



UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA

**CHOQUES ASIMÉTRICOS DE  
POLÍTICA MONETARIA EN  
COLOMBIA: UNA APLICACIÓN  
USANDO MODELOS VAR  
ESTRUCTURALES CON CAMBIO DE  
REGIMEN MEDIANTE UNA  
ESPECIFICACIÓN MARKOV-  
SWITCHING**

**Cristhian Hernando Ruiz Cardozo**

**Economista**

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Departamento de Estadística

Bogotá, Colombia

Noviembre 2017

# **CHOQUES ASIMÉTRICOS DE POLÍTICA MONETARIA EN COLOMBIA: UNA APLICACIÓN USANDO MODELOS VAR ESTRUCTURALES CON CAMBIO DE REGIMEN MEDIANTE UNA ESPECIFICACIÓN MARKOV- SWITCHING**

**Cristhian Hernando Ruiz Cardozo  
Economista**

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título  
de:

**Magister en Ciencias Estadística**

Director (a):

Norberto Rodriguez Niño

Master of Science in Statistics

Línea de Investigación:

Métodos Estadísticos Aplicados

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Departamento de Estadística

Bogotá, Colombia

Noviembre 2017

**DEDICADO A**

*A Dios porque Él revivió mis sueños y me dio nueva libertad. A mi familia, en especial a mi madre, Nancy Cardozo y mi hermano Miguel Ángel, quienes me dieron aliento cuando creí que todo estaba perdido. A Luisa Rodríguez, quien fue instrumento para acercarme a Dios.*

*“¡Adquirir sabiduría es lo más sabio que puedes hacer!  
Y en todo lo demás que hagas, desarrolla buen juicio.  
Si valoras la sabiduría, ella te engrandecerá. Abrázala,  
y te honrará.”*

*Proverbios 4:7-8*

# Agradecimientos

A mi director de tesis por su comprensión y apoyo. Doy gracias porque pese a las dificultades, no me dio la espalda y contribuyo enormemente con el desarrollo de este proyecto.

A mi madre por su apoyo constante, su amor incondicional, su paciencia, por cada aliento y consejo que me dio. A mi hermano, por esas noches que me acompañó y me dio ánimo. A Dios y mi familia, gracias a ustedes por ser mis pilares, la motivación de mi vida. A la Universidad Nacional de Colombia, por darme la oportunidad de realizar mis estudios y me brindo las herramientas para poder desarrollar este trabajo.

Agradecimiento especial a Dios, estuve perdido y él me encontró, me devolvió la energía y las ganas de seguir luchando por mis objetivos. Pese a las dificultades, fue Él quien me guio y logró sanar heridas que impidieron dar lo mejor de mí. Él es el gran motivo de este trabajo, solo Él conoce la lucha que tuve que dar para terminar este proyecto, por eso dedico este trabajo completamente a su gran misericordia.

## Resumen

Este trabajo presenta un estudio de las funciones impulso respuestas del modelo de Vectores Autorregresivos Markov Switching aplicado a datos de la economía colombiana. Para tal fin, se trabaja el modelo MS-VAR(p) siguiendo la metodología propuesta por Krolzig (1997) y Droumaguet (2012). Se estiman los parámetros del modelo y las funciones impulso respuesta utilizando metodologías de estimación Bayesiana. Los resultados confirman la existencia de asimetrías en el ciclo económico colombiano, así mismo valida que el análisis del modelo de vectores autorregresivos tradicionales es insuficiente para estudiar la relación que existe entre las variables Inflación, PIB y tasas de interés para la economía colombiana.

**Palabras clave: Modelos Markov-Switching, No linealidades y Asimetrías, Metodos Bayesianos, Vectores autorregresivos, Funciones Impulsó Respuesta.**

## **Abstract**

This paper presents a study of the impulse responses functions of the Markov Switching Vector Autoregressive model applied to Colombian economy. For this purpose, MS-VAR (p) models are estimated following the methodology proposed by Krolzig (1997) and Droumaguet (2012). The parameters and impulse response functions are estimated using Bayesian estimation methodologies. The results confirm the existence of asymmetries in the Colombian economic cycle, likewise, this work validates that the analysis of traditional vectors autoregressive models is insufficient to study the relationship between the variables Inflation, GDP and interest rates for the Colombian economy.

**Keywords: Markov-Switching Models, Non-linearities and Asymmetries, Bayesian methods, Vectors Autoregressive Models, Impulse Responses Function**

# Contenido

	<u>Pág.</u>
Resumen .....	V
Abstract.....	VI
Lista de figuras.....	VIII
Lista de tablas .....	X
Introducción .....	5
<b>Modelos Markov Switching VAR (MS-VAR(p)) .....</b>	<b>8</b>
1.1    Modelo con cambios de régimen en el intercepto, los coeficientes autorregresivos y matriz de varianzas y covarianzas (MSIAH – VAR) .....	8
1.1.1    Verosimilitud, prior y posterior.....	9
1.1.2    Muestreador de Gibbs .....	13
1.1.3    Función Impulso Respuesta (FIR).....	17
1.1.4    Función Impulso Respuesta Generalizada.....	19
<b>Aplicación del Modelo a Variables Económicas Colombianas .....</b>	<b>33</b>
2.1    Base de datos .....	34
2.2    Evidencia a favor de modelos con cambio de régimen.....	37
2.3    Análisis de los Regímenes del modelo seleccionado MS-VAR.....	39
2.4    Análisis de la función impulso respuesta .....	41
<b>Conclusiones y recomendaciones.....</b>	<b>45</b>
3.1    Conclusiones.....	45
3.2    Recomendaciones.....	46
<b>A. Anexo: Implementación Método “Expectation Maximization” .....</b>	<b>35</b>
<b>B. Anexo: Simulaciones Modelo MSIAH(2)-VAR(1) .....</b>	<b>39</b>
<b>C. Anexo: Modelo VAR(p).....</b>	<b>50</b>
<b>D. Anexo: Modelo VAR(p) Bayesiano .....</b>	<b>52</b>
<b>E. Anexo: Impulso respuesta modelo frecuentista .....</b>	<b>54</b>
<b>F. Anexo: Códigos en R .....</b>	<b>59</b>
<b>Bibliografía .....</b>	<b>60</b>

## Lista de figuras

	<u>Pág.</u>
<b>Figura 2-1:</b> Inflación anual sin alimentos. Periodo Enero 2000 – Julio 2017. ....	34
<b>Figura 2-2:</b> Producto interno bruto. Periodo Enero 2000 – Julio 2017.....	35
<b>Figura 2-3:</b> Tasa de Interés de depósitos a término fijo 90 días. Periodo Enero 2000 – Julio 2017.....	36
<b>Figura 2-4:</b> Probabilidades estimadas para la variable latente asociada al régimen 1 del modelo MSIAH (2) - VAR (1). ....	40
<b>Figura 2-5:</b> Régimen 1, Crecimiento económico – Impulsos Respuestas a una desviación estructural estándar. Se presentan los cuantiles 10%, 40%, 50%, 60% y 90% de los impulso respuestas posteriores. ....	42
<b>Figura 2-6:</b> Régimen 2, Desaceleración económica - Respuestas de impulso a una desviación estructural estándar. Se presentan los cuantiles 10%, 40%, 50%, 60% y 90% de los impulso respuestas posteriores.....	42
<b>Figura B. 1:</b> Simulación coeficiente del rezago de la inflación en la ecuación de inflación .....	39
<b>Figura B. 2:</b> Simulación coeficiente del rezago del PIB en la ecuación de inflación .....	40
<b>Figura B. 3:</b> Simulación coeficiente del rezago de la DTF en la ecuación de inflación ...	40
<b>Figura B. 4:</b> Simulación coeficiente constante en la ecuación de inflación.....	41
<b>Figura B. 5:</b> Simulación coeficiente del rezago de la inflación en la ecuación del PIB ...	41
<b>Figura B. 6:</b> Simulación coeficiente del rezago del PIB en la ecuación del PIB .....	42
<b>Figura B. 7:</b> Simulación coeficiente del rezago de la DTF en la ecuación del PIB .....	42
<b>Figura B. 8:</b> Simulación coeficiente constante en la ecuación del PIB .....	43
<b>Figura B. 9:</b> Simulación coeficiente del rezago de la inflación en la ecuación de la DTF	43
<b>Figura B. 10:</b> Simulación coeficiente del rezago del PIB en la ecuación de la DTF .....	44
<b>Figura B. 11:</b> Simulación coeficiente del rezago de la DTF en la ecuación de la DTF ...	45
<b>Figura B. 12:</b> Simulación coeficiente constante en la ecuación de la DTF .....	45
<b>Figura B. 13:</b> Simulación varianza de la inflación .....	46
<b>Figura B. 14:</b> Simulación covarianza de la inflación y el PIB.....	47
<b>Figura B. 15:</b> Simulación covarianza de la inflación y la DTF .....	47

<b>Figura B. 16:</b> Simulación varianza del PIB.....	48
<b>Figura B. 17:</b> Simulación covarianza del PIB y la DTF.....	49
<b>Figura B. 18:</b> Simulación varianza del DTF .....	49
<b>Figura E. 1:</b> Respuesta de la Inflación ante un choque de la DTF .....	54
<b>Figura E. 2:</b> Respuesta del PIB ante un choque de la DTF .....	54
<b>Figura E. 3:</b> Respuesta de la DTF ante un choque de la DTF.....	55
<b>Figura E. 4:</b> Respuesta de la Inflación ante un choque de la Inflación .....	55
<b>Figura E. 5:</b> Respuesta del PIB ante un choque de la Inflación .....	56
<b>Figura E. 6:</b> Respuesta de la DTF ante un choque de la Inflación .....	56
<b>Figura E. 7:</b> Respuesta de la Inflación ante un choque del PIB .....	57
<b>Figura E. 8:</b> Respuesta del PIB ante un choque del PIB.....	57
<b>Figura E. 9:</b> Respuesta de la DTF ante un choque del PIB.....	58

## Lista de tablas

	<u>Pág.</u>
<b>Tabla 2-1:</b> Estadísticas básicas del crecimiento inflación anual sin alimentos, producto interno bruto y tasa de interés de depósitos a término fijo. Periodo 2001 – 2017 .....	36
<b>Tabla 2-2:</b> Selección de modelos – determinación del número de régimen y rezagos ...	37
<b>Tabla 2-3:</b> Comparación de la especificación de VAR con la especificación de MS-VAR a través de la Proporción de probabilidad posterior.....	38
<b>Tabla 2-4:</b> Comparación de la especificación de MSIAH(2)-VAR(1) con la especificación de MSIAH(3)-VAR(1) de la Proporción de probabilidad posterior .....	39
<b>Tabla 2-5:</b> Moda de las matrices de covarianza posterior $\Sigma_{st}$ para los cuatro regímenes estimados del modelo MSIAH (2) -VAR (1). .....	40
<b>Tabla 2-6:</b> Moda de la matriz posterior de probabilidades de transición P para el modelo MSIAH (2) - VAR (1).....	41

## Introducción

El análisis de la política monetaria y sus canales de transmisión resaltan el papel que juega la tasa de interés como el instrumento más utilizado para transmitir los efectos de política monetaria sobre la actividad económica. Estudios realizados por Taylor (1995), Christiano, Et. Al. (1996) y Clarida, Et. Al. (1999), muestran que de los canales de transmisión monetaria, el canal de la tasa de interés es el más significativo. Jalil y Lavan (2011) agrupan una serie de trabajos que evidencian la importancia de este canal en la economía colombiana.

El estudio de los canales de transmisión empieza con los trabajos pioneros de Sims (1980), Blanchard y Watson (1984), Bernanke y Blinder (1992) y Sims (1992), la característica común de estos trabajos es el uso de los modelos de Vectores Autorregresivos (VAR) para evaluar el impacto de la política monetaria sobre las variables macroeconómicas de una economía.

El modelo VAR ha sido ampliamente utilizado debido a su simplicidad, sin embargo, este ha sido criticado por varios autores. Kim y Roubini (2000) argumentan que estos modelos se consideran ad hoc en el sentido que no incorporan relaciones causales teóricamente fundamentadas. McCallum (1999), sostiene que estos modelos no sirven para estudiar los efectos de la política monetaria, pues es necesario imponer restricciones de carácter estructural en las ecuaciones del modelo. Diebold y Rudebusch (1996) resaltan que los modelos lineales como los VAR no son capaces de modelar todas las características de las series macroeconómicas, además destacan que modelos estadísticos no lineales, como los modelos de cambio de régimen, son consistentes con los diferentes modelos macroeconómicos.

Es importante tener en cuenta que las fluctuaciones macroeconómicas agregadas se caracterizan por períodos sucesivos de un alto crecimiento, seguidos por períodos

consecutivos de baja actividad, según Hansen y Prescott (1999) los ciclos económicos son asimétricos en la medida que las recesiones son más profundas que los booms. Este hecho estilizado trae la necesidad de modelar las series económicas con modelos que incorporen asimetrías en el ciclo económico.

Las preguntas sobre las asimetrías datan desde los inicios del estudio del ciclo económico (Mitchel 1927; Keynes 1936; Friedman 1964). Para explicar los efectos asimétricos de la política monetaria la teoría económica propone mecanismos basados en ajustes asimétricos de los precios, imperfecciones en los mercados financieros y rigideces reales. Esta teoría creó la necesidad de reemplazar las representaciones lineales, incapaces de capturar las asimetrías, por no lineales, las cuales son capaces de modelar relaciones económicas más complejas. Desde el punto de vista empírico, estos hechos han sido estudiados con modelos como los umbrales autoregresivos (Tsay 1989; Tong 1990; Terasvirta 1995) o los modelos Markov Switching (Hamilton 1989; Krolzig 1997; Diebold y Rudebusch 1996; Kim y Nelson 1998 y 1999b).

Diferentes estudios han mostrado efectos asimétricos para variables macroeconómicas en Colombia. Melo y Misas (1997) encuentran evidencia de cambios de régimen para la inflación, Misas y Ramírez (2007) hallan asimetrías en el ciclo del PIB durante el siglo XX. Otros trabajos como el de Salamanca (2010) analizan la existencia de ciclos asimétricos en Colombia, Venezuela y otros países de la región. Sin embargo, no existe ningún estudio que analice las asimetrías de los choques de política económica en las variables macroeconómicas en Colombia. El presente trabajo intenta cubrir este espacio utilizando la herramienta de Vectores Autoregresivos con Cadenas de Markov (MS-VAR)<sup>1</sup>.

Este trabajo tiene como objetivo principal estimar la dinámica de los choques de política monetaria derivados de un modelo VAR con cambio de régimen (MS-VAR), verificar si los choques asimétricos son importantes para explicar la dinámica de algunas variables

---

<sup>1</sup> En este trabajo, un modelo VAR estructural hace referencia a una representación lineal multivariante de un vector de variables observadas. La diferencia con el modelo VAR tradicional es que los economistas usan este concepto para aclarar que del modelo VAR tradicional se obtienen las funciones impulso respuesta de las variables mediante la imposición de suposiciones teóricas sobre el comportamiento de éstas variables. Siguiendo a Sims (1980), en este trabajo se utilizan restricciones de corto plazo, las cuales aplican la descomposición de Choleski para obtener los choques estructurales del modelo.

---

económicas, y con base en los resultados realizar recomendaciones de política. Para lograr cubrir estos objetivos la presente investigación se encuentra dividida en 4 partes, la primera es la presente introducción; en la segunda sección se presenta la metodología a usar; en la tercera parte se presenta la aplicación del método y por ultimo las conclusiones.

## Modelos Markov Switching VAR (MS-VAR(p))

MS-VAR son modelos no lineales, ligados a los modelos de vectores autorregresivos lineales y los modelos de cadenas ocultas de Markov. Krolzig (1997) analiza estos modelos en detalle desde su origen hasta su estimación.

### 1.1 Modelo con cambios de régimen en el intercepto, los coeficientes autorregresivos y matriz de varianzas y covarianzas (MSIAH – VAR)

Sea  $y_T = (y_1, \dots, y_T)'$  una serie temporal de T observaciones, donde cada  $y_t$  es un vector N-variable para  $t \in \{1, \dots, T\}$ . Se considera un modelo paramétrico de Markov en el cual el proceso estocástico  $y_T$  depende de las realizaciones de un proceso estocástico discreto oculto  $s_t$  con espacio de estados finitos  $\{1, \dots, M\}$  (ver Hamilton, 1989). Condicionado en el estado ( $s_t$ ) y las series de tiempo hasta el tiempo  $t - 1$  ( $y_{t-1}$ ),  $\epsilon_t$  sigue una distribución normal idéntica e independiente. Específicamente, se tiene que:

$$y_t = \mu_{s_t} + A_{s_t}^{(1)} y_{t-1} + \dots + A_{s_t}^{(p)} y_{t-p} + \epsilon_t \quad (1)$$

$$\epsilon_t | s_t \sim i. i. \mathcal{N}(0, \Sigma_{s_t}) \quad (2)$$

para  $t \in \{1, \dots, T\}$ .

Se fija un vector inicial de valores  $y_0 = (y_{p-1}, \dots, y_0)'$  para las primeras  $p$  observaciones de la base de datos.

Se supone que la variable  $s_t$  es una cadena de Markov aperiódica irreducible con  $\Pr(s_0 = i | P) = \pi_i$ , donde  $\pi_i = (\pi_1, \dots, \pi_M)'$  es la distribución ergódica del proceso Markov Switching (MS). Sus propiedades son descritas por la matriz de probabilidades de transición ( $M \times M$ ):

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1M} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M1} & p_{M2} & \dots & p_{MM} \end{bmatrix} \quad (3)$$

en el que un elemento,  $p_{ij}$ , denota la probabilidad de transición del estado  $i$  al estado  $j$ ,  $p_{ij} = P(s_{t+1} = j | s_t = i)$ . La suma de los elementos de cada fila de la matriz P suman la unidad,  $\sum_{j=1}^M p_{ij} = 1$ . Las ecuaciones (1) - (3) representan un modelo con cambios de

régimen en el intercepto (I), los coeficientes autorregresivos (A) y matriz de varianzas y covarianzas (H), con M estados y p rezagos (MSIAH(M)-VAR(p)).

### 1.1.1 Verosimilitud, prior y posterior

En esta sección se presenta algunas de las propiedades del modelo MSIAH(M)-VAR(p) en términos de su verosimilitud. También se describe la distribución a priori y a posteriori que se utilizan para realizar la estimación bayesiana.

- Función de verosimilitud<sup>2</sup>

Siguiendo a Frühwirth-Schnatter (2006), se define un vector  $\theta$  de tamaño k, vector que recoge los parámetros de la matriz de probabilidades de transición  $P$  y todos los parámetros estado dependientes del proceso VAR,  $\theta_{s_t}: \mu_{s_t}, A_{s_t}^{(i)}, \Sigma_{s_t}$ , para  $s_t \in \{1, \dots, M\}$  e  $i \in \{1, \dots, p\}$ . La función de verosimilitud es igual a la distribución de muestreo conjunta  $p(S_T, y_T | \theta)$  para todo el conjunto de información  $(S_T, y_T)$  dado el vector de parámetros  $\theta$ , donde  $S_T = (s_0, s_1, \dots, s_T)$ . Así la verosimilitud se puede escribir como:

$$p(S_T, y_T | \theta) = p(S_T | y_T, \theta) p(S_T | P) \quad (4)$$

Con parámetros  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_M, P)$ .

Se asume una función de distribución condicional Normal para  $\epsilon_t$ , donde  $t = 1, \dots, T$ , dados los estados,  $s_T$ , con una media igual a un vector de ceros y una matriz de varianzas y covarianzas  $\Sigma_{s_t}$ :

$$p(\epsilon_T | S_T, \theta) = \prod_{t=1}^T p(\epsilon_t | S_T, y_{t-1}, \theta) = \prod_{t=1}^T (2\pi)^{-k/2} |\Sigma_{s_t}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \epsilon_t' \Sigma_{s_t}^{-1} \epsilon_t\right\} \quad (5)$$

La anterior expresión parte del supuesto que el proceso de Markov sigue:

---

<sup>2</sup> Bajo un enfoque clásico, la estimación del modelo MSIAH(M)-VAR(P) consiste en maximizar la función de verosimilitud utilizando el algoritmo EM (ver Krolzig, 1997; Kim y Nelson, 1999b). Este algoritmo no se detallará en el presente trabajo, pues el análisis impulso respuesta del modelo MS-VAR requieren la simulación de la historia de los regímenes, por lo tanto, la inferencia Bayesiana resulta ser un enfoque más conveniente para este propósito (véase Frühwirth-Schnatter, 2006). Sin embargo, se deja una breve descripción del método en el apéndice A.

$$p(S_T|\theta) = p(S_0|P) \prod_{i=1}^M \prod_{j=1}^M p_{ij}^{N_{ij}(S_T)} \quad (6)$$

donde  $N_{ij}(S_T) = \#\{s_{t-1} = j, s_t = i\}$ , es el número de transiciones del estado  $i$  al estado  $j$ ,  $\forall i, j \in \{1, \dots, M\}$ .

Otra forma de ver la función de verosimilitud (4) es representarla como un producto de factores  $M + 1$ . Los primeros  $M$  factores dependen de los parámetros estado-específicos,  $\theta_{s_t}$ , y el restante depende de la matriz de probabilidades de transición,  $P$ :

$$p(S_T, y_T|\theta) = \prod_{i=1}^M \left( \prod_{t:s_t=i} p(y_t|S_T, y_{t-1}, \theta_i) \right) \prod_{i=1}^M \prod_{j=1}^M p_{ij}^{N_{ij}(S_T)} p(S_0|P) \quad (7)$$

- Distribución prior.

