he incorporado sobre los hombros de gigantes" con esto quiso decir que el cálculo no apareció por inspiración momentánea, sino que lo hizo gradualmente, cuando se unieron ideas y métodos existentes de forma coherente, desde ese punto de vista se hace un recorrido histórico del concepto de derivada como razón de cambio, pero para hablar de dicho concepto se hace necesaria una revisión de su desarrollo histórico desde el concepto de razón y proporción para luego pasar al concepto de pendiente y por ultimo ver el desarrollo de la razón de cambio instantánea como derivada.

La matemática en un principio fue meramente práctica, y surgió la necesidad de entender el mundo con todas sus variantes de ahí que las culturas babilonias y egipcias estudiaban las variaciones de las diversas magnitudes, en principio en forma cualitativa, describían los cambios de su entorno con relación al universo. Pero posteriormente según se evidencia en sus tablillas lo hacían cuantitativamente debido a que en ellas registraban valores cambiantes de obras arquitectónicas, como las pirámides egipcias, que requerían de patrones de medida constantes (Boyer, 1986). Estas son pruebas fehacientes de la preocupación por encontrar y mantener regularidades en las medidas, y del sentido práctico de variación (Camargo & Guzman, 2005). En la construcción de las pirámides, el problema para estas civilizaciones consistía en mantener "una pendiente uniforme en cada cara y la misma en cada una de las cuatro caras de la pirámide. Se solía utilizar la relación avance Vs subida, denominándola por la palabra *seqt*, que significaba la separación horizontal de una recta oblicua del eje vertical por unidad de variación en la altura" (Boyer, 1986, pág. 40).

Por otro lado los griegos, se preocupan por reflexionar sobre la naturaleza de los números, de los objetos matemáticos en especial la geometría, convirtieron las matemáticas en una ciencia racional y estructurada, con propiedades que se demuestran, eso nos indica su interés intelectual por encima del práctico, la cual la lleva a ser considerada como una de las más brillantes épocas de la matemática. Uno de los primeros en realizar trabajos en matemáticas fue Tales de Mileto, realizados hacia el año 585 a.C., según (Camargo & Guzman, 2005) "sobre las proporciones estudios que se constituyeron en la génesis de la matematización de las comparaciones entre medidas geométricas de segmentos, con estos estudios nacen los conceptos de razón geométrica, o comparación entre magnitudes geométricas, y de proporción, como herramientas ideales para analizar cuantitativamente relaciones entre magnitudes"

Al desarrollar su teoría de la semejanza, Tales de Mileto formuló la siguiente proposición: "lados correspondientes a ángulos iguales en triángulos semejantes, son proporcionales", proposición que permite generalizar la regularidad encontrada al modificar el tamaño de los lados de triángulos semejantes y que expreso en términos de razones constantes. La utilidad práctica de su teoría se hizo manifiesta al utilizarla en la toma de medidas indirectas cuando logro calcular la altura de una de las pirámides egipcias comparando su sombra con la de una vara vertical (Bourbaki, 1976). En general, Tales buscaba un método indirecto para acceder a aquello que en la práctica no era posible.

Posteriormente al trabajo de Tales de Mileto, la escuela pitagórica trabajo en torno a la idea central según la cual "todo es número". Pitágoras, cuyo trabajo se desarrollo hacia el año 540 a.C., transformó la visión de la matemática en una ciencia completamente intelectual. Desde esa perspectiva, el desarrollo de su teoría de las proporciones estaba centrado en mostrar la armonía cósmica a través del establecimiento de razones numéricas entre cantidades directas y la comparación entre estas, para establecer proporciones. Los pitagóricos establecieron, en términos de la teoría de números y específicamente haciendo alusión a la divisibilidad, en qué casos cuatro números estaban en proporción $a:b::c:d$ (Boyer, 1986).

La academia de Platón en Atenas se convirtió en un gran centro matemático, de donde se puede destacar Eudoxo de Cnido (408? – 355? a.C.), quien fue discípulo de Platón, al cual se le atribuye la teoría de las proporciones, entre ellas la famosa formulación de sobre razones descrita por la definición 5 del Libro V de los Elementos de Euclides:

> "se dice que magnitudes están a la misma razón, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, cuando, tomamos cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, entonces los primeros equimúltiplos ambos exceden, son iguales o son menores que los segundos equimúltiplos, tomados en el orden correspondiente" (Citado en Boyer, 1986).

Esta definición retoma la idea de razón entre medidas geométricas, y aclara que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ si y solo si, dados dos números naturales m y n, si $ma<nb$ entonces $mc<nd$, o si $ma=nb$ entonces $mc=nd$, o bien si $ma>nb$ entonces $mc>nd$. Según (Camargo & Guzman, 2005) Eudoxo se preocupó también por aclarar que las magnitudes tenían que ser del mismo tipo; que para él un segmento no se puede comparar en términos de razón con una área, ni un área puede compararse con un volumen, dando lugar a la restricción que se conservaría hasta el surgimiento del cálculo del establecimiento de razones homogéneas.

Euclides de Alejandría (300? a.C.), oficializa la división establecida por sus antecesores entre la aritmética y la geometría. Euclides hace dos tratamientos diferentes a las proporciones, una para los números en los libros VII y VIII y otra para las magnitudes en los libros III y V en las cuales se refiere a las razones entre magnitudes geométricas como se cita en (Boyer, 1986) "una razón es cierta relación con respecto al tamaño de dos magnitudes del mismo tipo", de donde se deriva la clasificación de estas como magnitudes conmensurables e inconmensurables. Euclides junto con Eudoxo son los matemáticos que más tienen referencia de las razones y las proporciones, en los cuales todos los demás reseñan cuando tratan dichos temas en sus estudios e investigaciones.

Arquímedes de Siracusa (287 – 212 a.C.), utilizo las razones y proporciones para matematizar los resultados de sus estudios en física y la relación con las palancas. Hace uso de la razón geométrica para derivar las fórmulas para el área y el volumen de diversas figuras planas y sólidos regulares. Se preocupo por problemas prácticos que es lo contrario al trabajo hecho por los griegos, no solo trabajo en la determinación de fórmulas sino también en el estudio de curvas engendradas por movimientos, resolución de problemas, además trabajo en la confección de maquinas para el trabajo científico y la guerra. Arquímedes también estudio los lugares geométricos de puntos, en donde, hace una referencia de la espiral, que lleva su nombre; en la cual profundizo en la construcción de líneas tangentes, por diferentes puntos de la curva, como forma de caracterización de la velocidad y dirección del movimiento (Camargo & Guzman, 2005).

En una dirección diferente a la seguida por los griegos en los principios de la edad media, hacia la primera mitad del siglo XIV, como lo cita (Camargo & Guzman, 2005) cuando en Oxford los matemáticos del colegio de Merton, se propusieron predecir, utilizando herramientas matemáticas, el valor de una magnitud física que está cambiando, como la fuerza que actúa sobre un móvil que se desplaza por un camino inclinado. La relación entre la matemática y la física dio origen a una nueva ciencia: la cinemática medieval que se considera como la que dio la base del cálculo.

Jordano de Nemorario (? – 1237) se considera el fundador de lo que se denomina la escuela medieval de mecánica, representa un punto de vista más aristotélico que otros de sus contemporáneos. A él le debemos la primera formulación correcta del plano inclinado: “la fuerza que actúa en la dirección de una camino inclinado es inversamente proporcional a su inclinación, donde la inclinación viene medida por la razón de un segmento dado del camino inclinado al segmento vertical que intercepta esa parte del camino, es decir, la razón de “trayecto recorrido” a la “subida realizada”. (Boyer, 1986).

Se usa así la razón geométrica para explicar la constancia de la razón del cambio entre magnitudes, lo que determina la inclinación del plano. Según (Camargo & Guzman, 2005) se evidencia que lo que encontró Jordano fue la dependencia entre la fuerza que actúa en la dirección del plano Px y la razón constante referida a la pendiente del plano, o su inclinación, la cual se expresa a partir de la razón geométrica entre las medidas de los segmentos respectivos. Así se caracteriza un movimiento de razón de cambio constante, a través de las razones geométricas entre las magnitudes.

Nicolas de Oresmes (132? - 1382) se le ocurrió una idea brillante para su época: ¿Por qué no hacer un dibujo o grafica de la manera en que las cosas varían? Citado en (Boyer, 1986), esto demuestra su interés en las representaciones geométricas para explicar relaciones entre magnitudes variantes, que le permitían una mejor cuantificación de fenómenos de variación. “todo lo que varia, se sepa medir o no, escribía Oresmes, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo”. Estudio el cambio, de donde afirmo que no había tipos diferentes de calor sino más o menos cantidad del mismo tipo. Junto con varios escolásticos del siglo XIV, empezaron a pensar sobre el cambio y la velocidad de cambio cuantitativamente. Para representar el cambio de la velocidad con el tiempo, representa el tiempo a lo largo de una línea horizontal, que llama la longitud, y las velocidades en distintos instantes de tiempo mediante líneas verticales, que llamo latitudes (Kline, 1992). Así caracteriza el movimiento donde la velocidad cambia en forma constante, con respecto al tiempo como un movimiento de razón constante (Boyer, 1986). Toda esta teoría de Oresmes se considera que son los primeros pasos de una construcción del concepto de función analítica, pues es la primera vez que se busca cuantificar un cambio relativo (Camargo & Guzman, 2005).

Posteriormente a Oremes Galileo Galilei (1564 – 1642), opta por descubrir el mundo físico en términos de cantidades medibles como el tiempo, la distancia, la fuerza y la masa. Explicando las razones geométricas llega a encontrar el teorema de la velocidad media, introduciendo técnicas cuantitativas. Galileo cree demostrar que un movimiento rectilíneo en el que la velocidad crece proporcionalmente al camino recorrido, la ley del movimiento será la misma que ha descubierto para la caída de los graves (Bourbaki, 1976).

Debido al desarrollo industrial y conceptual de los siglos XVI y XVII se vio la necesidad de crear métodos matemáticos en diferentes áreas del conocimiento como la física, las ciencias naturales y químicas, las ciencias administrativas, las ciencias sociales, etc. Las matemáticas en su momento eran insuficientes para afrontar este reto, se genero un campo de investigación en matemáticas de donde surgieron inicialmente las nociones de variable y función analítica, como herramientas para el estudio de las variaciones entre magnitudes, aunque no todavía como objetos matemáticos en sí mismos (Ruiz, 1993; citado Camargo, 2005).

René Descartes (1596 – 1650) y Pierre de Fermat (1601 – 1665) desarrollaron, casi simultáneamente, y haciendo uso, por primera vez, de la idea de que por medio de una ecuación se podía expresar la dependencia entre dos cantidades variables, métodos específicos para caracterizar las curvas. Usaron también la idea, heredada de los griegos, de la utilidad de la recta tangente, que posteriormente permitió relacionar los valores de una función, para puntos muy próximos, con los valores de las ordenadas de la recta tangente en los puntos respectivos, de donde posteriormente surge la idea del triángulo diferencial (Camargo & Guzman, 2005).

En los trabajos de Descartes y Fermat se encuentra expresada, por primera vez haciendo uso de ecuaciones que muestran la dependencia entre las dos magnitudes representadas, la razón entre la diferencia de los valores de la magnitud dependiente, en puntos próximos, y la diferencia de los valores correspondientes de la magnitud independiente, es decir, la razón de cambio del incremento de la magnitud dependiente respecto del incremento de la magnitud independiente (Camargo & Guzman, 2005).

En 1696 el marqués de L´Hospital publico un texto, considerado como el primer libro de texto de cálculo, en donde menciona la importancia de las gráficas para representar y caracterizar los cambios de dichas magnitudes. En este texto señala la importancia de lo que llama la diferencia fundamental de una variable continua, $(f(x+e)-f(x)$ en lenguaje moderno), entendida como la diferencia entre los valores de la magnitud dependiente. Esta diferencia es la que usan precisamente Descartes y Fermat en sus respectivos trabajos sobre caracterización de curvas. Igualmente señala la importancia de estudiar simultáneamente la diferencia entre los valores correspondientes a la magnitud independiente para lograr conocer la variación de otros elementos presentes en la representación gráfica propuesta. La relación entre ambas diferencias da lugar a la razón de cambio entre los incrementos de las magnitudes, expresada algebraicamente (Camargo & Guzman, 2005).

El interés inicial de Fermat consistió en encontrar un método general para determinar máximos o mínimos de una curva, puntos en donde la razón de cambio entre las magnitudes es casi nula. Este método llamado de adigualdad, en el cual se hace uso de la diferencia fundamental, comenzó a ser desarrollado por Fermat entre 1629 y 1636 y básicamente se centra en tomar en cuenta las características del comportamiento de las magnitudes representadas en una gráfica en valores muy cercanos, incrementando la magnitud independiente. En sus escritos, Fermat no justificó los pasos que seguía, ni si quiera cuando dividía por cero. Su trabajo estaba sustentado en argumentos pragmáticos más que matemáticos y el sólo hecho de que funcionara para resolver problemas le daba credibilidad. Precisamente la falta de claridad acerca de las explicaciones de su método y el éxito de los resultados obtenidos atrajo la atención por parte de la comunidad matemática del momento (Camargo & Guzman, 2005).

Escrito con los símbolos modernos, el método de Fermat se reduce a lo siguiente: para determinar donde $f(A)$ presenta un máximo, formamos $f(A)$ y $f(A+E)$, e igualamos ambas expresiones:

$$f(A+E)=f(A)$$

Después restamos ambas expresiones y dividimos por E:

$$\frac{f(A+E)-f(A)}{E}=0$$

Finalmente, suprimimos todos los términos que todavía dependan de E, o lo que es lo mismo, hacemos que $E = 0$, como también suele decirse. En total, se forma, pues, la expresión:

$$\left|\frac{f(A+E)-f(A)}{E}\right|_{E=0} = 0$$

Lo que no es otra cosa sino lo que medio siglo más tarde se había de llamar cociente diferencial (Karlson, 1960), este método tiene un gran parecido a la forma en la que actualmente se encuentran los puntos críticos de una función, pues se acepta que un punto máximo o mínimo, la pendiente de la recta tangente es cero, es decir, la razón de cambio es nula.

