SOLUCIONES PERIODICAS DE ECUACIONES DE ONDA NO LINEALES

MARIO AURELIO RONDÓN SANTOS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, JUNIO DE 2012

SOLUCIONES PERIODICAS DE ECUACIONES DE ONDA NO LINEAL

Trabajo de grado presentado a la Facultad de Ciencias
de la Universidad Nacional de Colombia,
Sede Bogotá.
Como requisito parcial para optar al título de
MAGISTER SCIENTIAE - MATEMÁTICAS

Por: MARIO AURELIO RONDÓN SANTOS

Director: Ph.D. en Matemáticas JOSÉ FRANCISCO CAICEDO

Bogotá D. C., Junio de 2012

Dedicatoria

A la memoria de mi tía,
Luz Rondón.

Agradecimentos

A Dios por acompañarme siempre en mi camino.

A mis padres por su apoyo incondicional.

Al Profesor José Francisco Caicedo por aceptar dirigir este trabajo, por su dedicación incondicional, sus consejos y sus valiosos aportes.

Resumen

En este trabajo se demuestra para T suficientemente grande la existencia de una solución $T-$periodica no trivial al problema de la ecuación no lineal de la cuerda vibrante bajo condiciones de frontera de Dirichlet sobre un intervalo finito. Soluciones periódicas no triviales quiere decir que la parte no lineal sea distinta de cero sobre un conjunto de medida positiva; en particular, la solución no sea cero sobre este conjunto.

Palabras claves: Ecuación de onda no lineal, soluciones periódicas.

Abstract

In this paper prove that for T sufficiently large, there is a nontrivial $T-$periodic solution to the problem of the nonlinear vibrating string equation under Dirichlet boundary conditions on a finite interval. By nontrivial $T-$periodic solutions (in t) of the nonlinear vibrating string equation we mean that the nonlinear function not is zero on a set of positive measure, in particular the solution not is zero on that set.
Keywords: Nonlinear wave equation, periodic solutions.

Tabla de Contenido

Introducción

Encontrar soluciones no triviales para la ecuación de onda unidimensional en especial para el caso no lineal ha sido objeto de estudio en la física-matemática. En el presente trabajo se estudia [1], en dicho artículo se demuestra para un T suficientemente grande la existencia de una solución $T-$periodica no trivial al problema de la ecuación no lineal de la cuerda vibratoria bajo la condición de frontera de Dirichlet sobre un intervalo finito. Por no trivial se quiere decir que la función no lineal sea distinta de cero sobre un conjunto de medida positiva; en particular , la solución a encontrar es distinta de cero sobre este conjunto. Se usa para ello, de manera esencial, la teoría de análisis funcional, que puede ser encontrada en el texto de Brezis [2]. La existencia de soluciones no triviales para este problema ha sido considerada por varios autores bajo otros supuestos que difieren de los utilizados en [1] (ver [4], [5], [6], [7]).

Este trabajo se desarrolla en dos capítulos. En el primer capítulo se encuentran algunas definiciones del análisis funcional tales como espacios duales, espacios reflexivos, espacios separable, espacios L^p, entre otros, como también importantes teoremas, proposiciones, corolarios, cuyas demostraciones se pueden encontrar en [2]. En el segundo capítulo se desarrollan cinco pasos para demostrar el teorema de existencia de la solución no trivial al problema planteado.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1. El Espacio dual $E^\star$

Sea E un espacio vectorial sobre R. Recordemos que una *forma lineal* es una aplicación lineal definida sobre E, o sobre un subespacio vectorial de E, con valores en R.

Definición 1.1. Un espacio normado $(E, \| \ \|)$ se dice un *espacio de Banach*, si como espacio métrico con la métrica inducida por la norma es completo, es decir, es un espacio en el cual toda sucesión de Cauchy es convergente.

En lo que sigue E es un espacio vectorial normado (e.v.n) de norma $|| \ ||$.

Observación 1.1. Se designa por $E^\star$ *el espacio dual (topológico)* de E, i.e. el espacio de las *formas lineales y continuas sobre* E; $E^\star$ está dotado de la *norma (dual)*

$$||f||_{E^\star} = \sup_{\substack{x\in E \\ ||x||\leq 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x\in E \\ ||x||\leq 1}} f(x).$$

Dado $f \in E^\star$ y $x \in E$ escribiremos $\langle f, x\rangle$ en lugar de $f(x)$; se dice que $\langle \ , \ \rangle$ es el *producto escalar para la dualidad* $E^\star, E$.

Observación 1.2. Si $M \subset E$ es un subespacio vectorial, se escribe

$$M^{\perp} = \{f \in E^{\star};\ \langle f, x\rangle = 0 \ \ \forall x \in M\}$$

Si $N \subset E^{\star}$ es un subespacio vectorial, se escribe

$$N^{\perp} = \{x \in E;\ \langle f, x\rangle = 0 \ \ \forall f \in N\}.$$

Diremos que ($M^{\perp}$ ($resp.N^{\perp}$)) es el espacio ortogonal de M (resp.N). Señalemos que $M^{\perp}$ (resp.$N^{\perp}$) es un subespacio vectorial cerrado de $E^{\star}$ (resp. E).

1.2. Una Rápida Introducción a la Teoría de Funciones Conjugadas Convexas

Iniciamos con algunas propiedades básicas de funciones semicontinuas inferiores y funciones convexas. En esta sección consideramos funciones φ definidas sobre un conjunto E con valores en $]-\infty, +\infty]$, así que φ puede tomar el valor $+\infty$ (pero $-\infty$ es excluido). Denotaremos por $D(\varphi)$ el *dominio de* φ es decir, el conjunto

$$D(\varphi) = \{x \in E\ ;\ \ \varphi(x) < +\infty\}.$$

Se supone ahora que E es un espacio topológico.

Definición 1.2. Una función $\varphi : E \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ se dice semicontinua inferiormente (s.c.i) si para todo $x \in E$ se tiene

$$\liminf_{y \longrightarrow x} \varphi(y) \geq \varphi(x).$$

Utilizaremos algunas propiedades elementales de las funciones s.c.i:

a. Si φ_1 y φ_2 son s.c.i., entonces $\varphi_1 + \varphi_2$ es s.c.i.

b. Si $(\varphi_i)_{i \in I}$ es una familia de funciones s.c.i, entonces la envolvente superior es también s.c.i., es decir, la función φ definida por

$$\varphi(x) = \sup_{i \in I} \varphi(x)$$

is s.c.i.

c. Si E es compacto y φ es s.c.i entonces φ alcanza su cota inferior sobre E.

Ahora se supone que E es un espacio vectorial.Se tiene la siguiente definición:

Definición 1.3. Una función $\varphi : E \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ se dice *convexa* si

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) \qquad \forall\ x, y \in E, \quad \forall\ t\ \in]0,1[.$$

Usaremos algunas propiedades elementales de funciones convexas:

1. Si φ_1 y φ_2 son convexas, entonces $\varphi_1 + \varphi_2$ es convexa.

2. Si $(\varphi_i)_{i\in I}$ es una familia de funciones convexas, entonces la envolvente superior, $\sup_i \varphi_i$, es convexa.

Ahora se supone que E es un *e.v.n*

Definición 1.4. Dada una función $\varphi : E \longrightarrow\ ]-\infty\ ,\ +\infty]$ tal que $\varphi \not\equiv +\infty$ (i.e $D(\varphi) \neq \varnothing$). Definimos la función *conjugada* $\varphi^* : E^\star \longrightarrow\ ]-\infty\ ,\ +\infty]$, a ser

$$\varphi^\star(f) = \sup_{x\in E}\ \{\ \langle f, x\rangle - \varphi(x)\ \} \qquad (f \in E^\star).$$

Note que $\varphi^\star$ es una función convexa s.c.i. sobre $E^\star$. En efecto, para cada $x \in E$ fijo la función $f \longrightarrow \langle f, x\rangle - \varphi(x)$ es convexa y continua (y así s.c.i) sobre $E^\star$. Se sigue que la envolvente superior de estas funciones (cuando x recorre E) es convexa y s.c.i.

Observación 1.3. Claramente tenemos la desigualdad

$$\langle f, x\rangle \leq \varphi(x) + \varphi^\star(f) \quad \forall x \in E, \quad \forall f \in E^\star,$$

que es algunas veces llamada la desigualdad de Young.

A continuación enunciamos algunas propiedades y ejemplos de las funciones conjugadas convexas[1]:

Propiedades de funciones conjugadas convexas

1. Si $f \leq g$, entonces $f^\star \geq g^\star$.

2. $(\rho f)^\star(x) = \rho f^\star(x/\rho)$, $\rho > 0$.

3. $(f + C)^\star = f^\star + C$.

[1]Se pueden encontrar en Convex Analysis, R. T. Rockafellar y en Convex analysis: An introductory Text, Jhon Wiley .

Ejemplo 1.1. Sea $\varphi = e^x$

$$\varphi^\star(f) = \sup_{x\in R} \; \{ \; cx - e^x \; \} \, , \quad f \equiv c \in R.$$

Así,

$$\varphi^\star(f) = \begin{cases} f \ln f - f, & \text{si } f > 0, \\ 0, & \text{si } f = 0, \\ +\infty & \text{si } f < 0. \end{cases}$$

Ejemplo 1.2. Considere $\varphi = |x|$.

$$\varphi^\star(f) = \sup_{x\in R} \; \{ \; cx - |x| \; \} \, , \quad f \equiv c \in R.$$

Así,

$$\varphi^\star(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } |f| \leq 1, \\ +\infty & \text{si } |f| > 1. \end{cases}$$

Ejemplo 1.3. Sea $\varphi = \dfrac{|x|^2}{2}$ entonces $\varphi^\star(f) = \dfrac{|f|^2}{2}$.