Se asume que la distribución a priori para los parámetros de cada estado y la matriz de probabilidades de transición son independientes. Agregar una distribución a priori permite al investigador incorporar conocimientos previos acerca de los parámetros estado específico del modelo,  $\theta_{s_t}$ , asumiendo que estos son independientes a los estados. La factorización de la verosimilitud (4) se mantiene conforme a la elección de una distribución a priori dada por:

$$p(\theta) = \prod_{i=1}^M p(\theta_i) p(P) \quad (8)$$

Para el modelo MSIAH-VAR ( $p$ ), se asume la siguiente especificación<sup>3</sup>. Cada fila de la matriz de probabilidades de transición,  $P$ , a priori sigue una distribución de Dirichlet  $M$ -variable<sup>4</sup>, con unos vectores de parámetros  $M \times 1$ ,  $e_m$ , para  $m \in \{1, \dots, M\}$ . Agrupando los

<sup>3</sup>Siguiendo a Droumaguet (2012), se asume que los estados de una economía son persistentes en el tiempo y no hay estados absorbentes, para más detalle consultar Kim y Nelson (1999a).

<sup>4</sup>Para lograr que cada fila de la matriz de probabilidad de transición  $P$  sume 1, se fija una distribución a priori Dirichlet  $M$ -variable, con parámetros establecidos en 1 para todas las probabilidades de transición, a excepción de los elementos diagonales  $p_{ij}$ , para  $i = 1, \dots, M$ , la cual se establece en un valor igual a 10. La distribución de Dirichlet se elige como la generalización multivariante de la distribución beta y es capaz de dibujar probabilidades de transición para un número de regímenes superior a dos.

vectores de parámetros en un vector  $M^2 \times 1$ ,  $e = (e'_1, \dots, e'_M)'$ . Además, los parámetros estado-dependientes del proceso VAR se definen en vectores:

$$\beta_{s_t} = \left( \mu'_{s_t}, \text{vec} \left( A_{s_t}^{(1)} \right)', \dots, \text{vec} \left( A_{s_t}^{(p)} \right)' \right)' \quad (9)$$

para  $s_t = 1, \dots, M$ . Por cada  $s_t \in \{1, \dots, M\}$ .

Siguiendo a Droumaguet (2012), se utilizará la prior de Litterman descrita inicialmente por Doan et al. (1983) y Litterman (1986). Bajo esta especificación  $\beta_{s_t}$  sigue una distribución a priori normal  $(N + pN^2)$ -variable, con un vector de medias igual a  $\mu_\beta = 0$  y una matriz de varianzas y covarianzas diagonal  $V_\beta$ . Los elementos en la diagonal de la matriz de varianzas y covarianzas  $V_\beta$ , están determinados por un conjunto de hiperparámetros  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, c)'$ , los cuales siguen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} & (\zeta_i \lambda_3)^2 \quad \text{para } A_{i,s_t}^{(0)}, \\ & \left( \frac{\lambda_1}{\exp(ck - c)} \right)^2 \quad \text{para } A_{ii,s_t}^{(k)}, \\ & \left( \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\exp(ck - c)} \frac{\zeta_i}{\zeta_j} \right)^2 \quad \text{para } A_{ij,s_t}^{(k)} \end{aligned}$$

para  $i, j = 1, \dots, N$  siendo  $i \neq j$  y  $k = 1, \dots, p$ .

La varianza de la distribución prior se obtiene con las varianzas de los residuos de los modelos autorregresivos de orden 17 de cada una de las variables  $(\zeta_i)$ , para  $i = 1, \dots, N$ . Esta distribución prior es la misma para todos los estados. El valor del hiperparámetro responsable de la reducción de los términos constantes,  $\lambda_3$ , se establece en 0.033, siguiendo a Robertson y Tallman (1999). El hiperparámetro global de contracción para los parámetros autoregresivos,  $\lambda_1$ , se establece en 0.3 como en Adolfson et al. (2007). El valor del hiperparámetro  $c$  se establece en -0.13412, siguiendo el patrón de Robertson y Tallman (1999). Finalmente, el valor de  $\lambda_2$  se establece en 1, para evitar que los parámetros fuera de la diagonal de las matrices autorregresivas sean mucho más pequeños que los parámetros diagonales.

Finalmente, la prior para la matriz de covarianza,  $\Sigma_{s_t}$ , se establecen como una distribución Whishart invertida como es estándar para las matrices de covarianza, el tratamiento de la prior sobre  $\Sigma_{s_t}$  sigue los lineamientos de Koop y Korobilis (2010). Los parámetros de la distribución son la escala y los grados de libertad, estos últimos fijos en  $N + 1$ .

Para resumir, la prior (8) toma la forma:

$$p(\theta) = \prod_{i=1}^M p(P_i) p(\beta_i) p(\Sigma_i), \quad (10)$$

donde cada una de las distribuciones prior se suponen:

$$\begin{aligned} P_i &\sim \mathcal{D}_M(1'_M + 9I_{M,i}) \\ \beta_i &\sim \mathcal{N}(\mu_\beta, V_\beta) \\ \Sigma_i &\sim \text{IW}(I_N, N + 1) \end{aligned}$$

Para  $i = 1, \dots, M$  y  $j, k = 1, \dots, N$ , donde  $j \neq k$ .  $1_M$  es un vector  $M \times 1$  de unos y  $I_{M,i}$  es  $i^{\text{th}}$  fila de una matriz de identidad  $I_M$ .

- Distribución posterior

La estructura de la función de verosimilitud (7) y la distribución prior (10) forma la distribución posterior, la cual es proporcional al producto de las dos densidades. La forma de la distribución posterior,  $p(\theta|S_T, y_T)$ , es la siguiente:

$$p(\theta|S_T, y_T) \propto \prod_{i=1}^M p(\theta_i|S_T, y_T) p(\mathbf{P}|S_T, y_T) \quad (11)$$

Descomponiendo la densidad posterior con la matriz de probabilidades de transición:

$$p(\mathbf{P}|S_T) \propto p(S_0|P) \prod_{i=1}^M \prod_{j=1}^M p_{ij}^{N_{ij}(S_T)} p(\mathbf{P}) \quad (12)$$

y la densidad posterior de los parámetros estado dependientes:

$$p(\theta_i|S_T, y_T) \propto \prod_{t:S_t=1} p(y_t|y_{t-1}, \theta_i) p(\theta_i) \quad (13)$$

La forma no estándar de la densidad posterior se trata con métodos numéricos, más específicamente, un algoritmo de Cadenas de Markov Monte Carlo (MCMC) (ver Casella y George, 1992). El algoritmo que se implementará es el muestreador de Gibbs, el cual se detalla a continuación.

### 1.1.2 Muestreador de Gibbs

A continuación se presenta la metodología MCMC para el muestreo de las distribuciones condicionales del modelo MSIAH-VAR. Se presenta cada paso, los cuales describen la distribución condicional de los elementos del vector de parámetro particionados. El vector de parámetros se divide en cuatro bloques:

- El vector de los estados latentes de la economía,  $S_T$
- Las probabilidades de transición,  $P$ ,
- Las matrices de covarianza dependientes del régimen,  $\Sigma_{s_t}$
- El vector de constantes dependientes del régimen y los parámetros autorregresivos,  $\beta_{s_t}$

Para cada bloque de parámetros se describe el método de iteración, en donde los símbolos  $l$  y  $l - 1$  hacen referencia a la iteración del método MCMC. Para la primera iteración se utiliza como parámetros iniciales los resultados provenientes del algoritmo de maximización de las expectativas (Krolzig, 1997).

- Muestras del vector de estados

La primera muestra corresponde al vector de estados. Siendo una variable latente, no hay restricciones a priori sobre  $S_T$ . Para obtener las muestras se usa el filtro de Hamilton (1989)<sup>5</sup>, a partir de éste se obtienen las probabilidades  $\Pr(s_t = i | y_T, \theta^{(l-1)})$ , para  $t = 1, \dots, T$  e  $i = 1, \dots, M$ , luego se extrae  $S^{(l)}$ , para la iteración  $l^{(th)}$  del algoritmo.

Los pasos del algoritmo de actualización de estados son:

1. Filtro BLHK: para más detalles de este filtro se puede consultar a Krolzig (1997). Este algoritmo realiza el proceso de filtrado y suavizado para las probabilidades del

<sup>5</sup> Un detalle de los filtros se encuentra en la Sección 11.2 de Frühwirth-Schnatter (2006)

régimen  $\xi_t$ . Donde,  $\xi_t$  denota las probabilidades de estar en el estado no observado del sistema.

$$\xi_t = \begin{bmatrix} \Pr(s_t = 1) \\ \vdots \\ \Pr(s_t = M) \end{bmatrix} \quad (14)$$

El filtro, introducido por Hamilton (1989), es un algoritmo iterativo que calcula las probabilidades filtradas, o el pronóstico óptimo  $\xi_{t+1|t}$  del valor de  $\xi_{t+1}$  con base en la información establecida en el tiempo t. El estado inicial  $\xi_{1|0}$  se inicializa con el vector ergódico de probabilidades  $\bar{\xi} = \pi$ , donde  $\pi$  satisface la ecuación  $P\pi = \pi$ . Este paso consiste en una recursión hacia adelante, es decir, para  $t = 1, \dots, T$ , se escribe como:

$$\hat{\xi}_{t+1|t} = \frac{P'(\eta_t \odot \hat{\xi}_{t|t-1})}{1'_M(\eta_t \odot P' \hat{\xi}_{t-1|t-1})} \quad (15)$$

donde  $\odot$  denota la multiplicación de la matriz por elemento a elemento y  $\eta_t$  es la colección de densidades M, definidas como:

$$\eta_t = \begin{bmatrix} \Pr(y_t | s_t = 1, y_{t-1}, \theta^{(l-1)}) \\ \vdots \\ \Pr(y_t | s_t = M, y_{t-1}, \theta^{(l-1)}) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Para hacer inferencia sobre los regímenes no observados y calcular las probabilidades suavizadas, se utiliza la información de la muestra completa, es decir, en el siguiente paso se incorpora la información de la muestra previamente rechazada  $\mathbf{y}_{t+1, \dots, T} = (y'_{t+1}, \dots, y'_T)'$  para la inferencia de  $\xi_t$ . Este paso es una recursión hacia atrás, para  $j = 1, \dots, M$ . El proceso se resume en la siguiente ecuación:

$$\hat{\xi}_{T-j|T} = [P(\hat{\xi}_{T-j+1|T} \oslash \hat{\xi}_{T-j+1|T-j})] \odot \hat{\xi}_{T-j|T-j} \quad (17)$$

donde  $\oslash$  denota la división de la matriz de elemento a elemento.

2. Usando la probabilidad suavizada  $\hat{\xi}_{T|T}$  como la distribución condicional para  $S_T | \mathbf{y}_T, \theta^{(l-1)}$ , se toman muestras de  $S_T$ .

3. Las distribuciones condicionales para  $s_t|s_{t+1}, y_T, \theta^{(l-1)}$  con  $t = T - 1, T - 2, \dots, 0$  estan dadas por:

$$\hat{\xi}_{t|t+1}|s_{t+1}, y_T, \theta^{(l-1)} = [P(\hat{\xi}_{t+1} \oslash \hat{\xi}_{t+1|t-j})] \odot \hat{\xi}_{t|t} \quad (18)$$

$s_t^{(l)}|y_T, \theta^{(l-1)}$  se extraen para todos los períodos,  $t = 1, \dots, T$ .

- Muestras de la matriz de probabilidades de transición

En el segundo paso del proceso MCMC, de la distribución posterior se muestrea la matriz de probabilidades de transición, condicionado en el estado muestreado en el paso anterior,  $P^{(l)} \sim (P|S_T^{(l)})$ .

Los pasos del algoritmo Metropolis-Hastings para la matriz de transición son<sup>6</sup>:

1.  $S_0 \sim \pi$ . El estado inicial se extrae de la distribución ergódica de P.
2.  $P_j \sim \mathcal{D}_M(n_{1,j} + b_{1,j}, \dots, n_{M,j} + b_{M,j})$  para  $j = 1, \dots, M$ .  $n_{i,j}$  corresponde al número de transiciones del estado  $i$  al estado  $j$ , contadas desde S. Las filas para la matriz de probabilidades de transición candidatas se muestrean a partir de una distribución de Dirichlet.
3.  $P^{new}$ , es la nueva matriz de probabilidades de transición.
4. Se acepta  $P^{new}$  si  $u < \frac{\pi^{new}}{\pi^{l-1}}$ , donde  $u \sim \mathcal{U}[0,1]$ .  $\pi^{new}$  y  $\pi^{l-1}$  son los vectores de las probabilidades ergódicas resultantes de la matriz de probabilidades de transición  $P^{new}$  y  $P^{l-1}$  respectivamente.

- Muestra de la matriz de covarianzas

En el tercer paso del muestreador de Gibbs, las posteriores para las matrices de varianzas

<sup>6</sup> Se supone que la matriz de probabilidades es irreducible, no existen estados absorbentes, se permite que todos los elementos de  $P_j$  tomen valores en el intervalo (0, 1) y su suma debe dar como resultado uno (para más detalles consultar Frühwirth-Schnatter(2006))

y covarianza del modelo,  $\Sigma_{s_t}$ , se extraen de una distribución inversa de Wishart, como se describe en Koop y Korobilis (2010).

A continuación se presenta los pasos del algoritmo para obtener las muestras de las matrices de varianzas y covarianza estado – dependientes:

1.  $\Sigma_i | y_T, S_T, P, \beta \sim IW(\bar{S}_i, \bar{v}_i)$ , para los regímenes  $i = 1, \dots, M$ . Se realiza la muestra de  $\Sigma_i$  con la distribución posterior condicional-Wishart siguiendo:

$$\bar{S}_i = \underline{S} + \sum_{t:s_t=i} \left( y_t - A_i^0 - \sum_{j=1}^p A_i^{(j)} y_{t-j} \right) \left( y_t - A_i^0 - \sum_{j=1}^p A_i^{(j)} y_{t-j} \right)' \quad (19)$$

y

$$\bar{v}_i = T_i + \underline{v} \quad (20)$$

- Muestras del vector de parámetros autorregresivos

El procedimiento consiste en estimar todos los coeficientes de regresión simultáneamente apilándolos en  $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_M)$ , donde  $\beta_0$  es un parámetro de regresión común para cada régimen. El modelo de regresión está escrito como:

$$y_t = Z_t \beta_0 + Z_t D_{i,1} \beta_1 + \dots + Z_t D_{i,M} \beta_M + \varepsilon_t \quad (21)$$

$$\varepsilon_t \sim i.i. \mathcal{N}(0, \Sigma_{s_t})$$

M variables dicotómicas  $D_{i,s_t}$  se utilizan. Toman el valor 1 cuando el régimen ocurre y 0 en otro caso. También se debe realizar una transformación de los regresores  $Z_t$ , estos serán de la siguiente forma:

$$Z_t = \text{diag}(z_{1,0,t}, \dots, z_{N,0,t}, z_{1,1,t}, \dots, z_{N,1,t}, \dots, z_{1,M,t}, \dots, z_{N,M,t}) \quad (22)$$

Donde  $z_{n,s_t,t}$  corresponde al vector fila de  $1 + Np$  variables independientes para la ecuación  $n$ , en el estado  $s_t$  y en el tiempo  $t$ . Es decir,  $z_{n,s_t,t}$  es un vector que contiene la  $t^{th}$  observación del vector explicativo de la  $m^{th}$  variable en el estado  $s_t$ . Observe que si

fijamos  $z_{n,s,t} = (1, y'_{t-1}, \dots, y'_{t-p})'$  para  $m = 1, \dots, M$  en cualquier estado se obtienen un modelo VAR tradicional<sup>7</sup>.

A continuación se presenta los pasos del algoritmo para obtener las muestras de los parámetros autorregresivos:

1. Para todo  $Z_{t,s}$  se impone la restricción de que  $z_{n,s,t}$  sea igual a cero.
2.  $\beta | y_T, S_T, P, \sigma, R \sim \mathcal{N}(\bar{\beta}, \bar{V}_\beta)$ . Se obtiene una muestra de  $\beta$  de la distribución posterior condicional, dados los siguientes parámetros:

$$\bar{V}_\beta = \left( V_\beta^{-1} + \sum_{t=1}^T Z_t' \Sigma_{s_t}^{-1} Z_t \right)^{-1} \quad (23)$$

y

$$\bar{\beta} = \bar{V}_\beta \left( \sum_{t=1}^T Z_t' \Sigma_{s_t}^{-1} Z_t \right) \quad (24)$$

### 1.1.3 Función Impulso Respuesta (FIR)

Antes de presentar la metodología de la función de impulso respuesta generalizada (GIRF) se presenta una revisión de la literatura para identificar el estado del arte de esta metodología.

Una herramienta del estudio de la macroeconomía es la función impulso respuesta generalizada, esta herramienta permite estudiar el comportamiento de un sistema de variables cuando son golpeadas por choques externos. En el caso de los modelos no lineales el desarrollo de esta herramienta ha sido ampliamente estudiado en los modelos TAR. En estos últimos modelos los impulsos respuesta estudian tres tipos de características; (i) el estado del sistema en el cual el shock ocurre (ii) el tamaño del shock y (iii) el signo del shock (Potter 1995; Weise 1999; Van Dijk y Franses 2007).

<sup>7</sup> Para más detalle consultar a Koop y Korobilis (2010)

Por otro lado, el desarrollo de los GIRF en los modelos MS-VAR es más reciente. Para este tipo de modelos la investigación se ha desarrollado en dos frentes. El primer camino consiste en calcular las funciones impulso respuestas bajo especificaciones muy simples y su objetivo era analizar el comportamiento de las variables ante cambios en régimen (Krolzig y Toro 2001; Atist, Krolzig y Toro (2004)).

La segunda rama de estudio inicia con el trabajo de Ehrmann, Ellison y Valla (2003). En su trabajo los autores proponen un análisis de la función impulso respuesta condicionado en el régimen, asumiendo que no hay cambio de régimen después del choque. Dada la simplicidad, esta ha sido una de las metodologías más usadas en la literatura, sin embargo, no se diferencia de las funciones impulso respuesta de los modelos lineales. Es importante aclarar que, a pesar de examinar asimetrías, estas funciones impulsos respuesta se comportan como los tradicionales, en el sentido que depende del tamaño y signo del choque.

Debido a que los modelos MSIAH-VAR pertenecen a la familia de modelos no lineales y dado que en estos modelos existe una variable latente que representa el estado de la economía en el sistema, el análisis de la función impulso respuesta está sujeto a algunas limitaciones dentro del enfoque clásico. En los trabajos realizados por en Ehrmann et al. (2003) y Krolzig (2006), donde derivan las funciones impulso respuestas de los modelos MS-VAR, no resolvieron el problema de los intervalos de confianza, lo que dificulta la inferencia estadística de las FIR. Para resolver estos problemas se propone un enfoque bayesiano.

Rubio Et. Al. (2005) desarrollaron una primera aproximación de la GIRF bayesiana para un modelo MSIAH-VAR<sup>8</sup>. Más adelante Droumaguet (2012) propone una metodología Bayesiana para la estimación de las funciones impulso respuesta. La metodología propuesta por Droumaguet (2012) trae varias ventajas:

- Se puede derivar la función impulso respuestas simulando los cambios de régimen a lo largo del horizonte de propagación.
- Resuelve el problema de los intervalos de confianza, porque por medio de los métodos de simulación bayesianos se obtienen as densidades de los parámetros.

---

<sup>8</sup> Véa Sims y Zha (2006) para una aplicación.

- Se puede realizar la selección del mejor modelo usando las densidades marginales derivadas de las especificaciones posteriores.
- Las técnicas Bayesianas permiten la estimación de modelos con mayor dimensión.
- Droumaguet (2012) propone una FIR para un modelo MSIAH-VAR con probabilidades de transición fijas que cumplen con los requerimientos de Koop, Pesaran & Potter (1996)<sup>9</sup>.

Dadas las ventajas y la sencillez de la metodología, el presente trabajo utilizará la metodología desarrollada por Droumaguet (2012).

#### 1.1.4 Función Impulso Respuesta Generalizada

El análisis de la función impulso respuesta consiste en un experimento contra factual, se asigna un choque a una variable del sistema y se estudia la propagación de éste sobre todas las variables del sistema a lo largo del tiempo. Para eliminar cualquier correlación instantánea entre el shock -y hacerlos interpretables en la teoría económica- se ortogonalizan los impulso respuesta. En econometría se habla de identificación estructural, donde existen unos residuales de forma reducida,  $u_t$ , que se convierten en residuos estructurales,  $\epsilon_t$ , usando una transformación que involucra a una matriz,  $B_{s_t}$ , definida como:

$$B_{s_t} B'_{s_t} = \Sigma_{s_t} \quad (25)$$

Para realizar la ortogonalización de la función impulso respuesta dados por la ecuación (25), este documento se concentra en la popular descomposición de Cholesky de  $\Sigma_{u_{s_t}}$ , ya

<sup>9</sup> Las especificaciones de Koop, Pesaran & Potter (1996) son:

- La dinámica del modelo no lineal y los parámetros son conocidos.
- Un shock  $\epsilon_t = [I_N]_{(.,k)}$  ocurre en el momento t. Y de otra forma  $\epsilon_{t+h} = 0_{(N,1)}$   $h \in \{1, \dots, H\}$
- Dependencia en las condiciones iniciales: una submuestra  $y_{t-p,t-1}^a$   $a \in \{1, \dots, A\}$  es obtenida de los datos como condición inicial, para las cuales se asocia unas probabilidades de los regímenes  $P(s_t^a = j | y_{1:t}^a; \theta)$ . Para evaluar las asimetrías, las condiciones iniciales pueden ser obtenidas por regímenes considerados, es decir en las sub muestras seleccionadas usar una regla tal que  $j = \operatorname{argmax}_{i \in \{1, \dots, S\}} P(s_t^a = i | y_{1:t}^a; \theta)$ .
- Dependencia en el futuro: B secuencias de los choques futuros  $w_{t+h}^b$  ( $h \in \{1, \dots, H\}$ ,  $b \in \{1, \dots, B\}$ ) golpean el sistema en cada momento t. La dependencia en futuros regímenes implica, que si los regímenes son modelados por una cadena de Markov, B secuencias  $w_{t+h}^b$  ( $h \in \{1, \dots, H\}$ ,  $b \in \{1, \dots, B\}$ ) iid  $U(1,0)$  son usados para extraer las muestras.

que permite estimar modelos de formas reducidas que son más convenientes de manejar en términos computacionales (Droumaguet, 2012).