Descartes, por su parte, desarrollo un método de construcción geométrica para caracterizar líneas tangentes a curvas y describir, mediante ellas, los movimientos estudiados, llamado método del círculo. Este método se basó en la construcción previa de la recta normal que fue calificado por el mismo Descartes como “el problema más útil y general que hubiera conocido jamás". En el tratamiento geométrico realizado por Fermat y Descartes, se hace uso de la razón de diferencias entre magnitudes geométricas o razón de cambio entre magnitudes geométricas, utilizando, en todos los casos, razones de cambio homogéneas (Camargo & Guzman, 2005).

Después de los trabajos de Fermat y Descartes, Barrow (1630 - 1677) también trabajó con la intención de caracterizar tangentes pero, a diferencia de sus antecesores, introdujo, según el pensar de los historiadores de la matemática, una interpretación infinitesimal al problema. En su trabajo realizó modificaciones al método de Fermat considerando un arco, “indefinidamente pequeño”, que asoció con un trozo de la tangente para construir lo que hoy llamamos triángulo diferencial (Camargo & Guzman, 2005). Según Newton en (Boyer, 1986) el algoritmo de Barrow no era más que el de Fermat un poco mejorado.

Hacia 1640, Roberval (1602 – 1675) y Torricelli (1608 – 1647) empezaron a introducir interpretaciones cinemáticas de las curvas estudiadas. Por un lado, identificaban la gráfica como la representación de la dependencia de dos magnitudes físicas, y por otro lado, consideraban la tangente en un punto de la curva como la expresión de la razón de cambio de la magnitud dependiente, respecto a la independiente, razón que permitía identificar la dirección del cambio de la magnitud, en ese punto. Esta última idea se constituye en la génesis de la identificación de las relaciones entre la dirección de las tangentes en diferentes puntos de la curva y la caracterización del movimiento en un instante. Con su método, Roberval consiguió determinar tangentes de todas las curvas típicas de la época e introdujo la aceptación de las razones de cambio heterogéneas (Camargo & Guzman, 2005).

Posterior a estos trabajos surgieron los trabajos de Newton (1642 – 1727) y Leibnitz (1646 – 1716). Este último trabajó la razón de diferencias que posteriormente se transformó en la razón de diferencias entre valores infinitamente pequeños, o sea, el diferencial. Más tarde se dio cuenta que está razón de diferencias le permitía encontrar una ecuación para determinar la inclinación de la recta tangente y encontrar razones de cambio instantáneas. Mientras que Newton expresa la idea fundamental del cálculo diferencial mediante conceptos como *fluent* (magnitud fluyente) y *fluxión* (razón de cambio). Estos dos grandes matemáticos culminan una fase en la historia del cálculo el cual da una transformación a la matemática y las ciencias de ahí en adelante.

En el siglo XIX se ve desarrolla una nueva etapa en la historia del cálculo, donde se ve la necesidad de dotarlo de un mayor rigor lógico, fue Cauchy (1789 – 1857) uno de los que creo los fundamentos matemáticos de los procesos infinitesimales, y todavía los conceptos de Cauchy límite, convergencia, continuidad, diferenciabilidad determinan los textos de cálculo diferencial e integral. Como afirma (Wenzelburger, 1993) este tipo de rigor puede ser la causa de la falta de comprensión de los conceptos básicos del cálculo diferencial en los estudiantes, ya que este se pierde en la precisión matemática, y en el lenguaje formal impecable.

Como se puede evidenciar en lo anteriormente expuesto el camino el concepto de derivada, no fue fácil, ni momentáneo, sino que fue la obra de muchos matemáticos a través de la historia y no se puede pretender que el estudiante lo aprenda en unas pocas clases. Además se evidencia que requiere de una serie de conceptos previos que el estudiante debe entender como lo son el de razón, proporción, función lineal y afín, tangente entre otros. También se evidencia que el currículo y la gran mayoría de textos de cálculo, no tiene concordancia con el desarrollo histórico del cálculo, ya que fueron primero los estudios de áreas o sea *integral*, el de rectas tangentes a curvas y problemas de variación y cambio la *derivada*, y luego infinitésimos y aproximaciones infinitas *límite*.

El concepto de derivada es en realidad solamente el resultado de intentos para esquematizar nuestras impresiones sensoriales de las cantidades y variabilidades continuas. Esta esquematización ha progresado desgraciadamente de tal manera, que los métodos ingeniosos desarrollados por Newton y Leibniz aparecen como manipulaciones algebraicas rutinarias (Wenzelburger, 1993). Las ideas básicas del cálculo se encuentran inmersas en el formalismo matemático que imprimen los *épsilon* y *deltas*, que no contribuyen en mucho a la verdadera comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo.

No se quiere entrar a través de límites y una definición formal de continuidad, sino a través de un acercamiento intuitivo a los conceptos fundamentales de una matemática de cambios, el de razón de cambio. Con esto se sigue el camino histórico que tomo el cálculo diferencial: primero se desarrollo una noción intuitiva de la razón de cambio, de la derivada o de *fluxión* como lo llamó Newton y el cual encontró Leibniz a través de sus diferenciales. En casi todos los problemas reales en los cuales hay una dependencia funcional de magnitudes no sólo interesan los valores de las magnitudes sino los cambios de éstos, o más bien las razones de cambio promedio de cambios $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ de una función f. (Wenzelburger, 1993) Cree que el acceso más natural al cálculo diferencial es a través del problema de determinar razones de cambio locales o instantáneas. El alumno debe tener la experiencia de cuantificar cambios mediante los métodos del cálculo.

El concepto fundamental “la determinación de cambios de una magnitud que depende de una segunda magnitud en relación a los cambios de esta ultima” se deduce paso por paso. De la creciente presión del concepto de razón de cambio sigue en forma natural la necesidad de más formalismo matemático, como la notación funcional y el cociente diferencial. Una comprensión preliminar intuitiva del propósito básico del cálculo diferencial facilita grandemente el paso inevitable al rigor matemático (Wenzelburger, 1993).

2. Conceptos que llevan a la derivada como razón de cambio

En esta sección presentamos diferentes definiciones de diferentes autores y libros de los conceptos más relevantes que se utilizan en la construcción del concepto de derivada como razón de cambio.

2.1 Razón

Definición 1:

a. Diremos que dos Cantidades M y N de una misma magnitud están en la razón p a q, números naturales primos relativos, si existe una medida común A denominada unidad de medida tal que $M = pA$ y $N = qA$, a los número se les denominaría medida de la cantidad. (Huertas, 2011).

b. Diremos que dos cantidades M y N de una misma magnitud, están en la razón p a q si se satisface la equivalencia

$$\frac{M}{N} = \frac{p}{q} \leftrightarrow qM = pN$$

Definición 2:

Es la relación que existe entre dos cantidades de la misma especie, teniendo en cuenta que al compararlas, una de ellas puede ser múltiplo o submúltiplo de la otra.

Así, la razón de las cantidades A y B se expresa de la forma $A : B$ o $\frac{A}{B}$ y se lee: A es a B.

A y B son términos de la razón. El primero (A) se llama antecedente y el segundo (B) se llama consecuente (Mejia, 2009).

2.2 Proporción

Definición 1:

a. Las cantidades M y N están en la misma razón p a q, que las cantidades Q y R donde p y q son números naturales primos relativos, si existen dos medidas comunes A y B, tales que se satisfacen simultáneamente las igualdades

$M = pA$; $N = qB$; $Q = pA$ y $R = qB$.

b. M, N, R y S cantidades están en la misma razón, si para cualquier par de números naturales p, q entonces

$$pM < qN \leftrightarrow pR < qS$$
$$pM = qN \leftrightarrow pR = qS$$
$$pM > qN \leftrightarrow pR > qS$$

En tal caso notaremos el hecho así $M{:}N{::}R{:}S$ y se lee M es a N como R es a S o también mediante la notación moderna $\frac{M}{N} = \frac{R}{S}$; con los significados dados anteriormente ya que los términos son cantidades y no números (Huertas, 2011).

Definición 2:

Es la igualdad de dos razones; cuando dos razones son iguales se dice que las cuatro cantidades que las componen son proporcionales. Así:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Entonces las cantidades a, b, c, y d son proporcionales, lo cual se expresa diciendo que a es b como c a d, la proporción se escribe $a{:}b :: c{:}d$,

o también

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Los términos a y d se llaman extremos y b y c se llaman medios (Mejia, 2009).

2.3 Proporcionalidad entre magnitudes

Definición 1

Diremos que dos magnitudes M y N son proporcionales, si existe un isomorfismo K entre sus cantidades $f: M \to N$ tal que satisface *las siguientes propiedades*:

1. si a *y* b son cantidades de M tales que $a < b$ *entonces* $f(a) < f(b)$ (*monotonía*)

2. $f(a+b) = f(a) + f(b)$ (*linealidad*)

3. Si M es una magnitud continua y e es una unidad de medida para M entonces para cualquier a cantidad de M existe un número real r tal que $a = re$ entonces $f(a) = f(re) = rf(e)$ (Huertas, 2011).

Definición 2

Una magnitud es directamente proporcional a otra, o varía proporcionalmente a ésta, cuando la razón de los valores de la primera es igual a los valores correspondientes de la segunda. Se dice que una es proporcional a la otra.

Si A varía proporcionalmente a B entonces A es igual a B multiplicada por una cantidad constante.

En, efecto, sean los valores de A: $a_1, a_2, a_3, etc.$ y los valores de B: $b_1, b_2, b_3, etc.$ según la definición, si A varía proporcionalmente a B, entonces:

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$; $\frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1}{b_3}$; etc.

Por lo tanto $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$; $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_3}{b_3}$; etc., entonces $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \cdots = K$, siendo K constante.

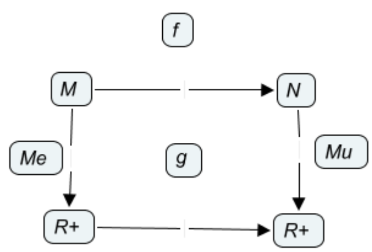
Esto quiere decir que: $\frac{A}{B} = K$, entonces $A = KB$ (Mejia, 2009).

2.4 Función lineal o de proporcionalidad

Definición 1

En el diagrama se muestra como se construye una función g que se denomina la función lineal representante de *la* función f de proporcionalidad y que establece la relación entre las medidas de las cantidades de M y N respectivamente

Figura 2.4. 1



Si a es una cantidad de M, r es la medida de a respecto de la unidad e, esto es $m_e(a) = r$, también m_u determina la medida de cada cantidad b de N, luego g se define mediante la composición de funciones así:

$$g(r) = m_u(f(m_u^{-1}(r)) = m_u(f(a)) =$$
$$m_u(f(re)) = m_u(rf(e))$$

Luego se tiene que $g(r) = r\, m_u(f(e))$ si tomamos $m_u(f(e)) = k = g(1)$ entonces $g(r) = kr$ siendo k la llamada constante de

Definición 2

Las funciones lineales son todas aquellas que están determinadas por una ecuación de primer grado de la forma:

$y = f(x) = m\,x$ con m constante

Se conoce a m como constante de proporcionalidad debido a que la función lineal relaciona a x y a y de manera proporcional, pero principalmente desde el punto de vista de funciones llamaremos a m pendiente, pues al ver representada gráficamente la función lineal, m será la que determine la inclinación de la gráfica (Paredes & Ramírez, 2009).

proporcionalidad.

Ahora, si consideramos una función lineal representante de una proporcionalidad entre dos magnitudes $g: R^+ \to R^+$, definida por la igualdad $g(x) = kx = y$, tal que $g(x_1) = y_1$; luego se pregunta ¿cuál valor de x corresponde a un valor dado y_2?

Como $g(x_1) = k\,x_1 = y_1$; $g(x) = k\,x = y_2$ dividiendo término a termino las dos igualdades, tenemos $\frac{kx_1}{kx} = \frac{y_1}{y_2}$ aplicando propiedades de las proporciones se deduce $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x}$, que son precisamente las igualdades que se usan en planteos de problemas de regla de tres simple, pero que muy pocas veces se explica como una consecuencia del uso de la aplicación lineal de una variable.

También es importante, recordar que cuando se tiene una función lineal representante de una proporcionalidad, su gráfico en el plano cartesiano es precisamente una línea recta que parte del origen (si se consideran cantidades vacías con medida cero), en tal caso la constante de proporcionalidad k toma el significado de pendiente de la recta, o también de razón entre dos variables, o de tasa unitaria (cuánto valor de la variable dependiente y por una unidad de la variable independiente x, siendo $k = \frac{y}{x}$) (Huertas, 2011).

2.5 Función afín

Definición 1

Si $f(x) = g(x) + p = kx + p$, con $p \neq 0$; f satisface la condición de monotonía cuando $k > 0$ pero no satisface la condición de linealidad ya que $f(u + v) \neq f(u) + f(v)$, lo que implica que f no puede ser representante de una función de proporcionalidad a pesar de tener por gráfico una línea recta y aunque la variable y aumenta cuando la variable x aumenta en un fenómeno cuyo modelo esté descrito por esa ecuación no será aplicable la regla de tres simple.

Pero si consideramos ahora, la pareja ordenada (x_1, y_1) punto fijo del gráfico de $y = f(x) = kx + p$, y, (x, y) punto arbitrario del gráfico, llamaremos Δx, Δy a los cambios en x, y respectivamente y definidos por las igualdades:

$\Delta x = x - x_1$; $\Delta y = y - y_1$ si se sustituyen y, y_1

$$\Delta y = (kx + p) - (kx_1 + p) = k(x - x_1);$$

Definición 2

Una función afín es aquella que está determinada por una ecuación de primer grado de la forma:

$$y = f(x) = mx + n$$

con m y n constantes

La ecuación de una función afín es conocida como ecuación de la recta, precisamente porque las gráficas de todas las funciones de ésta forma son precisamente líneas rectas.

