PROBLEMAS PROPUESTOS

Los problemas son señalados por cero, uno o dos asteriscos según su grado de dificultad. Las soluciones de los problemas deben ser enviadas a REVISTA DE MATEMATICAS ELEMENTALES, Universidad de los Andes, calle 18-A, carrera 1-E, Bogotá, Colombia, antes del 30 de junio de 1953. La solución a cada problema debe venir en hoja por separado. Los alumnos de bachillerato deben enviar, junto con las soluciones, el nombre del colegio y de su profesor de matemáticas.

Proponemos nuevamente los problemas siguientes, de los cuales no han llegado soluciones.

3. Si un número entero n es divisible por cada entero $\leqslant \sqrt{n}$, entonces n es igual a 24, o a un divisor de 24.

6. La sucesión 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... es tal que cada término es la suma de los dos precedentes. Los términos de esta sucesión se llaman números de Fibonacci. Demostrar que hay siempre por lo menos cuatro y a lo más cinco entre ellos que tienen el mismo número de cifras.

*7. Las sumas

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

($n = 2, 3, 4, \ldots$) no son jamás números enteros.

*8. Demostrar que entre n números enteros positivos siempre se pueden escoger algunos, de tal manera que su suma sea divisible por n.

10. Demostrar que en una reunión de seis miembros o bien hay tres que no se conocen mutuamente, o bien hay tres que se conocen mutuamente.

11. Teniendo en cuenta que hay moneda de 1, 2, 5, 10, 20, 50 centavos, ¿de cuántas maneras se puede cambiar un peso por monedas fraccionarias?

12. Los puntos (x, y) del plano con coordenadas x e y enteras se llaman "puntos de reja". Demostrar que no existe triángulo equilátero en el plano cuyos tres vértices son puntos de reja.

13. ¿Cuál es el número mínimo de círculos de radio ½ que cubren el círculo de radio 1, y en qué posición?

14. En un triángulo a lo más una altura es más larga que el lado correspondiente.

16. Sea un tetraedro $ABCD$: $AC = AD = BC = BD = a\sqrt{3}$, $AB = CD = 2a$, J e I denotan los medios respectivos de CD y de AB.

a) Demostrar que las aristas AB y CD son perpendiculares y que IJ es una perpendicular a las dos.

b) Calcular el segmento IJ. Demostrar que los diedros con aristas AB y CD son rectos.

c) Por el punto O de IJ definido por $IO = x$ hacemos pasar el plano perpendicular a IJ; este plano corta las aristas AC, AD, BD, BC respectivamente en M, N, P, Q. Demostrar que el cuadrilátero $MNPQ$ es un rectángulo. Calcular su área S en función de a y x.

d) Sea S' el área de un rectángulo cuyos lados son respectivamente iguales a MN y a AB, sea $y = S' - S$. Estudiar la variación de y cuando el punto O se desplaza entre I y J. Hacer la gráfica.
(Bachillerato, 1ª parte, Aix-Marseille, Francia, 1948).

*38. Demostrar que el producto de dos números consecutivos no puede ser el cubo de un número entero diferente de cero.

39. Encontrar todas las soluciones en números enteros de la ecuación

$$x + y + z = xyz.$$

40. En un salón hay un número impar de personas que bailan entre sí. Demostrar que hay una persona que bailó un número par de veces (cero es un número par!).

41. Demostrar que en el plano el lugar geométrico de los puntos, cuyas distancias a dos puntos dados A y B guardan una relación constante, es un círculo.

Ernesto Núñez.

42. Consideremos dos líneas rectas D y D' no situadas en el mismo plano.

(i) Siendo A y B dos puntos de D, A' y B' dos puntos de D', mostrar que los planos mediatrices[1] de AA' y de BB' se cortan necesariamente.

Llamemos Δ la intersección de los planos mediatrices.

(ii) Supongamos ahora que $A'B' = AB$.

a) Demostrar que todo punto de Δ es equidistante a las rectas D y D'.

b) Deducir de ahí que, si llamamos H y K los puntos de intersección de Δ y D con la perpendicular común a estas dos rectas, y H' y K' los puntos de intersección de Δ y D' con la perpendicular común a Δ y D', los puntos H y H' coinciden y se tiene que $HK = HK'$ y $A'K' = AK$.

c) Mostrar que las proyecciones ortogonales de los segmentos AK y $A'K'$ sobre un plano perpendicular a Δ son iguales. (Dibújese la proyección de la figura sobre este plano).

Deducir de ahí que Δ forma ángulos iguales con D y con D'.

(Bachillerato, 1ª parte, Clermont - Ferrand, Francia, 1948).

[1] Se llama "plano mediatriz" de un segmento el plano perpendicular a este segmento en su punto medio.