1.3. Una Introducción a los Operadores lineales no acotados. Definición de la Adjunta.

Observación 1.4. Sean E y F dos *e.v.n.* Se designa por $\mathscr{L}(E,F)$ el espacio de los operadores lineales continuos (= acotados) de E en F dotado con la norma

$$||T||_{\mathscr{L}(E,F)} = \underset{\substack{||x||\leq 1 \\ x\in E}}{Sup} \; ||Tx||.$$

Usualmente se escribe $\mathscr{L}(E)$ en lugar de $\mathscr{L}(E,E)$.

Definición 1.5. sean E y F dos espacios de Banach. Se llama *operador lineal no acotado* de E en F a toda aplicación lineal $A : D(A) \subset \; E \longrightarrow F$ definida sobre un subespacio lineal $D(A) \subset E$ con valores en F. El conjunto $D(A)$ es el dominio de A.

Se dice que A es *acotado* (o continuo) si $D(A) = E$ y si existe una constante $c \geq 0$ tal que

$$||Au|| \leq c||u|| \qquad \forall u \ \in \ E$$

La norma de un operador acotado está definida por

$$||A||_{\mathscr{L}(E,F)} = \sup_{u \neq 0} \frac{||Au||}{||u||}.$$

Precisemos algunas notaciones y definiciones importantes

$$\textit{Rango de } A = R(A) = \{Au; u \in D(A)\} \subset F,$$

$$\textit{Núcleo \ de } A = N(A) = \{u \in D(A); \ Au = 0\} \subset E$$

Observación 1.5. Si A es cerrado, entonces $N(A)$ es cerrado; sin embargo, $R(A)$ no necesariamente es cerrado.

Observación 1.6. En la práctica, la mayoría de los operadores no acotados que se encuentran son cerrados y densamente definidos, es decir, con dominio $D(A)$ denso en E.

Definición 1.6 (Definición de la adjunta $A^\star$.)**.** Sea $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un operador no acotado que es densamente definido. Definiremos un operador no acotado $A^\star : D(A^\star) \subset F^\star \longrightarrow E^\star$ como sigue. Primero, se define su dominio

$$D(A^\star) = \{v \in F^\star; \ \exists \ c \geq 0 \quad \text{tal que} \ \ |\langle v, Au \rangle| \leq c||u|| \ \forall u \in D(A)\}.$$

Claramente $D(A^\star)$ es un subespacio lineal de $F^\star$. Ahora definimos $A^\star v$. Dado $v \in D(A^\star)$, se considera la aplicación $g : D(A) \longrightarrow R$ definida por

$$g(u) = \langle v, Au \rangle \ , \quad \forall u \in D(A).$$

Tenemos

$$|g(u)| \leq c||u|| \ \ \forall u \in D(A).$$

Hacemos

$$A^{\star}v = f$$

El operador lineal no acotado $A^{\star} : D(A^{\star}) \subset F^{\star} \longrightarrow E^{\star}$ se llama la *adjunta de* A. En resumen, la relación fundamental entre A y $A^{\star}$ está dada por:

$$\langle v, Au\rangle_{F^{\star},F} = \langle A^{\star}v, u\rangle_{E^{\star},E} \qquad \forall u \in D(A),\ \forall v \in D(A^{\star}).$$

Observación 1.7. Puede ocurrir que $D(A^{\star})$ no es denso en $A^{\star}$ (aún si A es cerrado); pero esto es una situación bastante patológica. Siempre es verdadero que si A es cerrado entonces $D(A^{\star})$ es denso en $F^{\star}$ para la topología débil* $\sigma(F\star, F)$. En particular, si F es reflexivo, entonces $D(A^{\star})$ es denso en F para la topología usual.

Proposición 1.4. Sea $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un operador densamente definido lineal no acotado entonces $A^{\star}$ es cerrado.

A continuación algunas relaciones entre rangos y núcleos:

Corolario 1.1. Sea $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un operador no acotado, cerrado y densamente definido. Entonces se verifica

(i) $\quad N(A) = R(A^{\star})^{\perp}$

(ii) $\quad N(A^{\star}) = R(A)^{\perp}$

(iii) $\quad N(A)^{\perp} \supset \overline{R(A^{\star})}$

(iv) $\quad N(A^{\star})^{\perp} = \overline{R(A)}.$

El principal resultado sobre operadores con rango cerrado es el siguiente:

Teorema 1.5. Sea $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un operador lineal no acotado que es densamente definido y cerrado. Las siguientes propiedades son equivalentes:
(i) $R(A)$ es cerrado,
(ii) $R(A^{\star})$ es cerrado,
(iii) $R(A) = N(A^{\star})^{\perp}$,
(iv) $R(A^{\star}) = N(A)^{\perp}$.

1.4. Definición y Propiedades Elementales de la Topología Débil $\sigma(E, E^{\star})$

Sea E un espacio de Banach y sea $f \in E^{\star}$. Se designa por $\varphi_f : E \longrightarrow R$ la funcional lineal dada por $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle$. Cuando f recorre $E^{\star}$ obtenemos una colección $(\varphi_f)_{f\in E^{\star}}$ de aplicaciones de E en R. Ignoraremos la topología usual sobre E (asociada a $|| \, ||$) y definimos una nueva topología sobre el conjunto E como sigue:

Definición 1.7. La *topología débil* $\sigma(E, E^{\star})$ sobre E es la topología menos fina sobre E que hace continuas a todas las aplicaciones $(\varphi_f)_{f\in E^{\star}}$

Observación 1.8. Si una sucesión (x_n) en E converge a x en la topología débil $\sigma(E, E^{\star})$ escribiremos

$$x_n \rightharpoonup x.$$

Para evitar cualquier confusión se dice "$x_n \rightharpoonup x$ débilmente en $\sigma(E, E')$." Para ser totalmente claros se enfatizará diciendo, "$x_n \longrightarrow x$ fuertemente ", lo que significa que $||x_n - x|| \longrightarrow 0$.

Proposición 1.6. Sea (x_n) una sucesión en E. Se verifica:
(i) $[x_n \rightharpoonup x$ débilmente en $\sigma(E, E^{\star})] \quad \Leftrightarrow \quad [\langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle \ \forall \ f \in E^{\star}]$
(ii) Si $x_n \longrightarrow x$ fuertemente, entonces $x_n \rightharpoonup x$ débilmente en $\sigma(E, E^{\star})$.
(iii) Si $x_n \rightharpoonup x$ débilmente para $\sigma(E, E^{\star})$, entonces $(||x_n||)$ está acotada y $||x|| \leq \liminf ||x_n||$.
(iv) Si $x_n \rightharpoonup x$ débilmente en $\sigma(E, E^{\star})$ y si $f_n \longrightarrow f$ fuertemente en $E^{\star}$ (es decir, $||f_n - f||_{E^{\star}} \longrightarrow 0$), entonces $\langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$.

Nota 1.1. Cuando E es de dimensión infinita existen en general sucesiones que convergen débilmente pero que no convergen fuertemente.

Todo conjunto cerrado en la topología débil $\sigma(E, E')$ es cerrado en la topología fuerte. Pero el reciproco es falso en dimensión infinita. Sin embargo, para los conjuntos convexos estas dos nociones coinciden.

Teorema 1.7. Sea C un conjunto convexo de E. Entonces C es cerrado en la topología débil $\sigma(E, E^\star)$ si y sólo si es cerrado en la topología fuerte.

1.5. La Topología débil* $\sigma(E^\star, E)$

Sea E un espacio de Banach y sea $E^\star$ su espacio dual dotado con norma

$$||f||_{E^\star} = \underset{\substack{x\in E \\ ||x||\leq 1}}{Sup}|\langle f, x\rangle|.$$

y sea $E^{\star\star}$ su bidual , es decir, el dual de $E^\star$ dotado de la norma

$$||\xi||_{E^{\star\star}} = \underset{\substack{f\in E^\star \\ ||f||\leq 1}}{Sup}|\langle \xi, f\rangle| \qquad (\xi \in E^{\star\star}).$$

Existe una inyección canónica $J : E \longrightarrow E^{\star\star}$ definida como sigue: dada $x \in E$ fijo, la aplicación $f \to \langle f, x\rangle$ de $E^\star$ en R es una forma lineal continua sobre $E^\star$, es decir, un elemento de $E^{\star\star}$, que es notado por Jx. Tenemos

$$\langle Jx, f\rangle_{E^{\star\star}, E^\star} = \langle f, x\rangle_{E^\star, E} \qquad \forall x \in E, \forall \in E^\star.$$

Claramente J es lineal y J es una isometría , es decir , $||Jx||_{E^{\star\star}} = ||x||_E$ para todo $x \in E$; en efecto, tenemos

$$||Jx||_{E^{\star\star}} = \sup_{||f||\leq 1}|\langle Jx, f\rangle| = \sup_{||f||\leq 1}|\langle f, x\rangle| = ||x||.$$

Así sobre el espacio $E^\star$ quedan definidas dos topologías:
a. la topología usual (fuerte) asociada a la norma de $E^\star$,
b. La topología débil $\sigma(E^\star, E^{\star\star})$.
Vamos ahora a definir una tercera topología sobre $E^\star$: La topología débil* que se nota con $\sigma(E^\star, E)$. Para cada $x \in E$ se considera la aplicación $\varphi_x : E^\star \longrightarrow R$ definida por $f \longrightarrow \varphi_x(f) = \langle f, x\rangle$. Cuando x recorre E se obtiene una familia de aplicaciones $(\varphi_x)_{x\in E}$ de $E^\star$ en R.