A continuación, se definen las funciones impulso respuesta y las especificidades de su uso dentro de un modelo MSIAH-VAR.

- Función impulso respuesta para MSIAH-VAR

Si bien el marco conceptual para las funciones impulso respuesta para los modelos de vectores autorregresivos están bien descritos en la literatura (Véase Lütkepohl, 2008), en el caso de los modelos MSIAH-VAR está menos cubierto. Un buen punto de partida para describir las funciones impulso respuestas es el trabajo de Koop et al. (1996)<sup>10</sup>. Formalmente, para un horizonte de tiempo  $h$ , un impulso respuesta generalizado está dado por una perturbación  $\nabla_{\epsilon}$  que impacta al sistema en el tiempo  $t$ , y se escribe como:

$$GIR_{\nabla_{\epsilon}}(h) = E[y_{t+h} | \mathbf{S}, \mathbf{y}, \nabla_{\epsilon} + \epsilon_t] - E[y_{t+h} | \mathbf{S}, \mathbf{y}, \epsilon_t] \quad (26)$$

donde la respuesta  $GIR_{\nabla_{\epsilon}}(h)$  depende de la historia del régimen  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{S} = (s_1, s_2, \dots, s_T)'$ , es decir, se analiza la respuesta dependiendo en qué estado está el sistema en el momento del impacto.

- La propuesta Bayesiana<sup>11</sup>

Basados en Droumaguet (2012), el procedimiento para obtener las densidades posterior de la función impulso respuesta de los modelos MSIAH-VAR es sencilla. A continuación, se describe la forma de obtener la función usando las simulaciones del modelo obtenidas por el muestreador de Gibbs.

---

<sup>10</sup> Las funciones impulso respuesta tradicionales y generalizadas difieren en que las últimas tratan la función de impulso respuesta como una variable aleatoria. Una respuesta de impulso generalizada se mide como la diferencia entre las expectativas condicionales del modelo después de un choque y la expectativa condicional del modelo sin ningún choque.

<sup>11</sup> Las funciones impulso respuesta Bayesianos para modelos VAR se describen en Ni et al. (2007).

Se define la función de impulso respuesta para el modelo de vectores autorregresivos Markov-Switching  $IR_{(\nabla_\epsilon, s_0, t)}$ , como la respuesta del sistema en el horizonte  $t$  ante un choque  $\nabla_\epsilon$ , impactando al sistema que está en el régimen  $s_0$  en el tiempo  $t$ :

$$IR_{(\nabla_\epsilon, s_0, t=0)} = B_{s_0} \nabla_\epsilon \quad (27)$$

$$IR_{(\nabla_\epsilon, s_0, t=h)} = \sum_{i=1}^p A_{(s_h)}^{(i)} IR_{(\nabla_\epsilon, s_0, t=h-p)} \quad (28)$$

$h = 1, 2, \dots$ . Nótese que  $IR_{(\nabla_\epsilon, s_0, t=h)}$  en la ecuación (28), aunque no está marcado explícitamente en la notación, también depende de  $s_1, \dots, s_h$ .

Se define  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$  como el vector de tamaño  $k$  que contiene los parámetros de la matriz de probabilidades de transición  $P$ , y los parámetros estado-dependientes del proceso VAR,  $\theta_{s_t}: \mu_{s_t}, A_{s_t}^{(i)}, \Sigma_{s_t}$ , con  $s_t \in \{1, \dots, M\}$  e  $i \in \{1, \dots, p\}$ . La función impulso respuesta (27)-(28) es una función de los parámetros del modelo,  $\theta$ , y el choque inicial,  $\nabla_\epsilon$ . Este hecho se puede denotar como:

$$\mathbf{IR}(\theta; \nabla_\epsilon) = (IR_{(\nabla_\epsilon, s_0, t=0)}, IR_{(\nabla_\epsilon, s_0, t=1)}, \dots, IR_{(\nabla_\epsilon, s_0, t=h)})' \quad (29)$$

La expresión (29) agrupa un conjunto de funciones impulso respuesta en el período  $t = 0, 1, \dots, h$ . Finalmente, se supone un vector  $S^+ = (s_1, \dots, s_h)'$ , como el vector columna  $h \times 1$  de realizaciones del proceso oculto de Markov para los períodos  $t = 1, 2, \dots, h$ .

- Distribución posterior para la función impulso respuesta

La densidad condicional posterior de la función impulso respuesta, dado el conjunto de información, el estado inicial de la economía y el choque inicial, se define como:

$$p(\mathbf{IR}(\theta; \nabla_\epsilon) | s_0; y_T) \quad (30)$$

Observe que  $\mathbf{IR}(\theta; \nabla_\epsilon)$  depende de un vector del choque inicial,  $\nabla_\epsilon$ , el estado en el período  $t = 0, s_0$ , los parámetros del modelo,  $\theta$ , y los estados pronosticados de la economía,  $S^+$ . Sin embargo, siguiendo el lineamiento de Droumaguet (2012), El análisis de la función impulso respuesta para los modelos MSIAH-VAR es condicionar la IRF únicamente en  $s_0$ .

Por lo tanto, la densidad posterior de la IRF debe construirse integrando los estados futuros,  $S^+$ . Con esta consideración, la función impulso respuesta queda definida por la siguiente ecuación:

$$p(\mathbf{IR}(\theta; \nabla_\epsilon) | \nabla_\epsilon, s_0; y_T) = \int p(\mathbf{IR}(\theta; \nabla_\epsilon) | S^+, s_0; y_T) p(S^+ | s_0; \theta) dS^+ \quad (31)$$

- Simulación de los estados futuros de la economía,  $S^+$

Sea  $\theta^{(l)}$  una muestra extraída de la distribución posterior  $p(\theta | y_T)$ . La distribución de los estados futuros,  $S^+ = (s_1, \dots, s_h)$ , condicionada a la realización inicial del proceso oculto de Markov,  $s_0$ , y los parámetros del modelo,  $\theta^{(l)}$ , tiene la forma:

$$p(S^+ | s_0; \theta) = p(s_h | s_{h-1}, \theta^{(l)}) p(s_{h-1} | s_{h-2}, \theta^{(l)}) \dots p(s_2 | s_1, \theta^{(l)}) p(s_1 | s_0, \theta^{(l)}) \quad (32)$$

Cada una de las distribuciones utilizadas en el lado derecho de la ecuación anterior es la  $m^{th}$  fila de la matriz de probabilidades de transición dadas por  $s_{j-1} = m$ :

$$p(s_j | s_{j-1} = m, \theta^{(s)}) = P_m^{(s)} \quad (33)$$

- Simulación de la densidad posterior dadas por la expresión (31)

Dada la muestra extraída de la distribución posterior de los parámetros,  $\theta^{(l)}$ , se calculan las muestras de la distribución asociada a la FIR, para obtener la expresión (31) se siguen los siguientes pasos:

1. Dado  $s_0 = m$ , se realiza una muestra  $s_j$  recursivamente para  $j = 1, \dots, h$  para  $p(s_j | s_{j-1}^{(l)}, \theta^{(l)})$ , se obtienen las muestras obteniendo las simulaciones  $\{s_1^{(l)}, \dots, s_h^{(l)}\}$ .
2. Dadas  $\nabla_\epsilon, \theta^{(l)}$  y  $s_1^{(l)}, \dots, s_h^{(l)}$ , se calcular:  $IR_{(\nabla_\epsilon, s_0, t)}$  para  $t = 0, 1, \dots, h$ , obteniendo una muestra extraída de la distribución posterior para la expresión (31)

$$\{\mathbf{IR}(\theta; \nabla_\epsilon)^{(l)}\}$$

Repitiendo el proceso del muestreador de Gibbs, se calcula la distribución posterior de la función impulso respuesta. Este proceso resulta útil por:

1. Integración sobre los regímenes: Se tiene en cuenta la simulación de los regímenes para la función impulso respuesta.
2. Intervalos de confianza para las funciones impulso respuestas: el resultado de las simulaciones son muestras posteriores de la función impulso respuesta. Esto hace factible la inferencia sobre las FIR.
3. Selección de modelos: bajo la estimación bayesiana, a través de la estimación de densidades marginales, se permite discriminar adecuadamente entre modelos con diferentes regímenes y diferentes rezagos. La densidad marginal de los datos se calcula con el método de la media armónica modificada (MHM) de Geweke (1999).
4. Reducción bayesiana: Finalmente, la estimación bayesiana, al incluir una distribución prior, puede ayudar a eludir la maldición de la dimensionalidad.

Es importante mencionar, la estimación bayesiana a través del muestreo MCMC tiene el precio de alta carga computacional, también es importante mencionar la dependencia del resultado en la distribución prior utilizada. Este último tema no se trabaja en el artículo y podría ser tema de investigación en futuros trabajos.



## **Aplicación del Modelo a Variables Económicas Colombianas**

Esta sección tiene como objetivo aplicar la metodología presentada a variables macroeconómicas colombianas, buscando específicamente la identificación de las funciones impulso respuesta. El efecto de la política monetaria sobre la actividad económica es un tema que ha sido ampliamente abordado en los últimos años (Christiano Et. Al, (2001), Canzoneri y Henderson (1991), Mishkin F (1995) y Rabin A.A. and Jeager L.B. (1997)).

La política monetaria en Colombia se conduce bajo un esquema de inflación objetivo y su fin primordial es disminuir y estabilizar las tasas de inflación, buscando la estabilidad del producto alrededor de su tendencia de largo plazo. Para cumplir con estos objetivos el banco central toma decisiones asociadas a la tasa de interés de política monetaria, estas medidas se ven limitadas por los efectos que tienen las tasas de interés en la dinámica de la inflación. Por lo tanto, un adecuado estudio del impacto de las tasas de interés en la dinámica del PIB y la inflación se hace necesario para la eficiente toma de decisiones en política monetaria.

Taylor (1995), Christiano, Et. Al. (1996) y Clarida, Et. Al. (1999), muestran que el impacto que tienen las tasas de interés impacta significativamente al PIB y la Inflación. Jalil y Lavan (2011) compilan una serie de trabajos que validan este mismo hecho en la economía colombiana.

La herramienta estadística más utilizada dentro de estos trabajos son los modelos VAR, esto implica que los autores asumen a priori características lineales en las series de tiempo utilizadas. Este hecho es cuestionable, al menos en el caso Colombiano, pues se ha demostrado efectos asimétricos en sus datos macroeconómicos (Melo y Misas (1997), Misas y Ramírez (2007), Zarate et al (2013) y Salamanca (2010)). Este último encuentra

no-linealidad en el crecimiento real de la economía colombiana, halla la presencia de estados caracterizados por escenarios de crecimiento moderado y recesiones, estas características implican que es necesario modelar las series económicas con modelos no lineales.

## 2.1 Base de datos

Se trabajará con una base de datos que tiene periodicidad trimestral desde enero de 2000 hasta Julio de 2017. La base contiene datos el crecimiento del Producto Interno Bruto (PIB), la inflación anual sin alimentos y la Tasa de Interés de depósitos a término fijo de 90 días. Con estos datos se estimarán modelos VAR y MSIAH-VAR, el ordenamiento de las series sigue los lineamientos de Eichenbaum y Evans (1995) y Christiano, Et. Al. (2005)<sup>12</sup>.

Este conjunto de datos hace parte de los principales indicadores económicos colombianos para la toma de decisiones de política monetaria. Esta información es usada por el banco central para contextualizar los pronósticos y fijar las metas de inflación. Algunos hechos históricos relevantes para entender el comportamiento de los datos son: durante los años noventa se dio el proceso de apertura y liberalización comercial y financiera, estos hechos afectaron el desempeño macroeconómico y posiblemente modificaron la relación entre las variaciones del producto y la inflación; con la independencia del banco central en 1991 se empezaron establecer metas de inflación, desde entonces se empezó con proceso de reducción de la inflación, la cual se redujo de 32.4% en 1990 a valores cerca del 3% en los últimos años; adicionalmente, en este periodo de tiempo Colombia se ha enfrentado a dos crisis económicas muy importantes, la de 1991 y 2008.

**Figura 2-1:** Inflación anual sin alimentos. Periodo Enero 2000 – Julio 2017.

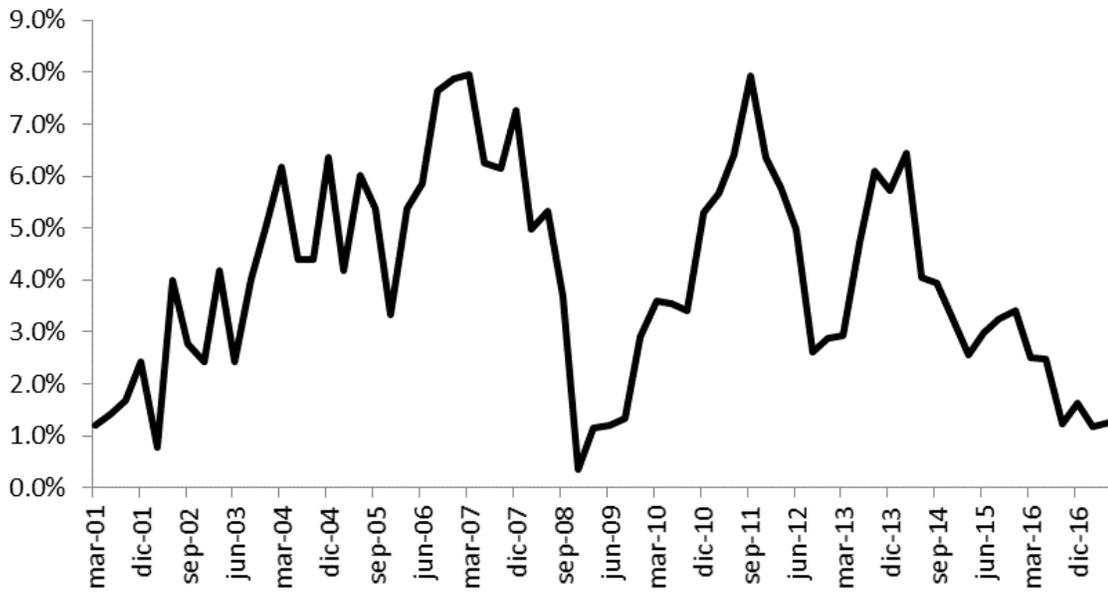
---

<sup>12</sup> Los modelos se estimarán con el siguiente ordenamiento (Ordenadas desde la variable más endógena a la más exógena): IPC, PIB y Tasa de Interés de los CDT 90 días, con ese ordenamiento se evita el “acertijo de los precios” (Eichenbaum y Evans (1995)). Es decir, se evita el resultado de otros modelos VAR, donde los precios se incrementarían significativamente luego de un alza en la tasa de interés.



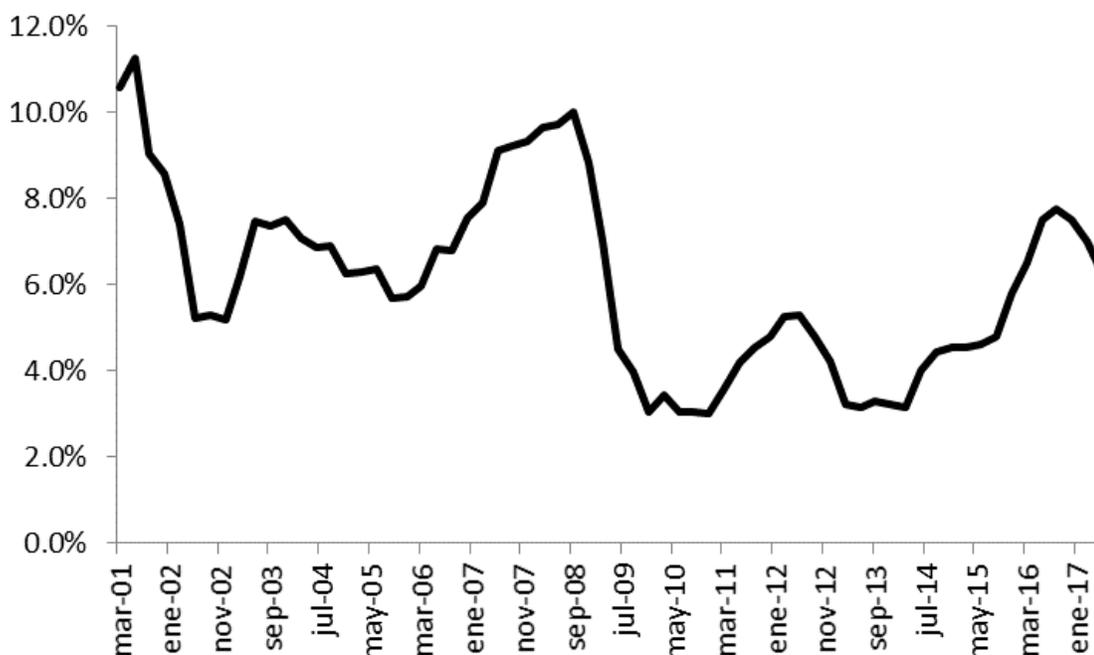
Fuente: Banco de la Republica

**Figura 2-2:** Producto interno bruto. Periodo Enero 2000 – Julio 2017.



Fuente: Banco de la Republica

**Figura 2-3:** Tasa de Interés de depósitos a término fijo 90 días. Periodo Enero 2000 – Julio 2017.



Fuente: Banco de la Republica

**Tabla 2-1:** Estadísticas básicas del crecimiento inflación anual sin alimentos, producto interno bruto y tasa de interés de depósitos a término fijo. Periodo 2001 – 2017

	Media	Mediana	Desviación estándar	Mínimo	Máximo
<b>Inflación</b>	4.49	4.88	1.50	2.14	6.96
<b>PIB</b>	4.03	3.97	2.00	0.35	7.96
<b>DTF</b>	6.09	6.08	2.13	3.02	11.25

En el periodo analizado se observa que el promedio histórico de la inflación anual sin alimentos es cercana a 4.5%, este dato se ubica por encima de la meta de inflación del Banco de la República. El crecimiento medio del PIB es cercano al 4.03%, este valor se puede entender como el PIB potencial, valores por encima de este crearían presiones inflacionarias de demanda y por debajo de este desalentaría el crecimiento de precios de la economía. Finalmente, el valor medio de la DTF es cercano al 6.1%, este valor indicaría

que a tasa de interés real de la economía es cercano al 1.5%, valores por debajo de éste alentarían el crecimiento en precios y por encima frenaría la aceleración de la inflación<sup>13</sup>.

## 2.2 Evidencia a favor de modelos con cambio de régimen

La primera pregunta que surge del análisis de los datos es sí dentro del periodo de tiempo establecido, las variables económicas han presentado algún tipo de cambio estructural. En el marco Bayesiano (elegido para este estudio), los cambios estructurales se modelan a través del modelo MSIAH-VAR. Bajo este contexto las pruebas de no linealidad se reducen a comparar modelos que exhiben las características presentadas en el modelo MSIAH-VAR con un modelo lineal VAR. De esta forma se pretende comparar las densidades marginales de los datos de cada modelo. El procedimiento a aplicar es el siguiente:

**Paso 1: Se especifica los modelos VAR y MSIAH-VAR.** Se elige el orden del proceso VAR,  $p \in \{1, \dots, p_{max}\}$ , y el número de estados,  $M \in \{1, \dots, M_{max}\}$ , para el proceso MSIAH-VAR usando las densidades marginales de los datos.

**Paso 2: Se compara los modelos lineales contra los modelos no lineales.** Se compara el modelo VAR lineal frente al MSIAH-VAR no lineal utilizando los “*Posterior Odds Ratios*” de acuerdo con la escala propuesta por Kass y Raftery (1995).

**Tabla 2-2:** Selección de modelos – determinación del número de régimen y rezagos

Rezagos	1	2	3	4	5	6
<b>VAR</b>	-1839	-1837	-1814	-1797	-1780	<b>-1763</b>
<b>2 regímenes</b>	<b>-1496</b>	-1691	-1883	-2084	-2321	-2513
<b>3 regímenes</b>	<b>-1572</b>	-1846	-2138	-2461	-2862	N.A.