Las funciones lineales son un caso particular de las funciones afines, pues si en una función afín de la forma $y=mx+n$ se tiene que $n=0$, tendremos entonces la ecuación de una función lineal (Paredes & Ramírez, 2009).

luego $\Delta y = k\Delta x$ lo que quiere decir que la razón entre los cambios $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$; es constante e igual a la pendiente (Huertas, 2011).

2.6 Razón de cambio

Definición 1

Teniendo en cuenta la definición de función afín y considerando, la pareja ordenada (x_1, y_1) punto fijo del gráfico de $y = f(x) = kx + p$, y, (x, y) punto arbitrario del gráfico, llamaremos Δx, Δy a los cambios en x, y respectivamente y definidos por las igualdades:
$\Delta x = x - x_1$; $\Delta y = y - y_1$ si se sustituyen y, y_1
$\Delta y = (kx + p) - (kx_1 + p) = k(x - x_1)$;
luego $\Delta y = k\Delta x$ lo que quiere decir que la razón entre los cambios $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$; es constante e igual a la pendiente, en este caso la pendiente adquiere el significado de *razón de cambio* e indica lo que cambia y por cada unidad de cambio en x.

Cuando se trata de una función h cualesquiera que describe un fenómeno arbitrario, la razón entre los cambios

Definición 2

La razón de cambio promedio de y respecto a x, cuando x cambia de x_1 a x_2, corresponde a la razón de cambio en el valor de salida respecto al cambio en el valor de entrada:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Donde $x_1 \neq x_2$

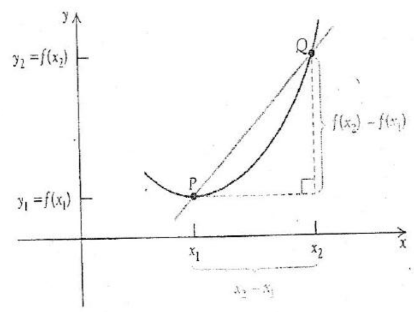
Si se toma la gráfica de la función, se observa que

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Y que ésta es la pendiente de la recta que va de los puntos $P(x_1, y_1)$ a $Q(x_2, y_2)$. La recta que forma los puntos P y Q se llama recta secante (Soler, Núñez, & Aranda, 2005).

Figura 2.4. 2: Representación de secantes.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h(x)-h(x_1)}{x-x_1}$ Se denomina *razón de cambio promedio o simplemente razón de cambio* (Huertas, 2011).



2.7 Razón de cambio instantánea "Derivada"

Definición 1

Cuando se tiene $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h(x)-h(x_1)}{x-x_1}$ una razón de cambio y al siguiente límite $lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = h\acute{}(x)$ si el existe, se le denomina la *derivada* o *razón de cambio instantánea* y se interpreta como lo que cambiaría la variable y por unidad de cambio en la variable x, cuando $x = x_1$ si a partir de ese momento el fenómeno se considera lineal y descrito por la recta tangente a la curva en el punto (x_1, y_1). (Huertas, 2011).

Definición 2

Sea f una función definida por lo menos, en un intervalo abierto (a, b) del eje x. Se elige un punto x en este intervalo y se forma el cociente de diferencias

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Donde el número h puede ser positivo o negativo (pero no cero), y tal que $x + h$ pertenezca también a (a, b). El numerador de este cociente mide la variación de la función cuando x varía de x a $x + h$. El cociente representa la variación media de f en el intervalo que une x a $x + h$.
Seguidamente se hace tender h a cero y se estudia lo que le ocurre a ese cociente. Si tiende hacia un cierto valor como límite

(y será el mismo, tanto si h tiende a cero con valores positivos como negativos), entonces ese límite se denomina derivada de f en x y se indica por el símbolo $f^{'}(x)$ (se lee "f prima de x").

Con lo que la definición formal de $f^{'}(x)$ puede establecerse del siguiente modo:

DEFINICIÓN DE DERIVADA. La derivada $f(x)$ está definida por la igualdad

$$f^{'}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Con tal que el límite exista. El número $f^{'}(x)$ también se denomina coeficiente de variación de f en x (Apostol, 1984).

3. Propuesta didáctica

La enseñanza de las matemáticas y en especial del cálculo resulta bastante problemática, y aunque seamos capaces de enseñar a los estudiantes a resolver más o menos de forma mecánica algunos conceptos como el de derivada, esto está muy lejos de lo que pretendería que es una verdadera comprensión y apropiación de los conceptos y métodos de pensamiento de esta rama de las matemáticas.

Según el currículo y los principales libros de texto de cálculo la enseñanza del concepto de derivada, se tiene que estudiar posteriormente al concepto de función y límite de una función. El trabajo pretende hacer los primeros acercamientos al concepto de derivada, iniciando en los estudiantes la comprensión del significado de razón de cambio.

Con lo anteriormente expuesto, se reconoce la importancia que tiene el concepto de razón de cambio y como este nos puede servir como fundamento en el avance de la comprensión del cálculo. En el campo educativo vale la pena considerar como actualmente se conceptualiza en el aula de clase, debido a que es el primer lugar donde comienza a tomar significado para los estudiantes. Esta comparación crea la necesidad de implementar alternativas metodológicas con las que los alumnos logren aprender comprensivamente este concepto fundamental para el cálculo y al mismo tiempo profundizar en la estructuración del pensamiento variacional, necesario para comprender los fenómenos relacionados con las ciencias exactas y naturales (Camargo & Guzman, 2005).

Los conceptos previos al de razón de cambio son muy importantes, de ahí que en este capítulo las actividades están divididas por dichos conceptos en el formato de laboratorio de aprendizaje activo, que tiene como objetivo proporcionar un espacio de formación a nivel teórico, metodológico y práctico, en el cual los estudiantes puedan desarrollar y someter a prueba sus propias ideas. Teniendo en cuenta que en nuestro caso el laboratorio es el aula de clase, algo nuevo para el docente y el estudiante, el cual va tener una participación activa en proceso de aprendizaje que no tenía.

La metodología de laboratorio de aprendizaje activo se desarrolla en los siguientes pasos:

Manual de la práctica: está relacionada toda la información y los tiempos en los cuales se va a desarrollar la actividad.

Predicciones individuales: es la hoja donde el estudiante revisa los conceptos previos y hace sus predicciones sin hacer ningún tipo de proceso, la cual no es calificable, pero le permite al docente ver que concepciones tienen sus estudiantes acerca del tema y al mismo actúa como mediador entre el estudiante y el objeto de conocimiento.

Predicciones Grupales: en esta guía los estudiantes debaten sus predicciones individuales.

Resultados: los estudiantes realizan sus mediciones, procesos, algoritmos, etc, para luego verificar si sus predicciones fueron ciertas o falsas, dando lugar a la corrección y apropiación de conceptos.

Cabe aclarar que el docente al finalizar cada actividad realiza una exposición de los conceptos, para así corregir, afianzar, constatar y explicar dichos conceptos.

Se elaboraron 5 actividades en las cuales se pretende que el alumno a partir de la metodología de aprendizaje activo, apropie los conceptos. Las cuatro guías o pasos del laboratorio de aprendizaje activo, le permiten al estudiante equivocarse luego con sus compañeros contrastar y debatir y por ultimo realizar para corroborar, si lo que predijo estaba bien o hay que corregirlo.

Actividad 1: en esta actividad se pretende que el alumno repase y conceptualice los conceptos de razón y proporción, a partir de una actividad en clase donde se va a medir unas banderas en un asta y la foto de ellas impresa en la hoja de actividades.

Actividad 2: a partir de un problema cotidiano se quiere llevar al estudiante a entender el concepto de función lineal y que la pendiente de la recta es la constante de proporcionalidad.

Actividad 3: con un recibo de la luz se pretende que el estudiante entienda la función afín, y que se dé cuenta que la razón entre las variables ya no es proporcional pero la razón entre los cambios de las variables sí.

Actividad 4: esta actividad tiene dos fases una primera donde se muestra una grafica de variaciones del euro con respecto al dólar en diferentes meses, se quiere que el estudiante visualice los cambios en los determinados meses e infiera acerca de ellos. Una segunda actividad donde pretende medir los cambios de las variables en los intervalos de función cuadrática, luego ver las razones de estas diferencias las cuales deben inducir al concepto de razón de cambio.

Actividad 5: con la grafica de la función lineal de la actividad anterior se van a medir las diferencias de las variables en diferentes intervalos y ver que entre más grandes los intervalos sus razones se alejan más de la realidad, así que se va a tomar las diferencias del intervalo de la variable independiente cada vez más pequeño y con la razón entre las diferencias de las dos variables llegar al concepto de razón de cambio instantánea la cual nos va a dar un numero que llamaremos derivada.

3.1 Actividad 1

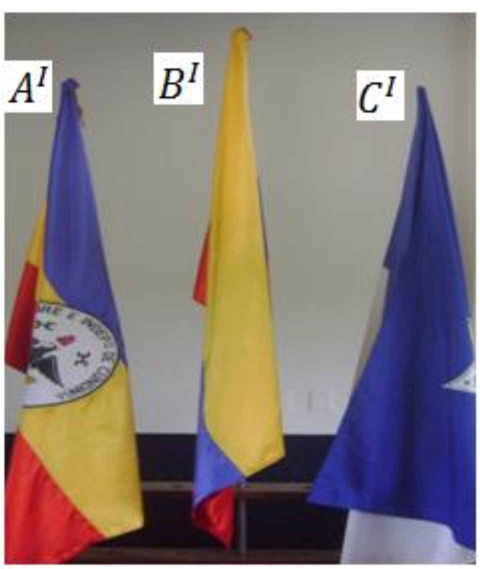
LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO
LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO "RAZÓN Y PROPORCIÓN"

MANUAL DE LA PRÁCTICA

OBJETIVO: Aplicación del método de aprendizaje activo en una sesión de "razón y proporción"
DIRIGIDO A: Estudiantes de educación media.
AUTORES: Robinson Alfonso Cardona Aguirre, Licenciado en matemáticas.
MATERIALES: REGLA, METRO Y ASTAS.

Se tiene una foto de las astas de las banderas de la institución las cuales nombraremos A^I, B^I y C^I como se muestra en la figura y las astas A, B y C.

1. En **10 minutos** realice las siguientes predicciones anótelas en la hoja de predicciones individuales.



Medimos las astas A, B, C de las y las de la foto A^I, B^I y C^I.

Anotamos los resultados en la siguiente tabla:

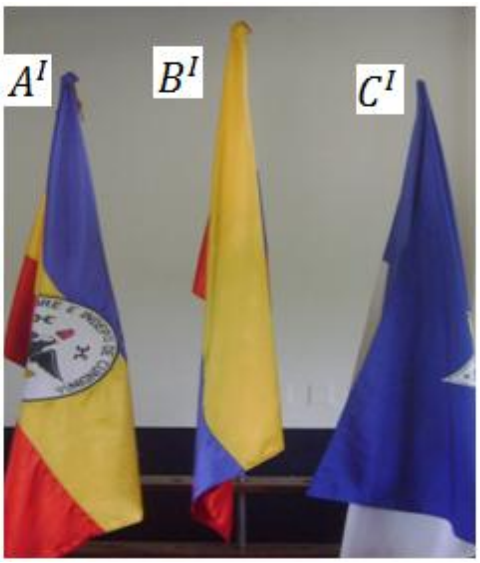
Medida de las astas	A	B	C
Medida de las astas de la foto	A^I	B^I	C^I

- ¿Qué unidades de medida va utilizar?
- ¿Qué pasará con la longitud de las astas originales comparadas con la de la foto?

- Teniendo las medidas de A, B y A^I se pueden encontrar la medida de B^I. Qué condiciones se deben tener.

2. Presentación de predicciones grupales (**10 minutos**), discuta con sus compañeros (grupos de cuatro estudiantes) las predicciones individuales, anótelas en la hoja de predicciones de grupo, y entréguelas al profesor.

3. Realice ahora las mediciones que le permitan corroborar (o desechar) sus predicciones. (**25 minutos**).



Medida de las astas	A	B	C
Medida de las astas de la foto	A^I	B^I	C^I
Cociente entre las medidas de: $\frac{Astas}{Astas\ de\ la\ foto}$	$\frac{A}{A^I}$	$\frac{B}{B^I}$	$\frac{C}{C^I}$

- Describa la forma en que tomó los datos y que unidades utilizo.

- Presente sus resultados en la siguiente tabla.

- Plantee una expresión matemática que describa la relación entre el tamaño de las astas y las de la foto.

- Qué condiciones deben existir entre las medidas de las astas para establecer relaciones.

4. Presentación y discusión general de resultados de cada grupo y comparación con predicciones. (**30 minutos**)

- Compare los resultados con las predicciones iniciales y consigne esta información en la hoja de resultados.

5. Presentación general de conceptos trabajados por parte del docente y actividades para la casa. (**25 minutos**)

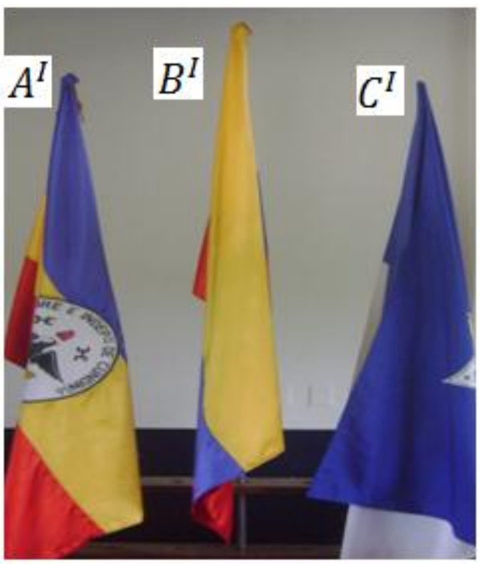
LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO "RAZÓN Y PROPORCIÓN"

HOJA DE PREDICCIONES INDIVIDUAL

Instrucciones: Esta hoja será recogida en cualquier momento por el profesor. Escriba su nombre para registrar su asistencia y participación en esta actividad. Tenga en cuenta que sus predicciones no serán tenidas en cuenta para la *evaluación*. Siga las instrucciones del docente.