Definición 1.8. La topología débil*, $\sigma(E^\star, E)$, es la topología menos fina sobre $E^\star$ que hace continua a todas las aplicaciones $(\varphi_x)_{x\in E}$.

Ya que $E \subset E^{\star\star}$ resulta claro que la topología $\sigma(E^\star, E)$ es menos fina que la topología $\sigma(E^\star, E^{\star\star})$; es decir, la topología $\sigma(E^\star, E)$ tiene menos conjuntos abiertos (respectivamente conjuntos cerrados) que la topología $\sigma(E^\star, E^{\star\star})$, que a su vez tiene menos conjuntos abiertos (resp. conjuntos cerrados) que la topología fuerte.

Observación 1.9. Si una sucesión (f_n) en $E^\star$ converge a f en la topología débil* se escribe

$$f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$$

Para evitar cualquier confusión a veces se precisa "$f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ en $\sigma(E^\star, E)$", "$f_n \rightharpoonup f$ en $\sigma(E^\star, E^{\star\star})$," y "$f_n \longrightarrow f$ fuertemente."

Proposición 1.8. Sea f_n una sucesión de $E^\star$. Entonces

(i) $[f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f \text{ en } \sigma(E^\star, E)] \Leftrightarrow [\langle f_n, x\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle \ \forall\, x \in E]$.

(ii) Si $f_n \to f$ fuertemente, entonces $f_n \rightharpoonup f$ en $\sigma(E^\star, E^{\star\star})$.

Si $f_n \rightharpoonup f$ en $\sigma(E^\star, E^{\star\star})$, entonces $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ en $\sigma(E^\star, E)$.

(iii) Si $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ en $\sigma(E^\star, E)$, entonces $(||f_n||)$ está acotada y $||f|| \leq \liminf ||f_n||$.

(iv) Si $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ en $\sigma(E^\star, E)$ y si $x_n \longrightarrow x$ fuertemente en E, entonces $\langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$.

Observación 1.10. Suponga $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ en $\sigma(E^\star, E)$ (o aún $f_n \rightharpoonup f$ en $\sigma(E^\star, E^{\star\star})$) y $x_n \rightharpoonup x$ en $\sigma(E, E^\star)$. No se puede concluir, en general, que $\langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$ (es muy fácil construir un ejemplo en espacios de Hilbert.)

Observación 1.11. Cuando E es un espacio finito dimensional las tres topologías coinciden (fuerte, débil, débil*) sobre $E^\star$.

1.6. Espacios Reflexivos

Definición 1.9. Sea E un espacio de Banach y sea $J : E \longrightarrow E^{\star\star}$ la inyección canónica de E dentro de $E^{\star\star}$ (ver sección 1.5). El espacio E se dice reflexivo si J es sobreyectiva, es decir, $J(E) = E^{\star\star}$.

Cuando E es reflexivo, $E^{\star\star}$ es usualmente identificado con E.

Observación 1.12. Muchos espacios importantes en análisis son reflexivos. Claramente, espacios finitos dimensionales son reflexivos (ya que $\dim E = \dim E^{\star} = \dim E^{\star\star}$). Como veremos es la sección 1.8, los espacios L^p son reflexivos para $1 < p < \infty$. En la sección 1.9 veremos que los espacios de Hilbert son reflexivos. sin embargo, importantes espacios en análisis no son reflexivos; por ejemplo: $C(K)$, el espacio de las funciones continuas sobre un espacio métrico compacto infinito K, no es reflexivo.

El próximo resultado enuncia una caracterización importantes de los espacios reflexivos.

Teorema 1.9 (Kakutani)**.** Sea E un espacio de Banach. entonces E es reflexivo si y sólo si $B_E = \{x \in E; ||x|| \leq 1\}$ es compacto en la topología débil $\sigma(E, E^{\star})$.

En conexión con las propiedades de compacidad de espacios reflexivos se tienen los siguientes dos resultados:

Teorema 1.10. Supongamos E un espacio de Banach reflexivo y sea (x_n) una sucesión acotada en E. Entonces existe una subsucesión (x_{n_k}) que converge en la topología débil $\sigma(E, E^{\star})$.

Lo opuesto también se cumple.

Teorema 1.11. Supongamos E un espacio de Banach tal que toda sucesión acotada en E admite una subsucesión convergente débilmente en $\sigma(E, E^{\star})$. Entonces E es reflexivo.

Enunciamos algunas propiedades adicionales de espacios reflexivos.

Proposición 1.12. suponga que E es un espacio de Banach reflexivo y sea $M \subset E$ un subespacio lineal cerrado de E. entonces M es reflexivo.

Corolario 1.2. Un espacio de Banach E es reflexivo si sólo si su espacio dual $E^{\star}$ es reflexivo.

Corolario 1.3. Sea E un espacio de Banach reflexivo. Sea $K \subset E$ un subconjunto acotado, cerrado y convexo de E. Entonces K es compacto en la topología débil $\sigma(E, E^{\star})$.

1.7. Espacios Separables

Definición 1.10. Diremos que un espacio métrico E es *separable* si existe un subconjunto $D \subset E$ que es contable y denso.

Proposición 1.13. sea E un espacio métrico separable y sea $F \subset E$ cualquier subconjunto. Entonces F es también separable.

Teorema 1.14. Sea E un espacio de Banach tal que $E^\star$ es separable. Entonces E es separable.

Observación 1.13. Lo opuesto no es verdadero. Se tiene el espacio L^1 es separable pero su espacio dual L^∞ no es separable (ver sección 1.8).

Corolario 1.4. Sea E un espacio de Banach. Entonces

$$[E \text{ reflexivo y separable}] \Leftrightarrow [E^\star \text{ reflexivo y separable}].$$

Propiedades de separabilidad estás muy relacionadas a la metrizabilidad de la topologías débiles. Recordemos que un espacio topológico X se dice metrizable si existe una métrica sobre X que induce la topología de X.

Teorema 1.15. Sea E un espacio de Banach separable. Entonces $B_{E^\star}$ es metrizable en la topología débil* $\sigma(E^\star, E)$.
Opuestamente, si $B_{E^\star}$ es metrizable en $\sigma(E^\star, E)$, entonces E es separable.

Hay una afirmación " dual ".

Teorema 1.16. Sea E un espacio de Banach separable tal que $E^\star$ es separable. Entonces B_E es metrizable en la topología débil $\sigma(E, E^\star)$.
Opuestamente, si B_E es metrizable en $\sigma(E, E^\star)$, entonces $E^\star$ es separable.

Corolario 1.5. Sea E un espacio de Banach separable y sea (f_n) una sucesión acotada en $E^\star$. Entonces existe una subsucesión (f_{n_k}) que converge en la topología débil* $\sigma(E^\star, E)$.

1.8. Los espacios L^p

En lo que sigue, Ω designa un abierto de $\mathbb{R}^n$ dotado de la medida de Lebesgue dx. Se supone que el lector está familiarizado con nociones de *funciones integrables y funciones medibles*; ver, por ejemplo [**?**]. Se designa por $L^1(\Omega)$ el espacio de la funciones integrables de Ω en $\mathbb{R}$. Cuando no hay ambigüedad se escribe L^1 en lugar de $L^1(\Omega)$, y $\int f$ en lugar de $\int_\Omega f(x)dx$. También se usa la notación

$$\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|dx = \int |f|.$$

Como es habitual, se identifican dos funciones de L^1 que coinciden c.t.p. (= excepto en un conjunto de medida nula).
Se presentan los siguientes resultados de integración.

1.9. Algunos Resultados de Integración que es Necesario Conocer

Teorema 1.17 (Teorema de la convergencia monótona de Beppo Levi)**.** Sea (f_n) una sucesión de funciones en L^1 que satisfacen
(a) $f_1 \leq f_1 \leq ... \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots$ c.t.p sobre Ω,
(b) $\sup\limits_n \int f_n < \infty$
Entonces $f_n(x)$ converge c.t.p sobre Ω a un límite finito que se denota por $f(x)$; además $f \in L^1$ y $\| f_n - f\|_{L^1} \to 0$.

Teorema 1.18 (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue)**.** Sea (f_n) una sucesión de funciones en L^1 que satisfacen

a) $f_n(x) \to f(x)$ c.t.p. sobre Ω,

b) Existe una función $g \in L^1$ tal que para todo n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ c.t.p. sobre Ω.

Entonces $f \in L^1(\Omega)$ y $\| f_n - f \|_{L^1} \to 0$.

Lema 1.19 (Lema de Fatou)**.** Sea (f_n) una sucesión de funciones de L^1 que satisfacen

(1) Para todo n, $f_n(x) \geq 0$ c.t.p.

(2) $\sup\limits_n \int f_n < \infty$.

Para casi toda $x \in \Omega$ se pone $f(x) = \text{lím}_{n\to\infty} \text{ínf} f_n(x) \leq +\infty$. Entonces $f \in L^1(\Omega)$ y

$$\int f \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int f_n.$$

Observación 1.14. Se designa por $C_c(\Omega)$ el espacio de las *funciones continuas* en Ω y con *soporte compacto*, es decir,

$$C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega); f(x) = 0\ \forall x\ \in \Omega - K \text{ donde } K \subset \Omega \text{ es un compacto.}\}$$

Teorema 1.20 (Teorema de densidad)**.** El espacio $C_c(\Omega)$ es denso en $L^1(\Omega)$, es decir:

$$\forall f \in L^1(\Omega) \text{ y } \forall \epsilon > 0 \text{ se tiene que } \exists f_1 \in C_c(\Omega) \text{ tal que } \|f - f_1\|_{L^1} < \epsilon.$$

Sean $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ abiertos y $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible.