La Tabla 2-2 muestra la densidad marginal a posteriori de datos para los diferentes modelos, esta estadística se calcula usando la media armónica modificada (Frühwirth-Schnatter (2006)). Se estiman modelos VAR (p) y MSIAH (m) -VAR (p) asumiendo

<sup>13</sup> Realizando la prueba de Dickey Fuller Aumentada se observó que la Inflación sin alimentos, el crecimiento del PIB y la tasa DTF son variables estacionarias.

diferentes números de regímenes,  $m = 2,3$  y diferentes longitudes de rezagos  $p = 1,2, \dots, 6$ . Para los modelos VAR, cada uno de los algoritmos de Gibbs es inicializado usando las estimaciones derivadas del método de mínimos cuadrados ordinarios del modelo correspondiente. Para los modelos MSIAH-VAR, cada algoritmo de Gibbs es inicializado usando las estimaciones del algoritmo “*Expectation Maximization*” del modelo correspondiente<sup>14</sup>. Luego sigue un periodo de calentamiento de 1.000 iteraciones y, después de la convergencia de la muestra, se realiza 10.000 iteraciones para obtener la distribución posterior. El modelo de mejor rendimiento en general es el MSIAH (2) -VAR (1) con 2 regímenes y 1 rezagos para los coeficientes autor regresivos. Se observa que cuando más rezagos hay para el modelo VAR mejor son sus resultados, sin embargo, esto hecho se revierte después del rezago 13, a partir de este punto el modelo no mejora. Los mejores modelos MSIAH-VAR son el MSIAH (2) -VAR (1) y MSIAH (3) -VAR (1), mientras que el mejor modelo VAR es el modelo VAR(13)<sup>15</sup>.

**Tabla 2-3:** Comparación de la especificación de VAR con la especificación de MS-VAR a través de la Proporción de probabilidad posterior

Hipótesis	$\ln p(y_T   \mathcal{M}_j)$	$\ln \mathcal{B}_{j0}$
$\mathcal{H}_0$ : Modelo lineal		
VAR(13)	-1715	0
$\mathcal{H}_1$ : Modelo no lineal con cambio de régimen en todos los parámetros del modelo		
MSIAH(2)-VAR(1)	-1496	125.0

La Tabla 2-3 presenta los resultados de las pruebas del mejor modelo VAR lineal frente al mejor modelo MSIAH-VAR. Expresado en logaritmos, los posterior odds ratio, indican un resultado a favor del modelo MSIAH(2)-VAR(1) igual a 125, que en la escala de

<sup>14</sup> Véase el apéndice 1. Algoritmo EM

<sup>15</sup> El mejor modelo VAR resulta ser uno con rezago 13, el valor de la media armónica modificada es de -1715.

interpretación de Kass y Raftery (1995) corresponde a una evidencia muy fuerte a favor del modelo con propiedades de cambio de régimen.

El mejor modelo VAR, el VAR(13), resulta ser mejor que la mayoría de los modelos MSIAH-VAR. Los únicos modelos no lineales que logran ser mejores que el modelo lineal son el modelo MSIAH (2) -VAR (1), MSIAH (3) -VAR (1) y MSIAH (2) -VAR (2).

**Tabla 2-4:** Comparación de la especificación de MSIAH(2)-VAR(1) con la especificación de MSIAH(3)-VAR(1) de la Proporción de probabilidad posterior

Hipótesis	$\ln p(y_T   \mathcal{M}_j)$	$\ln \mathcal{B}_{j0}$
<i>H0:</i> Modelo no lineal con cambio de régimen en todos los parámetros del modelo		
MSIAH(3)-VAR(1)	-1572	0
<i>H1:</i> Modelo no lineal con cambio de régimen en todos los parámetros del modelo		
MSIAH(2)-VAR(1)	-1496	76.0

El resto del documento se concentra en el estudio del modelo MSIAH(2)-VAR(1), pues según el análisis de las densidades marginales y la escala de Kass y Raftery (1995), este modelo resulta ser mejor que los demás. Por adicionar otro ejemplo, al comparar el modelo MSIAH(3)-VAR(1) contra el modelo MSIAH(2)-VAR(1), los “Posterior Odds Ratios” indican un resultado a favor del último, por un valor igual a 76, este valor en la escala de interpretación de Kass y Raftery (1995) señala una evidencia fuerte a favor del modelo MSIAH(2)-VAR(1).

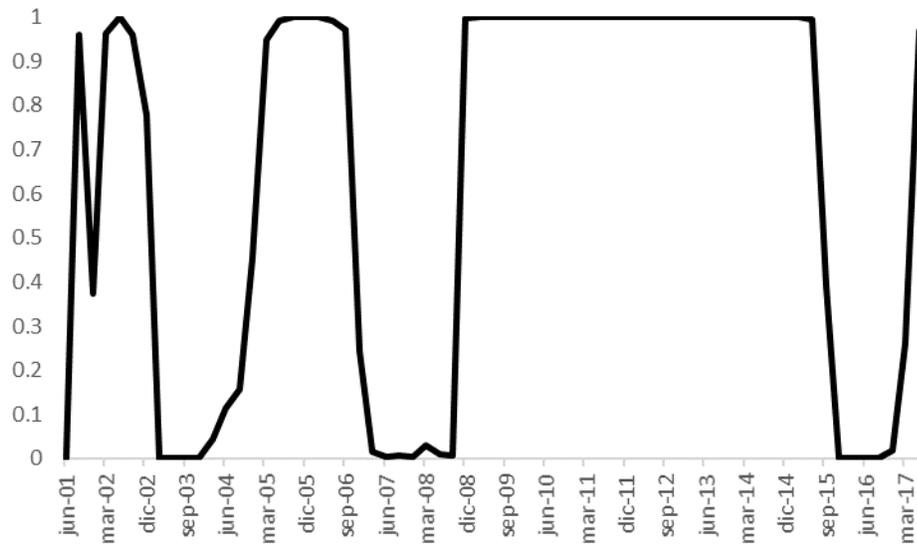
La siguiente subsección examina de cerca las probabilidades posteriores de los regímenes para el MSIAH (2) -VAR (1) e intenta caracterizar los regímenes observando sus características.

### 2.3 Análisis de los Regímenes del modelo seleccionado MS-VAR

La primera salida de la muestra de Gibbs que es interesante observar son las probabilidades del régimen. Después de la selección del modelo, se inicia una estimación más grande para la muestra de Gibbs, con 10000- iteraciones de inicio y 50000-iteraciones

para calcular las densidades posteriores. En la Figura 2-4 se muestra las probabilidades estimadas del régimen uno derivadas del modelo seleccionado MSIAH (2) -VAR (1).

**Figura 2-4:** Probabilidades estimadas para la variable latente asociada al régimen 1 del modelo MSIAH (2) - VAR (1).



Como indica la línea de tiempo de la Figura 2-4, probabilidades cercanas a 1 para el régimen 1 coincide con los escenarios en los que la economía colombiana no presenta escenarios de desaceleración en el crecimiento económico. Esto indica que los regímenes estudiados se pueden entender como periodos de crecimiento económico sostenido (Estado 1) y desaceleración económica (Estado 2).

**Tabla 2-5:** Moda de las matrices de covarianza posterior  $\Sigma_{s_t}$  para los cuatro regímenes estimados del modelo MSIAH (2) -VAR (1).

		Crecimiento		
		Inflación	del PIB	DTF
Régimen 1	Inflación	8.6E-06		
	Crecimiento del PIB	4.4E-06	1.1E-02	
	DTF	4.6E-07	7.1E-05	2.7E-05
Régimen 2	Inflación	9.1E-06		
	Crecimiento del PIB	1.1E-05	1.2E-02	
	DTF	2.3E-06	3.5E-04	2.8E-05

La tabla 2-5 muestra las matrices de varianzas y covarianzas derivadas de los modelos en cada uno de los regímenes. Se observa que en general el régimen 1 es menos volátil que el régimen 2. Este resultado se esperaba, pues cuando hay ambientes de desaceleración económica la volatilidad es más alta.

**Tabla 2-6:** Moda de la matriz posterior de probabilidades de transición P para el modelo MSIAH (2) - VAR (1)<sup>16</sup>.

	Régimen 1	Régimen 2
Régimen 1	0.9249	0.0751
Régimen 2	0.0732	0.9268

La Tabla 2-6 muestra que los regímenes 1 y 2 son muy persistentes, las probabilidades de permanecer en el mismo régimen son de 0.9207 para el régimen 1 y 0.9216 en el régimen 2. Se observa que pasar de un régimen al otro es poco probable, para ambos regímenes la probabilidad de pasar de un estado a otro es cercana al 0.08. A continuación, se calculan los impulsos respuestas bayesianos para los diferentes regímenes con el fin de caracterizar su dinámica.

## 2.4 Análisis de la función impulso respuesta

A partir de la simulación MCMC del modelo MSIAH (2) -VAR (1) y utilizando la descomposición de Cholesky como esquema de identificación, las respuestas de impulso  $IR_{(\nabla_{\epsilon, s_0, t=0})}$  se calculan como se describe en la descripción del método utilizado. Se realiza el análisis para un horizonte de 24 períodos después de que se elige el impulso. Los choques afectan a un sistema que está en el régimen  $s_0$ , en el tiempo 0. La dimensión del vector es  $N = 3$ , por lo que tres choques estructurales diferentes pueden afectar el sistema. La variable latente puede tomar dos valores, por lo que hay dos posibles regímenes de

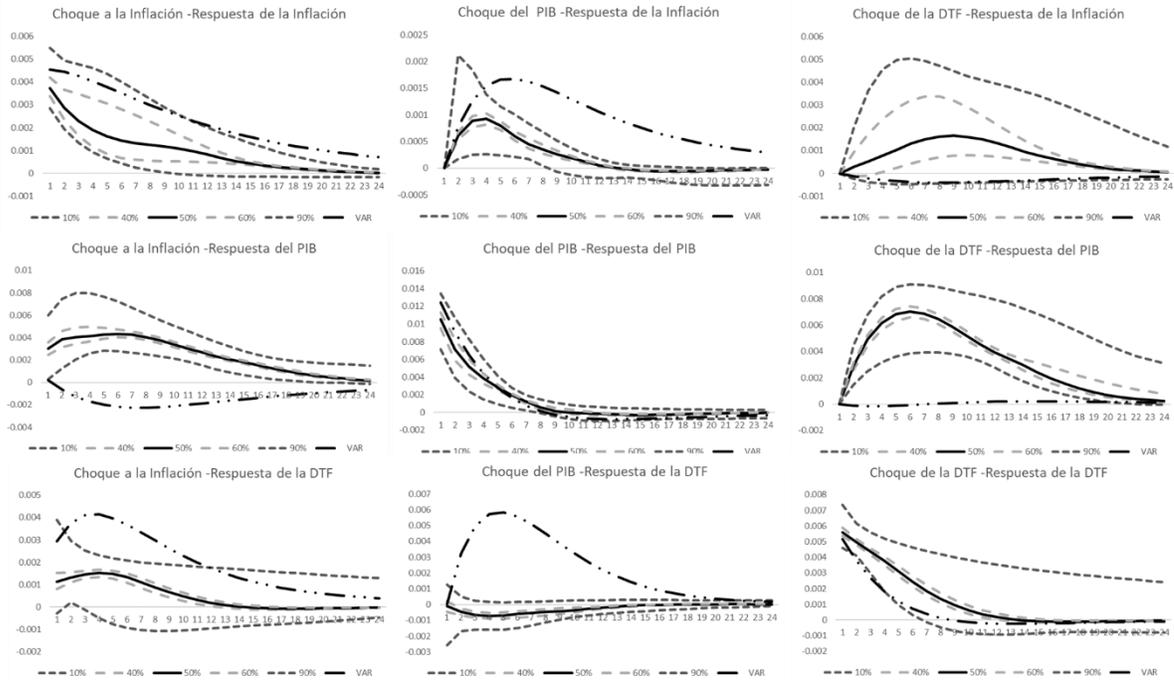
<sup>16</sup> Cuando la n-ésima potencia de la matriz posterior tiende a infinito se obtiene la siguiente matriz:

	Régimen 1	Régimen 2
Régimen 1	0.4936	0.5064
Régimen 2	0.4936	0.5064

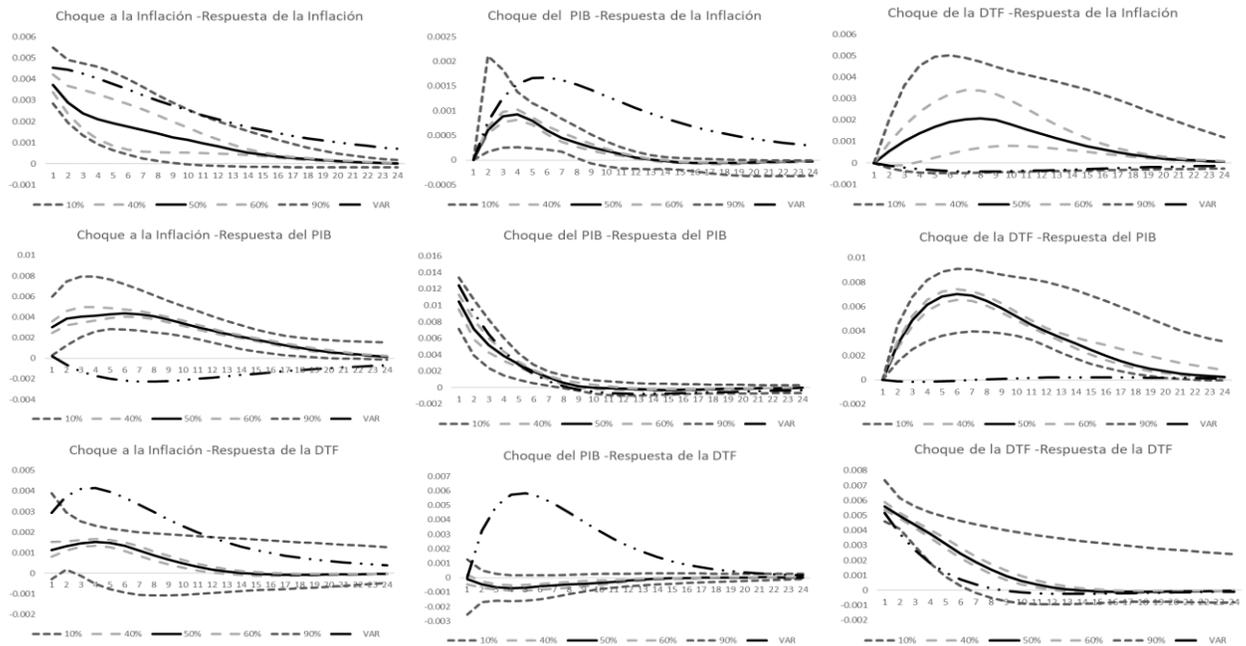
Esto nos indica que la matriz posterior de probabilidades de transición no tiene estados absorbentes.

inicio. Todas las respuestas están representadas en las Figuras 2-5 y 2-6. A continuación, se presentan las respuestas de estos dos regímenes.

**Figura 2-5:** Régimen 1, Crecimiento económico – Impulsos Respuestas a una desviación estructural estándar. Se presentan los cuantiles 10%, 40%, 50%, 60% y 90% de los impulso respuestas posteriores.



**Figura 2-6:** Régimen 2, Desaceleración económica - Respuestas de impulso a una desviación estructural estándar. Se presentan los cuantiles 10%, 40%, 50%, 60% y 90% de los impulso respuestas posteriores.



A continuación, se presenta algunas de las características económicas de los choques presentados:

- Los choques tienen la misma dinámica en ambos estados. Por lo que la interpretación económica se sostiene en ambos estados de la economía.
- Cuando se analiza el impacto de una variable sobre si misma se encuentra que la que más persistencia tiene es la inflación, cuando hay un choque en inflación la persistencia del impacto dura cerca de 8 periodos. La persistencia para la DTF dura entre 7 y 8 periodos, mientras que para el PIB es de tan solo 7 periodos.
- La inflación tiene un efecto positivo sobre la DTF, este efecto tiene una persistencia de 3 trimestres. Este resultado está soportado en la política de meta de inflación del Banco de la República, pues el Banco al velar por la estabilidad de precios, tienen como instrumento de política monetaria el modificar las tasas de interés.
- La inflación tiene un efecto positivo sobre el PIB, este efecto tiene una persistencia de 15 trimestres. B. Friedman (1995) afirma que la política monetaria sólo afecta las variables reales en el corto plazo, debido a la existencia de rigideces de precios, pero que en largo plazo esos efectos desaparecen ya que la dinámica de la economía flexibiliza los precios. Este comentario soporta el hallazgo encontrado.
- Los resultados indican que el PIB tiene un efecto nulo sobre las tasas de interés de la economía. Este resultado puede ser soportado en que el objetivo del banco

central es velar por la estabilidad de precios, un choque en el PIB no debería afectar las tasas de interés a menos de que comprometa la meta de inflación del Banco de la Republica.

- El PIB tienen un efecto positivo sobre la tasa de inflación y su persistencia es de 8 periodos. De acuerdo con la teoría ortodoxa de la economía, en el corto plazo, la inflación depende de la brecha entre producto efectivo y el producto potencial de largo plazo, bajo esta teoría existe una tasa óptima de crecimiento del producto, y si el crecimiento está por encima de este valor, entonces, se producen presiones inflacionarias. En este sentido un choque en el PIB produce presión al alza en las tasas de crecimiento de la inflación.
- Un choque de la DTF tiene efecto nulo sobre la inflación y el crecimiento del PIB. Este resultado se obtiene por construcción debido a la descomposición de Cholesky.

Otro resultado interesante de estos análisis impulso respuesta resulta al comparar las funciones encontradas con el comportamiento que tienen una función impulso respuesta de un modelo VAR tradicional. Se observa que los impulsos respuesta de un modelo VAR tradicional, en algunas ocasiones, difieren en magnitud y en forma respecto a las IRF del modelo MS-VAR. En particular, cuando hay un choque de inflación la respuesta que tiene el PIB bajo un modelo VAR tradicional es prácticamente nula. En otros casos la media del impulso respuesta del modelo MS-VAR nunca es similar a la del modelo VAR lineal, lo que indica que el análisis o recomendaciones de política derivados serían diferentes.

Además de la interpretación económica de las IRF, se observa una característica destacable, las formas de las respuestas de impulso para ambos regímenes son similares en ambos estados. Esto tiene como origen la baja persistencia de estos regímenes. Con las probabilidades medias posteriores de permanecer en el mismo régimen para el próximo período de 0.92, las simulaciones de transición entre estados están destinadas a ser testigos de pocos cambios en los regímenes sobre la propagación del choque. Esta es una característica interesante que no se observaría en las respuestas de impulso dependientes del régimen.

En temas de recomendaciones de política monetaria, los resultados encontrados implican:

- Los efectos de la política monetario medidos con modelos de vectores autorregresivos lineales podrían estar mal identificados. Existen efectos no lineales en las series analizadas, por lo cual los resultados esperados de la política monetaria podrían no ser los esperados si se analizan con el modelo VAR tradicional.
- El impulso que tiene la DTF frente a un choque del PIB es nulo si se analiza bajo el MSIAH-VAR. Caso contrario sucede si el impulso respuesta se analiza con un modelo VAR, pues en este último modelo, un choque del positivo del PIB implica una subida en tasas de interés. El modelo MSIAH-VAR revela que el Banco de la Republica no debería intervenir si ve cambios en el PIB a menos de que su meta de inflación se vea comprometida.

## Conclusiones y recomendaciones

### 3.1 Conclusiones

Este trabajo define y defiende el uso de respuestas de impulso bayesianas cuando se trata del uso de modelos MS-VAR. El enfoque trabajado tiene cuatro ventajas. Primero las IRF bayesianas tienen en cuenta la posibilidad de cambios de régimen sobre la propagación del choque considerado. Segundo, la inferencia Bayesiana produce densidades posteriores en lugar de estimaciones puntuales, esto hace que la inferencia sobre la credibilidad de las respuestas pueda realizarse desde las densidades posteriores. Tercero, el uso de técnicas bayesianas permite la selección entre modelos lineales y no lineales mediante la comparación de su densidad marginal. En cuarto lugar, los métodos Bayesianos ayudan a eludir la llamada maldición de la dimensionalidad, y permite estimar modelos dimensionales más grandes, ya sea con más rezagos en los parámetros autorregresivos, o con más regímenes.

Se debe reconocer como indica Droumaguet (2012), que esta metodología presenta tres limitaciones. En primer lugar, los modelos MSIAH-VAR poseen múltiples regímenes, esto implica que el número de IRF pueden aumentar, lo que puede llevar a un análisis empírico engorroso. En segundo lugar, la compleja dinámica que interviene en la propagación de los choques puede conducir a grandes bandas de error, por lo cual se puede perder interpretación económica en el análisis. En tercer lugar, este análisis está restringido a un esquema de identificación estructural específico, la descomposición de Cholesky. El muestreador de Gibbs no opera con otros esquemas de identificación.

Esta metodología se aplicó a un conjunto de datos de la economía Colombiana de periodicidad trimestral, entre 2000 - 1 hasta 2017 - II. Esta base de datos contiene información sobre el crecimiento del Producto Interno Bruto, la inflación anual sin alimentos y la Tasa de Interés de depósitos a término fijo 90 días.

La aplicación de las IRF con modelos MSIAH-VAR dejó importantes hallazgos en temas económicos. Primero se logró mostrar que las series económicas analizadas presentan comportamientos no lineales que se pueden modelar con el modelo MSIAH-VAR. Los impulsos respuestas derivados son diferentes a los del modelo lineal, por lo cual los análisis de políticas con base en estos últimos estarían limitados, pues se encontraron características no lineales en las series analizadas. Tercero, los impulsos respuestas en los estados analizados, presentan características similares, por lo cual las recomendaciones de política económicas tendrían la misma interpretación en ambos escenarios.