Se tiene una foto de las astas de las banderas de la institución las cuales nombraremos $A^I, B^I\ y\ C^I$ como se muestra en la foto y las astas A, B y C.



Medimos las astas A, B, C de las y las de la foto A^I, B^I y C^I.

En **10 minutos** realice las siguientes predicciones:

1. ¿Qué unidades de medida va utilizar? Explique su respuesta.

2. ¿Qué pasará con la longitud de las astas originales comparadas con la de la foto? Explique su respuesta.

3. Teniendo las medidas de A, B y A^I se pueden encontrar la medida de B^I. Qué condiciones se deben tener. Explique su respuesta.

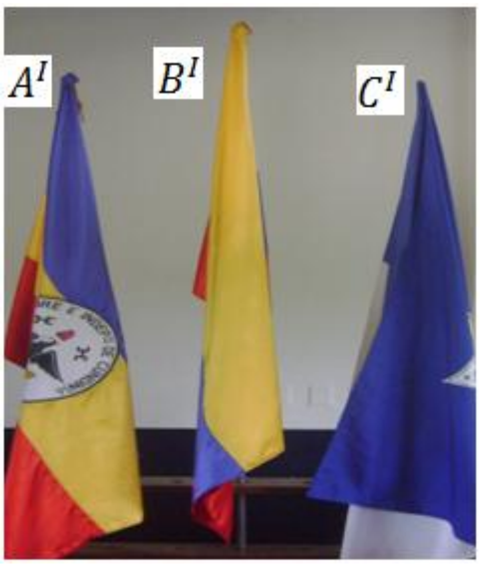
LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO "RAZÓN Y PROPORCIÓN"

HOJA DE PREDICCIONES – RESUMEN DE GRUPO

Instrucciones: Esta hoja será recogida en cualquier momento por el profesor. Escriba su nombre para registrar su asistencia y participación en esta actividad. Tenga en cuenta que sus predicciones no serán tenidas en cuenta para la *evaluación*. Siga las instrucciones del docente.

Se tiene una foto de las astas de las banderas de la institución las cuales nombraremos A^I, B^I y C^I como se muestra en la foto y las astas A, B y C.



Medimos las astas A, B, C de las y las de la figura A^I, B^I y C^I.

En **10 minutos** realice las siguientes predicciones:

1. ¿Qué unidades de medida va utilizar? Explique su respuesta.

2. ¿Qué pasará con la longitud de las astas originales comparadas con la de la foto? Explique su respuesta.

3. Teniendo las medidas de A, B y A^I se pueden encontrar la medida de B^I. Qué condiciones se deben tener. Explique su respuesta.

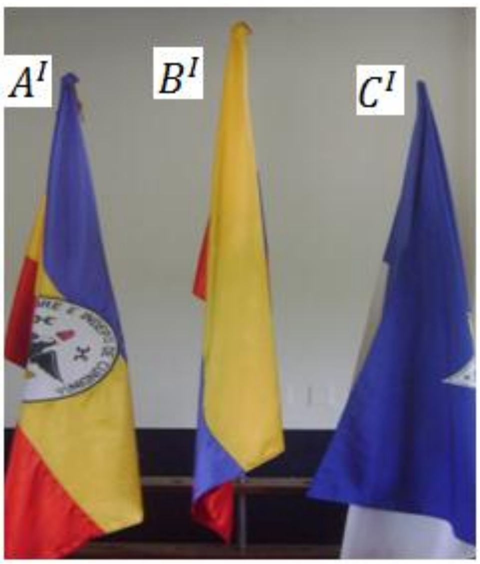
LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO “RAZÓN Y PROPORCIÓN”

HOJA DE RESULTADOS

Instrucciones: Esta hoja se debe entregar al finalizar la actividad. Escriba su nombre para registrar su asistencia y participación en esta actividad. Siga las instrucciones del docente.

Se tiene una foto de las astas de las banderas de la institución las cuales nombraremos $A^I, B^I\ y\ C^I$ como se muestra en la foto y las astas A, B y C.



Medimos las astas $A,\ B$, C de las y las de la foto A^I, B^I y C^I.

1. Describa la forma en que tomó los datos y que unidades utilizo.

2. ¿Presente sus resultados en la siguiente tabla:

Medida de las astas	A	B	C
Medida de las astas de la foto	A^I	B^I	C^I
Cociente entre las medidas de: $\frac{Astas}{Astas\ de\ la\ foto}$	$\frac{A}{A^I}$	$\frac{B}{B^I}$	$\frac{C}{C^I}$

3. Plantee una expresión matemática que describa la relación entre el tamaño de las astas y las de la foto.

4. Qué condiciones deben existir entre las medidas de las astas para establecer relaciones.

3.2 Actividad 2

LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO
LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO
“FUNCIÓN LINEAL O DE PROPORCIONALIDAD”

MANUAL DE LA PRÁCTICA

OBJETIVO: Aplicación del método de aprendizaje activo en una sesión de “función lineal o de proporcionalidad”
DIRIGIDO A: Estudiantes de educación media.
AUTOR: Robinson Alfonso Cardona Aguirre, Licenciado en matemáticas.

Pablito ha ido a la plaza de mercado a hacer las compras con su madre y ha visto que 2 kilos de papa cuestan $ 1600. A partir de esta información responda.

1. En **10 minutos** realice las siguientes predicciones anótelas en la hoja de predicciones individuales.

- ¿Qué variables y unidades de dichas variables utiliza Pablito?
- ¿Se puede realizar una tabla de valores que contenga información de las variables?
- ¿Se puede obtener una igualdad que relacione las variables?
- ¿Es posible representar gráficamente la información anterior?
- ¿Se puede establecer alguna razón entre las variables?

2. Presentación de predicciones grupales (**10 minutos**), discuta con sus compañeros (grupos de cuatro estudiantes) las predicciones individuales, anótelas en la hoja de predicciones de grupo, y entréguelas al profesor.

- ¿Qué variables y unidades de dichas variables utiliza Pablito?
- ¿Se puede realizar una tabla de valores que contenga información de las variables?
- ¿Se puede obtener una igualdad que relacione las variables?
- ¿Es posible representar gráficamente la información anterior?
- ¿Se puede establecer alguna razón entre las variables?

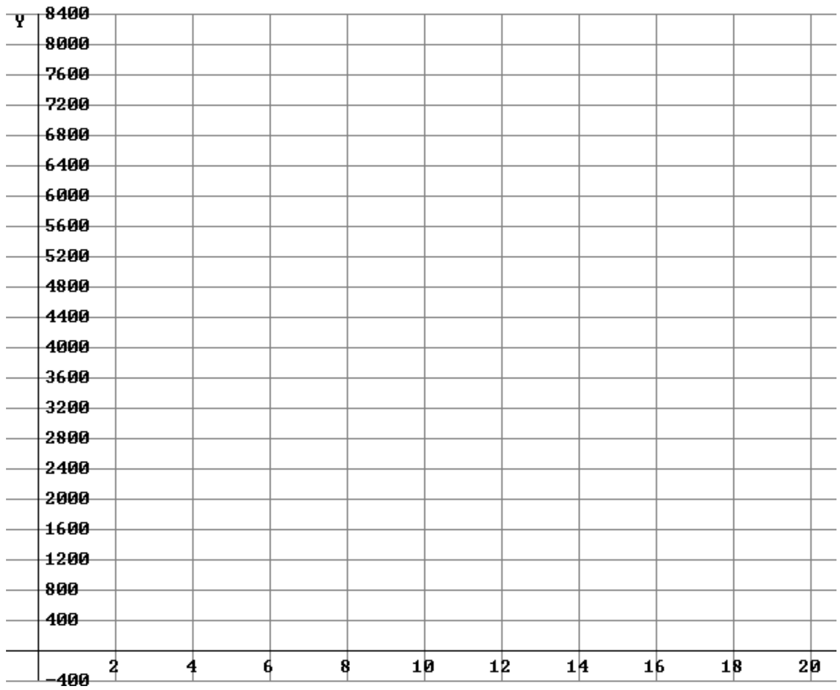
3. Realice ahora las mediciones que le permitan corroborar (o desechar) sus predicciones (**15 minutos**).

- ¿Qué variables y unidades de dichas variables utiliza Pablito?
- Completa la siguiente tabla de valores:

Kilos	1	2	3	4	5	6	7	10	13	15	20
Precio											

- Realizar una igualdad que relacione las variables de la información anterior.

- Representar la información en el siguiente plano cartesiano.



- ¿Qué resultaría de la razón entre (Precio por unidad de Kilo) $\frac{Precio}{\#\,Kilos}$? Represéntalo en :

Kilos	1	2	3	4	5	6	7	10	13	15	20
Precio											
$\frac{Precio}{\#\,Kilos}$											

- ¿Qué puedes explicar de los ejercicios anteriores?

4. Presentación y discusión general de resultados de cada grupo y comparación con predicciones. (**15 minutos**)

- Compare los resultados con las predicciones iniciales y consigne esta información en la hoja de resultados.

5. Presentación general de conceptos trabajados por parte del docente y actividades para la casa. (**25 minutos**)

LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO
LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO "FUNCIÓN LINEAL O DE PROPORCIONALIDAD"
HOJA DE PREDICCIONES INDIVIDUAL

Instrucciones: Esta hoja será recogida en cualquier momento por el profesor. Escriba su nombre para registrar su asistencia y participación en esta actividad. Tenga en cuenta que sus predicciones no serán tenidas en cuenta para la *evaluación*. Siga las instrucciones del docente.

Pablito ha ido a la plaza de mercado a hacer las compras con su madre y ha visto que 2 kilos de papa cuestan $ 1600. A partir de esta información responda.

En **10 minutos** realice las siguientes predicciones anótelas en la hoja de predicciones individuales.

1. ¿Qué variables y unidades de dichas variables utiliza Pablito?

2. ¿Se puede realizar una tabla de valores que contenga información de las variables?

3. ¿Se puede obtener una igualdad que relacione las variables?

4. ¿Es posible representar gráficamente la información anterior?

5. ¿Se puede establecer alguna razón entre las variables?

LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO
LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO "FUNCIÓN LINEAL O DE PROPORCIONALIDAD"
HOJA DE PREDICCIONES – RESUMEN DE GRUPO

Instrucciones: Esta hoja será recogida en cualquier momento por el profesor. Escriba su nombre para registrar su asistencia y participación en esta actividad. Tenga en cuenta que sus predicciones no serán tenidas en cuenta para la *evaluación*. Siga las instrucciones del docente.

Pablito ha ido a la plaza de mercado a hacer las compras con su madre y ha visto que 2 kilos de papa cuestan $ 1600. A partir de esta información responda.

En **10 minutos** realice las siguientes predicciones anótelas en la hoja de predicciones grupales.

1. ¿Qué variables y unidades de dichas variables utiliza Pablito?

2. ¿Se puede realizar una tabla de valores que contenga información de las variables?

3. ¿ Se puede obtener una igualdad que relacione las variables?

4. ¿Es posible representar gráficamente la información anterior?

5. ¿Se puede establecer alguna razón entre las variables?

LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO "FUNCIÓN LINEAL O DE PROPORCIONALIDAD"

HOJA DE RESULTADOS

Instrucciones: Esta hoja se debe entregar al finalizar la actividad. Escriba su nombre para registrar su asistencia y participación en esta actividad. Siga las instrucciones del docente.

Pablito ha ido a la plaza de mercado a hacer las compras con su madre y ha visto que 2 kilos de papa cuestan $ 1600. A partir de esta información responda.

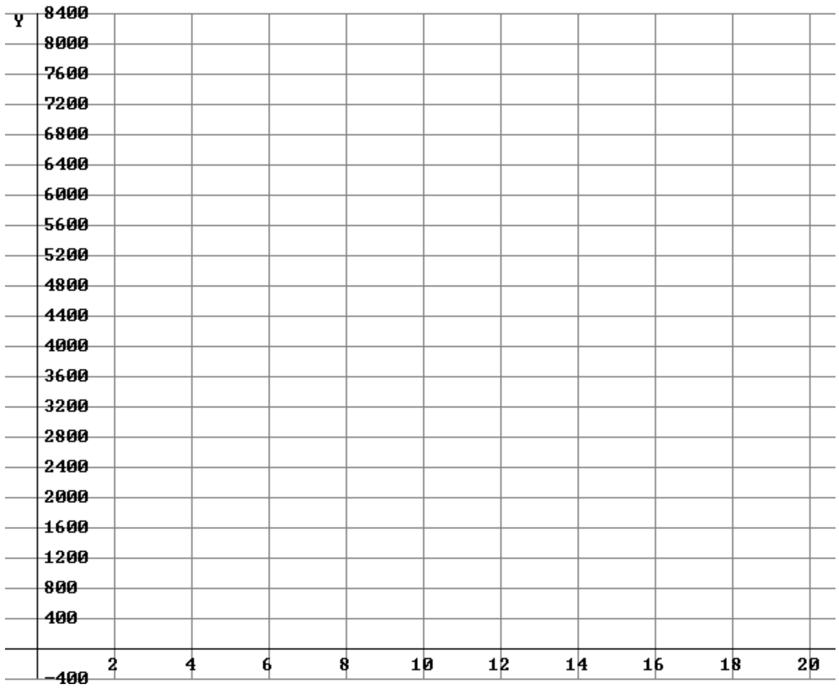
1. ¿Qué variables y unidades de dichas variables utiliza Pablito?