Teorema 1.21 (Tonelli)**.** Supongamos que

$$\int_{\Omega_2} |F(x,y)|dy < \infty \text{ para casi todo } x \in \Omega_1$$

y que

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x,y)|dy < \infty.$$

Entonces $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Teorema 1.22 (Fubini)**.** Supongamos que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Entonces para casi todo $x \in \Omega_1$, $F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2)$, y $\int_{\Omega_2} F(x,y)dy\ \in L^1_x(\Omega_1)$. Similarmente, para casi todo $y \in \Omega_2$, $F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1)$, y $\int_{\Omega_1} F(x,y)dx\ \in L^1_y(\Omega_2)$. Más aún, se tiene quee

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \iint_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)dxdy$$

A continuación se presentan algunas definiciones y propiedades elementales de los espacios L^p.

1.10. Definición y Propiedades Elementales De Los Espacios L^p

Definición 1.11. Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$, se define

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ medible y } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

y se nota

$$\| f \|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$

Definición 1.12. Se define:

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ medible y existe una constante C tal que } |f(x)| \leq C \text{ c.t.p en } \Omega\}$$

con

$$||f||_{L^\infty} = Inf\,\{C : |f(x)| \leq C \text{ c.t.p en } \Omega.\}$$

Observación 1.15. Si $f \in L^\infty$, entonces $|f(x)| \leq ||f||_{L^\infty}$ c.t.p en Ω

Observación 1.16. Sea $1 \leq p < \infty$; se denota por q el exponente conjugado de p,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Teorema 1.23 (Desigualdad de Young)**.** Sean $1 < p < \infty$. Entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b \geq 0)$$

Teorema 1.24 (Desigualdad de Hölder)**.** Sean $f \in L^p$ y $g \in L^q$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $fg \in L^1$ y

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Corolario 1.6 (Desigualdad de Interpolación)**.** Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^p(\Omega)$con $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, entonces $f \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leqslant r \leqslant q$ y se verifica la desigualdad de interpolación

$$||f||_r \leqslant ||f||_p^\alpha ||f||_q^{1-\alpha}, \text{ donde } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}, \ 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Teorema 1.25 (Desigualdad de Minkowski)**.** Sean $1 \leqslant p \leqslant \infty$ y $f, g \in L^p(\Omega)$. Entonces

$$||f + g||_p \leqslant ||f||_p + ||g||_p$$

Teorema 1.26. $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach para cualquier p, $1 \leq p \leq \infty$.

1.11. Reflexibilidad. Separabilidad. Dual de L^p

Se consideran separadamente los siguientes tres casos:

(A) $1 < p < \infty$,

(B) $p = 1$,

(C) $p = \infty$.

(A) Estudio de L^p para $1 < p < \infty$.

Este caso es el más "favorable": L^p es reflexivo, separable, y el dual de L^p es L^q.

Teorema 1.27. $L^p(\Omega)$ es separable para cualquier $1 < p < \infty$.

Teorema 1.28 (Teorema de representación de Riesz)**.** Sea $1 < p < \infty$ y sea $\varphi \in (L^p)^\star$. Entonces existe una única función $u \in L^q$ tal que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int uf \quad \forall f \in L^p.$$

Más aún,

$$||u||_{L^q} = ||\varphi||_{(L^p)^\star}.$$

Observación 1.17. El anterior teorema es muy importante. Este expresa que toda forma lineal continua sobre L^p con $1 < p < \infty$ se representa "concretamente" como una integral. La aplicación $\varphi \longrightarrow u$ es lineal isométrico y sobreyectivo, que permite identificar el "abstracto" espacio $(L^p)^\star$ con L^q. En lo que sigue sistemáticamente se hará la identificación

$$(L^p)^\star = L^q.$$

Teorema 1.29. El espacio $C_c(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para cualquier $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema 1.30. Suponga que Ω es un espacio medible separable. Entonces el espacio $L^p(\Omega)$ es separable para cualquier $1 \leq p < \infty$.

(B) Estudio de $L^1(\Omega)$.

Comenzamos con una descripción del espacio dual de $L^1(\Omega)$.

Teorema 1.31 (Teorema de representación de Riesz)**.** Sea $\varphi \in (L^1)^\star$. Entonces existe una única función $u \in L^\infty$ tal que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int uf \quad \forall f \in L^1.$$

Más aún,

$$||u||_{L^\infty} = ||\varphi||_{(L^1)^\star}.$$

Observación 1.18. El teorema expresa que toda forma lineal continua sobre L^1 se representa "concretamente" como una integral. La aplicación $\varphi \longrightarrow u$ es lineal isométrico y sobreyectivo, que permite identificar el "abstracto" espacio $(L^1)^\star$ con L^∞. En lo que sigue sistemáticamente se hará la identificación

$$(L^1)^\star = L^\infty.$$

Observación 1.19. El espacio $L^1(\Omega)$ no es reflexivo.

(C) Estudio de $L^\infty(\Omega)$.

Ya se conoce (Teorema 1.31) que $L^\infty(\Omega) = (L^1)^\star$. Siendo un espacio dual, $L^\infty(\Omega)$ disfruta agradables propiedades. En particular, se tienen las siguientes:

Propiedad (i)

La bola cerrada unitaria B_{L^∞} es compacta en la topología débil* $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Propiedad (ii)

Si Ω es medible y (f_n) es una sucesión acotada en $L^\infty(\Omega)$, existe una subsucesión (f_{n_k}) y algún $f \in L^\infty(\Omega)$ tal que $(f_{n_k}) \longrightarrow f$ en la topología débil* $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Sin embargo $L^\infty(\Omega)$ no es reflexivo. pues $L^1(\Omega)$ no es reflexivo. Se sigue que el espacio dual de $L^\infty(\Omega)$ contiene a L^1 y es estrictamente más grande que L^1.

Finalmente $L^\infty(\Omega)$ no es separable.

1.12. Espacios de Hilbert

Definición 1.13. Un espacio de *Hilbert* es un espacio vectorial H dotado de un producto escalar $\langle u, v \rangle$ tal que H es completo para la norma $\langle u, u \rangle^{1/2}$.

Ejemplo Básico. $L^2(\Omega)$ dotado con el producto escalar

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)$$

es un espacio de Hilbert.

En lo que sigue H siempre designa un espacio de Hilbert.

1.13. El Espacio Dual de un Espacio de Hilbert

Teorema 1.32 (Teorema de representación de Riesz-Fréchet)**.** Dada $\varphi \in H^\star$, existe una única $f \in H$ tal que

$$\langle \varphi, u\rangle = \langle f, u\rangle \ \forall u \in H.$$

Más aún,

$$|f| = \|\varphi\|_{H^\star}.$$

Teorema 1.33 (Punto fijo de Banach)**.** Sea X un espacio métrico completo y sea $S : X \longrightarrow X$ una aplicación tal que

$$d(Sv_1, Sv_2) \leq kd(v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in X \qquad \text{con } k < 1.$$

Entonces S tiene un punto fijo único, $u = Su$.

1.14. Sumas Hilbertianas. Bases Ortonormales

Definición 1.14 (Suma Hilbertiana)**.** Sea $(E_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de subespacios cerrados de H. Se dice que H es *Suma Hilbertiana* de los (E_n) y se escribe $H = \bigoplus_n E_n$ si:

(i) Los E_n son ortogonales dos a dos, es decir,

$$\langle u, v\rangle = 0 \quad \forall u \in E_m, \quad \forall v \in E_n, \quad m \neq n,$$

(ii) El espacio vectorial generado por los (E_n) es denso en H (en sentido algebraico es decir, las combinaciones lineales finitas de elementos de (E_n).

Definición 1.15 (Base Hilbertiana)**.** Se llama *base Hilbertiana* (o simplemente base si no hay posibilidad de confusión[2]) a toda sucesión $(e_n)_{n\geq 1}$ de elementos de H tales que:

(i) $|e_n| = 1\ \forall n, \langle e_m, e_n\rangle = 0\ \forall m, n,\ m \neq n$.

(ii) El espacio vectorial generado por los (e_n) es denso en H.

Teorema 1.34. todo espacio de Hilbert separable tiene una base ortonormal.

1.15. Operadores compactos

Sean E y F dos espacios de Banach.

Definición 1.16. Sea $B_E = \{x \in E; \| x \| \leq 1\}$ se dice que un operador $T \in \mathscr{L}(E, F)$ es *compacto* si $T(B_E)$ tiene clausura compacta en F (en la topología fuerte).
Se designa por $\mathscr{K}(E, F)$ el conjunto de los operadores compactos de E en F y se escribe $\mathscr{K}(E)$ en lugar de $\mathscr{K}(E, E)$.

Teorema 1.35. El conjunto $\mathscr{K}(E, F)$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathscr{L}(E, F)$ (en la topología asociada a la norma $\| \ \|_{\mathscr{L}(E,F)}$).

Definición 1.17. Se dice que un operador $T \in \mathscr{L}(E, F)$ es de rango finito si el rango de T, $R(T)$, es finito dimensional.

Claramente, cualquier operador de rango finito es compacto y de este modo tenemos el siguiente.

Corolario 1.7. Sea (T_n) una sucesión de operadores de rango finito y sea $T \in \mathscr{L}(E, F)$ tal que $\| T_n - T \|_{\mathscr{L}(E,F)} \longrightarrow 0$. Entonces $T \in \mathscr{K}(E, F)$.

Proposición 1.36. Sean E, F y G tres espacios de Banach. Si $T \in \mathscr{L}(E, F)$ y $S \in \mathscr{K}(F, G)$.[resp. $T \in \mathscr{L}(E, F)$ y $S \in \mathscr{L}(F, G)$.] Entonces $(S \circ T) \in \mathscr{K}(E, G)$.