### **3.2 Recomendaciones**

La siguiente es una lista de posibles investigaciones relacionadas al análisis impulso respuesta de los modelos MSIAH-VAR y sus aplicaciones:

- Estudiar diferentes esquemas de identificación para los choques estructurales en los modelos MSIAH-VAR.
- Ningún estudio analizado aborda el tema de descomposición de varianza asociado a los modelos MSIAH-VAR. Este tópico tiene un importante espacio de crecimiento y sus aplicaciones podrían complementar y enriquecer el estudio aquí presentado.

- 
- Este modelo abre una línea de investigación para la estimación de modelos de equilibrio general dinámicos y estocásticos con cambio de régimen. Mas específicamente, la estimación de estos modelos para datos de la economía colombiana. Un buen inicio para esta investigación es el estudio del artículo de Farmer Et. Al. (2009).
  - Análisis de la dependencia de la distribución prior en el modelo MSIAH-VAR.
  - Comparación de las funciones impulso respuesta de un modelo de umbrales versus un modelo de cambio de régimen con cadenas de Markov.



## **A. Anexo: Implementación Método “Expectation Maximization”**

### **A.1. Inicialización**

Los parámetros a ser inicializados son matrices de coeficientes autorregresivos,  $A_{1i}, \dots, A_{pi}$  para cada régimen  $i \in \{1, \dots, M\}$ , la matriz de transición  $P$  y el estado inicial  $\xi_{1|0}$ .

Para el intercepto y los términos autor regresivos se calculan los parámetros mediante una regresión de mínimos cuadrados ordinarios (MCO). De los estimadores MCO se calculan los residuales para que sean usados en la parte “Expectation Step”.

La matriz de probabilidades de transición  $P$  son inicializadas con un valor arbitrario sobre la diagonal. Fuera de la diagonal se establecen valores iguales de tal forma que los valores por fila sumen uno.

### **A.2. Expectation Step**

El filtro BLHK, tal como lo describe Krolzig (1997), desarrolla el filtro y el suavizado sobre las probabilidades de los regímenes  $\xi_t$ .

$$\xi_t = \begin{bmatrix} \Pr(s_t = 1) \\ \vdots \\ \Pr(s_t = M) \end{bmatrix}$$

### **A.3. Filtrado**

El filtro introducido por Hamilton (1989) es un algoritmo iterativo que calcula el pronóstico óptimo del valor de  $\xi_{t+1}$  con base en la información disponible en  $t$  consistente con los valores observados  $y_t$ .

Hamilton (1994) sugiere que el estado inicial  $\xi_{1|0}$  sea inicializado usando el vector de probabilidades ergódica  $\bar{\xi} = \pi$ , donde  $\pi$  satisface  $P\pi = \pi$ .

Este paso consiste en una recursión hacia adelante para  $t = 1, \dots, T$  escrita como:

$$\hat{\xi}_{t+1|t} = \frac{P'(\eta_t \odot \hat{\xi}_{t|t-1})}{1'_M (\eta_t \odot P' \hat{\xi}_{t-1|t-1})}$$

Donde  $\eta_t$  es la colección de M densidades, definida como:

$$\eta_t = \begin{bmatrix} \Pr(y_t | s_t = 1, y_{t-1}) \\ \vdots \\ \Pr(y_t | s_t = M, y_{t-1}) \end{bmatrix}$$

#### A.4. Suavizado

Se usa el total de la información para hacer inferencia acerca de los regímenes no observados incorporando la información que el paso anterior no se tuvo en cuenta, es decir  $Y_{t+1...T} = (y'_{t+1}, \dots, y'_T)'$  en la inferencia acerca de  $\xi_t$ .

Este paso consiste en una recursión hacia atrás para  $j = 1, \dots, T - 1$ . La iteración consiste en la siguiente ecuación:

$$\hat{\xi}_{T-j|T} = [P(\hat{\xi}_{T-j+1|T} \odot \hat{\xi}_{T-j+1|T-j})] \odot \hat{\xi}_{T-j|T-j}$$

#### A.5. Matriz de probabilidades de transición

La matriz de probabilidades de transición es estimada a través del filtro, y las probabilidades suavizadas ( $\hat{\xi}_{t|t}$  y  $\hat{\xi}_{t|T}$ ) calculando en el paso “expectation step”. El vector ( $M^2 \times 1$ ) de probabilidades de transición  $\tilde{\rho}$  se obtiene como:

1. Se calcula el vector de probabilidades conjunta  $\Pr(s_{t+1} = j, s_t = i | y_T)$  para todo  $s_t, s_{t+1} = 1, \dots, M$ , dadas por el vector ( $M^2 \times 1$ ) de probabilidades de los regímenes:

$$\hat{\xi}_{t|T}^{(2)} = \text{vec}(P) \odot [(\hat{\xi}_{t+1|T}^{(1)} \odot \hat{\xi}_{t+1|t}^{(1)}) \otimes \hat{\xi}_{t|t}]$$

2. Se suma sobre todo el periodo de tiempo T:

$$\hat{\xi}^{(2)} = \sum_{t=1}^{T-1} \hat{\xi}_{t|T}^{(2)}$$

3. Se define

$$\hat{\xi}^{(1)} = (1'_M \otimes I_M) \hat{\xi}^{(2)}$$

4. El vector de probabilidades de transición  $\tilde{\rho}$  es obtenido como:

$$\tilde{\rho} = \hat{\xi}^{(2)} \oslash (1'_M \otimes \hat{\xi}^{(1)})$$

5. Finalmente, se ajusta  $\tilde{\rho}$  en una matriz MxM para obtener la matriz de probabilidad P.

### A.6. Ecuación de la Normal

El “expectation step” trabaja con la siguiente función de verosimilitud:

$$\begin{aligned} L(\lambda|Y_T) &:= p(Y_T|Y_0; \lambda) \\ &= \prod_{t=1}^T p(Y_t|Y_{t-1}; \lambda) \\ &= \prod_{t=1}^T \sum_{\xi_t} p(y_t|\xi_t, Y_{t-1}, \theta) p(\xi_t|Y_{t-1}, \theta) \\ &= \prod_{t=1}^T \eta'_t \hat{\xi}_{t|t-1} \end{aligned}$$

La densidad condicional  $p(y_t|\xi_t, Y_{t-1}, \theta)$  se compone de varias distribuciones normales. Krolzig (1997) muestra que por medio de la estimación por mínimos cuadrados generalizados se obtienen máximos para la función de verosimilitud.

### A.7. Criterios de convergencia.

Después de la inicialización, el algoritmo repite los pasos “expectation step” y de maximización, hasta la convergencia. se utiliza como medida para la convergencia entre las iteraciones  $j^{th}$  y  $j + 1^{th}$  la siguiente expresión:

- El cambio porcentual absoluto en el logaritmo del valor de verosimilitud, calculado como:

$$\Delta_1 = 100 \cdot \left| \frac{\ln L(\lambda^{(j+1)}|Y_T) - \ln L(\lambda^{(j)}|Y_T)}{\ln L(\lambda^{(j)}|Y_T)} \right|$$

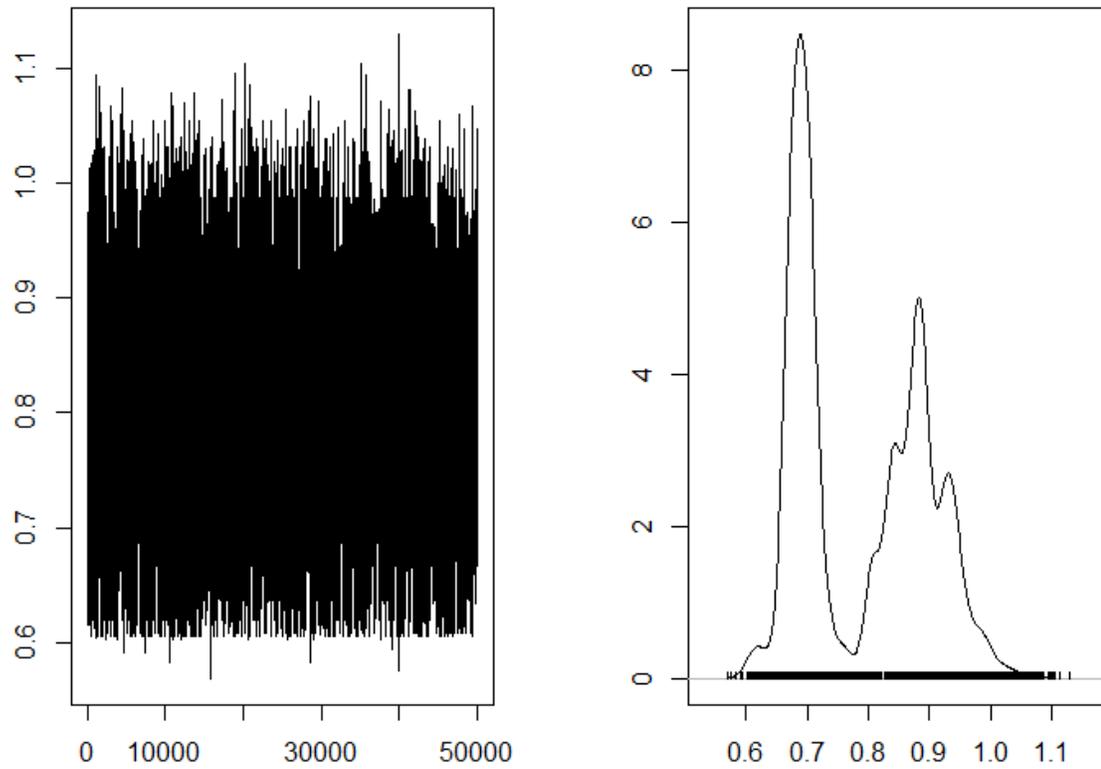
Se alcanza la convergencia cuando el criterio se juzga lo suficientemente pequeño, es decir,  $\Delta_1 < \delta$

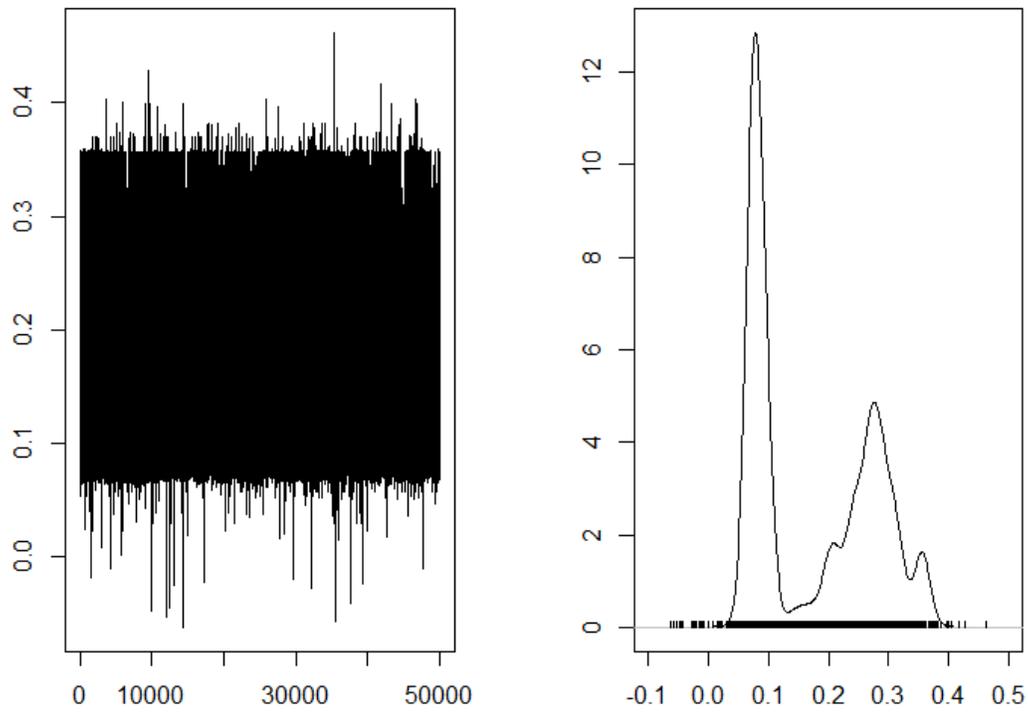
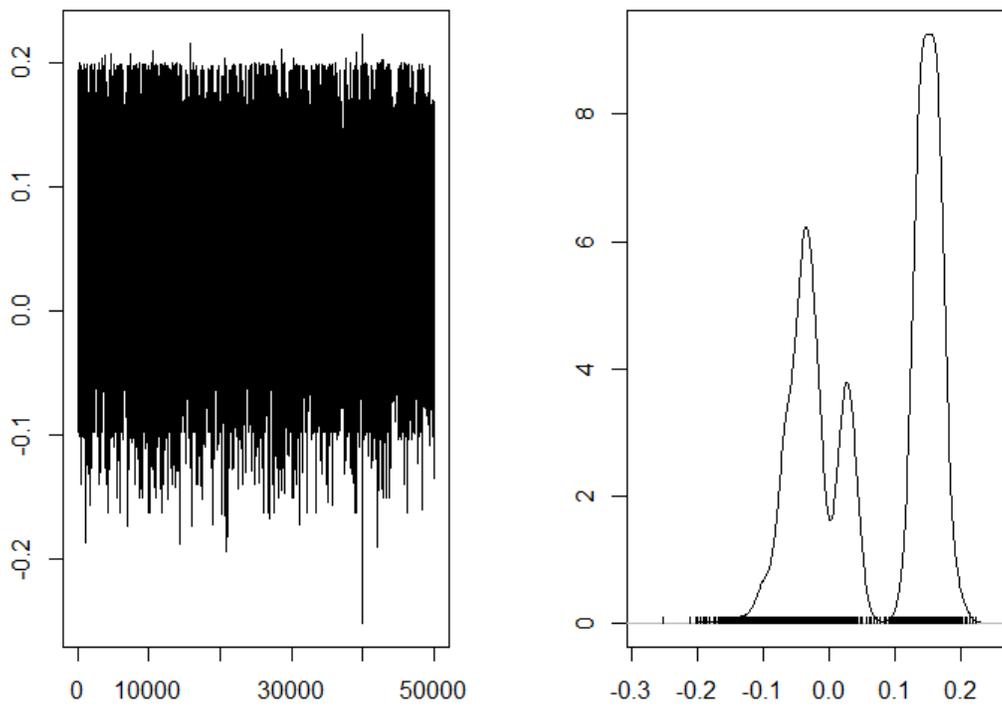
Para no entrar en iteraciones infinitas, se implementa un parámetro para el número máximo de iteraciones permitidas antes de la convergencia. Si el método EM no ha convergido dentro de él, el algoritmo se detiene.

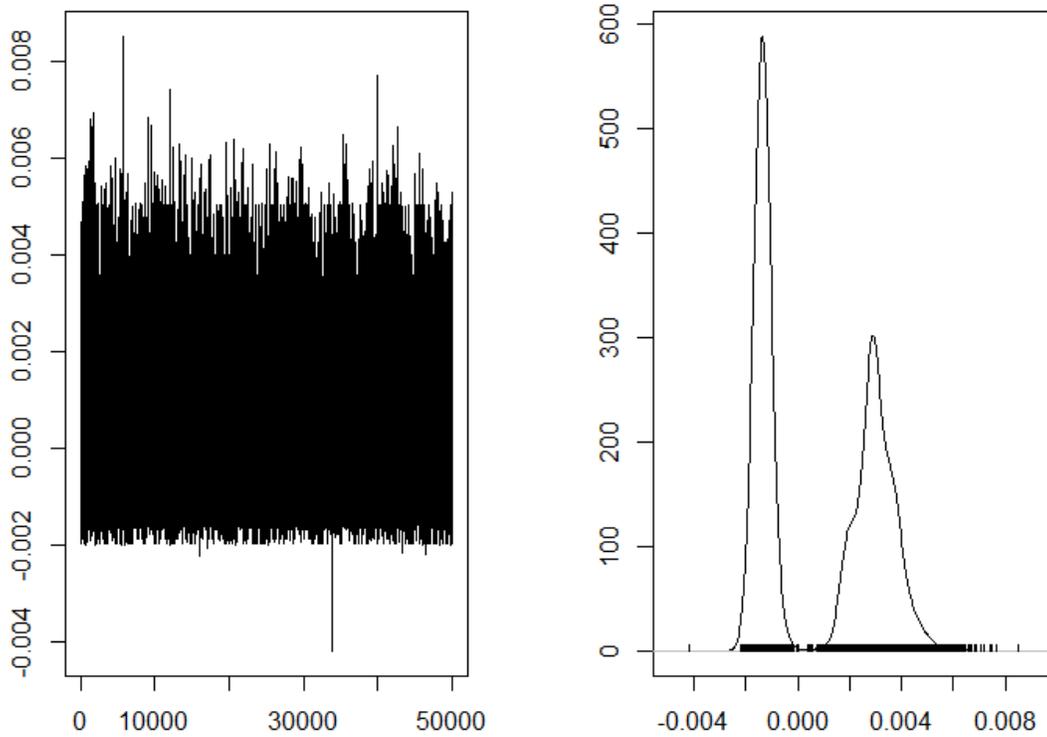
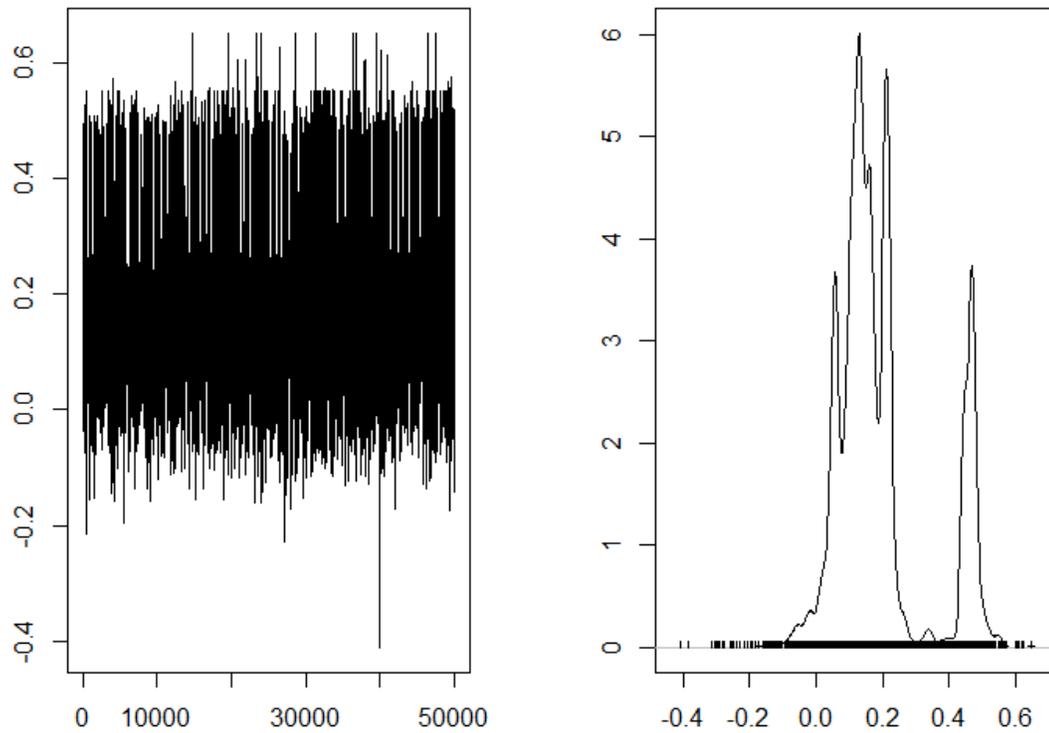
## B.Anexo: Simulaciones Modelo MSIAH(2)-VAR(1)