2. Completa la siguiente tabla de valores:

Kilos	1	2	3	4	5	6	7	10	13	15	20
Precio											

3. Realizar una expresión que relacione las variables con la información anterior.

4. Representar la información en el siguiente plano cartesiano.



5. ¿Qué resultaría de la razón entre (Precio por unidad de Kilo) $\frac{Precio}{\#\ Kilos}$? Represéntalo en:

Kilos	1	2	3	4	5	6	7	10	13	15	20
Precio											
$\frac{Precio}{\#\ Kilos}$											

- ¿Qué puedes explicar de los ejercicios anteriores?

3.3 Actividad 3

LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO "FUNCIÓN AFÍN"

MANUAL DE LA PRÁCTICA

OBJETIVO: Aplicación del método de aprendizaje activo en una sesión de "función afín"
DIRIGIDO A: Estudiantes de educación media.
AUTOR: Robinson Alfonso Cardona Aguirre, Licenciado en matemáticas.

La familia Merchán le llego la factura de la luz y Santiago quiere revisar, cuanto le toca pagar. De la observación de las facturas anteriores se sabe que para el estrato 2, hay que pagar un cargo fijo de $ 5000 y que cada kWh (kilovatio por hora) cuesta $ 400. Estos valores incluyen el IVA y otros impuestos.

1. En **10 minutos** realice las siguientes predicciones anótelas en la hoja de predicciones individuales.

- Indica cual es la variable dependiente e independiente del enunciado.

- ¿Se puede realizar una tabla de valores que contenga información de las variables?

- ¿Se puede obtener una igualdad que relacione las variables?

- ¿Es posible representar gráficamente la información anterior?

- ¿Se puede establecer alguna razón entre las variables?

- Mariana una compañera comenta que también su casa es de estrato dos y la lectura llego por 180 kWh. ¿Cuánto le toca pagar?

2. Presentación de predicciones grupales (**10 minutos**), discuta con sus compañeros (grupos de cuatro estudiantes) las predicciones individuales, anótelas en la hoja de predicciones de grupo, y entréguelas al profesor.

- Indica cual es la variable dependiente e independiente del enunciado.

- ¿Se puede realizar una tabla de valores que contenga información de las variables?

- ¿Se puede obtener una igualdad que relacione las variables?

- ¿Es posible representar gráficamente la información anterior?

- ¿Se puede establecer alguna razón entre las variables?

- Mariana una compañera comenta que también su casa es de estrato dos y la lectura llego por 180 kWh. ¿Cuánto le toca pagar?

3. Realice ahora las mediciones que le permitan corroborar (o desechar) sus predicciones (**15 minutos**).

- ¿Qué variables y unidades de dichas variables utiliza Santiago?

- Completa la siguiente tabla de valores:

kWh	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220
Precio											

- Realizar una expresión que represente la igualdad de las variables de acuerdo a la información anterior.

- Representar gráficamente la información:

- ¿Qué resultaría de la razón entre (Precio por unidad de kWh) $\frac{Precio}{\# \, kWh}$? y ¿Qué resultaría de la razón entre las diferencias Precio por las de unidades de kWh $\frac{Diferencia \;\; de \; Precios}{Diferencia \;\; kWh}$? Represéntalo en :

<table>
<tr><td>kWh</td><td>20</td><td>40</td><td>60</td><td>80</td><td>100</td><td>120</td><td>140</td><td>160</td><td>180</td><td>200</td></tr>
<tr><td>Precio</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{Precio}{\# \, kWh}$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{Diferencia \; de \; Precios}{Diferencia \; kWh}$</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

- ¿Qué puedes explicar del ejercicio anterior?

4. Presentación y discusión general de resultados de cada grupo y comparación con predicciones. (**15 minutos**)

- Compare los resultados con las predicciones iniciales y consigne esta información en la hoja de resultados.

5. Presentación general de conceptos trabajados por parte del docente y actividades para la casa. (**25 minutos**)

LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO "FUNCIÓN AFÍN"

HOJA DE PREDICCIONES INDIVIDUAL

Instrucciones: Esta hoja será recogida en cualquier momento por el profesor. Escriba su nombre para registrar su asistencia y participación en esta actividad. Tenga en cuenta que sus predicciones no serán tenidas en cuenta para la *evaluación*. Siga las instrucciones del docente.

La familia Merchán le llego la factura de la luz y Santiago quiere revisar, cuanto le toca pagar. De la observación de las facturas anteriores se sabe que para el estrato 2, hay que pagar un cargo fijo de $ 5000 y que cada kWh (kilovatio por hora) cuesta $ 400. Estos valores incluyen el IVA y otros impuestos.

En **10 minutos** realice las siguientes predicciones anótelas en la hoja de predicciones individuales.

1. Indica cual es la variable dependiente e independiente del enunciado.
2. ¿Se puede realizar una tabla de valores que contenga información de las variables?
3. ¿Se puede obtener una igualdad que relacione las variables?
4. ¿Es posible representar gráficamente la información anterior?
5. ¿Se puede establecer alguna razón entre las variables?
6. Mariana una compañera comenta que también su casa es de estrato dos y la lectura llego por 180 kWh. ¿Cuánto le toca pagar?

LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO "FUNCIÓN AFÍN"

HOJA DE PREDICCIONES – RESUMEN DE GRUPO

Instrucciones: Esta hoja será recogida en cualquier momento por el profesor. Escriba su nombre para registrar su asistencia y participación en esta actividad. Tenga en cuenta que sus predicciones no serán tenidas en cuenta para la *evaluación*. Siga las instrucciones del docente.

La familia Merchán le llego la factura de la luz y Santiago quiere revisar, cuanto le toca pagar. De la observación de las facturas anteriores se sabe que para el estrato 2, hay que pagar un cargo fijo de $ 5000 y que cada kWh (kilovatio por hora) cuesta $ 400. Estos valores incluyen el IVA y otros impuestos.

Presentación de predicciones grupales (**10 minutos**), discuta con sus compañeros (grupos de cuatro estudiantes) las predicciones individuales, anótelas y entréguelas al profesor.

1. Indica cual es la variable dependiente e independiente del enunciado.

2. ¿Se puede realizar una tabla de valores que contenga información de las variables?

3. ¿Se puede obtener una igualdad que relacione las variables?

4. ¿Es posible representar gráficamente la información anterior?

5. ¿Se puede establecer alguna razón entre las variables?

6. Mariana una compañera comenta que también su casa es de estrato dos y la lectura llego por 180 kWh. ¿Cuánto le toca pagar?

LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO "FUNCIÓN AFÍN"

HOJA DE RESULTADOS

Instrucciones: Esta hoja se debe entregar al finalizar la actividad. Escriba su nombre para registrar su asistencia y participación en esta actividad. Siga las instrucciones del docente.

La familia Merchán le llego la factura de la luz y Santiago quiere revisar, cuanto le toca pagar. De la observación de las facturas anteriores se sabe que para el estrato 2, hay que pagar un cargo fijo de $ 5000 y que cada kWh (kilovatio por hora) cuesta $ 400. Estos valores incluyen el IVA y otros impuestos.

- ¿Qué variables y unidades de dichas variables utiliza Santiago?

- Completa la siguiente tabla de valores:

kWh	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220
Precio											

- Realizar una expresión que represente las igualdades de las variables de acuerdo a la información anterior.

- Representar gráficamente la información:

- ¿Qué resultaría de la razón entre (Precio por unidad de kWh) $\frac{Precio}{\#\,kWh}$? y ¿Qué resultaría de la razón entre las diferencias Precio por las de unidades de kWh $\frac{Diferencia\ \ de\ Precios}{Diferencia\ \ kWh}$? Represéntalo en :

kWh	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
Precio										
$\frac{Precio}{\#\,kWh}$										
$\frac{Diferencia\ de\ Precios}{Diferencia\ kWh}$										

- ¿Qué puedes explicar del ejercicio anterior?

3.4 Actividad 4

LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO "RAZÓN DE CAMBIO"

MANUAL DE LA PRÁCTICA

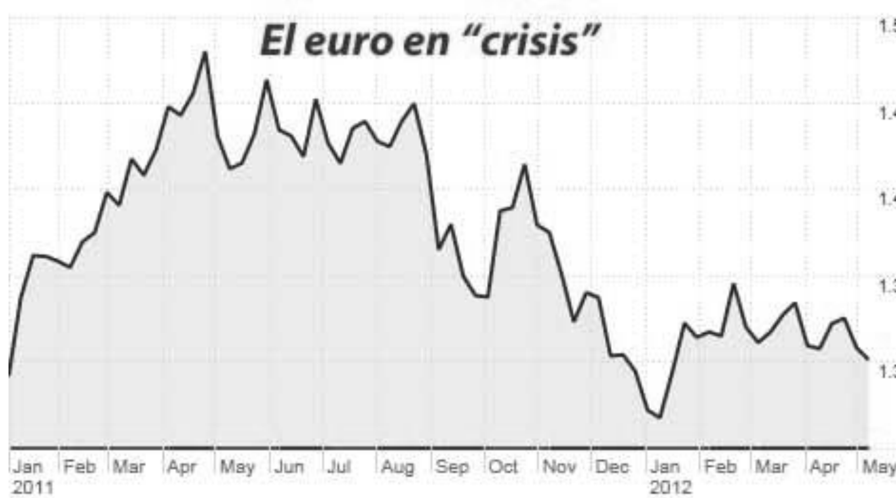
OBJETIVO: Aplicación del método de aprendizaje activo en una sesión de "razón de cambio"

DIRIGIDO A: Estudiantes de educación media.

AUTOR: Robinson Alfonso Cardona Aguirre, Licenciado en matemáticas.

1. En **20 minutos** realice las siguientes predicciones de acuerdo a las siguientes gráficas, anótelas en la hoja de predicciones individuales.

Grafica 1: El Precio del Petróleo – La Crisis del Euro – La Deuda Europea



Relación del precio del euro con respecto al dólar americano[1].

- Indicar cuál es la variable dependiente e independiente de la gráfica.

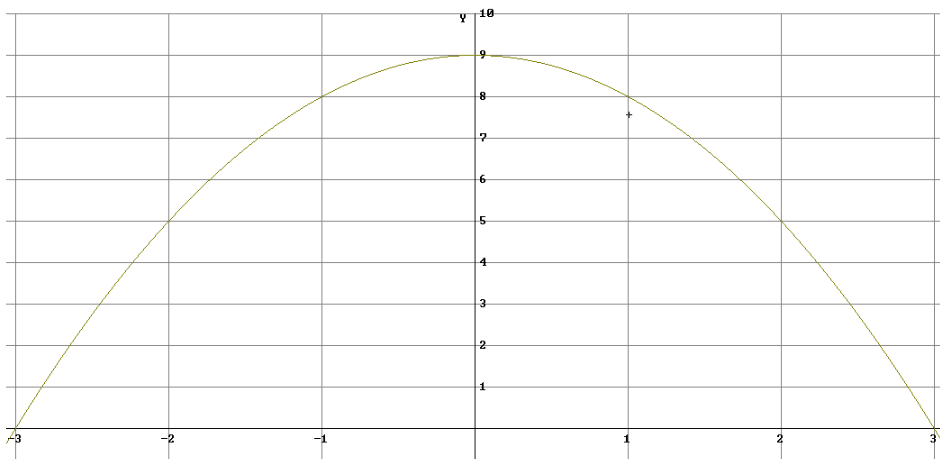
[1] Figura tomada de http://www.nejasayoil.com/

- Según la gráfica en que meses se presentaron más cambios del euro. Justifique su respuesta.

- Según la gráfica que mes se presentó más cambio del euro. Justifique su respuesta.

- Según la gráfica en que mes se presentó menos cambio del euro. Justifique su respuesta.

Grafica 2: Ahora se tiene la grafica de la función $f(x) = -x^2 + 9$:



- Según la gráfica en que intervalo se presentó más cambio. Justifique su respuesta.

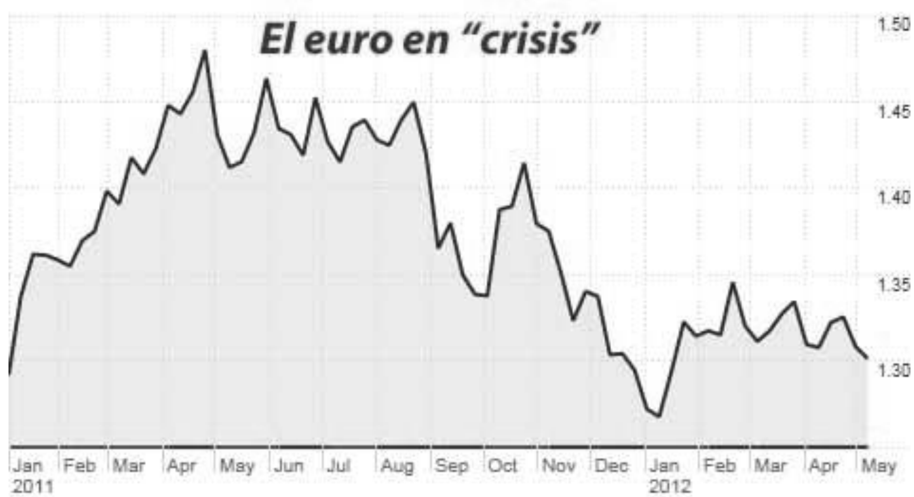
- Según la gráfica en que intervalo se presentó menos cambio. Justifique su respuesta.

- ¿Se puede realizar una tabla de valores de la anterior gráfica?

- ¿Se puede realizar un proceso matemático para hallar los cambios? Justifique su respuesta.

2. Presentación de predicciones grupales (**15 minutos**), discuta con sus compañeros (grupos de cuatro estudiantes) las predicciones individuales, anótelas en la hoja de predicciones de grupo, y entréguelas al profesor.