Teorema 1.37 (Schauder)**.** Si $T \in \mathscr{K}(E, F)$, entonces $T^\star \in \mathscr{K}(F^\star, E^\star)$. Y opuestamente.

[2] No confundirse con una *base algebraica*, es decir, una familia (e_n) de H tal que todo elemento de H se escribe de forma única como combinación lineal finita de los (e_i).

1.16. El Espectro de un Operador Compacto

A continuación algunas definiciones importantes.

Definición 1.18. Sea $T \in \mathscr{L}(E)$. El *conjunto resolvente*, denotado por $\rho(T)$, está definido por:

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; (T - \lambda I) \text{ es biyectiva de } E \text{ sobre } E\}.$$

El *espectro* $\sigma(T)$ es el complemento del conjunto resolvente, es decir, $\sigma(T) = \mathbb{R} - \rho(T)$. Un número real λ se dice *valor propio* (o autovalor) de T si

$$N(T - \lambda I) \neq \{0\};$$

donde $N(T - \lambda I)$ es el correspondiente *espacio propio* asociado a λ. El conjunto de todos los valores propios es denotado $EP(T)$.

Proposición 1.38. El espectro $\sigma(T)$ de un operador acotado T es un conjunto compacto y

$$\sigma(T) \subset \big[-\|T\| \ , \ +\|T\|\big].$$

Teorema 1.39. Sea $T \in \mathscr{K}(E)$ con $\dim E = \infty$. Entonces tenemos:

a) $0 \in \sigma(T)$,

b) $\sigma(T) - \{0\} = VP(T) - \{0\}$,

c) uno de los siguientes casos se cumple:

- $\sigma(T) = 0$,
- $\sigma(T) - \{0\}$ es un conjunto finito,
- $\sigma(T) - \{0\}$ es una sucesión convergente que tiende a 0.

Lema 1.40. Sea $(\lambda_n); n \geq 1$ una sucesión de números reales distintos tal que

$$\lambda_n \longrightarrow \lambda$$

y

$$\lambda_n \in (\sigma(T) - \{0\}) \quad \forall n.$$

Entonces $\lambda = 0$. Es decir, todos los puntos de $\sigma(T) - \{0\}$ son aislados.

1.17. Descomposición espectral de operadores compactos autoadjuntos

En lo que sigue se supone que $E = H$ es un espacio de Hilbert y que $T \in \mathscr{L}(H)$. Identificando H' y H podemos considerar $T^\star$ como un operador acotado de H en si mismo.

Definición 1.19. Se dice que un operador acotado $T \in \mathscr{L}(H)$ es *autoadjunto* si $T^\star = T$, es decir,

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle \quad \forall\ u, v \in H.$$

Proposición 1.41. Sea $T \in \mathscr{L}(H)$ un operador autoadjunto. Definamos

$$m = \inf_{\substack{u\in H\\ |u|=1}} \langle Tu, u\rangle \quad \text{y} \quad M = \sup_{\substack{u\in H\\ |u|=1}} \langle Tu, u\rangle.$$

Entonces $\sigma(T) \subset [m, M], m \in \sigma(T)$ y $M \in \sigma(T)$.Más aún $||T|| = \max\{|m|, |M|\}$.

Teorema 1.42. Supongamos que H es separable. Sea T un operador compacto y autoadjunto. Entonces H admite una base Hilbertiana formada por vectores propios de T.

Teorema 1.43 (Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos)**.** Sea H un espacio de Hilbert y $K : H \longrightarrow H$ un operador compacto auto-adjunto. Entonces existe un conjunto $\{\phi_i; i = \pm 1, \pm 2, \dots\}$ tal que

(i) Existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ y $\phi_i \in H$; con $i \in I \subset \mathbb{Z} - \{0\}$ tales que $K(\phi_i) = \lambda_i\phi_i$.

(ii) El conjunto $\{\phi_i; i \in I\}$ es un conjunto ortonormal.

(iii) Si $\{\lambda_i; i \in I \cap \mathbb{N}\}$ es finito (respectivamente) el conjunto $\{\lambda_i; i \in I \cap (-\mathbb{N})\}$ entonces $\lambda_i \longrightarrow 0$ (respectivamente $\lambda_{-i} \longrightarrow 0$).

(iv) Si $I = \mathbb{Z} - \{0\}$, el conjunto $\{\phi_i; i \in I\}$ es completo en el complemento ortogonal de $\mathcal{N} = \{u \in H; K(u) = 0\}$.

1.18. El caso autoadjunto

Sea $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un operador lineal no acotado con $\overline{D(A)} = H$. Identificando $H^\star$ con H, podemos ver $A^\star$ como un operador lineal no acotado en H.

Definición 1.20. Diremos que
- A es *simétrico* si $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle \quad \forall u, v \in D(A)$
- A es *autoadjunto* si $D(A^\star) = D(A)$ y $A^\star = A$.

1.19. Definición y Propiedades Elementales de los Espacios de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Sea $\Omega \subset R^N$ un conjunto abierto y sea $p \in R$ con $1 \leq p \leq \infty$.

Definición 1.21. El espacio de *Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ está definido por:

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists\; g_1, g_2, ..., g_N \in L^p(\Omega) \text{ tal que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),\ \forall i = 1, 2, ..., N \end{array} \right\}.$$

Denotamos

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definimos $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$, y escribimos

$$\nabla u = \text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ está dotado de la norma

$$||u||_{W^{1,p}} = ||u||_{L^p} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

o con la norma equivalente $\left(||u||_{L^p}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{1/p}$ (si $1 \leq p < \infty$).

El espacio $H^1(\Omega)$ está dotado con el producto escalar

$$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2} = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

La norma asociada

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

es equivalente a la norma $W^{1,2}(\Omega)$.

Definición 1.22. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, u \in W^{1,p}(\Omega)$, afirmaremos:

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u en $W^{1,p}(\Omega)$ y se denota:

$$u_n \longrightarrow u \text{ en } W^{1,p}(\Omega)$$

si

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|u_n - u\|_{W^{1,p}} = 0.$$

(ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débil a u en $W^{1,p}(\Omega)$ y se denota:

$$u_n \rightharpoonup u \text{ en } W^{1,p}(\Omega)$$

si

$$u_n \rightharpoonup u \text{ en } L^p(\Omega) \text{ y } \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ en } L^p(\Omega) \quad \forall 1 \leq i \leq N.$$

Proposición 1.44. $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$. $W^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo para $1 < p < \infty$, y es separable para $1 \leq p < \infty$. El espacio $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable.

Observación 1.20. En la definición de $W^{1,p}(\Omega)$, igualmente se puede usar $C_c^\infty(\Omega)$ como conjunto de funciones test φ (en lugar de $C_c^1(\Omega)$).

Observación 1.21. Es claro que si $u \in C^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ y si $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ para todo $i = 1, 2, ..., N$ (aquí $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ es la derivada parcial usual de u), entonces $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Además, la derivada parcial usual de u coincide con la derivada parcial en el sentido de

$W^{1,p}(\Omega)$, de manera que la notación es consistente. En particular, si Ω está acotado, entonces $C^1(\overline{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$. Opuestamente, uno puede mostrar que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ para algún $1 \leq p \leq \infty$ y si $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\Omega)$ para todo $i = 1, 2, ..., N$ (aquí $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ es la derivada parcial de u en el sentido de $W^{1,p}(\Omega)$), entonces $u \in C^1(\Omega)$; más precisamente, existe una función $\tilde{u} \in C^1(\Omega)$ tal que $u = \tilde{u}$ casi toda parte.

Como caso particular se define el siguiente espacio:

$$W^{2,2}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,2}(\Omega) \ ; \ \tfrac{\partial u}{\partial x}, \tfrac{\partial u}{\partial t} \in W^{1,2}(\Omega) \right\}$$

1.19.1. Desigualdades de Sobolev

Si Ω tiene dimensión $N \geq 2$ se cumple que $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ con inyección continua, solo para $p > N$; cuando $p \leq N$ se puede construir funciones en $W^{1,p}$ que no pertenece a L^∞.

Consideremos el siguiente caso:

A. El caso $\Omega \subset R^N$.

Teorema 1.45 (Rellich-Kondrachov)**.** Suponga que Ω es *acotado* y de clase C^1. Entonces se tienen las siguientes inyecciones compactas:

$$\begin{array}{llll} \text{Si} & p < N \text{ entonces} & W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), & \forall q \in [1, p^\star), \text{donde} \dfrac{1}{p^\star} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}, \\ \text{Si} & p = N \text{ entonces} & W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), & \forall q \in [p, \infty), \\ \text{Si} & p > N \text{ entonces} & W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega}). & \end{array}$$

En particular, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ con inyección compacta para todo p (y todo N).

CAPÍTULO 2

SOLUCIONES PERIODICAS DE ECUACIONES DE ONDA NO LINEALES

Considere la siguiente ecuación de onda no lineal:

$$u_{tt} - u_{xx} + h(u) = 0 \qquad 0 < x < \pi,\ t \in \mathbb{R}. \tag{2.0.1}$$

bajo las condiciones de frontera:

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \tag{2.0.2}$$

donde $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua no decreciente tal que $h(0) = 0$.
Se supone

$$\lim_{|u|\to\infty} \frac{h(u)}{u} = 0. \tag{2.0.3}$$

$$\text{Existe una constante } R \text{ tal que } h(u) \neq 0 \text{ para } \geq R. \tag{2.0.4}$$

En este trabajo se prueba el siguiente teorema:

Teorema 2.1. Existe $T_0 > 0$ tal que para todo $T \geq T_0$, con $\frac{T}{\pi}$ racional, el problema 2.0.1, 2.0.2 admite una solución (débil) $u \in L^\infty$ T-periodica no trivial.