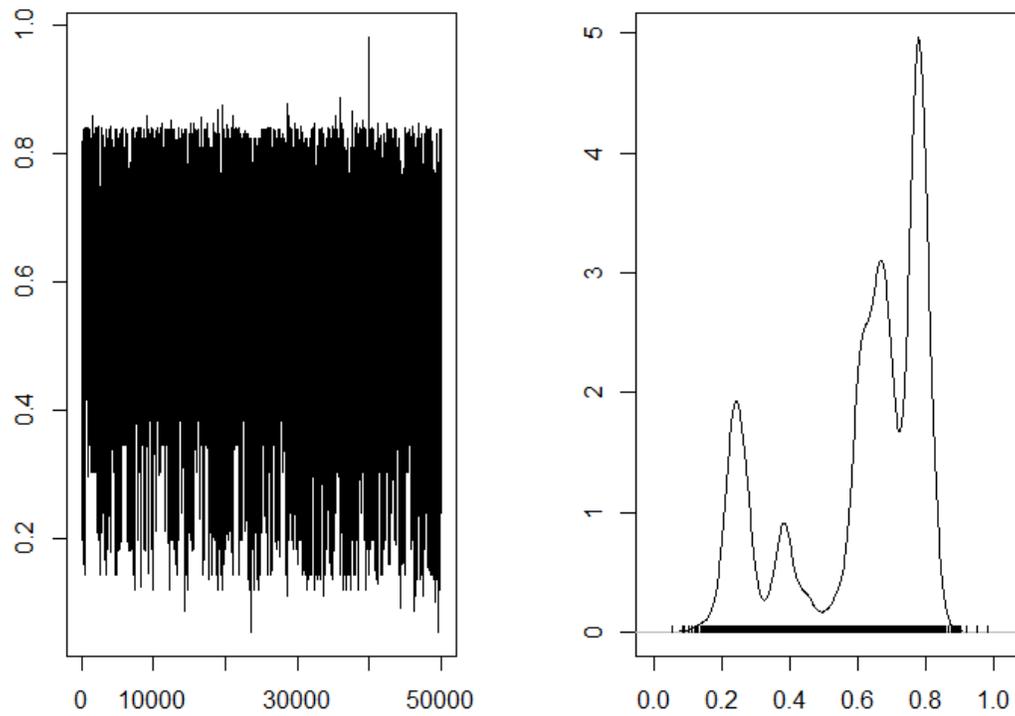
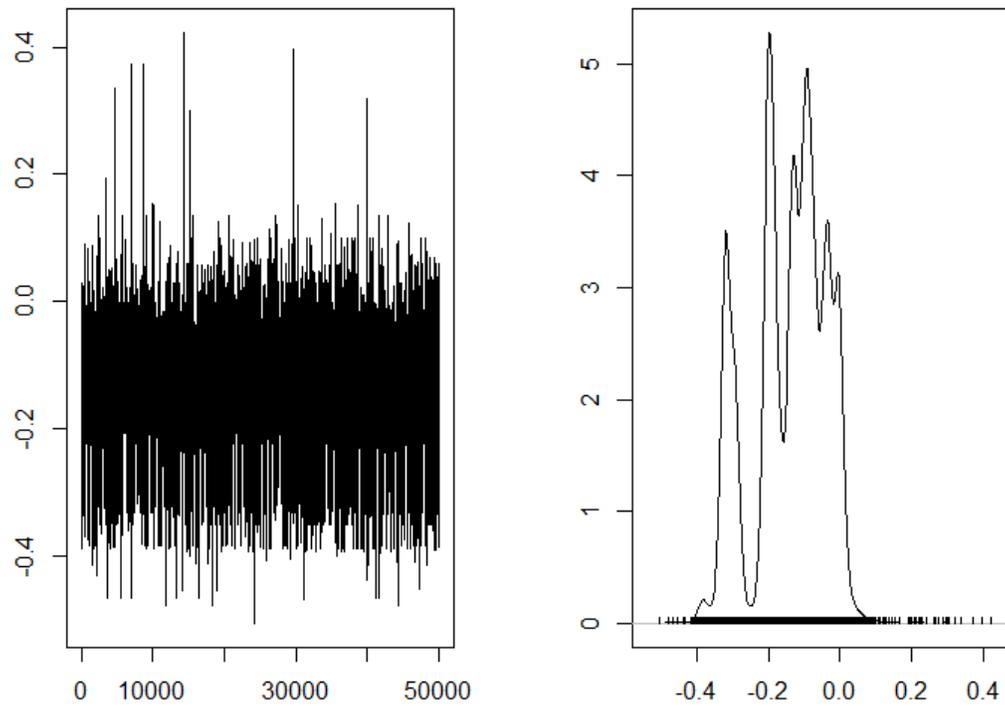
### B.1. Simulación de los Coeficientes Autor regresivos

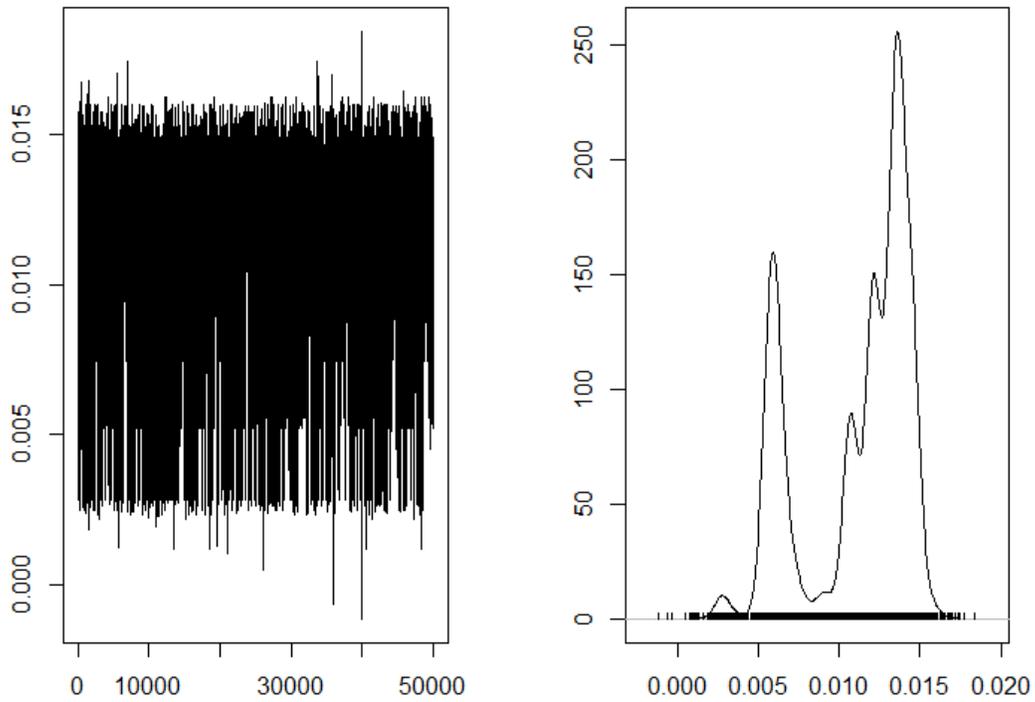
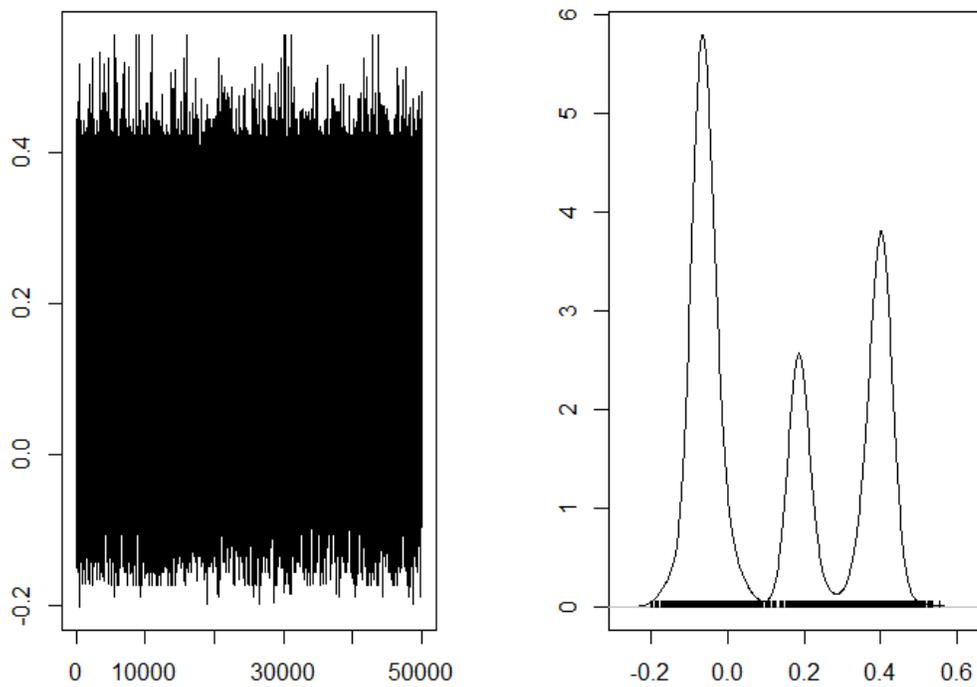
**Figura B. 1:** Simulación coeficiente del rezago de la inflación en la ecuación de inflación

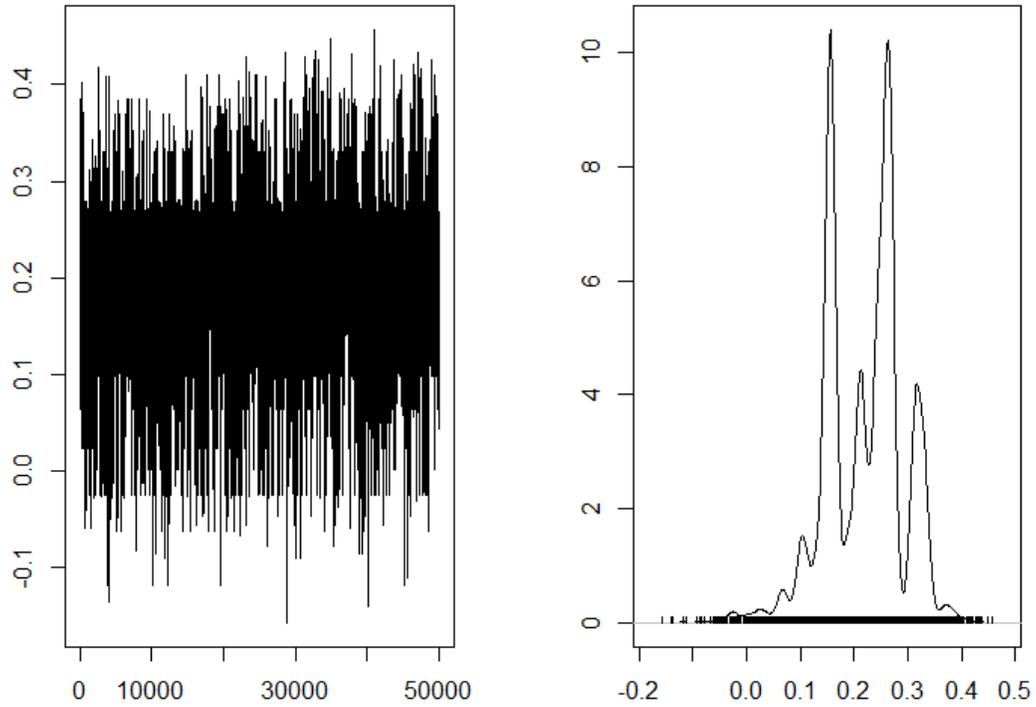


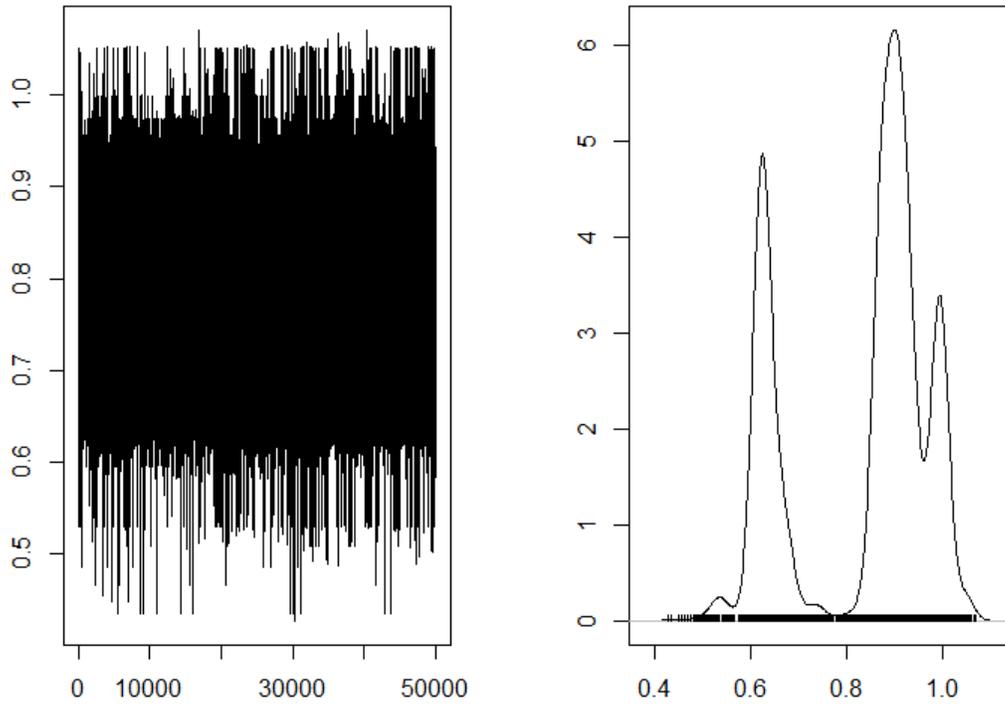
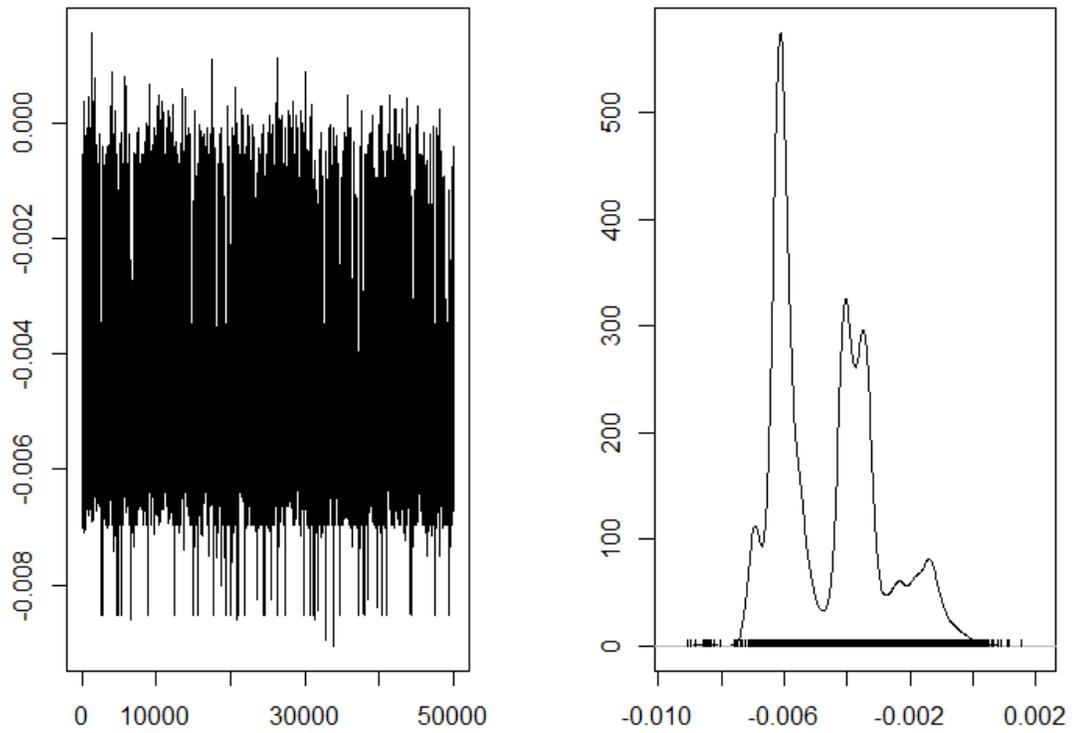
**Figura B. 2:** Simulación coeficiente del rezago del PIB en la ecuación de inflación**Figura B. 3:** Simulación coeficiente del rezago de la DTF en la ecuación de inflación

**Figura B. 4:** Simulación coeficiente constante en la ecuación de inflación**Figura B. 5:** Simulación coeficiente del rezago de la inflación en la ecuación del PIB

**Figura B. 6:** Simulación coeficiente del rezago del PIB en la ecuación del PIB**Figura B. 7:** Simulación coeficiente del rezago de la DTF en la ecuación del PIB

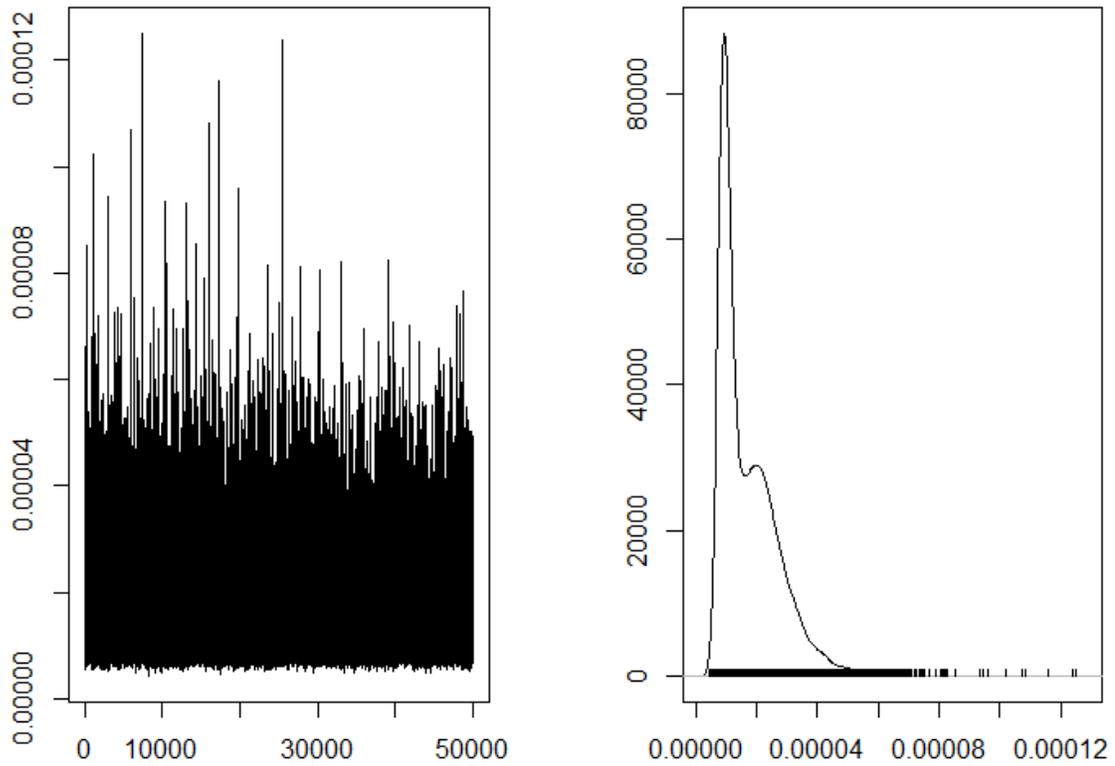
**Figura B. 8:** Simulación coeficiente constante en la ecuación del PIB**Figura B. 9:** Simulación coeficiente del rezago de la inflación en la ecuación de la DTF

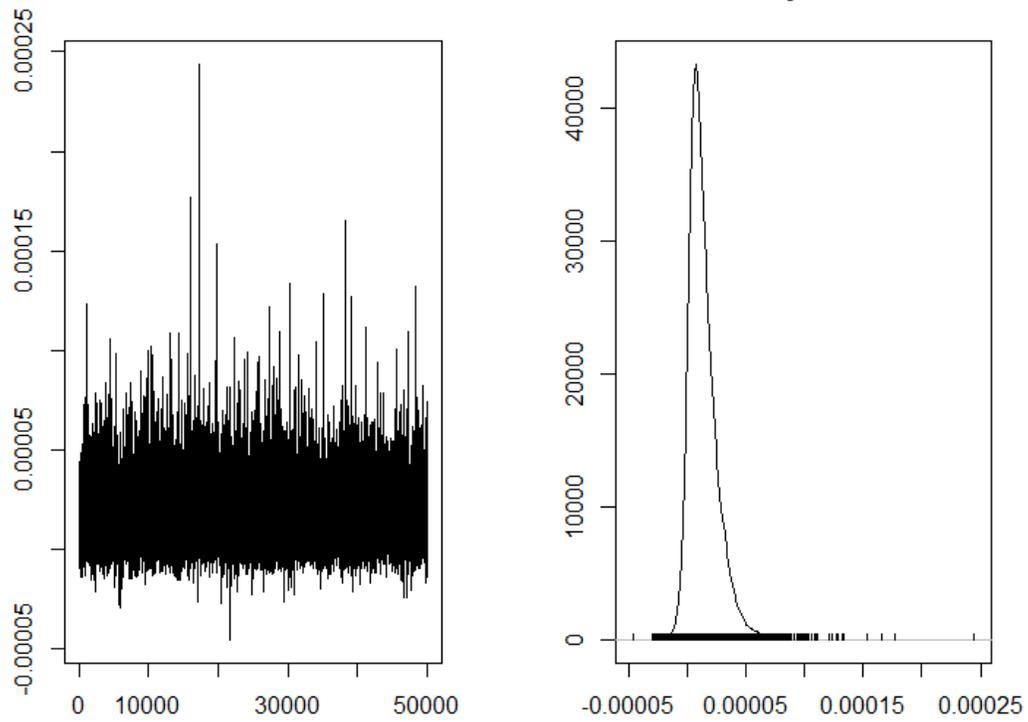
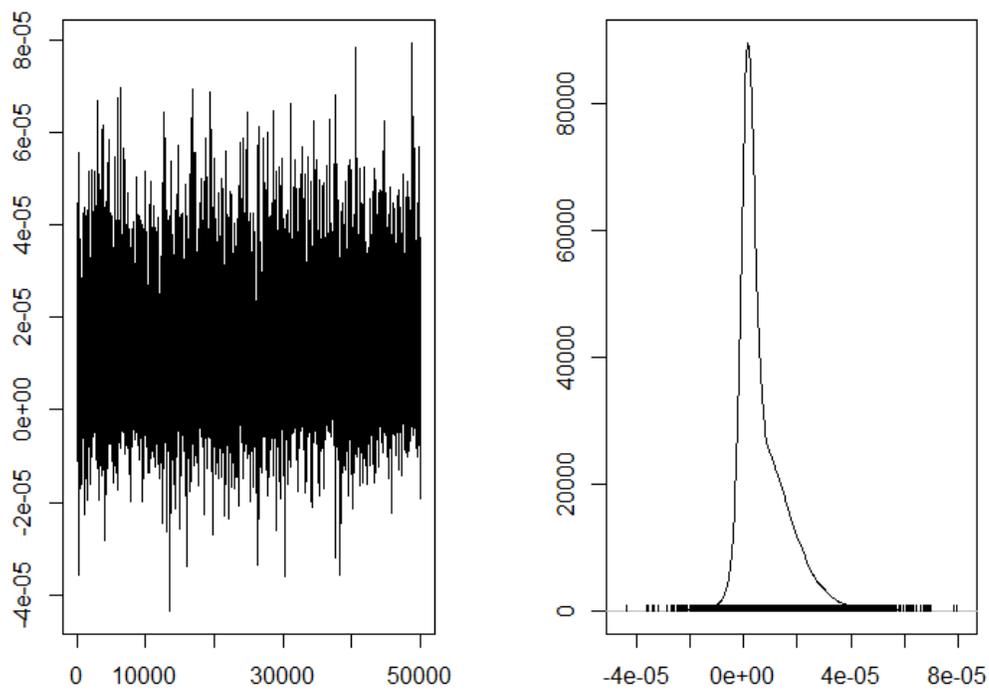
**Figura B. 10:** Simulación coeficiente del rezago del PIB en la ecuación de la DTF