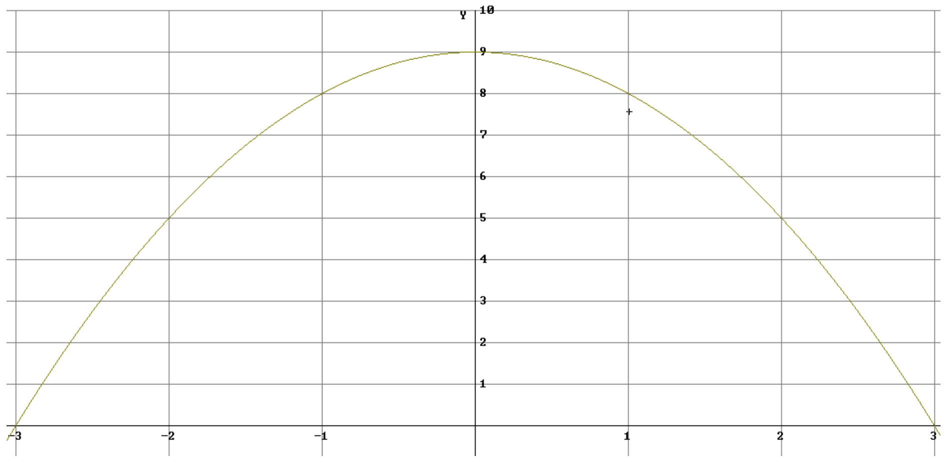
Grafica 1: El Precio del Petróleo – La Crisis del Euro – La Deuda Europea



Relación del precio del euro con respecto al dólar americano.

- Indicar cuál es la variable dependiente e independiente de la gráfica.
- Según la gráfica en que meses se presentaron más cambios del euro. Justifique su respuesta.
- Según la gráfica que mes se presentó más cambio del euro. Justifique su respuesta.
- Según la gráfica en que mes se presentó menos cambio del euro. Justifique su respuesta.

Grafica 2: Ahora se tiene la grafica de la función $f(x) = -x^2 + 9$:



- Según la gráfica en que intervalo se presentó más cambio. Justifique su respuesta.

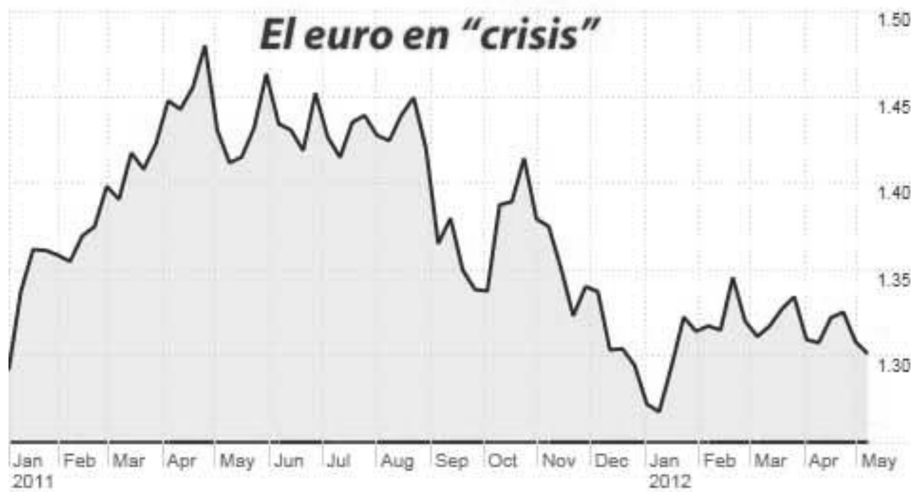
- Según la gráfica en que intervalo se presentó menos cambio. Justifique su respuesta.

- ¿Se puede realizar una tabla de valores de la anterior gráfica?

- ¿Se puede realizar un proceso matemático para hallar los cambios? Justifique su respuesta.

3. Realice ahora las mediciones que le permitan corroborar (o desechar) sus predicciones (**15 minutos**).

Grafica 1: El Precio del Petróleo – La Crisis del Euro – La Deuda Europea



Relación del precio del euro con respecto al dólar americano.

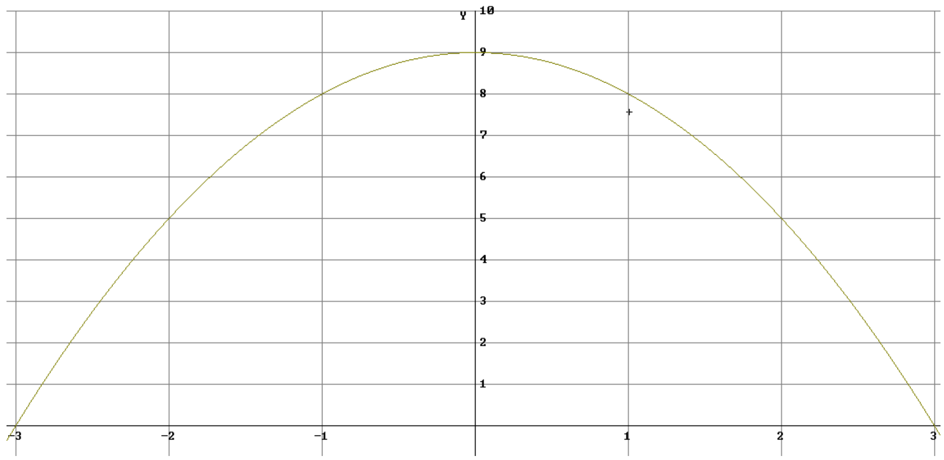
- Indicar cuál es la variable dependiente e independiente de la gráfica.

- Según la gráfica en que meses se presentaron más cambios del euro. Justifique su respuesta.

- Según la gráfica en que mes se presentó más cambio del euro. Justifique su respuesta.

- Según la gráfica en que mes se presentó menos cambio del euro. Justifique su respuesta.

Grafica 2: Ahora se tiene la grafica de la función $f(x) = -x^2 + 9$:



- Realizar una tabla de valores de la anterior gráfica.

x							
y							

- Realizar los siguientes cálculos de acuerdo a los intervalos de la gráfica.

$\Delta y = y_f - y_i$						
$\Delta x = x_f - x_i$						
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$						

- Realizar los siguientes cálculos de acuerdo a los siguientes intervalos de la gráfica.

Intervalo	[-3,0]	[-1,1]	[-2,3]	[-3,3]	[0,2]	[-2,2]
$\Delta y = y_f - y_i$						
$\Delta x = x_f - x_i$						

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$						

- Según los dos puntos anteriores diga cuál es la diferencia entre las dos tablas.

- ¿A qué conclusiones puedes llegar de las dos actividades anteriores?

4. Presentación y discusión general de resultados de cada grupo y comparación con predicciones. (**15 minutos**)

- Compare los resultados con las predicciones iniciales y consigne esta información en la hoja de resultados.

5. Presentación general de conceptos trabajados por parte del docente y actividades para la casa. (**25 minutos**)

LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO

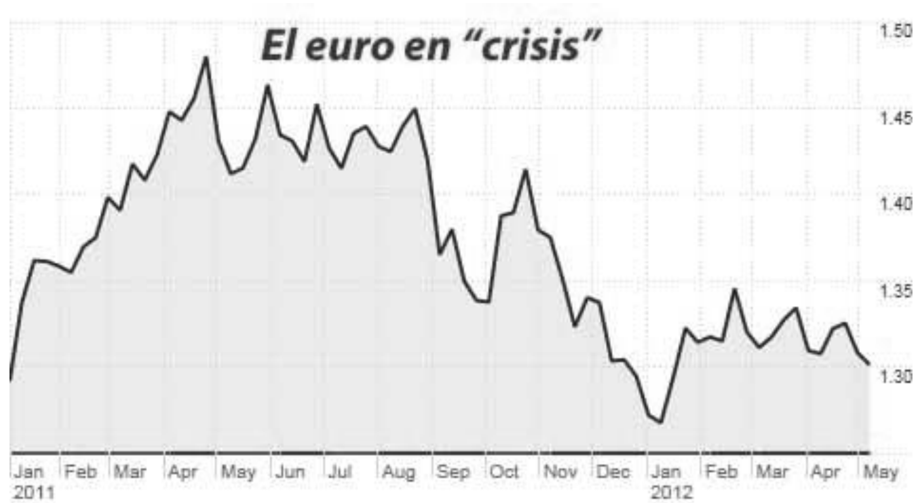
LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO "RAZÓN DE CAMBIO"

HOJA DE PREDICCIONES INDIVIDUAL

Instrucciones: Esta hoja será recogida en cualquier momento por el profesor. Escriba su nombre para registrar su asistencia y participación en esta actividad. Tenga en cuenta que sus predicciones no serán tenidas en cuenta para la *evaluación*. Siga las instrucciones del docente.

En **20 minutos** realice las siguientes predicciones anótelas en la hoja de predicciones individuales.

Grafica 1: El Precio del Petróleo – La Crisis del Euro – La Deuda Europea



Relación del precio del euro con respecto al dólar americano.

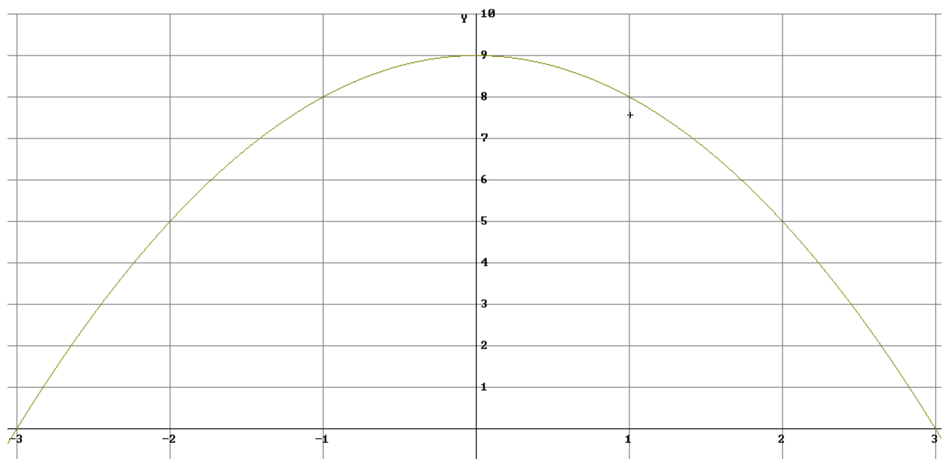
1. Indicar cuál es la variable dependiente e independiente de la gráfica.

2. Según la gráfica en que meses se presentaron más cambios del euro. Justifique su respuesta.

3. Según la gráfica en que mes se presentó más cambio del euro. Justifique su respuesta.

4. Según la gráfica en que mes se presentó menos cambio del euro. Justifique su respuesta.

Grafica 2: Ahora se tiene la grafica de la función $f(x) = -x^2 + 9$:



5. Según la gráfica en que intervalo se presentó más cambio. Justifique su respuesta.

6. Según la gráfica en que intervalo se presentó menos cambio. Justifique su respuesta.

7. ¿Se puede realizar una tabla de valores de la anterior gráfica?

8. ¿Se puede realizar un proceso matemático para hallar los cambios? Justifique su respuesta.

LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO

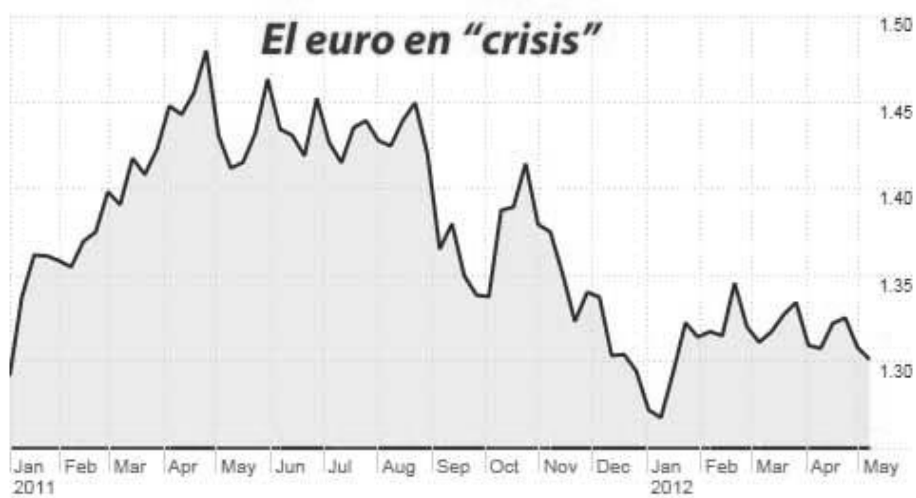
LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO "RAZÓN DE CAMBIO"

HOJA DE PREDICCIONES – RESUMEN DE GRUPO

Instrucciones: Esta hoja será recogida en cualquier momento por el profesor. Escriba su nombre para registrar su asistencia y participación en esta actividad. Tenga en cuenta que sus predicciones no serán tenidas en cuenta para la *evaluación*. Siga las instrucciones del docente.

Presentación de predicciones grupales (**15 minutos**), discuta con sus compañeros (grupos de cuatro estudiantes) las predicciones individuales, anótelas y entréguelas al profesor.

Grafica 1: El Precio del Petróleo – La Crisis del Euro – La Deuda Europea



Relación del precio del euro con respecto al dólar americano.