Por un resultado de [4], soluciones débiles son en efecto suaves si h es suave y estrictamente creciente.

Prueba del teorema 2.1

La prueba se divide en cinco pasos:

Paso 1 Generalidades acerca de $Au = u_{tt} - u_{xx}$.

Paso 2 Determinación de T_0.

Paso 3 Existencia de una solución no trivial para

$$Au + h(u) + \epsilon u = 0 \quad (\epsilon > 0 \text{ pequeño.})$$

Paso 4 Estimaciones.

Paso 5 Paso al límite cuando $\epsilon \longrightarrow 0$.

Se inicia con el paso 1:

2.1. Paso 1 Generalidades acerca de $Au = u_{tt} - u_{xx}$

Ya que $\frac{T}{\pi} \in Q$ se puede escribir $T = \frac{2\pi b}{a}$ donde a y b son enteros coprimos. Sea $H = L^2(\Omega)$ con $\Omega = (0, \pi) \times (0, T)$. En H se considera el operador $Au = u_{tt} - u_{xx}$[1] actuando sobre funciones en $L^2(\Omega)$ que satisfacen 2.0.2 y que son $T-$periodicas en t.
El dominio de A es:

$$D(A) = \left\{ u \in L^2 \mid \text{existen } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2 \text{que satisfacen 2.0.2} \right\}$$

Las derivadas parciales se toman en el sentido de $W^{2,2}(\Omega)$.
Acerca del operador *D'Alembertiano* se puede afirmar que:
i. Es autoadjunto, es decir, $A^\star = A$.

[1]El operador A se conoce como el *D'Alembertiano*.

ii. El núcleo de A , que se nota $N(A)$, consiste de funciones de la forma

$$N(A) = \left\{ p(t+x) - p(t-x), \quad \text{donde p tiene periodo } \tfrac{2\pi}{a} = \tfrac{T}{b} \ y \ \int_0^{\frac{T}{b}} p = 0 \right\}.$$

iii. El rango de A, que se nota $R(A)$, es cerrado y $R(A) = N(A)^{\perp}$.
Adicionalmente,
iv. Se pueden encontrar sus valores y funciones propias.
v. Se puede definir su operador inverso A^{-1} y sus propiedades.

A continuación se verifican las anteriores propiedades.
i. Primero se prueba que A no es acotado.
En efecto, sea $u = \sin jx \sin kt$, dado $M > 0$, existe j (k fijado) tal que

$$|j^2 - [(2\pi/T)k]^2| > M,$$

entonces

$$||Au||_{L^2} = |j^2 - [(2\pi/T)k]^2| ||u||_{L^2} > K.$$

Ahora se verifica que A es simétrico, es decir, $\int_{\Omega}(u_{tt} - u_{xx})v = \int_{\Omega} u(v_{tt} - v_{xx}) \ \forall \ u, v \in H$.
En efecto,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}(u_{tt} - u_{xx})v &= \int_{\Omega} u_{tt}v \ - \ \int_{\Omega} u_{xx}v \ \ \forall \ u, v \in H \\
&= vu_t - \int_{\Omega} u_t v_t - \left(vu_x - \int_{\Omega} u_x v_x \right) \ \ \forall \ u, v \in H \\
&= - \left(v_t u - \int_{\Omega} uv_{tt} \right) + uv_x - \int_{\Omega} uv_{xx} \ \ \forall \ u, v \in H \\
&= \int_{\Omega} uv_{tt} \ - \ \int_{\Omega} uv_{xx} \ \ \forall \ u, v \in H \\
&= \int_{\Omega} u(v_{tt} \ - \ v_{xx}) \ \ \forall \ u, v \in H.
\end{aligned}$$

Para completar la demostración que A es autoadjunto ver referencias de [4].
ii. Sea $u(x,t) = p(t+x) - p(t-x)$, se calculan sus repectivas derivadas parciales:

$$u_t = p'(t+x) - p'(t-x) \ \ ; \ \ u_{tt} = p''(t+x) - p''(t-x)$$

y

$$u_x = p'(t+x) + p'(t-x) \quad ; \quad u_{xx} = p''(t+x) - p''(t-x).$$

Así,

$$Au = u_{tt} - u_{xx} = p''(t+x) - p''(t-x) - (p''(t+x) - p''(t-x)) = 0$$

Es decir, $u \in N(A)$.

La condición $\int_0^{T/b} p = 0$ fue impuesta por Rabinowitz.

iii. Se aplica la proposición **1.4** y teorema **1.5** de la sección **1.3**.

De ahora en adelante se escribe cualquier $u \in H$ en su descomposición ortogonal

$$u = u_1 + u_2, \qquad \text{con } \; u_1 \in R(A), \; u_2 \in N(A).$$

iv. Sea

$$u = \sin jx \; \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right), \text{ con } j = 1,2,3,\ldots \quad y \quad k = 0,1,2,3,\ldots.$$

Se calculan las respectivas derivadas parciales de u,

$$u_t = \left(\frac{2\pi}{T}k\right) \sin jx \; \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) \quad ; \quad u_{tt} = -\left(\frac{2\pi}{T}k\right)^2 \sin jx \; \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)$$

y

$$u_x = j \sin jx \; \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) \quad ; \quad u_{xx} = -j^2 \sin jx \; \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)$$

entonces,

$$\begin{aligned} Au &= -\left(\frac{2\pi}{T}k\right)^2 \sin jx \; \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + j^2 \sin jx \; \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) \\ &= (j^2 - [(2\pi/T)k]^2)\left(\sin jx \; \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)\right) \\ &= (j^2 - [(2\pi/T)k]^2)u. \end{aligned}$$

De la misma forma para $u = \sin jx \cos\left(\dfrac{2\pi}{T}kt\right)$, con $j = 1,2,3,\ldots$ y $k = 0,1,2,3,\ldots$.

Así, los valores propios de A son $j^2 - [(2\pi/T)k]^2$, con $j = 1,2,3,\ldots$ y $k = 0,1,2,3,\ldots$ para las correspondientes funciones propias:

$$\sin jx \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) \qquad \text{y} \qquad \sin jx \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right).$$

Se denota por $\lambda_{-1}(T)$ el primer valor propio negativo. Se puede ver que $\lambda_{-1}(T) \longrightarrow 0$ cuando $T \longrightarrow \infty$. En efecto, sea $\mu = j^2 - [(2\pi/T)k]^2$ con $j = 1$ y $k = [T/2\pi] + 1$.
Se tiene

$$1 - \left[1 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)\right]^2 \leq \mu$$

$$-\frac{4\pi}{T} - \frac{4\pi^2}{T^2} = -\left(\frac{4\pi}{T}\left(1 + \frac{\pi}{T}\right)\right) \leq \mu$$

$$0 < |\lambda_{-1}(T)| \leq |\mu| \leq \left(\frac{4\pi}{T}\left(1 + \frac{\pi}{T}\right)\right)$$

se pasa al límite y se obtiene $\lambda_{-1}(T) \longrightarrow 0$.
v. Dado $f \in R(A)$, existe un único $u \in R(A)$ tal que $Au = f$.
Sea

$$u = A^{-1}f = Kf.$$

Ahora se mencionan algunas propiedades de K:

$$||Kf||_{L^\infty} \leq C||f||_{L^1} \quad \forall\, f \in R(A) \tag{1}$$

$$||Kf||_{H^1} \leq C||f||_{L^2} \quad \forall\, f \in R(A) \tag{2}$$

La desigualdad (1) puede ser fácilmente verificada.[2]
La desigualdad (2) se sigue de la representación de series de Fourier de la solución u.
En particular $K : R(A) \longrightarrow L^2$ es un operador compacto autoadjunto in $R(A)$; sus valores propios son $1/(j^2 - [(2\pi/T)k]^2)$, $j = 1, 2, 3, ...,$ y $k = 0, 1, 2, ...,$ $j \neq [(2\pi/T)k]^2$.

Observación 2.1. La razón para tratar racionales $\frac{b}{a}$ en lugar de irracionales, es que para el caso racional el rango de A, actuando sobre $D(A)$ en L^2, es cerrado mientras que esto no se cumple para el caso irracional. Para el caso racional el núcleo de A es infinito-dimensional y esto es en realidad la principal dificultad.

Se sigue con el paso 2:

[2]Ver corolario 19.7 página 245 del texto Postmodern Analysis de Jürgen Jost.

2.2. Paso 2 Determinación de T_0

Se define

$$H(u) = \int_0^u h(s)ds$$

$$H_\epsilon(u) = H(u) + \frac{\epsilon}{2}|u|^2 \qquad \epsilon > 0$$

de tal forma que H_ϵ es convexa. Ahora se calcula su función conjugada convexa H_ϵ^*,

$$H_\epsilon^*(f) = \sup_{x\in R}\{fx - H_\epsilon(x)\} \ \ (\forall f \in R),$$

(ver sección 1.2, definición 1.4. y ejemplos 1.1, 1.2 y 1.3).
Sea

$$F(x) = fx - H_\epsilon(x) = fx - H(x) - \frac{\epsilon}{2}x^2,$$

Para encontrar el $\sup\limits_{x\in R}\{F(x)\}$, se usa el cálculo elemental,

$$F'(x) = f - h(x) - \epsilon x = 0,$$

$$f - h(x) - \epsilon x = 0 \qquad \text{y} \qquad h_\epsilon^{-1}(f) = x,$$

donde h_ϵ^{-1} denota la inversa de $h(x) + \epsilon x$.
Se reemplaza en $F(x)$ y queda,

$$H_\epsilon^*(f) = fh_\epsilon^{-1}(f) - H(h_\epsilon^{-1}(f)) - \frac{\epsilon}{2}[h_\epsilon^{-1}(f)]^2 \ \forall f \in R.$$

Es claro que H_ϵ^* es C^1. En efecto,

$$(H_\epsilon^*)'(f) = h_\epsilon^{-1}(f) + f\left(h_\epsilon^{-1}(f)\right)' - h(h_\epsilon^{-1}(f))\left(h_\epsilon^{-1}(f)\right)' - \epsilon[h_\epsilon^{-1}(f)]\left(h_\epsilon^{-1}(f)\right)'.$$

Ahora, un cálculo nos arroja,

$$(H_\epsilon^*)'(h(x) + \epsilon x) = x,$$

es decir, $(H_\epsilon^*)'$ es la función inversa de $h(x) + \epsilon x$.