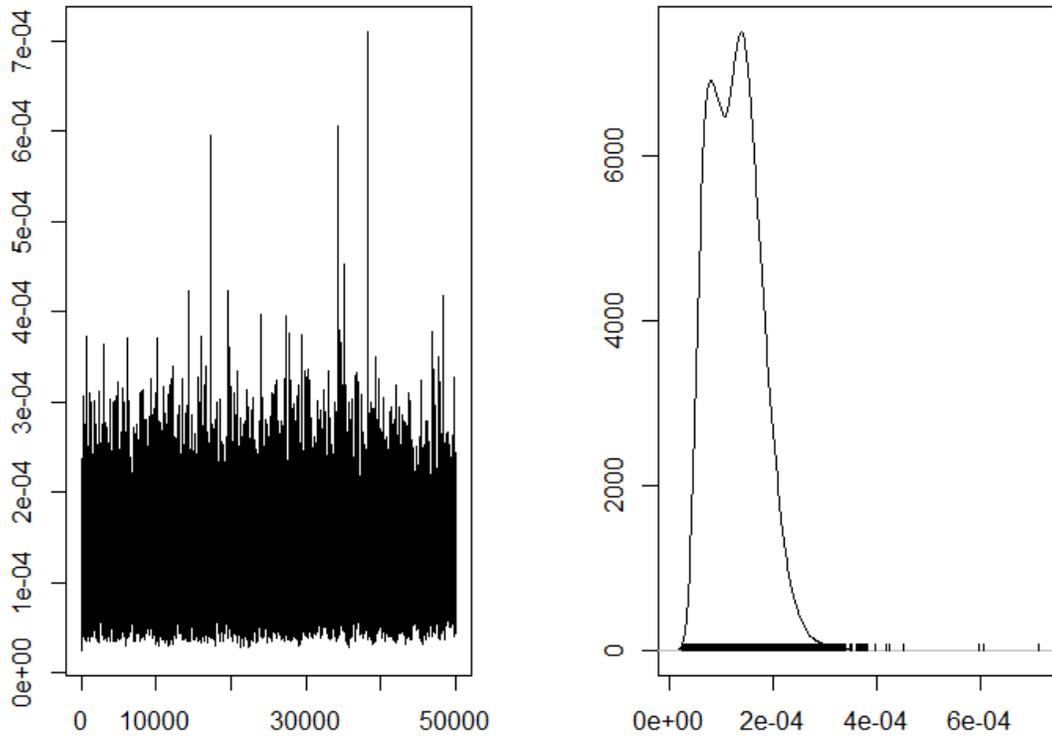
**Figura B. 11:** Simulación coeficiente del rezago de la DTF en la ecuación de la DTF**Figura B. 12:** Simulación coeficiente constante en la ecuación de la DTF

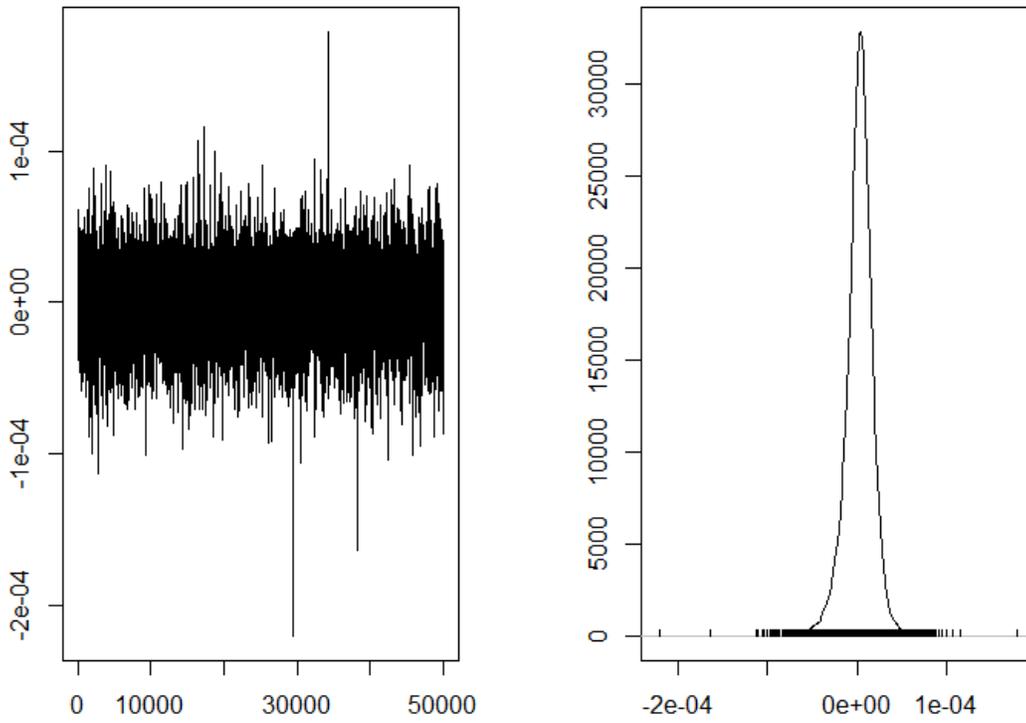
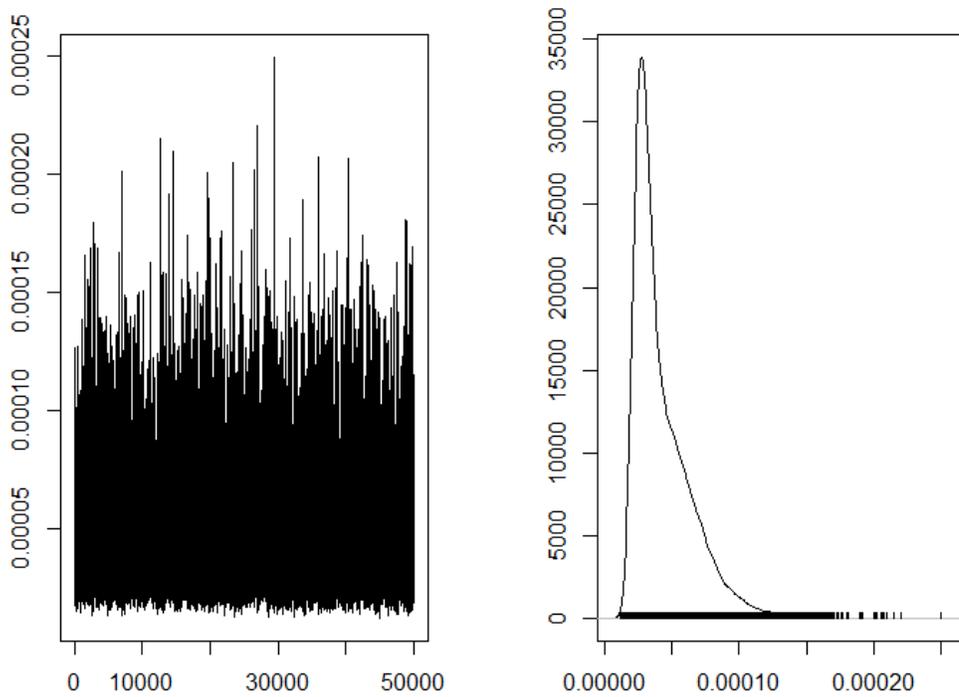
## B.2. Simulaciones Coeficientes de la Matriz de Varianzas y Covarianzas

Figura B. 13: Simulación varianza de la inflación



**Figura B. 14:** Simulación covarianza de la inflación y el PIB**Figura B. 15:** Simulación covarianza de la inflación y la DTF

**Figura B. 16:** Simulación varianza del PIB

**Figura B. 17:** Simulación covarianza del PIB y la DTF**Figura B. 18:** Simulación varianza del DTF

## C. Anexo: Modelo VAR(p)

El modelo VAR(p) es el siguiente:

$$y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Con  $\varepsilon_t \sim N(0, \Sigma_\varepsilon)$

Matricialmente se puede ver como:

$$y = (X \otimes I_k) \beta + \varepsilon$$

Donde  $y_t$  denota el vector de k variables incluidas en el VAR para el período t;  $t=1,2,1,\dots,T$ . Los  $\phi_i$  son matrices (KxK) de coeficientes fijos,  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_k)'$  es un vector fijo (Kx1) que contiene los interceptos. Finalmente, el vector columna  $\varepsilon_t$  de orden (Kx1) denota el término de error, tal que,  $E(\varepsilon_t)=0$ ,  $E(\varepsilon_t \varepsilon_t')=0$  y  $E(\varepsilon_s \varepsilon_t')=0$  para  $s \neq t$ .

En la notación matricial  $y = \text{vec}(y_1, \dots, y_T)$  vector de (KpX1),  $X = [X_1', X_2', \dots, X_T']$ , con; el producto Kronecker, representa al vector de parámetros generados por el operador y el vector columna de dimensión k que denota el término de error.

Un proceso es estable si:

$$\text{Det}(I_{kp} - \phi z) \neq 0 \text{ para } |z| < 1$$

$$\text{Con } \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_{p-1} & \phi_p \\ I_k & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & I_k & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Un ejemplo para un VAR(2), con k=2 y p=2 se tiene:

$$y_{1t} = \delta_1 + \phi_{1,1}^1 y_{1,t-1} + \phi_{1,2}^1 y_{2,t-1} + \phi_{1,1}^2 y_{1,t-p} + \phi_{1,2}^2 y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t} \quad (1)$$

$$y_{2t} = \delta_2 + \phi_{2,1}^1 y_{1,t-1} + \phi_{2,2}^1 y_{2,t-1} + \phi_{2,1}^2 y_{1,t-p} + \phi_{2,2}^2 y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t} \quad (2)$$

Donde el vector de parámetros a estimar es:

$$\beta = (\delta_1, \delta_2, \phi_{1,1}^1, \phi_{1,2}^1, \phi_{2,1}^1, \phi_{2,2}^1, \phi_{1,1}^2, \phi_{1,2}^2, \phi_{2,1}^2, \phi_{2,2}^2)$$

La función de verosimilitud para el proceso Gaussiano es:

$$l(\beta|y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{kT/2} |I_T \otimes \Sigma_\varepsilon|^{-1/2} \times \exp \left[ -\frac{1}{2} (y - (X \otimes I_k) \beta)' (I_T \otimes \Sigma_\varepsilon^{-1}) (y - (X \otimes I_k) \beta) \right]$$

El estimador máximo verosímil de  $\beta$  bajo el supuesto de que  $\varepsilon_t$  se distribuye normal multivariante  $(0, \Sigma_\varepsilon)$ , en cuyo caso coincide con el de mínimos cuadrados, está dado por:

$$\hat{\beta} = [(X'X \otimes \Sigma_\varepsilon^{-1})]^{-1} [(X' \otimes \Sigma_\varepsilon^{-1})y]$$

Y la matriz de varianzas- covarianzas está dada por:

$$\Sigma_{\hat{\beta}} = [(X'X \otimes \Sigma_\varepsilon^{-1})]^{-1}$$

El inconveniente con el VAR frecuentista es que es necesario estimar un número considerable de parámetros, más aún cuando se cuenta con un gran número de variables y rezagos. Esto suele producir errores estándar grandes de los coeficientes estimados, lo cual puede deberse a que los coeficientes realmente son cero o que los datos pueden no ser suficientes para estimar de manera precisa los coeficientes.

Frecuentemente se recurre a hacer restricciones sobre los parámetros con el fin de resolver el problema de la dimensión de los datos.

## D. Anexo: Modelo VAR(p) Bayesiano

La solución al problema de “sobreparametrización” que se presenta en el ajuste de los modelos VAR clásico; aunque tienen un buen ajuste, no cuenta con pronósticos muy acertados. Son los modelos VAR bayesianos, en los cuales a priori se ponen restricciones sobre las matrices de coeficientes.

Lo que se busca en este método es asignar menos peso a los rezagos más distantes, a menos de que se tenga un conocimiento previo de que los datos se comportan de otra manera. El conocimiento a priori sobre los parámetros se involucra en la escogencia de las distribuciones y de los parámetros (hiperparámetros) de los mismos. Esta información junto con la información muestral es usada para producir la estimación final de los parámetros.

Es usual asumir que el vector de parámetros  $\beta$  sigue una distribución a priori normal multivariada con media conocida  $\beta^*$  y matriz de varianzas-covarianzas  $V_\beta$ , en consecuencia, la distribución a priori del vector de parámetros es:

$$f(\beta) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k^2 p / 2} |V_\beta|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} (\beta - \beta^*)' V_\beta^{-1} (\beta - \beta^*)\right]$$

Combinando la distribución a priori de  $\beta$  y la función de verosimilitud, se obtiene la densidad posterior, esta densidad resulta ser normal, tal como se muestra a continuación:

$$f(\beta|y) \propto \exp\left[-\frac{1}{2} (\beta - \bar{\beta})' \bar{\Sigma}_\beta^{-1} (\beta - \bar{\beta})\right]$$

Donde la media posterior es:

$$\bar{\beta} = [V_\beta^{-1} + (X'X \otimes \Sigma_\varepsilon^{-1})]^{-1} [V_\beta^{-1}\beta^* + (X' \otimes \Sigma_\varepsilon^{-1})y]$$

Y la matriz de varianzas-covarianzas posterior es:

$$\bar{\Sigma}_\beta^{-1} = V_\beta^{-1} + \Sigma_\beta^{-1}$$

Esto implica que la estimación puntual de esta matriz se puede interpretar como el promedio ponderado de la matriz de varianzas-covarianzas a priori y la frecuentista. Además, se mantiene en hecho de que a mayor incertidumbre en las priors, hay mayor cercanía entre las estimaciones bayesianas y las clásicas y a mayor certidumbre ocurre lo contrario.

Por simplicidad computacional, en este trabajo se supone que  $\Sigma_\varepsilon$  es fija y conocida<sup>17</sup>. Y se usará la prior de Litterman (Minnesota) para especificar los valores de la media prior  $\beta^*$  y

<sup>17</sup>Vease Canova (2007).

la varianza prior  $V_{\beta}$ . Bajo esta especificación  $\beta^*$  estará concentrado hacia cero y la varianza prior se fija como:

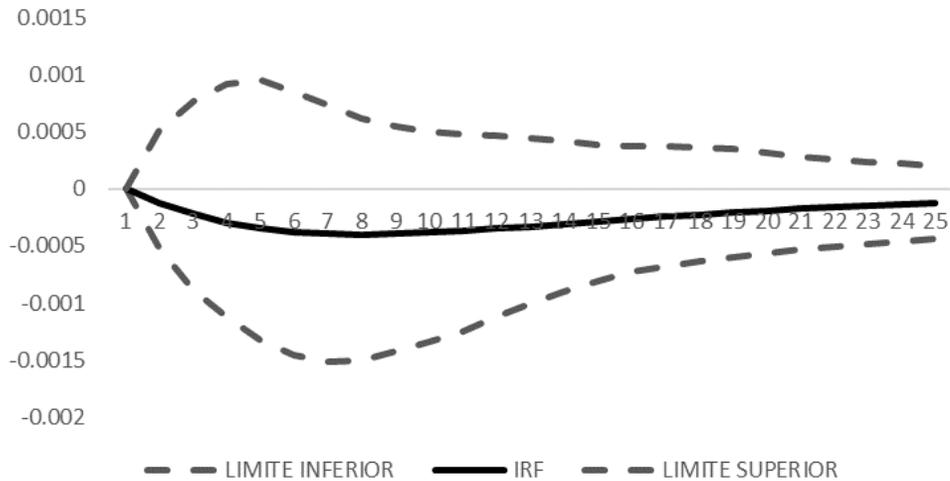
$$v_{i,j}(l) = \begin{cases} \left(\lambda/l\right)^2 & \text{si } i = j \\ \left(\lambda\theta \sigma_{ii}/l \sigma_{jj}\right)^2 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

donde  $v_{i,j}(l)$  es la varianza prior del (i, j)-ésimo elemento de  $\phi_l$ ,  $\lambda$  es la desviación estándar prior de los elementos de la diagonal de la matriz de primeros rezagos del modelo VAR;  $\theta$  es una constante en el intervalo (0, 1), que controla la incertidumbre sobre los parámetros de primer rezago.

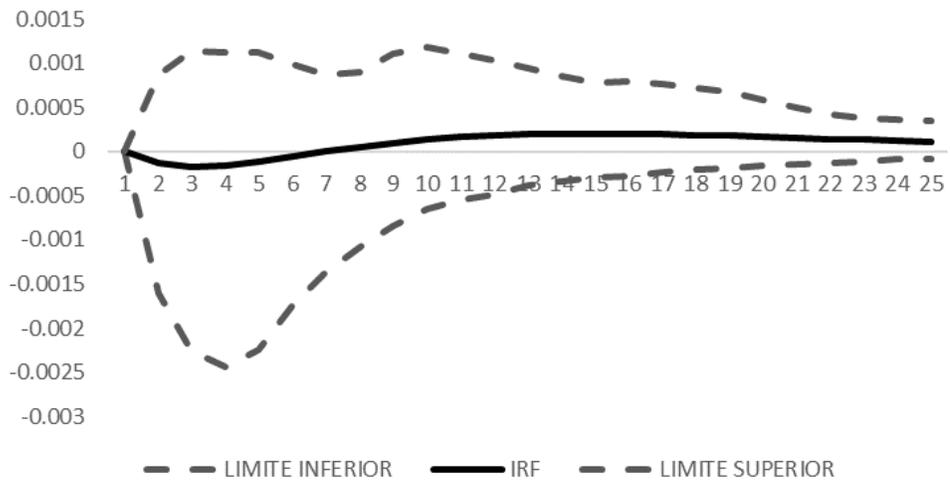
Para rezagos propios de orden mayor a uno, la incertidumbre disminuye a una velocidad dada por  $\lambda/l$ .  $\sigma_{ii}^2$  es el elemento i-ésimo de la diagonal de  $\Sigma_{\varepsilon}$ . Los términos determinísticos tienen varianza prior difusa. En la práctica, se reemplaza  $\sigma_{ii}^2$  por el elemento i-ésimo de la diagonal del estimador Máximo Verosímil de  $\Sigma_{\varepsilon}$  en el modelo no restringido

## E. Anexo: Impulso respuesta modelo frecuentista<sup>18</sup>

**Figura E. 1:** Respuesta de la Inflación ante un choque de la DTF

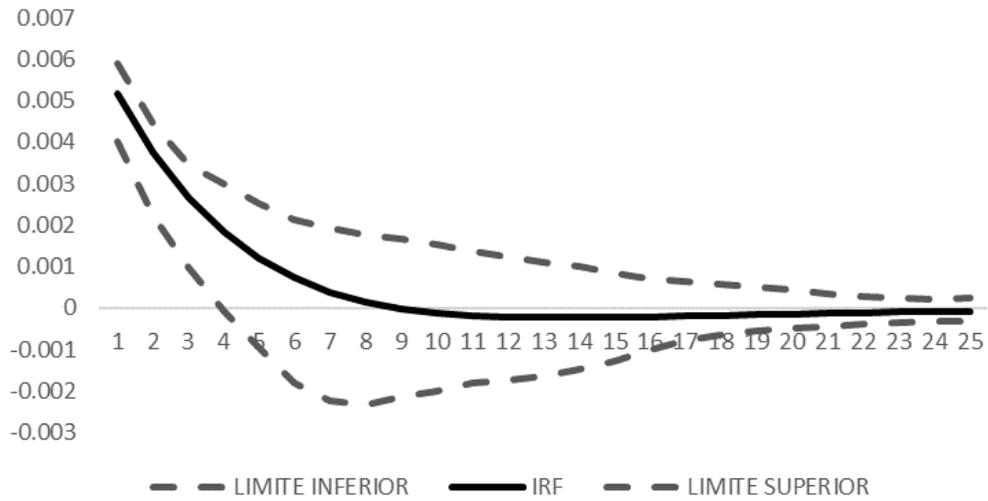


**Figura E. 2:** Respuesta del PIB ante un choque de la DTF

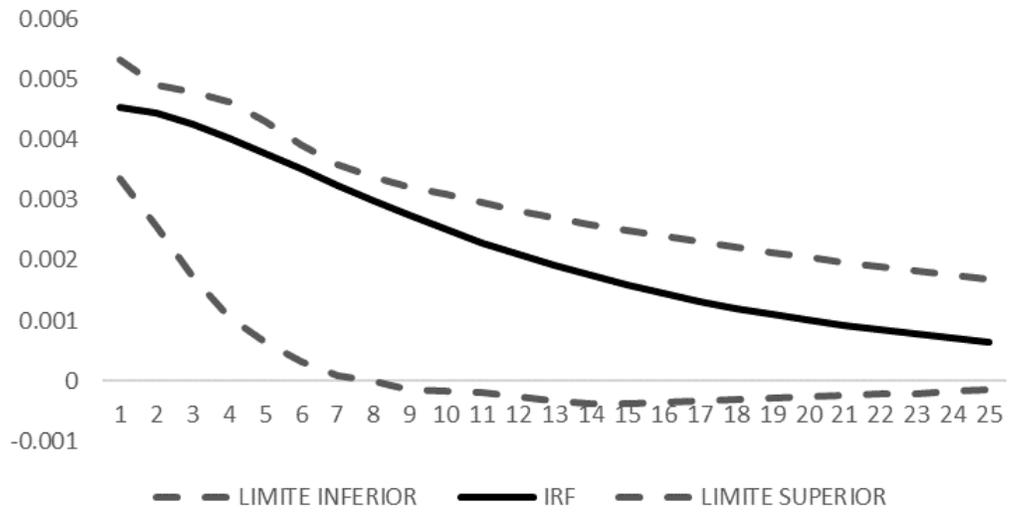


<sup>18</sup> Intervalos de confianza al 95%

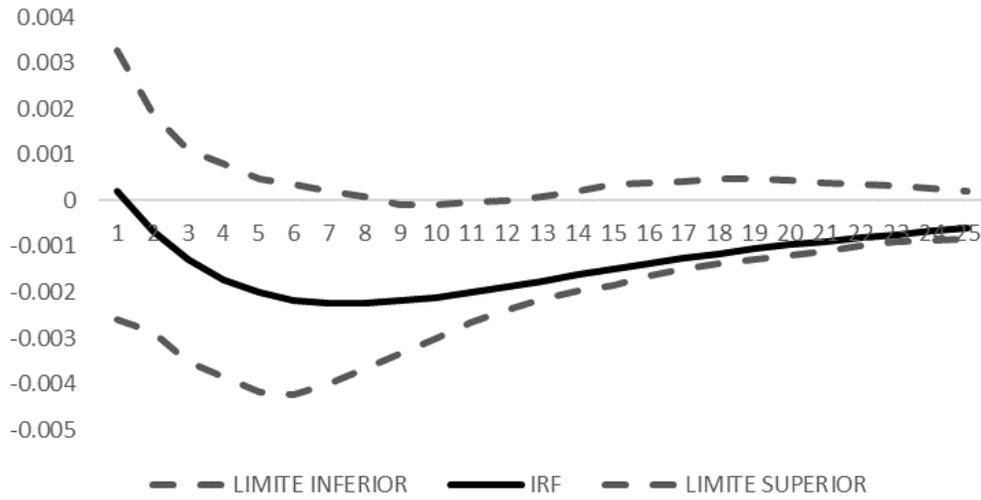
**Figura E. 3:** Respuesta de la DTF ante un choque de la DTF