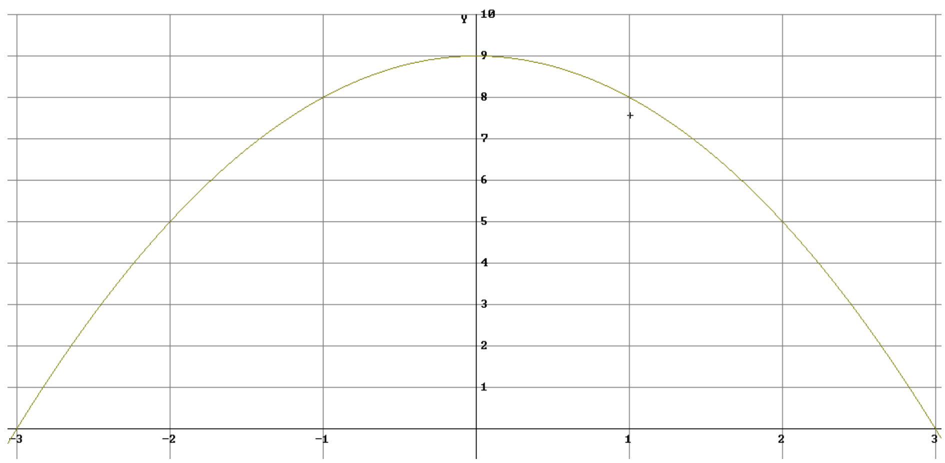
1. Indicar cuál es la variable dependiente e independiente de la gráfica.

2. Según la gráfica en que meses se presentaron más cambios del euro. Justifique su respuesta.

3. Según la gráfica en que mes se presentó más cambio del euro. Justifique su respuesta.

4. Según la gráfica en que mes se presentó menos cambio del euro. Justifique su respuesta.

Grafica 2: Ahora se tiene la grafica de la función $f(x) = -x^2 + 9$:



5. Según la gráfica en que intervalo se presentó más cambio. Justifique su respuesta.

6. Según la gráfica en que intervalo se presentó menos cambio. Justifique su respuesta.

7. ¿Se puede realizar una tabla de valores de la anterior gráfica?

8. ¿Se puede realizar un proceso matemático para hallar los cambios? Justifique su respuesta.

LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO

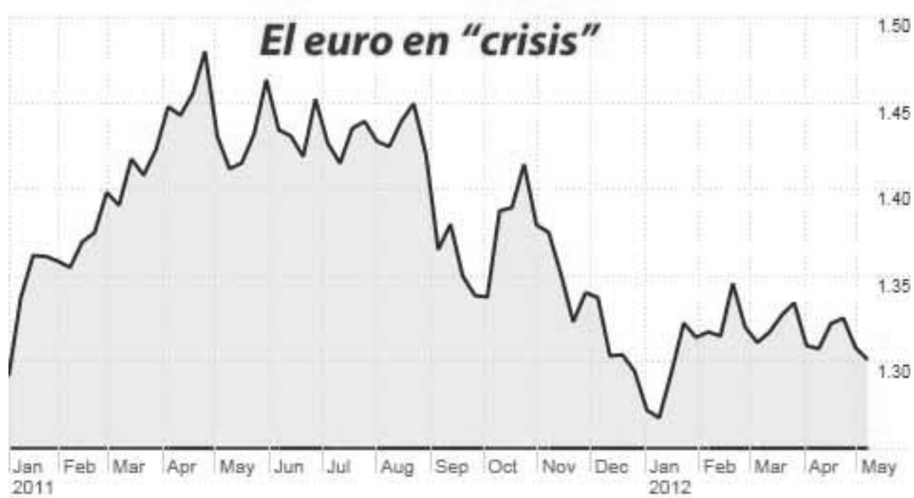
LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO "RAZÓN DE CAMBIO"

HOJA DE RESULTADOS

Instrucciones: Esta hoja se debe entregar al finalizar la actividad. Escriba su nombre para registrar su asistencia y participación en esta actividad. Siga las instrucciones del docente.

Realice ahora las mediciones que le permitan corroborar (o desechar) sus predicciones (**15 minutos**).

Grafica 1: El Precio del Petróleo – La Crisis del Euro – La Deuda Europea



Relación del precio del euro con respecto al dólar americano.

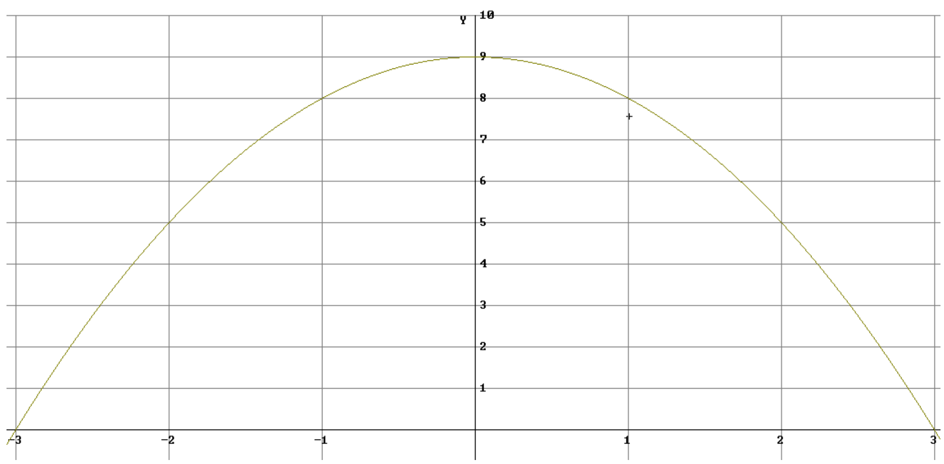
1. Indicar cuál es la variable dependiente e independiente de la gráfica.

2. Según la gráfica en que meses se presentaron más cambios del euro. Justifique su respuesta.

3. Según la gráfica en que mes se presentó más cambio del euro. Justifique su respuesta.

4. Según la gráfica en que mes se presentó menos cambio del euro. Justifique su respuesta.

Grafica 2: Ahora se tiene la grafica de la función $f(x) = -x^2 + 9$:



5. Realizar una tabla de valores de la anterior gráfica.

x							
y							

6. Realizar los siguientes cálculos de acuerdo a los intervalos de la gráfica.

$\Delta y = y_f - y_i$						
$\Delta x = x_f - x_i$						
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$						

7. Realizar los siguientes cálculos de acuerdo a los siguientes intervalos de la gráfica.

Intervalo	[-3,0]	[-1,1]	[-2,3]	[-3,3]	[0,2]	[-2,2]
$\Delta y = y_f - y_i$						
$\Delta x = x_f - x_i$						
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$						

8. Según los dos puntos anteriores diga cuál es la diferencia entre las dos tablas.

9. ¿A qué conclusiones puedes llegar de las dos actividades anteriores?

3.5 Actividad 5

LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO "RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEA"

MANUAL DE LA PRÁCTICA

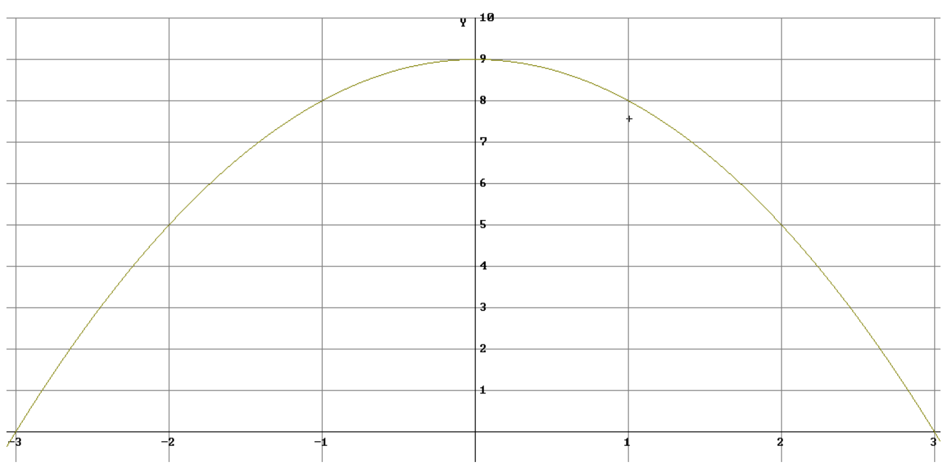
OBJETIVO: Aplicación del método de aprendizaje activo en una sesión de "razón de cambio instantánea"

DIRIGIDO A: Estudiantes de educación media.

AUTOR: Robinson Alfonso Cardona Aguirre, Licenciado en matemáticas.

1. En **10 minutos** realice las siguientes predicciones de acuerdo a las siguientes gráficas, anótelas en la hoja de predicciones individuales.

Grafica 1: gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 9$:



Se desea encontrar la razón de cambio en el punto de coordenadas $(2{,}5)$ de la función $f(x) = -x^2 + 9$. Si se tiene que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y el punto $(x_1, y_1) = (2{,}5)$, donde $\Delta y = y_2 - 5$ y $\Delta x = x_2 - 2$ encontrar $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ haciendo Δx cada vez más pequeño.

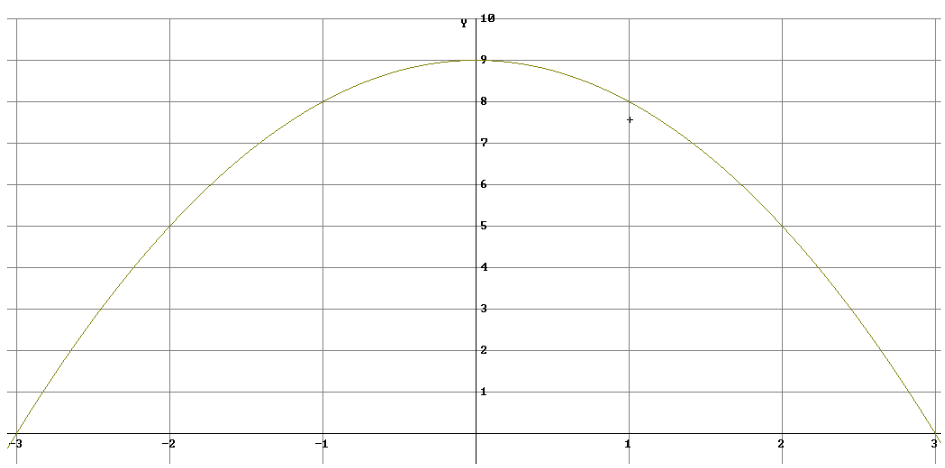
- ¿Se podrá encontrar un valor aproximado de la razón de cambio en el punto de coordenadas $(2,5)$? Justifique su respuesta.

- ¿Es posible encontrar un método para encontrar la razón de cambio en el punto de coordenadas $(2,5)$? Justifique su respuesta.

- ¿Cómo podremos llamar este proceso?

2. Presentación de predicciones grupales (**15 minutos**), discuta con sus compañeros (grupos de cuatro estudiantes) las predicciones individuales, anótelas en la hoja de predicciones de grupo, y entréguelas al profesor.

Grafica 1: gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 9$:



Se desea encontrar la razón de cambio en el punto de coordenadas $(2,5)$ de la función $f(x) = -x^2 + 9$. Si se tiene que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y el punto $(x_1, y_1) = (2,5)$, donde $\Delta y = y_2 - 5$ y $\Delta x = x_2 - 2$ encontrar $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ haciendo Δx cada vez más pequeño.

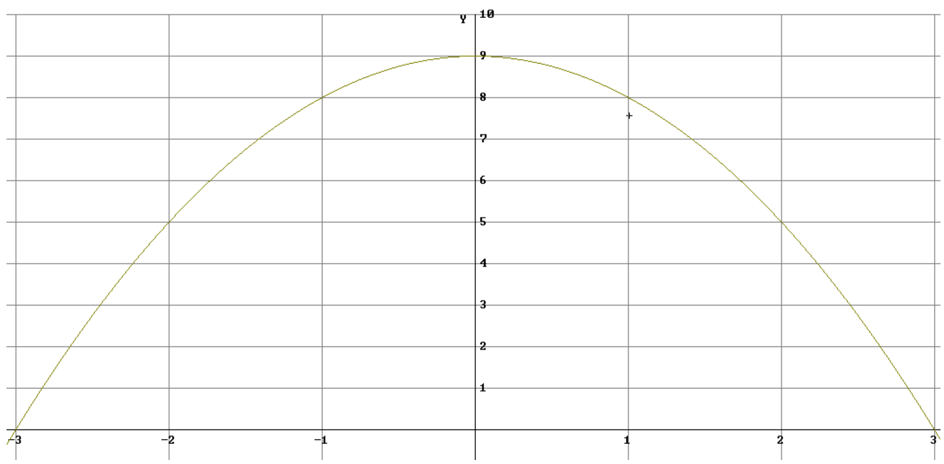
- ¿Se podrá encontrar un valor aproximado de la razón de cambio en el punto de coordenadas $(2,5)$? Justifique su respuesta.

- ¿Es posible encontrar un método para encontrar la razón de cambio en el punto de coordenadas $(2{,}5)$? Justifique su respuesta.

- ¿Cómo podremos llamar este proceso?

3. Realice ahora las mediciones que le permitan corroborar (o desechar) sus predicciones (**20 minutos**).

Grafica 1: gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 9$:



Se desea encontrar la razón de cambio en el punto de coordenadas $(2{,}5)$ de la función $f(x) = -x^2 + 9$. Si se tiene que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y el punto $(x_1, y_1) = (2{,}5)$, donde $\Delta y = y_2 - 5$ y $\Delta x = x_2 - 2$ encontrar $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ haciendo Δx cada vez más pequeño.

- Encontrar el valor de x_2 haciendo Δx cada vez más pequeño:

$\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 9}$		
$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{\Delta x}$	$\boldsymbol{x_1 + \Delta x = x_2}$
2	1	
2	0.5	
2	0.1	
2	0.01	
2	0.001	

2	0.0001	
2	0.00001	
2	0.000001	

- Encontrar el valor de y_2 evaluándolo en la función $f(x) = -x^2 + 9$ teniendo en cuenta el valor de x_2 . Luego encontrar el valor Δy con la expresión $\Delta y = y_2 - 5$:

$f(x) = -x^2 + 9$		
x_2	$y_2 = f(x_2)$	$\Delta y = y_2 - 5$

- Teniendo en cuenta Δy y Δx, encontrar el valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$f(x) = -x^2 + 9$		
Δy	Δx	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$

- Concluya entre el proceso de razón de cambio en un intervalo como en la Actividad 4, y el proceso de razón de cambio en un punto como el anterior. Escriba sus conclusiones.