Sobre $R(A)$ se define:

$$F_\epsilon(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega Kv.v \ + \ \int_\Omega H^*_\epsilon(v).$$

El siguiente lema juega un papel crucial:

Lema 1. Existe $T_0 > 0$ tal que si $T > T_0$ y $\frac{T}{\pi}$ es racional, entonces

$$\inf_{R(A)} F_\epsilon \leq -1, \qquad \forall \epsilon > 0$$

Prueba de Lema 1. Por 2.0.4 si $u > R$ el teorema del valor medio nos asegura la existencia de $\xi \in (R, u)$ tal que

$$\begin{aligned} H(u) - H(R) &= H'(\xi)(u - R) = h(\xi)(u - R) \\ &\geq h(R)(u - R) = h(R)u - h(R)R \end{aligned}$$

Es decir,

$$H(u) \geq h(R)u - h(R)R + H(R).$$

De manera análoga para $u < -R$. Así,

$$H(u) \geq h(-R)u + h(-R)R + H(-R).$$

Sea $\rho = \text{mín}\{h(-R), h(R)\}$ y $C = \text{mín}\{h(R)R + H(R), -h(-R)R - H(-R)\}$, se puede deducir,

$$H(u) \geq \rho|u| - C \qquad \forall u, \ \text{ y para algunas constantes } \ \rho > 0 \ \text{ y } C.$$

Por consiguiente,

$$H_\epsilon(u) \geq \rho|u| - C \qquad \forall u.$$

Ahora se aplican las propiedades de la funciones conjugadas convexas (ver sección 1.2 ejemplo 1.2),

$$\begin{aligned} H^*_\epsilon(u) &\leq (\rho|u| - C)^* \quad \forall u \\ &= (\rho|u|)^* - C \quad \forall u \\ &= -C \quad \text{para } |v| \leq \rho, \end{aligned}$$

y

$$H_\epsilon^*(v) \leq C \quad \text{para } |v| \leq \rho.$$

Como una función de prueba evaluando $\inf\limits_{R(A)} F_\epsilon$ escogemos una función propia de A correspondiente a el valor propio $\lambda_{-1}(T)$. Más precisamente, sea

$$v = \rho \sin jx \sin[(2\pi/T)kt] \quad \text{con} \quad j^2 - [(2\pi/T)k]^2 = \lambda_{-1}(T).$$

Así,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega Kv.v + \int_\Omega H_\epsilon^*(v) &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega Kv.v \ + \int_\Omega C \\
&\leq \ -\frac{1}{2|\lambda_{-1}(T)|}\int_\Omega |v|^2 + C|\Omega|
\end{aligned}$$

se calcula $\int_\Omega |v|^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^T \ \rho \sin jx \sin[(2\pi/T)kt] \ \rho \sin jx \sin[(2\pi/T)kt] dxdt = \frac{\rho^2 \pi T}{4}$.
Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
F_\epsilon(v) &\leq \ -\frac{\pi T \rho^2}{8|\lambda_{-1}(T)|} \ + \ C\pi T \\
&\leq -\frac{\pi T \rho^2}{8|\lambda_{-1}(T)|} \ + \ C\pi T \\
&\leq \ \pi T\left(C - \frac{\rho^2}{8|\lambda_{-1}(T)|}\right)
\end{aligned}$$

pero $\lambda_{-1}(T) \longrightarrow 0$ cuando $T \longrightarrow \infty$, luego,

$$C - \frac{\rho^2}{8|\lambda_{-1}(T)|} \leq -1 \quad \text{siempre que} \quad T \geq T_0 \ \text{ para algún } T_0 \text{ grande,}$$

por lo tanto,

$$F_\epsilon(v) \leq -1 \qquad \text{y} \qquad \inf_{R(A)} F_\epsilon(v) \leq -1$$

siempre que $T \geq T_0$ para algún T_0 grande.
En lo que sigue se fija $T \geq T_0$.

2.3. Paso 3 Existencia de una solución no trivial

En este paso se encuentra la existencia de una solución no trivial para

$$Au + h(u) + \epsilon u = 0 \qquad (\epsilon > 0 \quad \text{pequeño})$$

Comenzamos con el siguiente lema.

Lema 2. Existen constantes $\alpha > 0$ y C (independiente de ϵ) tal que

$$F_\epsilon(v) \geq \alpha||v||_{L_2}^2 - C \qquad \forall v \in R(A),\ \forall \epsilon \leq \tfrac{1}{4}|\lambda_{-1}|.$$

Prueba de lema 2. Por 2.0.3 se puede afirmar:

$$\forall \epsilon \ \ \exists M > 0 \ \text{ tal que si } |s| > M \text{ entonces } \left|\frac{h(s)}{s}\right| < \epsilon$$

de donde

$$-\epsilon s < h(s) < \epsilon s$$
$$-\frac{\epsilon}{2}u^2 < H(u) < \frac{\epsilon}{2}u^2$$
$$H(u) < \frac{\epsilon}{2}|u|^2 \quad \forall u.$$

En este punto existe una constante C tal que

$$H(u) < \frac{\epsilon}{2}|u|^2 + C \qquad \forall u$$

$$H_\epsilon(u) < \epsilon|u|^2 + C \qquad \forall u$$

sea $\delta = \frac{1}{4}|\lambda_{-1}|$,

$$H_\epsilon(u) \leq \frac{1}{4}|\lambda_{-1}||u|^2 + C \qquad \forall u,\ \forall \epsilon \leq \delta.$$

Ahora se aplican las propiedades de las funciones conjugada convexas (ver sección 1.2, ejemplo 1.3) y queda

$$H_\epsilon^*(v) \geq \left(\frac{1}{4}|\lambda_{-1}||v|^2 + C\right)^* \qquad \forall v$$

$$H_\epsilon^*(v) \geq \left(\frac{|\lambda_{-1}|}{2}\frac{|v|^2}{2}\right)^* + C \qquad \forall v$$

$$H_\epsilon^*(v) \geq \frac{1}{|\lambda_{-1}|}|v|^2 - C \qquad \forall v.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega Kv.v + \int_\Omega H_\epsilon^*(v) \geq & \; -\frac{1}{2|\lambda_{-1}|}\int_\Omega |v|^2 + \frac{1}{|\lambda_{-1}|}\int_\Omega |v|^2 - C \qquad \forall v \in R(A) \\
F_\epsilon(v) \geq & \; \frac{1}{|\lambda_{-1}|}\int_\Omega |v|^2 - C \qquad \forall v \in R(A)
\end{aligned}$$

y la conclusión se sigue.

Es ahora claro que para $\epsilon \leq \frac{1}{4}|\lambda_{-1}|$, $\underset{R(A)}{\text{mín}} F_\epsilon$ es alcanzado en algún v_ϵ. En efecto, si v_n es una sucesión minimizante, por el Lema 2 tenemos

$$||v_n||_{L^2}^2 \leq \frac{F_\epsilon(v_n) + C}{\alpha} \leq \frac{-1 + C}{\alpha},$$

es decir, v_n es acotada en L^2 y se puede asumir que v_n converge débilmente a algún v en L^2 (ver teorema 1.10, sección 1.6). Entonces

$$\text{lím} \int Kv_n.v_n = \int Kv.v \qquad \text{y} \qquad \text{lím inf} \int H_\epsilon^*(v_n) \geq \int H_\epsilon^*(v).$$

Por otro lado, $F_\epsilon(v)$ es C^1 sobre $R(A)$; en efecto,

$$\langle F_\epsilon'(v), w \rangle = \int_\Omega Kvw \; + \; \int_\Omega (H_\epsilon^*)'(v)w \qquad \forall v, w \in R(A)$$

y

$$\langle F_\epsilon'(v_\epsilon), w \rangle = \int_\Omega Kv_\epsilon w \; + \; (H_\epsilon^*)'(v_\epsilon)w = 0 \qquad \forall w \in R(A)$$

por lo tanto,

$$Kv_\epsilon + (H_\epsilon^*)'(v_\epsilon) = \chi \in N(A).$$

Sea

$$u_\epsilon = (H_\epsilon^*)'(v_\epsilon), \quad \text{así} \quad v_\epsilon = h(u_\epsilon) + \epsilon u_\epsilon \quad \text{y} \quad Au_\epsilon + h(u_\epsilon) + \epsilon u_\epsilon = 0.$$

Note que $v_\epsilon \not\equiv 0$ ya que $F_\epsilon(v_\epsilon) \leq -1$.