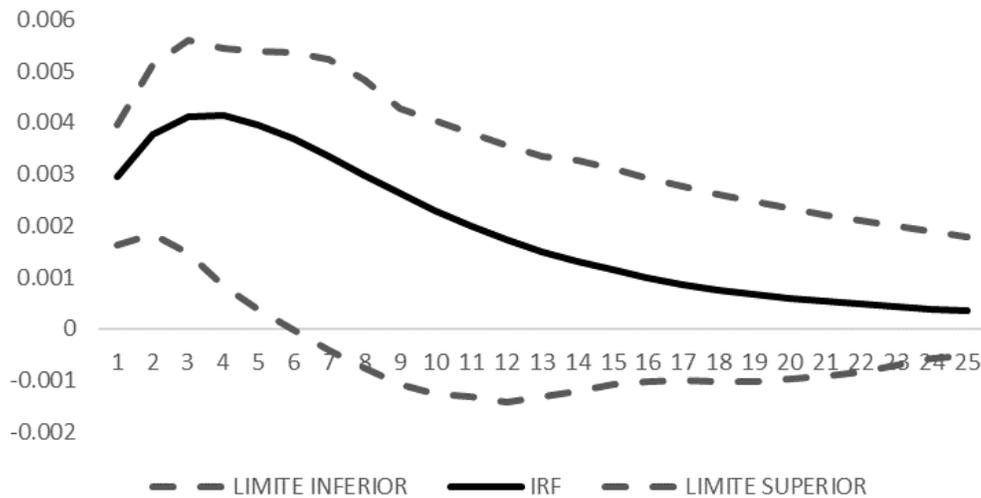
**Figura E. 4:** Respuesta de la Inflación ante un choque de la Inflación



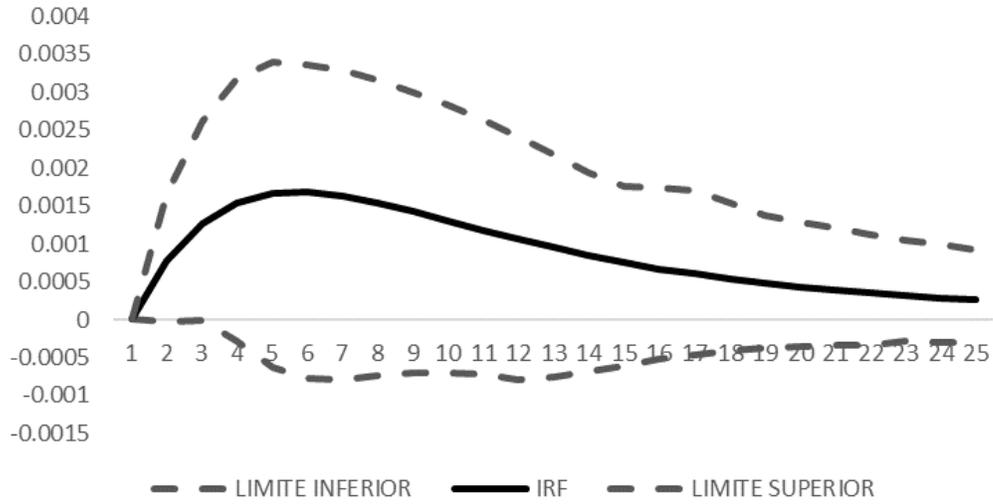
**Figura E. 5:** Respuesta del PIB ante un choque de la Inflación



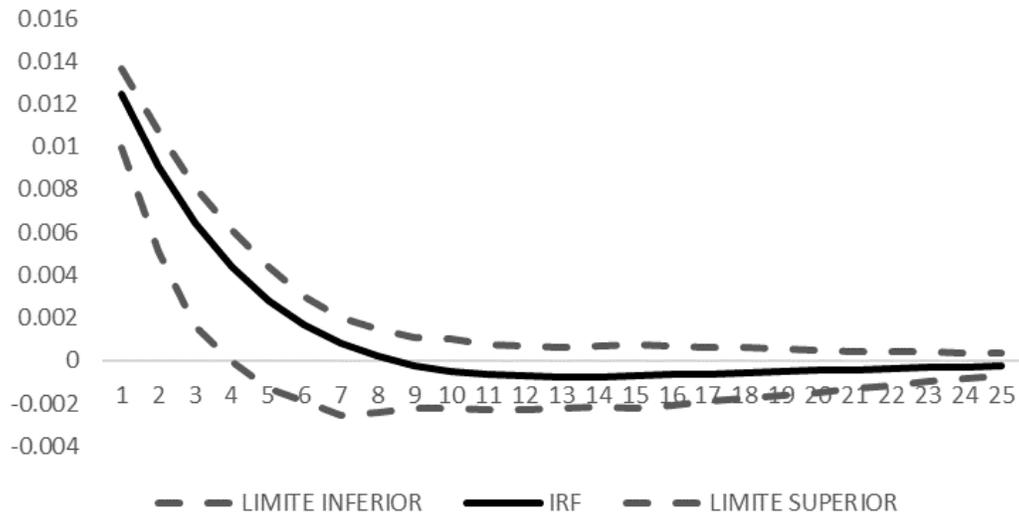
**Figura E. 6:** Respuesta de la DTF ante un choque de la Inflación

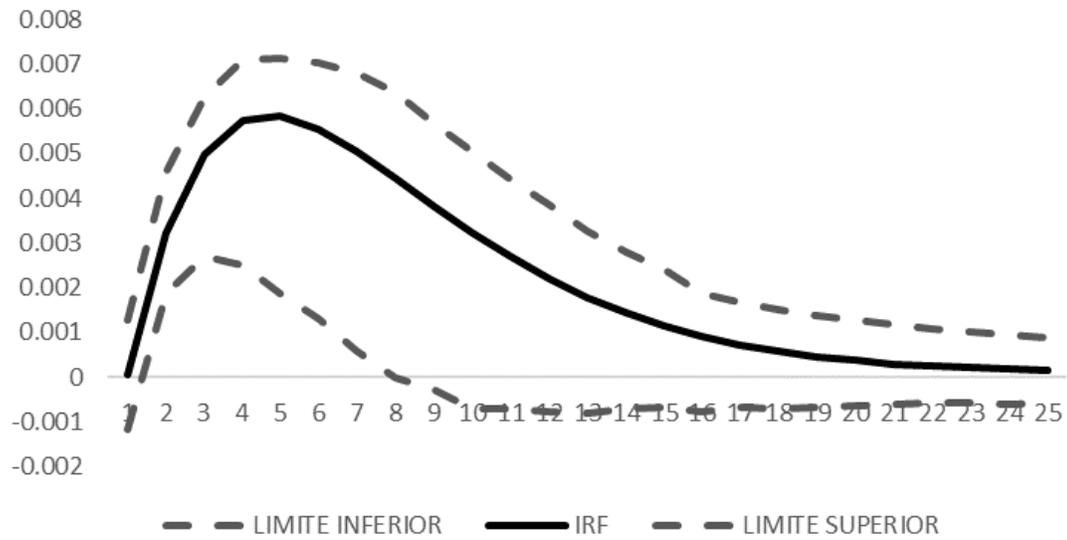


**Figura E. 7:** Respuesta de la Inflación ante un choque del PIB



**Figura E. 8:** Respuesta del PIB ante un choque del PIB



**Figura E. 9:** Respuesta de la DTF ante un choque del PIB

---

## F. Anexo: Códigos en R

Los resultados aquí presentados fueron desarrollados usando el software estadístico R (R Development Core Team, 2017). Se utilizaron códigos presentados por Droumaguet, Warne, & Woźniak (2016) y funciones desarrolladas por la librería MSBVAR. Los códigos están disponibles a solicitud. Por favor escribir a [chruizc@unal.edu.co](mailto:chruizc@unal.edu.co).

## Bibliografía

- Adolfson, M., J. Lindé., and M. Villani. (2007). Forecasting Performance of an Open Economy DSGE Model. *Econometric Reviews* 26 (2-4), 289–328.
- Artis, M.J., Krolzig, H.M., Toro, J. (2004). The European business cycle. *Oxford Economic Papers* 56, 1–44.
- Bernanke, B., y Blinder, A. (1992). The Federal Funds Rate and the Channels of Monetary Transmission. *American Economic Review*, 82(4), 901-921.
- Blanchard, O., y Quah, D. (1989). The Dynamic Effects of Aggregate Demand and Supply Disturbances. *American Economic Review*, 655-673.
- Blanchard, O., y Watson, M. (1984). Are Business Cycle All Alike? *Cambridge: National Bureau of Economic Research. Working Paper Series* (1392).
- Camacho, M., Perez-Quiros, G. (2013). Commodity Prices and the Business Cycle in Latin America: Living and Dying by Commodities? *Working Paper 1304, Banco de España*.
- Canzoneri, M.B., y Henderson, D.W. (1991). Monetary Policy in Interdependent Economies: A Game-Theoretic Approach, *MIT Press Books, The MIT Press*.
- Casella, G., y E. I. George. (1992). Explaining the Gibbs Sampler. *The American Statistician* 46(3), 167–174.

- Christiano, L., Eichenbaum, M., & Evans C. (2005). Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy. *Journal of Political Economy*, 2005, vol. 113, No. 1, pp. 1-45.
- Christiano, L., y Eichenbaum, M. (1992). Liquidity Effects and the Monetary Transmission Mechanism. *American Economic Review*, 82 (2), 346-53
- Christiano, Lawrence J., Martin Eichenbaum and Charles L. Evans (1996), The Effects of Monetary Policy Shocks: Evidence from the Flow of Funds, *Review of Economics and Statistics* Vol. 78, No. 1, pages 16 - 34.
- Christiano, Lawrence J., Martin Eichenbaum, and Charles L. Evans. (1998). Modeling Money. *Working Paper no. 6371 (January), NBER, Cambridge, MA.*
- Christiano L.J., Eichenbaum M.S., and Evans C.L, (2001) Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy, *NBER working paper* no. 8403, July 2001.
- Clarida, Richard., Jordi Gali., y Mark Gertler. (1999). The Science of Monetary Policy: A New Keynesian Perspective. *Journal of Economic Literature* 37 (December): 1661–1707.
- Diebold F. X., y Rudebusch G. D. (1996), Measuring business cycles: a modern perspective, *Review of Economics and Statistics* 78(1), 67-77.
- Doan, T., R. B. Litterman, y C. A. Sims (1983). Forecasting and Conditional Projection Using Realistic Prior Distributions. *NBER Working Paper* 1202(September), 1–71.
- Droumaguet, M (2012). Markov-Switching Vector Autoregressive Models: Monte Carlo experiment, impulse response analysis, and Granger-Causal analysis. *European University Institute.*

- Droumaguet, M., Warne, A., & Wozniak, T. (2016). Granger Causality and Regime Inference in Markov-Switching VAR Models with Bayesian Methods. *Journal of Applied Econometrics*.
- Droumaguet, M., & Wozniak, T. (2012). Bayesian Testing of Granger Causality in Markov-Switching VARs. *Working Paper Series 2012/06 European University Institute Florence, Italy*.
- Ehrmann, M., Ellison, M., Valla, N., (2003). Regime – dependent impulse response functions in a Markov-switching vector autoregressive model. *Economics Letters*. (78), 295–299.
- Eichenbaum, M. & Evans C. (1995) Some Empirical Evidence on the Effects of Shocks to Monetary Policy on Exchange Rates. *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 110, No. 4. (Nov.), pp. 975-1009.
- Friedman, M., (1964). Monetary Studies of the National Bureau. In: 44th Annual Report, NBER.
- Farmer, R., D. Waggoner, y T. Zha (2009): Understanding Markov-Switching Rational Expectations Models, *Journal of Economic Theory*, 144, 1849–1867.
- Friedman, B. (1995). Does monetary policy affect real economic activity?: Why do we still ask this question?, *NBER Working Paper Series 5212*.
- Frühwirth-Schnatter, S. (2006). Finite Mixture and Markov Switching Models. Springer.
- Hamilton, J. D., 1989. A new approach to the economic analysis of non-stationary time series and the business cycle. *Econometrica* 57(2), 357–384.
- Hansen, G.E. and E. Prescott (1999): Capacity Constraints, Asymmetries and the Business Cycle. *Review of Economic Dynamics* 8, 850-865

- Karamé, F., (2010). Impulse-response functions in Markov-switching structural vector autoregressions: a step further. *Economic Letters*. 106(3), 162–165.
- Karamé, F., (2012). An algorithm for computing generalized impulse-response function in Markov-switching structural var. *Economic Letters*. 117(1), 230–234.
- Karamé, F., (2015). Asymmetries and Markov-switching structural VAR. *Journal of Economic Dynamics & Control* 53 85–102
- Kass, R. E. y A. E. Raftery (1995). Bayes Factors. *Journal of the American Statistical Association* 90(430), 773–795.
- Keynes, J.M., (1936). *The General Theory of Employment, Interest and Money*, MacMillan, London.
- Kim C. J. (1994), Dynamic linear models with Markov-switching. *Journal of Econometrics* 60, 1-22.
- Kim C. J. y Nelson C. R. (1998), Business cycles turning points, a new coincident index and test of duration dependence based on a Dynamic factor model with regime switching. *Review of Economics and Statistics* 80, 188-201.
- Kim, C.-J. y C. R. Nelson (1999a). Has the U.S. Economy Become More Stable? A Bayesian Approach Based on a Markov-Switching Model of the Business Cycle. *Review of Economics and Statistics* 81(4), 608–616.
- Kim, C.-J. and C. R. Nelson (1999b). *State-Space Models with Regime Switching: Classical and Gibbs-Sampling Approaches with Applications*. MIT press.
- Kim, S., y Roubini, N. (2000). Exchange Rate Anomalies in the Industrial Countries: A solution with a Structural VAR approach. *Journal of Monetary Economics* (45), 561-586.

- Koop, G., Pesaran, H., Potter, S., (1996). Impulse response analysis in nonlinear multivariate models. *Journal of Econometrics*. (74), 119–147.
- Koop, G. and D. Korobilis (2010). Bayesian Multivariate Time Series Methods for Empirical Macroeconomics. *Foundations and Trends in Econometrics* 3(4), 267–358.
- Krolzig, H. M., (1997). Markov-Switching Vector Autoregressions, Springer.
- Krolzig, H.M., Toro, J., (2001). A New Approach to the Analysis of Business Cycle Transitions in a Model of Output and Employment. *Working Paper 9959, University of Oxford*.
- Krolzig, H. (2006). Impulse Response Analysis in Markov Switching Vector Autoregressive Models. In Economics Department, *University of Kent. Keynes College*.
- Lavan Mahadeva y Munir Jalil (2011) Mecanismos de transmisión de la política monetaria en Colombia, editado por Banco de la República y Universidad Externado de Colombia.
- Litterman, R. B. (1986). Forecasting with Bayesian Vector Autoregressions: Five Years of Experience. *Journal of Business & Economic Statistics* 4(1), 25–38.
- Lütkepohl, H. (2008). Impulse Response Function. In S. N. Durlauf and L. E. Blume (Eds.), *The New Palgrave Dictionary of Economics*. Basingstoke: Palgrave Macmillan.
- Lütkepohl, H. y M. Krätzig (2004). Applied Time Series Econometrics. Cambridge University Press.
- McCallum, B. (1999). Analysis of the Monetary Transmission Mechanism: Methodological Issues. Cambridge, MA: *National Bureau of Economic Research (Working Paper 7395)*.

- Melo, L. F.; Misas, M. (1997). Análisis del comportamiento de la inflación trimestral en Colombia bajo cambios de régimen: una evidencia a través del modelo switching de Hamilton. *Borradores de Economía* 83, Banco de la República.
- Mishkin F. (1995), Symposium on the Monetary Transmission Mechanism, *The Journal of Economic Perspective*, Vol. 9, pp. 3-10.
- Misas M, Ramírez M.T. (2006) Colombian Economic Growth under Markov Switching Regimes with Endogenous Transition Probabilities. *Borradores de Economía*, 2006, Numero 425.
- Misas M., Ramírez M.T. (2007) Depressions in the Colombian economic growth during the XX century: A Markov Switching Regime Model. *Applied Economics Letters* 14; 11; 803-808.
- Mitchell, W.C., (1927). Business Cycles: The Problem and its Setting. NBER Book Series Studies in Business Cycles, NBER.
- Potter, S., (1995). A nonlinear approach to US GNP. *J. Appl. Econom.* 10(2), 109–125.
- Rabin A.A., y Jeager L.B. (1997), The Monetary Transmission Mechanism, *The Eastern Economic Journal*, Vol. 23 (3), pp. 293-9.
- Robertson, J. C., y E.W. Tallman (1999). Vector Autoregressions: Forecasting and Reality. *Federal Reserve Bank of Atlanta Economic Review* (First Quarter), 4–18.
- Rubio-Ramirez, J.F., Waggoner, D., Zha, T., (2005). Markov-Switching Structural Vector Autoregressions: Theory and Applications. *Discussion Paper, Federal Reserve Bank of Atlanta*.
- Salamanca A (2010) Sincronización de los ciclos económicos: El caso de Colombia, Ecuador y Venezuela, *Cuadernos de Economía*, vol. 31, núm. 57, pp. 179-199, 2012.

- Shapiro, M., y Watson, M. (1988). Sources of Business Cycle Fluctuations. In F. Stanley, NBER Macroeconomic Annual 1988 (pp. 111-148). *Masachussets: MIT Press*.
- Sims, C. (1980). Macroeconomics a Reality. *Econometrica*, 48 (1), 1-48.
- Sims, C. (1992). Interpreting the Macroeconomic Time Series Facts: The Effects of Monetary Policy. *European Economic Review*, 36, 975-1000.
- Sims, C. A., Zha, T., (2006). Were there regime switches in U.S. monetary policy? *American Economic Review* 96(1), 54–81.
- Taylor, T., (1995). The Monetary Transmission Mechanism: An Empirical Framework, *Journal of Economic Perspectives, American Economic Association*, vol. 9(4), pages 11-26, Fall.
- Teräsvirta, T., (1995). Modelling non linearity in US gross national product 1889–1987. *Implied Econometrics* 20, 577–597.
- Tong, H., (1990). *Nonlinear Time Series: a Dynamical System Approach*, Oxford University Press.
- Tsay, R. S., (1989). Testing and modeling threshold autoregressive processes. *Journal of America Statistic Association* . 84, 231–240.
- Van Dijk, D., Franses, P.-H., Boswijk, H. P., (2007). Absorption of shocks in nonlinear autoregressive models. *Computational Statistics & Data Analysis*. 51, 4206–4226.
- Weise, C. L., (1999). The asymmetric effects of monetary policy: a nonlinear vector autoregression approach. *Journal of Money, Credit and Banking*. 31(1), 85–108.
- Zarate, H. M., Rodriguez N. y MARIN, M. El Tamaño de las Empresas y la Transmisión de la Política Monetaria en Colombia: Una Aplicación con la Encuesta Mensual de

Expectativas Económicas. *Revista de Economía del Rosario*, Vol. 16, No 1, Enero-Junio 2013, pp 61-87