4. Presentación y discusión general de resultados de cada grupo y comparación con predicciones. (**15 minutos**)

- Compare los resultados con las predicciones iniciales y consigne esta información en la hoja de resultados.

5. Presentación general de conceptos trabajados y conclusiones, por parte del docente y actividades para la casa. (**30 minutos**)

LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO

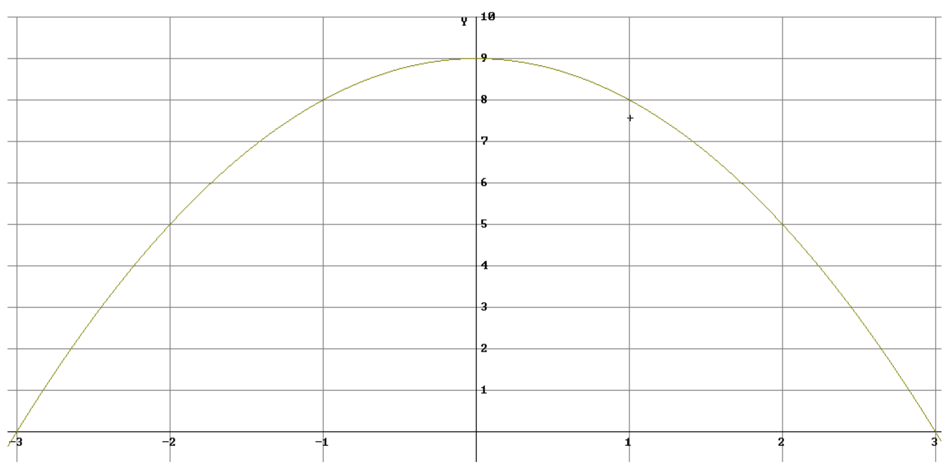
LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO “RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEA”

HOJA DE PREDICCIONES INDIVIDUAL

Instrucciones: Esta hoja será recogida en cualquier momento por el profesor. Escriba su nombre para registrar su asistencia y participación en esta actividad. Tenga en cuenta que sus predicciones no serán tenidas en cuenta para la *evaluación*. Siga las instrucciones del docente.

En **10 minutos** realice las siguientes predicciones anótelas en la hoja de predicciones individuales.

Grafica 1: gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 9$:



Se desea encontrar la razón de cambio en el punto de coordenadas $(2,5)$ de la función $f(x) = -x^2 + 9$. Si se tiene que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y el punto $(x_1, y_1) = (2,5)$, donde $\Delta y = y_2 - 5$ y $\Delta x = x_2 - 2$ encontrar $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ haciendo Δx cada vez más pequeño.

1. ¿Se podrá encontrar un valor aproximado de la razón de cambio en el punto de coordenadas $(2,5)$? Justifique su respuesta.

2. ¿Es posible encontrar un método para encontrar la razón de cambio en el punto de coordenadas $(2,5)$? Justifique su respuesta.

3. ¿Cómo podremos llamar este proceso?

LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO

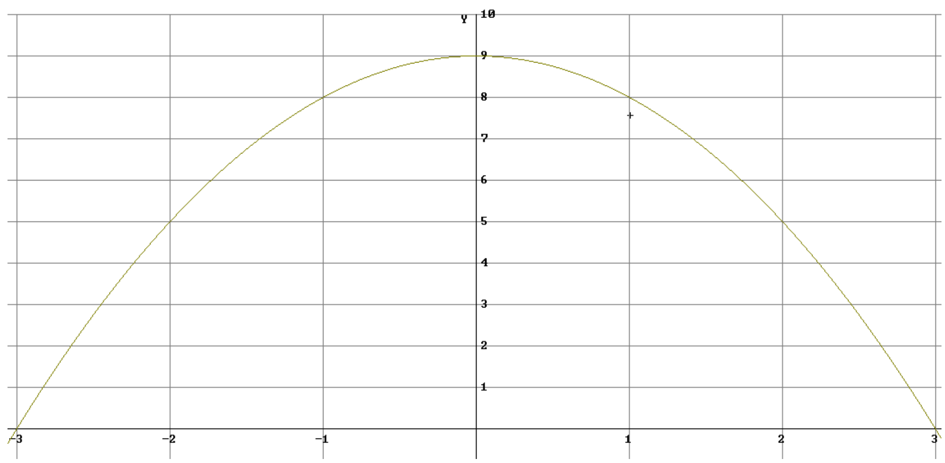
LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO "RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEA"

HOJA DE PREDICCIONES – RESUMEN DE GRUPO

Instrucciones: Esta hoja será recogida en cualquier momento por el profesor. Escriba su nombre para registrar su asistencia y participación en esta actividad. Tenga en cuenta que sus predicciones no serán tenidas en cuenta para la *evaluación*. Siga las instrucciones del docente.

Presentación de predicciones grupales (**15 minutos**), discuta con sus compañeros (grupos de cuatro estudiantes) las predicciones individuales, anótelas y entréguelas al profesor.

Grafica 1: gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 9$:



Se desea encontrar la razón de cambio en el punto de coordenadas $(2,5)$ de la función $f(x) = -x^2 + 9$. Si se tiene que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y el punto $(x_1, y_1) = (2,5)$, donde $\Delta y = y_2 - 5$ y $\Delta x = x_2 - 2$ encontrar $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ haciendo Δx cada vez más pequeño.

1. ¿Se podrá encontrar un valor aproximado de la razón de cambio en el punto de coordenadas $(2,5)$? Justifique su respuesta.

2. ¿Es posible encontrar un método para encontrar la razón de cambio en el punto de coordenadas $(2,5)$? Justifique su respuesta.

3. ¿Cómo podremos llamar este proceso?

.

LABORATORIO DE APRENDIZAJE ACTIVO

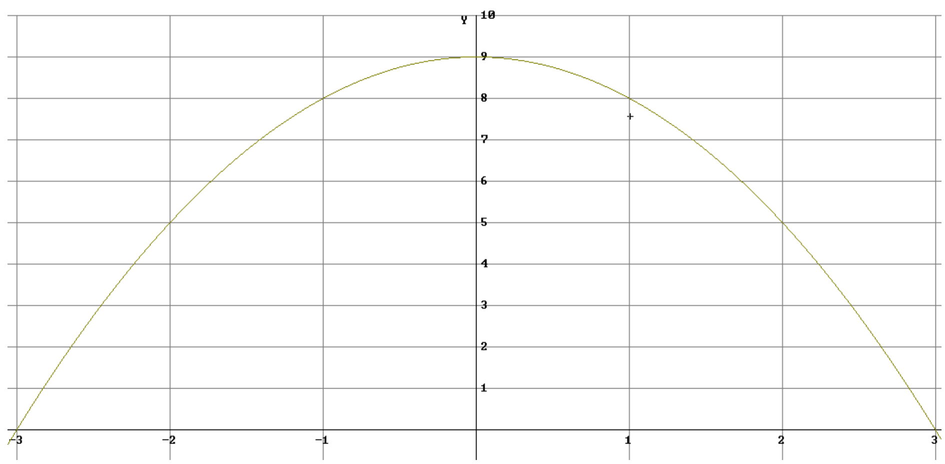
LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO "RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEA"

HOJA DE RESULTADOS

Instrucciones: Esta hoja se debe entregar al finalizar la actividad. Escriba su nombre para registrar su asistencia y participación en esta actividad. Siga las instrucciones del docente.

Realice ahora las mediciones que le permitan corroborar (o desechar) sus predicciones (**20 minutos**).

Grafica 1: gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 9$:



Se desea encontrar la razón de cambio en el punto de coordenadas $(2{,}5)$ de la función $f(x) = -x^2 + 9$. Si se tiene que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y el punto $(x_1, y_1) = (2{,}5)$, donde $\Delta y = y_2 - 5$ y $\Delta x = x_2 - 2$ encontrar $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ haciendo Δx cada vez más pequeño.

- Encontrar el valor de x_2 haciendo Δx cada vez más pequeño:

$f(x) = -x^2 + 9$		
x_1	Δx	$x_1 + \Delta x = x_2$
2	1	
2	0.5	
2	0.1	
2	0.01	
2	0.001	
2	0.0001	
2	0.00001	
2	0.000001	

- Encontrar el valor de y_2 evaluándolo en la función $f(x) = -x^2 + 9$ teniendo en cuenta el valor de x_2 . Luego encontrar el valor Δy con la expresión $\Delta y = y_2 - 5$:

$f(x) = -x^2 + 9$		
x_2	$y_2 = f(x_2)$	$\Delta y = y_2 - 5$

- Teniendo en cuenta Δy y Δx, encontrar el valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 9}$		
$\Delta \boldsymbol{y}$	$\Delta \boldsymbol{x}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Concluya entre el proceso de razón de cambio en un intervalo como en la Actividad 4, y el proceso de razón de cambio en un punto como el anterior. Escriba sus conclusiones.

4. Conclusiones recomendaciones

4.1 Conclusiones

El trabajo que se realizó pretende hacer contribuciones, al aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes de grado undécimo, y dar una perspectiva de desarrollo de los temas al docente, desde el punto de vista histórico, epistemológico, disciplinar y didáctico en su quehacer diario.

La elaboración de este trabajo permitió confirmar a su autor que el análisis histórico epistemológico de los conceptos del cálculo diferencial y en general de las matemáticas a enseñar, es muy importe para el adecuado desarrollo de las prácticas de aula, el cual permite una mejor comprensión de los conceptos de cómo se venían desarrollando anteriormente. Debido a este análisis se vio que el desarrollo de los conceptos del cálculo tuvo un camino muy diferente al que está presente en el currículo y la mayoría de los textos (límite, continuidad, derivada e integral). Históricamente, se desarrollaron los problemas de calcular áreas por diferentes métodos lo que para nosotros es "*la integral*", luego se estudio el problema de variación y el cambio lo que llevo a la representación de funciones y a encontrar tangentes a las curvas de estas funciones, que se desarrollaron por medio de razones de cambio promedio "*la derivada*", luego de estas razones de cambio promedio se vio la necesidad de encontrar las razones de cambio instantáneas que llevaron al problema de cálculos infinitesimales y aproximaciones infinitas *"el límite"*.

El desarrollo de los conceptos de la derivada como razón de cambio y sus preconceptos, nos permiten darnos una idea de las diferentes formas en el cual este se presenta en el aula de clase, de ahí la importancia que tiene el docente en escoger el concepto más apropiado de acuerdo a su contexto para ser enseñando. De estas diferencias entre los conceptos se desarrollaron las actividades partiendo de los preconceptos los cuales le deben permitir al estudiante una mejor comprensión y apropiación del concepto de derivada como razón de cambio, en los cuales se tuvieron en cuenta varios aspectos, lo grafico, lo conceptual y la resolución de problemas en la vida diaria, en los que se presenta variación y cambio.

Por último queda decir que este no es el fin de la investigación apenas se está comenzando, lo que sigue es revisar y analizar los resultados obtenidos con este trabajo y contrastarlos con los de otras investigaciones de metodologías empleadas en el aula de clase por parte de otros autores interesados también en la enseñanza de las matemáticas, en especial la del cálculo diferencial. De esta misma forma lo queda por realizar es una investigación histórica y epistemológica del concepto de límite, que es uno de los conceptos más traumáticos del cálculo diferencial y de así decirlo de la matemática escolar y principios de la universidad.

Bibliografía

[1] Apostol, T. (1984). *Calculus Volemen 1.* Barcelona: Reverté.

[2] Azcarate. et al. (1996). *Cálculo diferencial e integral.* Madrid: Síntesis.

[3] Bourbaki, N. (1976). *Elementos de la Historia de las Matemáticas.* Madrid: Alianza Editorial.

[4] Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* New York: Alianza Editorial.

[5] Camargo, L., & Guzman, A. (2005). *Elementos para una didáctica del pensamiento variacional: Relaciones entre la pendiente y la razon.* Bogotá: Editorial Magisterio.

[6] Chevallard, Y. (1998). *LaTransposición Didáctica: Del Saber Sabio al Saber Enseñado.* Grenoble: Aique Grupo Editor.

[7] Ecuador, M. d. (2010). *Scribd.* Recuperado el 12 de Febrero de 2012, de http://es.scribd.com/doc/79493927/36/Funcion-lineal-o-de-proporcionalidad-directa

[8] Ferrini, J., & Geuther, K. (1993). La Reforma de los Cursos de Cálculo: Aprendizaje, Enseñanza y Desarrollo Curricular. Una Perspectiva. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria* , 102.

[9] Huertas, C. (2011). *Apuntes de clase: Del Número Racional a la Razón de Cambio.* Bogotá.

[10] Karlson, P. (1960). *La Magia de los números.* Barcelona: Labor, S.A.

[11] Kline, M. (1992). *El pensamiento Matemático de la Antiguedad a nuestros días, I.* Madrid: Alianza Editorial.

[12] Mejia, F. (2009). *Proporciones y Progresiones.* Medellín: Sello Editorial: Universidad de Medellín.

[13] Paredes, P., & Ramírez, M. (2009). *Apuntes de Preparación para la Prueba de Selección Universitaria Matemática.* Santiago: http://zeth.ciencias.uchile.cl/-manramirez.

[14] Soler, F., Núñez, R., & Aranda, M. (2005). *Fundamentos de Cálculo: Con Aplicaciones a Ciencias Económicas y Administrativas.* Bogotá: Ecoe Ediciones.

[15] Wenzelburger, E. (1993). *Cálculo Diferencial.* México, D.F. : Grupo Editorial Iberoamérica.