Ahora se procede con el paso 4:

2.4. Paso 4 Estimaciones

En lo que sigue se nota por C varias constantes independientes de ϵ ($\epsilon \leq \frac{1}{4}|\lambda_{-1}|$).
Por el Lema 2 se conoce que $||v_\epsilon||_{L_2} \leq C$. Así,
$||Au_\epsilon||_{L_2} \leq C, \quad (0 = ||Au_\epsilon - (-v_\epsilon)||_{L^2} \geq ||Au_\epsilon||_{L^2} - ||v_\epsilon||_{L_2} \geq ||Au_\epsilon||_{L^2} - C,)$
$||u_{1\epsilon}||_{L_\infty} \leq C, \quad \left(\int_\Omega |Au_\epsilon| = \int_\Omega |Au_{1\epsilon}| = \int_\Omega |\lambda u_{1\epsilon}| = |\lambda| \int_\Omega |u_{1\epsilon}| \leq C\right).$
Ahora se verifica el siguiente lema.
Lema 3. $||u_\epsilon||_{L_\infty} \leq C$.
Prueba de lema 3. Primero se verifica $||u_\epsilon||_{L_1} \leq C$.
Por el teorema del valor medio existe $\xi \in (0, u)$ tal que

$$H(u) - H(0) = H'(\xi)(u - 0)$$

$$H(u) = h(\xi)u$$

$$H(u) \leq h(u)u.$$

Por otro lado, $H(u) \geq \rho|u| - C$. Así,

$$\rho|u| - C \leq h(u)u \qquad \forall u.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\rho \int_\Omega |u_\epsilon| - C|\Omega| \leq & \int_\Omega h(u_\epsilon)u_\epsilon \qquad \forall u \\
= & \int_\Omega (-Au_\epsilon - \epsilon u_\epsilon)u_\epsilon \qquad \forall u \\
= & \int_\Omega -Au_\epsilon u_\epsilon + \epsilon \int_\Omega -u_\epsilon u_\epsilon \qquad \forall u \\
\leq & ||Au_\epsilon||_{L^2}||u_\epsilon||_{L^2} + \epsilon||u_\epsilon||_{L^2} \qquad \forall u \\
\leq & \, C \qquad \forall u
\end{aligned}$$

y se obtiene el resultado.
Ahora se verifica $||u_{2\epsilon}||_{L_\infty} \leq C$. Se escribe

$$u_{2\epsilon}(x,t) = p(t+x) - p(t-x), \text{ donde } p \text{ tiene periodo } \tfrac{T}{b} \text{ y } \int_0^{T/b} p = 0.$$

(p depende solo de ϵ, pero se ignora el subíndice ϵ para simplificar las notaciones.)
Por el teorema de Pitágoras,

$$||u_{1\epsilon}||^2_{L^2} + ||u_{2\epsilon}||^2_{L^2} = ||u_{1\epsilon} + u_{2\epsilon}||^2_{L^2} = ||u_\epsilon||^2_{L^2} \leq C$$

en particular tenemos que $||u_{2\epsilon}||_{L^1} \leq C$.
Es decir, $||u_{2\epsilon}||_{L^1} = ||p(t+x) - p(t-x)||_{L^1} \leq 2||p||_{L^1} \leq C$ y $||p||_{L^1} \leq C$.
Por otro lado, dado $\psi \in L^2(\Omega)$, $\psi \in N(A)^\perp$ si y sólo si $\int_\Omega \psi(x,t)[q(t+x) - q(t-x)] = 0$ para toda función q periódica con periodo $\frac{T}{b}$.
Se usa la misma técnica como en [6]. Es decir, $\psi \in N(A)^\perp$ si y sólo si

$$\sum_{k=0}^{b-1} \int_0^\pi \left[\psi\left(x\ ,\ t + \tfrac{kT}{b} - x\right) - \psi\left(x\ ,\ t + \tfrac{kT}{b} + x\right)\right] dx = 0 \text{ para casi toda parte.}$$

Ya que $v_\epsilon = h(u_\epsilon) + \epsilon u_\epsilon \in N(A)^\perp$ entonces $h(u_\epsilon) + \epsilon u_{2\epsilon} \in N(A)^\perp$.
Por la igualdad anterior se tiene

$$\sum_{k=0}^{b-1} \left[\int_0^\pi \epsilon \left[u_{2\epsilon}(x\ ,\ t + \tfrac{kT}{b} - x) - u_{2\epsilon}(x\ ,\ t + \tfrac{kT}{b} - x)\right] + \right.$$
$$\left. \left[h\left(u_\epsilon\left(x\ ,\ t + \tfrac{kT}{b} - x\right)\right) - h\left(u_\epsilon\left(x\ ,\ t + \tfrac{kT}{b} + x\right)\right)\right]\right] dx = 0 \text{ casi toda parte.}$$

Se sigue

$$2\epsilon b\pi p(t) + \sum_{k=0}^{b-1} \int_0^\pi \left[h\left(u_\epsilon\left(x\ ,\ t + \tfrac{kT}{b} - x\right)\right)\right.$$
$$\left. - \ h\left(u_\epsilon\left(x\ ,\ t + \tfrac{kT}{b} + x\right)\right)\right] dx = 0 \text{ casi toda parte.}$$

Pero

$$|u_\epsilon - u_{2\epsilon}| \leq ||u_\epsilon - u_{2\epsilon}||_{L^\infty} = ||u_{1\epsilon}||_{L^\infty} \leq C$$

luego,

$$u_\epsilon\left(x\ ,\ t + \tfrac{kT}{b} - x\right) \geq -C + p(t) - p(t-2x)$$

y

$$u_\epsilon\left(x\ ,\ t + \tfrac{kT}{b} + x\right) \leq C + p(t+2x) - p(t).$$

Por ser h no decreciente se tiene
$h(u_\epsilon) \geq h(-C + p(t) - p(t-2x)) \quad \text{y} \quad -h(u_\epsilon) \geq -h(C + p(t+2x) - p(t))$.
Por lo tanto, para casi toda parte

$$2\epsilon p(t) + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big[h(-C + p(t) - p(t-2x)) - h(C + p(t+2x) - p(t))\Big]dx \leq 0.$$

y se puede concluir como en [8] que $||p||_{L^\infty} \leq C$.
Finalmente, el paso 5.

2.5. Paso 5 Paso al límite cuando $\epsilon \longrightarrow 0$

Por el Lema 3. la observación 1.9 y el caso (C) de la sección 1.11 podemos extraer una subsucesión $\epsilon_n \longrightarrow 0$ tal que

$$u_{\epsilon_n} \overset{\star}{\rightharpoonup} u \qquad \text{en } \sigma(L^\infty, L^1),$$

$$h(u_{\epsilon_n}) \overset{\star}{\rightharpoonup} v \qquad \text{en } \sigma(L^\infty, L^1),$$

$$Au_{\epsilon_n} \overset{\star}{\rightharpoonup} Au \qquad \text{en } \sigma(L^\infty, L^1).$$

Para cualquier $\xi \in L^2$, por la monotonicidad de h, se tiene

$$\langle h(u_{\epsilon_n}) - h(\xi), u_{\epsilon_n} - \xi\rangle \geq 0.$$

Así,

$$\langle -Au_{\epsilon_n} - \epsilon_n u_{\epsilon_n} - h(\xi), u_{\epsilon_n} - \xi\rangle \geq 0.$$

Pasando al límite en la anterior desigualdad nos queda

$$\langle -Au - h(\xi), u - \xi\rangle \geq 0.$$

Aquí se usa el truco de Minty: para $v \in L^2$ y $\tau > 0$, hacemos $\xi = u - \tau v$. Después dividiendo por $-\tau$ queda

$$\langle Au + h(u - \tau v), v\rangle \leq 0.$$

Si $\tau \longrightarrow 0$ y si v es arbitrario en L^2 se deduce que $Au + h(u) = 0$.

Finalmente se prueba que u es una solución no trivial.

En efecto, se tiene

$$F_\epsilon(v_\epsilon) = \frac{1}{2}\int Kv_\epsilon.v_\epsilon + \int H_\epsilon^*(v_\epsilon) \leq -1$$

y en particular

$$\frac{1}{2}\int Kv_\epsilon.v_\epsilon \leq -1.$$

Por otro lado,

$$v_{\epsilon_n} = h(u_{\epsilon_n}) + \epsilon u_{\epsilon_n} \longrightarrow v \quad \text{ y así } \quad \frac{1}{2}\int Kv.v \leq -1.$$

Por lo tanto, $v \not\equiv 0$.

Bibliografía

[1] H. Brezis y J.M. Coron., *Periodic solutions of nonlinear wave equations and Hamiltonian systems.* American Journal of Mathematics, Vol. 103, No. 3 (1981), pp. 559-570.

[2] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations.* Springer 2010.

[3] R. G., Bartle, *The elements of integration and Lebesgue measure*, John Wiley & sons, Inc, 1994.

[4] H. Brezis y L. Niremberg., *Forced vibrations for a nonlinear wave equation.* Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), pp. 1-30.

[5] H. Brezis, J. M. Coron, y L. Niremberg., *Free Vibrations for a nonlinear wave equation and a theorem of P. Rabinowitz.* Comm. Pure. Appl. Math. 33 (1980), pp. 667-689.

[6] Lovicarová, H., *Periodic solutions of a weakly nonlinear wave equation in one dimensión.* Czech Math. J. 19. 1969, pp. 324-342.

[7] Rabinowitz P., *Free vibrations for a semilinear wave equation,* Comm. Pure Appl. Math 31, 1978, pp.31-68.

[8] Bhari A, H. Brezis, *Periodic solutions of a nonlinear wave equation,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 85 (1980), pp.539-603.

[9] J. Van Tiel, *Convex Analysis: An Introductory Text, John Wiley,* New York 1984.

[10] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis,* Princeton University Press, Princeton 1970.